2 7
2 ý

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"ESTADISTICA PARA LA ADMINISTRACION"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICAS

P R E S E N T A

MIGUEL ANGEL RODRIGUEZ ROMERO

FALLA DE ORIGEN

MEXICO, D. F. 1990

" ESTADISTICA PARA LA ADMINISTRACION "

P R O L O G O

La presente tesis va dirigida a los alumnos de la Facultad de Contaduría y Administración de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG). En la cual se me dió la tarea de hacer un Programa de Estudios para el área de Estadística I y Estadística II. Con la experiencia de 4 años como profesor de la F.C.A.- presento como tesis dicho Programa de Estudios.

Mi principal objetivo de la tesis es dar a los alumnos de V - y VI semestre de la carrera de Contaduría y Administración — la importancia de la estadística en la toma de decisiones. -

El contenido de ésta tesis requiere, para su estudio, un curso básico de álgebra.

Este libro se dividió en dos partes. La primera comprende la estadística descriptiva y la segunda, trata sobre la estadística inferencial.

La estadística descriptiva comprende la organización y resumen de datos estadísticos. Esto incluye el cálculo y la interpretación de medidas numéricas como la media, la mediana y- la desviación estándar, al igual que la elaboración y empleo- de representaciones gráficas, como las distribuciones de frecuencia. La probabilidad es utilizada como un cuantificador- de eventos de un experimento aleatorio.

Los métodos descriptivos se emplean de dos maneras; como una- forma de aclarar, visualizar o comunicar un concepto o idea y como una etapa inicial en el proceso de inferencia.

La estadística inferencial se ocupa del uso de muestras como, un método para obtener información acerca de una población.

Se inicia nuestro estudio con un análisis de los conceptos básicos del muestreo.

El muestreo aleatorio es muy conveniente porque requiere que cada elemento de una población discreta tenga la misma oportunidad de ser incluido en la muestra. En el caso de poblaciones continuas, es necesario que un intervalo de valores tenga una probabilidad de ser incluidos en la muestra que sea proporcional al porcentaje de la población comprendido en dicho intervalo.

El estudio de la inferencia fué dividido en dos partes: la estimación y una introducción a las pruebas de hipótesis. La estimación es un procedimiento mediante el cual se intenta medir características particulares de un pobalción basandose en observaciones muestrales.

Las pruebas de hipótesis se utilizan para evaluar una aseveración acerca de un parámetro poblacional. Por lo regular, el resultado es una decisión de tipo afirmativo - negativo, que determina la aceptación o rechazo de un hipótesis.

Finalmente, quiero agradecer la ayuda a mi asesor, el Actuario JOSE MARTIN CHAVEZ MEDEROS, por sus numerosos comentarios y sugerencias constructivas.

CAPITULO I

I N T R O D U C C I O N

Poco después que se cerraron las Urnas el día de las elecciones presidenciales, un comentarista de televisión informó al teleauditorio, que se pronosticó, por análisis matemático, que el candidato del partido en el gobierno obtendría una victoria aplastante. Lo que es más, el pronóstico se llevó a cabo después de tabular solamente el 20% de los votos.

La canasta básica subió un 3% en relación al año pasado.

El promedio industrial Daw-Jones bajó 20 puntos.

El precio de la Coca-Cola subió un 20% en relación añ año pasado.

El gobierno informa que el salario mínimo subió un 10% en relación al trimestre anterior.

Estas son algunas formas como se emplean las estadísticas.

1.1. ¿ QUE ES LA ESTADISTICA ?

Cuando algunas personas escuchan la palabra " estadística " inmediatamente se imaginan cosas como: tasas de mortalidad, índice de accidentes, índice de desempleo, promedios de bateo, número de faltas en un partido de futbol, etc.

Esta rama de la estadística, que utiliza datos para describir hechos, recibe el nombre de estadístioa descriptiva, la cual se ocupa de organizar, resumir y simplificar en términos generales, información que a menudo es bastante compleja.

En la televisión cuando es transmitido un encuentro de futbol- al final de dicho partido, encontramos en nuestra pantalla de- televisión la estadística del encuentro jugado:

ESTADISTICA		
EQUIPOS	A	B
FALTAS	6	3
TIROS A GOL	8	5
TIROS DE ESQUINA	2	1
FUERA DEL LUGAR	1	3
AMONESTADOS	2	1
EXPULSADOS	0	0

Este es un vivo ejemplo de estadística descriptiva.
La teoría de la probabilidad, es una herramienta de gran utilidad para analizar situaciones en las que interviene el azar. - Los juegos de dados o cartas, o el tiro de monedas, son ejem-- plos donde interviene la probabilidad.
En casi todos los deportes, como el boxeo, el futbol, el bas-- ketbol, las carreras de caballos y otros de igual natiraleza,- donde el azar influye. Un boxeador puede estar a punto de ganar la pelea en un round dado, a ser puesto fuera de combate - en el siguiente round, el rebote de un balón o de una pelota - puede influir en el resultado de un juego, un caballo o su jinete puede caerse en un momento dado.

La inferencia estadística es la otra rama de la estadística. Consiste en el análisis e interpretación de una muestra de datos. El muestreo es un ejemplo del dicho popular "no tienes que comerte todo el pastel para saber si te gusta". Por tanto, la idea básica del muestreo es tomar una pequeña muestra de alguna población y posteriormente utilizar dicha información para inferir qué características tiene la "población".

1.2 ¿ POR QUE ESTUDIAR ESTADISTICA ?

La mayoría de los lectores del presente texto no van a ser expertos en estadística. Cabe preguntar entonces para qué hay que estudiarla.
La razón estriba en pocas palabras en que los conceptos y las técnicas de la estadística se utilizan actualmente en un gran número de ocupaciones. Las ideas estadísticas constituyen una parte integral de las actividades de investigación a traves de las encuestas para recopilar datos y del análisis de los datos que se originan en las actividades que se desarrollan en las instituciones y organizaciones.

Es posible que un trabajador no necesite conocer de la estadística, sino aquello que lo faculte para saber cuando se requieren los servicios de un experto y para poderse comunicar eficazmente con él cuando trabajen juntos en la planeación, dirección e interpretación de los resultados de una actividad que requiere la metodología de esta ciencia.

La persona que comprende los conceptos estadísticos y su metodología sacará mejor provecho de ellos. Esta persona estará más preparada para evaluar los resultados de una investigación y de más informaciones que se obtengan. El profesional que entienda de estadística podrá leer con mayor inteligencia la literatura que sobre su campo de acción, va día a día apareciendo.

Finalmente, vamos a descubrir que los conocimientos de estadística son de gran ayuda para las demás asignaturas.

Muchos textos correspondientes a otras asignaturas se han escrito bajo el supuesto de que el estudiante tiene por lo menos un conocimiento elemental de las ideas y técnicas de la estadística y además, muchos cursos superiores tienen esta materia como requisito previo.

1.3 ¿ PERSPECTIVA DE LA ESTADISTICA EN EL FUTURO ?

Con el continuo progreso tecnológico en las comunicaciones y el uso de los métodos estadísticos como ayuda para la toma de decisiones, frente a información incierta o con muestras imperfectas, ha tenido un crecimiento dinámico y habrá de continuar creciendo. El uso de computadoras como medio para resolver, refinar, o ambas cosas, problemas de gran magnitud en todos los campos del esfuerzo humano, desempeñará una función siempre creciente. Por tanto, los estudiantes orientados hacia el aspecto cuantitativo, y están interesados en la aplicación de las técnicas en la solución de problemas administrativos de las empresas, encontrarán una carrera y experiencia fructíferas en el campo de la estadística.

CAPITULO II

O R G A N I Z A C I O N, R E S U M E N

Y

P R E S E N T A C I O N D E D A T O S

E S T A D I S T I C O S

2.1 INTRODUCCION

Los métodos estadísticos comprenden el análisis e interpretación de datos, números de autos chocados, estaturas de alumnos, K/H recorridos, porcentaje de reprobados, colores de ojos, estado civil etc. A tal información se le conoce como datos. Existen tres métodos básicos con los cuales pueden obtenerse los datos deseados:

En primer lugar, datos ya publicados por fuentes gubernamentales, industriales o individuales; en segundo lugar, pueden diseñar un experimento para obtener los datos necesarios, y en tercer lugar, pueden efectuar una encuesta.

Por lo general para interpretarlos correctamente, en primer lugar, es necesario organizar y resumir los datos. El objetivo de éste capítulo es mostrar los métodos más comunes para organizar y resumir datos estadísticos.

2.2 DATOS ESTADISTICOS.

Una variable: es una característica que varía de un miembro a otro en una población.

Los datos estadísticos se obtienen mediante un proceso que comprende la observación o medición de conceptos, como consumo de agua por litro en una ciudad, número de desempleo en una comunidad, cantidad de automóviles vendidos en un año cualquiera, resistencia a la oxidación en los metales, porcentajes de sal en las comidas, etc., a tales conceptos se les conoce como variables, ya que producen valores que al efectuarse mediciones sucesivas, tienden a mostrar cierto grado de variabilidad.

2.3 TIPO DE DATOS

Existen dos tipos básicos de variables aleatorias que producen dos tipos de datos:
cualitativos y cuantitativos. La diferencia entre ellos es que las variables aleatorias cualitativas arrojan respuestas categóricas, mientras que las variables aleatorias cuantitativas dan respuestas numéricas.
Por ejemplo:
la respuesta a la pregunta ¿ está usted asegurado actualmente? es categórica. Está claro que las selecciones son "si" o "no".
Por otra parte, las respuestas a las preguntas como:
¿ cuántos kilos pesas ? son evidentemente numéricas. Cabe señalar que los datos cuantitativos se dividen en dos tipos de datos que son:
discretos o continuos.
Los datos cuantitativos discretos son respuestas numéricas que surgen de un proceso de conteo, mientras que los datos cuantitativos continuos, son respuestas numéricas que surgen de un proceso de medición. ¿ Cuántas personas consumen cerveza en su casa ? es un ejemplo de una variable cuantitativa discreta, ya que la respuesta toma uno de un número finito de valores que se pueden contar. Las personas que consumen cerveza pueden serx ninguna, una persona, dos personas, etc. Por otra parte, " los kilos de una persona " es un ejemplo de una variable cuantitativa continua, ya que la respuesta puede tomar cualquier valor en un intervalo continuo.

2.4 MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Las medidas de tendencia central se utilizan para indicar un valor que se espera sea más representativo de un conjunto de números. Las tres medidas que más comunmente se emplean son la media, la mediana y la moda.

2.4.1 LA MEDIA

La medida de tendencia central que mayor se usa es la media. Esta es la medida de tendencia central que tiene en mente una persona común y corriente cuando se habla de " promedio ". La media se calcula sumando todos los valores de la muestra y dividiendo el total de esta suma entre el número de observaciones en la muestra.

Supóngase que tenemos una muestra con n valores.

$X_1, X_2, \ldots; X_n$ La media de los valores se encuentra como sigue:

$$\text{MEDIA} = \frac{X1 + X2 + \ldots\ldots + Xn}{n}$$

Si representamos la media con el símbolo $\bar{X}$, podemos indicar su cálculo en forma más condensada como:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{n}$$

Donde $\sum_{i=1}^{n} Xi$ indica que hay que sumar todas las equis (X) disponibles desde X_1 hasta Xn. Los Símbolos i=1 y n que aparecen abajo y encima del signo $\sum$ indica qué secuencia de valores debe sumarse.

Por ejemplo:

supóngase que una muestra consta solamente de:

$X_1 = 7$, $X_2 = 4$, $X_3 = 3$, $X_4 = 2$.

La media de la muestra se calcula como sigue:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{4} Xi}{4} = \frac{7 + 4 + 3 + 2}{4} = 4$$

En el APENDICE se dan mayores explicaciones sobre la notación de la sumatoria que pueden ser utiles.

Se va a seguir la costumbre de emplear n para simbolizar el número de valores de una muestra y $\bar{X}$ para representar la media de la muestra.

Se designará la media de una población con la letra griega μ. Cuando la población es finita, podemos obtener la media de la población de la siguiente manera:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} Xi}{N}$$

Donde N indica el tamaño de la población.

EJEMPLO 2.1

Supóngase que hay 180 estudiantes de primer año en una escuela rural. Con el fin de obtener información acerca de la costumbre que tienen los estudiantes de ver televisión, un consejero de orientación desea seleccionar una muestra aleatoria de diez estudiantes para llenar un cuestionario, que nos informe el número de horas que los estudiantes pasaron viendo televisión durante la semana anterior a la entrevista. Supongamos además que los estudiantes de la muestra informaron que vieron televisión los siguientes números de horas:

24, 25, 22, 20, 15, 25, 17, 16, 15, 17

El número medio de horas gastadas en ver televisión durante la semana anterior a la entrevista por los diez estudiantes - es:

$$\bar{X} = \frac{24 + 25 + \ldots\ldots + 17}{10} = \frac{196}{10} = 19.6$$

Una desventaja de la media como medida de tendencia central - es que puede ser influída muy fuertemente por un solo valor - extremo y dar por tanto, una impresión distorsionada de los - datos.

Supóngase , por ejemplo, que 10 estudiantes de una clase tienen puntajes de 91, 95, 95, 94, 92, 93, 98, 97, 96, 0 en una-prueba. La media 85.1 no parece ser una buena representación-del rendimiento de la clase en conjunto.

2.4.2 LA MEDIANA

La segunda medida de tendencia central es la mediana, es ---- aquel valor que se encuentra en la mitad de una muestra o población cuyos valores están ordenados en orden de magnitud.

Si el número de valores es impar, la mediana es igual al va-- lor de la mitad, si el número de valores es par, la mediana - es igual a la media de los dos valores que quedan en la mitad. De esta manera la mediana divide las observaciones en -- dos mitades. En una mitad los valores son mayores o iguales - que la mediana. Antes de calcular la mediana hay que ordenar-las observaciones de la muestra o población según magnitud.

EJEMPLO 2.2

Teniendo en cuenta los datos del ejemplo 2.1se calcula la mediana del número de horas gastadas en ver televisión por los 10 estudiantes. Ordenados los valores de menor a mayor tenemos.

15, 15, 16, 17, 17, 20, 22, 24, 24, 25, 25,

y la mediana es igual a (17 + 20) / 2 = 18.5

La mediana no se ve afectada por los valores extremos tanto como la media. Para aclarar este punto considerense los puntajes de la prueba presentados anteriormente. Si las observaciones - se ordenan en forma ascendente, se tiene:

0, 91, 92, 93, 94, 95, 95, 96, 97, 98

Y se ve que la mediana es (94 + 95) / 2 = 94.5

2.4.3 LA MODA

Es el valor que aparece con mayor frecuencia en un conjunto de datos.

EJEMPLO 2.3

Once alumnos de primer año de un colegio obtuvieron los siguientes puntajes en una prueba de destreza manual.

70, 83, 74, 75, 81, 75, 92, 75, 90, 94, 75

La moda para estos datos es 75 puesto que este puntaje aparece con más frecuencia que los demás .

Un grupo de datos puede no tener ninguna moda o tener más de una. Esto no ocurre con la media y la mediana, medidas que, para un conjunto de datos, siempre existen y son únicas.
La media y la mediana utilizan datos cuantitativos y cualitativos, mientras que la moda utiliza ambos datos.

2.5 MEDIDAS DE DESPERSION

Una medida de tendencia central sola no proporciona generalmente una descripción satisfactoria de un conjunto de datos. Quienes están interesados en los datos desean tener con frecuencia, también una medida de la manera en que los valores individuales se desvían del "promedio". A esta clase de medidas se les conoce como medidas de dispersión.
Así por ejemplo, el hecho de obtener unicamente la media de una muestra de valores puede no ofrecer la información suficiente para representarse claramente la naturaleza de los datos.

Supóngase que la edad media de cinco personas presentes en una fiesta de cumpleaños es de 18 años.
Si no se da ninguna información respecto a la dispersión de los datos, el lector desprevenido podría concluir que la fiesta estaba compuesta solo de adolescentes. La misma edad media podría haberse calculado si se tratara de una abuela de 73 años que ofreciera una fiesta a su nieto de cinco años y a sus tres primos de 3, 5 y 9 años.

2.5.1 EL RANGO.

La medida más simple de dispersión es el rango, que es la diferencia entre el valor máximo y el mínimo de un conjunto de datos.

EJEMPLO 2.4

Teniendo en cuenta los datos del ejemplo 2.1 se calcula el rango correspondiente, al número de horas gastadas en ver televisión por la muestra de diez estudiantes de primer año. Los valores máximo y mínimo son 25 y 15 por lo que tenemos.

$$\text{Rango} = 25 - 15 = 10$$

El rango tiene un valor limitado como medida de dispersión. En primer lugar, toma en cuenta los valores extremos de un conjunto de datos y no da ningún indicio sobre la forma como varían los valores en el interior del intervalo. En segundo lugar , el rango de una muestra depende de su tamaño. Los valores extremos de una población, por ser menos numerosos, no son tan propensos a aparecer en las muestras pequeñas y sí en las grandes y en consecuencia, las muestras pequeñas tienden a tener rangos pequeños y las muestras grandes rangos grandes.

2.5.2 LA VARIANZA.

Las limitaciones del rango se pueden evitar con otra medida de variabilidad conocida como varianza.

La varianza de un conjunto de datos se obtienen restando a cada uno de los valores el valor de la media de todos los valores, elevando al cuadrado cada una de las diferencias resultantes, sumando las diferencias al cuadrado y dividiendo este total por el número de valores menos 1. Si resumimos estas palabras en una notación compacta, tenemos las siguientes fórmulas para la varianza de la muestra, denotada por el símbolo S^2:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Xi - \bar{X})^2}{n - 1}$$

EJEMPLO 2.5

Utilicemos nuevamente los datos del ejemplo 2.1 sobre el tiempo gastado en ver televisión y calculemos la varianza de esa muestra.

Empleada la fórmula se tiene:

$$S^2 = \frac{(24-19.6)^2 + (25-19.6)^2 + \ldots + (17-19.6)^2}{}$$

$$= \frac{152.4}{9} = 16.93$$

En base a esta fórmula se puede ver que, exceptuando el hecho de que la desviación es por n-1 y no por n, la varianza sería la media de Ias desviaciones, elevadas al cuadrado, que tie-- nen las observaciones con respecto de la media de la muestra. Cabe preguntarnos por qué el denominador es n-1 y no n. La -- respuesta más simple que ampliaremos en un capítulo posterior, es que la división por n-1 de una medida que es más útil para los propósitos inferenciales. Si el objetivo analítico consis te únicamente en describir la dispersión que presenta una --- muestra, entonces es perfectamente satisfactorio calcular la- varianza de la muestra dividiendo por n pero como la mayoría- de las muestras se analizan con el objeto de hacer inferencia sobre una población, la división por n-1 se usa más general-- mente para calcular la varianza de la muestra.
El denominador n-1 recibe el nombre de grados de libertad. -- Una definición rigurosa de " grados de libertad" excedería el nivel de este texto. Sin embargo, podemos explicar la idea in tuitivamente de la siguiente manera. Supongamos que utilizan- do los datos del ejemplo 2.1, restamos la media a cada uno de los valores y sumamos estas diferencias. Se obtiene.

$$
\begin{aligned}
&(24-19.6) + (25-19.6) + (22-19.6) + (20-19.6) + (15-19.6) \\
&\quad + (25-19.6) + (17-19.6) + (16-19.6) + (15-19.6) \\
&\quad + (17-19.6)
\end{aligned}
$$

$$= 4.4 + 5.4 + 2.4 + 0.4 - 4.6 + 5.4 - 2.6 - 3.6 -4.6-2.6=0$$

Cuando se realiza este mismo cálculo con cualquier grupo de datos la suma obtenida es siempre cero, se puede representar simbolicamente este resultado mediante la expresión $\sum_{i=1}^{n}(Xi-\bar{X})=0$, que es una identidad puesto que es verdadera para todos los valores posibles de una variable. En virtud de esta identidad, entonces, una vez conocidas las n-1 diferencias o desviaciones, se puede determinar automáticamente el valor de la última.

En consecuencia, decimos que hay n-1 grado de libertad disponibles para calcular la varianza de la muestra.

Una fórmula alternativa que suele emplearse para el cálculo de varianza es:

$$s^2 = \frac{n\sum Xi^2 - (\sum Xi)^2}{n(n-1)}$$

Para explicar el empleo de esta fórmula utilicemos los datos del ejemplo 2.1

$$s^2 = \frac{10(24^2+25^2+\ldots\ldots+17^2)-(24+25+\ldots\ldots+17)^2}{10\ (9)} = \underline{16.93}$$

2.5.3 LA DESVIACION ESTANDAR.

La raíz cuadrada positiva de la varianza se denomina desvia-- ción estándar. Para muchos fines es una medida de variabilidad más útil que la varianza. Por un lado, la desviación estándar se expresa en las mismas unidades que las observaciones originales y la media mientras que la varianza se expresa en unidades elevadas al cuadrado.

En relación al ejemplo anterior, donde la unidad de medida es la hora, se puede decir que la cantidad media de tiempo que emplearon los estudiantes viendo televisión es de 19.6 horas. La desviación estándar es $\sqrt{16.93} = 4.1$ horas y la varianza es de 16.93 horas al cuadrado.

La siguientes fórmulas dan las desviaciones estándar de la -- muestra.

$$S = \sqrt{\frac{\sum (Xi-\bar{X})^2}{n-1}}, \qquad S = \sqrt{\frac{n\sum Xi^2 - (\sum Xi)^2}{n(n-1)}}$$

La varianza y desviación estándar de una población se indica - por medio de los símbolos σ^2 y σ respectivamente la letra griega σ se denomina "sigma". La varienza de una población finita de tamaño N se calcula mediante la fórmula:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (Xi - \mu)^2}{N}$$

La fórmula de cálculo de σ^2 , análoga a la de la varianza de la muestra, es:

$$\sigma^2 = \frac{N\sum Xi^2 - (\sum Xi)^2}{N^2}$$

Si se quiere una fórmula para σ , se debe tomar la raíz cuadrada de las dos últimas fórmulas para σ^2 .

2.6 DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS

Los datos que se obtienen a traves de una investigación estadística no son generalmente susceptibles de análisis e interpretación. Para facilitar los cálculos númericos hay que sacar información de los registros, cuestionarios y organizarla convenientemente. La cantidad de datos que se va a procesar puede ser tan grande que su organización y análisis resulten poco prácticos sin la ayuda de computadoras de alta velocidad. Cuando se trata de cantidad pequeña de datos, el trabajo puede hacerse a mano. En este texto se van a estudiar procedimientos manuales, pero conviene tener presente que aquello que se puede hacer a mano, se puede hacer a máquina.

Un instrumento muy útil para resumir grandes conjuntos de datos es la distribución de frecuencia. Esta consiste en agrupar los datos en clases, que muestran el número o porcentaje de observaciones de cada una de ellas. Una distribución de frecuencia, se representa en forma tabular y fráfica.

Los principales pasos para la elaboración de una distribución - de frecuencia para datos muestrales son los siguientes:

1.- Establecer las clases o intervalos en los que se agruparon- los datos.

2.- Ordenarlos en clases mediante conteo por marcas.

3.- Contar el número de cada clase.

4.- Presentar los resultados en una tabla o gráfica.

EJEMPLO 2.6

Considerémos los datos de la tabla 2.1, los cuales representan- la antiguedad (años, meses) de 40 profesores de F.C.A. en la- docencia.

TABLA 2.1 ANTIGUEDAD DE 40 PROFESORES EN LA DOCENCIA .

11.1	12.5	32.4	7.8	21.0	16.4	11.2	22.3
4.4	6.1	27.5	32.8	18.5	16.4	15.1	6.0
10.7	15.8	25.0	18.2	12.2	12.6	4.7	23.5
14.8	22.6	16.0	19.1	7.4	9.2	10.0	26.2
3.5	16.2	14.5	3.2	8.1	12.9	19.1	13.7

Para establecer las clases de la distribución, son necesarios - los siguientes pasos:

1.- Determinar el rango de los datos de la tabla 2.1 La mayor antigüedad es 32.8 y la menor antigüedad es 3.2 por lo — que el rango es 29.6 (29 años, 6 meses).

2.- Decidir el número de clases que se vaya emplear. Es mejor utilizar entre 5 y 15 clases, con menos de 5 clases no se podrían observar características importantes de los datos, en tanto con más de 15 clases preporcioarían demasiados - detalles.

Una regla empírica es calcular la raíz cuadrada de n, y a justarla para adaptarla a (si es necesario) los límites 5 a 15. Por ejemplo, para 400 observaciones, $\sqrt{400} = 20$, que se deba ajustar a 15. En el caso de los 40 profesores tendríamos $\sqrt{40} = 6.32$ que se deberá redondear ya sea 6 ó 7.

3.- Dividir el rango entre K, que es el número de clases, para obtener una amplitud de clase: $29.6/6 = 4.93 \approx 5$.

4.- Considerar los intervalos preliminares, empezando con un entero que se encuentre justamente por debajo del valor más - pequeño. Por ejemplo, la primera clase es:

límite inferior: 3 límite superior: 3 + amplitud = 3+5 = 8

La segunda clase es:

límite inferior: 8 límite superior: 8 + 5 = 13

La tercera clase es:

de 13 a 13 + 5 = 18

La cuarta clase es:

de 18 a 23

La quinta clase es:

de 23 a 28

La sexta clase es:

de 28 a 33

Es importante darse cuenta, que cada observación debe estar incluida en una sola clase. Si se presenta el valor 8.0, quizá se dude en incluirlo en la primera o en la segunda clase, ya que - en ambas el número 8 es su punto extremo. Por lo tanto, es conveniente utilizar intervalos como:

3 a $<$ 8	13 a $<$ 18	23 a $<$ 28
8 a $<$ 13	18 a $<$ 23	28 a $<$ 33

Una vez obtenidos los intervalos de clase, cada dato se deberá colocar en la clase que le corresponda mediante el conteo por marcas. Por ejemplo, el primer valor es 1.1, que queda en la segunda clase. Una distribución de frecuencia, se puede formar al enumerar los intervalos y colocar una diagonal contraria — que atraviese cada conjunto haciendo las veces de quinta marca.

TABLA 2.2

CLASE	MARCAS	CONTEO
3 a 8	𝍸 |||	8
8 a 13	𝍸 ||||	10
13 a 18	𝍸 ||||	9
18 a 23	𝍸 ||	7
23 a 28	||||	4
28 a 33	||	2
		40

A continuación se cuentan las marcas por clase (véase tabla 2.2) y posteriormente se elaborará la tabla de frecuencia como la siguiente .

TABLA 2.3 DISTRIBUCION DE FRECUENCIA DE LA ANTIGUEDAD DE LOS PROFESORES°

Antiguedad	Número de Profesores	Porcentaje de Profesores
3 a < 8	8	$\frac{8}{10} = 0.200$
8 a < 13	10	$\frac{10}{40} = 0.250$
13 a < 18	9	$\frac{9}{40} = 0.225$
18 a < 23	7	$\frac{7}{40} = 0.175$
23 a < 28	4	$\frac{4}{40} = 0.100$
28 a < 33	2	$\frac{2}{40} = 0.050$
	40	

También se puede representar la misma información mediante un histograma de frecuencia que muestra la clase en el Eje Horizontal y la frecuencia (reales o relativas) en el Eje Vertical. Los límites de las "barras" coinciden con los puntos extremos de los intervalos de clase. Ver figura 2.1

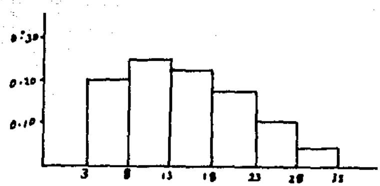


Figura 2.1 distribución de frecuencia relativas de la antigüedad de los profesores.

Al unir los puntos medios delas clases del histograma mediante rectas, se contruye un polígono de frecuencia. Observemos la figura 2.2.

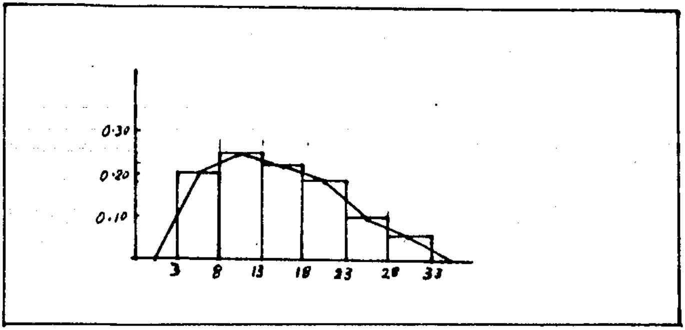


Figura 2.2. Polígono de frecuencias (valiendose de los datos de los profesores).

2.6.1 DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIA ACUMULADA.

Amenudo resulta conveniente tener los datos de una distribución de frecuencia en forma acumulada. Por ejemplo, considerando la antigüedad de los 40 profesores de la F.C.A, se puede determinar rápidamente, con una tabla, el número de profesores que tienen una antigüedad por abajo de 23 años.

Esto lo podemos hacer por medio de una tabla que presente los datos en forma de distribución de frecuencia acumulada a partir de una distribución de frecuencia como la de la tabla 2.3 registrando, para cada intervalo de clase, la frecuencia de ese intervalo más las frecuencias de todos los intervalos anteriores.

La acumulación puede empezar con el intervalo de clase más pequeño o más grande.

TABLA 2.4 DISTRIBUCION DE FRECUENCIA ACUMULADA DE LA ANTIGUEDAD DE LOS PROFESORES DE LA F.C.A.

INTERVALO DE CLASE	FRECUENCIA ACUMULADA
3 a $<$ 8	8
8 a $<$ 13	18
13 a $<$ 18	27
18 a $<$ 23	34
23 a $<$ 28	38
28 a $<$ 33	40

Una distribución de frecuencia acumulada que empiece con el intervalo más pequeño muestra, para cada intervalo de clase, la frecuencia de valores que son menores que o iguales al límite superior de ese intervalo. Una distribución de frecuencia acumulada que empiece con el intervalo de clase más grande muestra, para cada intervalo de clase, la frecuencia de valores mayores que o iguales al límite inferior de ese intervalo. En la tabla 2.4 se puede ver un ejemplo de distribución de frecuencia acumulada del primer tipo (" menor que").

Una tabla como la 2.4 nos permite determinar a simple vista el número de observaciones que son menores o iguales que o cualquier límite superior de clase. De esta manera, vemos que 34 de las 40 observaciones son menores o iguales a 23, que 38 observaciones son menores o iguales que a 28 y así sucesivamente.

Es posible también construir una distribución de frecuencia relativa acumulada.

Para ello se pueden sumar las proporciones sucesivas en la misma forma que las frecuencias observadas o, alternativamente, se puede devidir cada una de las frecuencias acumuladas por el número total de observaciones.

La tabla 2.5 muestra las distribuciones de frecuencia relativa y de frecuencia relativa acumulada para los datos de la tabla 2.4.

TABLA 2.5 DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIA RELATIVA Y DE FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA DE LA ANTIGUEDAD DE LOS 40 PROFESORES DE LA F.C.A.

INTERVALO DE CLASE.	FRECUENCIA RELATIVA.	FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA.
3 a $<$ 8	0.200	0.200
8 a $<$ 13	0.250	0.450
13 a $<$ 18	0.225	0.675
18 a $<$ 23	0.175	0.850
23 a $<$ 28	0.100	0.950
28 a $<$ 33	0.050	1.000
	1.000	

2.7 MEDIDAS DESCRIPTIVAS CALCULADAS A PARTIR DE DATOS AGRUPADOS.

Una buena razón para agrupar datos y construir distribuciones de frecuencia de la manera como se explicó anteriormente en este capítulo es la facilidad para calcular las diferentes medidas descriptivas, este es un punto importante si se dispone solamente de calculadora de bolsillo o de escritorio y si el tamaño de la muestra o de la población es muy grande.

NOTA: si se tienen todos los datos es un error agruparlos para calcular medidas descriptivas. Estas técnicas solo tienen sentido cuando ya se tienen los datos agrupados.

En realidad, el hecho de saber cómo se calculan las medidas des criptivas a partir de datos agrupados está perdiendo poco a poco su importancia, debido a que actualmente se dispone con cierta facilidad de computadoras electrónicas.

Sin embargo, a veces es necesario calcular las medidas descriptivas tomando datos publicados únicamente en la forma de una distribución de frecuencia.

2.7.1. LA MEDIA.

Cuando se agrupa un conjunto de valores en intervalos de clase, como en la tabla 2.3, las observaciones individuales pierden su identidad. Solamente es posible especificar el número de observaciones que están incluidas dentro de unos límites de clase determinados. Para calcular la media, suponemos que todos los valores que se incluyen dentro de un intervalo de clase determinado son iguales al punto medio de este intervalo.

Se puede obtener el punto medio del intervalo calculando la media de los límites de clase.
Por ejemplo, el punto medio del primer intervalo de la tabla 2.3 es igual a $(3 + 8)/2 = 5.5$.
Supóngase entonces que los 8 valores que están incluidos en el primer intervalo de la tabla 2.3 son todos iguales a 5.5, que los 10 valores del segundo intervalo son iguales a 10.5 y así sucesivamente. Para obtener la media, simplemente sumamos los productos que se obtienen multiplicando la frecuencia de cada intervalo por su punto medio y dividiendo luego este total, por la suma de las frecuencias.

Sea mi el punto medio del intervalo de clase i, la fórmula para calcular la media de una muestra a partir de datos agrupados es:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{K} mi\ fi}{n} \qquad (2.1)$$

Donde K es el número de intervalos de clase y $n = \sum fi$.

EJEMPLO 2.7

Con respecto al ejemplo 2.6, supóngase que los datos forman una muestra y calculemos la media de la antigüedad de los 40 profesores de la F.C.A. en la docencia, utilizando los datos tal como están agrupados en la tabla 2.3.

Los pasos intermedios de este cálculo se muestran en las columnas 3 y 4 de la tabla 2.6.

Mediante la ecuación (2.1) tenemos:

$$\bar{X} = \frac{595}{40} = 14.875$$

La fórmula para calcular la media de una población finita a partir de datos agrupados es la misma de la ecuación 2.1, excepto en que $\bar{X}$ se reemplaza por μ y n se reemplaza por N.

TABLA 2.6 TABLA DE TRABAJO PARA CALCULAR MEDIDAS DESCRIPTIVAS

Apartir de los datos agrupados del ejemplo 2.1

Intervalo de clase	Frecuencia (fi)	Punto medio(mi)	Mifi	Mi^2 fi
3 a $\angle$ 8	8	5.5	44.0	242.00
8 a $\angle$ 13	10	10.5	105.0	1102.50
13 a $\angle$ 18	9	15.5	139.5	2162.25
18 a $\angle$ 23	7	20.5	143.5	2941.75
23 a $\angle$ 28	4	25.5	102.0	2601.00
28 a $\angle$ 33	2	30.5	61.0	1860.50
			595.0	10910

La media calculada a partir de datos agrupados es solamente una aproximación de la media verdadera.

2.7.2 LA MEDIANA.

Para calcular la mediana partiendo de datos agrupados recordemos que esta medida descriptiva se puede definir como el valor que se encuentra en la mitad de una serie ordenada de valores.

También podemos definir la mediana de una distribución como aquel punto del ejercicio horizontal del histograma correspondiente en- el cual, si se traza una línea vertical, el área comprendida bajo el histograma queda dividida en dos partes iguales.

Antes de dar una fórmula general para calcular la mediana veremos un ejemplo, de los cálculos que se deben efectuar.

EJEMPLO 2.8

Calculemos la mediana de la antigüedad de los 40 profesores en - la docencia del ejemplo 2.6. Se busca el valor asociado al - - - $n/2 = \frac{40}{2} = 20$ punto. Según la tabla 2.4, 18 observaciones es-- tán comprendidas dentro de los dos primeros intervalos.
La mediana, entonces, está en el tercer intervalo de clase. Es - decir, la observación 20 está en el tercer intervalo y necesitamos llegar hasta la observación 2 de este intervalo, con el fin- de llegar hasta la observación 20 del conjunto completo de datos.

Suponiendo que las 9 observaciones del tercer intervalo están uniformemente distribuídas en todo este intervalo tenemos que adelantarnos en un $\frac{2}{9}$ de trayecto del intervalo, para llegar hasta la observación 20.

Como el intervalo tiene 5 unidades de amplitud tenemos que agregar un $\frac{2}{9}$ de 5 a 13, que es límite inferior verdadero del ter-- cer intervalo de clase, para obtener el valor de la observación- 20. En otras palabras, para la antigüedad de los profesores, tenemos:

$$\text{MEDIANA} = 13 + \frac{2}{9}(5) = 14.1$$

El procedimiento que se acaba de describir se puede resumir por medio de la siguiente fórmula:

$$\text{MEDIANA} = L = \frac{j}{f}\ w$$

donde

- L = límite inferior verdadero del intervalo de la clase que contiene la mediana.

- J = número de observaciones que se necesitan para llegar hasta la mediana después de que se ha llegado al intervalo de clase que contiene la mediana.

- f = Número de observaciones que están incluidas en el intervalo que contiene la mediana.

- W = Amplitud del intervalo de clase que contiene la mediana.

2.7.3 LA MODA.

Cuando se necesita una medida para datos agrupados análoga a la-moda de los datos no agrupados, basta hablar generalmente de clase modal, que es el intervalo de clase que contiene el mayor número de observaciones.

La clase modal correspomdiente a la antigüedad de los 40 profesores de la tabla 2.3,

Por ejemplo, es el segundo intervalo, cuyos límites de clase son de 8 a menor que 13.

2.7.4 LA VARIANZA Y LA DESVIACION TIPICA.

Con el fin de calcular la varianza y la desviación típica a partir de datos agrupados debemos suponer como se hiso para el cálculo de la media que las observaciones, de un intervalo de clase determinado están localizados en el punto medio del intervalo.

La fórmula conceptual o de definición para calcular la varianza de la muestra a partir de datos agrupados es;

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{K} (mi - \bar{X})^2 \; fi}{n - 1}$$

Y la fórmula de cálculo es:

$$S^2 = \frac{n \sum_{i=1}^{K} mi \; fi - (\sum mifi)^2}{n(n-1)}$$

Podemos obtener fórmulas análogas para la varianza de una población finita, σ^2, reemplazando $\overline{X}$ por μ, n por N y n(n-1) por N.N.

EJEMPLO: 2.9.

Calculemos la varianza y la desviación estandar de la antigüedad de los 40 profesores del ejemplo 2.6 empleando datos agrupados.

Los cálculos intermedios se muestran en la columna 5 de la tabla 2.6 utilizando la fórmula de cálculo tenemos:

$$S^2 = \frac{40\ (10910) - (595)^2}{(40)\ (39)}$$

$$= \frac{436400 - 354025}{1560}$$

$$= \frac{82375}{1560}$$

$$= 52.80 \text{ aproximadamente}$$

Y la desviación típica es:

$$S = \sqrt{52.80} = 7.3 \text{ aproximadamente.}$$

CAPITULO III

P R O B A B I L I D A D

3.1 INTRODUCCION

Los orígenes de las matemáticas de la probabilidad se remonta - al siglo XVI. Las primeras aplicaciones se relacionaban basicamente a los juegos de azar.

Los jugadores fanaticos utilizaron el conocimiento de la teoría de la probabilidad para desarrollar estrategias de apuesta. Incluso actualmente son muchas las aplicaciones que comprenden-juegos de azar como en diversas loterías, en casinos, en las carreras de caballos y en los deportes organizados.
Sin embargo, el uso de la probabilidad va más allá de los juegos de azar. En la actualidad, el Gobierno, las compañías particulares y las organizaciones profesionales y no lucrativas adoptan la teoría de la probabilidad en su cotidiano proceso de toma de decisiones.

3.2 EXPERIMENTOS ALEATORIOS Y RESULTADOS

Por un experimento aleatorio u observación aleatoria o simplemente experimento u observación, se entenderá un proceso que tiene las siguientes propiedades.

1).- El proceso se efectúa de acuerdo a un conjunto bien definido de reglas.
2).- Es de naturaleza tal que se repite o puede concebirse la repetición del mismo.
3).- El resultado depende del azar, por lo tanto, no se puede predecir con exactitud un resultado del ensayo.

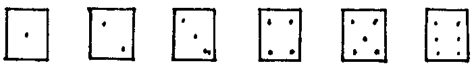
Al resultado de una sola ejecución del experimento se le llama el resultado del ensayo.

Ejemplos de lo anterior son: Los juegos de azar; tales como tirar un dado, extraer una carta de un juego de naipes bien barajeadas, lanzar una moneda al aíre, etc.

Al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento se le llama espacio muestral del experimento, y se denota por S.

EJEMPLOS: 3.1

Se arroja un dado una sola vez, éste puede quedar con una de las seis caras siguientes:



Por lo tanto el espacio muestral consta de seis elementos, por lo que podemos escribir:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

EJEMPLO: 3.2

Se lanza una moneda al aire obtenemos dos resultados posibles aguila (a), sol (s), por lo tanto, en este caso el espacio muestral tiene dos elementos.

$$S = \{a, s\}$$

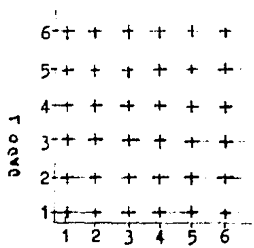
EJEMPLO: 3.3

Si lanzamos dos monedas al aire obtenemos los siguientes resultados posibles: aa, as, sa, ss; por lo tanto:

$$S = \{ aa,\ as,\ sa,\ ss \}$$

EJEMPLO: 3.4

Sea el experimento que consiste en lanzar dos dados simultánea - mente. ¿ Cuántos posibles resultados podemos encontrar ?



Dado 2

Por lo tanto S = (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6)
(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6)
(4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6)
(5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6)
(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6)

EJEMPLO 3.5

Si extraemos dos empaques de un conjunto de cinco (numerados del 1 al 5), el espacio muestral consta de los diez resultados posibles.

S = (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (2,3) (2,4)(2,5)(3,4)
(3,5) (4,5)

Se denotará por un evento a todo subconjunto de S; la noción de evento incluye también al espacio muestral completo, S, como un caso especial. A todo evento lo denotaremos con letras mayúsculas del alfabeto (A,B,C,D,...).

EJEMPLO 3.6

Lance un dado y observe el número que aparece en la cara superior.

Algunos eventos son:

Evento A: Se observa un número par.
Evento B: Se observa un número mayor que 4.
Evento E_1: Se observa el 1
Evento E_2: Se observa el 2
Evento E_3: Se observa el 3
Evento E_4: Se observa el 4
Evento E_5: Se observa el 5
Evento E_6: Se observa el 6

Estos eventos no representan a la totalidad de eventos posibles asociados a un experimento, pero son suficientes para propósitos de ilustración. Habrá notado la diferencia entre los eventos A y B y los eventos E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 y E_6

El evento A ocurrirá si el euento E_2, E_4 o E_6, ocurre, esto es, si se observa 2, 4 o 6. En otras palabras A puede ser descompuesto (descrito) como una colección de cuentos más simple, a saber E_2, E_4 y E_6 . De manera análoga, B ocurrirá si E_5 o E_6 ocurre y puede verse como una colección de eventos más simle.

En contra posición en lo anterior, nótese que es imposible descomponer a cualquiera de los eventos E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, ó - E_6.

Estos eventos son llamados eventos simples y A y B son eventos compuestos.

Un evento que no puede ser descompuesto es llamado evento simple.

Los eventos que no tienen elementos en común se les llama mutuamente excluyente. Así el evento C: se observa un número impar y el evento A, se observa un número par, en el ejemplo 3.6 son excluyentes ya que tanto C como A no tienen elemento común.

Se dice que los eventos son colectivamente exhaustivos si por lo menos uno de ellos debe ocurrir durante un experimento.

Así los eventos E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, y E_6, Ejemplo 3.6 son colectivamente exhaustivos, agotan todas las posibilidades.

3.3 CONCEPTO CLASICO DE PROBABILIDAD

Se puede definir el concepto de probabilidad clasica, concepto que sostuvieron Pascal, Fermat y sus suscesores hasta el presente siglo, como sigue:
La probabilidad de ocurrencia de un evento A contenido en un espacio muestral S está dada por:

$$P(A) = \frac{\text{El número de veces en que el evento A ocurre}}{\text{El número total de resultados posibles}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

EJEMPLO 3.7

Sea el experimento de arrojar un dado legal. Encuentre la probabilidad de obtener un número impar.

A: Obtener un número impar

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{1,3,5\}$

Por lo tanto:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

EJEMPLO 3.6

Dos dados legales se tiran simultaneamente, encontrar la probabilidad del evento A: los dos números que caen hacia arriba son pares.

A: los números que caen hacia arriba son pares.

A= (2.2)(2.4)(2.6)(4.2)(4.4)(4.6)(6.2)(6.4)(6.6)

S= (1,1)(1,2),.....................(1,6)
(2,1)(2.2),.....................(2,6)
.
.
.
(6.1)(6.2),.....................(6.6)

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36}$$

3.3.1 UNION E INTERSECCION DE EVENTOS.

El evento A U B, se llama unión de los eventos A y B.
Obsérvese que AUB consta de todos los elementos que se encuentran contenidos en A o en B, o en ambos.
El evento A∩B, se llama intersección de los eventos A y B.
Obsérvese que A∩B consta de todos los elementos que se encuentran contenidos en A y en B simultaneamente.
Cuando dos o más eventos no pueden ocurrir simultaneamente al realizar un experimento, se dice que estos son mutuamente exclusivos, o sea:

$$(A \cap B = \phi).$$

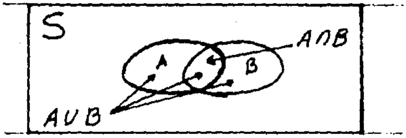


Diagrama de Venn que representa dos eventos A y B contenidos en un espacio muestral S, y su unión $A \cup B$ y su intersección $A \cap B$

EJEMPLO: 3.9

1.- Al analizar una vez un dado, los eventos:

A: El dado muestra hacia arriba un número no menor de 4

B: El dado muestra un número divisible entre 3

Tiene la unión $A \cup B = 3,4,5,6$ y la intersección $A \cap B = 6$

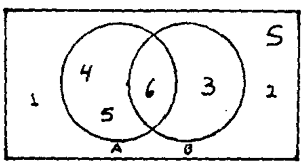


DIAGRAMA DE VENN

3.4 REGLA DE PROBABILIDAD.

3.4.1. LAS PROBABILIDADES VARIAN ENTRE 0 Y 1.

En toda definición de, Probabilidad, P es siempre un número entre 0 y 1 inclusive, si la ocurrencia de un evento es cierta, su probabilidad es 1; si es cierta la no-ocurrencia del mismo evento, la probabilidad es 0; Por ejemplo, la probabilidad de obtener un número par en el lanzamiento de un dado es 3/6. Pero la probabilidad de obtener un número mayor que siete en el lanzamiento de un dado es cero (puesto que no existe el número siete en un dado), porque no hay eventos que favorezcan el resultado. (Por ejemplo obtener cualquier número en un lanzamiento de un dado) P = 1. Así, para cualquier evento dado, digamos A,

$$0 \leqq P\,(A) \leqq 1$$

en donde el símbolo $\leqq$ significa menor o igual que y el símbolo $\geqq$ significa mayor o igual que.

3.4.2 LA PROBABILIDAD DEL ESPACIO MUESTRAL ES 1

Se sabe que cuando lanzamos un dado y nos preguntamos por el espacio muestral de dicho lanzamiento, obtenemos que:
$S = \{1,2,3,4,5,6\}$.
Por lo tanto, la probabilidad del espacio muestral S, que lo denotamos por el símbolo P(S), si es igual a uno, debido a que el espacio muestral S contiene a todos los resultados posibles del evento, la probabilidad del espacio muestral es 1:

$$P(S) = 1$$

3.4.3. EL COMPLEMENTO DE UN EVENTO.

La probabilidad de un evento A y su complemento A^c contenidos en un espacio muestral S están relacionados según la fórmula.

$$P(A) = 1 - P(A^c) \qquad (3.1)$$

En éste punto, se puede afirmar lo siguiente:

i) $0 \leq P(A) \leq 1$

ii) $P(S) = 1$

iii) $P(A) + P(A^c) = 1$

EJEMPLO 3.10

Se arrojan simultaneamente cinco monedas, encontrar la probabilidad del evento A: cae al menos un aguila hacia arriba, el espacio muestral consta de $2^5 = 32$ elementos.
Suponiendo que las monedas son legales (regulares), podemos asignar la misma probabilidad (1/32) a cada resultado.
Entonces el evento A^c (en que ninguna aguila cae hacia arriba) consta de un resultado únicamente.
Por lo tanto, $P(A^c) = \frac{1}{32}$ y la respuesta es:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

3.4.4 LA REGLA DE LA ADICION.

Ocacionalmente se quiere determinar la probabilidad de uno entre varios eventos diferentes. Por ejemplo, supóngase que se extrae una carta de una baraja de 52 cartas bien barajeada.
¿ Cuál es la probabilidad de que la carta sea un rey o una figura negra ? .

El número total de resultados posibles es 52 (esto es n(s)=52).
Hay 4 reyes y 6 cartas negras ? (ver figura 3.1). La suma parecería ser 10 .

Se puede pués suponer que la probabilidad de obtener bién un rey, bién una carta negra es 10/52. Nótese, sin embargo, que al llegar a este total hemos contado ciertas cartas dos veces: los reyes como en las cartas negras. Obviamente debemos contar estas cartas tan sólo en uno de los totales. Así si incluimos los reyes negros en el total de las cartas negras la suma revisada será 2 reyes negros en el total de las cartas negras la suma revisada será 2 reyes rojos más seis figuras negras para un total de 8.
Nuestra probabilidad será pués:

$$P = \frac{8}{52}$$

Nótese que otra probabilidad es sumar el número de reyes el número de cartas negras (4 + 6 = 10), y luego restar el número de cartas con ambas características (2), ya que previamente las habíamos añadido dos veces, Así, nuestra probabilidad es.

$$P = \frac{4 + 6 - 2}{54} = \frac{8}{52}$$

Esto nos lleva a una formulación general de la regla de la - suma. Si A y B son eventos cualesquiera contenidos en un espacio muestral S, entonces la probabilidad de A unión B es - igual a la probabilidad de A más la probabilidad de B menos- la probabilidad de la intersección de A y B.
En una forma simbólica, se lee:

$$P\ (A \cup B) = P\ (A) + P\ (B) - P\ (A\ B) \qquad (\ 3.2\ )$$

Aplicados al ejemplo anterior obtenemos que:

A: La carta extraída es un rey

B: La carta extraída es una figura negra

A B: La carta extraída es un rey y es una figura negra.

Por lo tanto:

$$P\ (\ A \cup B\ ) = \frac{4}{52} = \frac{6}{52} - \frac{2}{52} = \frac{8}{52}$$

Nótese que si los eventos A y B son mutuamente exclusivos - (esto es, si los eventos no pueden ocurrir simultaneamente), el último término desaparece. Así la regla de adición con — eventos mutuamente exclusivos es:

$$P\ (\ A \cup B\ ) = P\ (A) + P\ (B) \qquad (3.3)$$

A manera de ilustración: ¿ Cuál es la probabilidad de extraer una espada o un trébol de una baraja bien barajada ? como una carta no puede ser al mismo tiempo espada y trébol, estos dos sucesos son mutuamente exclusivos. Por tanto empleando la fórmula (3.3), se tiene que:

A: La carta extraída es una espada

B: La carta extraída es un trébol

Por tanto:

$$P\,(A) = \frac{13}{52}$$

$$P\,(B) = \frac{13}{52}$$

Por tanto:

$$P(A \cup B) = \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{26}{52}$$

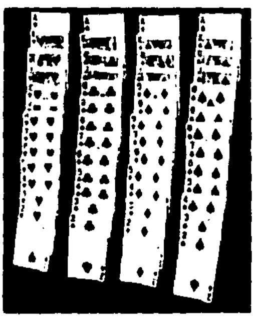


Fig. 3.1 Baraja normal de 52 cartas

3.5 PROBABILIDAD CONDICIONAL

Muchas veces se necesita encontrar la probabilidad de un evento B si se sabe que ha ocurrido un evento A. Esta probabilidad condicional de B dado A, se representa como P (B/A).

En este caso A sirve como un espacio muestral nuevo (reducido), y la probabilidad, es la fracción de P (A) que corresponde a $A \cap B$. Así que:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad P(A) \neq 0 \qquad (3.4)$$

Del mismo modo, la probabilidad condicional de A dado B es:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B) \neq 0 \qquad (3.5)$$

EJEMPLO 3.11

Sea el experimento consistente en lanzar dos dados simultaneamente. Si en una tirada la suma es 6, calculemos la probabilidad de que en alguno de los dados aparezca el 5

Las caras de los dados suman 6 si ocurre el evento.

$$A = \{(1,5),\ (2,4),\ (3,3),\ (4,2),\ (5,1)\}$$

Si B = El 5 aparece en alguno de los dados , entonces:

$A \cap B = (1,5)\ (5,1)$, por lo que:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{5}$$

EJEMPLO 3.12

Sea el experimento que consiste en lanzar un dado dos veces. Calculemos la probabilidad de que la suma de los números que caen hacia arriba sea mayor o igual que 10, dado que en la primer tirada apareció el 5.

El evento A: La suma de los números que caen hacia arriba es mayor o igual que 10.

B: En la primer tirada apareció el 5.

Primero se obtienen los puntos del evento B que son.

$$B = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}$$

A partir del evento B se obtiene el evento A.

$$A = \{(5,5),(5,6)\} ,$$

Por tanto

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{6}$$

EJEMPLO 3.13

Se tienen dos letras "a" y dos letras "b", las cuales deben de ordenarse en grupos distintos de cuatro (por ejemplo, un grupo sería abba), siendo igualmente probable todos los arreglos posibles.

Calcule la probabilidad de que las dos letras a queden juntas cuando la última letra es una b.

$$S = \{bbaa,\ baba,\ baab,\ abba,\ abab,\ aabb\}$$

$$B = \{baab,\ aabb,\ abab\}$$

$$P = (A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3}$$

EJEMPLO 3.14

En un grupo hay 50 estudiantes de los cuales 30 son casados, 15 saben hablar inglés y 10 son casados y saben inglés. Si se elige al azar uno de los estudiantes para que represente al grupo ante la asociación estudiantil de su escuela, ¿cuál es la probabilidad de que el elegido sepa inglés si es casado?.

A: 30 son casados $P(A) = \frac{30}{50} = \frac{3.10}{5.10} = \frac{3}{5}$

B: 15 saben hablar inglés $P(B) = \frac{15}{50}$

$A \cap B$: 10 son casados y saben inglés $P(A \cap B) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/5}{3-5} = \frac{1}{3}$$

EJEMPLO 3.15

Calcule la probabilidad de que la suma de los números observados al lanzar dos veces un dado sea mayor o igual que 10, con la condición de que el 5, aparezca por lo menos en una tirada.

El evento dado es B: El 5 aparece por lo menos en una tirada.

A: La suma es mayor o igual a 10.

$B = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(6,5)\}$

$A = \{(5,5),(5,6),(6,5)\}$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{11}$$

3.5.1 REGLA DE LA MULTIPLICACION

Si A y B son eventos contenidos en un espacio muestral S, y $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$, entonces se cumple que:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A) = P(B)\, P(A/B) \qquad (3.6)$$

1.- Muestreo con reemplazo significa que el objeto que se ex traje al azar se coloca de nuevo en el conjunto dado se mezcla completamente y se procede a extraer al azar el - siguiente objeto.

2.- Muestreo sin reemplazo, significa que el objeto que se - extraje se deja aparte y no regresa al conjunto.

3.16 (MUESTREO SIN REEMPLAZO).

Una caja contiene 10 tornillos de los cuales 3 están defectuo-- sos.
Dos tornillos se extraen al azar; encontrar la probabilidad del evento tal que ninguno de los 2 tornillos están defectuosos.
(se consideran los eventos).

A: El primer tornillo extraído no está defectuoso.

B: El segundo tornillo extraído no está defectuoso.

La probabilidad (A) = $\frac{7}{10}$ ya que 7 de los 10 tornillos son de-- fectuosos y se está mostrando aleatoriamente, por lo cual cada tornillo tiene la misma probabilidad (1/10) de ser escogido.

Si A ocurre, entonces quedan 9 tornillos en la caja, 3 de los - cuales están defectuosos, por consiguiente:

$$P\ (B/A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}\ ,$$

y, por la regla (3,6), la repuesta es:

$$P(A\cap B) = P(A)P(B/A) = 7/10 \cdot 2/3 = 14/30 = 7/15$$

3.17 (MUESTREO CON REEMPLAZO).

EJEMPLO:

Una caja contiene 10 tornillos de los cuales 3 estan defectuosos. " 2 tornillos se extraen al azar, Encontrar la probabilidad del evento tal que ninguno de los tornillos está defectuoso.

A: El primer tornillo extraido no está defectuoso.

B: El segundo tornillo extraido no está defectuoso.

$$P(A\cap B) = P(A)P(B/A) = P(A)P(B) = \frac{7}{10}\cdot\frac{7}{10} = \frac{49}{100}$$

De la igualdad anterior se concluye lo siguiente, que la regla de la multiplicación para eventos independientes se puede expresar como sigue:
Al sustituir a $P(B/A)$ por $P(B)$:

$$P(A\cap B) = P(A)\ \ P(B) \qquad (3.7)$$

EJEMPLO 3.18

En una urna se tienen tres esferas rojas, siete verdes, cinco negras y cinco azules. Se van a extraer tres esferas en forma consecutiva, regresando cada una antes de extraer la siguiente. Calcule la probabilidad de que las tres ean rojas, considere para este caso los eventos:

A = esfera roja en la primer extracción

B = esfera roja en la segunda extracción

C = esfera roja en la tercera extracción

P (tres esferas rojas) =

$$= P(A \cap B \cap C) = \frac{3}{20} \cdot \frac{3}{20} \cdot \frac{3}{20} = \frac{27}{8000}$$

3.6 TECNICA DE CONTEO

Cada regla de probabilidad ha incluido el conteo del número de resultados en que un evento A ocurre y el número total de eventos posibles.

No obstante, en muchos casos, debido al gran número de resultados posibles. Para estos casos, se han desarrollado reglas para conteo.

Se examinarán cinco reglas diferentes para conteo. En primer lugar supóngase que se lanzaron " 10 volados con una moneda". ¿ Cómo se determinaría el número de posibles resultados diferentes ?.

REGLA DE CONTEOS 1 : Si cualquiera de K eventos mutuamente - exclusivos y colectivamente exhautivos, diferentes. Puede - ocurrir en cada uno de n ensayos. El número de resultados posibles es igual a:

$$K^n$$

Si una moneda (que tiene dos lados) se lanza al aire 10 veces, el número de resultados sería $2^{10} = 1024$. Si un dado - (que tiene seis lados) se lanza dos veces, el número de resultados diferentes sería $6^2 = 36$.

En segundo lugar, digamos que el número de eventos posibles es diferente en algunos de los ensayos. Por ejemplo, el departamento de tránsito de una localidad desearía saber cuántos números de placas de licencia constante de tres dígitos por dos letras.

El hecho de que tres valores sen dígitos (cada uno con 10 - posibles resultados) mientras que dos posiciones con letras (cada una con 26 resultados según el alfabeto en inglés) lleva a la segunda regla de conteo.

REGLA DE CONTEO 2: si hay K_1 evento en el primer ensayo, K_2 - eventos en el segundo ensayo,..., y K_n eventos en el n-ésimo-ensayo, entonces el número de posibles resultados es:

$$(K_1)\ (K_2)\ \ldots\ldots(K_n)$$

Por tanto, si una placa de licencia consiste en tres dígitos-seguidos por dos letras, el número total de posibles resultados sería (10)(10)(10)(26)(26) = 676000. En otro ejemplo, si-el menú de un restaurante tiene una selección de cuatro entremeses, 10 entradas, tres bebidas y seis postres, el número de formas en los cuales se puede arreglar en orden un conjunto - de objetos. Si se va a arreglar un conjunto de objetos, si se va a arreglar un conjunto de seis libros de textos en una estantería.

¿ Cómo puede determinar el número de formas en que se pueden-arreglar los seis libros?, el número de formas se podría determinar de la siguiente manera. Cualquiera de los seis libros podría ocupar la primera posición en la estantería.

Una vez llena la primera posición, hay cinco libros a elegir, para llenar la segunda.

Se continua este procedimiento hasta que se ocupan todas las posiciones. El número total de arreglos sería igual a: (6) (5) (4) (3) (2) (1) = 720. Este concepto se puede generalizar en la regla de conteo 3.

REGLA DEL CONTEO 3: El número de formas en que todos los n - objetos se pueden arreglar en orden es:

$$n\,! = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots..1$$

En donde n! se llama n " factorial" y 0! se define como 1. El número de formas en que se podrían arreglar los seis libros es:

$$n\,! = (6)\,(5)\,(4)\,(3)\,(2)\,(1)$$

$$= 720$$

En muchos casos, es importante conocer el número de formas en que se pueden arreglar en orden X objetos seleccionados entre n objetos (X = n). Por ejemplo, en la modificación del problema anterior, si se tienen seis libros pero sólo hay lugar para cuatro libros en la estantería, ¿ en cuántas formas se - podrían arreglar estos libros en la estantería ?.

Esta regla se llama la regla de las permutaciones.

REGLA DE CONTEO 4: permutaciones; el número de formas de arreglar en orden X objetos seleccionados entre n objetos es:

$$\frac{n\,!}{(n-X)\,!}$$

Por tanto, el número de arreglos ordenados para los cuatro libros seleccionados entre los seis libros es igual a:

$$\frac{n\,!}{(\,n-x)} = \frac{6\,!}{(\,6-4)} \quad \frac{6\,!}{2\,!} = \frac{6(5)(4)(3)(2)(1)}{2\,(1)} = 360$$

Además, en muchos problemas no interesa el orden de los resultados, sino sólo el número de formas en que se pueden seleccionar X objetos, sin que importe el orden. Esta regla se llama la regla de las combinaciones.

REGLA DE CONTEO 5: Combinaciones: el número de formas para seleccionar X objetos entre n objetos, sin que importe el orden es igual a:

$$\binom{n}{x} = \frac{n\,!}{X!(n-x)\,!}$$

Por tanto, el número de combinaciones de los cuatro libros selecciónados entre seis libros se expresa con $\binom{6}{4}$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6(5)(4)(3)(2)(1)}{4(3)(2)(1)(2)(1)} = 15$$

3.7 REGLA DE BAYES

La regla de Bayes es un método para verificar las probabilidades (anteriores) existentes, basándose en la información obtenida por el muestreo.

La siguiente es una explicación intuitiva de cómo se lleva a cabo la revisión de probabilidades y por qué es útil tomarlas en cuenta. Considérese el caso de un individuo que apresuradamente besa a su mujer una mañana lluviosa, coge una de las tres bolsas que están sobre la mesa de la cocina y se dirige de prisa hacia su trabajo. Poco después, conforme se dirige a su trabajo, se le ocurre pensar que pudo haber tomado una bolsa equivocada.

Una de ellas contenía su almuerzo: dos tortas de jamón. Otra en cambio, contenía el almuerzo de su hija: una torta de jamón y una de pescado (el cual él detesta).

La tercera bolsa contenía la basura. Un momento de reflexión lo convence de que como había tres bolsas, la probabilidad de que haya tomado la bolsa correcta es $\frac{1}{3}$.

Inmediatamente abre la bolsa y saca una torta. Después de inspeccionarla se da cuenta que es de jamón. Por supuesto, siente un gran alivio al descubrir que por lo menos no tomó la bolsa de la basura.

En ese punto, el tránsito se ha detenido completamente. En lugar de ver de qué es la otra torta, el hombre decide calcular la probabilidad de que haya tomado su propio almuerzo (es decir, la probabilidad de que la otra torta también sea de jamón).

Recuerda que la probabilidad se define como la razón del número de resultados favorables al número total de resultados posibles.

Observa que de haber tomado realmente la bolsa de su almuerzo, entonces habrá dos formas de descubrir si la segunda torta es de jamón. Si trae el almuerzo de su hija, sólo habrá una forma. De este modo, hay tres formas en las que pudo obtener una torta de jamón y dos de ellas se pueden considerar favorables. En este punto la probabilidad de que haya tomado la bolsa correcta es de $\frac{2}{3}$, dada la evidencia de la muestra.

Los automóviles se empiezan a mover nuevamente, y una ligera sonrisa aparece en los labios del individuo. Confiadamente mete su mano en la bolsa y saca otra torta. Un rápido vistazo le indica que se equivocó: la torta es de pescado y no de jamón, lo que le demuestra que la probabilidad es una medida de qué tan posible es un evento y no una garantía de que ocurra. Independientemente de que el individuo se haya dado cuenta o no, utilizó de manera intuitiva el teorema de Bayes para determinar la probabilidad que tenía de haber tomado la bolsa con el almuerzo que le correspondía.

Sin duda, Bayes mismo conocía bien el método intuitivo de resolución de problemas de este tipo.

En el ejemplo anterior, la probabilidad de obtener una torta de jamón equivale a la probabilidad de elegir la primera bolsa y obtener una torta de jamón, más la probabilidad de elegir la segunda y encontrar una de jamón, más la probabilidad de escoger la tercera bolsa y no obtener de jamón, de este modo, la probabilidad a posteriori (revisada) de que tenga la bolsa correcta es:

$$P\ (\text{almuerzo correcto}) = P\ \frac{(\text{bolsa correcta y no torta de jamón})}{(\text{ jamón })}$$

Se puede presentar esto en una forma más detallada:

P (almuerzo correcto torta de jamón)

$$= \frac{P\ (\text{torta de jamón de la bolsa correcta}).}{P\ (\text{ todas las formas de obtener una torta de jamón}).}$$

$$= \frac{P\ (b.c)\ P\ (t.j/b.c)}{P\ (b.c)\ P\ (t,j/bc\ ) + P\ (a.h)\ P\ (t.j/ah) + P\ (b)\ P(t.j/b)}$$

b.c = bolsa correcta

t.j = torta de jamón

a.h = almuerzo de hija

b = basura.

Si se coloca la información en forma tabular, la cifras son más fáciles de visualizar. De este modo

	contenido		
	jamón	pescado	basura
su bolsa	2	—	—
bolsa de la hija	1	1	—
bolsa de la basura	—	—	1

Cambiando estas cifras a porcentajes, y recordando que la probabilidad anterior (antes de tomar la muestra) de elegir cada bolsa era de $\frac{1}{3}$, se elabora la siguiente tabla.

	probabilidad apriori		contenido			
			Jamón	Pescado	Basura	Totales
Forma Especifica	$\frac{1}{3}$	Su bolsa	1.00	0.00	0.00	1.00
	$\frac{1}{3}$	Bolsa de la hija	0.50	0.50	0.00	1.00
	$\frac{1}{3}$	Basura	0.00	0.00	1.00	1.00
			Evidencia de la muestra			

Estamos en condiciones de considerar una expresión general para el teorema de Bayes. De existir un número de "estados de la naturaleza" (como, bolsas sobre la mesa o urnas con canicas), cada uno con 1 o más resultados o eventos de muestreos posibles, asociados con ellos (así como la torta de jamón, la canica roja), la representación tabular de éstos sería:

		E_1	E_2		E_j
Estados Posibles	S_1	$P(E_1/S_1)$	$P(E_2/S_1)$	.....	$P(E_j/S_1)$
de la naturaleza	S_2	$P(E_1/S_2)$	$P(E_2/S_2)$	.....	$P(E_j/S_2)$
	⋮	⋮	⋮		⋮
	Si	$P(E_1/Si)$	$P(E_2/Si)$	.....	$P(E_2/Si)$

Por ejemplo, la probabilidad de que un resultado muestral, digamos E_2 ocurra como consecuencia de un estado particular de la naturaleza, digamos, S_2, se puede calcular de esta manera:

$$P(S_2/E_2) = \frac{P(S2)\,P(E2/S2)}{P(Si)P(E_2/Si)+P(S_2)P(E_2/S_2)+\ldots+P(Si)P(E_2/Si)}$$

Por tanto la fórmula general será:

$$P(Si/E_j) = \frac{P(Si)P(Ej/Si)}{P(Si)P(E_j/Si)+P(S_2)P(E_j/S_2)+\ldots\ldots+P(Si)P(E_j/Si)}$$

Formalmente calcularemos la probabilidad de que el hombre seleccione la bolsa correcta, suponiendo que él encuentra la torta de jamón.

$$P(\text{bolsa correcta/torta de jamón}) = \frac{\frac{1}{3}(1.00)}{\frac{1}{3}(1.00)+\frac{1}{3}(0.50)+\frac{1}{3}(0.00)} = \frac{2}{3}$$

EJEMPLO 3.19

Suponga que tenemos cuatro urnas con 10 canicas de colores en cada una de ellas. En la siguiente tabla se resume el contenido de las urnas.

Color de las canicas

	Roja	Blanca	Azul	Totales
A	1	6	3	10
B	6	2	2	10
C	8	1	1	10
D	0	6	4	10

Se elige una de las urnas en forma arbitraria y de ella se saca una sola canica. Si la cánica es roja ¿cuál es la probabilidad de que sea sacado de la urna B?

Para resolver estos tipos de problemas necesitamos dos cosas:

1.- La probabilidad anterior a seleccionar cada urna.
2.- La probabilidad de que ocurra el evento en cuestión (la canica roja).

Probabilidad anterior		Color			
Probabilidad apriori	Urna	Rojo	Blanco	Azul	Totales
$\frac{1}{4}$	A	0.10	0.60	0.30	1.00
$\frac{1}{4}$	B	0.60	0.20	0.20	1.00
$\frac{1}{4}$	C	0.80	0.10	0.10	1.00
$\frac{1}{4}$	D	0.00	0.60	0.40	1.00

La probabilidad de que se saque la cánica roja de la urna B.

$$P(\text{urna B/roja}) = \frac{P(\text{urna B})P(\text{Roja/urna B})}{P(\text{urna A})P(\text{roja/urna A})+P(\text{urna B})P(\text{rojo/urna B}) + P(\text{urna C})P(\text{roja/urna C})+P(\text{urna D})P(\text{rojo/urna D})}$$

$$= \frac{(1/4)(0.60)}{(1/4)(0.10)+(1+4)(0.60)+(1/4)(0.80)+(1/4)(0.00)}$$

$$= \frac{6}{15}$$

La probabilidad de que se saque la canica roja de la urna C es:

$$P(\text{urna C/roja}) = \frac{P(\text{urna C})P(\text{roja/urna C})}{P(\text{urna A})P(\text{roja/urna A})+P(\text{urna B})P(\text{roja/urna B}) + P(\text{urna C})P(\text{roja/urna C})+P(\text{urna D})P(\text{roja/urna D})}$$

$$= \frac{(1/4)(0.80)}{(1/4)(0.10)+(1/4)(0.60)+(1/4)(0.80)+(1/4)(0.00)}$$

$$= \frac{8}{15}$$

La probabilidad de que se saque la cánica roja de la urna D

$$P(\text{urna D/roja}) = \frac{P(\text{urna D})\ P(\text{roja/urna D})}{P(\text{urna A})P(\text{roja/urna A})+P(\text{urna B})P(\text{roja/urna B}) + P(\text{urna C})P(\text{roja/urna C})+P(\text{urna D})P(\text{roja/urna D})}$$

$$= \frac{(1/4)(0.00)}{(1/4)(0.10)+(1/4)(0.60)+(1/4)(0.80)+(1/4)(0.00}$$

$$= \frac{0}{15}$$

EJEMPLO 3.20

El gerente de control de calidad de una fábrica de llantas desearía determinar en qué turno de producción se produjo una llanta que se reventó. Con base en datos anteriores, de las llantas producidas por la fábrica , 40% salieron en el turno diurno, 40% en el turno mixto y 20% de las llantas salieron del turno de la noche.

Un 5% de las llantas producidas en el turno de día se reventó, un 10% de las llantas del turno mixto se reventó y un 20% de las llantas del turno de la noche se reventó.

¿ Cuál es la probabilidad de que la llanta que se reventó halla sido producida por el turno de día ?.

Turno	Probabilidad apriori	llanta reventada
Diurno	0.40	0.05
Mixto	0.40	0.10
Nocturno	0.20	0.20

$$P(\text{Diurno}/\text{ll-R}) = \frac{P(\text{Diurno})P(\text{ll-R}/\text{Diurno})}{P(\text{Diurno})P(\text{ll-R}/\text{Dirno})+P(\text{Mixto})P(\text{ll-R}/\text{Mixto})}$$

$$= \frac{(0.40)(0.05)}{(0.40)(0.05)+(0.40)(0.10)+(0.20)(0.20)}$$

$$= \frac{.02}{.02 + .04 + .04} = \frac{.02}{.10} = .20$$

La probabilidad de que la llanta que se reventó haya sido producida por el turno mixto.

$$P(\text{Mixto}/11\text{-}R) = \frac{P(\text{mixto})P(II\text{-}R/\text{mixto})}{P(\text{diurno})P(11\text{-}R/\text{diurno})+P(\text{mixto})P(11\text{-}R/\text{mixto}) + P(\text{nocturno})P(11\text{-}R/\text{nocturno})}$$

$$= \frac{(.40)(.10)}{(.40)(.0.05)+(.40)(.10)+(.20)(.20)}$$

$$= \frac{.04}{.10} = .40$$

La probabilidad de que la llanta que se reventó haya sido producida por el turno de la noche.

$$P(\text{nocturno}/11R) = \frac{P(\text{nocturno})P(11\text{-}R/\text{nocturno})}{P(\text{diurno})P(11/R/\text{diurno})+P(\text{mixto})P(11\text{-}R/\text{mixto})+P(\text{nocturno})P(11\text{-}R/\text{nocturno})}$$

$$= \frac{(.20)(.20)}{(0.40)(0.05)+(0.40)(0.10)+(0.40)(0.20)}$$

$$= \frac{0.04}{0.10} = .40$$

CAPITULO IV

D I S T R I B U C I O N E S

D E

P R O B A B I L I D A D

4.1 I N T R O D U C C I O N

La noción de la distribución de probabilidades surge al considerar un experimento aleatorio e interrogamos acerca de los eventos posibles y de las probabilidades correspondientes. Existen dos tipos de distribuciones que son importantes en las aplicaciones prácticas a saber, las distribuciones discretas y las continuas .

Una distribución discreta surge al contar (por ejemplo, el número de artículos defectuosos en un lote dado, el número de carros en una carretera, o el número de casos de enfermedades).

Una distribución continua aparecerá si se mide (por ejemplo, longitudes, o temperaturas).

En este capítulo se tratan las distribuciones de probabilidades de una sola variable aleatoria.

4.2 VARIABLES ALEATORIAS

Se arrojan dos dados, se sabe que la suma X de los dos números - que caen hacia arriba debe ser un entero que está entre 2 y 12, - pero no podemos predecir qué valor de X aparecerá en la siguiente prueba, y podemos decir que X depende del " azar ". También, - si deseamos extraer cinco pernos de un lote de pernos y medir - - sus diámetros, no podemos predecir cuántos serán defectuosos, esto es, que no cumplen los requisitos dados.

Por lo tanto X= número de pernos defectuosos es de nuevo una función que depende del " azar ". El tiempo de vida de un foco que se extrae aleatoriamente de un lote de focos depende también del — " azar ". y lo mismo sucede con el volumen X de limonada en un bote llenado por una máquina y que se selecciona aleatoriamente de un lote dado.

Si los resultados no se dan inmediatamente en términos de números, podemos asignarles números y reducir así las observaciones cualitativas el caso cuantitativo. Por ejemplo, a los eventos ojos azules, ojos obscuros y otro color de ojo, se le puede asignar los números 1,2 y 3, respectivamente. A los eventos aguila y sol que ocurren - al lanzar unas monedas, se les puede asignar los números 0 y 1, etc.

Una variable aleatoria se considera discreta si los valores que asumen se pueden contar. Como ejemplo de variables aleatorias discretas se encuentran el número de accidentes que ocurren durante una semana el número de casos de enfermedades, la cantidad de libros que hay en un estante.

Una variable aleatoria se considera continua si puede asumir cual - quier valor dentro de un determinado intervalo. Como ejemplo tenemos; peso de la cajas de aguacate, altura de los alumnos de un determinado colegio, duración de un foco prendido.

4.3 VALOR ESPERADO DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Si una variable aleatoria asume los valores X_1, X_2,......,Xn con las probabilidades correspondientes P_1, P_2, P_3, P_4,.....,Pn entonces el valor esperado de la variable aleatoria

E (x) es:

$$P_1X_1 + P_2X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + P_nX_n$$

Por lo tanto

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i X_i \qquad (4.1)$$

EJEMPLO 4.1

Un inversionista se da cuenta de que tiene una probabilidad de 0.40 de obtener una utilidad de \$ 25,000 y una probabilidad de 0.60 de perder \$ 15,000 en una inversión. Su ganancia esperada es:

$$0.40(25,000)+0.60(-15000)= \$\ 1,000$$

EJEMPLO 4.2

Un contratista hace las siguientes estimaciones.

Probabilidad	Tiempo de término
0.30	10 días
0.20	15 días
0.50	22 días

El número esperado de días para la terminación del proyecto según estas estimaciones es:

$$0.30(10) + 0.20\ (15)+0.50(22) = 17 \text{ días}$$

EJEMPLO 4.3

El valor esperado de los resultados de tirar un dado legal es:

$$E(x) = 1/6(5) + 1/6(2) + 1/6(3) + 1/6(4) = 1/6(5) = 1/6(6)$$

$$= 3.5$$

Se debe mencionar que el valor esperado de los resultados de tirar un dado legal no es "literalmente significativo", porque nunca se podrá obtener una cara de 3.5 en el dado.
No obstante, cabe esperar observar las seis caras diferentes con igual probabilidad de que, a la larga, con muchas tiradas, el valor promedio sería de 3.5.

4.4 DISTRIBUCIONES DISCRETAS

Se han desarrollado muchos tipos diferentes de modelos matemáticos para representar diversos fenómenos discretos que ocurren en las ciencias sociales, la administración y los negocios.

Entre los más utiles de ellos representan datos caracterizados por distribución de probabilidad binomial y la distribución de poisson.

4.5 DISTRIBUCION BINOMIAL

La distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta, aplicable cada vez que se suponga que un proceso - de muestreo conforma un proceso de Bernoulli. Proceso de Bernoulli es un proceso de muestreo en el cual:

(1) Hay dos resultados posibles mutuamente excluyentes- en cada ensayo u observación. Para mayor conveniencia estos se denominan éxito y fracaso.

(2) La serie de ensayos u observaciones constituyen eventos independientes.

(3) La probabilidad de éxito, designada por p, permanece constante de ensayo a ensayo. Es decir, el proceso es estacionario.

La distribución binomial se puede emplear para determinar la probabilidad de obtener un número designado de éxitos en un proceso de Bernoulli. Se requieren tres valores; el número - designado de éxitos (X); el número de ensayos y observaciones (n); y la probabilidad de éxito en cada ensayo (p).

La fórmula para determinar la probabilidad de un número designado de éxitos (X) en una distribución binomial es:

$$P(X=x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x \ (1-p)^{n-x}$$

$$= \frac{n!}{X!\,(n-x)!} P^x(1-P) \qquad (4.2)$$

EJEMPLO 4.4

Supóngase que tenemos una caja con 8 tornillos de los cuales 4 están defectuosos, si extraemos 2 tornillos con reemplazo. ¿ Cuál es la probabilidad de obtener precisamente 1 defectuoso entre los 2 que extraemos ?

La probabilidad de obtener un tornillo defectuoso en un ensayo es:

$P = 4/8 = 1/2 = 0.5$

$1-P = 1 - 1/2 = 1/2 = 0.5$

$n = 2$

$\ddot{x} = 1$

$$P(X=1) = f(1) = \binom{2}{1}(0.5)\ (0.5)^{2-1}$$

$$= \frac{2!}{1!(1)!}(0.5)(0.5) = 0.5000$$

Generalmente existe un interés en la probabilidad acumulada de "X o más " éxitos o " X o menos " éxitos en n ensayos. En tal caso, debe determinarse la probabilidad de cada resultado incluido dentro del intervalo designado y luego se suman estas probabilidades.

EJEMPLO 4.5

En el ejemplo 4.4, la probabilidad de obtener precisamente 1 o más de los 2 que se extraen.

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= .5000 + .2500$$

$$= .7500$$

donde

$$P(X = 1) = .5000 \text{ (del ejemplo 4.4)}$$

$$P(X = 2) = \binom{2}{2} (.5)^2 (.5)^0 = \frac{2!}{2!0!} (.25)(1) =$$

$$= (1)(.25)(1) = .2500$$

(Nota: Recuerde que cualquier valor elevado ala potencia 0 es igual a 1).

Debido a que el uso de la fórmula binomial exige bastantes operaciones aritméticas cuando la muestra es relativamente grande y particularmente cuando queremos determinar la probabilidad de que el resultado ocurra dentro de un rango de valores se utilizan generalmente las tablas de probabilidades (Ver el Apéndice 1, el cual indentifica la probabilidad de cada número designado de éxito),

EJEMPLO 4.6

Si la probabilidad de que un presunto cliente escogido aleatoriamente haga una compra es 0.20, la probabilidad de que un vendedor que visita a 15 presuntos clientes haga menos de tres ventas es:

$$P(X < 3) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= 0.0352 + 0.1319 + 0.2309 \text{ (del Apéndice 1)}$$

$$= 0.3980 = 0.40$$

Los valores de p que aparecen en el Apéndice 1 no exceden de - $P = 0.50$, si el valor de P en una aplicación particular excede- 0.50, debe transformarse el problema para que el evento se defina en términos del número de fracasos y no éxitos. Por ejemplo durante un año determinado el 70 por ciento de las acciones ordinarias negociadas en el New York Stock Exchange, aumentaron su cotización mientras que el 30 por ciento no variaron- o disminuyeron su cotización.

Al comienzo del año, un servicio de asesoría bursátil clasificó 10 emisiones de acciones como "especialmente recomendables" si las 10 emisiones representan una selección aleatoria ¿cuál- es la probabilidad de que (a) las 10 emisiones, (b) por lo menos 8 emisiones y (c) menos de cuatro emisiones, aumenten su - cotización?.

(a) $P(X = 10/n = 10, p = 0.70) = P(X' = 0/n=10,(1-p)=0.30) = 0.0882$

(b) $P(X \geqq 8/n = 10, p = 0.70 = P(X' \leqq 2/n = 10, (1-p) = 0.30)$

$$= P(X' = 0) + P(X'=1) + P(X'=2)$$

$$= 0.0282 + 0.1211 + 0.2335 = 0.3828$$

(Nota: cuando se incluye una desigualdad al transformar el - enunciado de la probabilidad en términos de X' de X, el símbolo de la desigualdad se invierte en el proceso de transformación y $X' = n - X$, como para la situación de igualdad).

(c) $P(X < 4 / n = 10, p = 0.70) = P(X' > 6 / n=10, (1-p) = 0.30)$

$= P(X' = 7) + P(X' = 8) + P(X' = 9) + P(X' = 10)$

$= 0.0090 + 0.0014 + 0.0001 + 0.0000$

$= 0.0105$

El valor esperado (media) y varianza de una distribución binomial vienen dados por las fórmulas siguientes:

$$E(X) = n\,p \qquad (4.3)$$

$$VAR(X) = n\,p\,(1-p) \qquad (4.4)$$

4.6 DISTRIBUCION DE POISSON

La distribución de poisson se puede utilizar para determinar la probabilidad de un número designado de éxito cuando los eventos ocurren en un espectro continuo de tiempo y espacio.

Tal proceso se denomina proceso de Poisson, es semejante al proceso de Bernoulli excepto que los eventos ocurren en un espectro continuo en vez de ocurrir en ensayos u observaciones fijas.

Un ejemplo de tal proceso en la entrada de llamadas a un conmutador telefónico.

En el caso del proceso de Bernoulli, se supone que los eventos son independientes y que el proceso es estacionario.
Sólo se requiere de un sólo valor para determinar la probabilidad de un número designado de éxitos en un proceso de Poisson: el número promedio de éxitos para la dimensión específica de tiempo o espacio de interés. Este número promedio se representa generalmente por λ ("lambda", del griego) o μ. La fórmula para determinar la probabilidad de un número designado de éxitos X en una distribución de Poisson es:

$$P (X = x) = f (x) = \frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{x\,!} \qquad (4.5)$$

Aquí e es la constante 2,7183 asociada con los logaritmos naturales y los valores de $e^{-\lambda}$ se pueden obtener del Apéndice 2.

EJEMPLO 4.7

Mediante un proceso mecánico se producen alfombras de lana que -- presentan un promedio de dos defectos por metro. Encuentre la probabilidad de que un metro cuadrado tenga exactamente un defecto, suponiendo que el proceso puede ser aproximado mediante una distribución de Poisson.

Se sabe que $\mu = 2$ por tanto $e^{-2} = 0.135$ (del Apéndice 2)
De tal manera que:

$$P (X = 1) = f (1) = \frac{(2)^1 e^{-2}}{1\,!} = \frac{2 (0.135)}{1} = 0.270$$

EJEMPLO 4.8

Un departamento de reparación de motores recibe un promedio de cinco llamadas de servicio por hora. La probabilidad de que reciban exactamente tres llamadas en una hora aleatoriamente escogida es:

$$P(X = 3) = f(3) = \frac{(5)^3 e^{-5}}{3!} = \frac{(125)(0.00674)}{6} = 0.1404$$

Por otra parte, se pueden emplear la probabilidades de una tabla de Poisson. El Apéndice 3 indentifica la probabilidad de cada número designado de éxitos para varios valores de λ.

EJEMPLO 4.9

Se puede determinar la repuesta el ejemplo 4.8 utilizando el Apéndice 3 para las probabilidades de Poisson, de la siguiente manera:

$$P(X = 3) = f(3) = \frac{(5)^3 e^{-5}}{3!} = 0.1404$$

Cuando hay un interés en la probabilidad de "X o más " o " X o menos " éxitos, se aplica la regla de sumar para eventos mutuamente excluyentes.

EJEMPLO 4.1D

Si recibe un promedio de cinco llamadas de servicio por hora en un departamento de reparación, la probabilidad de que se reciban menos de tres llamadas durante una hora escogida aleatoriamente se determina de la siguiente manera:

$$P(X<3) = P(X=0) + P(X=1) + (X=2)$$

$$= \frac{(5)^0 \, e^{-5}}{0!} + \frac{(5)^1 - e^{-5}}{1!} + \frac{(5)^2 \, e^{-5}}{2!}$$

$$= 0.0067 + 0.0337 + 0.0842$$

Donde

$P(X=0) = 0.0067$ (del Apéndice 3)

$P(X=1) = 0.0337$

$P(X=2) = 0.0842$

En todo proceso de poisson, se concluye que la media del proceso es siempre proporcional a la longitud del espectro continuo de tiempo o espacio. Por lo tanto, si se dispone de la media para un tamaño de intervalo, se puede determinar la media para cualquier otro tamaño de intervalo requerido.

Esto es importante por que el valor de λ que se utiliza debe aplicarse al intervalo de interés.-

EJEMPLO 4.11

En promedio, 12 personas por horas consultan a un especialista en decoración en un almacén de tela. La probabilidad de que tres o más personas se acerquen al especialista durante un período de 10 minutos así:

$$\text{Promedio por hora} = 12$$

$$= \text{promedio por 10 min} = \frac{12}{6} = 2.0$$

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + \ldots..$$

$$P(X \geqq 3) = 1 - P(X < 3)$$

$$= 1 - P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= 0.1353 + 0.2707 + 0.2707$$

$$= 0.6767 = 0.3233$$

Donde

$P(X=0) = 0.1353$ (del Apéndice 3)

$P(X=1) = 0.2707$

$P(X=2) = 0.2707$

El valor esperado para una distribución de probabilidad de Poisson es igual a la media de la distribución.

$$E(X) = \lambda \quad (4.6)$$

La varianza del número de eventos para una distribución de probabilidad de Poisson es también igual a la media de la distribución:

$$Var(X) = \lambda \quad (4.7)$$

4.5.1 APROXIMACION DE POISSON A LA BINOMIAL

Cuando el número de observaciones o ensayo, n, en un proceso de Bernoulli es muy grande los cálculos son bastante tediosos.
Más aún, en general no se encuentra tabla de probabilidad para valores muy pequeños de p . Afortunadamente, la distribución de Poisson es conveniente como una aproximación de probabilidades binomiales cuando n es muy grande y p ó (1-p) es pequeño. Una regla empírica conveniente es que tal aproximación se puede hacer cuando $n \geq 30$, y $np < 5$ ó $n(1-p) < 5$. Otros textos emplean reglas diferentes para determinar cuándo es apropiada tal aproximación.
La media de la distribución de probabilidad de Poisson, utilizada para aproximar probabilidades binomiales es :

$$\lambda = np \quad (4.8)$$

EJEMPLO 4.12

Se sabe que el 1 por ciento de los transitores incluidos en un gran embarque son defectuosos. Si se selecciona aleatoriamente una muestra de 30 transitores la probabilidad de que dos o más de ellos sean defectuosos se puede determinar por medio de las probabilidades binomiales que aparecen en el Apéndice 1 :

sabemos que n = 30 y P = 0.01 por tanto

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= P(X=2)+P(X=3)+\ldots\ldots\ldots+P(X=30) \\
&= 1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right] \\
&= 1-\left[\binom{30}{0}(0.01)^0(0.99)^{30}+\binom{30}{1}(0.01)^1(0.99)^{29}\right] \\
&= 1-\left[0.7397+0.2242\right] \\
&= 1-0.9639 \\
&= 0.0361
\end{aligned}
$$

La aproximación de Poisson del valor de la probabilidad anterior es.

Se sabe que $\lambda = 0,3$ Por tanto

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= P(X=2)+P(X=3)+\ldots+P(X=30) \\
&= 1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right] \\
&= 1-\frac{(0.3)^0 e^{-0.3}}{0!}+\frac{(0.3)^1 e^{-0.3}}{1!} \\
&= 1-\left[0.7408+0.2222\right] \\
&= 0.037
\end{aligned}
$$

De esta manera, la diferencia entre la aproximación de Poisson y el valor de probabilidad binomial real es: 0.0009.

4.7 FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD CONTINUA.

Una vez estudiadas las funciones de distribución de probabilidad discreta, se turnará la atención en estudiar a una distribución continua, muy importante, que es la distribución normal, que tiene aplicaciones en ciencias sociales y administración. Los ejemplos de fenómenos aleatorios continuos son: tiempo entre llegadas (de llamadas a un conmutador telefónico, clientes a un supermercado o automóviles a un puente de pasaje, servicio a los clientes y también prueba de la duración). Sin embargo, con fenómenos continuos, muchas de las expresiones matemáticas necesarias exigen un conocimiento de cálculo integral, lo cual está fuera del alcance de este texto. De todos modos, hay una función de densidad de probabilidad continua en la que se concentra el interés, pués ha sido considerada tan importante en sus aplicaciones, que se han ideado tablas especiales de probabilidad (Apéndice 4) a fin de eliminar la necesidad de otros métodos que exigirán cálculos matemáticos muy laboriosos. Esta función particular de densidad de probabilidad continua se conoce como distribución normal.

4.8 DISTRIBUCION NORMAL.

La distribución de probabilidad normal es una distribución de probabilidad continua que es simétrica con respecto a su media. Es decir, el 50 % de área está a la derecha de la media y el 50 % de área está a la izquierda. La curva que representa la distribución de probabilidad normal se describe generalmente como de forma de campana, tal como se muestra en la figura 4.1.

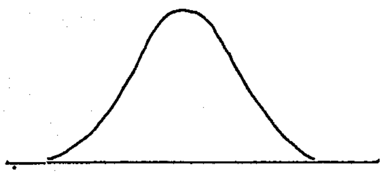


Fig. 4.1 X

La distribución de probabilidad normal es importante en inferencia estadística por tres razones diferentes:

(1) Se sabe que las medidas producidas en muchos procesos aleatorios siguen esta distribución.

(2) Las probabilidades normales pueden utilizarce generalmente para aproximar otras distribuciones de probabilidad tales como las distribuciones binomial y de poisson.

(3) La distribución de estadísticas tales como la media de la muestra y la proporción de la muestra siguen a menudo la distribución normal sin tener en cuenta la distribución de la población.

La función de densidad para la normal es:

$$P(X=x) = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (4.9)$$

La función de distribución para la función normal es:

$$P(X \leq x) = F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-1/2\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du \quad (4.10)$$

Por medio del cálculo integral se llegó a la conclusión que la función de distribución (4.10) de la normal se transformo en: $F(x) = \emptyset\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ (4.11)

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ donde μ es la media y σ la desviación estándart.

Si $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ entonces obtenemos el siguiente valor Z:

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-0}{1} = x$ por lo tanto de (4.11) se obtiene que:

$$F(x) = \emptyset(Z) \quad (4.12)$$

La aplicación práctica de esta importante fórmula se explicaré con detalles en la siguiente sección.

(Propiedades de la Función de Distribución de Probabilidad de la Normal).

$$P\ (X \leq a) = F(a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \qquad (4.13)$$

$$P\ (X \geq a) = 1-P(X \leq a) = 1-F(a) = 1-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \qquad (4.14)$$

$$P\ (a \leq x \leq b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \qquad (4.15)$$

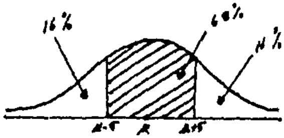
En particular, si $a = \mu - \sigma$ y $b = \mu + \sigma$, el miembro derecho de (4.15) es $\Phi(1) - \Phi(-1)$; si $a = \mu - 2\sigma$ y $b = \mu + 2\sigma$, el miembro es $\Phi(2)\ \Phi(-2)$ etc. Usando la tabla del Apéndice 4 se obtiene.

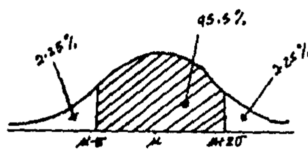
$$P\ (\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) \simeq 68\%$$

$$P\ (\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) \simeq 95.5\% \qquad (4.16)$$

$$P\ (\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) \simeq 99.7\%$$

Esto se ilustra como sigue:





4.8.1 USO DE LAS TABLAS DEL APENDICE 4

EJEMPLO 4.13

Determine las probabilidades siguientes:

a) $P(X \leq 2.44)$
b) $P(X \leq -1.16)$
c) $P(X \leq 1.923)$
d) $P(X \geq 1)$
e) $P(X \geq -2.9)$
f) $P(2 \leq x \leq 10)$
g) $P(X \leq -1.923)$

Donde X se supone normal con media 0 y varianza 1

$$\mu = 0 \quad \sigma^2 = 1 \quad \text{por lo tanto } \sigma = \sqrt{1} = 1$$

a) $P(X \leq 2.44) = F(2.44) = \phi\left(\frac{2.44 - 0}{1}\right) = \phi(2.44) = 0.9972$

b) $P(X \leq -1.16) = F(-1.16) = \phi\left(\frac{-1.16-0}{1}\right) = \phi(-1.16) = 0.1230$

c) $P(X \leq 1.923) = \phi(1.923) = .9726 + \frac{.0006}{.01}(.003) = 0.9728$

Interpolación Lineal

Max	$1.93 \rightarrow .9732$		Dad	1.923	
Min	$1.92 \rightarrow .9726$		Min	1.920	
Dif	0.01	.0006	Dif	0.003	

d) $P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

e) $P(X \geq -2.9) = 1 - P(X \leq -2.9) = 1 - \phi(-2.9) = 1 - 0.0019 = 0.9981$

f) $P(2 \leq x \leq 10) = F(10) - F(2) = \phi(10) - \phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$

g) $P(X \leq -1.923) = \phi(-1.923) = 0.0268 + \left(\frac{.0006}{.01}\right)(.007) = .0272$

Interpolación Lineal

Max	$-1.92 \rightarrow 0.0274$		Dad	-1.923
Min	$-1.93 \rightarrow 0.0268$		Min	-1.930
Dif	0.01	0.0006	Dif	0.007

EJEMPLO 4.14

Determinar las probabilidades en el ejemplo anterior suponiendo que X es normal con media 0.8 y varianza 4.

a) $F(2.44) = \phi\left(\frac{2.44 - 0.80}{2}\right) = \phi(0.82) = 0.7939$

b) $F(1.16) = \phi\left(\frac{-1.16 - 0.80}{2}\right) = \phi(0.98) = 0.1635$

c) $F(1.923) = \phi\left(\frac{1.923 - 0.8}{2}\right) = \phi(0.5615) = .7123 + \left(\frac{.0034}{0.1}\right)(.0015) = .7128$

Interpolación Lineal

Max	0.57 ⟶ .7157		Dada	0.5615
Min	0.56 ⟶ .7123		Min.	0.5600
Dif	0.01	.0034	Dif	0.0015

d) $1-P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1-\phi\left(\frac{1-0.80}{2}\right) = 1-0(0.1)=0.4602$

e) $1-P(X \leq -2.9) = 1-\phi\left(\frac{-2.9-0.8}{2}\right) = 1-\phi(1.85) \doteq 0.9678$

f) $F(10) - F(2) = \phi(4.6) - \phi(0.6) = 1 - 0.7257 = 0.2743$

g) $F(-1.923) = \phi\left(\frac{-1923-0.8}{2}\right) = \phi(-1.3615) = .0853 + \frac{.0016}{.01}(.0085)$

$= .0867$

Interpolación Lineal

Max	- 1.36 ⟶	.0869	Dada	-1.3615
Min	- 1.37 ⟶	.0853	Min.	-1.3700
Dif	0.01	.0016	Dif	.0085

EJEMPLO 4.15

Sea X normal con media 0 y varianza 1. Determinar la constante C tal que:

A) $P(X \geq C) = 10\%$

a) $1-P(X \leq C) = 1 - \phi(C) = 0.1,\ \phi(C) = 0.9,\ C = 1.282$

Interpolación Lineal

Max	1.29 ⟶ .9015		Dada	.9000
Min	1.28 ⟶ .8997		Min	.8997
Dif.	0.01	.0018	Dif	.0003

$$C = 1.28 + \left(\frac{.0003}{.0018}\right)(0.01) = 1.281666 = 1.282$$

b) $P(X \leq C) = 5\%$

$F(C) = .0500$

Interpolación Lineal

Max	$-1.64 \longrightarrow$	0.0505		Dada	.0500
Min	$-1.65 \longrightarrow$	0.0495		Min	.0495
Dif	0.01	0.0010		Dif	.0005

$$C = -1.65 + \left(\frac{.0005}{.001}\right)(.01) = 1.65 + .005 = -1.645$$

c) $P (0 \leqq x \leqq C) = 45\%$

$$F(C) - F(0) = \phi(C) - 0.5 = 0.45, \ \phi(C) = 0.95$$

Interpolación Lineal

Max	1.65	.9505		Dada	0.9500
Min	1.64	.9495		Min	0.9495
Dif	0.01	.0010		Dif	0.0005

$$C = 1.64 + \left(\frac{.0005}{.001}\right)(.01) = 1.64 + .005 = 1.645$$

d) $P (-C \leqq x \leqq C) = 99\%$

$$F(C) - F(-C) = \phi(C) - \phi(-C) = D(C) = .9900$$

Interpolación Lineal

Max	2.58 ⟶	.9901	Dada	.9900
Min	2.57 ⟶	.9898	Min	.9898
Dif	0.01	.0003	Dif	.0002

$$C = 2.57 + \left(\frac{.0002}{.0003}\right)(.01) = 2.577$$

EJEMPLO 4.16

Sea X con media - 2 y varianza 0.25. Determinar la constante C tal que:

a) $P(X \geq C) = 0.2$
b) $P(-C \leq x \leq -1) = 0.5$
c) $P(-2-C \leq x \leq -2+C) = 0.9$
d) $P(-2-C \leq x \leq -2+c) = 99.6\%$

(a) $1 - P(X \leq C) = 1 - \phi\left(\frac{C+2}{0.5}\right) = 0.2 \quad \phi(2C+4) = 0.8$

Interpolación Lineal

Max.	0.85 $\longrightarrow$	.8023		Dada	0.8000
Min.	0.84 $\longrightarrow$	.7995		Min	0.7995
Dif	0.01	.0028		Dif	0.0005

$$2C + 4 = 0.84 + \left(\frac{.0005}{.0028}\right)(.01) = 0.84178 = 0.842$$

$$2C + 4 = 0.842;\ 2C = 0.842 - 4 = -3.158;\ C = \frac{-3.158}{2} = -1.579$$

(b) $\phi\left(\frac{-1+2}{0.5}\right) - \phi\left(\frac{-C+2}{0.5}\right) = 0.9772 - \phi\ (4 - 2C) = 0.5,\ \phi(4-2C) = 0.4772$

$$4 - 2C = -\ 0.057,\ C = 2.03$$

Interpolación Lineal de 0.4772

Max.	-0.05 $\longrightarrow$	.4801		Dada	0.4772
Min	-0.06 $\longrightarrow$	.4761		Min	0.4761
Dif	0.01	.0040		Dif	0.0011

$$4 - 2C = -0.06 + \left(\frac{.0011}{.0040}\right)(.01) = -0.05725 = 0.057$$

(c) $\phi\left(\frac{-2+C+2}{0.5}\right) - \phi\left(\frac{-2-C+2}{0.5}\right) = \phi\ (2C) - \phi\ (-2C) = 0.9,\ D\ (2C) = 0.9$

Interpolación de 0.9000

Max.	1.65 $\longrightarrow$	.9011	Dada	0.9000
Min	1.64 $\longrightarrow$	.8990	Min	0.8990
Dif	0.01	.0021	Dif	0.0010

$$2C = 1.64 + \left(\frac{.0010}{.0021}\right)(0.01) = 1.64476 = 1.645$$

$C = 0.823$

(D) $\phi(2C) - \phi(-2C) = 99.6\%$; $D(2C) = .9960$

$2C = 2.88$; $C = 1.44$

CAPITULO V

D I S T R I B U C I O N E S

D E

M U E S T R E O

5.1 I N T R O D U C C I O N

Una distribución muestral es una distribución de probabilidad de un estadístico muestral calculado a partir de todas las muestras posibles de también n, elegidas al azar en una población determinada.

A continuación se proporciona un ejemplo para ilustrar mejor éste concepto. Supóngase que un granjero piensa vender algunos cerdos. Para simplificar el problema en la tabla 5.1 donde se conoce el peso de cada cerdo, pero que el granjero desconoce.

TABLA 5.1 POBLACION DE CINCO CERDOS

CERDOS	PESO (Kg)
A	96
B	99
C	100
D	105
E	112
	502

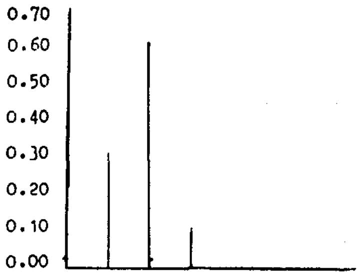
Imaginese que cualquier cerdo que pese menos de 100 Kg esta bajo de peso, y no puede ser vendido con una utilidad razonable, Por tanto dos de los cerdos, o $\frac{2}{5}$ de la población queda dentro de esta categoría. Ahora el granjero quiere estimar la proporción de sus cerdos que estan bajo de peso. Por tanto el decide muestrear dos cerdos, y utiliza la proporción muestral para estimar la proporción en la población. Por tanto se busca una distribución de muestreo para esta situación.

El granjero efectúa un muestreo sin repetición, ya que no quiere pesar dos veces el mismo cerdo. En la tabla 5.2 se presentan los resultados muestrales posibles. también se presentan en la figura 5.1

TABLA 5.2 COMBINACIONES MUESTRALES DE DOS CERDOS

TAMAÑO DE LA MUESTRA	NUMERO POSIBLE DE MUESTRA	COMBINACION MUESTRAL	PESOS DE LA MUESTRA	PROPORCION INFERIOR A 100 Kg
2	$\binom{5}{2} = 10$	A,B	96,99	2/2
		A,C	96,100	1/2
		A,D	96,105	1/2
		A,E	96,112	1/2
		B,C	99,100	1/2
		B,D	99,105	1/2
		B,E	99,112	1/2
		C,D	100,105	0/2
		C,E	100,112	0/2
		D,E	105,112	0/2

La distribución de muestro indica que las proporciones muestrales posibles son $\frac{0}{2}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{2}$. Así mismo se señala que posible es cada proporción muestral bajo la suposición de cada cerdo tiene la misma aportunidad de ser incluido en la muestra. Por ejemplo hay una probabilidad de 0.60 de que la proporción muestral sea 1/2 la cual es cercana a la proporcion real.



Proporción de la muestra por abajo de 100 Kg.

Figura 5.1 Distribuci-ón de proporciones de una muestra de cerdos bajo de pesos para muestras de dos tomadas de la población de cinco cerdos, con una proporción de la población de 2/5 .

5.2 DISTRIBUCIONES DE MEDIAS MUESTRALES

Una distribución de muestreo de medias es de tipo probabilístico e indica que probables son diversas medias de la muestra. La distribución es una función de la media, de la desviación estandar de la población y del tamaño de la muestra. Para cada combinación de la media de la población, de la desviación estandar de la población y del tamaño de la muestra habrá una distribución de muestreo única de los valores medios de la muestra.

Acontinuación daremos un ejemplo ilustrativo. Una población se compone de los cinco números 2,3,6,8,11. Considerar todos las muestras posibles de tamaño dos que pueden extraerse con remplazamiento de esta población. Hallar

(a) La media de la población

(b) La desviación estandar de la población

(c) La media de la distribución muestral de medias

(d) La desviación estandar la distribución muestral de medias.

$$(a) \quad = \frac{2+3+6+8+11}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$(b) \quad = \frac{(2-6)^2+(3-6)^2+(6-6)^2+(8-6)^2+(11-6)^2}{5} = \frac{16+9+0+4+25}{5}$$

$$= 10.8$$

$$= \sqrt{10.8} = 3.29$$

(c) Hay 5(5)=25 muestras de tamaños dos que puedan extraerce con reemplazamiento. Estos son:

(2,2)	(3,3)	(6,6)	(8,8)	(11,11)
(2,3)	(3,2)	(6,2)	(8,2)	(11,2)
(2,6)	(3,6)	(6,3)	(8,3)	(11,3)
(2,8)	(3,8)	(6,8)	(8,6)	(11,6)
(2,11)	(3,11)	(6,11)	(8,11)	(11,8)

Las correspondientes medias muestrales son:

2.0	3.0	6.0	8.0	11.0
2.5	2.5	4.0	5.0	6.0
4.0	4.5	4.5	5.5	7.0
5.0	5.5	7.0	7.0	8.5
6.5	7.0	8.5	9.5	9.5

y la media de la distribución muestral de medias es:

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{\text{suma de todas las medias muestrales de (1)}}{25} = \frac{150}{25} = 6.0$$

Comprobando que $\mu_{\bar{X}} = \mu$.

La varianza $\sigma^2_{\bar{X}}$ de la distribución muestral de medias se obtiene restando el valor de la media 6 de cada número de (1), elevando al cuadrado cada diferencia, sumando los 25 números así obtenidos y dividiendo por 25. El resultado final es:

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{135}{25} = 5.40 \text{ de modo que } \sigma_{\bar{X}} = \sqrt{5.40} = 2.32$$

De esto se concluye que para poblaciones finitas en las que se efectua muestreo con reemplazamiento (o poblaciones finitas), $\sigma^2_{\bar{X}} = \sigma^2/n$, puesto que el segundo miembro es 10.8/2 = 5.40, de acuerdo con el valor anterior . Se resolverá el mismo problema anterior para el caso de muestreo sin reemplazo. Para los incisos (a) y (b) obtenemos los mismos resultados que el problema anterior.

$\mu = 6$ y $\sigma = 3.29$

(c) hay $\binom{5}{2} = 10$ muestras de tamaño dos que pueden extenderse sin reemplazamiento de la población, éstas son:

(2,3);(2,6);(2,8);(2,11),(3,6);(3,8);(3,11)

(6,8);(6,11);(8,11).

Las correspondientes medias muestrales son:

2,5; 4,0 ; 5.0; 6,5; 4,5; 5.5; 7.0; 7.0; 8.5; 9.5;

y la media de la distribución de medias es:

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{2.5+4.0+5.0+6.5+4.5+5.5+7.0+7.0+8.5+9.5}{10} = 6.0$$

Con la cual obtenemos que $\mu_{\bar{X}} = \mu$

(d) La varianza de la distribución muestral de medias es:

$$\sigma^2_{\bar{X}} = (2.5-6.0)^2+(4.0-6.0)^2+(5.0-6.0)+\ldots.(9.5-6.0)^2=4.05, \text{ y}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = 2.01$$

De esto se concluye que $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$, puesto que el-miembro es: $\frac{10.8}{2}\left(\frac{5-2}{5-1}\right) = 4.05$, que es el valor obtenido anteriormente.

Los resultados obtenidos en este ejemplo no son pura coincidencia. Constituyen una ilustración de los siguientes hechos generales:

Cuando el muestreo se hace con reemplazamiento en una población finita, la media de la distribución muestral de $\bar{X}$ es igual a la media de la población original y la varianza de la distribución muestral es igual a la varianza de la población dividida por el tamaño de la muestra.

Si el muestreo se hace sin reemplazamiento en una población finita, la media $\mu_{\bar{X}}$ de la distribución de las medias muestrales es igual a la media de la población y la varianza -

$$\sigma^2_{\bar{X}} \text{ es igual a } \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

El factor $(N-n)/(N-1)$ se denomina factor finito de corrección. Se puede pasar por alto si el tamaño de la muestra es pequeño en relación con el tamaño de la población. Si N es mucho más grande que n, la diferencia entre σ^2/n y - - - - $\sigma^2/n[(N-n)\ (N-1)]$, se puede despreciar. Una regla de uso muy frecuente establece que el factor finito de corrección de - población finita se puede pasar por alto cuando n/N es menor o igual a 0.05, esto es, cuando la muestra contiene el 5% o menos de la población.

En esta sección se ha concentrado la atención en el caso en que el muestreo se hace en una población finita, se podría preguntar qué resultados se obtienen cuando el mestreo se - hace en una población infinita. El muestreo con reemplazamiento en una población finita es equivalente al muestreo - de una población infinita. Por tanto los resultados analizados en esta sección se pueden aplicar también al caso de un muestreo hecho en una población infinita. Es decir:

Si el muestreo se hace en una población **infinita, la media $\mu_{\bar{X}}$ de la distribución muestral de las medias muestrales es** igual a la media de la población en que se toma la muestra y la varianza $\sigma^2_{\bar{X}}$ es igual a σ^2/n, a condición de que - la población en que se toma la muestra tenga una varianza - finita.

5.3 TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL

Sin tener en cuenta la forma funcional de la población de donde se extrae la muestra, la distribución de medias muestrales, calculadas con muestras de tamaño n extraídas de una población con media μ y varianza finita σ^2, se aproxima a una distribución normal con media μ y varianza σ^2/n, cuando n es grande, - la distribución de las medias muestrales puede aproximarse mucho a una distribución normal.

Obsérvese que el teorema del límite central no depende de la - forma de la población que se está estudiando, se puede seguir- empleando la teoría normal para obtener inferencias sobre la - media poblacional a condición de que se obtenga una muestra -- grande, porque la distribución muestral de $\bar{X}$ será aproximadamente normal cuando n es grande. En otras palabras, se puede valer el hecho de que

$$\phi(z) = \phi\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

está más o menos normalmente distribuido con media 0 y varianza 1, cuando n es grande.

Se puede preguntar qué tan grande debe ser n para que tenga -- valor el uso del teorema del límite central. Muchos expertos - sugieren que un tamaño de muestra de 30 es suficientemente grande para justificar el uso del teorema.

En el presente texto vamos a seguir esta regla aún siendo esta un poco arbitraria.

Para tener una idea de la forma como opera el teorema del límite central, consideremos la población de diez maestros de primaria de una escuela elemental. La variable de interés, X, es el número de años de experiencia docente de cada profesor. La tabla 5.1 muestra los datos.

TABLA 5.1 Número de años de experiencia docente en una población de diez maestros de primaria.

Número de Maestros	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Años de experiencia docente	6	1	2	9	6	8	4	3	10	7

En realidad, esta población no está normalmente distribuida, como lo demuestra claramente el histograma que aparece en la figura 5.1.

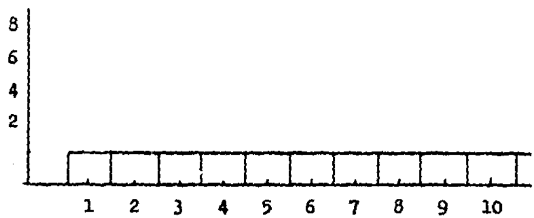


FIGURA 5.1

Pero si se obtienen todas la posibles muestras de tamaño n=2 para este problema y sus puntos medios correspondientes, como se observa en la tabla 5.2.

TABLA 5.2 Todas las posibles muestras de tamaño 2 para la experiencia docente de 10 profesores. Las medias muestrales están entre paréntesis.

Primera muestra	Segunda muestra 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.1 (1)	1.2 (1.5)	1.3 (2)	1.4 (2.5)	1.5 (3)	1.6 (3.5)	1.7 (4)	1.8 (4.5)	1.9 (5)	1.10 (5.5)
2	2.1 (1.5)	2.2 (2)	2.3 (2.5)	2.4 (3)	2.5 (3.5)	2.6 (4)	2.7 (4.5)	2.8 (5)	2.9 (5.5)	2.10 (6)
3	3.1 (2)	3.2 (2.5)	3.3 (3)	3.4 (3.5)	3.5 (4)	3.6 (4.5)	3.7 (5)	3.8 (5.5)	3.9 (6)	3.10 (6.5)
4	4.1 (2.5)	4.2 (3)	4.3 (3.5)	4.4 (4)	4.5 (4.5)	4.6 (5)	4.7 (5.5	4.8 (6)	4.9 (6.5)	4.10 (7)
5	5.1 (3)	5.2 (3.5)	5.3 (4)	5.4 (4.5)	5.5 (5)	5.6 (5.5)	5.7 (6)	5.8 (6.5)	5.9 (7)	5.10 (7.5)
6	6.1 (3.5)	6.2 (4)	6.3 (4.5)	6.4 (5)	6.5 (5.5)	6.6 (6)	6.7 (6.5)	6.8 (7)	6.9 (7.5)	6.10 (8)
7	7.1 (4)	7.2 (4.5)	7.3 (5)	7.4 (5.5)	7.5 (6)	7.6 (6.5)	7.7 (7)	7.8 (7.5)	7.9 (8)	7.10 (8.5)
8	8.1 (4.5)	8.2 (5)	8.3 (5.5)	8.4 (6)	8.5 (6.5)	8.6 (7)	8.7 (7.5)	8.8 (8)	8.9 (8.5)	8.10 (9)
9	9.1 (5)	9.2 (5.5)	9.3 (6)	9.4 (6.5)	9.5 (7)	9.6 (7.5)	9.7 (8)	9.8 (8.5)	9.9 (9)	9.10 (9.5)
10	10.1 (5.5)	10.2 (6)	10.3 (6.5)	10.4 (7)	10.5 (7.5)	10.6 (8)	10.7 (8.5)	10.8 (9)	10.9 (9.5)	10.10 (10)

En seguida, se construye la distribución muestral de la media muestral $\overline{X}$, tal como se observa en la Tabla 5.3

TABLA 5.3 Distribución muestral de la media de las muestras de tamaño 2 sacadas de la población de los maestros de primaria.

$\bar{X}$	PROBABILIDAD
1.0	1/100
1.5	2/100
2.0	3/100
2.5	4/100
3.0	5/100
3.5	6/100
4.0	7/100
4.5	8/100
5.0	9/100
5.5	10/100
6.0	9/100
6.5	8/100
7.0	7/100
7.5	6/100
8.0	5/100
8.5	4/100
9.0	3/100
9.5	2/100
10.0	1/100

Pero si se grafica la distribución muestral de las medias que aparecen en la tabla 5.3, se obtiene una configuración muy diferente, como la que se observa en la figura 5.2.

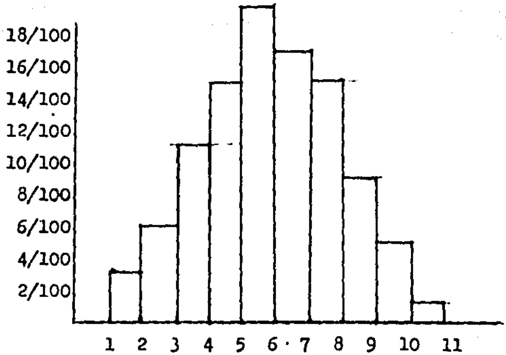


FIGURA 5.2 Histograma de la distribución muestral de las medias de la tabla 5.3

Una característica sorprendente del histograma de la figura 5.2 es que, aunque la población original esté uniformemente distribuida, la distribución muestral de las medias calculadas a partir de muestras de tamaño n = 2 tiene su máximo en la media y desciende casi simetricamente observando estos resultados, no se ve ninguna dificultad para creer que, siendo n grande, la distribución muestral de $\bar{X}$ se aproxima a una distribución normal.

Se explicará ahora como se puede aplicar el teorema del límite central.

EJEMPLO 5.1

Supóngase que el ingreso anual por familia en una ciudad determinada tiene una media de $ 12,000 y una desviación estandar de $ 3000. Se toma una muestra al azar de 36 familias en la ciudad, y se obtiene una media muestral, X no tiene distribución normal. ¿ Cuál es la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ calculada con los ingresos de las 36 familias sea a lo más de $ 11,500 ?

Si X no es normal, por el teorema del límite central $\overline{X}$ es aproximadamente normal porque el tamaño n=36 de la muestra es suficientemente grande.

Ahora, se determina el área utilizando la tabla de la normal.

Para n = 36 obtenemos que:

$$P(\overline{X} \leq 11.500) = \phi \left(\frac{11,500-12,000}{3,000/\sqrt{36}} \right) = \phi \left(\frac{-500}{500} \right)$$

$$= \phi (-1) = .1587$$

La porción de área buscada se muestra en la figura 5.3

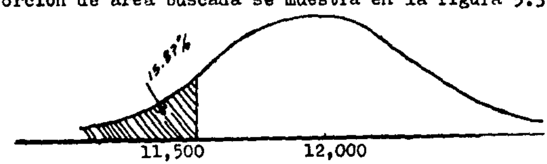


FIGURA 5.3

EJEMPLO 5.2

En cierta compañía, el promedio mensual de salarios de todos los empleados es de \$ 800. La desviación estandar de las renumeraciones es \$ 30. Sea $\overline{X}$ de las renumeraciones de los 36 empleados esten entre \$ 790 y \$ 810 ?

Si $\overline{X}$ no es normal, por el teorema del límite central $\overline{X}$ es aproximadamente normal porque el tamaño n=36 de la muestra es suficientemente grande.

Ahora, se determina el área utilizando la tabla de la normal

para n= 36 obtenemos que:

$$P(790 \leq \overline{X} \leq 810) = \phi\left(\frac{810 - 800}{30/\ 36}\right) - \phi\left(\frac{790 - 800}{30/\ 36}\right)$$

$$= \phi\left(\frac{10}{5}\right) - \phi\left(\frac{-10}{5}\right)$$

$$= D(\ 2\ ) = 0.9545$$

La porción de área buscada se muestra en la figura 5.4

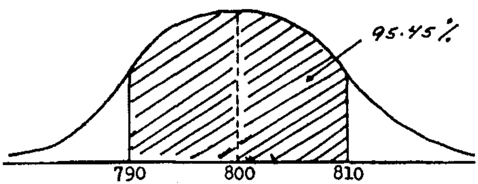


FIGURA 5.4

5.4 DISTRIBUCION DE PROPORCIONES MUESTRALES

En la práctica, resulta a menudo conveniente hacer inferencias sobre proporciones poblacionales. En consecuencia, la distribución muestral de una proporción es de gran interés.
Un equipo de mercadeo puede estar interesado en conocer que proporción de los consumidores de alguna zona prefieren los productos de su empresa a los de la competencia. Un candidato de un puesto político puede querer conocer la proporción de votantes que van a votar por él. Podría citar innumerables ejemplos.

Visualice la forma en que se podría empíricamente construir la distribución muestral de $\hat{p}$. De entre la población que nos interesa seleccionamos un gran número de muestras de tamaño n y a cada una le calculamos la proporción muestral $\hat{p}$. Si la población fuera finita y razonablemente pequeña podríamos seleccionar todas las muestras posibles de tamaño n. Con poblaciones infinitas solamente podemos hablar de tomar un gran número de muestras. Los valores de $\hat{p}$ junto con sus frecuencias de ocurrencia constituirían la distribución muestral de $\hat{p}$. Llegado a este punto, nos interesa conocer la media, la desviación estandar y la forma funcional de esta distribución.

Se pueden resumir las características de la distribución muestral de $\hat{p}$, como se expresa a continuación:

La distribución muestral de $\hat{p}$, o proporción muestral, calculada con base en muestras aleatorias simples de tamaño n sacados de una población en la que la proporción poblacional es $\hat{p}$, está aproximadamente distribuida normalmente si n es grande. Si la población de la muestra es finita y de tamaño N, la media μp de la distribución de $\hat{p}$ será igual a p y la desviación es tandar σ_p será igual a $\sqrt{p(1-p)/n}\ \sqrt{(N-n)/(N-1)}$. Si la población de la que se extrae la muestra es infinita, la media y la desviación estandar de la distribución de $\hat{p}$ serán iguales a p y a $\sqrt{p(1-p)/n}$ respectivamente.

Se conocerá facilmente la presencia del factor finito de corrección en la anterior definición de distribución muestral de p. - Se puede hacer caso omiso de este en las n/N sea menor o igual a 0.05.

EJEMPLO 5.3

El gerente de una mueblería ha determinado que el 20% de las ventas del año pasado incluyeron la entrega de los muebles en un plazo de 30 días después de la compra. Si se selecciona una muestra aleatoria de 400 ventas, ¿ Cuál es la probabilidad de que la proporción muestral de los pedidos entregados dentro de los 30 días siguientes sea entre .20 y .25 ?

La porción de área buscada se muestra en la figura 5.5

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{(.20)(.80)}{400}} = \sqrt{\frac{.16}{400}} = \frac{.4}{20} = .02$$

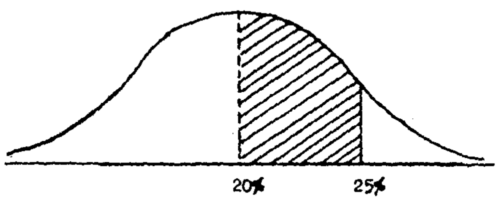


FIGURA 5.5

$$P(20\% \leq X \leq 25\%) = \phi\left(\frac{25\% - 20\%}{2\%}\right) - \phi\left(\frac{20\% - 20\%}{2\%}\right)$$

$$= \phi(2.5) - \phi(0)$$

$$= .9938 - .5000 = .4938$$

Por tanto, la probabilidad de obtener una proporción muestral entre .20 y .25 es de .4938. Esto significa que si la proporción real de éxitos en la población es .20 entonces se esperaría que el 49.38% de las muestras de tamaño 400, tendría proporciones muestrales entre .20 y .25.

EJEMPLO 5.4 .

Un proceso para llenar botellas de soda presenta una producción promedio en la que el 10% de las botellas no están completamente llenas.

Si mediante este proceso se selecciona al azar una muestra de 225 botellas de un lote de 625 embaces llenos ¿ cuál es la probabilidad de que la proporción muestral que se encuentre del 9 al 11% ?

En la figura 5.9 se ilustra la probabilidad no conocida

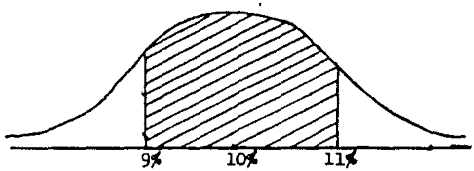


FIGURA 5.6

Como el tamaño de la muestra es relativamente grande, comparado con el tamaño de la población (n/N es 225/625, o bien , 36%) se requiere del factor finito de corrección.

Se puede calcular la probabilidad deseada determinando el número de desviaciones estandar del promedio del proceso a las que se encuentran 9% y 11%

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{(0.10)(0.90)}{225}} \sqrt{\frac{625-225}{625-1}}$$

$$\sqrt{\frac{0.3}{15}} \cdot \sqrt{\frac{20}{25}} = 0.016$$

$$P(9\% \leq X \leq 11\%) = \phi\left(\frac{11\% - 10\%}{1.6\%}\right) - \phi\left(\frac{9\% - 10\%}{1.6\%}\right)$$

$$= \phi(0.625) - \phi(0.625)$$

$$= .7341 - .2660 = .4681$$

como .625 no se encuentra en las tablas de la distribución normal (Apéndice 4) entonces interpolando se obtiene;

Max	.63	.7357		Dada	.625
Min	.62	.7324		Min	.620
Dif	.01	.0033		Dif	.005

$$\phi(0.625) = .7324 + \left(\frac{.0033}{.01}\right)(.005) = .7341$$

Max	-.62	.2676		Dada	- .625
Min	-.63	.2643		Min	-.630
Dif+	.01	.0033		Dif	.005

$$\phi(0.625) = .2643 + \left(\frac{.0033}{.01}\right)(.005) = .2660$$

CAPITULO VI

CONCEPTOS BASICOS DE ESTIMACION

6.1 I N T R O D U C C I O N .

La estimación es el proceso de utilizar datos muestrales para estimar los valores de parámetros desconocidos de una población. Esencialmente, cualesquiera características de la población se puede estimar a partir de una muestra al azar. Entre los valores más comunes están la media y la desviación estándar de una población y la proporción de la misma.

6.2 CONCEPTO DE ESTIMADORES Y ESTIMACIONES :

Hay que establecer la diferencia entre un estimador y una estimación. Un estimador es un procedimiento expresado a manera de regla o fórmula por medio del cual se obtiene un valor númerico denominado estimación. De esta manera $\overline{X} = \sum Xi/n$, que representa el método por el cual se calcula una media muestral, es un estimador. Pero el resultado numérico que se obtiene efectuando la operación indicada es una estimación.

Un estimador es una función de la muestra que no depende de parametros desconocidos, todo está basado en el supuesto de que la población está parametrizada.

6.3 PROPIEDADES DE LOS BUENOS ESTIMADORES:

Al seleccionar un estimador, $\hat{\theta}$, de un parametro θ (la - letra griega theta), es lógico que se quiera seleccionar el "mejor" estimador.

En la práctica no se puede determinar cual es el "mejor" estimador en una situación dada. Pero en cambio, lo que si podemos hacer, es seleccionar un "buen" estimador.

Se han propuesto varios criterios para medir la "bon -- dad" de los estimadores. Pero aquí se verá un sólo criterio que es insesgado.

Los demás criterios, aunque son muy importantes, no se pueden analizar adecuadamente sin acudir a conceptos - matemáticos que exceden el nivel de estos apuntes.

ESTIMADOR INSESGADO

Se dice que el estimador $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado del parámetro poblacional θ , si el valor de la media de $\hat{\theta}$, calculado a partir de todas las muestras aleatorias que se puedan extraer, con un tamaño dado, de la población que interesa es igual a θ . Generalmente, esta propiedad se expresa mediante:

$$E\ (\hat{\theta}) = \theta$$

donde la expresión nos dice que, θ es la media de la distribución muestral de $\hat{\theta}$.

Se verá ahora el estimador de la varianza poblacional y se determinarán sus características respecto al insesgamiento.

1.- Cuando el muestreo se hace con reemplazamiento, $S^2 = \sum (Xi-\bar{X})^2/n-1$ es un estimador insesgado de la varianza poblacional definida por $\sigma^2=\sum(Xi-\mu)^2\ /N$, puesto que, con reemplazamiento, $E\ (S^2)= \sigma^2$.

2.- Cuando el muestreo se hace sin reemplazamiento, $S^2 = \sum (Xi-\bar{X}\ )^2\ /n-1$ es un estimador insesgado de la varianza poblacional definida por $S^2=(Xi-\mu)/N-1$, puesto que sin reemplazamiento, $E\ (S^2) = S^2$.

3.- El estimador $S^{2*} = \sum (Xi-\bar{X})^2 /n$ es un estimador sesgado de σ^2 y de S^2, puesto que $E(S^{2*}) \neq \sigma^2$ y $E(S^{2*}) \neq S^2$ Observese que:

$$S = \sqrt{\frac{\sum (Xi - \bar{X})^2}{n - 1}}$$

es un estimador sesgado de σ y de S, sin tenerse en cuenta que el muestreo se haga con o sin reemplazamiento, aunque generalmente S se utilice para estimar estos parámetros.

El concepto de error cuadratico medio como indicador de buenos estimadores, es realmente arbitrario. Lo único que es posible argumentar en favor (e,c,m.) es que en la práctica ha demostrado no ser tan mal criterio. Si $\hat{\theta}$ es un estimador de θ entonces es posible escribir al (e,c,m.) de $\hat{\theta}$ como:

$$E\left((\hat{\theta} - \theta)^2 \right) = Var(\hat{\theta}) + (sesgo\,(\hat{\theta}))^2$$

6.4 INTERVALO DE CONFIANZA PARA UNA MEDIA POBLACIONAL.

Cuando el objetivo de la inferencia es la estimación hay dos maneras de hacerla: la estimación puntual y la estimación por intervalos. Por estimación puntual se entiende simplemente el siguiente hecho: despues de efectuar el muestreo y con los datos obtenidos realizar algunos calculos, se obtiene un número, o vector en el caso general, que es una aproximación (estimación) para el verdadero valor del parametro desconocido. Si se está usando un buen estimador, de acuerdo a algún criterio mencionado con anterioridad, el estimador que se use estará, posiblemente cerca del valor verdadero pero desconocido. Sin embargo y precisamente porque el estimador es solamente un número no se encuentra con alguna medida de que tan alta puede ser la probabilidad de que el estimador tome un valor cercano al valor verdadero desconocido. Los intervalos de confianza están pensados para dar una idea del valor númerico real que el parametro puede tener y también una medida de cuanta confianza se puede tener en el estimador como una aproximación de tal valor.

En la presente sección, se presentan los métodos que se utilizan para construir intervalos de confianza para una media poblacional, en tres situaciones diferentes:

(1) cuando la población es normal y la varianza de la población es conocida.

(2) Cuando la población es normal y la varianza de la población es desconocida.

(3) Cuando la población no es normal.

El concepto de intervalo de confianza y su interpretación constituyen aspectos importantes de la inferencia estadística. En consecuencia, en el estudio que sigue se van a realzar los conceptos y su interpretación, así como también la metodología.

6.4.1 LA MEDIA DE UNA POBLACION NORMALMENTE DISTRIBUIDA, SIENDO σ^2 CONOCIDA.

Primero lo que implica construir un intervalo de confianza para la media de una población normalmente distribuida. Aunque generalmente no se conoce la varianza de población, el análisis se puede facilitar si se supone una varianza poblacional conocida. Más tarde se estudiará el caso en que σ^2 es desconocida.

Por lo que se estudió sobre las distribuciones muestrales en el Capítulo 5 se sabe que la distribución muestral de $\bar{X}$, calculada a partir de todas las muestras aleatorias -- simples de tamaño n que pueden ser extraídas de una población distribuida normalmente, está normalmente y tiene -- una media igual a μ y una varianza igual a σ^2/n, donde - μ y σ^2 son respectivamente la media y la varianza de - la población de la cual se extrajeron las muestras. El -- Factor de corrección de población finita no pudo haber sido aplicado o se pudo pasar por alto.

La distribución muestral de $\bar{X}$, como ya lo hemos visto, se puede mostrar gráficamente en la forma en que aparece en la Figura 6.1.

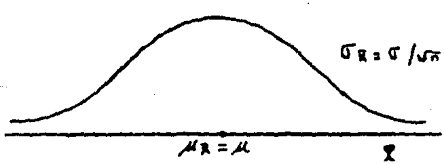


Fig. 6.1 Distribución Muestral de $\bar{X}$

Se puede expresar la probabilidad, llamandola $1 - \alpha$, de - que una sola muestra aleatoria simple de tamaño n produzca una media $\bar{X}$ que esté entre dos puntos, digamos $\bar{X}_a$ y $\bar{X}_b$, -

sobre el eje $\bar{X}$ como sigue:

$$P(\bar{X}_a \leqq \bar{X} \leqq \bar{X}_b) = 1 - \alpha \qquad (6.1)$$

Se seleccionan $\bar{X}_a$ y $\bar{X}_b$ en tal forma que queden equidistan de la media $\mu_{\bar{X}} = \mu$ y se expresa esta distancia en función del error típico. Supóngase que X_a se localiza a una distancia de k errores típicos a la izquierda de la media $\mu_{\bar{X}} = \mu$. Esta distancia se puede expresar entonces como $k\ (\sigma/\sqrt{n})$ y se puede representar gráficamente como se ve en la Figura 6.2.

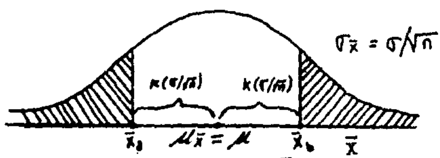


Fig. 6.2 Distribución Muestral de $\bar{X}$, en la que se muestra $\bar{X}_a$ y $\bar{X}_b$.

Ahora que ya se conoce la distancia de $\bar{X}_a$ y $\bar{X}_b$ hasta la media $\mu_{\bar{X}} = \mu$, se pueden escribir las siguientes igualdades:

$$\bar{X}_a = \mu - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad \bar{X}_b = \mu + k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Se pueden utilizar estos valores equivalentes de $\bar{X}_a$ y $\bar{X}_b$

y volver a escribir la Ecuación 6,1 de la siguiente manera -

$$P(\mu - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq \bar{X} \leqq \mu + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha \qquad (6.2)$$

Se verá el caso en el que el estadístico muestral $\bar{X}$ está normalmente distribuido, se sabe que cuando $1 - \alpha$ está especificado, se puede reemplazar k por un valor de z, σ variable normal estandarizada. Por ejemplo si $1 - \alpha = 0.95$, $k = 1.96$ y la Ecuación 6.2 se convierte en

$$P(\mu - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq \bar{X} \leqq \mu + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0.95$$

Esto quiere decir que la probabilidad de que $\bar{X}$ esté entre un punto igual a μ - 1.96 errores típicos y un punto igual a μ + 1.96 errores típicos es de 0.95. La Figura 6.3 muestra estos dos puntos.

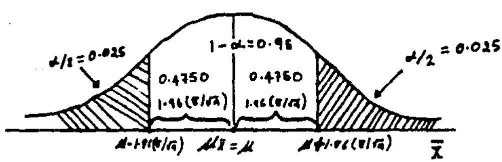


Fig. 6.3 Distribución muestral de $\bar{X}$, en que aparece la localización de $1 - \alpha$.

Se acerca más al objetivo de encontrar un intervalo de confianza para el parámetro desconocido μ, si se puede obtener un planteamiento similar a la Ecuación 6.2, pero que tenga a μ, y no a $\bar{X}$, en el centro. En resumen, por medio de una operación algebráica, se puede volver a escribir la Ecuación 6.2 como

$$P(\bar{X} - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \bar{X} + k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha \qquad (6.3)$$

Entonces, si por ejemplo $1 - \alpha = 0.95$, se puede escribir la Ecuación 6.3 como

$$P(\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0.95$$

La Ecuación 6.3 se interpreta de la manera siguiente. Supóngase que un gran número de muestras aleatorias simples de tamaño n se sacan de una población distribuida normalmente con media desconocida μ y con varianza conocida σ^2. Para cada muestra se construye un intervalo en la forma indicada por la expresión entre paréntesis de la Ecuación 6.3, añadiendo y substrayendo de la media muestral la cantidad $k(\sigma / \sqrt{n})$. Este procedimiento llevaría a obtener una serie de intervalos como la que aparece a continuación:

$$\bar{X}_1 \pm k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X}_2 \pm k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X}_3 \pm k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ldots$$

La Ecuación 6.3 nos indica que a la larga 100 (1 - α) % de los intervalos así construidos van a contener la media poblacional desconocida μ . Todos estos intervalos van a tener la misma amplitud; amplitud que será igual a la amplitud del intervalo $\mu \pm k\,(\sigma / \sqrt{n}\,)$ que podría colocarse sobre μ si μ fuera conocida. La Figura 6.4 muestra la relación que guardan con los intervalos obtenidos en el muestreo repetido.

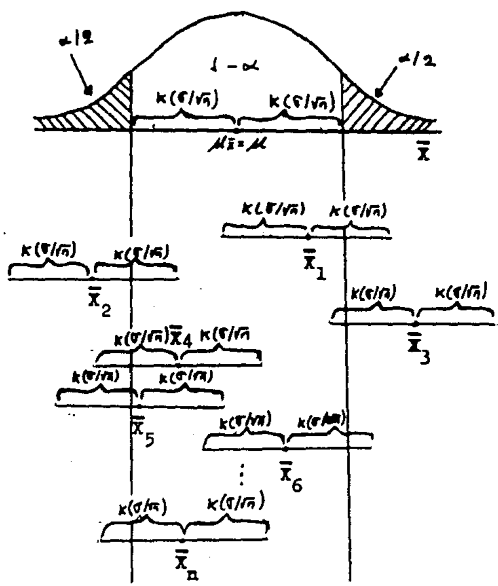


Figura 6.4 La relación con μ de un gran número de estimaciones de intervalo de μ .

En la interpretración de la Ecuación 6.2 se dice que en un-muestreo repetido, 100(1 - α)% de las $\bar{X}$ calculadas estará-entre el intervalo $\mu \pm k(\sigma / \sqrt{n})$. Si un intervalo de la -misma amplitud se centra en $\bar{X}$ (por adición y substracción -de $k(\sigma / \sqrt{n})$, a las $\bar{X}$ dentro de $k \pm (\sigma / \sqrt{n})$ les corres--ponderán intervalos que a su vez van a incluir μ. Este he-cho se explica en la figura 6.4, en la que se verán solamen-te a aquellas $\bar{X}$ que están entre las líneas verticales les -corresponden intervalos que incluyen a μ.

En la práctica, cuando se desea calcular una media probla--cional, no se saca naturalmente un gran número de muestras-aleatorias simples de la población, sino solamente una. Si-se designa con $\bar{X}_0$ la media de una sola muestra que se hubie-ra sacado en una situación normal, se puede construir la si-guiente estimación por intervalos de μ :

$$\bar{X}_0 \pm k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Este intervalo se llama el intervalo de confianza del - --100(1 - α)% para μ , y es apenas uno del gran número de -intervalos de los cuales el 100(1 - α)% contiene a μ .

Para expresar este solo intervalo en la misma forma de la -Ecuación 6.3, podemos escribir

$$C(\bar{X}_0 - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \bar{X}_0 + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha \qquad (6.4)$$

donde C indica que el intervalo es un intervalo de confianza y que se trata de un enunciado de confianza más bien que un enunciado de probabilidad. En la Ecuación 6.4, $1-\alpha$ se denomina coeficiente de confianza e indica el grado o cantidad de confianza que se tiene en que el intervalo único contenga a μ. El coeficiente de confianza expresado en forma de porcentaje recibe el nombre de nivel de confianza.

Se destaca la diferencia entre la Ecuación 6.3 y la Ecuación 6.4. En la Ecuación 6.3, $\bar{X}$ es un valor sin especificar de una variable aleatoria y el enunciado es por tanto un enunciado legítimo de probabilidad. En la Ecuación 6.4, $\bar{X}_0$ es una constante y por lo tanto los puntos límites que se obtienen sumando y restando la cantidad conocida $k(\sigma / \sqrt{n})$ son constantes. La μ desconocida, puede estar en ese intervalo conocido o no estar. Por esta razón, la Ecuación 6.4 no es una ecuación de probabilidad, pero se puede interpretar como un intervalo de confianza. Como la probabilidad de que la muestra aleatoria arroje un intervalo que incluya a μ es igual a $1-\alpha$, se tiene "confianza" en que eso es lo que ha sucedido. El grado de nuestra confianza depende del tamaño de $1-\alpha$. Mientras más grande sea $1-\alpha$ mayor será nuestra confianza.

Se hará ahora un resumen de la forma en que se construye en la práctica un intervalo de confianza.

1 Se saca una muestra aleatoria simple de tamaño n.

2 Se calcula $\bar{X}_0$ y $\sigma_{\bar{X}} = \sigma / \sqrt{n}$.

3 Se selecciona un coeficiente de confianza, $1 - \alpha$. Tomando como base a $1 - \alpha$, se obtiene el valor apropiado de z mediante la tabla de la distribución normal estandarizada. Este valor de z se encontrará en el Apéndice 4, localizando primero en el cuerpo del Apéndice 4 el valor de z que se va a utilizar en la columna D(z). Por ejemplo, si $(1 - \alpha) = 0.95$, se localiza 0.9500 en el cuerpo del Apéndice 4. Se observa que .9500 aparece en la intersección de la fila marcada con 1.96 y la columna encabezada con D(z). De donde se concluye que el valor apropiado de z es 1.96.

4 Se construye el intervalo, sumando y restando a $\bar{X}_0$ el valor z $(\sigma / \sqrt{n})$, así:

$$\bar{X}_0 \pm z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Este intervalo se basa en la suposición de que el factor finito de corrección (ffc) no se puede aplicar o se puede pasar por alto.

5 Se presenta el intervalo como una ecuación de confianza en la siguiente forma:

$$C\left[\bar{X}_0 - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_0 + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha \quad (6.5)$$

Obsérvese que una vez seleccionado $1-\alpha$, se reemplazará a k de la Ecuación 6.4 por el valor de z de la distribución normal estandarizada que tiene $\alpha/2$ del área bajo la curva derecha (de ahí el subíndice de z). Se puede verque, en términos generales, un intervalo de confianza del tipo establecido en la Ecuación 6.5 consta de tres partes: $\bar{X}_0$, $z_{\alpha/2}$ y $\sigma/\sqrt{n}$. En esta ecuación, $\bar{X}_0$ es el estimador. Se puede entonces expresar un intervalo de confianza de este tipo, en términos generales, como.

Estimador $\pm$ (factor de confiabilidad) (error típico -- del estimador)

Se explicará con un ejemplo:

6.1 Supóngase que la desviación estándar de la vida útil - del tubo de televisión de una marca particular se conoce - y es igual a σ =500, pero que se desconoce la vida útil - de los tubos sigue aproximadamente una distribución normal. Para una muestra de n = 15, la vida útil media de operación es $\bar{X}$ = 8900 hr. Construya el intervalo de confianza - (a) del 95 por ciento, y (b) del 90 por ciento para estimar la media de la población.

Puede usarse en este caso la distribución de probabilidad-normal porque la población está normalmente distribuida y- σ se conoce.

(a) $\bar{X} \pm z\sigma_{\bar{X}} = 8900 \pm 1,96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$= 8900 \pm 1,96 \frac{500}{15} = 8900 \pm 1,96 \left(\frac{500}{3,87}\right)$$

$$= 8900 \pm 1,96(129,20) = 8647 \text{ a } 9153$$

(b) $\bar{X} \pm z\sigma_{\bar{X}} = 8900 \pm 1,65(129,20) = 8687$ a 9113 hr

6.4.2 LA MEDIA DE UNA POBLACION NORMALMENTE DISTRIBUIDA, - SIENDO σ^2 DESCONOCIDA.

El Ejemplo 6.1 es un poco irreal, porque, en la mayoría de- las situaciones prácticas, es poco probable que se conozca- la varianza de una población y se desconozca la media. Cuan la varianza de la población σ^2 es desconocida, se presenta el problema de sustituir los valores numéricos de la Ecua-- ción 6.5, cuando se desea obtener un intervalo de confianza para μ.

En primer lugar, surje el problema de qué se debe hacer con la σ desconocida. Como era de sospecharse, la desviación - típica de la muestra, $S=\sqrt{\sum(X_i - \bar{X})^2/(n-1)}$, se utiliza- como estimación de σ en la Ecuación 6.5. Así pues, $S/\sqrt{n}$, estimación del error típico de $\bar{X}$, reemplaza a $\sigma/\sqrt{n}$ en - la ecuación.

El segundo problema que se presenta al construir un intervalo de confianza para μ está en el hecho de que es --- $(\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$, y no $(\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$, lo que se distribuye como la variable normal estandarizada z. Por tanto, no se puede determinar exactamente el valor de z cuando --

se emplea S como estimación de μ.
Cuando el muestreo se hace en una población que está distribuida normalmente, $(\bar{X} - \mu)/(S / \sqrt{n})$, sigue una distribución conocida como distribución t de Student con n-1 grados de libertad. La distribución t, de la misma manera que la distribución normal estandarizada, tiene forma de campana y tiene media igual a 0, alrededor de la cual es simétrica. Su varianza, en cambio, es mayor que 1, hecho que origina que la típica distribución t sea menos aguda en el centro y "más alta" en las colas que la distribución normal estandarizada. La Figura 6.5 explica la relación general entre la distribución normal y una distribución t.

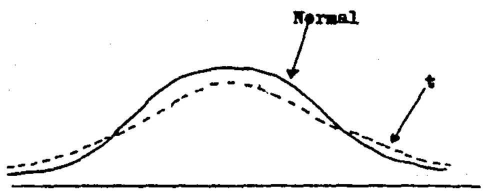


Figura 6.5 La distribución normal y una distribución t.

Entonces, en lugar de z se utiliza un valor de la distribución t para plantear el enunciado de confianza de la Ecuación 6.5. De esta manera, cuando el muestreo se hace en una población distribuida normalmente con varianza desconocida, el intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)\%$ para μ está dado por

$$c(\bar{x}_0 - \frac{t_{n-1}\, S_0}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \bar{x}_0 + \frac{t_{n-1}\, S_0}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha \quad (6.6)$$

donde S_0 es la desviación típica de la muestra particular que se ha sacado. En la práctica, el valor apropiado de t se localiza el Apéndice 5 que se encuentra en la intersección de la fila correspondiente a n - 1 y de la columna $\alpha/2$. Por ejemplo, si el tamaño de la muestra es 11 y se desea un nivel de confianza de 95%, el valor apropiado de t es: 2.2231, que se localiza en la intersección de la fila marcada con 10 y de la columna marcada con $.05/_2 = 0.025$.

Ahora, se explicará con un ejemplo la construcción de un intervalo de confianza cuando el muestreo se hace en una población normalmente distribuida con varianza desconocida.

Ejemplo 6.2.

En el problema 6.1 se construyeron intervalos de confianza para estimar la vida media de operación de un tubo de televisión de una marca particular, basados en la suposición de que la vida útil de operación de todos los tubos estaba normalmente distribuida y $\sigma = 500$, y dada una muestra de n=15 con $\bar{x}$=8900 hr. Supongase que σ no se conoce, pero que la desviación estándar de la muestra es S = 500.

a) Construyase el intervalo de confianza del 95 por ciento para estimar la media de la población y compare este intervalo con la respuesta del problema 6.1 (a)

b) Construyase el intervalo de confianza del 90 por ciento para estimar la media de la población y comparese este intervalo con la respuesta del problema 6.1 (b)

(Nota: El uso de una distribución t es apropiado en este caso porque se supone que la población esta normalmente distribuida, σ no se conoce, y la muestra es pequeña($n < 30$).

a) $\bar{X} \pm \frac{t_{n-1} S_{\bar{X}}}{\sqrt{n}} = 8900 \pm 2{,}145 \frac{S}{\sqrt{n}} = 8900 \pm 2{,}145 \frac{500}{15}$

$= 8900 \pm 2{,}145 \frac{500}{3.87} = 8900 \pm 2{,}145(129{,}199) = 8623$ a 9177 hr

El intervalo de confianza es más amplio que el del problema 6.1 (a). reflejando la diferencia entre la distribución de probabilidad t y la distribución de probabilidad normal.

b) $\bar{X} \pm \frac{t_{n-1} S_{\bar{X}}}{\sqrt{n}} = 8900 \pm 1{,}761(129{,}199) = 8672$ a 9128 hr.

Nuevamente, el intervalo de confianza es más amplio que el del problema 6.1 (b).

El estadistico $\bar{X} - \mu / S/\sqrt{n}$

está distribuido aproximadamente según la distribución normal estandarizada, z, cuando n es grande, inclusive cuando S^2 se utiliza para estimar la varianza de la población. Por lo tanto, en muchas aplicaciones de la metodología estadística, los investigadores prefieren utilizar z en lugar de t como el factor de confiabilidad cuando se construyen intervalos de confianza para μ, si tienen una muestra grande. El hecho de que S^2 se calcule a partir de una muestra grande, hace que su uso como un sustituto de σ^2 se pueda defender.

6.4.3 LA MEDIA DE UNA POBLACION NO DISTRIBUIDA NORMALMENTE

Con frecuencia se desea calcular los parámetros de las poblaciones que son tan anormales que no se pueden aplicar los métodos estudiados hasta ahora en esta sección. Cuando el muestreo se hace en poblaciones no normales, se pueden distinguir dos casos:

el caso en que la muestra es pequeña y el caso en que la muestra es grande.

Cuando se saca una muestra pequeña de una población que no se distribuye normalmente, no se puede construir un intervalo de confianza significativo para μ por medio de la Ecuación 6.5, aunque se conozca la varianza de la población σ^2. La razón reside en que la distribución muestral de $\bar{X}$ no es normal cuando las muestras son pequeñas y se sacan de poblaciones que no están distribuidas normalmente.

En realidad la distribución muestral de $\bar{X}$ no es normal para muestras grandes de poblaciones no normales. Sin embargo en el Capítulo 5 vimos que el teorema del límite central nos asegura que, cuando las medias muestrales se calculan a partir de muestras grandes, el valor:

$z = (\bar{X} - \mu) / (\sigma / \sqrt{n})$ se distribuye en forma aproximadamente normal con media 0 y varianza 1, sin importar la forma de la población de la muestra. En el Capítulo 5 también se indicó que, en la mayoría de los casos, una muestra de tamaño n = 30 es suficientemente grande como para garantizar la aplicación del teorema del límite central.

Por eso, cuando se sacan muestras grandes de poblaciones infinitas que no están distribuidas normalmente y que tienen varianzas conocidas (o cuando el muestreo se hace con reemplazamiento), entonces se puede utilizar la Ecuación 6.5 para construir intervalos de confianza para μ.

Si el muestreo se hace en una población finita que no está normalmente distribuida y si como sucede generalmente, el muestreo es sin reemplazamiento, el factor (fc) es adecuado, de modo que un intervalo de confianza del 100(1-α)% para μ, cuando n es grande, está dado por

$$C(\bar{X}_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leqq \mu \leqq \bar{X}_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}) = 1-\alpha \quad (6.7)$$

Las varianzas poblacionales conocidas son tan raras entre poblaciones no normales como entre poblaciones normales y por éllo la Ecuación 6.7 se utiliza muy de vez en cuando. Cuando la varianza de la población σ^2, es desconocida, se estima por medio de $S^2 = \sum(X_i - \bar{X})^2 / (n-1)$. La fórmula, teniendo en cuenta una muestra grande, para el intervalo de confianza de , si el muestreo se hace en poblaciones finitas, se transforma en:

$$C\left(\bar{X}_0 - Z_{\alpha/2}\frac{S_0}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \mu \leq \bar{X}_0 + Z_{\alpha/2}\frac{S_0}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1- \quad (6.8)$$

Cuando no se conoce ni la forma funcional de una población, ni su varianza y cuando n es grande, el investigador que está construyendo un intervalo de confianza para , tiene que decidir si emplea la Ecuación 6.6 o la Ecuación 6.8. Si el investigador quiere suponer que la población es por lo menos aproximadamente normal, puede utilizar la Ecuación 6.6. Si el investigador no desea hacer esta suposición, emplea la Ecuación 6.8.

Cuando la muestra constituye solamente una pequeña proporción de la población, el factor (fc) se puede pasar por alto. Generalmente, si n/N es menor o igual a 0.05, n constituye una pequeña proporción de N.

Ejemplo 6.3

Un consejero que trabaja con el departamento de correccionales de un estado desea hacer una estimación del puntaje promedio obtenido en una prueba de aptitud entre 5500 personas admitidas en instituciones correecionales estatales durante un determinado año. Una muestra aleatoria simple de 250 --

admisiones arroja una media de 65 y una desviación típica - de 15. Como no se conoce la forma de la población y como ésta es finita, utilizamos la Ecuación 6.8 para construir un intervalo de confianza para la media μ poblacional desconocida. Supóngase que basta un nivel de confianza de 95%. Según la Ecuación 6.8, tenemos

$$C\left(65 - 1.96\frac{15}{\sqrt{250}}\sqrt{\frac{5500-250}{5500-1}} \leq \mu \leq 65 + 1.96\frac{15}{\sqrt{250}}\sqrt{\frac{5500-250}{5500-1}}\right) = 0.95$$

$$C(65 - (1.96)(0.9487)(0.9547) \leq \mu \leq 65 + (1.96)(0.9487)(0.9547) = 0.95$$

$$C(65 - 2 \leq \mu \leq 65 + 2) = 0.95$$

$$C(63 \leq \mu \leq 67) = 0.95$$

La interpretación de este intervalo es que el consejero puede confiar en que, un 95% de los casos, el único intervalo construido por él incluye la media poblacional, puesto que en un muestreo repetitivo, cerca del 95% de los intervalos construidos de la misma manera incluirán la media de la población.

6.4.4. TAMAÑO DE LA MUESTRA PARA ESTIMAR LA MEDIA DE LA POBLACION.

En cualquier investigación que tenga como uno de sus objetivos una inferencia estadística, surge, al comenzar la etapa de la planeación, la pregunta acerca del tamaño de la muestra que se va a sacar sea de tamaño adecuado. Si se toma --

una muestra demasiado grande, se pierde dinero y otros recursos. Por otra parte, si la muestra es demasiado pequeña, produce resultados inútiles.

Supóngase que se puede determinar qué tan cerca se desea que se encuentre la estimación de la media verdadera. Supóngase también que se conoce la varianza de población y que además se puede especificar el nivel de confiabilidad que se desea. Entonces se puede establecer la siguiente ecuación y resolverla para n, con lo que se determinará el tamaño necesario de la muestra.

$$e = z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (6.9)$$

En la Ecuación 6.9, e es el error típico del intervalo de confianza, z es el valor de la tabla normal estandarizada correspondiente al nivel de confianza deseado y σ es la desviación típica de la población de donde se va a sacar la muestra. La resolución de la Ecuación 6.9 para n, da

$$n = \frac{z^2 \sigma^2}{e^2} \qquad (6.10)$$

Obsérvese el efecto que tienen sobre n los valores de σ, z y e, haciendo que varíe cada una de ellas mientras las otras dos se mantienen constantes. Mientras mayor sea la varianza de la población mayor será el tamaño de la muestra, para z y e fijas. En otras palabras, cuando el muestreo se hace en poblaciones altamente variables, se necesitan muestras más grandes. Un investigador que quiere tener mucha confianza en su estimación, tiene que pagar el precio con un mayor tamaño de la muestra. Por último, intervalos estrechos de confianza (valores pequeños de e) requieren muestras grandes.

Se explicará con un ejemplo el uso de la Ecuación 6.10 para determinar el tamaño de la muestra.

Ejemplo 6.4

Un presunto comprador quiere calcular la cantidad media de dinero de ventas por cliente en un almacén de juguetes de un aeropuerto. Sobre la base de informaciones de aeropuertos semejantes, la desviación estándar de tales montos de ventas se estima en alrededor de σ = \$0,80. ¿Qué tamaño de muestra aleatoria debe obtener el cliente como mínimo, si quiere estimar el monto medio de ventas dentro de 25 ¢ con un intervalo de confianza del 99 por ciento?

$$n = \left(\frac{z^2 \sigma^2}{e^2} \right) = \left[\frac{(2,58)(0,80)}{0.25} \right]^2 = (9,256)^2 = 68,16 = 69$$

Si hay que sacar la muestra de una población finita, puede resultar conveniente incorporar el factor (f_c) a la fórmula para n. En este caso la fórmula se transforma en

$$n = \frac{N z^2 \sigma^2}{z^2 \sigma^2 + e^2 (N-1)} \qquad (6.11)$$

Ejemplo 6.5

Un investigador de un colegio comunitario que tiene 2500 alumnos, desea hacer una estimación del tiempo promedio que gastan los estudiantes en el viaje entre la escuela y la casa. El investigador desea un intervalo de confianza del 99% y una estimación que esté comprendida entre 1 minu

to y la media verdadera. Una pequeña muestra piloto da una varianza de 25 minutos al cuadrado. ¿Qué tamaño debe tener la muestra que necesita el investigador?
Si sustituimos la información dada en la Ecuación 6.11, tenemos

$$n=\frac{(2500)(2.58)^2(25)}{(2.58)^2(25)+(1)^2(2500-1)} = 156.08$$

Una muestra de tamaño 157 será la adecuada.

CAPITULO VII

CONCEPTOS BASICOS DE PRUEBA DE HIPOTESIS

7.1 ETAPAS BASICAS EN PRUEBAS DE HIPOTESIS.

Una hipótesis estadística es una afirmación acerca de la población estadística bajo estudio, la cual a menudo se expresa por medio de una afirmación acerca de los parámetros del modelo probabilístico ajustado a la población.

Existen dos tipos de hipótesis estadística:

i) Hipótesis simple.- Es aquella que especifica por completo la distribución de la variable de interés.

ii) Hipótesis compuesta.- Es aquella que no especifica completamente la distribución de la variable de interés.

PRIMER PASO: FORMULAR LA HIPOTESIS NULA Y LA HIPOTESIS ALTERNATIVA:

En general la hipótesis a probar recibe el nombre de hipótesis nula (Ho) y (H_1) designa la hipótesis alternativa. La hipótesis nula (Ho) se rechaza solamente si no es probable que ocurra el resultado de la muestra dada la corrección de la hipótesis.

Existen pruebas de hipótesis de los siguientes tipos:

i) Ho: $\mu = \mu_0$; H_1 : $\mu = \mu_1$ = (simple sobre simple)
ii) Ho: $\mu = \mu_0$; H_1 : $\mu \neq \mu_0$ = (simple sobre compuesta)
iii) Ho: $\mu \geq \mu_0$; H_1 : $\mu \leq \mu_0$ = (compuesta s/compuesta)

Un auditor quiere probar la suposición de que el valor medio de todas las cuentas por cobrar, en una firma dada, es $260,00 tomando una muestra de n=36 y calculando la media de la nuestra. Desea rechazar el valor supuesto de $260,00 sólo si se contradice claramente por la media de la muestra y, de esta manera, el valor hipotético debe dársele el "beneficio de la duda" en el procedimiento de prueba. Las hipótesis nula y alternativa para esta prueba son:

SEGUNDO PASO: ESPECIFICAR EL NIVEL DE SIGNIFICACION QUE SE VA A UTILIZAR.

El nivel de significación es el estandar estadístico que se especifica para rechazar la hipótesis nula. Si se especifica un nivel de significación del 5 por ciento, entonces se rechaza la hipótesis nula solo si el resultado de la muestra es tan diferente del valor hipótetico que una diferencia de dicha cantidad o mayor ocurriría por casualidad con una probabilidad del 0.05 o menos.
Obsérvese que si se utiliza el nivel de significación del 5 por ciento, hay una probabilidad de 0.05 de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera, Esto se denomina error de tipo I. La probabilidad del error de tipo I es siempre igual al nivel de significación que se utiliza como el estándar para rechazar la hipótesis nula; se designa con la minúscula griega α("alfa"); así pues también representa el nivel de significación. Los niveles más comúnmente empleados en la prueba de hipótesis son los niveles del 5 y del 1 por ciento.
Un error de tipo II ocurre si se acepta la hipótesis nula cuando es falsa. En la sección 7.3 se explica la determinación de la probabilidad del error tipo II. La tabla 7.1 resume los tipos de decisiones y las posibles consecuencias de las decisiones que se hacen en las pruebas de hipótesis.

TERCER PASO: SELECCIONAR EL ESTADISTICO DE PRUEBA.

El estadístico de prueba será el estadístico muestral (el estimador no sesgado del parámetro en prueba), o una versión transformada del estadístico muestral. Por ejemplo, para probar un valor hipotético de la media de la población, la media de una muestra aleatoria tomada de dicha po blación podría servir como estadístico de la prueba. Sin embargo, si la distribución de muestreo de la media es normal, entonces el valor de la media de la muestra se transforma típicamente en un valor z.

TABLA 7.1 CONSECUENCIAS DE DECISIONES EN LA PRUEBA DE HIPOTESIS.

Desiciones posibles	Estados posibles	
	Hipótesis nula verdadera	Hipótesis nula falsa
Aceptación de hipótesis nula	Correctamente aceptada	Error de tipo II
Rechazo de hipótesis nula	Error de tipo I	Correctamente rechazada

CUARTO PASO: ESTABLECER EL VALOR O LOS VALORES DE LA ESTADISTICA DE PRUEBA

Habiendo especificado la hipótesis nula, el nivel de significación y el estadístico de prueba que se va a utilizar, se puede establecer el valor o los valores críticos del estadístico de prueba. Puede haber uno o dos valores críticos según se efectúe una prueba de una cola o de dos colas (ver la sección 7.2). En cualquier caso,un valor crítico identifica el valor del estadístico de prueba requerido para rechazar la hipótesis nula.

QUINTO PASO: DETERMINAR EL VALOR DEL ESTADISTICO DE PRUEBA.

Por ejemplo,al probar un valor hipotético de la media población se toma una muestra aleatoria y se determina el valor de la media de la muestra. Si el valor crítico se estableció como un valor z, entonces la media de la muestra se - convierte a un valor z.

SEXTO PASO: TOMAR LA DESICION

El valor observado del estadístico muestral se compara — con el valor crítico del estadístico de la muestra. Entonces la hipótesis nula se acepta o se rechaza. Si la hipótesis nula se rechaza, se acepta la hipótesis alterna tiva. A su vez, esta decisión será aplicable a otras decisiones que deban tomar los gerentes de operación, por ejem plo, si se mantiene un patrón de operación, o cuál de dos estrategias de mercadeo debe emplearse.

7.2 PRUEBA DE UN VALORHIPOTETICO DE LA MEDIA UTILIZANDO LA DISTRIBUCION NORMAL

La distribución de probabilidad normal se puede utilizar, para probar un valor hipotético de la media de la población (1) cuando $n \geqq 30$, debido al teorema del límite central, o (2) cuando $n < 30$, pero la población está normalmente distribuida y se conoce σ.

Se utiliza una prueba de dos coles cuando se está interesado en una desviación posible en cualquier dirección del valor hipotético de la media. La fórmula empleada para establecer los valores críticos de la media de la muestra es semejante a la fórmula para determinar los límites de confianza para estimar la media de la población, excepto que el valor hipotético de la media de la población, μ_0, es el punto de referencia y no la media de la muestra.

Los valores críticos de la media de la muestra para una prueba de dos colas, según se conozca o no σ, son:

$$\mu_0 \pm z\,\sigma_{\bar{x}} \qquad (7.1)$$

$$\mu_0 \pm z s_{\bar{x}} \qquad (7.2)$$

EJEMPLO 7.2

Para la hipótesis nula formulada en el ejemplo 7.1 determine los valores críticos de la media de la muestra para probar la hipótesis a un nivel de significación del 5 por ciento. Dado que la desviación estándar de las cantidades de las cuentas por cobrar es σ = \$43,00, los valores críticos son:

Hipótesis $H_0: \mu =$ \$260,00; $H_1: \mu \neq$ \$260,00

Nivel de significación: $\alpha = 0.05$

Estadístico de prueba: $\bar{X}$ basado en una muestra de $n = 36$ y con $\sigma = 43{,}00$

$\bar{X}_c$ = Valor crítico de la media de la muestra

$$\bar{X}_c = \mu_0 \pm z\,\sigma_{\bar{x}} = 260{,}00 \pm 1{,}96\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$= 260{,}00 \pm 1{,}96\ \frac{43{,}00}{\sqrt{36}} = \$245{,}95 \text{ y } \$274{,}05$$

Por lo tanto para rechazar la hipótesis nula la media de la muestra debe tener un valor que sea menor de \$245,95 o mayor de \$274,05. De esta manera, existen dos regiones de rechazo en el caso de una prueba de dos colas (ver fig. 7.1). Los valores z de $\pm$ 1,96 se utilizan para establecer los límites críticos porque para la distribución normal estándar permanece en las dos colas una porción de 0.95 del área, lo que corresponde a la especificación de α = 0,05.

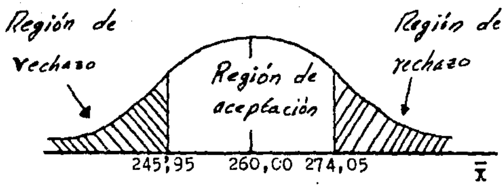


FIGURA 7.1

En vez de establecer los valores críticos en término de la muestra como tal, los valores críticos en la prueba de hipó tesis se especifican típicamente en términos de valores z. Para el nivel de significación del 5 por ciento, los valores críticos z para una prueba de dos colas son -1,96 y+1,96 por ejemplo. Cuando se determina el valor de la media de - la muestra, éste se transforma en un valor z para poderlo- comparar con los valores críticos de z. La fórmula de trans formación, según se conozca o no σ , es:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \qquad (7.3)$$

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s_{\bar{x}}} \qquad (7.4)$$

EJEMPLO 7.3

Para el problema de prueba de hipótesis de los ejemplos 7.1 y 7.2, supóngase que la media de la muestra es $\bar{X}$=\$240,00. Se determinará si se debe aceptar la hipótesis nula transformando esta media a un valor z y comparándola con los valores críticos de $\pm$ 1,96, de la siguiente manera:

$$\sigma_{\bar{x}} = 7{,}17 \quad \text{(del ejemplo 7.2)}$$

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{240{,}00 - 260{,}00}{7{,}17} = \frac{-20{,}00}{7{,}17} = -2{,}79$$

Este valor de z está en la región de rechazo de la cola izquierda del modelo de la prueba de hipótesis descrito gráficamente en la Fig. 7.2 De esta manera, se rechaza la hipótesis nula y se acepta la alternativa, de que $\mu \neq$ \$260,00. Obsérvese que se llega a la misma conclusión comparando la media identificada en la fig. 7.1.

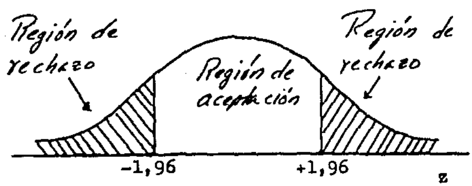


FIGURA 7.2

Una prueba de una cola es apropiada cuando se está interesado en las posibles desviaciones en una sola dirección -- desde el valor hipotético de la media. El auditor del ejemplo 7.1 puede no estar interesado en que el promedio verdadero de todas las cuentas por cobrar exceda \$260,00 sino en que pueda ser menor de \$260,00. De esta manera, si da el beneficio de la duda a la afirmación de que la media verdadera es por lo menos \$260,00, la hipótesis nula y la hipótesis alternativa son:

$$H_0: \mu \geqq \$260,00 \quad y \quad H_1: \mu < \$260,00$$

Solo hay una región de rechazo para una prueba de una cola, y en el ejemplo anterior la prueba es de cola inferior. La región de rechazo para una prueba de una cola está siempre en la cola que representa el apoyo de la hipótesis alternativa. Así como para una prueba de dos colas el valor crítico puede determinarse para la media como tal o en terminos de un valor z. Sin embargo los valores críticos para pruebas de una cola difieren en los de las pruebas de dos colas porque la porción de área dada está en una cola de la distribución. La tabla 7.2 represnta los valores de z necesarios para pruebas de una cola y de dos colas. La fórmula general para establecer el valor crítico de la media de la muestra para una prueba de una cola según se conozca o no σ, es.

$$\mu_0 + z\sigma_{\bar{x}} \qquad (7.5)$$

$$\mu_0 + zs_{\bar{x}} \qquad (7.6)$$

Obsérvese que en las fórmulas (7.5) y (7.6) z puede ser negativo, dando como resultado una resta del segundo término en cada fórmula.

TABLA 7.2 VALORES CRITICOS DE z EN PRUEBA DE HIPOTESIS

Nivel de signicación	TIPO DE PRUEBA Una cola	Dos colas
5%	+ 1,65 (- 1,65)	$\pm$ 1,96
1%	+ 2,33 (- 2,33)	$\pm$ 2,58

EJEMPLO 7.4

Suponga que el auditor de los problemas 7.1, 7.2 y 7.3 comenzó con la hipótesis nula de que el valor medio de todas las cuentas por cobrar es por lo menos de \$260,00. Dado que la media de la muestra es \$ 240,00, se prueba esta hipótesis a un nivel de significación del 5 por ciento por los dos siguientes procedimientos:

(1) Determinado el valor crítico de la media de la muestra, donde $H_0: \mu \geqq \$260,00$ y $H_1: \mu < \$260,00$.

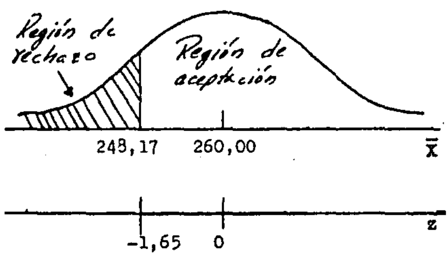
$$\bar{x}_c = \mu_0 + z\,\sigma_{\bar{x}} = 260 + (-1,65)(7,17) = \$248,17$$

Puesto que $\bar{X}$ = \$240,00, se encuentra en la región de rechazo.. Se rechaza la hipótesis nula por lo tanto y se acepta la hipótesis alternativa, $\mu < \$260,00$.

(2) Especificando el valor crítico en términos de z, donde z crítico ($\alpha = 0.05$) = - 1,65:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{240,00 - 260,00}{7,17} = -2,79$$

De esta manera, se rechaza la hipótesis nula. La figura 7.3 describe gráficamente el valor crítico para esta prueba de una cola en términos de $\bar{X}$ y z.



FIGURAS 7.3

7.3 ERRORES DE TIPO I Y DE TIPO II EN PRUEBAS DE HIPOTESIS

En esta sección los errores de tipo I de tipo II (definidos en la sección 7.1) se presentan totalmente con respecto a las pruebas de una cola para una media hipotética. Sin embargo, los conceptos básicos ilustrados aquí también se aplican a otros modelos de pruebas de hipótesis.

La probabilidad del error de tipo I es siempre igual al nivel de significación utilizado al probar la hipótesis nula. Esto es porque por definición la proción de área en la región de rechazo es igual a la proporción de los resultados de la muestra que ocurría en aquella región si la hipótesis nula es verdadera.

La probabilidad del error de tipo II se designa generalmente con la letra griega β ("beta"). Se puede determinar solamente respecto de un valor específico incluido en el rango de la hipótesis alternativa.

EJEMPLO 7.5

Como en el ejemplo 7.4 la hipótesis nula que se va a probar es que la media de todas las cuentas por cobrar es por lo menos \$260,00 y esta prueba se va a llevar a cabo a un nivel de significación del 5 por ciento. Además, el auditor indica que consideraría una media real de \$260,00 (o menos) como una diferencia importante y material del valor hipotético de la media. Como antes, σ = \$43,00 y el tamañode la muestra es n = 36 cuentas. La determinación de la probabilidad del error de tipo II requiere:

(1) Formular las hipótesis nula y alternativa para esta situación de prueba,

(2) determinar el valor crítico de la media de la muestra que se utilizará al probar la hipótesis nula a un nivel de significación del 5 por ciento,

(3) identificar la probabilidad del error de tipo I asociado con el uso del valor crítico calculado anteriormente como base para la regla de decisión,

(4) identificar la probabilidad del error de tipo II asociado con la regla de decisión, dado el valor específico de la media alternativa de $ 240,00.

La solución completa es

$$(1)\ H_0 : \mu \geqq 260{,}00: \qquad H_1 : \mu < 260{,}00$$

$$(2)\ \bar{X}_c = \mu_0 + z\,\sigma_{\bar{x}} = 260{,}00 + (-1{,}65)(7{,}17) = \$248.17$$

$$\text{donde } \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{43{,}00}{\sqrt{36}} = \frac{43{,}00}{6} = 7.17$$

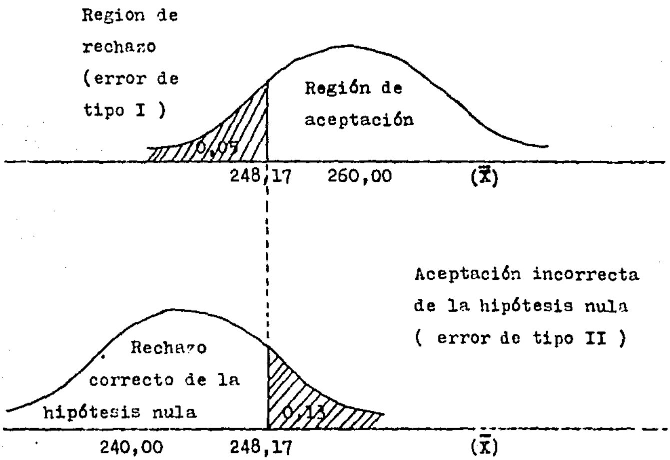
(3) La probabilidad del error de tipo I es igual a 0,05 (el nevel de significación utilizando para probar la hipótesis nula).

(4) La probabilidad del error de tipo II es la probabilidad de que la media de la muestra aleatoria iguale o exceda $248,17 dado que la media de todas las cuentas es realmente $240,00.

$$z = \frac{x_c - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{248{,}17 - 240{,}00}{7.17} = \frac{8.17}{7{,}17} = +1{,}14$$

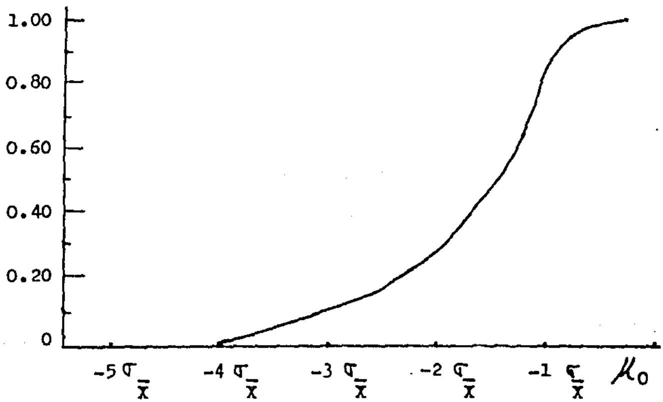
$$P(\text{error de tipo II}) = P(z \geqq +1{,}14) = 1 - \phi(1.14) = 1 - .8729 = 0.1271$$

La figura 7.4 ilustra el procedimiento seguido en el ejemplo 7.5 En general, el valor crítico de la media determinado con respecto a la hipótesis nula se "reduce" y se utiliza como el valor crítico respecto de la hipótesis alternativa específica. El problema 7.6 ilustra la determinación de la probabilidad del error de tipo II para una prueba de dos colas.



FIGURAS 7.4

Cuando el nivel de significación y el tamaño de la muestra se mantienen constantes, la probabilidad del error de tipo II disminuye a medida que el valor específico de la alternativa de la media se coloca más lejos del valor de la hipótesis nula. Aumenta a medida que el valor de la alternativa se coloca más cerca del valor de la hipótesis nula. Una curva característica de operación (CO) describe graficamente la probabilidad de aceptación de la hipótesis nula dados varios valores alternativos de la media verdadera. La figura 7.5 es la curva CO aplicable a cualquier prueba de cola inferior de una media hipotética realizada a un nivel de significación del 5% y basada en el uso de la distribución de probabilidad normal. Obsérvese que es aplicable a cualquier prueba de este tipo, porque los valores sobre el eje horizontal se presentan en unidades del error estándar de la media. Para todos los valores a la izquierda de μ_0, la probabilidad de aceptación indica la probabilidad del error de tipo II. A la derecha de μ_0, las probabilidades indican la aceptación correcta de la hipótesis nula.



Posición posible de la media verdadera,

FIGURA 7.5

EJEMPLO 7.6

Se puede verificar la probabilidad del error de tipo II determinada en el ejemplo 7.5 de acuerdo con la figura 7.5, en la siguiente forma:

Como se identificó en el ejemplo 7.5, μ_0=\$260,00, μ_1= \$240,00, y $\sigma_{\bar{x}}$=7,17. Por lo tanto, la diferencia entre los dos valores de signados de la media en unidades de error estándar es

$$\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{240 - 260}{7.17} = -2{,}8$$

Con referencia a la figura 7.5, se observa que la altura de la curva en un valor del eje horizontal de - 2,8 se encuentra justo por encima de 0,10. El valor calculado en el ejemplo 7.5 es $0{,}1271 \approx 0{,}13$.

El concepto de potencia tal como aquí se emplea es análogo a la de un anteojo. Refleja la capacidad de una comprobación para averiguar si el verdadero estado de naturaleza es distinto del que se dice en la hipótesis nula.

Un anteojo de poder elevado permite distinguir a una gran distancia; por ejemplo: una cañonera de un barco de pasajeros en altamar. Análogamente, una comprobación estadística de elevada potencia permite gran capacidad para concluir que la hipótesis nula es falsa cuando en realidad lo es, los estadísticos suelen evaluar una comprobación estadística por la potencia de la comprobación. En general, dada la magnitud de α cuanto a mayor potencia, o sea cuanto mayor sea el valor de $1 - \beta$, tanto mejor será la comprobación.

7.4 PRUEBA DE UN VALOR HIPOTETICO DE LA MEDIA USANDO LAS DISTRIBUCIONES t DE STUDENT.

Es adecuado utilizar las distribuciones "t" como el estadístico de prueba cuando la muestra es pequeña ($n < 30$), la población está normalmente distribuida y σ no se conoce. El procedimiento empleado para probar un valor supuesto de la media de una población es idéntico al descrito en la sección 7.2, excepto por el uso de "t" como estadístico de prueba, el estadístico de prueba usado es:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s_{\bar{x}}}$$

Ejemplo 7. 7. Se ha formulado la hipótesis nula de la que la vida útil media de operación de los bombillos de una marca - específica es por lo menos, de 4200 hrs. La vida útil media de una muestra aleatoria de n=10 bombillos es $\bar{X}$ = 4.000 hrs, con una desviación stándar de la muestra de s = 200 hrs, la vida útil de operación de los bombillos en general se supone normalmente distribuida. Probamos la hipótesis nula a un nivel de significación del 5 por ciento, de la siguiente manera:

$$Ho: \mu \geqq 4200 \qquad H_1: \mu < 4200$$

$$t \text{ crítico } (gl=9,\ a=0{,}05) = 1{,}833$$

$$s_{\bar{x}} \ \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{200}{\sqrt{10}} \ \frac{200}{3{,}16} = 63{,}3 \text{ hrs.}$$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s_{\bar{x}}} = \frac{4000-4200}{63{,}3} = \frac{-200}{63{,}3}$$

Por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula y se acepta la - hipótesis alternativa de que la vida útil media verdadera - de operación es menor de 4.000 hrs.

CAPITULO VIII

NUMEROS INDICES

8.1 I N T R O D U C C I O N.

Los números índices son una forma importante de resumir el cambio que experimentan las variables económicas durante un cierto período. Tales números indican el cambio relativo en precio, cantidad o valor en algún punto anterior en el tiempo (período base) y usualmente, el período actual.

Un número índice es un cociente o promedio de cocientes expresados como porcentaje. Involucra dos ó más períodos de tiempo, uno de los cuales es el período base. El valor al período de tiempo base sirve como el punto estándar de comparación mientras que los valores en otros períodos de tiempo se usan para mostrar el cambio porcentual en valor con respecto al valor estándar del período base. En general, los números índices se clasifican en dos tipos: simples y compuestos.

Un índice simple es el que se calcula para una sola variable, mientras que un índice compuesto se construye para dos o más variables. La mayoría de los números índices son compuestos por naturaleza.

8.2 NUMEROS INDICES SIMPLE:

Para ilustrar mejor el concepto de número índice simple observemos el siguiente ejemplo.

Considérese el precio y el volumen medios en el caso de un vendedor de automóviles nuevos en lo referente a un tipo de modelo específico con el equipo estándar de fábrica. Los datos se muestran en la tabla siguiente.

TABLA 8.1 DATOS DE VOLUMEN Y PRECIO PARA VENDEDORES DE AUTOS

AÑO	(1) PRECIO PROMEDIO DE VENTA	(2) NUMERO DE AUTOS VENDIDOS	(1)X(2) INGRESOS (en miles)
1972	3500	62	217.0
1973	3800	65	247.0
1974	4000	63	248.0
1975	4200	70	294.0
1976	4200	76	319.2
1977	4850	76	368.6
1978	5000	70	350.0

Los números índices simple para el precio, cantidad y valor relativos se pueden calcular mediante las siguientes fórmula.

$$\text{Precio relativo} = \frac{Pn}{Po} \times 100$$

$$\text{Cantidad relativa} = \frac{qn}{Po} \times 100$$

$$\text{Valor relativo} = \frac{Pn\ \ qn}{Po\ \ qo} \times 100$$

donde:

Po = precio de un artículo en el año base.

qo = cantidad de un artículo en el año base.

Pn = precio de un artículo en un determinado año.

qn = cantidad de un artículo en un determinado año.

Supóngase que acordemos utilizar 1972 como año base. Esto significa que se deberá considerar el precio de \$ 3500 (dólares) como equivalente al 100% y que los precios de otros años se deberán medir en relación con ese precio. En forma sililar, el volumen de ventas se medirá considerando las 62 unidades vendidas en 1972 como el 100% y los ingresos se medirán utilizando a \$ 217000 como 100%.
Los números índices (relativos) para el precio, cantidad y valor en lo referente a los automóviles modelo 1976, son:

$$\text{Precio: } \frac{P\ 1976}{P\ 1972} \times 100 = \frac{4200}{3500} \times 100 = 120$$

$$\text{Cantidad: } \frac{q\ 1976}{q\ 1972} \times 100 = \frac{76}{62} \times 100 = 123$$

$$\text{Valor: } \frac{(P\ 1976)(q\ 1976)}{(P\ 1972)(q\ 1972)} \times 100 = \frac{(4200)\ (76)}{(3500)\ (62)} \times 100 = 147$$

La interpretación de éstas cifras nos dicen lo siguiente: los precios de los automóviles aumentarón 20% entre 1972 y 1976, la cantidad vendida aumentó 23% y el valor (ingreso) aumentó el 47%. Los números índices relativos restantes se estiman de igual manera se indica en la tabla 8.2.

TABLA 6.2 INDICES DE PRECIO, CANTIDAD Y VALOR PARA EL EJEMPLO DE LOS AUTOMOVILES, UTILIZANDO LAS CIFRAS DE 1972 COMO BASE.

	PRECIO		CANTIDAD		INGRESOS	
AÑO	DOLARES	INDICE	UNIDADES	INDICE	DOLARES	INDICE
1972	3500	100	62	100	217.0	100
1973	3800	109	65	105	247.0	114
1974	4000	114	63	102	248.0	114
1975	4200	120	70	113	294.0	135
1976	4200	120	76	123	319.2	147
1977	4850	139	76	123	368.6	170
1978	5000	143	70	113	350.0	161

8.3 NUMEROS INDICE COMPUESTOS.

Los números índices compuestos se utilizan para indicar el cambio relativo en precio, cantidad o valor de un grupo de elementos o mercancías. Existen dos métodos para calcular dichos índices: el método de agregados ponderados; y el promedio de relativos de precios.

8.3.1 METODO DE AGREGADOS PONDERADOS.

El problema en la medición de cambios de precios en el caso de una serie de mercancías es que usualmente se registran cambios en la cantidad adquiridas, así como en los precios. Por tanto, se -- quiere saber hasta qué grados los cambios en el valor se deben a cambios en el precio, sin tener que considerar cambios en cantidades.

Una forma de lograr esto es permitir que las cantidades del año en curso se igualen a las cantidades del año en base.
De esta forma, la única referencia serán los precios en los dos años.
Considérese el ejemplo de una persona que compra cuatro artículos: malvaviscos, limones, pannués y el periódico de la tarde.
Los datos se presentan en la table 8.3.
Cabe observar que de 1970 a 1978, tanto los precios como las cantidades han cambiado. Si se quiere saber cúal ha sido el cambio total en los precios, es posible imaginar que las cantidades han permanecido inalterables.
La formula para un índice de precios es como sigue:

Indice de precio (ponderaciones del año base) = $\frac{\sum Pn \quad qo}{\sum Po \quad qo} \times 100$

donde qo denota las ponderaciones del año base.

TABLA 8.3 DATOS A CERCA DE LAS COMPRAS DE UN CONSUMIDOR.

ARTICULOS	PRECIO	CANTIDAD	PRECIO	CANTIDAD
malvaviscos (kg)	$1.50	2	$ 3.50	1.5
limones	$ .20 c/u	6	$ .50 c/u	10
panqués (docena)	$2.00	1	$ 4.00	.5
periódico vesp.	$1.20	1	$ 3.00	1

Utilizando los datos de esta tabla, se observa que:

$$I \text{ precio} = \frac{\sum (P\ 1978 \quad q\ 1970)}{\sum (P\ 1970 \quad q\ 1970)} \times 100$$

$$= \frac{(3.5)\ (2)+(.50)(\ )+(4.00)(1)+(3.00)(1)}{(1.50)(\ 2) + (\ .20)(6)+(2.00)(1)+(1.20)(1)} \times 100$$

$$= 230 \ .$$

El índice de precio señala que, en conjunto los precios han aumentado en 1:0%.

En forma similar, se puede calcular un índice de cantidad, al mantener constante los precios y aislar así los cambios en cantidad.

Indice de cantidad (ponderaciones del año base) =

$$\frac{\sum q_n P_o}{\sum q_o P_o} \times 100$$

donde Po denota las ponderaciones del año base

Tomando como referencia la tabla 8.3, obtenemos, el índice de cantidad.

$$\text{I. cantidad} = \frac{\sum (q_{1978}\ P_{1970})}{\sum (q_{1970}\ P_{1970})} \times 100$$

$$= \frac{(1.5)(1.50)+(10)(.20)+(0.5)(2.00)+(1)(1)}{(2)(1.50)+(6)(.20)+(1)(2.00)+(1)(1.20)} \times 100$$

$$= 84$$

Se puede decir que el índice muestra que las cantidades totales de los artículos adquiridos por el comprador disminuyerón un 16% (es decir, 100% - 84%) = 16%.

Un índice de valor tendría la siguiente forma:

$$I\ valor = \frac{\sum Pn\ qn}{\sum Po\ qo} \times 100$$

Para el comprador, el índice sería:

$$I\ valor = \frac{(3.50)(1.5)+(.50)(10)+(4.00)(9.5)+(3.00)(1)}{(1.50)(2)+(.20)(6)+(2.00)(1)+(1.20)(1)} \times 100$$

$$= 206$$

8.32 METODO DE PROMEDIOS PONDERADOS.

Este es un enfoque alternativo al metodo de agregados ponderados: da lugar exactamente a la obtención de los mismos números.
Los índices de precios y cantidad correspondientes, que utilizan relativos son los siguientes:

Indice de precio (ponderaciones de año base)= $\frac{\sum (^{Pn}/Po)\ Po\ qo}{Po\ qo} \times 100$

Indice de cantidad (**ponderaciones del año base**)= $\frac{\sum (^{qn}/qo) Po\ qo}{\sum Po\ qo} \times 100$

Los índices para nuestro comprador son:

$$I\ precios = \frac{\sum (^{P\ 1978}/P\ 1970)\ \ P\ 1970\ q\ 1970)}{\sum P\ 1970\ \ q\ 1970} \times 100$$

$$= \frac{(3.50/1.50)(1.50)(2)+(.50/.20)(.20(6)+(4.00/2.00)(2.00)91)+(3.00/1.20)\ (1.20)(1)}{(1.50)(2)+(.20)(6)+(2.00)(1)+(1.20)(1)} \times 100.$$

=230

$$I\ \text{cantidad} = \frac{\sum \left[(q\,1978 \,/\, q\,1970)\ P\,1970\ q\,1970 \right]}{\sum\ P\,1970\ \ q\,1970} \times 100$$

$$= \frac{(1.5/2)(1.50)(2)+(10/6)(.20)(6)+(0.5/1)(2.00)(1)+(1/1)(1.20)(1)}{(1.50)(2)+(.20)(6)+(2.00)(1)+(1.20)(1)} \times 100$$

$$= 84$$

los cuales son los mismos calculados anteriormente.

8.4 CONSIDERACIONES Y PROBLEMAS ESPECIALES.

Los números índices son intento burdos para captar y apreciar el cambio económico.

Existen riesgos inherentes al utilizar e interpretar dichos indicadores, por ejemplo; los cambios en calidad y la frecuente introducción de nuevo producto (televisión a color, computadoras, videos, etc.) alteran las comparaciones efectuadas en períodos prolongados. La elección de un período base es importante. Idealmente, la base debería ser bastante reciente y presentar precios estables a fín de obtener comparaciones significativas.
Una forma de aumentar la estabilidad es utilizar un período de dos o tres años para el período base.

8.5 CORRIMIENTO DE LA BASE DE UN NUMERO INDICE.

Algunas veces se desea correr la base de un índice de un período a otro, un objetivo de este cambio podría ser el tener como año base un período más reciente.

Esto constituye una medida de cambio más actual, otro objetivo - podría ser el permitir que dos series de bases diferentes sean comparables.
El procedimiento para llevar a cabo el corrimiento es muy sencillo, dada una serie de números índices utilizando la base antigua. Unicamente se requiere que cada número de la serie sea dividido entre el número índice del nuevo período base, este procedimiento se ilustra en la tabla 8.4 .

Tabla 8.4 CORRIMIENTO DE LA BASE DE UN NUMERO INDICE.

Indice del cósto de la vivienda		
Número índice anterior		Nuevo número índice
(1957 - 59 = 100)		(1973 = 100)
1973	80	80/80 = 100
1974	76	76/80 = 95
1975	84	84/80 = 105
1976	82	82/80 = 101
1977	88	88/80 = 110
1978	90	90/80 = 120

8.6 INDICE DE PRECIOS AL CONSUMIDOR.

Este índice es publicado mensualmente en Estados Unidos por la dirección de estadísticas laborales. A esto es lo que generalmente se conoce en los medios noticiosos como el índice del cósto de la vida. En realidad mide cambios de precios de artículos y servicios adquiridos por trabajadores y empleados. El índice mide cambios de precio de una típica "canasta de provisiones" de —— aproximadamente 400 artículos, incluyendo alojamiento, transportación, atención médica y similares.

Es común encontrar clausulas de aumento graduales en los contratos colectivos de trabajo que ligan los aumentos salariales, al índice de precios al consumidor (IPC) .

Los valores del índice de precios al consumidor se expresan como promedios anuales y mensuales. En la tabla 8.5 se ilustran algunos promedios ánuales.

TABLA 8.5 INDICE DE PRECIOS AL CONSUMIDOR DE LOS ESTADOS UNIDOS

1947 a 1974 (1967 = 100)

AÑO	INDICE	AÑO	INDICE
1947	66.9	1966	97.2
1948	72.1	1967	100.0
1949	71.4	1968	104.2
1950	72.1	1969	109.8
1951	77.8	1970	116.3
1952	79.9	1971	119.7
1953	80.1	1972	123.1
1954	80.5	1973	133.1
1955	80.2	1974	147.7
1956	81.4		
1957	84.3		
1958	86.6		
1959	87.3		
1960	88.7		
1961	89.6		
1962	90.6		
1963	91.7		
1964	92.9		
1965	94.5		

Este índicé se puede utilizar de múltiples números, un uso común es para medir " el poder adquisitivo del consumidor", o el de la moneda.
En la tabla 8.6 se ilustra como se obtienen estos valores.

TABLA 8.6 CALCULO DEL PODER ADQUISITIVO DEL DOLAR

Utilizando a 1967 como año base		
AÑO	IPC	(1/IPC) X 100 = PODER ADQUISITIVO
1961	89.6	$ 1.12
1962	90.6	1.10
1963	91.7	1.09
1964	92.9	1.08
1965	94.5	1.06
1966	97.2	1.03
1967	100.0	1.00
1968	104.2	0.96
1969	109.8	0.91
1970	116.3	0.86
1971	119.7	0.82
1972	123.1	0.80
1973	133.1	0.75
1974	147.7	0.68

El IPC se utiliza también para medir el ingreso "real" que es el ingreso ajustado para cambios en los precios. De este modo dividir el salario neto entre el valor corriente del IPC en cualquier año, revela el ingreso real para ese año. Considérese a un trabajador que recibe $ 10,000. de salario neto en 1970 y $ 12,600. en 1974, ¿como cambio su ingreso real? . Al dividir cada salario neto anual entre el valor IPC de ese año se obtiene el ingreso real, como se muestra a continuación:

	Salario neto	IPC	Ingreso real
1970	$10,000.	116.3	$10,000/116.3 = $8598
1974	$12,600.	147.7	$12,600/147.7 = $8531

En otra palabra esta persona estaba en una situación un tanto peor en términos de ingresos real en 1974, que lo que estaba en 1970, a pesar de recibir un ingreso neto mayor, dado que los precios, medidos por el IPC se elevaron más rápido que su ingreso.

C A P I T U L O IX

D I S T R I B U C I O N " JI " C U A D R A D A

9.1. LA DISTRIBUCION " JI " CUADRADA.

En esta sección se va estudiar distribución de la varianza muestral, $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - X^-)^2}{(n-1)}$. En realidad la distribución de este estadístico no tiene mayor interés para la estadística plicada. Sin embargo, si el muestreo se hace en una población distribuida normalmente, la distribución de una modificación de S^2 es de enorme importancia. En el siguiente enunciado se expresa la naturaleza de esta modificación y su distribución.

Si

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - X^-)^2}{n - 1}$$

es la varianza de una muestra eleatoria de tamaño n de una pobalción distribuida normalmente con media y varianza ^{2}, entonces $(n-1)\ S^2 / \ ^2$ tiene una distribución que se conoce con el nombre de distribución ji-cuadrada.

Observamos que :

$$(n-1)\ S^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 .$$

que en las sumas de las desviaciones elevadas al cuadrado de los valores muestrales respecto de su medida. Entonces, se puede analizar nuestra distribución en función de :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

Se puede tener empíricamente una aproximación de la distribución de $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 / \sigma^2$ sacando de una población distribuida normalmente un gran número de muestras de tamaño n, calculando para cada muestra la suma de las desviaciones elevadas al cuadrado de los valores muestrales respecto de su medida y dividiendo cada una de estas sumadas por la varianza de la población. Una lista de las diferentes valores numéricos que resulten de este procedimiento y de sus frecuencias relativas de ocurrencia constituiría una aproximación de la distribución muestral de $(n-1)\ S^2 / \sigma^2$.

De acuerdo con el planteamiento anterior, esta distribución sigue una distribución conocida como: distribución ji-cuadrada. La variables que esta distribuida en esta forma se designa con el simbolo χ^2 , la letra griega -ji- con el exponente 2 .

De esta manera podemos decir que:

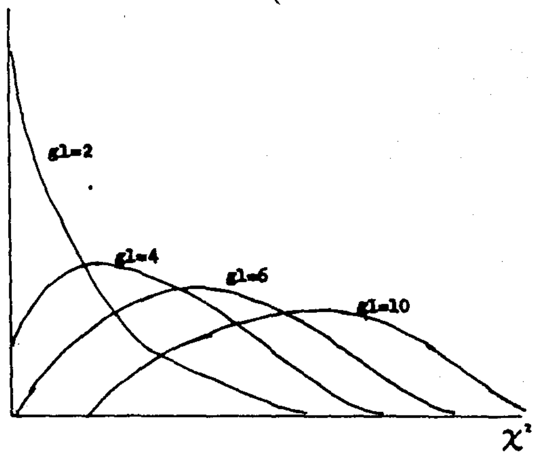
$$\chi^2 = \frac{(n - 1)\ S^2}{2}$$

sigue una distribución ji-cuadrada.

La distribución ji-cuadrada, como la distribución t, es una familia de distribuciones puesto que hay una distribución diferente para cada uno de los valores posibles de una cantidad conocida como grados de libertad.

El termino grado de libertad tal como aqui se emplea es expresión del mismo concepto general que se usó anteriormente. La distribución ji-cuadrada que sigue el estadístico (m - 1) tiene m - 1 grados de libertad.

Figura. 9.11 Distribuciones ji-cuadrada para varios grados de libertad.



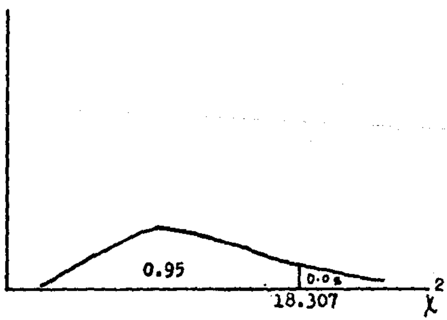
La figura 9.1, muestra la distribución ji-cuadrada para varios grados de libertad. Se puede observar que las curvas - tienden a sesgarse hacia la derecha y no son simétricas.

El área total limitada por la curva de una distribución ji-cuadrada y los ejes es igual a 1 . La variable χ^2 toma - valores solamente no negativos. La media de cualquier distribución ji-cuadrada es igual a sus grados de libertad y su varianza es igual a dos veces sus grados de libertad. La dis -- tribución ji-cuadrada es una de las distribuciones más usadas en estadística aplicada. Para facilitar su empleo,existen tablas que permiten hallar las áreas, que son probabilidades - asociadas a intervalos por valores determinados de χ^2 . Una - de estas tablas es la tabla del Apéndice 6, en esta tabla, la columna que aparece más hacia la izquierda y los encabezados de la columna indican la proporción del área que queda a la - izquierda de los valores de χ^2 que se dan en el cuerpo de la tabla. Supóngase, por ejemplo: que se desea saber para la distribución ji-cuadrada con 10 grados de libertad, que valor de χ^2 tiene a su izquierda el 0.95 del área bajo la curva.
Se localiza el 10 en la columna de grados de libertad y tambien en la columna encabezada con χ^2 0.95. El valor de χ^2 es la intersección la fila marcada con 10 y la columna encabezada con - χ^2 0.95 es entonces el que buscamos, y se ve que corresponde a 18.307. Esto nos dice que bajo la curva de la distribución - ji-cuadrada con 10 grados de libertad, el 95% del área esta a - la izquierda de 18.307 .

Como el área total bajo la curva es igual a 1, se sabe - que el 5% del área esta a la derecha de 18.307. Se va a interpretar el área bajo la curva como una probabilidad y por lo - tanto podemos decir que si se saca al azar un valor de χ^2 de la distribución ji-cuadrada con 10 grados de libertad, la probabilidad de que sea menor que 18.307 es 0.95 . O tambien que la probabilidad de que un valor de χ^2 seleccionado al azar - en la distribución ji-cuadrada sea mayor o igual al 18.307 es 0.05. La figura 9.2, nos muestra estas probabilidades.

Se explica por medio de un ejemplo una de las numerosas - formas de utilizar la distribución ji-cuadrada.

Figura 9.2. Distribución ji-cuadrada con 10 grados de libertad, en la que se muestra e l área que queda a la izquierda y a la derecha de χ^2 = 18.307 .



Supóngase que la varianza de los pesos de los niños de 12 años es de 39 kg y que estos estan normalmente distribuidos - ¿ Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria de 25 - niños de 12 años arroje una varianza igual o mayor que 57 ...?

De los datos de la muestra se calcula :

$$\chi^2 = \frac{(24)(57)}{39} = 35.077$$

Para encontrar la probabilidad de observar un valor de - χ^2 mayor o igual a 35.077, se usa la tabla del Apéndice 6 , con 24 grados de libertad. Moviendo a lo largo de la fila 24 se encuntra nuestro valor calculado de $\chi^2 = 35.077$ se encuentra entre los valores χ^2 de 33.196 y 36.415. Estos valores - estan en las columnas marcadas con χ^2 0.90 y χ^2 0.95 res - pectivamente. En esta forma se concluye que la probabilidad - se observa un valor de χ^2 igual o mayor que 35.077 esta en - tre 0.05 y 0.10. En consecuencia, se dice que bajo las con - diciones dads, la probabilidad se observa un valor de S^2 -- igual o mayor que 57 esta también entre 0.05 y 0.10 .

C A P I T U L O X

R E S U M E N Y C O N C L U S I O N E S

R E S U M E N

La presente tesis se divide en dos partes :

La primera - estadística descriptiva - la cual se encarga de organizar y resumir información que a menudo es bastante compleja.
La segunda - estadística inferencial - se ocupa del estudio de las muestras para tener información de una población sin tener que examinar cada elementos de la misma.

El objetivo principal de las medidas de tendencia central es obtener un valor que sea el más representativo en un conjunto de datos y para obtener dicho valor se encuentra con tres medidas de este tipo; la media, la mediana y la moda.
La de mayor uso es la media pero, tiene una desventaja que puede ser influida por números extremos como por ejemplo: supóngase que estudiantes de una clase tienen las siguientes calificaciones: 91,95,95,94,92,93,98,97,96,0 ; en un examen.- La media 85.5, no es un valor representativo del conjunto de calificaciones.

La segunda en importancia es la mediana, esta medida tiene la propiedad de que divide a un conjunto de datos en dos partes iguales ya no es influida por los valores extremos.

La de menor uso es la moda, es aquel valor que aparece con frecuencia en un conjunto de datos; la moda no es única,- pueden existir más de una moda.

El objetivo de las medidas de disperción, es como se dispersan los datos a la izquierda y derecha o (de un lado a otro) del centro. Las medidas que llevan este nombre son: el rango, la varianza y la desviación estandar.

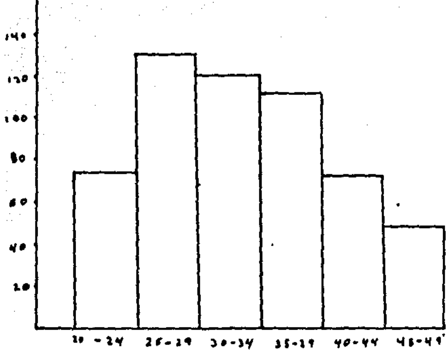
El rango es una medida de disperción que involucrara nada mas los puntos extremos de un conjunto de datos pero no dá ninguna información de como varian los valores en el interior del conjunto, por lo tanto esta medida es muy tosca.

Las limitaciones del rango se pueden evitar con otras medidas de disperción tales como la varianza y la desviación estandar que miden la disperción promedio en torno a la media, es decir; como flutúan las observaciones mayores por encima de ella y como se distribuyen las observaciones menores por abajo de ella.

Las representaciones graficas juegan un papel muy importante en cuanto resumir grandes conjuntos de datos, ya que de las graficas extraemos información detallada de como se distribuyen los datos, concentrados en las gráficas (poligonos de frecuencia, distribución de frecuencia).

Por ejemplo: a simple vista uno se puede dar cuenta a que clase pertenece el porcentaje más alto de una población particular y se puede tambien a simple vista darse cuenta donde se encuentra el porcentaje más bajo de la población en una distribución de frecuencia. En la figura 10.1 , se puede observar lo antes mencionado.

Figura 10.1



En esta figura se puede observar el más alto porcentaje de datos que se encuentra en la clase 25-29 y el no mínimo - porcentaje se encuentra en la clase 45-49.

La probabilidad sirve de cuantificador de eventos dentro de un experimento aleatorio y es un mecanismo que permite el uso de información parcial contenida en la muestra, para inferir sobre la naturaleza de un conjunto mayor de datos, la población. Por lo tanto la inferencia estadística se basa en la teoria de la probabilidad.

Las distribuciones de probabilidad son asignaciones de - probabilidad a todos los posibles resultados numéricos de un- experimento que miden la ocurrencia asociada con cada resultado y nos permite visualizar (en tabla o grafica) como —

como se distribuyen los datos en torno a la media.

La estimación de un procedimiento mediante el cuál se - intentan medir características particulares de una población basandose en observaciones muestrales; como se sabe hay dos - tipos de estimación que es la estimación punrual y la estimación por intervalos. La estimación puntual utiliza un solo - valor de la muestra para estimar el parámetro de la población implicada. Por ejemplo: se vio que la media de la muestra - $\bar{x}$ es una estimación puntual de la media μ de la población . La varianza S^2 de la muestra es una estimación puntual de - la varianza σ^2 de la población.

Ahora bien, el valor de la estimación puntual variará de una muestra a otra, por que en cada muestra solo se selecciona una parte de la población, esto implicaría que, si se toma - una muestra de la población de interés es muy probable que - nuestra única estimación sea diferente del parámetro pobla - cional. Para suplir esta deficiencia se constituye un inter - valo de confianza en el cual se espera encontrar el parámetro poblacional. Este intervalo tiene una confianza especifica o probabilidad de estimar en forma correcta el valor real del - parámetro de la población.

El objeto de efectuar un muestreo es obtener una idea del valor de uno o más de los parámetros de una población, como la media de la pobalción, la desviación estandar o la proporción de la pobalción. Las estadísticas muestrales correspondientes a estos parámetros poblacionales se emplean para aproximar los valores desconocidos de dichos parámetros.

De este modo se vió que la media muestral se emplea para estimar la media de la población, la desviación estandar muestral se utiliza para calcular la desviación estandar poblacional.

Las distribuciones de muestreo se utilizan para saber como se distribuyen los diferentes valores muestrales, sacados de una pobalción y asi tener una información a cerca de la forma como se distribuye la pobalción.

El objetivo de las pruebas de hipótesis es evaluar proposiciones o afirmaciones a cerca de los valores de los parámetros de población.

Las pruebas de hipótesis y la estimación son dos de las ramas principales de la inferencia estadística. En tanto que el objetivo de la estimación es calcular el valor de cierto -

cierto parámetro de la población, la finalidad de la prueba de hipótesis es decir si una afirmación a cerca de un pará - metro de la población es verdadera, las gráficas normales - que se estudiarón en esta sección proporcionan regiones de aceptación y de rechazo para el estadístico en prueba, esto- es importante porque permite tomar una decisión con un mini- mo de error conocido.

C O N C L U S I O N E S

En la Facultad de Contaduría y Administración de la UAG los problemas multiples, tanto en operación como en conceptos estadísticos, antes de esta tesis eran bajos a tal grado que de una población de 210 estudiantes de V semestre que cursaban el área de estadística solamente aprobaban el curso el 20% de dicha población con una elevada deficiencia en cuanto a conceptos estadísticos se refiere.

Con la introduc·ión de este programa de estudios en los semestres V y VI de la Facultad de Contaduría y Administración se observarón los siguientes resultados:

1).- De una población de 270 personas que tomarón la materia de estadísticas el 15% de dicha población reprobó.

2).- Los conceptos básicos de estadísticas de las personas que tomarón el curso fué con un promedio de 8.

3).- El nivel del curso fué un 80% mejor en relación con el anterior.

APENDICE.

LA SUMATORIA.

Con frecuencia se utilizó el símbolo $\sum$ en el presente texto. Este es una notación matemática abreviada que se emplea para indicar que los elementos que le siguen deben sumarse cuando sea necesario para la claridad se incluirá un índice de sumatoria, generalmente i, como parte de la notación. Por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{4} Xi$$

Nos indica que se deben añadir los valores de x desde, x_1 hasta x_4. Es decir:

$$\sum_{i=1}^{4} X_i = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

De manera análoga, $\sum X$ O $\sum X_i$ nos indica que se deben sumar todos los valores de X, siendo el sentido de "todos" aclarado por el contexto.

Las siguientes son algunas propiedades algebraicas útiles de la sumatoria, que se encuentran en el texto:

1.- La sumatoria de una constante c es n veces la constante, cuando n es el número de valores del índice de sumatoria, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{4} 5 = 4\ (5) = 20$$

2.- La sumatoria de una constante por una variable, es igual a la constante por la sumatoria de la variable. Es decir, dada una constante c, entonces.

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = c \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{4} 5\ (X_i) = 5 \sum_{i=1}^{4} X_i$$

Si $X_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 6$, y $x_4 = 10$, tenemos

$$5(2+3+6+10) = 5\ (21) = 105$$

3.- La adición de una suma (o diferencia) de dos variables es — igual a la suma (o diferencia) de sumatorias individuales de las dos variables.

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i \pm y_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i \pm \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Esta última propiedad se extiende a más de dos componentes. Por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i + y_i - Z_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \quad \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

Tablas binomiales

n	x	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	p 0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
1	0	0.9900	0.9500	0.9000	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	0.5000
	1	0.0100	0.0500	0.1000	0.1500	0.2000	0.2500	0.3000	0.3500	0.4000	0.4500	0.5000
2	0	0.9801	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.0198	0.0950	0.1800	0.2550	0.3200	0.3750	0.4200	0.4550	0.4800	0.4950	0.5000
	2	0.0001	0.0025	0.0100	0.0225	0.0400	0.0625	0.0900	0.1225	0.1600	0.2025	0.2500
3	0	0.9703	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.0294	0.1354	0.2430	0.3251	0.3840	0.4219	0.4410	0.4436	0.4320	0.4084	0.3750
	2	0.0003	0.0071	0.0270	0.0574	0.0960	0.1406	0.1890	0.2389	0.2880	0.3341	0.3750
	3	0.0000	0.0001	0.0010	0.0034	0.0080	0.0156	0.0270	0.0429	0.0640	0.0911	0.1250
4	0	0.9606	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.0388	0.1715	0.2916	0.3685	0.4096	0.4219	0.4116	0.3845	0.3456	0.2995	0.2500
	2	0.0006	0.0135	0.0486	0.0975	0.1536	0.2109	0.2646	0.3105	0.3456	0.3675	0.3750
	3	0.0000	0.0005	0.0036	0.0115	0.0256	0.0469	0.0756	0.1115	0.1536	0.2005	0.2500
	4	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0039	0.0081	0.0150	0.0256	0.0410	0.0625
5	0	0.9510	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0312
	1	0.0480	0.2036	0.3280	0.3915	0.4096	0.3955	0.3602	0.3124	0.2592	0.2059	0.1562
	2	0.0010	0.0214	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3364	0.3456	0.3369	0.3125
	3	0.0000	0.0011	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.1323	0.1811	0.2304	0.2757	0.3125
	4	0.0000	0.0000	0.0004	0.0022	0.0064	0.0146	0.0284	0.0488	0.0768	0.1128	0.1562
	5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0024	0.0053	0.0102	0.0185	0.0312
6	0	0.9415	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	1	0.0571	0.2321	0.3543	0.3993	0.3932	0.3560	0.3025	0.2437	0.1866	0.1359	0.0938
	2	0.0014	0.0305	0.0984	0.1762	0.2458	0.2966	0.3241	0.3280	0.3110	0.2780	0.2344
	3	0.0000	0.0021	0.0146	0.0415	0.0819	0.1318	0.1852	0.2355	0.2765	0.3032	0.3125
	4	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0154	0.0330	0.0595	0.0951	0.1382	0.1861	0.2344
	5	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0044	0.0102	0.0205	0.0369	0.0609	0.0938
	6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0007	0.0018	0.0041	0.0083	0.0156
7	0	0.9321	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	1	0.0659	0.2573	0.3720	0.3960	0.3670	0.3115	0.2471	0.1848	0.1306	0.0872	0.0547
	2	0.0020	0.0406	0.1240	0.2097	0.2753	0.3115	0.3177	0.2985	0.2613	0.2140	0.1641
	3	0.0000	0.0036	0.0230	0.0617	0.1147	0.1730	0.2269	0.2679	0.2903	0.2918	0.2734
	4	0.0000	0.0002	0.0026	0.0109	0.0287	0.0577	0.0972	0.1442	0.1935	0.2388	0.2734
	5	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0043	0.0115	0.0250	0.0466	0.0774	0.1172	0.1641
	6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0036	0.0084	0.0172	0.0320	0.0547
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0016	0.0037	0.0078
8	0	0.9227	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1002	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.0746	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977	0.1373	0.0896	0.0548	0.0312
	2	0.0026	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2965	0.2587	0.2090	0.1569	0.1094
	3	0.0001	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2541	0.2786	0.2787	0.2568	0.2188
	4	0.0000	0.0004	0.0046	0.0185	0.0459	0.0865	0.1361	0.1875	0.2322	0.2627	0.2734
	5	0.0000	0.0000	0.0004	0.0026	0.0092	0.0231	0.0467	0.0808	0.1239	0.1719	0.2188
	6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0038	0.0100	0.0217	0.0413	0.0703	0.1094
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0033	0.0079	0.0164	0.0312
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0017	0.0039
9	0	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.0830	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1004	0.0605	0.0339	0.0176
	2	0.0034	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2162	0.1612	0.1110	0.0703
9	3	0.0001	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2716	0.2508	0.2119	0.1641
	4	0.0000	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2194	0.2508	0.2600	0.2461
	5	0.0000	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.1181	0.1672	0.2128	0.2461
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0424	0.0743	0.1160	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0098	0.0212	0.0407	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0035	0.0083	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0020
10	0	0.9044	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.0914	0.3151	0.3874	0.3474	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098
	2	0.0042	0.0746	0.1937	0.2759	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439
	3	0.0001	0.0105	0.0574	0.1298	0.2013	0.2503	0.2668	0.2522	0.2150	0.1665	0.1172
	4	0.0000	0.0010	0.0112	0.0401	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051
	5	0.0000	0.0001	0.0015	0.0085	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	0.0229	0.0439
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010
11	0	0.8953	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005
	1	0.0995	0.3293	0.3835	0.3248	0.2362	0.1549	0.0932	0.0518	0.0266	0.0125	0.0054
	2	0.0050	0.0867	0.2131	0.2866	0.2953	0.2581	0.1998	0.1395	0.0887	0.0513	0.0269
	3	0.0002	0.0137	0.0710	0.1517	0.2215	0.2581	0.2568	0.2254	0.1774	0.1259	0.0806
	4	0.0000	0.0010	0.0112	0.0401	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051
	5	0.0000	0.0001	0.0025	0.0132	0.0388	0.0803	0.1321	0.1830	0.2207	0.2360	0.2256
	6	0.0000	0.0000	0.0003	0.0023	0.0097	0.0268	0.0566	0.0985	0.1471	0.1931	0.2256
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0017	0.0064	0.0173	0.0379	0.0701	0.1128	0.1611
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0037	0.0102	0.0234	0.0462	0.0806
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018	0.0052	0.0126	0.0269
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0007	0.0021	0.0054
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0005
12	0	0.8864	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002
	1	0.1074	0.3413	0.3766	0.3012	0.2062	0.1267	0.0712	0.0368	0.0174	0.0075	0.0029
	2	0.0060	0.0988	0.2301	0.2924	0.2835	0.2323	0.1678	0.1088	0.0639	0.0339	0.0161
	3	0.0002	0.0173	0.0852	0.1720	0.2362	0.2581	0.2397	0.1954	0.1419	0.0923	0.0537
	4	0.0000	0.0021	0.0213	0.0683	0.1329	0.1936	0.2311	0.2367	0.2128	0.1700	0.1208
	5	0.0000	0.0002	0.0038	0.0193	0.0532	0.1032	0.1585	0.2039	0.2270	0.2225	0.1934
	6	0.0000	0.0000	0.0005	0.0040	0.0155	0.0401	0.0792	0.1281	0.1766	0.2124	0.2256
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0006	0.0033	0.0115	0.0291	0.0591	0.1009	0.1489	0.1934
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0024	0.0078	0.0199	0.0420	0.0762	0.1208
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0048	0.0125	0.0277	0.0537
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0025	0.0068	0.0161
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0029
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
13	0	0.8775	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001
	1	0.1152	0.3512	0.3672	0.2774	0.1787	0.1029	0.0540	0.0259	0.0113	0.0045	0.0016
	2	0.0070	0.1109	0.2448	0.2937	0.2680	0.2059	0.1388	0.0836	0.0453	0.0220	0.0095
	3	0.0003	0.0214	0.0997	0.1900	0.2457	0.2517	0.2181	0.1651	0.1107	0.0660	0.0349
	4	0.0000	0.0028	0.0277	0.0838	0.1535	0.2097	0.2337	0.2222	0.1845	0.1350	0.0873

Apéndice 1 (continuación)

n	x	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	p 0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
13	5	0.0000	0.0003	0.0055	0.0266	0.0691	0.1258	0.1803	0.2154	0.2214	0.1989	0.1571
	6	0.0000	0.0000	0.0008	0.0063	0.0230	0.0559	0.1030	0.1546	0.1968	0.2169	0.2095
	7	0.0000	0.0000	0.0001	0.0011	0.0058	0.0186	0.0442	0.0833	0.1312	0.1775	0.2095
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0011	0.0047	0.0142	0.0336	0.0656	0.1089	0.1571
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0009	0.0034	0.0101	0.0243	0.0495	0.0873
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0022	0.0065	0.0162	0.0349
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0012	0.0036	0.0095
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
14	0	0.8687	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001
	1	0.1229	0.3593	0.3559	0.2539	0.1539	0.0832	0.0407	0.0181	0.0073	0.0027	0.0009
	2	0.0081	0.1229	0.2570	0.2912	0.2501	0.1802	0.1134	0.0634	0.0317	0.0141	0.0056
	3	0.0003	0.0259	0.1142	0.2056	0.2501	0.2402	0.1943	0.1366	0.0845	0.0462	0.0222
	4	0.0000	0.0037	0.0349	0.0998	0.1720	0.2202	0.2290	0.2022	0.1549	0.1040	0.0611
	5	0.0000	0.0004	0.0078	0.0352	0.0860	0.1468	0.1963	0.2178	0.2066	0.1701	0.1222
	6	0.0000	0.0000	0.0013	0.0093	0.0322	0.0734	0.1262	0.1759	0.2066	0.2088	0.1833
	7	0.0000	0.0000	0.0002	0.0019	0.0092	0.0280	0.0618	0.1082	0.1574	0.1952	0.2095
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0020	0.0082	0.0232	0.0510	0.0918	0.1398	0.1833
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0018	0.0066	0.0183	0.0408	0.0762	0.1222
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0014	0.0049	0.0136	0.0312	0.0611
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0033	0.0093	0.0222
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0019	0.0056
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0009
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
15	0	0.8601	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.1303	0.3658	0.3432	0.2312	0.1319	0.0668	0.0305	0.0126	0.0047	0.0016	0.0005
	2	0.0092	0.1348	0.2669	0.2856	0.2309	0.1559	0.0916	0.0476	0.0219	0.0090	0.0032
	3	0.0004	0.0307	0.1285	0.2184	0.2501	0.2252	0.1700	0.1110	0.0634	0.0318	0.0139
	4	0.0000	0.0049	0.0428	0.1156	0.1876	0.2252	0.2186	0.1792	0.1268	0.0780	0.0417
	5	0.0000	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	6	0.0000	0.0000	0.0019	0.0132	0.0430	0.0917	0.1472	0.1906	0.2066	0.1914	0.1527
	7	0.0000	0.0000	0.0003	0.0030	0.0138	0.0393	0.0811	0.1319	0.1771	0.2013	0.1964
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0035	0.0131	0.0348	0.0710	0.1181	0.1647	0.1964
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0034	0.0116	0.0298	0.0612	0.1048	0.1527
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0030	0.0096	0.0245	0.0515	0.0916
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0074	0.0191	0.0417
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0016	0.0052	0.0139
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0032
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005
	15	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
16	0	0.8515	0.4401	0.1853	0.0743	0.0281	0.0100	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000
	1	0.1376	0.3706	0.3294	0.2097	0.1126	0.0535	0.0228	0.0087	0.0030	0.0009	0.0002
	2	0.0104	0.1463	0.2745	0.2775	0.2111	0.1336	0.0732	0.0353	0.0150	0.0056	0.0018
	3	0.0005	0.0359	0.1423	0.2285	0.2463	0.2079	0.1465	0.0888	0.0468	0.0215	0.0085
	4	0.0000	0.0061	0.0514	0.1311	0.2001	0.2252	0.2040	0.1553	0.1014	0.0572	0.0278
	5	0.0000	0.0008	0.0137	0.0555	0.1201	0.1802	0.2099	0.2008	0.1623	0.1123	0.0667
	6	0.0000	0.0001	0.0028	0.0180	0.0550	0.1101	0.1649	0.1982	0.1983	0.1684	0.1222
16	7	0.0000	0.0000	0.0004	0.0045	0.0197	0.0524	0.1010	0.1524	0.1889	0.1969	0.1746
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0009	0.0055	0.0197	0.0487	0.0923	0.1417	0.1812	0.1964
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0012	0.0058	0.0185	0.0442	0.0840	0.1318	0.1746
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0014	0.0056	0.0167	0.0392	0.0755	0.1222
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0049	0.0142	0.0337	0.0667
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0040	0.0115	0.0278
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0029	0.0085
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
17	0	0.8429	0.4181	0.1668	0.0631	0.0225	0.0075	0.0023	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.1447	0.3741	0.3150	0.1893	0.0957	0.0426	0.0169	0.0060	0.0019	0.0005	0.0001
	2	0.0117	0.1575	0.2800	0.2673	0.1914	0.1136	0.0581	0.0260	0.0102	0.0035	0.0010
	3	0.0006	0.0415	0.1556	0.2359	0.2393	0.1893	0.1245	0.0701	0.0341	0.0144	0.0052
	4	0.0000	0.0076	0.0605	0.1457	0.2093	0.2209	0.1868	0.1320	0.0796	0.0411	0.0182
	5	0.0000	0.0010	0.0175	0.0668	0.1361	0.1914	0.2081	0.1849	0.1379	0.0875	0.0472
	6	0.0000	0.0001	0.0039	0.0236	0.0680	0.1276	0.1784	0.1991	0.1839	0.1432	0.0944
	7	0.0000	0.0000	0.0007	0.0065	0.0267	0.0668	0.1201	0.1685	0.1927	0.1841	0.1484
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0014	0.0084	0.0279	0.0644	0.1134	0.1606	0.1883	0.1855
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0021	0.0093	0.0276	0.0611	0.1070	0.1540	0.1855
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0025	0.0095	0.0263	0.0571	0.1008	0.1484
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0026	0.0090	0.0242	0.0525	0.0944
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0081	0.0215	0.0472
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0021	0.0068	0.0182
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0016	0.0052
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
18	0	0.8345	0.3972	0.1501	0.0536	0.0180	0.0056	0.0016	0.0004	0.0001	0.0003	0.0010
	1	0.1517	0.3763	0.3002	0.1704	0.0811	0.0338	0.0126	0.0042	0.0012	0.0003	0.0001
	2	0.0130	0.1683	0.2835	0.2556	0.1723	0.0958	0.0458	0.0190	0.0069	0.0022	0.0006
	3	0.0007	0.0473	0.1680	0.2406	0.2297	0.1704	0.1046	0.0547	0.0246	0.0095	0.0031
	4	0.0000	0.0093	0.0700	0.1592	0.2153	0.2130	0.1681	0.1104	0.0614	0.0291	0.0117
	5	0.0000	0.0014	0.0218	0.0787	0.1507	0.1988	0.2017	0.1664	0.1146	0.0666	0.0327
	6	0.0000	0.0002	0.0052	0.0301	0.0816	0.1436	0.1873	0.1941	0.1655	0.1181	0.0708
	7	0.0000	0.0000	0.0010	0.0091	0.0350	0.0820	0.1376	0.1792	0.1892	0.1657	0.1214
	8	0.0000	0.0000	0.0002	0.0022	0.0120	0.0376	0.0811	0.1327	0.1734	0.1864	0.1669
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0033	0.0139	0.0386	0.0794	0.1284	0.1694	0.1855
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0042	0.0149	0.0385	0.0771	0.1248	0.1669
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0010	0.0046	0.0151	0.0374	0.0742	0.1214
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0047	0.0145	0.0354	0.0708
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0045	0.0134	0.0327
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0039	0.0117
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0031
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Apéndice 1 (concluye)

n	x	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	P 0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
18	0	0.8262	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.1586	0.3774	0.2852	0.1529	0.0685	0.0268	0.0083	0.0029	0.0008	0.0002	0.0000
	2	0.0144	0.1787	0.2852	0.2428	0.1540	0.0803	0.0358	0.0138	0.0046	0.0013	0.0003
	3	0.0008	0.0533	0.1796	0.2428	0.2182	0.1517	0.0869	0.0422	0.0175	0.0062	0.0018
	4	0.0000	0.0112	0.0798	0.1714	0.2182	0.2023	0.1491	0.0909	0.0467	0.0203	0.0074
	5	0.0000	0.0018	0.0266	0.0907	0.1636	0.2023	0.1916	0.1468	0.0933	0.0497	0.0222
	6	0.0000	0.0002	0.0069	0.0374	0.0956	0.1574	0.1916	0.1844	0.1451	0.0949	0.0518
	7	0.0000	0.0000	0.0014	0.0122	0.0443	0.0874	0.1525	0.1844	0.1797	0.1443	0.0961
	8	0.0000	0.0000	0.0002	0.0032	0.0166	0.0487	0.0981	0.1489	0.1797	0.1771	0.1442
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0007	0.0051	0.0198	0.0514	0.0980	0.1464	0.1771	0.1762
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0013	0.0066	0.0220	0.0528	0.0976	0.1449	0.1762
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0018	0.0077	0.0233	0.0532	0.0970	0.1442
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0022	0.0083	0.0237	0.0529	0.0961
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0085	0.0233	0.0618
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0082	0.0222
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0022	0.0074
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
20	0	0.8179	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.1652	0.3774	0.2702	0.1368	0.0576	0.211	0.0068	0.0020	0.0005	0.0001	0.0000
	2	0.0159	0.1887	0.2852	0.2293	0.1369	0.669	0.0278	0.0100	0.0031	0.0008	0.0002
	3	0.0010	0.0596	0.1901	0.2428	0.2054	0.339	0.0716	0.0323	0.0123	0.0040	0.0011
	4	0.0000	0.0133	0.0898	0.1821	0.2182	0.897	0.1304	0.0738	0.0350	0.0139	0.0046
	5	0.0000	0.0022	0.0319	0.1028	0.1746	0.2023	0.1789	0.1272	0.0746	0.0365	0.0148
	6	0.0000	0.0003	0.0089	0.0454	0.1091	0.1686	0.1916	0.1712	0.1244	0.0746	0.0370
	7	0.0000	0.0000	0.0020	0.0160	0.0545	0.1124	0.1643	0.1844	0.1659	0.1221	0.0739
	8	0.0000	0.0000	0.0004	0.0046	0.0222	0.0609	0.1144	0.1614	0.1797	0.1623	0.1201
	9	0.0000	0.0000	0.0001	0.0011	0.0074	0.0271	0.0654	0.1158	0.1597	0.1771	0.1602
	10	0.0000	0.0000	0.0000	.0002	0.0020	0.0099	0.0308	0.0686	0.1171	0.1593	0.1762
	11	0.0000	0.0000	0.0000	.0000	0.0005	0.0030	0.0120	0.0336	0.0710	0.1185	0.1602
	12	0.0000	0.0000	0.0000	.0000	0.0001	0.0008	0.0039	0.0136	0.0355	0.0727	0.1201
	13	0.0000	0.0000	0.0000	.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0045	0.0146	0.0366	0.0739
	14	0.0000	0.0000	0.0000	.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0049	0.0150	0.0370
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0013	0.0049	0.0148
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0013	0.0046
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
	19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
25	0	0.7778	0.2774	0.0718	0.0172	0.0038	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.1964	0.3650	0.1994	0.0759	0.0236	0.0063	0.0014	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0238	0.2305	0.2659	0.1607	0.0708	0.0251	0.0074	0.0018	0.0004	0.0001	0.0000
	3	0.0018	0.0930	0.2265	0.2174	0.1358	0.0641	0.0243	0.0076	0.0019	0.0004	0.0001
	4	0.0001	0.0269	0.1384	0.2110	0.1867	0.1175	0.0572	0.0224	0.0071	0.0018	0.0004

n	x	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	P 0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
25	5	0.0000	0.0060	0.0646	0.1564	0.1960	0.1645	0.1030	0.0506	0.0199	0.0063	0.0016
	6	0.0000	0.0010	0.0239	0.0920	0.1633	0.1828	0.1472	0.0908	0.0442	0.0172	0.0053
	7	0.0000	0.0001	0.0072	0.0441	0.1108	0.1654	0.1712	0.1327	0.0800	0.0381	0.0143
	8	0.0000	0.0000	0.0018	0.0175	0.0623	0.1241	0.1651	0.1607	0.1200	0.0701	0.0322
	9	0.0000	0.0000	0.0004	0.0058	0.0294	0.0781	0.1336	0.1635	0.1511	0.1084	0.0609
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0016	0.0118	0.0417	0.0916	0.1409	0.1612	0.1419	0.0974
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0040	0.0189	0.0536	0.1034	0.1465	0.1583	0.1328
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0012	0.0074	0.0268	0.0650	0.1140	0.1511	0.1550
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0025	0.0115	0.0350	0.0760	0.1236	0.1550
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0007	0.0042	0.0161	0.0434	0.0867	0.1328
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0064	0.0212	0.0520	0.0974
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0021	0.0088	0.0266	0.0609
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0031	0.0115	0.0322
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0009	0.0042	0.0143
	19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0053
	20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0016
	21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004
	22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
30	0	0.7397	0.2146	0.0424	0.0076	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.2242	0.3389	0.1413	0.0404	0.0093	0.0018	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0328	0.2586	0.2277	0.1034	0.0337	0.0086	0.0018	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.0031	0.1270	0.2361	0.1703	0.0785	0.0269	0.0072	0.0015	0.0003	0.0000	0.0000
	4	0.0002	0.0451	0.1771	0.2028	0.1325	0.0604	0.0208	0.0056	0.0012	0.0002	0.0000
	5	0.0000	0.0124	0.1023	0.1861	0.1723	0.047	0.0464	0.0157	0.0041	0.0008	0.0001
	6	0.0000	0.0027	0.0474	0.1368	0.1795	0.456	0.0829	0.0353	0.0115	0.0029	0.0006
	7	0.0000	0.0005	0.0180	0.0828	0.1538	0.662	0.1219	0.0652	0.0263	0.0081	0.0019
	8	0.0000	0.0001	0.0058	0.0420	0.1106	0.593	0.1501	0.1009	0.0605	0.0191	0.0055
	9	0.0000	0.0000	0.0016	0.0181	0.0676	0.295	0.1573	0.1328	0.0823	0.0382	0.0133
	10	0.0000	0.0000	0.0004	0.0067	0.0354	0.0909	0.1416	0.1502	0.1152	0.0656	0.0280
	11	0.0000	0.0000	0.0001	0.0022	0.0161	0.0551	0.1100	0.1471	0.1396	0.0976	0.0509
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0006	0.0064	0.0291	0.0749	0.1254	0.1474	0.1265	0.0806
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0027	0.0134	0.0444	0.0935	0.1360	0.1433	0.1115
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0007	0.0054	0.0231	0.0611	0.1101	0.1424	0.1354
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0019	0.0106	0.0351	0.0783	0.1247	0.1445
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0006	0.0042	0.0177	0.0489	0.0953	0.1354
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0015	0.0079	0.0269	0.0642	0.1115
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0031	0.0129	0.0379	0.0806
	19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0010	0.0054	0.0196	0.0508
	20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0020	0.0088	0.0280
	21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0034	0.0133
	22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0055
	23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0019
	24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006
	25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.000	0.0000	0.0001

Apéndice 2

Valores de $e^{-\lambda}$

λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$
0,0	1,00000	2,5	0,08208
0,1	0,90484	2,6	0,07427
0,2	0,81873	2,7	0,06721
0,3	0,74082	2,8	0,06081
0,4	0,67032	2,9	0,05502
0,5	0,60653	3,0	0,04979
0,6	0,54881	3,2	0,04076
0,7	0,49659	3,4	0,03337
0,8	0,44933	3,6	0,02732
0,9	0,40657	3,8	0,02237
1,0	0,36788	4,0	0,01832
1,1	0,33287	4,2	0,01500
1,2	0,30119	4,4	0,01228
1,3	0,27253	4,6	0,01005
1,4	0,24660	4,8	0,00823
1,5	0,22313	5,0	0,00674
1,6	0,20190	5,5	0,00409
1,7	0,18268	6,0	0,00248
1,8	0,16530	6,5	0,00150
1,9	0,14957	7,0	0,00091
2,0	0,13534	7,5	0,00055
2,1	0,12246	8,0	0,00034
2,2	0,00180	8,5	0,00020
2,3	0,10026	9,0	0,00012
2,4	0,09072	10,0	0,00005

Apéndice 3

Tablas de Poisson

X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,5065	0,5488	[illegible]	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0128	0,0198	[illegible]	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	[illegible]	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	[illegible]	0,0012	0,0020	0,0031
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	[illegible]	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	[illegible]	0,0000	0,0000	0,0001

X	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	[illegible]	0,1653	0,1496	0,1353
1	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3230	[illegible]	0,2975	0,2842	0,2707
2	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	[illegible]	0,2678	0,2700	0,2707
3	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	[illegible]	0,1607	0,1710	0,1804
4	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	[illegible]	0,0723	0,0812	0,0902
5	0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	[illegible]	0,0260	0,0309	0,0361
6	0,0006	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	[illegible]	0,0078	0,0098	0,0120
7	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	[illegible]	0,0020	0,0027	0,0034
8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	[illegible]	0,0005	0,0006	0,0009
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	[illegible]	0,0001	0,0001	0,0002

X	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	[illegible]	[illegible]	0,0672	[illegible]	0,0550	0,0498
1	0,2572	0,2438	0,2306	0,2177	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,1703	0,1396	0,1494
2	0,2700	0,2681	0,2652	0,2613	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,2314	0,2240
3	0,1890	0,1966	0,2033	0,2090	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,2225	0,2237	0,2240
4	0,0992	0,1082	0,1169	0,1254	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,1557	0,1622	0,1680
5	0,0417	0,0476	0,0538	0,0602	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0872	0,0940	0,1008
6	0,0146	0,0174	0,0206	0,0241	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0407	0,0455	0,0504
7	0,0044	0,0055	0,0068	0,0083	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0163	0,0188	0,0216
8	0,0011	0,0015	0,0019	0,0025	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0057	0,0068	0,0081
9	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0022	0,0027
10	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0005	0,0006	0,0008
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0001	0,0002	0,0002
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0000	0,0000	0,0001

X	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
0	0,0450	0,0408	0,0369	0,0334	[illegible]	[illegible]	0,0247	0,0724	0,0202	0,0183
1	0,1397	0,1304	0,1217	0,1135	[illegible]	[illegible]	0,0915	0,0850	0,0789	0,0733
2	0,2165	0,2087	0,2008	0,1929	[illegible]	[illegible]	0,1692	0,1615	0,1539	0,1465
3	0,2237	0,2226	0,2209	0,2186	[illegible]	[illegible]	0,2087	0,2046	0,2001	0,1954
4	0,1734	0,1781	0,1823	0,1858	[illegible]	[illegible]	0,1931	0,1944	0,1951	0,1954
5	0,1075	0,1140	0,1203	0,1264	[illegible]	[illegible]	0,1429	0,1477	0,1522	0,1563
6	0,0555	0,0608	0,0662	0,0716	[illegible]	[illegible]	0,0881	0,0936	0,0989	0,1042
7	0,0246	0,0278	0,0312	0,0348	[illegible]	[illegible]	0,0466	0,0508	0,0551	0,0595
8	0,0095	0,0111	0,0129	0,0148	[illegible]	[illegible]	0,0215	0,0241	0,0269	0,0298
9	0,0033	0,0040	0,0047	0,0056	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0107	0,0116	0,0132

*Ejemplo $P(X = 5 \mid \lambda = 2,5) = 0,0668$

Apéndice 3 (continuación)

X	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0
3	0,0848	0,0806	0,0765	0,0726	0,0688	0,0652	0,0617	0,0584	0,0552	0,0521
4	0,1294	0,1249	0,1205	0,1162	0,1118	0,1076	0,1034	0,0992	0,0952	0,0912
5	0,1579	0,1549	0,1519	0,1487	0,1454	0,1420	0,1385	0,1349	0,1314	0,1277
6	0,1605	0,1601	0,1595	0,1586	0,1575	0,1562	0,1546	0,1529	0,1511	0,1490
7	0,1399	0,1418	0,1435	0,1450	0,1462	0,1472	0,1480	0,1486	0,1489	0,1490
8	0,1066	0,1099	0,1130	0,1160	0,1188	0,1215	0,1240	0,1263	0,1284	0,1304
9	0,0723	0,0757	0,0791	0,0825	0,0858	0,0891	0,0923	0,0954	0,0985	0,1014
10	0,0441	0,0469	0,0498	0,0528	0,0558	0,0558	0,0618	0,0649	0,0679	0,0710
11	0,0245	0,0265	0,0285	0,0307	0,0330	0,0353	0,0377	0,0401	0,0426	0,0452
12	0,0124	0,0137	0,0150	0,0164	0,0179	0,0194	0,0210	0,0227	0,0245	0,0264
13	0,0058	0,0065	0,0073	0,0081	0,0089	0,0098	0,0108	0,0119	0,0130	0,0142
14	0,0025	0,0029	0,0033	0,0037	0,0041	0,0046	0,0052	0,0058	0,0064	0,0071
15	0,0010	0,0012	0,0014	0,0016	0,0018	0,0020	0,0023	0,0026	0,0029	0,0033
16	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0010	0,0011	0,0013	0,0014
17	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006
18	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001

					λ					
X	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0
0	0,0008	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0003
1	0,0059	0,0054	0,0049	0,0045	0,0041	0,0038	0,0035	0,0032	0,0029	0,0027
2	0,0208	0,0194	0,0180	0,0167	0,0156	0,0145	0,0134	0,0125	0,0116	0,0107
3	0,0492	0,0464	0,0438	0,0413	0,0389	0,0366	0,0345	0,0324	0,0305	0,0286
4	0,0874	0,0836	0,0799	0,0764	0,0729	0,0696	0,0663	0,0632	0,0602	0,0573
5	0,1241	0,1204	0,1167	0,1130	0,1094	0,1057	0,1021	0,0986	0,0951	0,0916
6	0,1466	0,1445	0,1420	0,1394	0,1367	0,1339	0,1311	0,1282	0,1252	0,1221
7	0,1489	0,1486	0,1481	0,1474	0,1465	0,1454	0,1442	0,1428	0,1413	0,1396
8	0,1321	0,1337	0,1351	0,1363	0,1373	0,1382	0,1388	0,1392	0,1395	0,1396
9	0,1042	0,1070	0,1096	0,1121	0,1144	0,1167	0,1187	0,1207	0,1224	0,1241
10	0,0740	0,0770	0,0800	0,0829	0,0858	0,0887	0,0914	0,0941	0,0967	0,0993
11	0,0476	0,0504	0,0531	0,0558	0,0585	0,0613	0,0640	0,0667	0,0695	0,0722
12	0,0283	0,0303	0,0323	0,0344	0,0366	0,0388	0,0411	0,0434	0,0457	0,0481
13	0,0154	0,0168	0,0181	0,0196	0,0211	0,0227	0,0243	0,0260	0,0278	0,0296
14	0,0078	0,0086	0,0095	0,0104	0,0113	0,0123	0,0134	0,0145	0,0157	0,0169
15	0,0037	0,0041	0,0046	0,0051	0,0057	0,0062	0,0069	0,0075	0,0083	0,0090
16	0,0016	0,0019	0,0021	0,0024	0,0026	0,0030	0,0033	0,0037	0,0041	0,0045
17	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0012	0,0013	0,0015	0,0017	0,0019	0,0021
18	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
19	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0003	0,0004
20	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001

					λ					
X	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0
0	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
1	0,0025	0,0023	0,0021	0,0019	0,0017	0,0016	0,0014	0,0013	0,0012	0,0011
2	0,0100	0,0092	0,0086	0,0079	0,0074	0,0068	0,0063	0,0058	0,0054	0,0050
3	0,0269	0,0252	0,0237	0,0222	0,0208	0,0195	0,0183	0,0171	0,0160	0,0150
4	0,0544	0,0517	0,0491	0,0466	0,0443	0,0420	0,0398	0,0377	0,0357	0,0337

Apéndice 3 (continuación)

X	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
10	0,0010	0,0013	0,0016	0,0019	[illegible]	0,0028	0,0033	0,0039	0,0045	0,0053
11	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	[illegible]	0,0009	0,0011	0,0013	0,0016	0,0019
12	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	[illegible]	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	[illegible]	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	[illegible]	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

λ

X	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
0	0,0166	0,0150	0,0136	0,0123	[illegible]	0,0101	0,0091	0,0082	0,0074	0,0067
1	0,0679	0,0630	0,0582	0,0540	[illegible]	0,0462	0,0427	0,0395	0,0365	0,0337
2	0,1393	0,1323	0,1254	0,1188	[illegible]	0,1063	0,1005	0,0948	0,0894	0,0842
3	0,1904	0,1852	0,1798	0,1743	[illegible]	0,1631	0,1574	0,1517	0,1460	0,1404
4	0,1951	0,1944	0,1933	0,1917	[illegible]	0,1875	0,1849	0,1820	0,1789	0,1755
5	0,1600	0,1633	0,1662	0,1687	[illegible]	0,1725	0,1738	0,1747	0,1753	0,1755
6	0,1093	0,1143	0,1191	0,1237	[illegible]	0,1323	0,1362	0,1398	0,1432	0,1462
7	0,0640	0,0686	0,0732	0,0778	[illegible]	0,0869	0,0914	0,0959	0,1002	0,1044
8	0,0328	0,0360	0,0393	0,0428	[illegible]	0,0500	0,0537	0,0575	0,0614	0,0653
9	0,0150	0,0168	0,0188	0,0209	[illegible]	0,0255	0,0280	0,0307	0,0334	0,0363
10	0,0061	0,0071	0,0081	0,0092	[illegible]	0,0118	0,0132	0,0147	0,0164	0,0181
11	0,0023	0,0027	0,0032	0,0037	[illegible]	0,0049	0,0056	0,0064	0,0073	0,0082
12	0,0008	0,0009	0,0011	0,0014	[illegible]	0,0019	0,0022	0,0026	0,0030	0,0034
13	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	[illegible]	0,0007	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013
14	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	[illegible]	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	[illegible]	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002

λ

X	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0
0	0,0061	0,0055	0,0050	0,0045	[illegible]	0,0037	0,0033	0,0030	0,0027	0,0025
1	0,0311	0,0287	0,0265	0,0244	[illegible]	0,0207	0,0191	0,0176	0,0162	0,0149
2	0,0793	0,0746	0,0701	0,0659	[illegible]	0,0580	0,0544	0,0509	0,0477	0,0446
3	0,1348	0,1293	0,1239	0,1185	[illegible]	0,1082	0,1033	0,0985	0,0938	0,0892
4	0,1719	0,1681	0,1641	0,1600	[illegible]	0,1515	0,1472	0,1428	0,1383	0,1339
5	0,1753	0,1748	0,1740	0,1728	[illegible]	0,1697	0,1678	0,1656	0,1632	0,1606
6	0,1490	0,1515	0,1537	0,1555	[illegible]	0,1584	0,1594	0,1601	0,1605	0,1606
7	0,1086	0,1125	0,1163	0,1200	[illegible]	0,1267	0,1298	0,1326	0,1353	0,1377
8	0,0692	0,0731	0,0771	0,0810	[illegible]	0,0887	0,0925	0,0962	0,0998	0,1033
9	0,0392	0,0423	0,0454	0,0486	[illegible]	0,0552	0,0586	0,0620	0,0654	0,0686
10	0,0200	0,0220	0,0241	0,0262	[illegible]	0,0309	0,0334	0,0359	0,0386	0,0413
11	0,0093	0,0104	0,0116	0,0129	[illegible]	0,0157	0,0173	0,0190	0,0207	0,0225
12	0,0039	0,0045	0,0051	0,0058	[illegible]	0,0073	0,0082	0,0092	0,0102	0,0113
13	0,0015	0,0018	0,0021	0,0024	[illegible]	0,0032	0,0036	0,0041	0,0046	0,0052
14	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	[illegible]	0,0013	0,0015	0,0017	0,0019	0,0022
15	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	[illegible]	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
16	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	[illegible]	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	[illegible]	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

λ

X	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0
0	0,0022	0,0020	0,0018	0,0017	[illegible]	0,0014	0,0012	0,0011	0,0010	0,0009
1	0,0137	0,0126	0,0116	0,0106	[illegible]	0,0090	0,0082	0,0076	0,0070	0,0064
2	0,0417	0,0390	0,0364	0,0340	[illegible]	0,0296	0,0276	0,0258	0,0240	0,0223

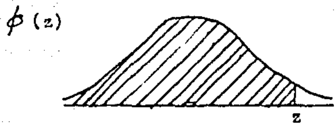
Apéndice 3 (concluye)

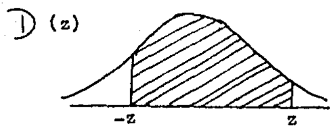
λ	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	[illegible]	8,9	9,0
5	0,0882	0,0849	0,0816	0,0784	0,0752	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0635	0,0607
6	0,1191	0,1160	0,1128	0,1097	0,1066	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0941	0,0911
7	0,1378	0,1358	0,1338	0,1317	0,1294	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,1171
8	0,1395	0,1392	0,1388	0,1382	0,1375	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,1318
9	0,1256	0,1269	0,1280	0,1290	0,1299	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,1317	0,1318
10	0,1017	0,1040	0,1063	0,1084	0,1104	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,1172	0,1186
11	0,0749	0,0776	0,0802	0,0828	0,0853	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0970
12	0,0505	0,0530	0,0555	0,0579	0,0604	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0728
13	0,0315	0,0234	0,0354	0,0374	0,0395	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0504
14	0,0182	0,0196	0,0210	0,0225	0,0240	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0324
15	0,0098	0,0107	0,0116	0,0126	0,0136	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0194
16	0,0050	0,0055	0,0060	0,0066	0,0072	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0109
17	0,0024	0,0026	0,0029	0,0033	0,0036	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0058
18	0,0011	0,0012	0,0014	0,0015	0,0017	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0029
19	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0012	0,0014
20	0,0002	0,0007	0,0002	0,0003	0,0003	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0006
21	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0003
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0001

X	λ 9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	[illegible]	9,7	9,8	9,9	10,0
0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0001	0,0000
1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0008	0,0007	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0005	0,0005
2	0,0046	0,0043	0,0040	0,0037	0,0034	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0025	0,0023
3	0,0140	0,0131	0,0123	0,0115	0,0107	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0081	0,0076
4	0,0319	0,0307	0,0285	0,0269	0,0254	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0201	0,0189
5	0,0581	0,0555	0,0530	0,0506	0,0483	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0378
6	0,0881	0,0851	0,0872	0,0793	0,0764	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0631
7	0,1145	0,1118	0,1031	0,1064	0,1037	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0901
8	0,1302	0,1286	0,1269	0,1251	0,1232	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,1126
9	0,1317	0,1315	0,1311	0,1306	0,1300	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,1251
10	0,1198	0,1210	0,1219	0,1228	0,1235	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,1250	0,1251
11	0,0991	0,1012	0,1031	0,1049	0,1067	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,1125	0,1137
12	0,0752	0,0776	0,0779	0,0822	0,0844	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0948
13	0,0526	0,0549	0,0572	0,0594	0,0617	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0707	0,0729
14	0,0342	0,0361	0,0380	0,0399	0,0419	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0500	0,0521
15	0,0208	0,0221	0,0235	0,0250	0,0265	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0330	0,0347
16	0,0118	0,0127	0,0137	0,0147	0,0157	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0204	0,0217
17	0,0063	0,0069	0,0075	0,0081	0,0088	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0119	0,0128
18	0,0032	0,0035	0,0039	0,0042	0,0046	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0065	0,0071
19	0,0015	0,0017	0,0019	0,0021	0,0023	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0034	0,0037
20	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0011	[illegible]	[illegible]	0,0015	0,0017	0,0019
21	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0008	0,0009
22	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0004	0,0004
23	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0002	0,0002
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0001	0,0001

Apéndice 4

Tablas de la Normal.





D(z) = (z) - (-z)
(-z) = 1 - (z), (0) = 0.5

z	(-z)	(z)	D(z)	z	(-z)	(z)	D(z)	z	(-z)	(z)	D(z)
	0.	0.	0.		0.	0.	0.		0.	0.	0.
0.01	4960	5040	0080	0.51	3050	6959	3899	1.01	1562	8438	6875
0.02	4920	5080	0160	0.52	3015	6985	3969	1.02	1539	8461	6923
0.03	4880	5120	0239	0.53	2981	7019	4039	1.03	1515	8485	6970
0.04	4840	5160	0319	0.54	2946	7054	4108	1.04	1492	8508	7017
0.05	4801	5199	0399	0.55	2912	7088	4177	1.05	1469	8531	7063
0.06	4761	5239	0478	0.56	2877	7123	4245	1.06	1446	8554	7109
0.07	4721	5279	0558	0.57	2843	7157	4313	1.07	1423	8577	7154
0.08	4681	5319	0638	0.58	2810	7190	4381	1.08	1401	8599	7199
0.09	4641	5359	0717	0.59	2776	7224	4448	1.09	1379	8621	7243
0.10	4602	5398	0797	0.60	2743	7257	4515	1.10	1357	8643	7287
0.11	4562	5438	0876	0.61	2709	7291	4581	1.11	1335	8665	7330
0.12	4522	5478	0955	0.62	2676	7324	4647	1.12	1314	8686	7373
0.13	4483	5517	1034	0.63	2643	7357	4713	1.13	1292	8708	7415
0.14	4443	5557	1113	0.64	2611	7389	4778	1.14	1271	8729	7457
0.15	4404	5596	1192	0.65	2578	7422	4843	1.15	1251	8749	7499
0.16	4364	5636	1271	0.66	2546	7454	4907	1.16	1230	8770	7540
0.17	4325	5675	1350	0.67	2514	7486	4971	1.17	1210	8790	7580
0.18	4286	5714	1428	0.68	2483	7517	5035	1.18	1190	8810	7620
0.19	4247	5753	1507	0.69	2451	7549	5098	1.19	1170	8830	7660
0.20	4207	5793	1585	0.70	2420	7580	5161	1.20	1151	8849	7699
0.21	4168	5832	1663	0.71	2389	7611	5223	1.21	1131	8869	7737
0.22	4129	5871	1741	0.72	2358	7642	5285	1.22	1112	8888	7775
0.23	4090	5910	1819	0.73	2327	7673	5346	1.23	1093	8907	7813
0.24	4052	5948	1897	0.74	2296	7704	5407	1.24	1075	8925	7850
0.25	4013	5987	1974	0.75	2266	7734	5467	1.25	1056	8944	7887

Apéndice 4 (concluye)

z	φ(-z)	φ(z)	D(z)	z	φ(-z)	φ(z)	D(z)	z	φ(-z)	φ(z)	D(z)
	0.	0.	0.		0.	0.	0.		0.	0.	0.
0.26	3974	6026	2051	0.76	2236	7764	5527	1.26	1038	8962	7923
0.27	3936	6064	2128	0.77	2206	7794	5587	1.27	1020	8980	7959
0.28	3897	6103	2205	0.78	2177	7823	5646	1.28	1003	8997	7995
0.29	3859	6141	2282	0.79	2148	7852	5705	1.29	0985	9015	8029
0.30	3821	6179	2358	0.80	2119	7881	5763	1.30	0968	9032	8064
0.31	3783	6217	2434	0.81	2090	7910	5821	1.31	0951	9049	8098
0.32	3745	6255	2510	0.82	2061	7939	5878	1.32	0934	9066	8132
0.33	3707	6293	2586	0.83	2033	7967	5935	1.33	0918	9082	8165
0.34	3669	6331	2661	0.84	2005	7995	5991	1.34	0901	9099	8198
0.35	3632	6368	2737	0.85	1977	8023	6047	1.35	0885	9115	8230
0.36	3594	6406	2812	0.86	1949	8051	6102	1.36	0869	9131	8262
0.37	3557	6443	2886	0.87	1922	8078	6157	1.37	0853	9147	8293
0.38	3520	6480	2961	0.88	1894	8106	6211	1.38	0838	9162	8324
0.39	3483	6517	3035	0.89	1867	8133	6265	1.39	0823	9177	8355
0.40	3446	6554	3108	0.90	1841	8159	6319	1.40	0808	9192	8385
0.41	3409	6591	3182	0.91	1814	8186	6372	1.41	0793	9207	8415
0.42	3372	6628	3255	0.92	1788	8212	6424	1.42	0778	9222	8444
0.43	3336	6664	3328	0.93	1762	8238	6476	1.43	0764	9236	8473
0.44	3300	6700	3401	0.94	1736	8264	6528	1.44	0749	9251	8501
0.45	3264	6736	3473	0.95	1711	8289	6579	1.45	0735	9265	8529
0.46	3228	6772	3545	0.96	1685	8315	6629	1.46	0721	9279	8557
0.47	3192	6808	3616	0.97	1660	8340	6680	1.47	0708	9292	8584
0.48	3156	6844	3688	0.98	1635	8365	6729	1.48	0694	9306	8611
0.49	3121	6879	3759	0.99	1611	8389	6778	1.49	0681	9319	8638
0.50	3085	6915	3829	1.00	1587	8413	6827	1.50	0668	9332	8664
1.51	0655	9345	8690	2.01	0222	9778	9556	2.51	0060	9940	9879
1.52	0643	9357	8715	2.02	0217	9783	9566	2.52	0059	9941	9883
1.53	0630	9370	8740	2.03	0212	9788	9576	2.53	0057	9943	9886
1.54	0618	9382	8764	2.04	0207	9793	9586	2.54	0055	9945	9889
1.55	0606	9394	8789	2.05	0202	9798	9596	2.55	0054	9946	9892
1.56	0594	9406	8812	2.06	0197	9803	9606	2.56	0052	9948	9895
1.57	0582	9418	8836	2.07	0192	9808	9615	2.57	0051	9949	9898
1.58	0571	9429	8859	2.08	0188	9812	9625	2.58	0049	9951	9901
1.59	0559	9441	8882	2.09	0183	9817	9634	2.59	0048	9952	9904
1.60	0548	9452	8904	2.10	0179	9821	9643	2.60	0047	9953	9907

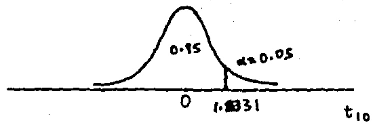
Apéndice 4 (continuación)

z	$\phi(-z)$	$\phi(z)$	$D(z)$	z	$\phi(-z)$	$\phi(z)$	$D(z)$	z	$\phi(-z)$	$\phi(z)$	$D(z)$
	0.	0.	0.		0.	0.	0.		0.	0.	0.
1.61	0537	9463	8926	2.11	0174	9826	9651	2.61	0045	9955	9909
1.62	0526	9474	8948	2.12	0170	9830	9660	2.62	0044	9956	9912
1.63	0516	9484	8969	2.13	0166	9834	9668	2.63	0043	9957	9915
1.64	0505	9495	8990	2.14	0162	9838	9676	2.64	0041	9959	9917
1.65	0495	9505	9011	2.15	0158	9842	9684	2.65	0040	9960	9920
1.66	0485	9515	9031	2.16	0154	9846	9692	2.66	0039	9961	9922
1.67	0475	9525	9051	2.17	0150	9850	9700	2.67	0038	9962	9924
1.68	0465	9535	9070	2.18	0146	9854	9707	2.68	0037	9963	9926
1.69	0455	9545	9090	2.19	0143	9857	9715	2.69	0036	9964	9929
1.70	0446	9554	9109	2.20	0139	9861	9722	2.70	0035	9965	9931
1.71	0436	9564	9127	2.21	0136	9864	9729	2.71	0034	9966	9933
1.72	0427	9573	9146	2.22	0132	9868	9736	2.72	0033	9967	9935
1.73	0418	9582	9164	2.23	0129	9871	9743	2.73	0032	9968	9937
1.74	0409	9591	9181	2.24	0125	9875	9749	2.74	0031	9969	9939
1.75	0401	9599	9199	2.25	0122	9878	9756	2.75	0030	9970	9940
1.76	0392	9608	9216	2.26	0119	9881	9762	2.76	0029	9971	9942
1.77	0384	9616	9233	2.27	0116	9884	9768	2.77	0028	9972	9944
1.78	0375	9625	9249	2.28	0113	9837	9774	2.78	0027	9973	9946
1.79	0367	9633	9265	2.29	0110	9890	9780	2.79	0026	9974	9947
1.80	0359	9641	9281	2.30	0107	9893	9786	2.80	0026	9974	9949
1.81	0351	9649	9297	2.31	0104	9896	9791	2.81	0025	9975	9950
1.82	0344	9656	9312	2.32	0102	9898	9797	2.82	0024	9976	9952
1.83	0336	9664	9328	2.33	0099	9901	9802	2.83	0023	9977	9953
1.84	0329	9671	9342	2.34	0096	9904	9807	2.84	0023	9977	9955
1.85	0322	9678	9357	2.35	0094	9906	9812	2.85	0022	9978	9956
1.86	0314	9686	9371	2.36	0091	9909	9817	2.86	0021	9979	9958
1.87	0307	9693	9385	2.37	0089	9911	9822	2.87	0021	9979	9959
1.88	0301	9699	9399	2.38	0087	9913	9827	2.88	0020	9980	9969
1.89	0294	9706	9412	2.39	0084	9916	9832	2.89	0019	9981	9961
1.90	0287	9713	9426	2.40	0082	9918	9836	2.90	0019	9981	9963
1.91	0281	9719	9439	2.41	0080	9920	9840	2.91	0018	9982	9964
1.92	0274	9726	9451	2.42	0078	9922	9845	2.92	0018	9982	9965
1.93	0268	9732	9464	2.43	0075	9925	9849	2.93	0017	9983	9966
1.94	0262	9738	9476	2.44	0073	9927	9853	2.94	0016	9984	9967
1.95	0256	9744	9488	2.45	0071	9929	9857	2.95	0016	9984	9968
1.96	0250	9750	9500	2.46	0069	9931	9861	2.96	0015	9985	9969
1.97	0244	9756	9512	2.47	0068	9932	9865	2.97	0015	9985	9970
1.98	0239	9761	9523	2.48	0066	9934	9869	2.98	0014	9986	9971
1.99	0233	9767	9534	2.49	0064	9936	9872	2.99	0014	9986	9972
2.00	0228	9545	9545	2.50	0062	9938	9876	3.00	0013	9987	9973

Apéndice 5

Tablas de la t de estudent.

Para un número particular de grados de libertad, la entrada representa el valor crítico de t correspondiente a un área especificada para la cola superior.



Grados de libertad	Areas de cola superior					
	.25	.10	.05	.025	.01	.005
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	31.8207	63.6574
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0322
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467
16	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.6884	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.6876	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.6870	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.6864	1.3232	1.7207	2.9796	2.5177	2.8314
22	0.6858	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.6853	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.6848	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.6840	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.6837	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.6834	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.6830	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.6828	1.3104	1.6973	2.0423	2.0573	2.7500

Apéndice 5 (continuación)

Grados de	Areas de cola superior					
libertad	0.025	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
31	0.6325	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440
32	0.6822	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385
33	0.6820	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333
34	0.6818	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284
35	0.6816	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238
36	0.6814	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195
37	0.6812	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154
38	0.6810	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116
39	0.6808	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079
40	0.6807	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
41	0.6805	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012
42	0.6804	1.3020	1.6820	2.0181	2.4185	2.6981
43	0.6802	1.3016	1.6811	2.0167	2.4163	2.6951
44	0.6801	1.3011	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923
45	0.6800	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896
46	0.6799	1.3002	1.6787	2.0129	2.4102	2.6870
47	0.6797	1.2998	1.6779	2.0117	2.4083	2.6846
48	0.6796	1.2994	1.6772	2.0106	2.4066	2.6822
49	0.6795	1.2991	1.6766	2.0096	2.4049	2.6800
50	0.6794	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
51	0.6793	1.2984	1.6753	2.0076	2.4017	2.6757
52	0.6792	1.2980	1.6747	2.0066	2.4002	2.6737
53	0.6791	1.2977	1.6741	2.0057	2.3988	2.6718
54	0.6791	1.2974	1.6736	2.0049	2.3974	2.6700
55	0.6790	1.2971	1.6730	2.0040	2.3961	2.6682
56	0.6789	1.2969	1.6725	2.0032	2.3948	2.6665
57	0.6788	1.2966	1.6720	2.0025	2.3936	2.6649
58	0.6787	1.2963	1.6716	2.0017	2.3924	2.6633
59	0.6787	1.2961	1.6711	2.0010	2.3912	2.6618
60	0.6786	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603
61	0.6785	1.2956	1.6702	1.9996	2.3890	2.6589
62	0.6785	1.2954	1.6698	1.9990	2.3880	2.6575
63	0.6784	1.2951	1.6694	1.9983	2.3870	2.6561
64	0.6783	1.2949	1.6690	1.9977	2.3860	2.6549
65	0.6783	1.2947	1.6686	1.9971	2.3851	2.6536
66	0.6782	1.2945	1.6683	1.9966	2.3842	2.6524
67	0.6782	1.2943	1.6679	1.9960	2.3833	2.6512
68	0.6781	1.2941	1.6676	1.9955	2.3824	2.6501
69	0.6781	1.2939	1.6672	1.9949	2.3816	2.6490
70	0.6780	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479

Apéndice 5 (continuación)

Grados de libertad	Areas de cola superior					
	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
71	0.6780	1.2936	1.6666	1.9939	2.3800	2.6469
72	0.6779	1.2934	1.6663	1.9935	2.3793	2.6459
73	0.6779	1.2933	1.6660	1.9930	2.3785	2.6449
74	0.6778	1.2931	1.6657	1.9925	2.3778	2.6439
75	0.6778	1.2929	1.6654	1.9921	2.3771	2.6430
76	0.6777	1.2928	1.6652	1.9917	2.3764	2.6421
77	0.6777	1.2926	1.6649	1.9913	2.3758	2.6412
78	0.6776	1.2925	1.6646	1.9908	2.3751	2.6403
79	0.6776	1.2924	1.6644	1.9905	2.3745	2.6395
80	0.6776	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387
81	0.6775	1.2921	1.6639	1.9897	2.3733	2.6379
82	0.6775	1.2920	1.6636	1.9893	2.3727	2.6371
83	0.6775	1.2918	1.6634	1.9890	2.3721	2.6364
84	0.6774	1.2917	1.6632	1.9886	2.3716	2.6356
85	0.6774	1.2916	1.6630	1.9883	2.3710	2.6349
86	0.6774	1.2915	1.6628	1.9879	2.3705	2.6342
87	0.6773	1.2914	1.6626	1.9876	2.3700	2.6335
88	0.6773	1.2912	1.6624	1.9873	2.3695	2.6329
89	0.6773	1.2911	1.6622	1.9870	2.3690	2.6322
90	0.6772	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316
91	0.6772	1.2909	1.6618	1.9864	2.3680	2.6309
92	0.6772	1.2908	1.6616	1.9861	2.3676	2.6303
93	0.6771	1.2907	1.6614	1.9858	2.3671	2.6297
94	0.6771	1.2906	1.6612	1.9855	2.3667	2.6291
95	0.6771	1.2905	1.6611	1.9853	2.3662	2.6286
96	0.6771	1.2904	1.6609	1.9850	2.3658	2.6280
97	0.6770	1.2903	1.6607	1.9847	2.3654	2.6275
98	0.6770	1.2902	1.6606	1.9845	2.3650	2.6269
99	0.6770	1.2902	1.6604	1.9842	2.3646	2.6264
100	0.6770	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259
102	0.6769	1.2899	1.6599	1.9835	2.3635	2.6249
104	0.6769	1.2897	1.6596	1.9830	2.3627	2.6239
106	0.6768	1.2896	1.6594	1.9826	2.3620	2.6230
108	0.6768	1.2894	1.6591	1.9822	2.3614	2.6221
110	0.6767	1.2893	1.6588	1.9818	2.3607	2.6213
112	0.6767	1.2892	1.6586	1.9814	2.3601	2.6204
114	0.6766	1.2890	1.6583	1.9810	2.3595	2.6196
116	0.6766	1.2889	1.6581	1.9806	2.3589	2.6189
118	0.6766	1.2888	1.6579	1.9803	2.3584	2.6181
120	0.6765	1.2886	1.6577	1.9799	2.3578	2.6174

Apéndice 5 (concluye)

Grados de libertad	Areas de cola superior					
	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
122	0.6765	1.2885	1.6574	1.9796	2.3573	2.6167
124	0.6765	1.2884	1.6572	1.9793	2.3568	2.6161
126	0.6764	1.2883	1.6570	1.9790	2.3563	2.6154
128	0.6764	1.2882	1.6568	1.9787	2.3558	2.6148
130	0.6764	1.2881	1.6567	1.9784	2.3554	2.6142
132	0.6764	1.2880	1.6565	1.9781	2.3549	2.6136
134	0.6763	1.2879	1.6563	1.9778	2.3545	2.6130
136	0.6763	1.2878	1.6561	1.9776	2.3541	2.6125
138	0.6763	1.2877	1.6560	1.9773	2.3537	2.6119
140	0.6762	1.2876	1.6558	1.9771	2.3533	2.6114
142	0.6762	1.2875	1.6557	1.9768	2.3529	2.6109
144	0.6762	1.2875	1.6555	1.9766	2.3525	2.6104
146	0.6762	1.2874	1.6554	1.9763	2.3522	2.6099
148	0.6762	1.2873	1.6552	1.9761	2.3518	2.6095
150	0.6761	1.2872	1.6551	1.9759	2.3515	2.6090
∞	0.6745	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.6090

TABLA "JI" CUADRADA

gl	$\chi^2_{0.005}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.90}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.995}$
1	0.0000393	0.000982	0.00393	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.0100	0.0506	0.103	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.0717	0.216	0.352	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.484	0.711	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.831	1.145	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750
6	0.676	1.237	1.635	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.690	2.167	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	2.180	2.733	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.700	3.325	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	3.247	3.940	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.816	4.575	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	4.404	5.226	18.549	21.026	23.336	26.217	28.300
13	3.565	5.009	5.892	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	5.629	6.571	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	6.262	7.261	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	6.908	7.962	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	7.564	8.672	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	8.231	9.390	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	8.907	10.117	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	9.591	10.851	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	10.283	11.591	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	10.982	12.338	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	11.688	13.091	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	12.401	13.848	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	13.120	14.611	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	13.844	15.379	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	14.573	16.151	36.741	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	15.308	16.928	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	16.047	17.708	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	16.791	18.493	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
35	17.192	20.569	22.465	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
40	20.707	24.433	26.509	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
45	24.311	28.366	30.612	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166
50	27.991	32.357	34.764	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.535	40.482	43.188	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	48.758	51.739	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	57.153	60.391	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	65.647	69.126	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	74.222	77.929	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

Fuente: A. Hald y S. A. Sinkbaek, "A Table of Percentage Points of the X^2 Distribution", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 33 (1950), 168-175. Utilizada con autorización.

BIBLIOGRAFIA

- Estadística para Administración y Economía. Autor(es): Mendenhall William y Reinmuth James. Editorial: Wadeswort International. Año: 1978.

- Estadística para Administración y Economía. Autor(es): Berenson Michael y Levine David. Editorial: Interamericana Año: 1982.

- Estadística para Administración y Economía. Autor: Milis Richard. Editorial: Mc Graw Hill Año: 1980.

- Estadística para Administración y Economía. Autor: Leonard J. Katmier. Editorial: Mc Graw Hill Año: 1978.

- Estadística para Administración y Economía. Autor: Lincoln L. Chao Editorial: Mc Graw Hill Año: 1975.

- Matemáticas Aplicadas para la Administración y Economía. Autor: Frank S. Budnick . Editorial: Mc Graw Hill. Año: 1979

- Introducción a la Estadística Matemática. Autor: Wrwin Kreyszig. Editorial: Limusa. Año: 1972.

- Estadística General. Autor(es) Audrey Haber y Richard P. Runyon. Editorial: Fondo Educativo Interamericano. Año: 1973.

- Teoría de la Probabilidad. Autor: Ivan Obregón Sanin. Editorial: Limusa. Año: 1980.

- Elementos de calculo de probabilidades.
  Autor: Tomás Garza
  Editorial: Universidad Autonoma de México.
  Año: 1983.

- Introduction to the--- theory of Statistics.
  Autor(es) Alexander M. Mood
  Franklin A. Graybill
  Duane C. Boes.
  Editorial: Mc Graw Hill.
  Año: 1983.