UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOLUCION COMPUTACIONAL PARA PROBLEMAS DE ACOPLAMIENTO MAXIMO Y RECUBRIMIENTO MINIMO EN UNA GRAFICA.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

HECTOR ARGUELLES TEJEDA

MEXICO, D. F. 1990

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

I N D I C E

CAPITULO III

APLICACION DE UNA TECNICA DE SOLUCION A PROBLEMAS DE ACOPLAMIENTO MAXIMO

CAPITULO IV

ALGORITMO COMPUTACIONAL PARA SOLUCIONAR EL PROBLEMA DE ACOPLAMIENTO MAXIMO

INTRODUCCION

En esta era de la Cibernética, todo trabajo se desea computarizar porque es una manera más fácil de manejarlo, ya que todo error es posible de reparar, sin necesidad de rehacer todo el trabajo, además de que nos da la posibilidad de realizar pruebas antes de dar por válido el algoritmo.

En el área de Investigación de Operaciones, la mayoría de los métodos de solución estan computarizados, lo cual facilita la forma de resolver los problemas, así como también nos da la posibilidad de hacer análisis de sensibilidad y poder afinar las técnicas de solución.

El trabajo que a continuación se presenta, da a conocer una solución computacional a los problemas de acoplamiento máximo en una gráfica, para el cual se adaptó el método de solución al problema del transporte, considerando la forma particular que éste tiene. También se dice como, a partir de la solución al problema de acoplamiento máximo, se puede obtener la solución al problema de recubrimiento mínimo.

CAPITULO I

1.1 INTRODUCCION A LA TEORIA DE GRAFICAS

Para el desarrollo del trabajo necesitamos algunos elementos de la teoría de gráficas, para lo cual se hará referencia a varias definiciones básicas para poder entender mejor esta teoría.

Una gráfica G es aquella que está formada por dos conjuntos (X,V) , a los elementos de X se les denomina vértices de la gráfica, X debe ser diferente del conjunto vacio; V es alguna colección de subconjuntos de X, de cardinalidad dos.

Toda gráfica se puede denotar como:

$G = (X,V)$, $X \neq \emptyset$

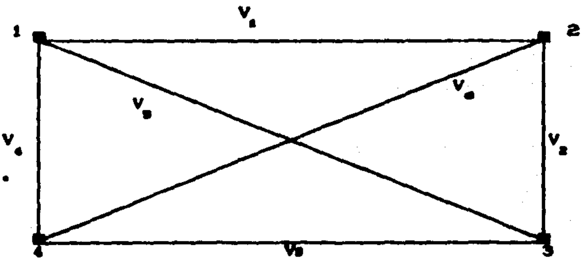
$V = \{i,j \mid i,j \in X\}$, los elementos de V se denotan:

$V_k = \{i,j\}$ y se denominan arcos.

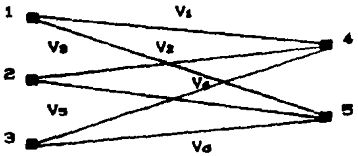
a i y j se les llama los extremos del arco.

Ejemplo 1 : Sea $G=(X,V)$ donde:

$X = \{1,2,3,4\}$, $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$



Ejemplo 2.- La siguiente gráfica es bipartita :



Una gráfica $G = (X , V)$ es completa , si para cada vértice i existe el arco $V_k = (i , j) \; \forall \; j \in X$; en otras palabras , cada uno de los vértices está relacionado con los restantes . El ejemplo 1 es una gráfica completa .

El orden de una gráfica es el número de vértices que contiene. Dada una gráfica bipartita $G = (X,V)$, con $X = Y \cup Z$, se dice que G es completa si y solo si todos los elementos de Y están relacionados con los de Z; el ejemplo 2 es una gráfica bipartita completa.

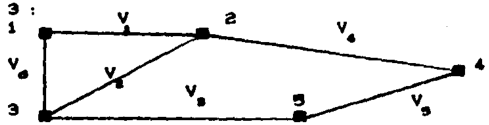
Dos arcos son adyacentes si tienen un extremo común; en el ejemplo 2 los arcos V_1 y V_3 son adyacentes.

Dada una gráfica $G = (X,V)$, se dice que $G_1 = (X,U)$ es una gráfica parcial de G, donde $U \subseteq V$; esto quiere decir que toda gráfica parcial de una gráfica es la que está compuesta por todos los vértices de ella y solo un subconjunto de arcos.

Una subgráfica de $G = (X , V)$ generada por $Y \subseteq X$, es la gráfica que está formada por un subconjunto de vértices Y de X y los arcos $V_i \in V$ que tienen sus dos extremos en Y , $V_i = (i , j)$ con $i , j \in Y$.

Una cadena entre dos vértices k y l de una gráfica, es una colección de vértices (k,1,2,3,...,l) de la gráfica, de tal manera que para cualesquiera dos vértices n y m contiguos en la colección, existe el arco $V_n = (n , m)$.

Ejemplo 3 :



Un ciclo es una cadena en la cual el vértice inicial coincide con el vértice final.

La longitud de un ciclo es el número de arcos que lo forman: del ejemplo 3, obtenemos el ciclo formado por la cadena (1,2,3,1), con longitud 3.

Se dice que una gráfica es conexa, si para cualesquiera dos vértices existe una cadena que los une, la gráfica del ejemplo 3 es conexa .

Una componente conexa de una gráfica G, es una subgráfica de G, la cual es conexa.

Por ejemplo, sea la gráfica $G=(X_s,V)$ como sigue:

Tienen dos componentes conexas.

Un arco V_d es incidente en el vértice i, si V_d tiene como extremo al vértice i, esto es $V_d = (i , j)$.

Se dice que un acoplamiento E_o, de la grafica $G = (X,U)$, es perfecto si para cualquier vértice $i \in X$, existe un arco $V_d \in E_o$ tal que i es un extremo de V_d. De la gráfica del ejemplo 1 , se tiene que un acoplamiento perfecto es:
$E_o = (V_4, V_2)$ o también $E_1 = (V_1, V_3)$.

El vertice i de una gráfica $G = (X, U)$, se dice que está saturado por un acoplamiento E_o de la gráfica G,si existe un arco en E_o que tiene como extremo el vértice i.

Se define $S(E_o)$ como el conjunto de todos los vértices saturados por el acoplamiento E_o.

Dada una gráfica $G = (X,U)$, un recubrimiento está definido como un conjunto $F_o, F_o \subseteq U$, tal que cada vértice $i \in X$ es el extremo de al menos un arco de F_o.

Un recubrimiento F_o en una gráfica conexa $G = (X,U)$ es mínimo si el número total de elementos de F_o es menor o igual que el número de elementos de cualquier recubrimiento F_n de G.

1.2 CONCEPTOS BASICOS DE PROGRAMACION ENTERA.

Problema de programación entera en forma canónica:

$$\text{MAX } Z = CX$$

$$\text{s.c.}$$

$$AX \leq b$$

$$x \geq 0, \quad X \in Z$$

Donde:

Z Es la función objetivo.

C Vector renglón de n elementos, los cuales se se denominan coeficientes de costo.

X Vector columna de n elementos, formado por las variables de decisión.

b Vector columna de m elementos, los cuales representan las disponibilidades.

A Matriz de m renglones por n columnas, se denotan los vectores columna de A por $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

El problema de programación entera en forma estándar es

$$\text{MAX } Z = CX + OY$$

$$\text{s.c.}$$

$$AX + IY = b.$$

$$Y, X \geq 0, \quad X, Y \in Z$$

Y Vector de m componentes llamadas variables de holgura.

I Matriz de identidad de m * m.

O Vector de m elementos con valor cero.

Si representamos $B = \begin{bmatrix} A & | & I \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} X \\ \cdots \\ Y \end{bmatrix}$, $C' = \begin{bmatrix} C & | & 0 \end{bmatrix}$

donde $\begin{bmatrix} A & | & I \end{bmatrix}$ es la matriz A adheriéndo la matriz I .

El problema anterior queda de la siguiente manera:

$$MAX \quad Z = C' \; X'$$

s.c.

$$B \; X' = b$$

$$X' \geq 0, \quad X' \in Z^n$$

La matriz B se puede partir en dos matrices M y N donde M está formada por m vectores de B que son linealmente independientes (M matriz de m * m) y N está formada por n-m vectores de B.

k vectores son linealmente independientes si la única combinación lineal de ellos que resulta cero es con los coeficientes iguales a cero ; si además generan un espacio, entonces forman una base.

Sea X_m el vector formado por las variables asociadas a los vectores columna que forman la matriz M y sea X_n el vector formado por las variables asociadas a los vectores columna que forman la matriz N, entonces el problema queda representado como:

$$MAX \quad Z = C^M \; X_M + C^N \; X_N$$

s.c.

$$M \; X_M + N \; X_N = b$$

$$X_M \geq 0 \; , \; X_N \geq 0$$

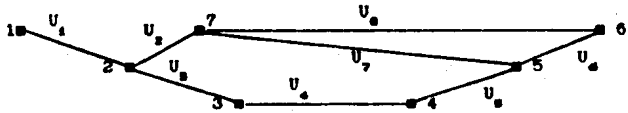
Una solución básica factible X' del problema es aquella que cumple con que BX' = b , X' $\geq$ 0 y donde los vectores columna asociados a las variables de X' forman una base en $\mathbb{R}^m$.

Toda solución básica factible del problema está formada por m variables con valor mayor que cero .

Una solución básica factible es degenerada si todas o algunas de las variables básicas tienen valor igual a cero.

La solución óptima del problema se obtiene cuando el valor de la función Z es máximo.

Sea la siguiente gráfica:



El modelo matemático asociado a la gráfica anterior para encontrar el recubrimiento mínimo es el siguiente:

$$U_i = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } U_i \text{ se considera en el recubrimiento .} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$\text{MIN} \quad V = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8$$

s.c.

$$\begin{array}{lr}
U_1 & \geq 1 \\
U_1 + U_2 + U_3 & \geq 1 \\
U_3 + U_4 & \geq 1 \\
U_4 + U_5 & \geq 1 \\
U_5 + U_6 + U_7 & \geq 1 \\
U_6 \quad + U_8 & \geq 1 \\
U_2 + \quad U_7 + U_8 & \geq 1
\end{array}$$

$$U_k \geq 0 \quad k=1,\ldots,8 \qquad U_k \in Z$$

Forma matricial:

$$\text{MIN.} \quad V = hU$$

s.c.

$$AU \geq e$$

$$U \text{ binario}$$

El modelo matemático asociado a la gráfica anterior, para encontrar el acoplamiento máximo se define:

$$U_i = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } U_i \text{, se considera en el acoplamiento .} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$$\text{MAX} \quad Z = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8$$

S. C.

$$\begin{array}{llllllllll}
U_1 & & & & & & & & \leq & 1 \\
U_1 & + U_2 & + U_3 & & & & & & \leq & 1 \\
 & & U_3 & + U_4 & & & & & \leq & 1 \\
 & & & U_4 & + U_5 & & & & \leq & 1 \\
 & & & & U_5 & + U_6 & + U_7 & & \leq & 1 \\
 & & & & & U_6 & & + U_8 & \leq & 1 \\
 & U_2 + & & & & & U_7 & + U_8 & \leq & 1
\end{array}$$

$$U_k \geq 0 \quad k=1,\dots,8 \qquad U_k \in Z$$

El problema anterior se puede representar como :

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad Z = h\,U \\ &\text{s . c} \\ &\quad AU \leq e \\ &\quad U \quad \text{binario} \end{aligned}$$

h = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) vector de unos, n elementos correspondientes al número de arcos de la gráfica (n=8).

$U = (U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8)$

e = vector columna de unos, con m elementos que corresponden a cada vértice de la gráfica.

La matriz asociada al modelo matemático es :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

si construimos su modelo dual :

$$\text{MIN} \quad w = Xe$$

$$\text{s.c.}$$

$$XA \geq h$$

$$X \quad \text{binario}$$

En el problema dual se observa que se tiene una restricción por cada arco de la gráfica, asi el vector columna h tiene tantos elementos como arcos tiene la gráfica . Las componentes del vector X, se asocian a los vértices de la gráfica o sea cada restricción está constituida por sólo dos elementos de X, ya que cada arco une dos vértices, por lo cual el problema nos indica, que se requiere encontrar el conjunto de vértices de cardinalidad minima de tal manera que cada arco de la gráfica tenga un extremo en tal conjunto, o sea, encontrar el minimo conjunto transversal.

También si se construye el dual asociado al problema del recubrimiento mínimo se obtendrá una restricción por cada arco de la gráfica y las variables de decisión estarán asociadas a los vértices de la gráfica, luego entonces lo que se quiere es obtener el conjunto de vértices de cardinalidad máxima que son no adyacentes entre si o sea encontrar el máximo conjunto estable.

Si regresamos a los problemas de acoplamiento máximo y recubrimiento mínimo tenemos lo siguiente:

<u>ACOPLAMIENTO MAXIMO</u> (P)	<u>RECUBRIMIENTO MINIMO</u> (R)
MAX $Z = hU$	MIN $W = hU$
s.a	s.a
$AU \le e$	$AU \ge e$
$U \ge 0$	$U \ge 0$
$U \in Z^m$	$U \in Z^m$

Se observa que se tienen las mismas variables de decisión y que significan lo mismo, también la misma función objetivo sólo que en un caso la deseamos maximizar y en el otro minimizar, la matriz asociada a las restricciones es la misma y sólo cambia el sentido de las desigualdades. Entonces se intuye que debe existir alguna relación en las soluciones óptimas de ambos problemas.

1.3 TEOREMAS SOBRE ACOPLAMIENTO MAXIMO Y RECUBRIMIENTO MINIMO.

LEMA 1.- Sea $U \in \mathbb{R}^m$ una solución del problema (P), entonces $Z_o = hU = |U|$, cumple que :

$$|U| \le \frac{|e|}{2} = \frac{n}{2} \quad \text{con } e \in \mathbb{R}^n$$

Se define $|U| = \Sigma u_i$, $u_i \in U$

Demostración:

Al poner el problema (P) en forma estándar se observa que cada variable de decisión aparece en dos y sólo dos ecuaciones o sea en los arcos que es extremo , por lo cual si una variable $u_i \in U$ tiene valor uno, entonces secumplen dos restricciones; por lo tanto, si se tienen r elementos de U distintos de cero quiere decir que se están satisfaciendo 2r restricciones, como se tienen n restricciones entonces 2r < n por lo cual se tiene que:

$$|U| = r \le \frac{n}{2}$$

LEMA 1.b Sea $U \in \mathbb{R}^m$ una solución del problema (R), entonces $hU = |U| \ge \frac{n}{2}$

Demostración:

Al ir dando valores mayores de cero a las variables que componen a l vector U, se están cumpliendo dos restricciones luego entonces el número minimo de variables que se pueden tener con valor mayor a cero es $\frac{n}{2}$ por lo cual: $|U| \ge n / 2$

NOTA.-Para cualquier problema del tipo (P) se puede decir que toda solución está formada por a lo más $n/2$ variables diferentes de cero, y para los problemas del tipo (R) toda solución tiene al menos $n/2$ variables diferentes de cero; donde n es el número de vértices de la gráfica. Para el tipo (P) una solucion se tiene cuando todas las variables son cero, esto es, existe una solución factible o sea tenemos 2^m soluciones.

El hipercubo que genera la región de soluciones, en los blemas (P) y (R) es cerrado y acotado, por lo cual tienen solución óptima.

LEMA 2.- Sea $U \in R^m$ tal que $AU = e$, entonces U es solución óptima de los problemas (P) y (R).

Demostración:

Sean U', $U'' \in R^m$, soluciones óptimas de los problemas (P) y (R) respectivamente, esto quiere decir que:

$$hU' \geq hU \quad y \quad hU'' \leq hU \qquad (1)$$

$$ó \quad sea \quad n/2 \leq hU'' \leq hU \leq hU' \leq n/2$$

entonces $n/2 = hU'' = hU = hU' = n/2$

por lo cual U es solución óptima.

LEMA 3.- Sea $G = (X,E)$ una gráfica conexa, y E_0 Y E_1 dos acoplamientos de la gráfica G.

Las componentes conexas de la gráfica parcial (Gp) formadas por los arcos:

$(E_0 - E_1) \cup (E_1 - E_0)$

son de alguno de los tres tipos siguientes :

1.- Vértices aislados

2.- Ciclo elemental par, donde los arcos pertenecen alternativamente a E_0 y E_1.

3.- Una cadena elemental, donde los arcos pertenecen alternativamente a E_0 y E_1 y además los extremos son vértices distintos no saturados por ambos acoplamientos .

Demostración:

Se denota $E_0 - E_1$ como el conjunto de arcos que están en E_0 y no se encuentran en E_1.

También tenemos que $s(B)$ es el conjunto de vértices que están saturados por los arcos de B.

Si $a \in X$, tenemos los siguientes casos :

CASO 1.- Si $a \notin S(E_0 - E_1)$ y $a \notin S(E_1 - E_0)$, entonces a es un vértice aislado de Gp.

CASO 2.- Si $a \in S(E_0 - E_1)$ y $a \notin S(E_1 - E_0)$, entonces a es el extremo de un arco de $E_0 - E_1$. Esto es, existe sólo un arco en E_0 que incide en el vértice a (porque E_0 es acoplamiento); por lo cual $a \notin S(E_1)$.

CASO 2'.- Si $a \notin S(E_0 - E_1)$ y $a \in S(E_1 - E_0)$, entonces a es el extremo de un arco de $E_1 - E_0$ esto es, que existe un arco en E_1 que incide en el vértice a por lo cual $a \notin S(E_0)$.

CASO 3.- Si $a \in S(E_0 - E_1)$ y $a \in S(E_1 - E_0)$, entonces existe un arco único de $E_0 - E_1$ que incide en el vértice a y un arco único de $E_1 - E_0$ que incide en el vértice a.

Las tres opciones son mutuamente excluyentes por lo cual el grado máximo de la gráfica conexa $(X, (E_0 - E_1) \cup (E_1 - E_0))$ es dos . Pero entonces se tienen tres casos posibles.

1) Si el grado máximo es cero entonces los puntos son vértices aislados.

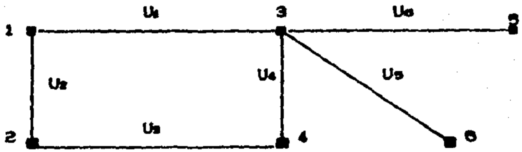
2) Si el grado máximo es uno entonces se tienen sólo arcos que no son adyacentes.

3) Si el grado máximo es dos se tienen dos opciones:

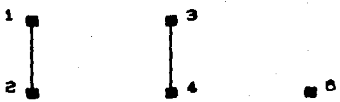
a) Que sea un ciclo y entonces éste debe ser par, porque una vez que se parte de un vértice a y se toma el arco que incide en él, este arco pertenece a un acoplamiento (E_0), luego el siguiente arco a considerar debe pertenecer a E_1 ya que no puede pertenecer a E_0, así sucesivamente hasta llegar al vértice inicial a, pero como se van considerando los arcos alternativamente de E_0 y E_1, entonces el ciclo debe ser par ya que si se sale con un arco de E_0 se debe regresar con un arco de E_1.

b) Que sea una cadena en la cual los arcos pertenecen en forma alterna a los acoplamientos E_0 y E_1 y donde los extremos están saturados sólo por un acoplamiento.

Por ejemplo : Sea la gráfica $G = (X, E)$

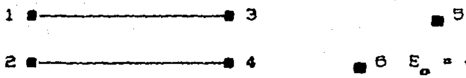


Sea un acoplamiento E_0 :



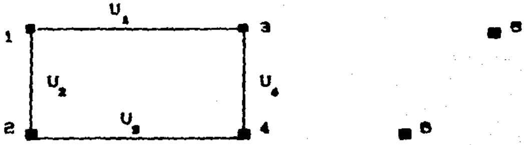
$E_0 = \left\{ U_2 , U_4 \right\}$

Sea el acoplamiento E_1 :

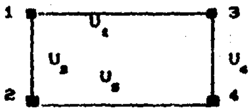


$E_o = \left\{ U_1 , U_3 \right\}$

Entonces la gráfica $G_p = (X, (E_o - E_1) \cup (E_1 - E_o))$



Las componentes conexas de G' son :

$C^1 =$  ; C^2 : ■ 5; C^3 : ■ 6

C^2 y C^3 son vértices aislados , C' es un ciclo par.

TEOREMA 1 (NORMAN, RABIN, 1959).

En una gráfica simple $G=(X, E)$ de orden n, un acoplamiento máximo E_o y un recubrimiento mínimo F_o verifican :

$$|E_o| + |F_o| = n$$

Dado un acoplamiento máximo Eo, podemos obtener un recubrimiento mínimo .

$$F_1 = E_o \cup \left\{ \text{arcos } U_Y \text{ con extremo en } Y \mid Y \in S(E_o) \right\}$$

Dado un recubrimiento mínimo F_o se obtiene un acoplamiento máximo E_1 en base a la eliminación sucesiva de arcos de F_o que son adyacentes con otro arco de F_o que no ha sido eliminado.

Demostración:

En efecto, si E_o es un acoplamiento máximo, el conjunto:

$$F_1 = E_o \cup \left\{ U_Y \mid Y \in S(E_o) \right\}$$

es un recubrimiento , además :

$$|F_1| = |E_o| + (n - 2|E_o|) = n - |E_o|$$

Por otra parte, si F_o es un recubrimiento mínimo, el conjunto E_1 obtenido a partir de F_o, al eliminar sucesivamente de dos arcos adyacentes de F_o uno de ellos no eliminado , es un acoplamiento; como en G , los arcos de F_o no forman cadenas de longitud 3 (porque entonces F_o no sería mínimo) , cada arco eliminado crea exactamente un punto no saturado en E_1 por lo que se tiene:

$$| F_0 | - | E_1 | = | X - S(E_1) | = n - 2 | E_1 |$$

Luego entonces $| F_0 | = n - | E_1 |$.

Como E_0 es acoplamiento máximo se cumple que :

$$| E_1 | \leq | E_0 |,$$

podemos escribir

$$| F_1 | = n - | E_0 | \leq n - | E_1 | = | F_0 |.$$

luego entonces $\qquad | F_1 | \leq | F_0 |$

pero F_0 es un recubrimiento mínimo , por lo cual

$$| F_1 | = | F_0 |$$

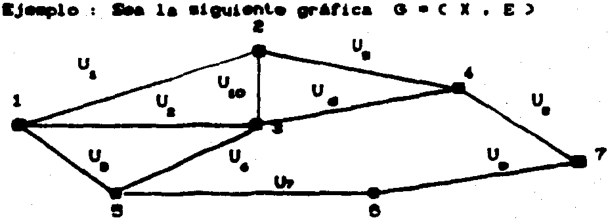
por lo tanto F_1 es un recubrimiento mínimo.

También se tiene que $| E_1 | = | E_0 |$ entonces E_1 es acoplamiento máximo y se concluye que :

$$| E_0 | + | F_0 | = n .$$

Cadena alterna es aquella cadena que está formada por arcos que pertenecen a un acoplamiento, alternados con arcos que no pertenecen al acoplamiento.

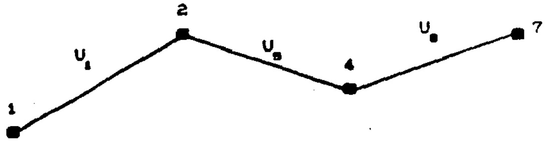
Ejemplo : Sea la siguiente gráfica $G = (X , E)$



y los siguientes acoplamientos

$$E_1 = \left\{ U_1,\ U_4,\ U_8 \right\},\quad E_2 = \left\{ U_2,\ U_5,\ U_7 \right\},$$

entonces una cadena alterna que une a los vértices 1 y 7 es:



TEOREMA 2 (Berge) .- Un acoplamiento E_0, en una gráfica $G = (X , U)$, es máximo si y sólo si, no existe una cadena alterna entre dos vértices distintos de la gráfica no saturados.

Demostración:

a) Supóngase que E_0 es un acoplamiento máximo para el cual existe una cadena alterna entre dos vértices no saturados , entonces si consideramos los arcos de la cadena alterna, que no pertenecen al acoplamiento, se encuentra un nuevo acoplamiento E_1 en el cual se tiene que :

$$| E_1 | = | E_0 | + 1 ,$$

luego entonces E_0 no es máximo , lo que es una contra - dicción , por lo cual no existe cadena alterna entre dos vértices no saturados .

b) Supóngase que E_o es un acoplamiento que satisface las condiciones del teorema o sea E_o es un acoplamiento en el cual no existen cadenas alternas que unan dos vértices no saturados, y sea E_1 un acoplamiento máximo, entonces por el resultado anterior se tiene que no contiene cadenas alternas que unan dos vértices distintos no saturados , por el Lema 3 se tiene que las componentes conexas de la gráfica parcial $(X, (E_1 - E_o) \cup (E_o - E_1))$, pueden ser de tres tipos vértices aislados, ciclos de longitud par o cadenas alternas que unen dos vértices distintos no saturados por ambos acoplamientos .

Si es un ciclo de longitud par entonces contiene el mismo número de arcos de E_o y E_1, o sea se cumple que:

$$| E_o | = | E_1 |$$

Si es una cadena alterna que une a dos vértices no saturados por ambos acoplamientos, entonces esta cadena es de longitud par, ya que si fuera de longitud impar contradice el supuesto de que algún acoplamiento contiene cadenas alternas entre dos vértices no saturados , además el número de arcos en estas cadenas que pertenecen al acoplamiento E_o debe ser igual al número de arcos que pertenecen al acoplamiento E_1, por lo cual se cumple que $| E_o | = | E_1 |$ y por lo tanto se concluye que E_o es máximo .

Como conclusión de este lema se tiene que los problemas de recubrimiento mínimo y de acoplamiento máximo están ligados en sus soluciones, ya que a partir de una solución de alguno de los dos se obtiene la solución del otro.

Se diseñará más adelante un algoritmo para encontrar el acoplamiento máximo y con base en esta solución se construye el recubrimiento mínimo basándose en la técnica y criterios ya vistos en los lemas y teoremas anteriores .

Para encontrar la solución al problema, primero construimos la gráfica asociada al tablero de ajedrez truncado , de tal manera que a cada casilla se le asigna un vértice (i) y las casillas con las cuales se puede asociar (cubrirse con una ficha de dominó) , se relacionan por medio de un arco (U_l) , asi entonces el Modelo de Programación Lineal que nos define este problema es :

$$U_l = \begin{cases} 1 & \text{si se cubren las casillas } k \text{ y } l \text{ con una ficha de dominó .} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$\text{Max} \quad Z = \sum_{l} U_l$$

s.c.

$$\sum_{j \in I} U_l \leq 1 \quad \text{para cada vértice } r \text{ de la gráfica.}$$

$$U_l \geq 0 \quad , \quad U_l \in Z^m$$

donde I_r es el conjunto de índices de los arcos que inciden en el vértice r que se esté considerando .

Ejemplo 2 (LA BATALLA DE INGLATERRA).

En 1941 las escuadrillas inglesas se componian de aviones biplazas , pero algunos pilotos no podian hacer equipo en el mismo avión por diferencia de lenguaje o costumbres .

Con estos apremios ,¿cuál es el número máximo de aviones que se podrian utilizar simultáneamente ?

En este caso, como en el anterior, para encontrar la solución al problema se procede a construir su gráfica , en la cual los vértices serán cada uno de los pilotos que se tengan y los arcos serán las posibilidades de poder hacer pareja con cada piloto restante.

El modelo de programación lineal asociado a este problema tiene la misma estructura que el del problema anterior, esto es , las variables tomarán los valores cero o uno, se tendrá una restricción por cada vértice y cada variable sólo aparecerá en dos restricciones (en las ecuaciones correspondientes a los vértices que tienen como extremo).

2.2 MODELO GENERAL DE PROGRAMACION MATEMATICA.

Sea la gráfica $G=(Y,V)$, la cual representa el problema de acoplamiento máximo, donde se tiene que $|Y|=n$ (número de vértices) y $|V|= m$ (número de arcos).

Se definen los siguientes conjuntos:

$$K = \left\{ \text{índices asociados a los arcos de la gráfica} \right\}$$

$$K_\ell = \left\{ \begin{array}{l} \text{índices asociados a los arcos que} \\ \text{inciden en el vértice } \ell \end{array} \right\}$$

$$J = \left\{ \text{índices asociados a los vértices de la gráfica} \right\}$$

$$J_k = \left\{ \begin{array}{l} \text{índices asociados a los vértices} \\ \text{extremos del arco k} \end{array} \right\}$$

El modelo de programación matemática está definido como sigue:

u_i es la variable asociada al arco i

$$\text{MAX} \quad Z = \sum_{i \in K} u_i$$

s.c.

$$\text{(P)} \qquad \sum_{k \in K_\ell} u_k \leq 1 \qquad \text{para cada } \ell \in J$$

$$u_i \geq 0 \; , \quad u_i \in Z$$

la forma matricial es :

$$\text{MAX } Z = C\,U$$

s.c.

$$A\,U \leq E$$

$$U \geq 0 \qquad U \in Z^m$$

donde:

C vector renglón de orden m y sus componentes son uno.

U vector renglón de m elementos definidos como u_A con $A \in K$

A matriz de incidencia vértices-arcos asociados a la gráfica, de orden n x m (n renglones, m columnas).

E vector columna de orden n y constituido de unos.

La matriz A está formada por los vectores columna $a_A, k\bar{m}$ y cada vector columna compuesto por dos elementos igual a uno y el resto son ceros, los elementos igual a uno corresponden a la incidencia de los vértices extremos del arco.

$$a_A = \begin{bmatrix} a_{A1} \\ a_{A2} \\ a_{A3} \\ \vdots \\ a_{An} \end{bmatrix} \qquad C = (c_1, c_2, c_3, \ \ldots, c_m) \qquad U = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m)$$

El Modelo Dual de Programación Matemática se define de la siguiente manera:

$$\text{MIN } W = \sum_{j \in J} \pi_j$$

s.c.

(D)
$$\pi_r + \pi_s \geq c_A$$

para cada $A \in K$, con r y $s \in J_A$

$$\pi_r \text{ , } \pi_s \geq 0$$

Llamemos al vector $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n)$ donde cada componente está asociada a cada vértice de la gráfica.

En este sistema se tienen m restricciones y n incógnitas.

El problema (P) en forma estándar es el siguiente :

$$\text{MAX } Z = \sum_{i \in K} u_i$$

s.c.

$$\sum_{A \in K_l} u_A + v_l = 1 \quad \text{para cada } l \in J$$

$$u_A \geq 0, \; v_l \geq 0 \; , \; u_A \in Z \; , \; v_l \in Z$$

donde las variables v_l son llamadas variables de holgura y están asociadas a cada vértice de la gráfica.

El modelo general para el problema de acoplamiento máximo en forma matricial es el siguiente:

$$\text{MAX } Z = C' U'$$

s.c.

$$A' U' = E \qquad (2.1)$$

$$U' \geq 0 \;,\; U' \in Z^{m+n}$$

donde :

$C' = [\, C \mid O \,]$ vector renglón de m+n elementos y los primeros $C'_i = 1$ con $i \in J$ y los restantes son cero.

$U' = \begin{bmatrix} U \\ \cdots \\ V \end{bmatrix}$ vector columna de m+n elementos, los cuales son todas las variables del problema.

$A' = [\, A \mid I \,]$ matriz de orden n*(m+n) y cada vector columna se define como a'_ℓ con ($1 \leq \ell \leq m+n$).

El rango de la matriz A' es n (número de vértices), toda submatriz formada por n vectores columna de A', los cuales consideran a todos los vértices de la gráfica (i.e. que en cada renglón de la submatriz aparezca al menos un elemento diferente de cero); su determinante es diferente de cero y los vectores son linealmente independientes.

Sean $a'_{\ell_1}, a'_{\ell_2}, a'_{\ell_3}, \ldots, a'_{\ell_n}$ n vectores columna de A' linealmente independientes, entonces la base B se denota por:

$B = (a'_{\ell_1}, a'_{\ell_2}, a'_{\ell_3}, \ldots, a'_{\ell_n}) = (a'_\ell)$ con $\ell \in J' \subseteq (J \cup K)$,
los restantes m vectores columna de A' se designan por:
$(a'_\phi) = (a'_{\phi_1}, a'_{\phi_2}, a'_{\phi_3}, \ldots, a'_{\phi_m})$ con $\phi \in J^* = (J \cup K) - J'$

Estos vectores forman la matriz $R = (a'_\phi)$ de orden n x m.
Las n variables de base, asociadas a las columnas a'_ℓ de la matriz B forman un vector columna de n componentes definido como:

$$U'^B = (u'_\ell) \quad \ell \in J'$$

Los coeficientes de costo asociados a estas variables básicas forman un vector renglón de n componentes

$$C'^B = (C'_\ell), \qquad \ell \in J'$$

Las variables que restan o secundarias, forman los siguientes vectores:
$U'^R = (u'_\phi) \quad \phi \in J^*$ y $C'^R = (C'_\phi) \quad \phi \in J^*$
El sistema (2.1) se puede escribir de la siguiente manera:

$$B\,U'^B + R\,U'^R = E \qquad (2.2)$$

Los valores de las variables basicas se encuentran haciendo $U'^R = 0$ y resolviendo el sistema : $B\,U'^B = E$
lo que es igual a $U'^B = B^{-1} E$

El valor de la funcion Z para esta solución basica es :

$$\bar{Z} = C'^{B} B^{-1} E$$

La relación (2.2) se multiplica, en ambos miembros, por B^{-1} y se obtiene :

$$U'^{B} + B^{-1} R U'^{R} = B^{-1} E \qquad (2.3)$$

En esta expresión quedan despejadas las variables básicas, apareciendo sólo en una de las ecuaciones, donde están expresadas paramétricamente en función de las variables secundarias.

Se define

$$B^{-1} R = Y = (y_{\phi}) \qquad (2.4)$$

Cada elemento de la matriz Y se denota por $y_{\ell\phi}$ con $\ell \in J'$, $\phi \in J^{*}$ también definimos:

$$B^{-1}E = \bar{U}'^{B} = (\bar{u}'_{\ell}) \qquad \ell \in J'$$

$\bar{u}'_{\ell}$ es el valor númerico de la variable básica u'_{ℓ}.

El sistema (2.3) se expresa como :

$$U'^{B} + \sum_{\phi \in J^{*}} u'_{\phi}\, y_{\phi} = \bar{U}'^{B}$$

o también

$$u'_{\ell} + \sum_{\phi \in J^{*}} y_{\ell\phi}\, u'_{\phi} = \bar{u}'_{\ell} \quad . \ \forall \ i \in J'$$

Este sistema o sus equivalentes anteriores se llama sistema en forma explicita.Tambien expresamos la función función objetivo de la siguiente manera :

$$\sum_{\ell \in J'} c'_\ell \, u'_\ell + \sum_{\phi \in J^*} c'_\phi \, u'_\phi = Z$$

Sustituyendo el valor de u'_ℓ obtenemos:

$$\sum_{\ell \in J'} c'_\ell \left(u'_\ell - \sum_{\phi \in J^*} y_{\ell\phi} \, u'_\phi \right) + \sum_{\phi \in J^*} c'_\phi \, u'_\phi = Z$$

$$\sum_{\ell \in J'} c'_\ell \, \bar{u}'_\ell - \sum_{\ell \in J'} c'_\ell \sum_{\phi \in J^*} y_{\ell\phi} \; u'_\phi + \sum_{\phi \in J^*} c'_\phi \, u'_\phi = Z$$

$$C'^{B} \, U'^{B} - C'^{B} \sum_{\phi \in J^*} y_\phi \, u'_\phi + \sum_{\phi \in J^*} c'_\phi \, u'_\phi = Z$$

$$\sum_{\phi \in J^*} (C'_\phi - C'^{B} y_\phi) u'_\phi = Z - C'^{B} \, \bar{u}'^{B}$$

Haciendo $\quad C'^{B} y_\phi = Z_\phi \qquad \phi \in J^*$

y $\qquad C'^{B} \, \bar{u}'^{B} = \bar{Z}$

La expresión anterior queda como:

$$\sum_{\phi \in J^*} (C'_\phi - Z_\phi) u'_\phi = Z - \bar{Z} \qquad (2.5)$$

De acuerdo a los criterios de optimización del método simplex, si $C'_\phi - Z_\phi \le 0 \;\forall\; \phi \in J^*$ entonces se está en en la solución óptima.

Si existe algún indice $\varphi_r \in J^*$ para el cual $C'_{\varphi_r} - Z_{\varphi_r} > 0$, entonces existe una mejor solución y se toma:

$C'_{\varphi_k} - Z_{\varphi_k} = \underset{\varphi_r}{Max} \left\{ (C_{\varphi_r} - Z_{\varphi_r}) > 0 \right\}$ y la variable u_{φ_k} es la que entra a la base.

El criterio de salida de una variable básica es tomar

$$\underset{\ell \in J'}{Min} \left\{ \frac{\nu_{\ell\varphi_k}}{\bar{u}_\ell} \right\} = \frac{\nu_{\ell o_k}}{\bar{u}_{\ell o}} .$$

entonces la variable que sale de la base es $u_{\ell o}$ y se expresa el problema en forma explícita respecto a la nueva base.

La aplicacion del teorema de holguras complementarias nos proporciona una técnica para poder encontrar las siguientes soluciones del problema.

El teorema de holguras complementarias nos dice que si una variable de holgura H_{n+i} ha sido agregada a la restricción i-ésima del problema primal (P) y aparece en la solución básica óptima con valor diferente de cero, entonces la variable dual D_i correspondiente a esa restricción tendrá valor igual a cero, y si una variable de holgura K_{m+j} aparece en la base óptima del problema dual con valor diferente de cero, entonces su correspondiente variable P_j en el primal es igual a cero.

2.3 CONSTRUCCION DE LA TABLA ASOCIADA AL PROBLEMA DE ACOPLAMIENTO MAXIMO.

La tabla para el problema de acoplamiento máximo en una gráfica es, por definición, una tabla cuadrada con n renglones y n columnas que corresponden al número de vértices de la gráfica asociada al problema; en cada casilla (r,s), que es la interseccion del renglón r y la columna s, se van a tener los siguientes elementos:

Coeficiente de costos c_k asociado al arco k que une los vértices r y s .

El valor de la variable u_k asociada al arco k que une los vértices r y s.

Los arcos que no aparecen en la gráfica se representan como casillas sombreadas.

Las casillas de la diagonal corresponden a las variables X_ℓ de holgura del problema en forma estándar, las cuales tienen coeficientes de costo igual a cero, además que estas variables representan a los vértices de la gráfica.

En esta tabla se van a representar las soluciones factibles que se vayan obteniendo al problema y que cumplan con ser enteras.

A cada solución factible que se obtenga en la tabla le corresponde una representación gráfica, la cual se identifica con una subgráfica parcial de la gráfica original y donde se observan los vértices que están acoplados.

Cada variable asociada a los arcos de la gráfica que tenga valor entero diferente de cero hace que se satisfagan dos ecuaciones del problema lo cual quiere decir que las variables asociadas a los vértices extremos del arco correspondiente se hacen cero.

En nuestra tabla cada variable asociada a los arcos de la gráfica aparece dos veces, por lo cual en las dos casillas aparece el valor que tiene en cada solución la variable correspondiente.

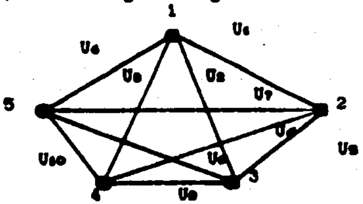
Los anteriores conceptos nos indican que:

1) El valor de las variables de la tabla son uno o cero.

2) Si una variable U_i aparece con valor uno, entonces todas las variables U_j que están en ese mismo renglón de la tabla deben tener valor cero, así como también las variables X_k correspondientes a los vértices extremos del arco asociado a la variable U_i.

Cualquier cadena que tengamos en la gráfica, tiene una representación en la tabla asociada a dicha gráfica .

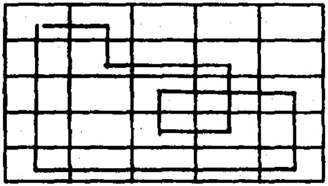
Por ejemplo , sea la siguiente gráfica:



la tabla asociada a la gráfica :

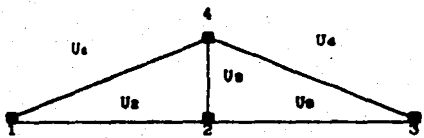
X_1	U_1	U_2	U_3	U_4
U_1	X_2	U_5	U_6	U_7
U_2	U_5	X_3	U_8	U_9
U_3	U_6	U_8	X_4	U_{10}
U_4	U_7	U_9	U_{10}	X_5

Sea la cadena (U_1 , U_6 , U_8 , U_9 , U_4), su representación en la tabla es la siguiente :



parte del vértice 1 y termina en el mismo , así esta cadena es cerrada , es un ciclo elemental .

Ejemplo 2 .- Sea la siguiente gráfica G = (X,V) asociada al problema de acoplamiento máximo .



Entonces el modelo de programacion matemática en forma estándar asociado al problema de acoplamiento máximo para esta gráfica es:

$$\text{Max } Z = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + c_4u_4 + c_5u_5$$

s.c.

$$\begin{array}{lllllllll}
u_1 + & u_2 + & & & & + X_1 & & & = 1 \\
& u_2 + & u_3 + & & u_5 + & & + X_2 & & = 1 \\
u_1 + & & + u_3 + & u_4 & & & & + X_3 & = 1 \\
& & & u_4 + & u_5 + & & & + X_4 & = 1
\end{array}$$

$$u_k \geq 0 \qquad u_k \in Z \qquad X_j \geq 0 \qquad k=\overline{1,5}\,, \quad j=\overline{1,4}$$

La tabla asociada a este problema es :

X_1 $\boxed{0}$	u_2 $\boxed{c_2}$	u_1 $\boxed{c_1}$	
u_2 $\boxed{c_2}$	X_2 $\boxed{0}$	u_3 $\boxed{c_3}$	u_5 $\boxed{c_5}$
u_1 $\boxed{c_1}$	u_3 $\boxed{c_3}$	X_3 $\boxed{0}$	u_4 $\boxed{c_4}$
	u_5 $\boxed{c_5}$	u_4 $\boxed{c_4}$	X_4 $\boxed{0}$

Una primera solución al problema está formada por los vértices de la gráfica, esto es, dando el valor uno a todas las variables X_j y cero a todas las variables u_k y la tabla asociada a esta solución es la siguiente:

1 $\boxed{0}$			
	1 $\boxed{0}$		
		1 $\boxed{0}$	
			1 $\boxed{0}$

La subgráfica parcial asociada a esta solución es:

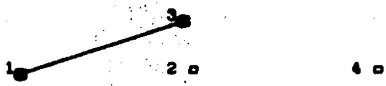
3 ▫

1 ▫ 2 ▫ 4 ▫

Otra solución al problema sería la constituida por las variables $u_4 = 1$, $X_2 = 1$ y $X_4 = 1$ y su tabla asociada :

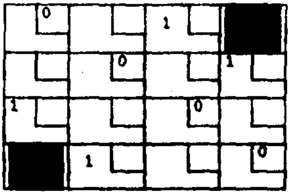
$\boxed{0}$		1	
	1 $\boxed{0}$		
		$\boxed{0}$	
			1 $\boxed{0}$

La interpretacion a esta solución, es que los vértices uno y tres están acoplados pero no así los vértices dos y cuatro. La subgráfica parcial para esta solución es:

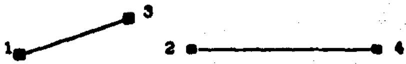


Se observa en la tabla que la variable X_6 aparece en la solución básica pero con valor cero.

Otra solución es:



Esta indica que las variables $u_2 = 1 = u_5$, o sea que los vértices uno y tres están acoplados así como también los vértices dos y cuatro, la representación gráfica de esta solución es :



Esta solución es la óptima , ya que todos los vértices están acoplados y el valor de la función objetivo es igual a dos, todas las restricciones se cumplen con estricta igualdad. Este es un acoplamiento perfecto.

2.4 IDENTIFICACION DE UNA CADENA ALTERNA EN LA TABLA.

1) Tomar el vértice i no acoplado y verificar si se puede llegar a un vértice k acoplado y que sea adyacente, esto es posible hacer en la tabla asociada al acoplamiento que se esté considerando, ya que tomamos el elemento de la diagonal que tenga valor uno y después se toma la casilla correspondiente al arco que une al vértice i con k; luego como k está acoplado, se posiciona en el vértice l con el cual k está acoplado, esto es posible ya que sobre el renglón donde se encuentra el vértice k se llega a la casilla que tiene valor uno y el elemento de la columna indica el vértice correspondiente con el cual esta acoplado el vértice k. Si esto no es posible entonces no existe cadena alterna que una a los vértices i y j.

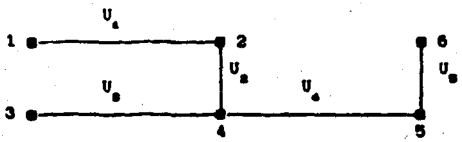
2) Una vez que se está en el vértice l verificar si se puede pasar al vértice j directamente; si esto es posible entonces se tiene la cadena alterna entre i y j no acoplados .

3) Si no se puede llegar directamente al vértice j investigar si es posible llegar a un vértice acoplado, entonces posicionarse en él y llegar al vértice con el cual está acoplado y después repetir el paso anterior.
Este procedimiento forma parte del algoritmo general que en el capitulo 4 se expresa y es un criterio para saber si ya

se está en la solución óptima del problema.

A continuación se presenta un ejercicio para ejemplificar lo antes expuesto.

EJEMPLO : Sea la siguiente gráfica asociada a un problema de acoplamiento máximo



La tabla asociada es :

X_1	U_1				
U_1	X_2		U_2		
		X_3	U_3		
	U_2	U_3	X_4	U_4	
			U_4	X_5	U_5
				U_5	X_6

Supóngase que se tiene el acoplamiento E_0, el cual está formado por los arcos U_2 y U_5, donde la tabla asociada a esta solución es la siguiente :

1					
			1		
		1			
	1				
					1
				1	

Se observa que los vértices 1 y 3 no están acoplados, entonces partiendo del vértice 1 se tiene que la casilla correspondiente al arco U_4 no tiene valor, y es el que une al vértice 1 con el 2, el cual está acoplado con el vértice 4 , ya que la casilla correspondiente a la variable U_8 tiene valor uno; una vez que se llega al vértice 4 se verifica si existe un arco que lo una con el vértice 3 y se tiene que la casilla que se encuentra en la intersección de la columna 4 con el renglón 3 de la tabla, corresponde a la variable U_9, está en blanco, luego entonces se obtuvo una cadena alterna que une a los vértices 1 y 3 por medio de los arcos U_4,U_8 y U_9 .

A partir de esta cadena alterna construimos un nuevo acoplamiento E_4, el cual esta formado por los arcos U_4 y U_9 de la cadena alterna y el arco U_5, el cual ya se tenia en el anterior acoplamiento.

La tabla asociada a este nuevo acoplamiento es:

	1				
1					
			1		
		1			
					1
				1	

También se tiene que este nuevo acoplamiento E_4 es el óptimo ya que todos los vértices están acoplados.

CAPITULO III

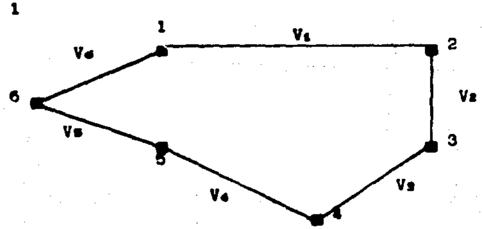
APLICACION DE UNA TECNICA DE SOLUCION A PROBLEMAS DE ACOPLAMIENTO MAXIMO

3.1 TECNICA DE SOLUCION PARA PROBLEMAS DE ACOPLAMIENTO MAXIMO.

Se aplicará una técnica para encontrar la solución al problema de acoplamiento máximo en una gráfica, la cual está basada en la misma idea que se utiliza para solucionar el problema de transporte.

En forma general diremos que esta técnica se basa en la utilización de los elementos llamados multiplicadores y surgen de la aplicación del teorema de holguras complementarias, al aplicarse a problemas que tienen una estructura muy específica, como sucede en este caso. En cada tabla asociada a nuestro problema, se van a representar cada una de las soluciones y tambien la técnica que se aplica para obtener una nueva solución al problema basándose en la construcción del ciclo que se forma al considerar las variables que entran y salen de la base .

Ejemplo 1



El modelo de programación matemática asociado al problema es

$$\text{MAX } Z = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 \;.$$

s.c.

$$
\text{(P)}\qquad
\begin{array}{llllllll}
U_1 & & & & & + U_6 & \leq & 1 \\
U_1 & + U_2 & & & & & \leq & 1 \\
 & U_2 & + U_3 & & & & \leq & 1 \\
 & & U_3 & + U_4 & & & \leq & 1 \\
 & & & U_4 & + U_5 & & \leq & 1 \\
 & & & & U_5 & + U_6 & \leq & 1
\end{array}
$$

$$U_i = 0\;,\;1 \qquad i = \overline{1\;,\;6}$$

El modelo dual asociado a este problema es :

$$\text{Min } \; V = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 + \Pi_5 + \Pi_6$$

s.a.

$$
\text{(D)}\qquad
\begin{array}{llllllll}
\Pi_1 & + \Pi_2 & & & & & \geq & 1 \\
 & \Pi_2 & + \Pi_3 & & & & \geq & 1 \\
 & & \Pi_3 & + \Pi_4 & & & \geq & 1 \\
 & & & \Pi_4 & + \Pi_5 & & \geq & 1 \\
 & & & & \Pi_5 & + \Pi_6 & \geq & 1 \\
\Pi_1 & + & & & & + \Pi_6 & \geq & 1
\end{array}
$$

$$\Pi_j \geq 0 \qquad j = \overline{1\;,\;6}$$

La tabla asociada al problema es :

X_1	U_1				U_6
U_1	X_2	U_2			
	U_2	X_3	U_3		
		U_3	X_4	U_4	
			U_4	X_5	U_5
U_6				U_5	X_6

donde las X_k son las variables de holgura en el modelo (P) al considerarse en su forma canónica.

Sean $\bar{U} = (\bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3, \bar{U}_4, \bar{U}_5, \bar{U}_6)$ y $\bar{\Pi} = (\bar{\Pi}_1, \bar{\Pi}_2, \bar{\Pi}_3, \bar{\Pi}_4, \bar{\Pi}_5, \bar{\Pi}_6)$ soluciones de ambos problemas (P) Y (D), respectivamente .

De acuerdo al teorema de holguras complementarias se tiene que $\bar{U}$ y $\bar{\Pi}$ son soluciones óptimas si se cumple :

1) $\sum_{\ell \in J_\kappa} \bar{U}_\ell = 1$ para cada $\kappa \in J$

$\bar{U}_\ell \geq 0$

2) $C_\ell - \bar{\Pi}_s - \bar{\Pi}_r \leq 0$ para cada $\ell \in K$ y donde s y r son los indices de los vértices extremos del arco ℓ

3) $\bar{U}_\ell \; (C_\ell - \bar{\Pi}_s - \bar{\Pi}_r) = 0$

Del inciso 3 se tiene que $\bar{U}_\ell = 0$ ó $C_\ell = \bar{\Pi}_s + \bar{\Pi}_r$.

Si $\bar{U}_\ell \neq 0$ entonces $C_\ell = \bar{\Pi}_s + \bar{\Pi}_r$ quiere decir que la variable U_ℓ está en la base y las ecuaciones r y s se cumplen con estricta igualdad o también se dice que las variables de holgura asociadas a las respectivas ecuaciones r y s tienen valor cero.

De la ecuación : $C_\ell = \Pi_s + \Pi_r$ se tiene que $C_\ell = 1$, entonces $\Pi_s + \Pi_r = 1$, la cual tiene una infinidad de soluciones , por lo cual les daremos el mismo valor a las variables, esto es : $\Pi_s = \Pi_r = {}^{1}/_{2}$.

Se considera que para las variables basicas U_ℓ sus correspondientes Π_s y Π_r toman el valor de ${}^{1}/_{2}$ y los restantes Π_t se les asigna el valor cero y con estos valores de los elementos del vector Π, se calculan los coeficientes de costos reducidos para todas las variables del problema (P) de la forma siguiente :

$$\bar{C}_m = C_m - (\Pi_o + \Pi_h)$$

para toda $m \in K$ y con o y $h \in J_m$

La tabla que nos indica la primera solución del problema, la cual es trivial, formada por las variables de holgura que tienen valor uno y valor cerode la función objetivo.

1					
	1				
		1			
			1		
				1	
					1

Se construye la siguiente tabla en la cual se obtienen los coeficientes de costos reducidos para todas las variables con base en los multiplicadores o valores de las variables duales Π_i de la siguiente forma:

Como las variables X_k son las de holgura entonces

$C_k - \Pi_k = \bar{C}_k$ debe ser igual a cero, ya que es una condición del método simplex, por lo que:

$$C_k - \Pi_k = 0 \quad \rightarrow \quad C_k = \Pi_k \,, \qquad \text{como } C_k = 0, \text{ entonces}$$

$$\Pi_k = 0 \quad \forall \; k \in J$$

Para las variables no basicas U_ℓ sus coeficientes de costos reducidos se calculan de la siguiente forma :

$\bar{C}_\ell = C_\ell - (\Pi_s + \Pi_r)$ donde $\ell \in K$, s y r índices de los vértices extremos del arco U_ℓ . Como un ejemplo de ejercicio calculamos el coeficiente de costos de la variable U_d:

$$\bar{C}_d = C_d - (\Pi_1 + \Pi_d) = 1 - (0 + 0) = 1$$

Así el cálculo de los coeficientes de costos de todas las variables se encuentra en la siguiente tabla:

							Π
	0 $\boxed{0}$	$\boxed{1}$				$\boxed{1}$	0
	$\boxed{1}$	0 $\boxed{0}$	$\boxed{1}$				0
		$\boxed{1}$	0 $\boxed{0}$	$\boxed{1}$			0
			$\boxed{1}$	0 $\boxed{0}$	$\boxed{1}$		0
				$\boxed{1}$	0 $\boxed{0}$	$\boxed{1}$	0
	$\boxed{1}$				$\boxed{1}$	0 $\boxed{0}$	0
Π	0	0	0	0	0	0	

Si los elementos de esta tabla fueran todos menores o iguales a cero, entonces se tendria la solución máxima. En este caso, como se tienen elementos positivosentonces tomamos el primero que encontramos en el primer renglón que equivale a considerar en la nueva solución a la variable U_4, así entonces construimos, dentro de nuestra tabla asociada a la anterior solución, un ciclo que nos va ha indicar que variable sale de la base y con que valor entra la nueva variable ;así entonces, obtenemos la siguiente tabla:

$1-\varepsilon$	ε				
ε	$1-\varepsilon$				
		1			
			1		
				1	
					1

$\varepsilon = 1$

La tabla asociada a la nueva solución básica es:

	1				
1					
		1			
			1		
				1	
					1

El valor de la función objetivo es uno.

	1				
1					
		$1-\varepsilon$	ε		
		ε	$1-\varepsilon$		
				1	
					1

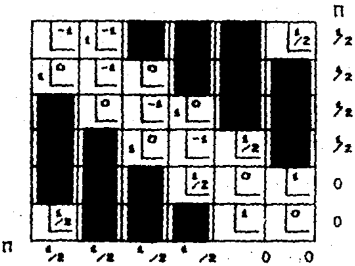
$\varepsilon = 1$

La siguiente solución se obtiene al substituir el valor de de épsilon, así se obtiene la siguiente tabla de solución:

	1				
1					
			1		
		1			
				1	
					1

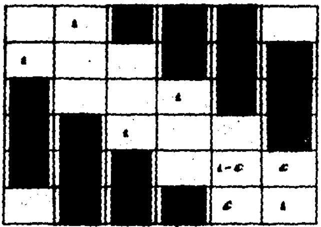
El valor de la función para esta solución es $Z = 2$.

Calculamos la tabla de coeficientes de costos reducidos:



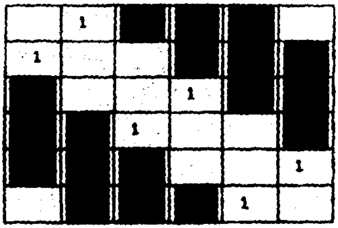
La variable que entra a la base es U_5 .

La tabla asociada para obtener la variable que sale es:



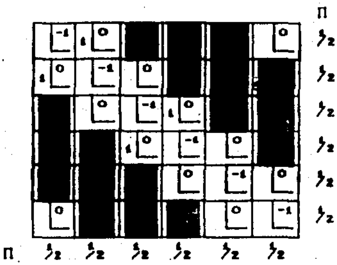
$\varepsilon = 1$

La tabla asociada a la siguiente solución es :



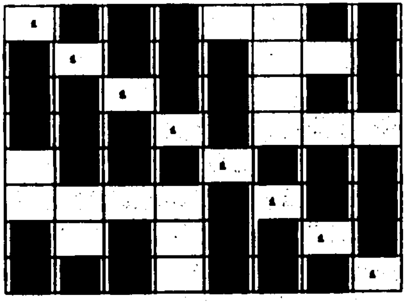
y el valor de la función objetivo es $Z = 3$.

La tabla de coeficientes de costos reducidos es la siguiente :

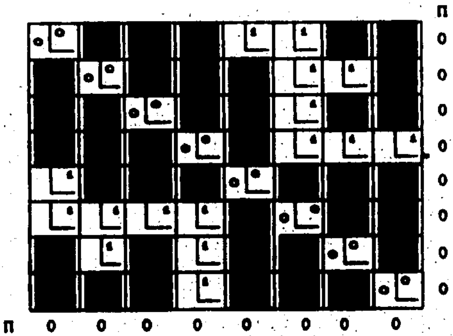


Se observa que todos los coeficientes de costos reducidos son menores o iguales a cero, esto quiere decir que se obtuvo la solución al problema, la cual está formada por las variables : $U_1 = U_2 = U_5 = 1$ y el valor de la función objetivo es $Z = 3$.

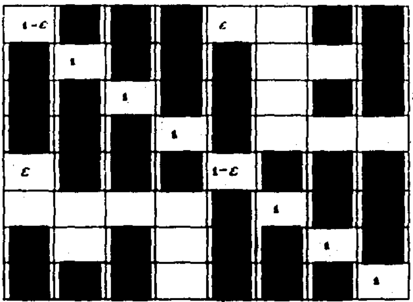
Primera solución factible, con valor de la función objetivo $Z = 0$:



Coeficientes de costos reducido para la primera solución factible .

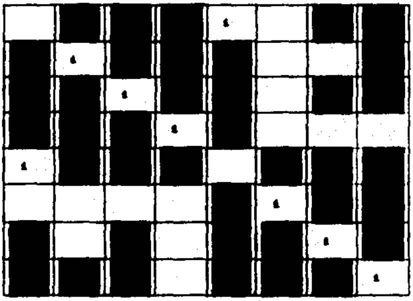


La variable que entra a la base es V_6 y la tabla que representa el ciclo de épsilon para encontrar la variable que sale:

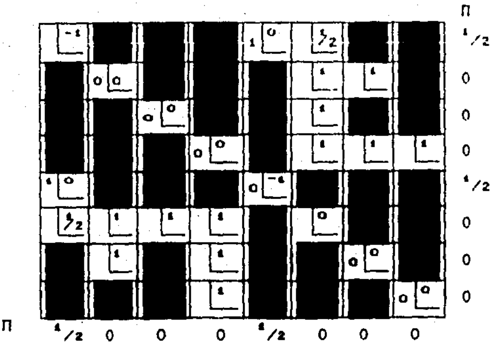


$\varepsilon = 1$

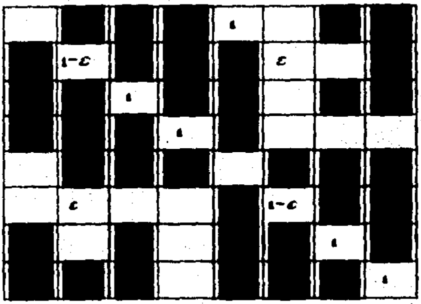
Segunda solución básica factible con valor Z= 1:



Coeficientes de costos reducidos para la segunda solución factible :

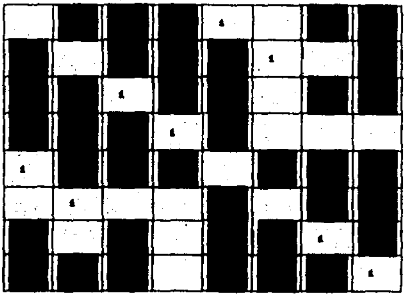


La variable que entra es V_2 y la tabla que nos indica la variable que sale es la siguiente:

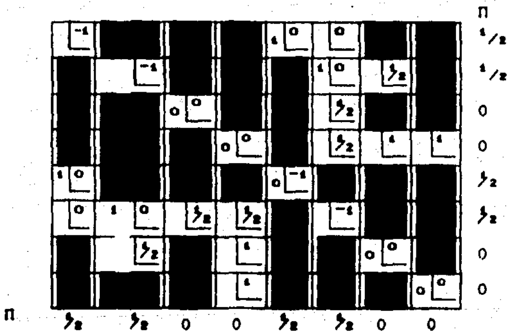


$\varepsilon = 1$

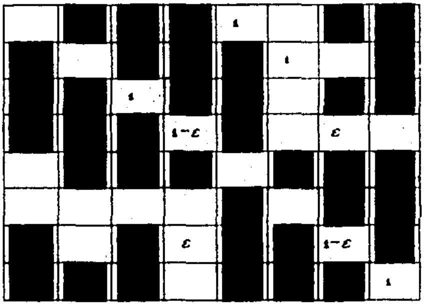
Tercera solución básica factible con valor de Z= 2:



Coeficientes de costos reducidos para esta solución:

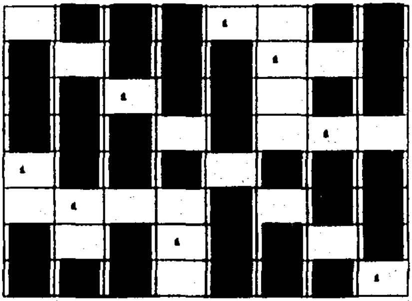


La variable que entra es V_8 y se construye la tabla en la cual se determina la variable que sale:



$\varepsilon = 1$

Cuarta solución básica factible con valor Z= 3 :



La tabla que contiene los coeficientes de costos reducidos asociados a está solución básica factible es la siguiente:

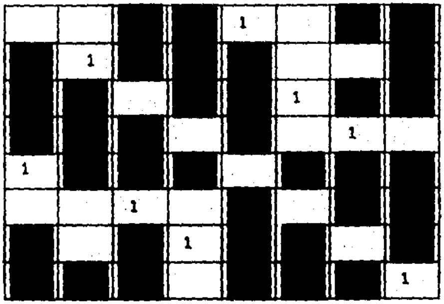
								π
	$\boxed{-1}$				1 $\boxed{0}$	$\boxed{0}$			$1/2$
		$\boxed{-1}$				1 $\boxed{0}$	$\boxed{0}$		$1/2$
			0 $\boxed{0}$			$\boxed{1/2}$			0
				$\boxed{-1}$		$\boxed{0}$	1 $\boxed{0}$	$\boxed{1/2}$	$1/2$
	1 $\boxed{0}$				$\boxed{-1}$				$1/2$
	$\boxed{0}$	1 $\boxed{0}$	$\boxed{1/2}$	$\boxed{0}$		$\boxed{-1}$			$1/2$
		$\boxed{0}$		1 $\boxed{0}$			$\boxed{-1}$		$1/2$
				$\boxed{1/2}$				0 $\boxed{0}$	0
π	$1/2$	$1/2$	0	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0	

Como existen coeficientes de costos mayores a cero entonces consideramos a la variable V_{n} para entrar a la base y se construye la tabla que contiene al ciclo de la épsilon para saber que variable sale:

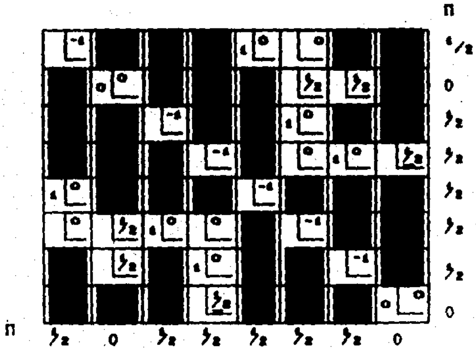
				1			
	ε				$1-\varepsilon$		
		$1-\varepsilon$			ε		
						1	
1							
	$1-\varepsilon$	ε					
			1				
							1

$\varepsilon = 1$

Quinta solución factible con valor de la función Z = 3



Coeficientes de costos reducidos para la quinta solución factible:



La variable que entra es V_7 ya que la variable V_2 aunque tiene la posibilidad de entrar, como ya antes había estado en la base entonces la desechamos.

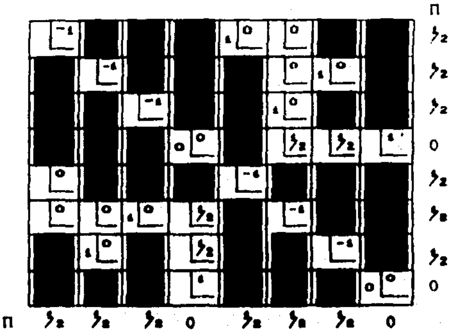
La tabla con el ciclo de las épsilon y la variable que sale es la siguiente:

				1			
	$1-\varepsilon$					ε	
					1		
			ε			$1-\varepsilon$	
1							
		1					
	ε		$1-\varepsilon$				
							1

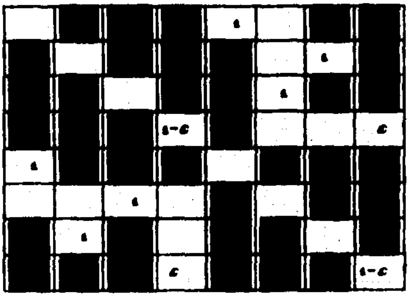
Sexta solución factible con valor de la función objetivo Z=3:

				1			
						1	
					1		
			1				
1							
		1					
	1						
							1

Coeficientes de costos reducidos para la sexta solución básica factible:

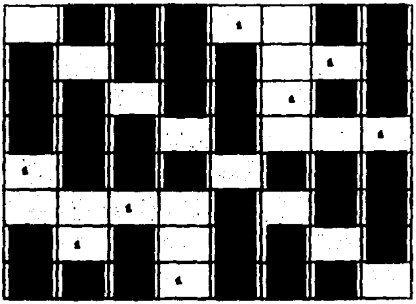


La variable que entra es V_p, entonces se construye la tabla para saber que variable sale:

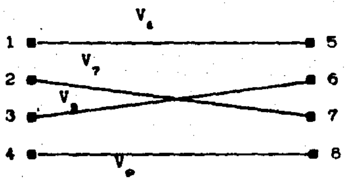


ε min = 1

Septima solución factible con valor de la función objetivo $Z = 4$:

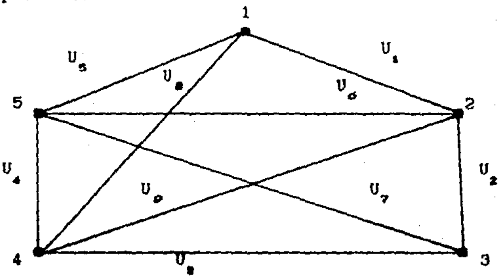


Se observa en esta solución que en la diagonal no aparecen valores, esto quiere decir que ya todos los vértices estan acoplados, por lo cual ya se llegó a la solución óptima del problema. De la tabla anterior se tiene que las variables V_1, V_3, V_7 y V_9 tienen valor de uno, por consiguiente la representación gráfica de esta solución es la siguiente :



Este es lo que se le llama un acoplamiento perfecto.

Ejemplo 3.- Sea la siguiente gráfica asociada a un problema de acoplamiento máximo :



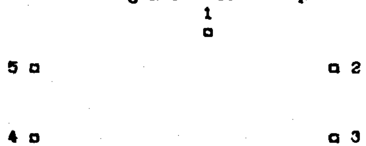
La tabla asociada a la gráfica, para poder aplicar el método es la siguiente :

X_1	U_1	■	U_8	U_5
U_1	X_2	U_2	U_9	U_6
■	U_2	X_3	U_3	U_7
U_8	U_9	U_3	X_4	U_4
U_5	U_6	U_7	U_4	X_5

La primera solución de la que se parte es la trivial, esto es, que las variables asociadas a los vértices de la gráfica tengan valor uno y las restantes variables, las asociadas a los arcos tengan valor cero, así entonces la tabla para la primera solución es:

1				
	1			
		1		
			1	
				1

La representación gráfica de esta primera solución es :



La tabla con los coeficientes de costos reducidos es :

						π
	$0\ \boxed{0}$	$\boxed{\varepsilon}$		$\boxed{\varepsilon}$	$\boxed{\varepsilon}$	0
	$\boxed{\varepsilon}$	$0\ \boxed{0}$	$\boxed{\varepsilon}$	$\boxed{\varepsilon}$	$\boxed{\varepsilon}$	0
		$\boxed{\varepsilon}$	$0\ \boxed{0}$	$\boxed{\varepsilon}$	$\boxed{\varepsilon}$	0
	$\boxed{\varepsilon}$	$\boxed{\varepsilon}$	$\boxed{\varepsilon}$	$0\ \boxed{0}$	$\boxed{\varepsilon}$	0
	$\boxed{\varepsilon}$	$\boxed{\varepsilon}$	$\boxed{\varepsilon}$	$\boxed{\varepsilon}$	$0\ \boxed{0}$	0
π	0	0	0	0	0	

Cualquier variable es candidata para entrar a la base, pero adoptaremos el criterio de tomar la primera que encontremos con coeficiente de costos reducidos igual a uno, en este caso es la variable U_ε y se construye el ciclo formado por la épsilon para saber que variable sale de la base.

1−ε	ε			
ε	1−ε			
		1		
			1	
				1

$\varepsilon = 1$

Esta segunda solución tiene asociada la siguiente tabla :

	1			
1				
		1		
			1	
				1

Se obtiene la tabla para los coeficientes de costos reducidos:

					Π
$\boxed{-1}$	1 $\boxed{0}$		$\boxed{1/2}$	$\boxed{1/2}$	$1/2$
1 $\boxed{0}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{1/2}$	$\boxed{1/2}$	$\boxed{1/2}$	$1/2$
	$\boxed{1/2}$	0 $\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	0
$\boxed{1/2}$	$\boxed{1/2}$	$\boxed{1}$	0 $\boxed{0}$	$\boxed{1}$	0
$\boxed{1/2}$	$\boxed{1/2}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	0 $\boxed{0}$	0
Π $1/2$	$1/2$	0	0	0	

La variable que se considera para entrar es U_{a} y se verifica con la siguiente tabla que variable sale:

	1			
1				
		$1-\varepsilon$	ε	
		ε	$1-\varepsilon$	
				1

$\varepsilon = 1$

La siguiente solución básica fáctible con valor de la función $Z = 2$ es :

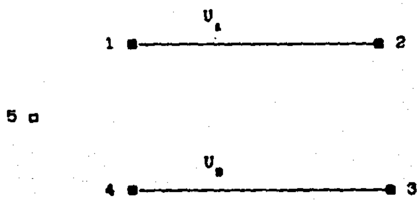
	1			
1				
			1	
		1		
				1

La tabla de coeficientes de costos reducidos es:

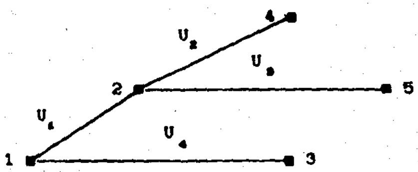
					Π
$\boxed{-\varepsilon}$	$1\ \boxed{0}$		$\boxed{0}$	$\boxed{\varepsilon/2}$	$\varepsilon/2$
$1\ \boxed{0}$	$\boxed{-\varepsilon}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{\varepsilon/2}$	$\varepsilon/2$
	$\boxed{0}$	$\boxed{-\varepsilon}$	$1\ \boxed{0}$	$\boxed{\varepsilon/2}$	$\varepsilon/2$
$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$1\ \boxed{0}$	$\boxed{-\varepsilon}$	$\boxed{\varepsilon/2}$	$\varepsilon/2$
$\boxed{\varepsilon/2}$	$\boxed{\varepsilon/2}$	$\boxed{\varepsilon/2}$	$\boxed{\varepsilon/2}$	$0\ \boxed{0}$	0
Π $\varepsilon/2$	$\varepsilon/2$	$\varepsilon/2$	$\varepsilon/2$	0	

Se observa que existen coeficientes de costos reducidos mayores que cero, esto nos indica que todavia no se llega a la solución óptima, pero también se tiene que en la tabla asociada a la última solución, los elementos de la diagonal, que son las variables asignadas a los vertices de la gráfica, sólo una de ellas aparece en la base y con valor uno, entonces solo queda por acoplar un vértice, por consecuencia ya se obtuvo la solución óptima la cual está formada por las variables U_1 y U_3, con valor uno y valor de la función objetivo $Z = 2$.

La representacion gráfica de está solución óptima es:



Ejemplo 4.-Supóngase que la siguiente gráfica representa un problema de acoplamiento máximo:



Y su correspondiente tabla asociada:

X_1	U_1	U_4		
U_1	X_2		U_2	U_3
U_4		X_3		
	U_2		X_4	
	U_3			X_5

Primera solución básica factible:

1				
	1			
		1		
			1	
				1

Tabla de coeficientes de costos reducidos para esta solución:

						π
	0 $\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$			0
	$\boxed{1}$	0 $\boxed{0}$		$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	0
	$\boxed{1}$		0 $\boxed{0}$			0
		$\boxed{1}$		0 $\boxed{0}$		0
		$\boxed{1}$			0 $\boxed{0}$	0
π	0	0	0	0	0	

Tabla para obtener la segunda solución:

$1-\varepsilon$	ε			
ε	$1-\varepsilon$			
		1		
			1	
				1

$\varepsilon = 1$

Segunda solución básica factible con valor Z = 1 :

	1			
1				
		1		
			1	
				1

Tabla de coeficientes de costos reducidos asociada a esta solución :

					π
$\boxed{-1}$	1 $\boxed{0}$	$\boxed{1/2}$			$1/2$
1 $\boxed{0}$	$\boxed{-1}$		$\boxed{1/2}$	$\boxed{1/2}$	$1/2$
$\boxed{1/2}$		0 $\boxed{0}$			0
	$\boxed{1/2}$		0 $\boxed{0}$		0
	$\boxed{1/2}$			0 $\boxed{0}$	0
$1/2$	$1/2$	0	0	0	π

La variable que entra a la base es U_4 y con la siguiente tabla se obtiene la variable que sale de la base :

	$1-\varepsilon$	ε		
$1-\varepsilon$	ε			
ε		$1-\varepsilon$		
			1	
				1

$\varepsilon = 1$

Sale de la base la variable U_1 y obtenemos la siguiente solución básica factible:

		1		
	1			
1				
			1	
				1

Tabla de coeficientes de costos reducidos para esta solución:

						π
	$\boxed{-1}$	$\boxed{1/2}$	$1\ \boxed{0}$			$1/2$
	$\boxed{1/2}$	$\boxed{0}$		$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	0
	$1\ \boxed{0}$		$\boxed{-1}$			$1/2$
		$\boxed{1}$		$0\ \boxed{0}$		0
		$\boxed{1}$			$0\ \boxed{0}$	0
π	$1/2$	0	$1/2$	0	0	

La variable que entra es U_2 y mediante la siguiente tabla sabremos que variable sale:

		1		
	$1-\varepsilon$		ε	
1				
	ε		$1-\varepsilon$	
				1

$\varepsilon = 1$

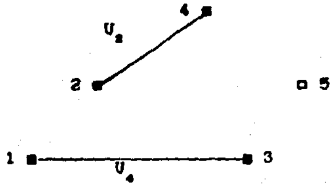
Tabla asociada a la siguiente solución básica factible:

		1		
			1	
1				
	1			
				1

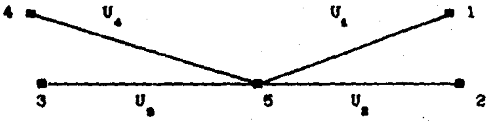
La tabla de coeficientes de costos reducidos es:

					π
	$\boxed{-1}$	$\boxed{0}$	1 $\boxed{0}$			$1/2$
	$\boxed{0}$	$\boxed{-1}$		1 $\boxed{0}$	$\boxed{1/2}$	$1/2$
	1 $\boxed{0}$		$\boxed{-1}$			$1/2$
		1 $\boxed{0}$		$\boxed{-1}$		$1/2$
		$\boxed{1/2}$			0 $\boxed{0}$	0
π	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0	

En esta tabla se tiene que existe un coeficiente de costos reducidos que es mayor que cero, pero sólo existe un vértice que no ha sido acoplado, por lo cual ya se está en la solución óptima, la cual está dada por las variables $U_4 = U_2 = 1$, con valor de la función objetivo Z= 2 y la siguiente representación grafica:



Ejemplo 5.- Supóngase la siguiente gráfica asociada a un problema de acoplamiento máximo:



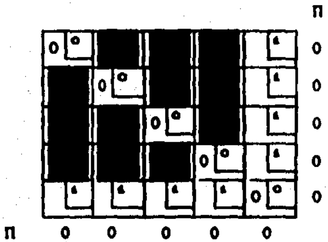
La tabla asociada a la gráfica es :

X_1				U_1
	X_2			U_2
		X_3		U_3
			X_4	U_4
U_1	U_2	U_3	U_4	X_5

La tabla asociada a la primera solución es :

1				
	1			
		1		
			1	
				1

La tabla de coeficientes de costos reducidos es :



La variable que entra a la base es $U_{ε}$ y para encontrar la nueva solución se construye la siguiente tabla :

$1-ε$				$ε$
	1			
		1		
			1	
$ε$				$1-ε$

$ε = 1$

La tabla que muestra la segunda solución es:

				1
	1			
		1		
			1	
1				

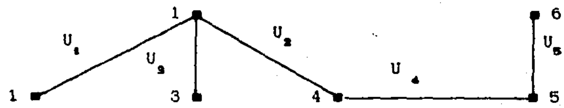
Y la tabla de los coeficientes de costos reducidos es :

						π
	$\boxed{-1}$				$\boxed{0}$	$1/2$
		$0\ \boxed{0}$			$\boxed{1/2}$	0
			$0\ \boxed{0}$		$\boxed{1/2}$	0
				$0\ \boxed{0}$	$\boxed{1/2}$	0
	$\boxed{0}$	$\boxed{1/2}$	$\boxed{1/2}$	$\boxed{1/2}$	$\boxed{-1}$	$1/2$
π	$1/2$	0	0	0	$1/2$	

En esta tabla se tienen coeficientes de costos reducidos mayores a cero, todos son iguales a 1/2 y además se encuentran sobre la misma columna donde se encuentra la variable U_s: si introducimos cualesquiera de estas variables, tendrá que salir la variable U_4 y esto no mejora el valor de la función objetivo, entonces esta solución es la óptima.

Como observación a este ejemplo la gráfica es bipartita formada por dos conjuntos de vértices y en uno de ellos sólo se encuentra el vértice 5, entonces todo acoplamiento máximo sólo consta de un arco.

Ejemplo 6.- Sea la siguiente gráfica asociada a un problema de acoplamiento maximo :



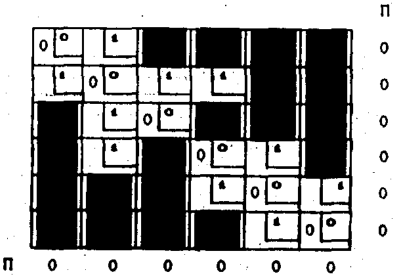
La tabla correspondiente a esta gráfica es :

X_1	U_1				
U_1	X_2	U_3	U_2		
	U_3	X_3			
	U_2		X_4	U_4	
			U_4	X_5	U_5
				U_5	X_6

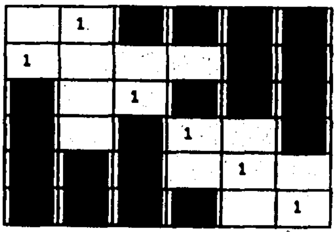
Tabla asociada a la primera solución :

1					
	1				
		1			
			1		
				1	
					1

Los coeficientes de costos reducidos son :



Entra la variable U_1 y obtenemos la siguiente solución :



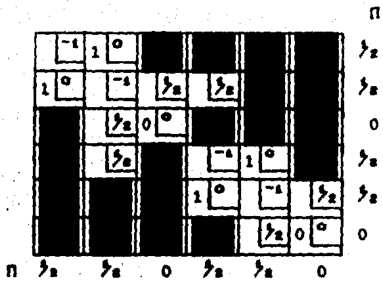
La tabla de coeficientes de costos reducidos es :

						π
$\boxed{-1}$	1 $\boxed{0}$					$1/2$
1 $\boxed{0}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{1/2}$	$\boxed{1/2}$			$1/2$
	$\boxed{1/2}$	0 $\boxed{0}$				0
	$\boxed{1/2}$		0 $\boxed{0}$	$\boxed{1}$		0
			$\boxed{1}$	0 $\boxed{0}$	$\boxed{1}$	0
				$\boxed{1}$	0 $\boxed{0}$	0
π $1/2$	$1/2$	0	0	0	0	

La variable que entra es U_4 por lo que cual se tiene la siguiente tabla para la nueva solución :

	1				
1					
		1			
				1	
			1		
					1

La nueva tabla de coeficientes de costos reducidos para esta solución es :



Aunque todavía existan coeficientes de costos reducidos mayores que cero, decimos que en este caso ya se llegó a la solución óptima; se observa que la gráfica es bipartita en la cual uno de los conjuntos de vértices está formado por el 2 y 5, los cuales ya están considerados en el acoplamiento y los dos vértices que quedan sin acoplar se encuentran en el mismo conjunto de vértices y no es posible acoplarlos.

De los anteriores ejemplos se observan varios criterios que deben tomarse en cuenta para la construcción de un algoritmo general que solucione todos los casos que se presentan en los problemas de acoplamiento máximo.
En el siguiente capitulo se dan los pasos que conforman el algoritmo y la demostración de los criterios que se utilizan para llegar a la solución óptima de tales problemas.

C A P I T U L O IV

ALGORITMO COMPUTACIONAL PARA SOLUCIONAR EL PROBLEMA DE ACOPLAMIENTO MAXIMO.

4.1 EL MODELO DE PROGRAMACION ENTERA ASOCIADO AL PROBLEMA DE ACOPLAMIENTO MAXIMO.

A continuación se demuestra la base técnica del algoritmo que se propone para solucionar los problemas de acoplamiento máximo en una gráfica. También se explica cada uno de los pasos que integran el algoritmo, la demostración de varios lemas que fundamentan la técnica propuesta y el listado del programa diseñado en lenguaje Basic para este fin. Por último se tiene un algoritmo de etiquetación, diseñado por M. L. Balinski, para encontrar la solución al problema de acoplamiento máximo en una gráfica.

En el capitulo II se definió el modelo general de programación matemática para el problema de acoplamiento máximo de la forma siguiente :

$$\text{MAX } Z = \sum_{i \in K} C_i U_i$$

s.c.

$$\text{(P)} \qquad \sum_{k \in K_i} U_k \leq 1 \qquad \text{para cada } i \in J$$

$$U_i \geq 0 \quad , \quad U_i \in Z \quad , \quad C_i = 1 \quad \forall \ i \in K$$

El modelo dual de programación matemática es:

$$\text{MIN} \quad W = \sum_{j \in J} \Pi_j$$

s.c

(D) $\quad \Pi_r + \Pi_s \geq C_k \qquad$ para cada $k \in K \quad r, s \in J_k$

$$\Pi_r \; , \; \Pi_s \geq 0$$

El problema (P) en forma canónica es:

$$\text{MAX} \quad Z = \sum_{i \in K} C_i U_i$$

s.c.

(P) $\quad \sum_{k \in K_i} U_k + X_i = 1 \qquad$ para cada $i \in J$

$$U_i \geq 0 \quad , \quad U_i \in Z \quad , \quad C_i = 1 \quad \forall \; i \in K \quad X_i \geq 0$$

Sea $\bar{U}$ una solución básica al problema (P), entonces el valor de la función objetivo está dado por:

$$Z = \sum_{p} C_p \, \bar{U}_p$$

donde p es el indice asociado a las variables U que se encuentran en la base, entonces aplicando el criterio del método simplex, las variables básicas sus coeficientes de costos reducidos deben ser cero expresado en forma matemática;

$$C_p - Z_p = 0$$

por lo que $C_p = Z_p$.

En el capitulo anterior se mostró que el valor de Z_p estaba dado, al aplicar el teorema de holguras complemetarias, como la suma de las variables duales Π_t y Π_q que son las asociadas a los vertices extremos del arco U_p y esto quiere decir que : $C_p = \Pi_t + \Pi_q = 1$ el valor que se les asigna a cada una de estas variables es 1/2 .

Otra forma de explicar este criterio es: si una variable U_p del problema (P) se encuentra en la base, el teorema de holguras complementarias indica que la correspondiente restriccion del problema dual se cumple con estricta igualdad. También, si una de las variables de holgura X_h del problema (P) se encuentra en la base y con valor diferente de cero, entonces quiere decir que la restriccion h de este problema se satisface con estricta desigualdad y por lo tanto la respectiva variable dual h tiene valor igual a cero. Bajo estos dos criterios se obtienen los valores de las variables duales Π , para despúes calcular los coeficientes de costos reducidos.

4.2 DEMOSTRACION DE LAS REGLAS DEL METODO PROPUESTO DE SOLUCION.

Si en una gráfica asociada al problema de acoplamiento máximo se tienen n vèrtices y m arcos entonces :

LEMA 1.- Toda solución básica asociada al modelo matemático de este problema está formada por n elementos. La primera solución básica factible la constituyen las variables asociadas a los n vèrtices de la gráfica.

De este lema se deduce que todo problema de acoplamiento máximo tiene al menos una solución básica factible y por lo tanto siempre va a tener solución.

Se observa que de la forma como se presenta el modelo matemático para el problema de acoplamiento máximo, toda variable U_k asociada al arco k de la gráfica, aparece sólo en dos restricciones del modelo de programación matemática, si tiene valor uno, entonces se cumplen con estricta igualdad dos restricciones. Esto significa que las variables asociadas a los vèrtices extremos del arco U_k toman el valor cero y salen de la base.

LEMA 4 - Dada una solución básica factible $\overline{U}$ al problema de acoplamiento máximo, se dice que $\overline{U}$ es óptima si y sólo si se cumple alguna de las condiciones siguientes :

a) todos los coeficientes de costos reducidos son menores o iguales a cero, esto es $C_i - Z_i = C_i - (\Pi_r + \Pi_e) \leq 0$ para cualquier variable U_i .

b) Si existen coeficientes de costos reducidos mayores que cero pero sólo se tiene una variable básica X_j con valor uno, es la que está asociada al vértice j de la gráfica.

c) Si existen coeficientes de costos reducidos mayores que cero y más de un vértice con valor uno, pero no existe una cadena alternante que una a dos cualquiera de estos vertices .

Demostración : Sea $\bar{U}$ una solución básica factible para la cual se satisface el inciso (a), entonces de la forma explicita respecto a la base (expresión (2.4) del capitulo II), se llega a la siguiente expresión :

$$\sum_{q \in J^*} (C'_q - Z_q) U'_q = Z - \bar{Z} \quad ,$$

J^* es el conjunto de los índices de las variables no básicas,entonces como $\bar{C}'_q = C'_q - Z_q \leq 0$, el valor $\bar{Z}$ de la función objetivo no se puede mejorar para cualquier valor que se le asigne a las variables U_q con lo cual $\bar{Z}$ el el valor óptimo y por consiguiente la solución $\bar{U}$ lo es también. Supóngase que la solución básica factible $\bar{U}$ es tal que satisface el inciso (b), esto es, existen coeficientes de costos reducidos $\bar{C}_l > 0$, entonces (expresión (2.5) del capitulo II) se tiene que el valor $\bar{Z}$ de la función objetivo se puede mejorar, pero si se tiene que sólo un vértice queda sin acoplar entonces ya no se puede considerar un arco más de la gráfica en el acoplamiento y se dice que la gráfica no tiene acoplamiento perfecto y que el valor de la función objetivo es óptimo, por consiguiente la solución $\overline{U}$ es óptima.

Si la solución $\overline{U}$ satisface el inciso (c), de acuerdo a los dos incisos anteriores se tendria que existen coeficientes de costos reducidos mayores que cero y más de un vértice sin acoplar, y se podria obtener una mejor solución; esta nueva solución es posible que exista siempre y cuando se encuentre una cadena alterna entre dos vértices no acoplados, pero como este criterio indica no existe tal cadena y por lo tanto se tiene la solución óptima.

4.3 ALGORITMO PARA ENCONTRAR LA SOLUCION OPTIMA AL PROBLEMA DE ACOPLAMIENTO MAXIMO EN UNA GRAFICA.

1.- Dada una gráfica conexa $G(X,V)$ con m vértices y n arcos, construir su tabla asociada tal como se definió en el capítulo II, tomando como primera solución básica factible la formada por las variables asociadas a los vértices de la gráfica.

2.- Se calculan los elementos Π de la forma siguiente : para cada variable U_i que se encuentre en la base, esto es, que tenga valor uno y con vértices extremos i y q :

$\bar{C}_i = C_i - (\Pi_i + \Pi_q) = 0,$ entonces

$\Pi_i = \Pi_q = 1/2$ con los restantes Π igual a cero.

3.- Calcular los coeficientes de costo para las restantes variables no básicas de la misma forma.

$\bar{C}_k = C_k - (\Pi_e + \Pi_r)$

para las variables X_i su coeficiente de costo es $2\Pi_i$.

4.- Se verifica si se está en la solución óptima o todavia no, con base en los siguientes criterios:

a) Si $\bar{C}_i \leq 0$ para todos los $i \in K$,o sea los coeficientes de costos reducidos para cada variable U_i asociada a los arcos, entonces se está en la solución óptima, esto indica que el acoplamiento encontrado es perfecto.

b) Si existe un elemento $\bar{C}_p > 0$ y en la tabla asociada a la solución se tiene sólo un elemento de la diagonal con valor uno, la gráfica tiene sólo un vértice que no ha sido acoplado, entonces la solución es óptima y la gráfica no contiene un acoplamiento perfecto.

c) Si existen elementos $\bar{C}_p > 0$ para $p \in K$ y todos con valor 1/2 y más de un elemento de la diagonal con valor mayor que cero, verificar si no existe una cadena alternante que una a dos de los vértices no acoplados (los correspondientes en la diagonal con valor mayor que cero),utilizando la técnica vista en el capitulo II.

i) Si no existe tal cadena, entonces se está en la solución óptima.

ii) Si existe entonces tomar los arcos de la cadena alternante que no están en el acoplamiento, obtiendo uno nuevo que mejora la solución y se regresa al paso 2 tomando esta nueva solución.

5) Si existe al menos un elemento $\bar{C}_p = 1$ y más de un elemento de la diagonal con valor uno, entonces existe una mejor solución, la cual se construye de la siguiente manera:

Se toma la variable U_k para entrar a la base considerando:

$$\bar{C}_k = \max_p \{ \bar{C}_p \mid \bar{C}_p > 0 \}.$$

Para saber que variable sale se construye sobre la tabla asociada a la ultima solución, un ciclo con la épsilon de tal manera que se cancelen de la base igual número de variables de las que van a entrar, además de que se hagan cero las variables de la diagonal, correspondientes a los vértices extremos del arco U_k. La forma en la cual se construye este ciclo se vio en los ejemplos presentados en el capítulo III .

Asi se llega a una nueva solución y se regresa al paso 2.

4.4 UN ALGORITMO DE ETIQUETACION PARA EL PROBLEMA DE ACOPLAMIENTO MAXIMO (BALINSKY).

El siguiente es un Método General para encontrar el Acoplamiento Máximo en una gráfica, está basado en conceptos de la Teoria de Gráficas, en particular en la trayectoria alterna, para comprobar que un acoplamiento es máximo se verifica que no exista una trayectoria alterna entre dos vértices no acoplados.

Dada una gráfica $G = (V,E)$ y un acoplamiento M en G, una trayectoria alterna entre dos vértices X_1 y X_2 no acoplados, es aquélla que toma alternadamente arcos de M y arcos que no se encuentran en M pero si en E.

Este algoritmo está basado sobre técnicas utilizadas por EDMONDS y BERGE y se aplica directamente sobre la gráfica.

Dada una gráfica G y un acoplamiento M, sea V_0 un vértice no acoplado y supóngase que existe al menos otro vértice no acoplado, entonces asignamos etiquetas a los vértices de acuerdo al siguiente algoritmo, teniendo en cuenta los siguientes significados. Si el vértice X lleva alguna de las etiquetas:

I) [X',-], entonces existe una trayectoria alterna, $P_1(X)$ de vértices etiquetados empezando en X con arco $(X,X') \notin M$ y terminando en V_o.

II) [-,X"], entonces existe una trayectoria alterna $P_2(X)$ de vértices etiquetados empezando en X con arco $(X,X") \in M$ y terminando en V_o.

III) [X',X"], entonces puede acontecer I o II simultáneamente. En este caso se dice que X está doblemente etiquetado.

La trayectoria alterna o trayectorias $P_i(X)$, donde i indica que la trayectoria empieza con el arco (X,Y) Y representa la i-ésima componente de la etiqueta de las Xs, son definidas inductivamente regresando de vértice en vértice indicado por las componentes alternas de las etiquetas.

Usamos los símbolos -, +, O, como componentes de las etiquetas para indicar respectivamente que la componente es vacía, no vacía o ambas.
Finalmente, todo vértice etiquetado X lleva un exponente e(X), el cual es un entero no negativo usado para definir el Orden en la aplicación de las reglas de etiquetación.

Reglas de Etiquetación.

Dada una gráfica G y un acoplamiento M, los vértices se etiquetan como sigue:

Regla 0. Se etiqueta un vértice no acoplado V_o con $[V_u,V_o]$ y $e(V_o) = 0$.

Entonces en toda etapa se usa cualesquiera de las siguientes reglas etiquetando el vértice V^* (llámese origen).

Con la etiqueta $[0,+]$ y $e(V^*) = \text{Max } \{e(X) \mid X$ está etiquetado con $[0,+]\}$ y admitiendo la aplicación de al menos una regla.

Si no existe tal vértice V^* quiere decir que sólo hay un vértice no acoplado V_o y lo cual implica que el acoplamiento M es un acoplamiento máximo.

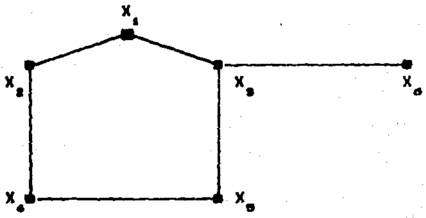
Regla 1. (Ruptura). Existe un vértice W no etiquetado. $(V^*,W) \notin M$, W no acoplado.

Por lo tanto existe una trayectoria entre los vértices no acoplados W y V_o. Invirtiendo la asignación de $P_s(V^*)$ a M y aumentando el arco (V^*,W) para obtener un nuevo acoplamiento. Se borran todas las etiquetas y exponentes y se regresa a la regla 0.

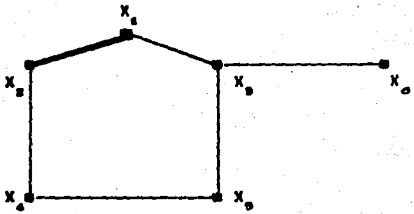
Regla 2. (Etiquetación) Si existen vértices W_1 y W_2 no etiquetados, tal que $(V^*,W_2) \notin M$ y $(W_1,W_2) \in M$. Se etiqueta W_1 con $[V^*,-]$, W_2 con $[-,W_1]$, $e(W_1) = e(V^*) + 1$ y $e(W_2) = e(V^*) + 2$.

Ejemplo.

Sea la siguiente gráfica $G = (X,E)$ con $M_0 = \emptyset$, esto es, sin considerar acoplamiento:



Aplicando las reglas 0 y 1 se tiene:

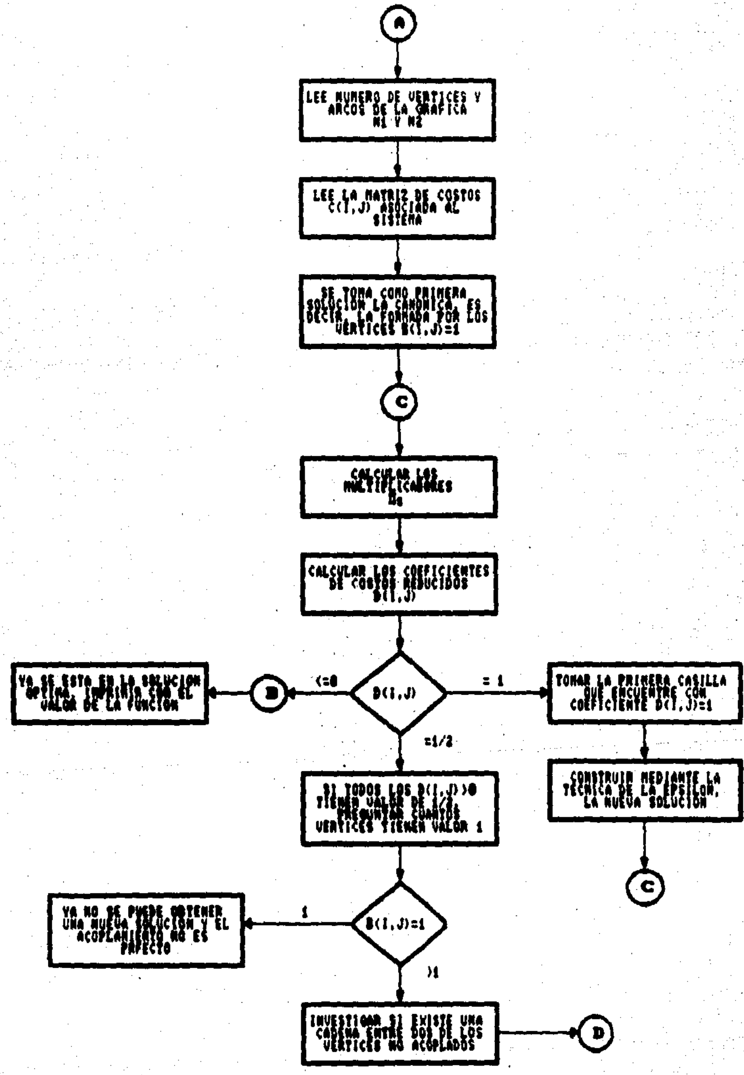


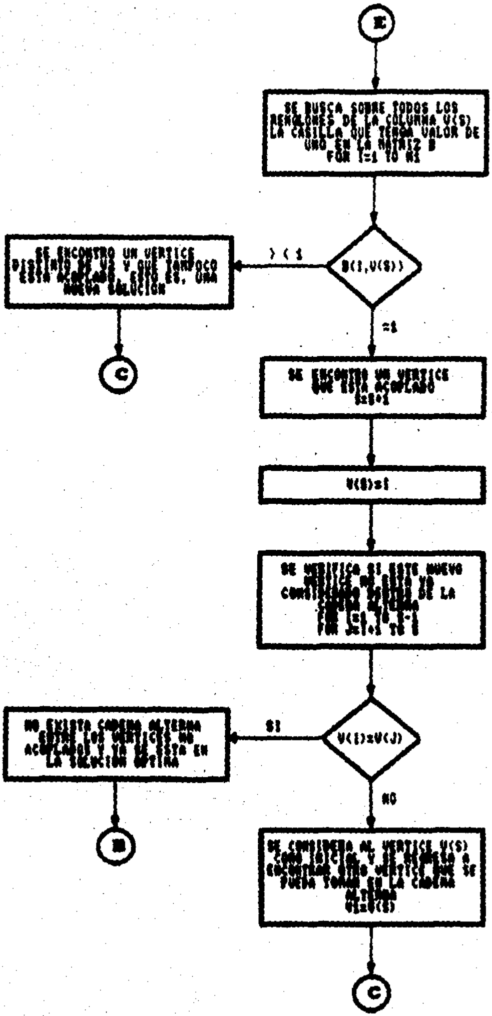
$M_1=\{(X_1,X_2)\}$

Utilizando otra vez ambas reglas obtenemos otro acoplamiento $M_2 = \{ (X_1,X_2), (X_5,X_3) \}$ y la gráfica:

Como se nota la aplicación de este algoritmo es muy exhaustiva y laboriosa, además de que para gráficas grandes, las cuales tengan más de 20 vértices y que sean completas, es posible perderse en la aplicación de los paso que se deben seguir, los algoritmos de este tipo no son muy aplicables.

4.5 Programa Computacional




E
SE BUSCA SOBRE TODOS LOS
RENGLONES DE LA COLUMNA V(S)
LA CASILLA QUE TENGA VALOR DE
UNO EN LA MATRIZ B
FOR I=1 TO N1
B(I,V(S))
<> 1
SE ENCONTRO UN VERTICE
DISTINTO DE V1 Y QUE TAMPOCO
ESTA ACOPLADO, ESTO ES, UNA
NUEVA SOLUCION
C
=1
SE ENCONTRO UN VERTICE
QUE ESTA ACOPLADO
S=S+1
V(S)=I
SE VERIFICA SI ESTE NUEVO
VERTICE NO ESTA YA
CONSIDERADO DENTRO DE LA
CADENA ALTERNA
FOR I=1 TO S-1
FOR J=I+1 TO S
V(I)=V(J)
SI
NO EXISTE CADENA ALTERNA
ENTRE LOS VERTICES NO
ACOPLADOS Y YA SE ESTA EN
LA SOLUCION OPTIMA
B
NO
SE CONSIDERA AL VERTICE V(S)
COMO INICIAL Y SE REGRESA A
ENCONTRAR OTRO VERTICE QUE SE
PUEDA TOMAR EN LA CADENA
ALTERNA
V1=V(S)
C

```
    SOLUCION
20  IF A(I,J)>0 THEN T1=T1+1 'INDICA QUE EXISTEN COEF. DE COSTO
    REDUCIDO DE 1/2
    IF  B(I,I)=1  THEN  T2=T2+1       'NUMERO  DE  VERTICES  SIN
    ACOPLAR
    NEXT J
    NEXT I
    IF  T1=0  OR  T2<2  GOTO  100     'YA  SE  ESTA  EN  LA  SOLUCION
    OPTIMA
REN SUBRUTINA  PARA ENCONTRAR, SI  EXISTE,  LA  CADENA  ALTERNA
    ENTRE VERTICES NO ACOPLADOS
    FOR I=1 TO N1
    IF B(I,I)=1 THEN 35
    NEXT I
35  V1=I               ' PRIMER VERTICE NO ACOPLADO
    V(1)=V1
    FOR I=V1+1 TO N1
    IF B(I,I)=1 THEN V2=I     'SEGUNDO VERTICE NO ACOPLADO
    NEXT I
    S=1
30  I1=1
    I2=V1
38  FOR I=I1 TO I2
    IF I=V1 THEN 40
    IF B(V1,I)<>0 THEN 40
    FOR J=1 TO S       'VERIFICAR SI EL VERTICE YA EXISTE EN LA
    CADENA
    IF V(J)=I THEN 40
    NEXT J
    GOTO 50
40  NEXT I
    IF I2=N1 THEN 100 'NO EXISTE CADENA ALTERNA Y YA ES LA SOL.
    OPTIMA
    I1=V1+1
    I2=N1
```

```
    GOTO 38
50  S=S+1
    V(S)=I
    IF V(S)=V2 THEN 60      'YA SE ENCONTRO UNA CADENA ALTERNA
    FOR I=1 TO N1
    IF I=V(S) GOTO 42
    IF B(I,V(S))=1 THEN 70
42  NEXT I
    GOTO 60             'QUIERE DECIR QUE EL VERTICE V(S) ES NO
    ACOPLADO
70  S=S+1
    V(S)=I          'VERTICE CON EL CUAL ESTA ACOPLADO EL VERTICE
    V(S-1)
    FOR I=1 TO S-1
    FOR J=I+1 TO S
    IF V(I)=V(J) THEN 100     'NO EXISTE CADENA ALTERNA
    NEXT J
    NEXT I
    V1=V(S)
    GOTO 38
60  REM CALCULO DE LA NUEVA SOLUCION UTILIZANDO LA CADENA
    ALTERNA ENCONTRADA
    FOR Z=1 TO S
    FOR I=1 TO N1
    IF B(V(Z),I)=1 THEN B(V(Z),I)=0
    NEXT I
    NEXT Z
    FOR Z=1 TO S STEP 2
    B(V(Z),V(Z+1))=1
    B(V(Z+1),V(Z))=1
    NEXT Z
    GOTO 10
200 REM OBTENCION DE LA NUEVA SOLUCION MEDIANTE EL CICLO DE LA
    EPSILON
```

```
 B(A1,A2)=1
 B(A2,A1)=1
 B(A1,A1)=0
 B(A2,A2)=0
 GOTO 10
100 REM RUTINA PARA IMPRIMIR LA SOLUCION OPTIMA
 PRINT" SOLUCION OPTIMA"
 PRINT" VERTICES ACOPLADOS"
 FOR I=1 TO N1
 FOR J=1 TO N1
 PRINT B(I,J);
 NEXT J
 PRINT I
 NEXT I
 FOR I=1 TO N1-1
 FOR J=I+1 TO N1
 IF B(I,J)=1 THEN PRINT I,J
 IF B(I,J)=1 THEN ZMAX=ZMAX+B(I,J)
 NEXT J
 NEXT I
 PRINT" ACOPLAMIENTO MAXIMO = ",ZMAX
 IF 2*ZMAX=N1 THEN PRINT"ACOPLAMIENTO PERFECTO" ELSE
 PRINT"ACOPLAMIENTO NO PERFECTO"
REM DATOS
REM EJEMPLO
 DATA 5,4
 DATA 0,1,1,-1,-1
 DATA 1,0,-1,1,1
 DATA 1,-1,0,-1,-1
 DATA -1,1,-1,0,-1
 DATA -1,1,-1,-1,0

 END
```

CONCLUSIONES

El problema de acoplamiento máximo es un problema de realidad y considerado de uso común, así como el de Recubrimiento mínimo. En este estudio sólo se aborda el problema del acoplamiento máximo y aplicando la relación que existe entre las soluciones óptimas de los dos problemas (acoplamiento máximo y recubrimiento mínimo) se construye la del recubrimiento mínimo, esto es ya sea que se resuelva uno u otro se obtinen las dos soluciones.

Al hacer una comparación entre los dos métodos de solución del acoplamiento máximo se nota que el Método Gráfico es exhaustivo ya que para llevar un control de cada iteración debe hacerse sobre nuevas gráficas lo cual, para un problema de muchos arcos y vértices es muy laborioso y con más riesgo de equivocación.

Esto no sucede en el algoritmo propuesto ya que se puede programar y automáticamente dar la solución óptima, aunque para este trabajo se hizo explícito el procedimiento para que quedara mas clara la lógica a seguir y también se pudiese justificar más fácilmente los pasos del algoritmo.

Este método de solución se creo haciendo algunos arreglos al método del transporte generalizado, pero basado en la lógica del Método Simplex, se podría pensar que es justificación a que el Método Simplex es flexible y para poderlo aplicar a otros problemas sólo hay que ajustarlo.

B I B L I O G R A F I A

1) JACK EDMONDS
"SOME RESULTS ON MATCHING IN BIPARTITE GRAPHS"
SIAM JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS VOL. 17 (1969)

2) JACK EDMONDS
"PATHS, TREES AND FLOWERS"
CANAD JOURNAL MATHEMATICS VOL. 17 (1965) 449-467 pp

3) JACK EDMONDS
"MAXIMUM MATCHING AND A POLYHEDRON WITH 0,1 VERTICES"
MATHEMATICAL PROGRAMMING VOL. 5 (1973)

4) JACK EDMONDS AND E. L. JOHNSON
"A WELL SOLVED CLASS OF INTEGER LINEAR PROGRAMS"
COMBINATORIAL STRUCTURES AND THEIR APPLICATIONS
CALGARY INTERNATIONAL CONFERENCE (1969)

5) JACK EDMONDS AND E. L. JOHNSON
"MATCHING, EULER TOURS AND THE CHINESE POSTMAN"
MATHEMATICAL PROGRAMMING VOL. 5 (1973)

6) J. F. DESLER AND S. L. HAKIMI
"A GRAPH - THEORETICS APPROACH TO A CLASS OF INTEGER PROGRAMMING PROBLEMS"
OPERATIONS RESEARCH VOL. 17 (1969)

7) CLAUDE BERGE
"GRAPHS AND HYPERGRAPHS"
AMSTERDAM NORTH-HOLLAND (1973)

8) CLAUDE BERGE
"TWO THEOREMS IN GRAPH THEORY"
PROC. NAT. ACAD. SCI. USA VOL. 43 (1957)

9) GEORGE DANTZIG
"LINEAR PROGRAMMING AND EXTENSIONS"
PRINCENTON UNIVERSITY (1963)

10) M. L. BALINSKY
"LABELLING TO OBTAIN A MAXIMUM MATCHING"
CONFERENCIA EN MATEMATICAS Y SUS APLICACIONES, UNIVERSIDAD DE CAROLINA DEL NORTE (ABRIL 1967)

11) M. L. BALINSKY
"ON MAXIMUM MATCHING, MINIMUM COVERINGS AND THEIR CONNECTIONS"
JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY VOL. 3 (1965)

12) W. N. ANDERSON
"MAXIMUM MATCHING AND THE RANK OF A MATRIX"
SIAM JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS VOL. 28 (1975)

13) R. Z. NORMAN AND M. O. RABIN
"AN ALGORITHM FOR A MINIMUM COVER OF A GRAPH"
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY VOL. 10 (1959) 315-319 pp

14) L. J. WHITE
"MINIMUM COVERS OF FIXED CARDINALITY IN WEIGHTED GRAPHS"
SIAM JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS VOL. 21 (1971)

15) G. KATONA AND D. SZASZ
"MATCHING PROBLEMS"
JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY VOL. 10 (1971)

16) L. J. WHITE AND M. L. GILLENSON
"AN EFFICIENT ALGORITHM FOR MINIMUM K-COVER IN WEIGHTED GRAPHS"
MATHEMATICAL PROGRAMMING VOL. 8 (1975)

17) BUSACKER Z. G. AND SAATY T. A.
"FINTE GRAPHS AND NETWORKS"
MC GRAW HILL

18) FORD L. R. AND FULKERSON D. R.
"FLOWS AND NETWORKS"
PRINCENTON UNIVERSITY PRESS (1962)