

6
27



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias



**FUSION NUCLEAR CATALIZADA
POR MUONES**

T E S I S

Que para obtener el grado de:

F I S I C O

P r e s e n t a :

Enrique Cruz Martínez



1990

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

CAPITULO I.	Introducción	1
I.1	Bosquejo histórico	2
I.2	Reacciones de fusión nuclear catalizada por muones	8
I.2.1	Reacción p-d	8
I.2.2	Reacción d-d	9
I.2.3	Reacción d-t	13
CAPITULO II.	Descripción microscópica de los procesos que ocurren en la fusión nuclear catalizada por muones (f.n.c.m).	14
II.1	Formación de átomos muónicos	14
II.2	Niveles de energía de un sistema coulombiano de tres cuerpos	16
II.3	Formación de iones muonmoleculares	22
II.3.1	Formación resonante.	23
II.3.2	Formación del ión muonmolecular ($dt\mu$).	25
II.4	Adhesión y reactivación del muón.	29
II.5	Cadena principal en la f.n.c.m.	31
CAPITULO III.	Estadística de la fusión nuclear catalizada por muones.	34
III.1	Conceptos básicos.	34
III.2	Estadística de f.n.c.m.	38
CAPITULO IV.	Soluciones numéricas a las ecs. que describen los procesos que ocurren en la f.n.c.m.	54

IV.1	Método de arranque	55
IV.2	Método de Adamas	60
CAPITULO V.	Resultados del programa	66
V.1	Verificación del programa; Evolución temporal de los promedios.	66
V.2	Estadística de la rama principal sin fuente de muones.	73
V.2.1	Evolución temporal y estadística del proceso.	73
V.2.2	Dependencia en el factor de adhesión.	101
V.2.3	Dependencia en la concentración de la mezcla.	113
V.3	Estadística de la rama principal con fuente constante de muones.	115
CONCLUSIONES.		135
APENDICE A		139
APENDICE B		160
REFERENCIAS		167
BIBLIOGRAFIA		170

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es estudiar el sistema de ecuaciones diferenciales que describen la cinética de los procesos involucrados en la fusión nuclear catalizada por muones, analizar su evolución temporal y describir su estadística.

El trabajo ha sido dividido en cinco capítulos y conclusiones: En el capítulo I se da una introducción al fenómeno de fusión nuclear nuclear catalizada por muones con una breve exposición del desarrollo histórico, en el capítulo II se da una descripción microscópica de los procesos que ocurren en la fusión nuclear catalizada por muones. En el capítulo III se estudia estadísticamente la fusión nuclear catalizada por muones en su rama principal. En el capítulo IV se presentan métodos numéricos para resolver las ecuaciones que gobiernan la fusión nuclear catalizada por muones. En el capítulo V se presentan los resultados del programa a través de gráficas que ilustran el comportamiento temporal de las variables involucradas y se analizan los resultados. Finalmente se presentan algunas conclusiones.

CAPITULO I.

INTRODUCCION

La fusión nuclear catalizada por muones (μ) es el nombre que se da a las reacciones nucleares en la que dos núcleos atómicos se fusionan gracias a la presencia de un muón. La función esencial de esta partícula es reducir la distancia entre los dos núcleos de una molécula de algún isótopo del hidrógeno. Este tipo de fusión también se conoce como fusión fría, debido a que las temperaturas óptimas a las que ocurren las reacciones nucleares son de alrededor de 900°C . Esto contrasta con las temperaturas requeridas en los experimentos de fusión termonuclear en reactores de tipo tokamak, donde un plasma de deuterio (d) y tritio (t) confinado magnéticamente es calentado a una temperatura similar a la del Sol. La fusión catalizada por muones se presenta como una opción para lograr la fusión nuclear a bajas temperaturas.

Antes de referirse a como se descubrió este tipo de reacción y como se fue avanzando en la comprensión de la misma y sus posibles implicaciones, es conveniente señalar aunque sea someramente, que son los muones y cómo pueden producirse.

Los muones son partículas elementales de vida corta (vida media de 2.2×10^{-6} seg.). Se encuentran formando parte de los rayos cósmicos secundarios, y son producidos cuando los rayos cósmicos primarios colisionan con los núcleos de los átomos o moléculas que forman la atmósfera superior. Los muones también se pueden producir artificialmente haciendo chocar un haz de iones muy energético contra algún blanco (Carbón por ejemplo), en estas

colisiones se producen las partículas llamadas piones que pueden ser positivos (π^+), negativos (π^-) o neutros (π^0); estas partículas decaen rápidamente y producen muones en el proceso de decaimiento, los muones pueden tener carga positiva (μ^+) o negativa (μ^-). Debido a que la masa del muón es 207 veces mayor que la de un electrón (e), los muones negativos pueden ser aprovechados para catalizar una reacción de fusión entre dos núcleos atómicos. El efecto catalizador del muón aparece al sustituir un electrón por un muón en una molécula ordinaria (por ejemplo la molécula D_2 ó DT), ya que la distancia efectiva entre los núcleos atómicos se reduce y con ello aumenta la probabilidad de que se presente el efecto tunel.

1.1

BOSQUEJO HISTORICO

La Primera identificación e interpretación correcta del decaimiento de un pión,

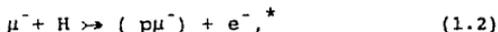
$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu,^* \quad (1.1)$$

fue realizada por Lattes, Occhialini y Powell en 1947 [1]. Por esa misma época en los grupos de F. C. Frank y A. D. Sakharov [2],[3] se analizó entusiastamente la posibilidad de utilizar los muones como catalizadores. En un trabajo presentado en 1948 Sakharov discutió ampliamente el tema de la fusión nuclear catalizada por muones; ahí se predijo que una vez formado un iónmuónmolecular la fusión nuclear ocurriría casi inmediatamente; también se planteó la posibilidad de utilizar la fusión nuclear catalizada por muones para la producción de energía.

* ν representa un neutrino, que como su nombre lo indica es una partícula neutra cuya masa es tan pequeña que aun no se ha podido determinar

La primera observación de la fusión catalizada por muones fue hecha sin embargo hasta 1957 por Luis W. Alvarez [4],[5] y sus colegas en Berkeley. En el estudio de las interacciones kaónicas se analizaban en aquella época ciertas trazas en fotografías de una cámara de hidrógeno contaminada por deuterio, dicha contaminación, entonces indeseada, vendría a dar resultados muy sorprendentes respecto a la catalisis de la fusión nuclear por muones.

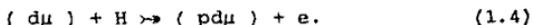
En dichos análisis se observaron trazas de muones con 5.4 Mev de energía y trayectorias que correspondían a las fusiones que catalizaba el muón, dichas trazas terminaban con el decaimiento del muón. Para explicar este fenómeno se propuso que el muón era primeramente frenado hasta energías del orden de eV's, luego interactuaba con un átomo de hidrógeno (H) y expulsaba un electrón. Este proceso de expulsión de un electrón recibe el nombre de AUGER,



y da lugar a un átomo muónico neutro. Cuando el átomo muónico de hidrógeno choca con un átomo de deuterio, existe una probabilidad relativamente alta de transferencia del muón, a este tipo de reacción se representa por

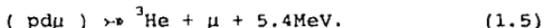


Posteriormente si el átomo $d\mu$ choca con un átomo de hidrógeno se forma el ión muónmolecular ($pd\mu$), i.e.



* Aquí p representa al protón que es núcleo del átomo de hidrógeno. El deuterón es a su vez, el núcleo del átomo de deuterio D y el tritón es el núcleo del átomo de tritio T.

Los nucleos p y d están muy cerca debido a que el muón es 207 veces más masivo que un electrón, el ión muónmolecular formado es más pequeño que una molécula normal de H₂ ó D₂, esto ocasiona que la probabilidad de penetración de la barrera coulombiana aumente (como se explicara más adelante) y se pueda lograr la fusión produciéndose ³He y liberandose energía,



Por muchos años los unicos datos experimentales disponibles fueron los de Berkeley y Liverpool. A pesar de que el grupo de Berkeley no conocia los trabajos realizados en los años 40's por Frank y Sakharov, dedujeron con la ayuda de Edward Teller [4],[5], que las trazas en estudio correspondían a las reacciones de fusión catalizadas por muones. En 1968 Luis W. Alvarez [4] en su discurso de aceptación del premio Nobel, fue un poco más allá de lo que por el momento habían encontrado y mencionó que habían resuelto los problemas energéticos de la humanidad para el resto del tiempo. Sin embargo posteriormente se encontró que las reacciones que el muón podía catalizar eran muy pocas, en promedio un muón sólo podía catalizar una reacción, esto obviamente no seria útil en la producción de energía. Se realizaron más experimentos con diferentes isótopos del hidrógeno y otros elementos. Por ejemplo se observó que utilizando una mezcla de deuterio y tritio el número de fusiones catalizadas por muón aumentaba.

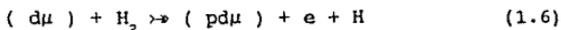
V. P. Dzheleпов y sus colegas [6] del Instituto Asociado para la investigación Nuclear en Dubna, encontraron que la razón de formación del ión en el proceso de fusión dependia fuertemente de la temperatura y de la densidad, obtenienDose más fusiones por

muón a altas temperaturas.

Gershtein y Zel'dovich investigaron teóricamente varios de los fenómenos involucrados en los procesos de la fusión catalizada por muones, y publicaron sus resultados en una serie de artículos de 1957 a 1960.

Ellos encontraron que, independientemente de la cantidad de isótopos de hidrógeno en la mezcla, tan sólo se pueden esperar unas cuantas fusiones por muón; esto debido a que la razón de formación muónmolecular era a lo más de 10^6 s^{-1} , lo cual es comparable con el inverso de la vida media del muón ($2.2 \times 10^{-6} \text{ seg.}$). Lo anterior desvaneció el entusiasmo originalmente despertado por Alvarez, y redujo toda esperanza acerca de la posibilidad de obtener energía de la fusión catalizada por muones.

Posteriormente en 1961 y en los diez años siguientes Zel'dovich y Gershtein [7] hicieron mediciones de las razones de formación de los iones ($\text{pp}\mu$), ($\text{pd}\mu$), ($\text{dd}\mu$); dentro de los errores experimentales se encontraron los mismos resultados concernientes a los tiempos reportados para la formación mesomolecular. En dicha formación se observó el proceso de Auger



En 1967 E. A. Vesman [8] de la Academia Estoniana de Ciencias elaboró algunos modelos teóricos muy importantes de la formación del ión muónmolecular ($\text{dd}\mu$). El propuso que además de proceso de Auger, la formación del ión muónmolecular podría ocurrir por transferencia de energía, de la energía de amarre a los niveles vibracionales y rotacionales de la molécula que aloja al ión

muónmolecular.

Este proceso sería posible sólo si existen estados débilmente ligados de la mesomolécula, con una energía de amarre menor que la energía de disociación de una molécula de hidrógeno, que es de 4.3 eV. Debido a la naturaleza cuantizada de las excitaciones moleculares, este proceso debe tener un comportamiento resonante y de esta forma la razón de formación debe ser muy sensible a la energía cinética (i.e. temperatura) de los átomos muónicos.

En 1977 S. S. Gershtein, L. I. Ponomarev y colaboradores [9], basados en el modelo de Vesman, predijeron ciertas temperaturas y densidades óptimas. El grupo de Ponomarev calculó varios niveles de energía de las mesomoléculas con una exactitud del orden de 0.1 eV, y probó la existencia de un estado débilmente ligado de la mesomolécula ($dd\mu$) con una energía de amarre de alrededor de 2 eV. Los experimentos realizados a distintas temperaturas confirman el esquema de Vesman (de esta forma se demostró la efectividad del modelo propuesto por Vesman).

Gershtein y Ponomarev predijeron que una mezcla de deuterio y tritio produciría iones muónmoleculares ($dt\mu$) con una razón de formación mayor que con otras mezclas de isótopos de hidrógeno. Esto fue confirmado con los experimentos de Bystritsky [10], en 1980, quien además encontró un límite inferior $\lambda_{dt\mu} \approx 2 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$, donde $\lambda_{dt\mu}$ es la razón de formación del ión $dt\mu$.

Esto significaba que en una mezcla de deuterio y tritio el proceso de fusión ocurriría con mayor rapidez y se lograría catalizar alrededor de cien reacciones de fusión antes de que el muón decayera. Este hecho abrió de nuevo las puertas a la fusión catalizada por muones como un candidato importante para la producción de energía.

Estos resultados dieron origen a una nueva serie de experimentos encaminados a la medición más precisa de los niveles de energía de la mesomolécula o ión muónmolecular. Así por ejemplo en 1981 en el grupo de Viena SIN (Swiss Institut of Nuclear Research) [11] se realizaron varios trabajos sobre la estructura hiperfina (HS) de la mesomolécula o ión muónmolecular.

Para el estudio del fenómeno de resonancia y de la fusión catalizada por muones se han realizado un sinnúmero de trabajos teóricos, entre otros se encuentran por ejemplo, los escritos por Gershtein y Zel'dovich (1961) [7], Alvarez (1972) [4], Massey (1974)[12], Gershtein y Ponomarev (1975) [13], Ponomarev (1978)[14], Meyer-ter-Ven (1979) [15], Rafelsky (1979) [16], Breunlich (1981) [11], Fiorentini (1981) [17].

Uno de los problemas más importantes con que se enfrenta la fusión catalizada por muones es la adecuada y eficiente producción de muones. Con el propósito de minimizar el costo de energía de la producción de muones, Petrov ideó en 1983 [18] un mecanismo que incrementaría la energía de salida de la cadena de reacciones. Esta idea dió lugar a un reactor híbrido, es decir un reactor de fisión-fusión, que aumentaría la eficiencia de producción de

energía suponiendo que no se pudieran catalizar más de 100 reacciones de fusión por muón.

1.2 REACCIONES DE FUSION NUCLEAR CATALIZADA POR MUONES

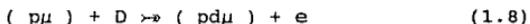
A continuación se explican los tres tipos de reacciones que se han estudiado en la fusión nuclear catalizada por muones:

1.2.1 Reacción p-d

Esta fue la primera reacción observada experimentalmente, y surge como consecuencia de inyectar muones a una mezcla de hidrógeno y deuterio. Un proceso altamente probable es que el muón choque con una molécula de hidrógeno (H_2) ocasionando que un electrón salga de su orbita molecular y el muón quede en su lugar (proceso de Auger); esto sucede únicamente cuando el muón ha chocado ya antes con varias moléculas y ha perdido la suficiente energía para llevar a cabo la reacción y reemplazar a un electrón



Cuando este átomo muónico está en una molécula HD, el muón se transfiere al deuterio debido a que este tiene mayor masa



Ya que el muón acerca los núcleos de hidrógeno y deuterio aproximadamente 207 veces más de lo que ocurre en una molécula ordinaria, las fuerzas nucleares tienen un efecto importante, y dan lugar a la fusión de los núcleos de hidrógeno y deuterio por efecto tunel

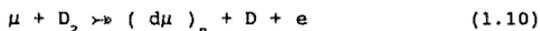


En realidad el describir la cinética de las reacciones de fusión es algo un poco más complicado de lo que parece por que pueden ocurrir otros fenómenos que reducen la eficiencia del muón para catalizar reacciones, así por ejemplo el muón puede decaer antes de que ocurra la fusión, o bien puede quedarse adherido al helio producido en una reacción de fusión ("sticking").

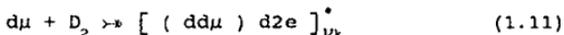
Se observó que la parte del proceso que requiere más tiempo es la formación del ión muónmolecular μHe^+ , con 10^{-7} segundos. Así entonces se tendrá que en promedio un muón sólo cataliza una reacción de fusión ya que la vida media del muón es de $\approx 2.2 \times 10^{-6}$ segundos. El problema principal para que el muón siga catalizando más reacciones de fusión es, como ya se mencionó anteriormente, la pérdida del muón mismo debido a su captura por el ^3He producto de la fusión.

1.2.2. Reacción d-d

En la fusión catalizada por muones en deuterio puro, el muón después de ser termalizado choca con una molécula de deuterio (D_2) y da lugar, nuevamente, al proceso de Auger



Aquí $(\mu)_n$ significa que el muón está en el estado n-ésimo, con n el conjunto de números cuánticos que determinan dicho estado. Cuando el muón está en el estado n o bien ya ha pasado al estado base, puede ocurrir la reacción:



donde ν y k son los números cuánticos de los niveles vibracional y rotacional de la molécula $(\mu)_\nu \text{D}_2$ respectivamente, y el superíndice * significa que está en un estado excitado.

Cuando se forma la molécula compleja escrita anteriormente ocurre casi inmediatamente la fusión del ión $dd\mu$, entonces existen dos caminos igualmente probables para la fusión:

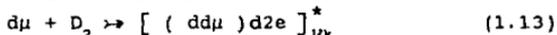


y



En este tipo de reacciones se observa que el número de fusiones catalizadas por un muón es de aproximadamente una, asimismo se encontró que el tiempo de formación del ión muónmolecular $dd\mu$ disminuye cuando aumenta la temperatura. La temperatura sin embargo no puede elevarse indefinidamente pues las moléculas del deuterio se disociarían y el proceso de formación del ión muónmolecular sería muy poco probable.

Los procesos detrás de la reacción



se lograron entender después de varios años de investigación; la idea central de como se forma el ión muónmolecular dentro de una molécula más compleja fue sugerida por Vesman en 1967. Como vimos anteriormente, él propuso que la energía que se libera al formarse el ión $dd\mu$ debe ser absorbida por algún mecanismo interno de la molécula. Entonces cuando el átomo muónico $d\mu$ choca con la molécula D_2 se forma el ión $dd\mu$ como uno de los núcleos de la molécula compleja; esta molécula podría absorber la energía de amarre expulsando a un electrón a alta energía, (mecanismo relativamente poco probable). Otro posible mecanismo de absorción

de energía se da cuando la suma de la energía de amarre E_b del ión $dd\mu$ y la energía cinética E_k del deuterio muónico $d\mu$, que choca con un deuterio de la molécula D_2 , es lo suficientemente pequeña para que pueda ser absorbida en uno de los niveles rotacional y vibracional de la molécula compleja

$$E_b + E_k = \Delta E. \quad (1.14)$$

Debido a que los niveles de energía de la molécula están cuantizados, la expresión anterior es la condición de resonancia para que se pueda formar el ión muónmolecular $dd\mu$. La dependencia con la temperatura aparece a través del término E_k que es la energía cinética del átomo muónico.

Cálculos teóricos muestran que existe un estado del ión muónmolecular $dd\mu$ con una energía de amarre de 1.91 eV ($(\nu, k) = (1, 1)$), esta energía es menor que la energía de disociación de la molécula D_2 , la cual es de 4.5 eV. Gracias a este hecho puede ser factible el fenómeno de formación resonante de la molécula $[(dd_\mu)d_2e]_{\nu k}^*$.

La razón de formación del ión $dd\mu$, $\lambda_{dd\mu}$, (vease figura 1), es la suma de la contribución no resonante (la energía de amarre liberada se transforma a través de un proceso de Auger en energía cinética de un electrón en la molécula D_2), y la contribución resonante:

$$\lambda_{dd\mu} = \lambda_{no\ res} + \lambda_{res}$$

(1.15)

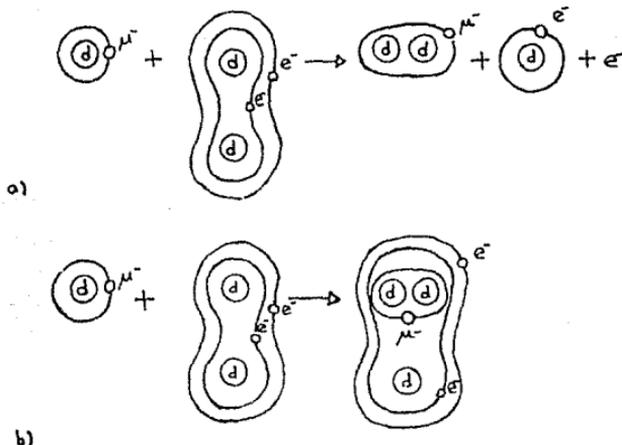


Fig.1.1 Mecanismo de formación del ion $dd\mu$: a) Proceso no resonante (Auger)
b) Proceso resonante

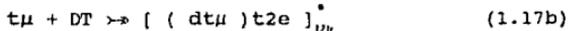
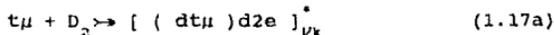
También se han realizado experimentos más detallados, en los cuales se toma en cuenta la estructura hiperfina de los átomos muónicos y los iones muónmoleculares. Así, se pueden mencionar los trabajos que al respecto se han hecho, Breunlich et al (1984) [19], Lederman y colaboradores (1963) [20].

1.2.3 Reacción d-t

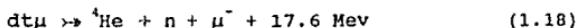
En una mezcla de deuterio y tritio a la que se inyectan muones ocurre la reacción de fusión mediante el siguiente proceso: el muón choca con un electrón de un núcleo de deuterio, y lo desplaza para formar un deuterio muónico $d\mu$; después, debido a que el deuterio muónico choca con otros átomos, ocurre con alta probabilidad que a través de los choques que el muón se transfiere al tritio,



después el átomo muónico $t\mu$ al chocar con una molécula de deuterio D_2 o con una molécula de deuterio-tritio DT puede formar un ión muónmolecular dentro de la molécula mediante el proceso de resonancia:



Posteriormente dentro del ión muónmolecular ocurre la fusión de un núcleo de deuterio y uno de tritio con la consecuente liberación de energía:



Debido a que en este tipo de reacciones se ha observado una elevada razón de formación resonante $dt\mu$, se han efectuado gran cantidad de experimentos al respecto, así, por ejemplo, en Los Alamos Meson Physics Facility (LAMPF) [21],[22],[23],[24] y [25], se encontró que un solo muón puede catalizar del orden de 100 fusiones.

CAPITULO II

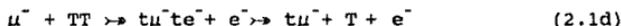
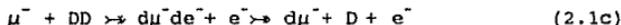
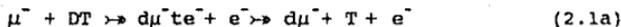
DESCRIPCION MICROSCOPICA DE LOS PROCESOS QUE OCURREN EN LA FUSION NUCLEAR CATALIZADA POR MUONES

II.1

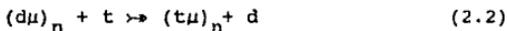
FORMACION DE ATOMOS MUONICOS

En una mezcla de deuterio y tritio se pueden formar tres tipos diferentes de moléculas como deuterio-tritio (DT), deuterio-deuterio (DD ó D_2) y tritio-tritio (TT ó T_2). Como hemos visto, cuando se inyectan muones energéticos en dicha mezcla, ocurre que estos se termalizan a consecuencia de las colisiones hasta tener la energía suficientemente baja para desplazar a un electrón de la molécula (proceso de AUGER). El muón como el electrón sólo puede estar en ciertas orbitas estables, en la teoría del átomo de hidrógeno se encuentra que el radio promedio para el estado base al cual se localiza un electrón del núcleo atómico es $a_0 = h/m_e^2$, conocido también como radio de Bohr, donde m_e es la masa reducida del sistema núcleo-electrón, debido a que $m_e \ll m_{\text{nucleo}}$ la masa reducida es aproximadamente la masa del electrón, entonces $a_0 = h/m_e^2$, en el caso de un átomo muónico $a_\mu = h/207m_e^2$, esto significa que el muón está 207 veces más cerca del núcleo que un electrón.

El muón, al quedar en una orbita más cercana a un núcleo de una molécula, libera energía y ocasiona que la molécula se disocie y se forma propiamente el átomo muónico y un átomo normal, este átomo muónico está formado por un núcleo de deuterio ó de tritio y un muón,



Debido a que el núcleo de tritio es de mayor masa que el núcleo de deuterio, la masa reducida del sistema núcleo de tritio más muón es mayor que el sistema núcleo de deuterio más muón, por lo que los radios promedios del muón de los estados estacionarios alrededor del tritio son menores que los radios correspondientes del muón alrededor de deuterio, y es por esta razón que muchos muones que originalmente estaban ligados a un núcleo de deuterio se transfieren, después de varios choques a núcleos de tritio:



donde la n significa que el átomo muónico formado puede estar en un estado excitado n.

El átomo muónico viaja a través de la mezcla, si el muón se transfiere al tritio, se libera una energía de aproximadamente $\Delta E_n = 47/n^2$ eV superior a la energía cinética de los átomos a la temperatura T ($\gg c_T = (3/2)KT$), con T cercana a la temperatura ambiente. Este átomo muónico viaja a través de la mezcla $D_2 + T_2$ y choca con alguna de las moléculas formadas (D_2 , T_2 ó DT) para formar un ión muónmolecular. Con el propósito de estudiar los niveles de energía de los iones, se han usado diversas técnicas y métodos de resolver el problema, que es un problema de tres cuerpos.

El hamiltoniano de un sistema coulombiano de tres cuerpos [26], núcleo a, núcleo b y un muón es

$$H = -\frac{1}{2M_a} v_{R_a}^2 - \frac{1}{2M_b} v_{R_b}^2 - \frac{1}{2m_\mu} v_{R_\mu}^2 - \frac{1}{|r_\mu - R_a|} - \frac{1}{|r_\mu - R_b|} + \frac{1}{|R_a - R_b|}, \quad (2.3)$$

en donde se usan las unidades $\hbar=e=1$. Al hacer un cambio de coordenadas al centro de masa, coordenadas internucleares y coordenadas del muón respecto al punto medio de los nucleos (figura 1.1), i.e.

$$R = (m_\mu R_\mu + M_a R_a + M_b R_b) / (m_\mu + M_a + M_b), \quad (2.4a)$$

$$R = R_b - R_a, \quad (2.4b)$$

y

$$r = r_\mu - (R_a + R_b) / 2 \quad (2.4c)$$

el hamiltoniano queda de la siguiente forma:

$$H = -\frac{1}{2M_T} v_R^2 - \frac{1}{2M_0} (v_R + \frac{K}{2} v_r)^2 - \frac{1}{2m_0} v_r^2 - \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} + \frac{1}{R} \quad (2.5)$$

donde:

$$M_T = m_\mu + M_a + M_b; \quad M_0^{-1} = M_a^{-1} + M_b^{-1}; \quad m_0^{-1} = m_\mu^{-1} + (M_a + M_b)^{-1}$$

$$K = (M_b - M_a) / (M_b + M_a); \quad r_a = r_\mu - R_a \quad \text{y} \quad r_b = r_\mu - R_b.$$

Después de separar la ecuación para el centro de masa, la ecuación de Schrödinger queda (Bracci y Fiorntini, 1981 [27])

$$H\psi(r, R) = E\psi(r, R) \quad (2.6)$$

con

$$H = -\frac{1}{2M_0} (\nabla_R + \frac{K}{2} \nabla_r)^2 - \frac{1}{2m_0} \nabla_r^2 - \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} + \frac{1}{R} \quad (2.7)$$

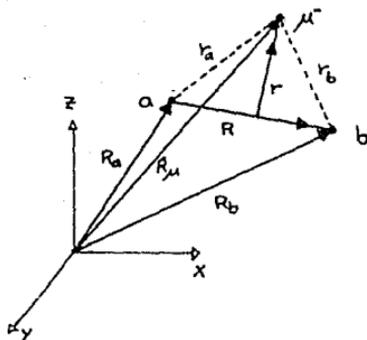


Figura 2.1

Para determinar los niveles de energía se tienen que encontrar los valores propios de la ecuación anterior, para el caso que nos interesa ha sido analizada utilizando diversas técnicas aproximativas, entre otras, la aproximación de Born-Oppenheimer [28], la aproximación adiabática [29],[30], en la que a su vez se hace un tratamiento perturbativo [29], y se aplica el método de dos niveles efectivos [31] o el de truncamiento [32].

El METODO DE BORN-OPPENHEIMER consiste en descomponer la función de onda en una parte electrónica y en una parte nuclear,

$$\Psi(r,R) = \sum_m \varphi_m(R) \psi_m(r,R),$$

y en considerar primero a los núcleos fijos (es decir que los

nucleos son de mucho mayor masa que el muón). Las ecuaciones para cada parte estan acopladas, así entonces

$$\left(-\frac{1}{2m_0} \nabla_r^2 + V(r, R) \right) \psi_n = \epsilon_n(R) \psi_n \quad (2.8)$$

y

$$\hat{T}_R \varphi_n + \epsilon_n(R) \varphi_n = E \varphi_n \quad (2.9)$$

donde $\varphi_n(R)$ es la función de onda nuclear y $\psi_n(r, R)$ es la función de onda electrónica o muónica, \hat{T}_R es el operador energía cinética de los núcleos, ϵ_n es la energía electrónica a la distancia R y $V(r, R)$ es el potencial nuclear.

Se propone un modelo para la energía electrónica $\epsilon_n(R)$ alrededor del punto de equilibrio del ión ($R=R_0$), de tal forma que reproduzca las propiedades básicas y que sea matemáticamente sencillo. Así entonces, frecuentemente se utiliza una aproximación conocida como potencial de Morse [33], que tiene la forma

$$\epsilon(R) = -D + D \left[\exp(-(R-R_0)/a) - 1 \right]^2,$$

donde D es la energía de disociación y R_0 es la distancia de equilibrio. Para estudiar el movimiento de los núcleos alrededor de la distancia de equilibrio R_0 , el potencial anterior se desarrolla en serie de potencias alrededor del punto R_0 , así entonces

$$\epsilon_n(R) \approx -D + (1/2) M \omega_0^2 (R-R_0)^2,$$

donde M es la masa nuclear reducida, $D = -\epsilon_n(R_0)$ y

$$M \omega_0^2 = \left(\partial^2 \epsilon_n / \partial R^2 \right)_{R=R_0}$$

Esta aproximación es de tipo oscilador armónico. La ecuación que se obtiene es,

$$\frac{\nabla^2 \varphi}{2M} + 2M [E + D - (1/2)M\omega^2(R-R_0)^2] \varphi = 0. \quad (2.10)$$

Al descomponer $\varphi(R)$ en su parte angular y su parte radial y haciendo el cambio de variable $\varphi(R) = u/R$, se obtiene la ecuación para la parte radial

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + 2M \left[E + D - \frac{1}{2}M\omega^2(R-R_0)^2 - \frac{J(J-1)}{2MR^2} \right] u = 0. \quad (2.11)$$

En esta aproximación los valores propios de la energía del sistema están dados por

$$E_{J\nu} = -D + \omega \left(\nu + \frac{1}{2} \right) + \frac{J(J+1)}{2MR_0^2} \quad (2.12)$$

donde ω es el número cuántico vibracional y J es el número cuántico rotacional, con los valores para las constantes se encuentra que existen estados ligados, i.e. $E_{J\nu} < 0$, para $\nu=0$ y $J=0,1$, $E_{00} = -278\text{eV}$ y $E_{10} = -143\text{eV}$. Esto está en desacuerdo con mediciones experimentales de los espectros de moléculas donde se observa mayor número de estados ligados.

La aproximación de *BORN-OPPENHEIMER* falla debido al hecho de que la función de onda del sistema de tres cuerpos no se puede expresar adecuadamente como un producto de una función nuclear por una función electrónica. Otra posible solución al problema es usar la *REPRESENTACION ADIABATICA* que consiste en expandir la función de onda por medio de un conjunto completo de funciones propias del

Hamiltoniano:

$$h_0(R) = -(1/2m_0)\nabla_r^2 - 1/r_a - 1/r_b \quad (2.13)$$

Al conjunto completo de estas funciones (φ) se le llama la base adiabática. La función de onda del sistema expandida en la base adiabática queda como

$$\Psi_{n\tau}(r, R) = R^{-1} \sum_{a=0}^J D_{aa}^J(\phi, \theta, \varphi) \times \sum_{l=a, b} \sum_{n_2=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} \varphi_{Jl}(\xi, \eta; R) \chi_{Jl}^{n\tau}(R) + \int_0^{\infty} dk \varphi_{a1}(\xi, \eta, k, R) \chi_{a1}^{n\tau}(k, R) \right\} \quad (2.14)$$

donde D_{aa}^J son las funciones de Wigner normalizadas

$$D_{aa}^J = (4\pi(1 + \delta_{aa}))^{-1/2} [(-1)^a \exp(im\varphi) D_{-ra}^J(\phi, \theta, 0) + \exp(-im\varphi) D_{ra}^J(\phi, \theta, 0)] \quad (2.15)$$

donde (n) son los números cuánticos referentes al movimiento muónico alrededor de los núcleos y (τ) son los números cuánticos que describen el movimiento nuclear.

El problema radica posteriormente en evaluar los niveles de energía del sistema propiamente dicho; usando *TEORIA DE PERTURBACIONES* se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales para las $\chi_{Jl}^{n\tau}$'s. De este sistema se obtienen las correcciones a la energía. También se han utilizado la *APROXIMACION DE DOS NIVELES EFECTIVOS*, el método de *TRUNCAMIENTO* y el método *VARIACIONAL*.

Como ejemplo se muestran en la tabla 2.1 algunos resultados para diferentes iones y diversos estados vibracionales y rotacionales.

Tabla 2.1

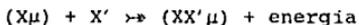
$J\nu$	(pp μ)	(pd μ)	(pt μ)	(dd μ)	(dt μ)	(tt μ)
00	252.95	221.52	213.97	325.04	319.15	362.95
01	—	—	—	35.80	34.87	83.88
10	106.96	97.40	99.01	226.61	232.44	289.15
11	—	—	—	1.91	0.64	45.24
20	—	—	—	86.32	102.54	172.65
30	—	—	—	—	—	48.70

Espectro teórico de diversos iones calculado con el método de truncamiento.
(La energía esta en eV, Melezhit et al. 1981)

El estado más debilmente ligado corresponde en los iones dd μ , dt μ y tt μ al estado $J=1, \nu=1$, y como se muestra en la tabla 2.1 tienen 1.91, 0.64 y 45.24 eV respectivamente.

También se han calculado las correcciones a los niveles de energía debidas a diferentes fenómenos microscópicos como el movimiento relativista del muón, el tamaño finito y la polarización del núcleo, efectos de espín, apantallamiento electrónico y la polarización del vacío. Estas correcciones son pequeñas, del orden de meV.

La formación de iones muónmoleculares ocurre a través de la colisión:



donde $X, X' = p, d \text{ ó } t$.

El proceso de formación del ión se clasifica de acuerdo al camino en que la energía de amarre es liberada, esta energía se puede transferir a un electrón (proceso de AUGER ó no resonante) o puede ser transferida a la molécula que aloja al ión (proceso resonante) como se explicó anteriormente.

De acuerdo a los datos experimentales el proceso no resonante explica la formación de los iones ($pp\mu$) y ($pd\mu$), y el proceso resonante explica la formación de los iones ($dd\mu$) y ($dt\mu$).

Como un resumen de los resultados teóricos y experimentales que dieron lugar a la interpretación de que el proceso de formación de los iones $pp\mu$ y $pd\mu$ es no resonante, se muestra la tabla 2.2. Ahí aparecen tanto resultados experimentales como teóricos de la razón de formación de los iones mencionados (L. Bracci y G. Fiorentini, Phys. Reports, 1982), y se puede observar que ambos concuerdan. Esto sin embargo no ocurre con $\lambda_{dd\mu}$ y $\lambda_{dt\mu}$.

tabla 2.2

fuelle	$\lambda_{pp\mu}$ 10^6seg^{-1}	$\lambda_{pd\mu}$ 10^6seg^{-1}
Dzhelepov et al.(1962) Exp. T. A.	1.5 ± 0.6	
Bleser et al.(1963) Exp. T. H. L.	1.89 ± 0.20	5.8 ± 0.3
Conforto et al.(1964) Exp. T. H. L.	2.55 ± 0.18	6.82 ± 0.25
Bodyashov et al.(1968) Exp. T. A.	2.74 ± 0.25	
Bystritsky et al.(1975) Exp. T. A.	2.34 ± 0.17	5.53 ± 0.16
Cohen et al. Teórico	3.9	3.0
Zel'dovich y Gershtein(1960) Teórico	2.6	1.3
Ponomarev y Faifman(1976) Teórico	2.20	5.91

Razones de formación de los iones (ppμ) y (pdμ), los valores experimentales fueron obtenidos a temperatura ambiente (T.A.) y a la temperatura del hidrógeno líquido (T.H.L.).

II.3.1

FORMACION RESONANTE

Anteriormente se mostró que el estado débilmente ligado del ión (ddμ) es (J,ν)=(1,1) con una energía de amarre de 1.91eV que es menor que la energía de disociación de una molécula de hidrógeno,

$$E_{01s} = 4.5\text{eV}$$

Este hecho muestra la posibilidad de que exista otro mecanismo de transferencia de energía además del proceso de AUGER tal como el de la transferencia de energía a uno de los niveles rotacionales y vibracionales de la molécula [(ddμ)d2e],

$$(d\mu) + D_2 \rightarrow [(dd\mu)d_2e] \quad (2.16)$$

El nombre de resonante proviene del hecho de que la transferencia sólo es posible para ciertas energías del átomo muónico. Esto ocurre cuando la energía cinética ϵ_R del átomo muónico más la energía de amarre E_b del ión formado es igual a la energía ΔE de uno de los niveles rotacional y vibracional de la molécula,

$$\epsilon_R + E_b = \Delta E$$

Es debido a esta condición que existe una dependencia de la razón de formación del ión ($dd\mu$) con la temperatura. El máximo de la razón de formación aparecera entonces cuando la temperatura del deuterio corresponde a la energía cinética adecuada para que se de la resonancia. La razón de formación del ión ($dd\mu$), $\lambda_{dd\mu}$, es entonces la suma de la contribución no resonante que depende débilmente de la temperatura más la contribución resonante, que depende fuertemente de ella, así

$$\lambda_{dd\mu} = \lambda_{no\ res} + \lambda_{res}$$

Además de los fenómenos ya mencionados existen otros que se tienen que tomar en cuenta para un cálculo más detallado de $\lambda_{dd\mu}$. Por ejemplo, en un gas de deuterio las moléculas D_2 tienen diferentes niveles rotacionales y vibracionales, que siguen una distribución de Boltzmann, la formación de los iones ($dd\mu$) ocurre entonces a diferentes energías resonantes ϵ_R , y la razón de formación es entonces una superposición de las diferentes energías a las que se forma el ión. También son importantes las correcciones

en la energía debido a la estructura hiperfina de los átomos y de los iones, esto significa que existe un "desdoblamiento" de los niveles de energía debido al efecto del espín de las partículas.

11.3.2

FORMACION DEL ION MUONMOLECULAR $dt\mu$

Calculos teóricos predicen un estado débilmente ligado en el ión ($dt\mu$) el cuál es $(J, \nu) = (1, 1)$ y corresponde a una energía $E_b = (0.64 \pm 0.05) \text{eV}$. La formación resonante para este ión también es altamente probable por que su energía de amarre es muy pequeña. La molécula compleja que aloja al ión ($dt\mu$) se excita a un estado con un número molecular vibracional, ν_H , más pequeño que en el caso de la formación del ión ($dd\mu$), se ha calculado $\nu_H = 3$ (Ponomarev (1981)).

La razón de formación del ión ($dd\mu$), $\lambda_{dd\mu}$, es del orden de 10^6s^{-1} y para el ión ($dt\mu$) se predijo una razón del orden de 10^8s^{-1} (Gershtein y Ponomarev (1981) [34]). Experimentalmente midiendo la producción de neutrones se encontró un límite inferior para la razón de formación, que confirma la predicción de Gershtein y Ponomarev (1977) [9], $\lambda_{dt\mu} \geq 2 \times 10^8 \text{s}^{-1}$

De los calculos teóricos se desprende que la producción de neutrones no es muy sensible a la razón de formación muónmolecular $\lambda_{dt\mu}$. Se realizaron experimentos en el intervalo de $93 - 613 \text{ }^\circ\text{K}$ y no se observó variación en la producción de neutrones. Este es un resultado diferente al de la formación del ión ($dd\mu$) donde se observa que $\lambda_{dd\mu}$ depende fuertemente de la temperatura. Para

explicar por que $\lambda_{dt\mu}$ no varia con la temperatura se tienen dos hipótesis, la primera dice que la razón de formación $\lambda_{dt\mu}$ sí cambia con la temperatura de acuerdo al modelo resonante, pero los cambios apreciables ocurren a temperaturas más elevadas que las investigadas. La otra, señalada por Ermolov, dice que los átomos muónicos ($t\mu$) formados a través de la reacción



tienen una energía de 19 eV y no alcanzan a tener la energía térmica antes de formarse el ión muónmolecular ($dt\mu$), esto explicaría que las variaciones en la temperatura de la mezcla no corresponden a las variaciones en la energía cinética del átomo muónico ($t\mu$).

Cuando el ión ($dt\mu$) está en el estado débilmente ligado ($(J,\nu)=(1,1)$), los núcleos de deuterio y tritio están en promedio unas 200 veces más cerca que una molécula normal de deuterio (D_2) ó tritio (T_2), en estas condiciones el sistema pasa de un estado débilmente ligado a otro más ligado que es el estado ($J,\nu)=(0,0)$ el más probable con una energía de 319.15 eV, esta energía se transfiere a un electrón orbital. Al quedar más ligado el sistema aumenta la probabilidad de penetración coulombiana de los núcleos y se produce la fusión muy rápidamente,



En una molécula normal de deuterio-tritio el potencial de interacción tiene una forma como la mostrada en la figura 1.2. Este potencial es atractivo alrededor de $r \approx 10^{-8}$ cm, para distancias menores es repulsivo debido al término centrífugo $\hbar^2 l(l+1)/r^2$, y para distancias aún menores, del orden $r \leq 10^{-13}$ cm el potencial se vuelve atractivo debido a las fuerzas nucleares que

son de corto alcance y muy intensas.

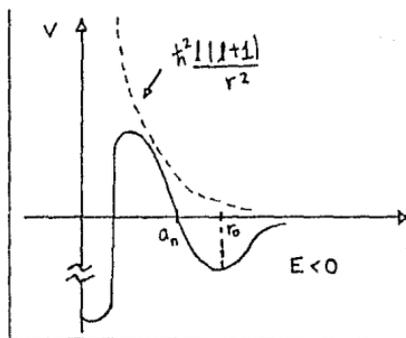


Figura 2.2

Grafica del potencial para una molécula de hidrógeno

Si la molécula está en un estado ligado, es decir $E < 0$, existe la probabilidad de que ocurra la fusión, esta probabilidad depende de la altura de la barrera, del ancho de la misma y de la energía cinética de los núcleos, el muón por estar más cerca en promedio de cada núcleo por apantallamiento contrarresta parte de la repulsión electrostática entre los núcleos, esto ocasiona que los núcleos se acerquen más entre sí. El efecto es que la barrera coulombiana (figura 1.3) se reduce y aumenta la probabilidad de penetración y con ello la fusión de los núcleos.

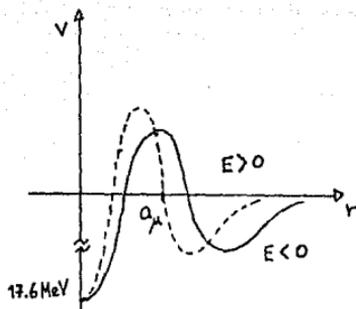


figura 2.3

La energía liberada en la fusión de los núcleos de deuterio y tritio se distribuye entre los productos ${}^4\text{He}$, un neutrón y el muón que puede seguir catalizando más reacciones de fusión.

La formación del ión $\text{dt}\mu$ previa a la fusión tiene claramente un límite de temperatura debido a que las moléculas D_2 , DT ó T_2 de la mezcla se pueden disociar; cuando esto ocurre la formación de dicho ión no se puede llevar a cabo por medio de la formación resonante, y aunque sin embargo existe la posibilidad de que se lleve a cabo la fusión directa de los átomos $\text{d}\mu + \text{t}$ ó $\text{t}\mu + \text{d}$, la probabilidad de que esto ocurra sólo es relevante si la temperatura y la densidad del medio son muy altas. Lo anterior llevaría al tratamiento usual de plasmas termonucleares.

En los procesos anteriormente mencionados que limitan el número de fusiones, es importante considerar además el proceso de la adhesión (o "sticking"). Este fenómeno consiste en que el muón se quede pegado a alguno de los productos de la fusión de carga positiva. En el caso de la fusión del ión $d\mu$ el muón puede quedarse adherido al helio 4 (partícula α) y formar un ión o un átomo de helio ($\alpha\mu$ ó ${}^4\text{He}\mu$). De esta forma el muón permanece pegado al helio y entonces ya no puede seguir catalizando más reacciones de fusión.

Bracci y Fiorentini en 1981 hicieron estudios teóricos preliminares para calcular la probabilidad de adhesión ω para el caso del ión $d\mu$ y encontraron que $\omega = 1.2\%$. Así entonces un muón en promedio se queda pegado a un núcleo de helio después de catalizar 80 reacciones de fusión.

Para determinar el número efectivo de reacciones de fusión que un muón puede catalizar se han hecho estudios acerca de la posibilidad de que el muón se libere del núcleo de helio después de estar pegado. El ión ($\alpha\mu$) se forma casi inmediatamente después que ocurre la fusión con una energía de 3.5 MeV y viaja a través del gas chocando con las moléculas que lo rodean, de esta forma va perdiendo energía. Mientras su energía sea superior a un valor umbral mínimo, el muón puede ser desprendido de la partícula α y de esta forma seguir catalizando más reacciones de fusión. Por lo tanto, la probabilidad de que el muón una vez adherido al helio 4 permanezca así después de termalizarse es menor a ω , así

$$\omega_{err} = (1-R)\omega_{\mu},$$

donde R es la eficiencia de reactivación, luego entonces, ω_{err} es la que realmente determina el número de fusiones por muón. Además del fenómeno de despojo el muón también puede ser liberado por ionización directa.

Se ha calculado la eficiencia de reactivación R, en $R = 0.24$ con un error relativo del 20% (Bracci y Fiorentini (1981) (21)). El grupo de Gershtein en 1981 también ha reportado un valor de la eficiencia de reactivación para el ión $dt\mu$ de $R = 0.23$. Dentro de los límites de aproximación éstos valores concuerdan entre sí.

Con los valores anteriores se encuentra que $\omega_{err} = 0.91\%$, esto significa que un muón, a lo más, puede catalizar 110 reacciones de fusión antes de ser atrapado por un núcleo de helio 4. En la actualidad los esfuerzos se concentran en como entender mejor que factores determinan la producción de neutrones y especialmente como influye ω_{μ} en dicha producción, también se trata de entender como depende ω_{μ} de la concentración, de la densidad para poder de esta forma optimizar los experimentos y obtener más fusiones por muón.

El esquema general de todos los procesos que ocurren en la fusión nuclear catalizada por muones (f.n.c.m.) en una mezcla de deuterio-tritio (D_2+T_2), para cualquier densidad y concentración de los componentes se muestra en la figura 1.4, Ahí $\lambda_0 = 0.455 \times 10^6 s^{-1}$ es la razón de decaimiento del muón, $\varphi = N/N_0$ es la razón de la densidad de los núcleos de la mezcla (N) a la densidad del hidrógeno líquido ($N_0 = 4.25 \times 10^{22} cm^{-3}$); λ_a es la razón de captura del muón en una orbita k de un átomo de deuterio o tritio a la densidad N (λ_a^0 es la razón de captura con respecto a la densidad N_0), λ_{dt} es la razón de intercambio isotópico $d\mu + t \rightarrow t\mu + d$; $\lambda_{dt\mu}, \lambda_{dd\mu}, \lambda_{tt\mu}$ son las razones de formación de los iones muónmoleculares $dt\mu$, $dd\mu$ y $tt\mu$ respectivamente; C_d y C_t son las concentraciones de deuterio y tritio ($C_d + C_t = 1$), λ_r, λ_{rd} y λ_{rt} son las razones de fusión nuclear de los iones $dt\mu$, $dd\mu$ y $tt\mu$ respectivamente (promediadas sobre todos los estados de espín de los iones), $\omega_d, \omega'_d, \omega_t$ y ω_n son los coeficientes de adhesión de los muones a los productos cargados de la fusión de las reacciones nucleares representadas en la figura 1.4. Por otro lado $N_\mu = N_\mu(t)$ es el número de muones libres al tiempo t, $N_{d\mu}$ y $N_{t\mu}$ el número de deuterios muónicos y tritios muónicos, $N_{dt\mu}$, $N_{dd\mu}$ y $N_{tt\mu}$ el número de iones muónmoleculares $dt\mu$, $dd\mu$ y $tt\mu$; finalmente N_n, N_{nd} y N_{nt} representan el número de neutrones emitidos en las reacciones de fusión de los iones $dt\mu$, $dd\mu$ y $tt\mu$ respectivamente.

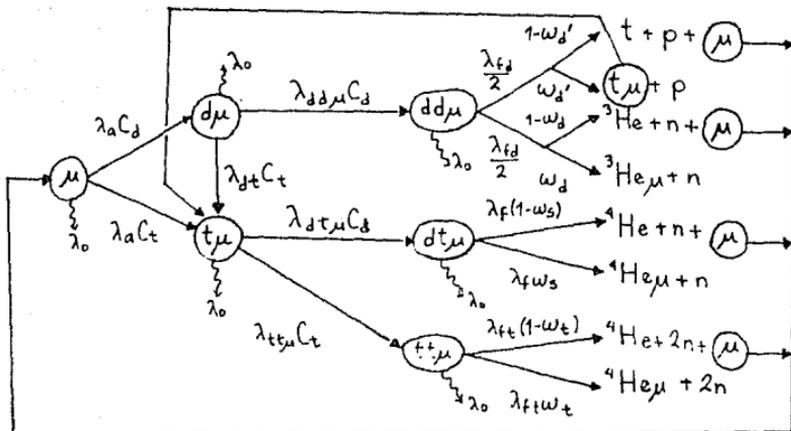
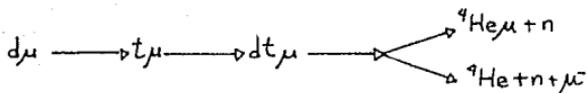


Figura 2.4

El estado débilmente ligado del ión $dd\mu$ corresponde a una energía de 1.91eV la cual es mayor que la energía de amarre correspondiente para el ión $dt\mu$ de 0.64 eV, por lo que se espera que la razón de formación de los iones $dt\mu$ sea mayor. Experimentalmente se ha encontrado que $\lambda_{d\mu} \approx 10^9 \text{s}^{-1}$, $\lambda_{dd\mu} \approx .8 \times 10^6 \text{s}^{-1}$ y $\lambda_{tt\mu} \approx 3 \times 10^6 \text{s}^{-1}$, esto indica que ocurrirán más fusiones debidas al ión $dt\mu$ y entonces la cadena principal en la f.n.c.m. en una mezcla de deuterio-tritio es,



Dado que las reacciones involucradas en los procesos de la f.n.c.m. son de naturaleza probabilística, es necesario estudiar estadísticamente las reacciones de fusión en una mezcla $D_2 + T_2$ cuando se inyectan muones, cada variable $(N_\mu, N_{d\mu}, \dots, N_n, N_{nd}, N_{nt})$ representa una especie en el conjunto de procesos que ocurren en la f.n.c.m., estas variables no son independientes unas de otras es decir están correlacionadas, por que por ejemplo el número de iones $dt\mu$ que hay en un instante dado depende del número de átomos muónicos $t\mu$ ó $d\mu$ formados instantes antes.

En el capítulo III se estudiará estadísticamente la cinética de la f.n.c.m. considerandola un proceso estocástico y con la suposición simplificada de que la rama principal es la más importante.

Así pues se estudiara no sólo el comportamiento promedio de la población de las diversas especies involucradas en los procesos de la f.n.c.m. sino también las dispersiones de éstas cantidades alrededor de sus valores promedio.

CAPITULO III.

III.1

CONCEPTOS ESTADISTICOS BASICOS

En general las variables dinámicas que describen el comportamiento de un sistema físico, siempre tienen fluctuaciones alrededor de sus valores promedio aún cuando el sistema está en estado de equilibrio. En muchas ocasiones estas fluctuaciones son indeseables y tratan por lo tanto de eliminarse, sin embargo en muchas ocasiones estas fluctuaciones son intrínsecas al sistema y no pueden eliminarse.

En estos casos las fluctuaciones contienen información acerca del sistema en estudio y su análisis estadístico puede dar una visión más completa de este.

Antes de empezar la descripción estadística de la fusión nuclear catalizada por muones conviene recordar en este capítulo algunos conceptos estadísticos útiles.

Brevemente un experimento es definido especificando:

- a) un conjunto $\varphi = \{ \xi_1, \xi_2, \dots \}$ que consta de todos los posibles resultados ξ_i del experimento (este conjunto puede ser discreto y finito, discreto e infinito pero contable o continuo en un intervalo) y
- b) la probabilidad $P(\xi_i)$ asociada a cada resultado ξ_i .

Una variable estocástica Y es definida como un número $Y(\xi)$ asignado a cada realización ξ de un experimento; así una variable estocástica es una función cuyo dominio son todas las posibles realizaciones de un experimento (conjunto φ) y contradominio es formado por un conjunto de números reales (φ_y) .

Un proceso estocástico es una regla que asigna a cada resultado de un experimento una función del tiempo definida en $(-\infty, +\infty)$, y denotada por $Y(t, \xi)$ la cual es llamada función muestra ó realización. Un proceso estocástico ($Y(t)$) es así una familia de funciones dependientes de t y ξ . Cuando t está fija $Y(t, \xi)$ se convierte en una variable estocástica tal como fue definida anteriormente.

Un proceso estocástico es especificado proporcionando las funciones de densidad de probabilidad: $P_1(y, t)$, $P_2(y_1, t_1; y_2, t_2)$, $P_3(y_1, t_1; y_2, t_2; y_3, t_3) \dots P_n(y_1, t_1; \dots; y_n, t_n) \dots$ [35]. Así para especificar completamente un proceso estocástico sería necesario conocer la función de densidad de probabilidad de orden infinito. Esto no es posible en general y se tienen que encontrar las funciones de densidad de probabilidad de orden más bajo y a partir de estas inferir algunas características del proceso.

Existen sin embargo unos procesos los cuales están completamente especificados conociendo su función de densidad de probabilidad de 2o. orden ó conociendo su función de 1er. orden y su función de densidad de probabilidad (Papoulis A., Probability, Random Variables and stochastic Processes, Mc Grawhill, 1964). Estos procesos se conocen como procesos de Markov, y se caracterizan porque los valores futuros de las variables estocásticas sólo dependen de los valores de éstas en el estado presente y no dependen de sus valores en el pasado. Esto se puede expresar matemáticamente de la siguiente forma:

Si $y(t)$ describe el estado de un sistema al tiempo t y $y(t)$ es una variable estocástica, entonces $y(t)$ describe un proceso de

Markov, si para una sucesión de tiempos

$$t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n,$$

la probabilidad condicional de que al tiempo t_n la variable $y(t)$ tome el valor y_n , habiendo tomado los valores y_{n-1} a t_{n-1} , y_{n-2} a t_{n-2} , ..., y_1 a t_1 , esta expresada por

$$P_n(y_n, t_n | y_{n-1}, t_{n-1}; \dots; y_1, t_1) = P_2(y_n, t_n | y_{n-1}, t_{n-1}) \quad (3.1)$$

Se puede demostrar que si el proceso es Markoviano la probabilidad condicional $P_2(y, t | y_0, t_0)$ satisface una ecuación de continuidad llamada ecuación maestra, esta tiene la forma siguiente :

$$\frac{\partial P_2(y, t | y_0, t_0)}{\partial t} = \sum_{y'} [W_t(y' \rightarrow y) P_2(y', t | y_0, t_0) - W_t(y \rightarrow y') P_2(y, t | y_0, t_0)] \quad (3.2)$$

donde $W_t(y' \rightarrow y)$ es la probabilidad de transición por unidad de tiempo para pasar del estado y' al estado y . De ahora en adelante denotaremos la probabilidad condicionada $P_2(y, t | y_0, t_0)$ por $P(y, t)$.

La ecuación maestra puede obtenerse a partir de la ecuación de Chapman-Kolmogorov[35] considerando que se trata de un proceso de Markov, i. e.

$$P_2(y, t | y_0, t_0) = \sum_{y'} P_2(y, t | y', t') P_2(y', t' | y_0, t_0) \quad (3.3)$$

la cual se obtiene a su vez a partir de la relación entre las densidades de probabilidad P_3 y P_2 , para nuestro caso de interes, es decir cuando la variable y toma valores discretos,

$$P_2(y, t; y_0, t_0) = \sum_{y'} P_3(y, t; y', t'; y_0, t_0) \quad (3.4)$$

$$t \geq t' \geq t_0$$

La ecuación maestra se puede expresar en forma vectorial siendo $\bar{y}(t)$ ahora un vector cuyas componentes son variables estocásticas evaluadas al tiempo t . Este será el caso cuando tratemos el fenómeno de la fusión nuclear catalizada por muones.

En muchas situaciones resulta más útil encontrar la ecuación para la función generadora de probabilidad (f.g.p.) que para la función de densidad de probabilidad. La función generadora de probabilidad para el caso en que $\bar{y}(t)$ tiene m componentes, está definida como:

$$G(x_1, x_2, \dots, x_m, t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_3=0}^{\infty} \dots \sum_{n_m=0}^{\infty} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots x_m^{n_m} P(\bar{y}, t) \quad (3.5)$$

donde $\bar{y} = (n_1, n_2, \dots, n_m)$

De esta forma multiplicando la ecuación maestra por $x_1^{n_1}$, $x_2^{n_2}, \dots, x_m^{n_m}$ y sumando sobre todos los valores de n_1, n_2, \dots, n_m se obtiene una ecuación para la función generadora de probabilidad.

La ventaja de usar la función generadora de probabilidad es que además de que contiene la misma información de los procesos estocásticos que la función de densidad de probabilidad y satisface una ecuación que es en general más fácil de resolver que la ecuación maestra. Toda la información estadística de los procesos $\{\bar{y}(t)\}$ como los promedios, las varianzas y momentos de orden mayor, pueden ser obtenidos de la f.g.p. tomando las derivadas de G con respecto a cada variable x evaluando todas las variables en $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 1$.

III.2 ESTADÍSTICA DE LA FUSION NUCLEAR CATALIZADA POR MUONES

En la figura 2.1 se muestra la cinética del proceso de la fusión nuclear catalizada por muones en una mezcla de deuterio-tritio, los valores experimentales (que aproximadamente coinciden con las predicciones teóricas) para las razones de formación de los iones muónmoleculares $dd\mu$, $dt\mu$ y $tt\mu$ son: $\lambda_{dd\mu} \sim 0.8 \times 10^6 \text{s}^{-1}$, $\lambda_{dt\mu} \sim 10^8 \text{s}^{-1}$ y $\lambda_{tt\mu} \sim 3 \times 10^6 \text{s}^{-1}$.

Estos valores dan lugar a resultados importantes, porque los tiempos de formación de los iones muónmoleculares son del orden o aún menores que la vida media del muón, $t_{\mu} \approx 2.2 \mu\text{s}$, ($\lambda_{\mu} = t_{\mu}^{-1}$).

Se observa que la formación del ión $dt\mu$ en la mezcla $D_2 + T_2$ requiere de menos tiempo que la formación de los otros iones, por lo que la formación de iones de este tipo resulta más favorable para llevar a cabo la fusión; en otras palabras, se forman más iones $dt\mu$ que iones $dd\mu$ ó $tt\mu$ en el mismo intervalo de tiempo, esto nos da una indicación de que la rama principal en la que se pueden obtener más fusiones por unidad de tiempo es aquella en donde se forman los iones $dt\mu$. Los valores tomados para las razones de formación de los iones muónmoleculares $dt\mu$, $dd\mu$ y $tt\mu$ fueron medidos a la densidad del del hidrógeno líquido ($N_0 = 4.25 \times 10^{22} \text{cm}^{-3}$). Existen mediciones de estas razones de formación a otras densidades y a diferentes temperaturas que muestran que en general $\lambda_{dt\mu}$ es aproximadamente dos ordenes de magnitud mayor que las razones de

formación $\lambda_{dd\mu}$ y $\lambda_{tt\mu}$. Cuando se tiene hidrógeno en la mezcla $D_2 + T_2$, las razones de formación de los iones $pt\mu$ y $pd\mu$ son más pequeñas que las consideradas anteriormente. Sin duda entonces la forma más apropiada de intentar la fusión nuclear de isótopos de hidrógeno catalizada por muones es a través de la mezcla $D_2 + T_2$.

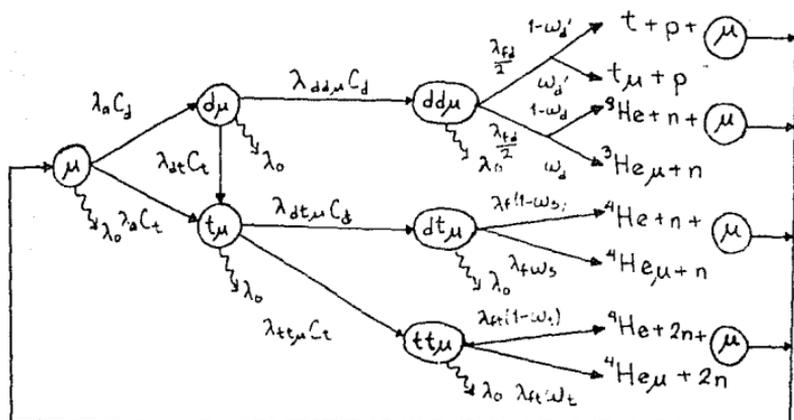


Figura 3.1

En la figura 2.2 se muestra la rama principal para la f.n.c.m., cada proceso se numera para escribir las probabilidades de transición más adelante. En esta cadena se incluye además el caso en que se tiene una fuente externa de muones, S_0 .

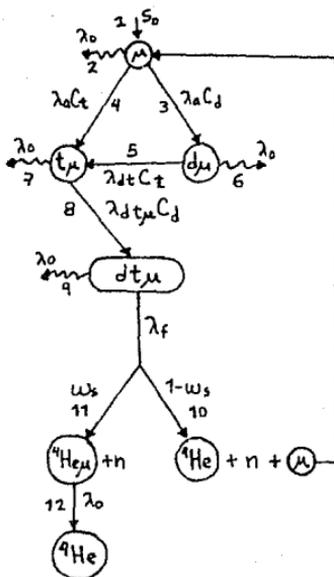


Figura 3.2

Para tratar estadísticamente el conjunto de fenómenos que ocurren en la rama principal, consideremos que el estado de nuestro sistema está caracterizado por la población de cada una de las siguientes 7 especies de la cadena: $N_{\mu} = N_1, N_{d\mu} = N_2, N_{t\mu} = N_3, N_{dt\mu} = N_4, N_{^4\text{He}\mu} = N_5, N_{^4\text{He}} = N_6$ y $N_n = N_7$. Así entonces se define $P(\vec{N}, t) = P(N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, t)$ como la probabilidad de tener N_1 muones, N_2 deuterios muónicos, N_3 tritios muónicos, N_4 iones $dt\mu$, N_5 helios muónicos, N_6 helios 4 y N_7 neutrones al tiempo t .

A continuación se muestra la tabla 2.1 con las probabilidades de transición por unidad de tiempo para cada proceso de la figura 2.2. Con la finalidad de escribir la ecuación maestra para este

conjunto de fenómenos cada probabilidad de transición está numerada, y corresponde al proceso con el mismo número en la figura 2.2. La transición es partir del estado $\bar{N} = (N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7)$ hacia el estado \bar{M} , que corresponde a cada renglón de la tabla. Ahi, δ_{nm} es la delta de kronecker, C_d y C_t son las concentraciones de deuterio y tritio.

Tabla 3.1

Evento	Probabilidad de transición por unidad de tiempo.
	$W_t(\bar{N} \rightarrow \bar{M})$
	$\bar{N} = (N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7)$
$\bar{M} = \begin{pmatrix} 1 & (& N_1 + 1 &) \\ & N_2 & & \\ & N_3 & & \\ & N_4 & & \\ & N_5 & & \\ & N_6 & & \\ & N_7 & & \end{pmatrix}$	$S_0 \delta_{N_1, N_1+1} \delta_{N_2, N_2} \delta_{N_3, N_3} \delta_{N_4, N_4} \delta_{N_5, N_5} \delta_{N_6, N_6} \delta_{N_7, N_7}$
$\bar{M} = \begin{pmatrix} 2 & (& N_1 - 1 &) \\ & N_2 & & \\ & N_3 & & \\ & N_4 & & \\ & N_5 & & \\ & N_6 & & \\ & N_7 & & \end{pmatrix}$	$\lambda_0 N_1 \delta_{N_1, N_1-1} \delta_{N_2, N_2} \delta_{N_3, N_3} \delta_{N_4, N_4} \delta_{N_5, N_5} \delta_{N_6, N_6} \delta_{N_7, N_7}$

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} N_1 - 1 \\ N_2 + 1 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda \Delta C d N_1 \delta_{N_1, N_1 - 1} \delta_{N_2, N_2 + 1} \delta_{N_3, N_3} \delta_{N_4, N_4} \delta_{N_5, N_5} \\ \delta_{N_6, N_6} \delta_{N_7, N_7} \end{matrix}$$

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} N_1 - 1 \\ N_2 \\ N_3 + 1 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda \Delta C t N_1 \delta_{N_1, N_1 - 1} \delta_{N_2, N_2} \delta_{N_3, N_3 + 1} \delta_{N_4, N_4} \delta_{N_5, N_5} \\ \delta_{N_6, N_6} \delta_{N_7, N_7} \end{matrix}$$

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 - 1 \\ N_3 + 1 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda \Delta t C N_2 \delta_{N_1, N_1} \delta_{N_2, N_2 - 1} \delta_{N_3, N_3 + 1} \delta_{N_4, N_4} \delta_{N_5, N_5} \\ \delta_{N_6, N_6} \delta_{N_7, N_7} \end{matrix}$$

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 - 1 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda \Delta N_2 \delta_{N_1, N_1} \delta_{N_2, N_2 - 1} \delta_{N_3, N_3} \delta_{N_4, N_4} \delta_{N_5, N_5} \delta_{N_6, N_6} \delta_{N_7, N_7} \end{matrix}$$

$$7 \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 - 1 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{pmatrix} \quad \lambda_0 N_3 \delta_{N_1, N_1} \delta_{N_2, N_2} \delta_{N_3, N_3 - 1} \delta_{N_4, N_4} \delta_{N_5, N_5} \delta_{N_6, N_6} \delta_{N_7, N_7}$$

$$8 \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 - 1 \\ N_4 + 1 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{pmatrix} \quad \lambda_{d+1} C_d N_3 \delta_{N_1, N_1} \delta_{N_2, N_2} \delta_{N_3, N_3 - 1} \delta_{N_4, N_4 + 1} \delta_{N_5, N_5} \\ \delta_{N_6, N_6} \delta_{N_7, N_7}$$

$$9 \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 - 1 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{pmatrix} \quad \lambda_0 N_4 \delta_{N_1, N_1} \delta_{N_2, N_2} \delta_{N_3, N_3} \delta_{N_4, N_4 - 1} \delta_{N_5, N_5} \delta_{N_6, N_6} \delta_{N_7, N_7}$$

$$10 \begin{pmatrix} N_1 + 1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 - 1 \\ N_5 \\ N_6 + 1 \\ N_7 + 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_r (1 - \omega_n) N_4 \delta_{N_1, N_1 + 1} \delta_{N_2, N_2} \delta_{N_3, N_3} \delta_{N_4, N_4 - 1} \delta_{N_5, N_5} \\ \delta_{N_6, N_6 + 1} \delta_{N_7, N_7 + 1}$$

$$M^I = \begin{pmatrix} 11 & N_1 \\ & N_2 \\ & N_3 \\ N_4 - 1 & \\ N_5 + 1 & \\ & N_6 \\ & N_7 + 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 \omega_{N_4} N_4 \delta_{N_1, N_1} \delta_{N_2, N_2} \delta_{N_3, N_3} \delta_{N_4, N_4 - 1} \delta_{N_5, N_5 + 1} \\ \\ \\ \delta_{N_6, N_6} \delta_{N_7, N_7 + 1} \end{matrix}$$

$$M^I = \begin{pmatrix} 12 & N_1 \\ & N_2 \\ & N_3 \\ N_4 & \\ N_5 - 1 & \\ N_6 + 1 & \\ & N_7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_0 N_5 \delta_{N_1, N_1} \delta_{N_2, N_2} \delta_{N_3, N_3} \delta_{N_4, N_4} \delta_{N_5, N_5 - 1} \\ \\ \\ \delta_{N_6, N_6 + 1} \delta_{N_7, N_7} \end{matrix}$$

Por lo tanto $W(\bar{N} \rightarrow \bar{M})$ es igual a la suma de todas las probabilidades de transición de la tabla 3.1, y sustituyendo en la ecuación 3.2 se obtiene la ecuación maestra para los procesos que se llevan a cabo en la rama principal de la fusión nuclear en la mezcla $D_2 + T_2$ la cual es,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(\bar{N}, t)}{\partial t} = & -(S_0 + \lambda_0 N_1 + \lambda_a N_1 + \lambda_{dt} C_t N_2 + \lambda_0 N_2 + \lambda_0 N_3 + \lambda_{dt\mu} C_d N_3 + \lambda_0 N_4 + \\
& \lambda_r N_4 + \lambda_0 N_5) P(\bar{N}, t) + \\
& S_0 P(N_1 - 1, N_2, N_3, N_4, N_6, N_7, t) + \\
& \lambda_0 (N_1 + 1) P(N_1 + 1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, t) + \\
& \lambda_a C_d (N_1 + 1) P(N_1 + 1, N_2 - 1, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, t) + \\
& \lambda_a C_t (N_1 + 1) P(N_1 + 1, N_2, N_3 - 1, N_4, N_5, N_6, N_7, t) + \\
& \lambda_{dt} C_t (N_2 + 1) P(N_1, N_2 + 1, N_3 - 1, N_4, N_5, N_6, N_7, t) + \\
& \lambda_0 (N_2 + 1) P(N_1, N_2 + 1, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, t) + \\
& \lambda_0 (N_3 + 1) P(N_1, N_2, N_3 + 1, N_4, N_5, N_6, N_7, t) + \\
& \lambda_{dt\mu} C_d (N_3 + 1) P(N_1, N_2, N_3 + 1, N_4 - 1, N_5, N_6, N_7, t) + \\
& \lambda_0 (N_4 + 1) P(N_1, N_2, N_3, N_4 + 1, N_5, N_6, N_7, t) + \\
& \lambda_r (1 - \omega_2) (N_4 + 1) P(N_1 - 1, N_2, N_3, N_4 + 1, N_5, N_6 - 1, N_7 - 1, t) \\
& + \lambda_r \omega_a (N_4 + 1) P(N_1, N_2, N_3, N_4 + 1, N_5 - 1, N_6, N_7 - 1, t) + \\
& \lambda_0 (N_5 + 1) P(N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 + 1, N_6 - 1, N_7, t) . \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Derivemos ahora una ecuación para la función generadora de probabilidad, definida para este caso como

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, t) = \sum_{N_1=0}^{\infty} \sum_{N_2=0}^{\infty} \sum_{N_3=0}^{\infty} \dots \sum_{N_7=0}^{\infty} x_1^{N_1} x_2^{N_2} \dots x_7^{N_7}$$

$$P(N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, t)$$

para ello multiplicamos la ecuación maestra por $x_1^{N_1} x_2^{N_2} x_3^{N_3} \dots x_7^{N_7}$ y sumamos sobre todos los valores posibles de $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$ y N_7 . De esto resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial t} = & S_0(x_1-1)G + [\lambda_0 - (\lambda_0 + \lambda_a)x_1 + \lambda_a C_d x_2 + \lambda_a C_t x_3] \frac{\partial G}{\partial x_1} \\
& + [-(\lambda_{dt} C_t + \lambda_0)x_2 + \lambda_{dt} C_t x_3 + \lambda_0] \frac{\partial G}{\partial x_2} \\
& + [-(\lambda_0 + \lambda_{dt\mu} C_d)x_3 + \lambda_{dt\mu} C_d x_4 + \lambda_0] \frac{\partial G}{\partial x_3} \\
& + [\lambda_0 - (\lambda_0 + \lambda_r)x_4 + \lambda_r(1-\omega_4)x_1 x_6 x_7 + \lambda_r \omega_5 x_5 x_7] \frac{\partial G}{\partial x_4} \\
& + \lambda_0(x_6 - x_5) \frac{\partial G}{\partial x_5} .
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Si se pudiera encontrar la solución analítica de esta ecuación, i.e. la forma de $G(x_1, x_2, \dots, x_n; t)$, se conocerían todas las propiedades estadísticas del proceso estocástico, puesto que la función generadora contiene toda la información que la función de probabilidad condicional contiene y dado que un proceso de Markov está completamente especificado por sus funciones de probabilidad de primer orden y de probabilidad condicional.

En nuestro caso no es posible obtener la solución analítica de la ec. 3.7 y es por eso que es conveniente analizar el comportamiento temporal de un número finito de momentos de la función generadora de probabilidad.

El sistema de ecuaciones para los promedios $\langle N_1 \rangle$, $\langle N_2 \rangle$, $\langle N_3 \rangle$, $\langle N_4 \rangle$, $\langle N_5 \rangle$, $\langle N_6 \rangle$ y $\langle N_7 \rangle$ se obtiene entonces tomando las primeras derivadas con respecto a x_1 para obtener $\langle N_1 \rangle$, con respecto a x_2 para obtener $\langle N_2 \rangle$ y así sucesivamente, y evaluando todas las derivadas en $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_7 = 1$,

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x_i} \right)_{x_1 = x_2 = \dots = x_7 = 1} = \langle N_i \rangle \quad i = 1, 2, \dots, 7 \quad (3.8)$$

entonces resulta que

$$\frac{\partial \langle N_1 \rangle}{\partial t} = S_0 - (\lambda_0 + \lambda_a) \langle N_1 \rangle + \lambda_r (1 - \omega_u) \langle N_4 \rangle \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \langle N_2 \rangle}{\partial t} = \lambda_a C_d \langle N_1 \rangle - (\lambda_{dt} C_t + \lambda_0) \langle N_2 \rangle \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \langle N_3 \rangle}{\partial t} = \lambda_a C_t \langle N_1 \rangle - \lambda_{dt} C_t \langle N_2 \rangle - (\lambda_0 + \lambda_{dt\mu} C_d) \langle N_3 \rangle \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \langle N_4 \rangle}{\partial t} = \lambda_{dt\mu} C_d \langle N_3 \rangle - (\lambda_0 + \lambda_r) \langle N_4 \rangle \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \langle N_5 \rangle}{\partial t} = \lambda_r \omega_n \langle N_4 \rangle - \lambda_0 \langle N_5 \rangle \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \langle N_6 \rangle}{\partial t} = \lambda_r (1 - \omega_u) \langle N_4 \rangle + \lambda_0 \langle N_5 \rangle \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \langle N_7 \rangle}{\partial t} = \lambda_r \langle N_4 \rangle. \quad (3.15)$$

Debido a la naturaleza intrinsecamente estocástica de los procesos que ocurren en la fusión nuclear catalizada por muones, resulta interesante analizar también las fluctuaciones alrededor de los valores medios debidas a las variaciones intrínsecas del fenómeno y la correlación entre las densidades de las diferentes partículas que componen los procesos. Con este propósito de la ecuación para la f.g.p. (ec. 3.7) se obtienen las ecuaciones para las covarianzas y las varianzas, las cuales están definidas respectivamente como

$$\sigma_{1j}^2 = \langle N_1 N_j \rangle - \langle N_1 \rangle \langle N_j \rangle \quad (3.16)$$

Y

$$\sigma_{11}^2 = \langle N_1^2 \rangle - \langle N_1 \rangle^2, \quad (3.17)$$

observando que

$$\langle N_1 N_j \rangle = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_j} \right)_{x_1 = x_2 = \dots = x_7 = 1} \quad (3.18)$$

$$\langle N_1 N_1 \rangle = \langle N_1^2 \rangle = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + \frac{\partial G}{\partial x_1} \right)_{x_1 = x_2 = \dots = x_7 = 1} \quad (3.19)$$

Obteniendo las segundas derivadas de la función generadora en la ec. 3.7 y utilizando las definiciones anteriores, se obtiene otro sistema de ecuaciones para las varianzas, se considera que la función G tiene segundas derivadas continuas por lo que:

$$\sigma_{1j}^2 = \sigma_{j1}^2.$$

Las ecuaciones para las varianzas y las covarianzas resultan ser:

$$\frac{\partial \sigma_{11}^2}{\partial t} = -2(\lambda_0 + \lambda_a) \sigma_{11}^2 + 2\lambda_r (1 - \omega_u) \sigma_{14}^2 + (\lambda_0 + \lambda_a) \langle N_1 \rangle +$$

$$\lambda_r (1 - \omega_u) \langle N_4 \rangle + S_0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}^2}{\partial t} = \lambda_a C_d \sigma_{11}^2 - (\lambda_{dt} C_t + 2\lambda_0 + \lambda_a) \sigma_{12}^2 + \lambda_r (1 - \omega_u) \sigma_{24}^2 -$$

$$\lambda_a C_d \langle N_1 \rangle \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}^2}{\partial t} = \lambda_a C_t \sigma_{11}^2 + \lambda_{dt} C_t \sigma_{12}^2 - (2\lambda_0 + \lambda_a + \lambda_{dt} \mu C_d) \sigma_{13}^2 + \lambda_f (1 - \omega_s) \sigma_{34}^2 - \lambda_a C_t < N_1 > \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \sigma_{14}^2}{\partial t} = \lambda_{dt} \mu C_d \sigma_{13}^2 - (2\lambda_0 + \lambda_a + \lambda_f) \sigma_{14}^2 + \lambda_f (1 - \omega_s) \sigma_{44}^2 - \lambda_f (1 - \omega_s) < N_4 > \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \sigma_{15}^2}{\partial t} = \lambda_f \omega_s \sigma_{14}^2 - (2\lambda_0 + \lambda_a) \sigma_{15}^2 + \lambda_f (1 - \omega_s) \sigma_{45}^2 \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \sigma_{16}^2}{\partial t} = \lambda_f (1 - \omega_s) \sigma_{14}^2 + \lambda_0 \sigma_{15}^2 - (\lambda_0 + \lambda_a) \sigma_{16}^2 + \lambda_f (1 - \omega_s) \sigma_{46}^2 + \lambda_f (1 - \omega_s) < N_4 > \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \sigma_{17}^2}{\partial t} = \lambda_f \sigma_{14}^2 - (\lambda_0 + \lambda_a) \sigma_{17}^2 + \lambda_f (1 - \omega_s) \sigma_{47}^2 + \lambda_f (1 - \omega_s) < N_4 > \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}^2}{\partial t} = 2\lambda_a C_d \sigma_{12}^2 - 2(\lambda_{dt} C_t + \lambda_0) \sigma_{22}^2 + \lambda_a C_d < N_1 > + (\lambda_{dt} C_t + \lambda_0) < N_2 > \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \sigma_{23}^2}{\partial t} = \lambda_a C_t \sigma_{12}^2 + \lambda_a C_d \sigma_{13}^2 + \lambda_{dt} C_t \sigma_{22}^2 - (\lambda_{dt} C_t + 2\lambda_0 + \lambda_{dt} \mu C_d) \sigma_{23}^2 - \lambda_{dt} C_t < N_2 > \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \sigma_{24}^2}{\partial t} = \lambda_a C_d \sigma_{14}^2 + \lambda_{dt\mu} C_d \sigma_{23}^2 - (\lambda_{dt} C_t + 2\lambda_0 + \lambda_f) \sigma_{24}^2 \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \sigma_{25}^2}{\partial t} = \lambda_a C_d \sigma_{15}^2 + \lambda_f \omega_v \sigma_{24}^2 - (\lambda_{dt} C_t + 2\lambda_0) \sigma_{25}^2 \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \sigma_{26}^2}{\partial t} = \lambda_a C_d \sigma_{16}^2 + \lambda_f (1 - \omega_v) \sigma_{24}^2 + \lambda_0 \sigma_{25}^2 - (\lambda_{dt} C_t + \lambda_0) \sigma_{26}^2 \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \sigma_{27}^2}{\partial t} = \lambda_a C_d \sigma_{17}^2 + \lambda_f \sigma_{24}^2 - (\lambda_{dt} C_t + \lambda_0) \sigma_{27}^2 \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{33}^2}{\partial t} &= 2\lambda_a C_t \sigma_{13}^2 + 2\lambda_{dt} C_t \sigma_{23}^2 - 2(\lambda_{dt\mu} C_d + \lambda_0) \sigma_{33}^2 + \\ &\lambda_0 C_t \langle N_1 \rangle + \lambda_{dt} C_t \langle N_2 \rangle + (\lambda_{dt\mu} C_d + \lambda_0) \langle N_3 \rangle \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{34}^2}{\partial t} &= \lambda_a C_t \sigma_{14}^2 + \lambda_{dt} C_t \sigma_{24}^2 + \lambda_{dt\mu} C_d \sigma_{33}^2 - (\lambda_{dt\mu} C_d + 2\lambda_0 + \lambda_f) \sigma_{34}^2 - \\ &\lambda_{dt\mu} C_d \langle N_3 \rangle \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial \sigma_{35}^2}{\partial t} = \lambda_a C_t \sigma_{15}^2 + \lambda_{dt} C_t \sigma_{25}^2 + \lambda_f \omega_v \sigma_{34}^2 - (\lambda_{dt\mu} C_d + 2\lambda_0) \sigma_{35}^2 \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{36}^2}{\partial t} &= \lambda_a C_t \sigma_{16}^2 + \lambda_{dt} C_t \sigma_{26}^2 + \lambda_f (1 - \omega_v) \sigma_{34}^2 + \lambda_0 \sigma_{35}^2 - \\ &(\lambda_{dt\mu} C_d + \lambda_0) \sigma_{36}^2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \sigma_{37}^2}{\partial t} = \lambda_a C_t \sigma_{17}^2 + \lambda_{dt} C_t \sigma_{27}^2 + \lambda_f \sigma_{34}^2 - (\lambda_{dt\mu} C_d + \lambda_0) \sigma_{37}^2 \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{44}^2}{\partial t} &= 2\lambda_{dt\mu} C_d \sigma_{34}^2 - 2(\lambda_0 + \lambda_f) \sigma_{44}^2 + \lambda_{dt\mu} C_d \langle N_3 \rangle + \\ &(\lambda_0 + \lambda_f) \langle N_4 \rangle \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \sigma_{45}^2}{\partial t} = \lambda_{dt\mu} C_d \sigma_{35}^2 + \lambda_f \omega_s \sigma_{44}^2 - (2\lambda_0 + \lambda_f) \sigma_{45}^2 - \lambda_f \omega_s \langle N_4 \rangle \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{46}^2}{\partial t} &= \lambda_{dt\mu} C_d \sigma_{36}^2 + \lambda_f (1 - \omega_s) \sigma_{44}^2 + \lambda_0 \sigma_{45}^2 - (\lambda_0 + \lambda_f) \sigma_{46}^2 - \\ &\lambda_f (1 - \omega_s) \langle N_4 \rangle \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \sigma_{47}^2}{\partial t} = \lambda_{dt\mu} C_d \sigma_{37}^2 + \lambda_f \sigma_{44}^2 - (\lambda_0 + \lambda_f) \sigma_{47}^2 - \lambda_f \langle N_4 \rangle \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial \sigma_{55}^2}{\partial t} = 2\lambda_f \omega_s \sigma_{45}^2 - 2\lambda_0 \sigma_{55}^2 + \lambda_f \omega_s \langle N_4 \rangle + \lambda_0 \langle N_5 \rangle \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \sigma_{56}^2}{\partial t} = \lambda_f (1 - \omega_s) \sigma_{45}^2 + \lambda_f \omega_s \sigma_{46}^2 + \lambda_0 \sigma_{55}^2 - \lambda_0 \sigma_{56}^2 - \lambda_0 \langle N_5 \rangle \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial \sigma_{57}^2}{\partial t} = \lambda_f \sigma_{45}^2 + \lambda_f \omega_s \sigma_{47}^2 - \lambda_0 \sigma_{57}^2 + \lambda_f \omega_s \langle N_4 \rangle \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial \sigma_{66}^2}{\partial t} = 2\lambda_r(1-\omega_s)\sigma_{46}^2 + 2\lambda_0\sigma_{56}^2 + \lambda_r(1-\omega_s)\langle N_4 \rangle + \lambda_0\langle N_5 \rangle \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \sigma_{67}^2}{\partial t} = \lambda_r\sigma_{46}^2 + \lambda_r(1-\omega_s)\sigma_{47}^2 + \lambda_0\sigma_{57}^2 + \lambda_r(1-\omega_s)\langle N_4 \rangle \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial \sigma_{77}^2}{\partial t} = 2\lambda_r\sigma_{47}^2 + \lambda_r\langle N_4 \rangle. \quad (3.47)$$

El sistema de ecuaciones para los valores promedio es ya conocido y ha sido analizado tanto analíticamente (S.S. Gershtein, Yu. V. Petrov, L.I. Ponomarev, y M.P. Faifman, (1980) [36]) como numéricamente (A. P. Squigna y A. A. Harms, (1983) [36]). Sin embargo el efecto de las fluctuaciones internas intrínsecas al proceso de la fusión nuclear catalizada por muones alrededor del comportamiento temporal de sus valores promedios no ha sido analizado. Para realizar esto es necesario resolver no sólo las ecuaciones para los promedios, ecs.(3.9) a (3.15), sino también las ecuaciones para las varianzas, ecs. (3.16) a (3.47), las cuales como puede fácilmente verificarse están acopladas no sólo entre sí sino también con las ecuaciones para los promedios.

Algunos autores (D. R. Wyman, R.E. Stone y A.A. Harms (1987) [38]) han analizado la estabilidad del sistema de ecuaciones para los promedios, esto es superfluo, dado que el sistema debe resultar siempre estable debido a que los muones decaen y no hay

creación interna de muones.

También se podría analizar la estabilidad del sistema completo, *i.e.* incluyendo los segundos momentos; esto daría resultados más generales que los realizados con anterioridad puesto que se estudiaría la estabilidad estocástica del sistema. (Anil Kumar (1983) [39]).

Por las razones dadas arriba el sistema debe resultar estocásticamente estable. Es decir, las fluctuaciones alrededor de los valores promedio deben permanecer finitas para valores finitos de la fuente externa de muones, sin embargo es interesante estudiar el efecto que una fuente externa de muones y diversas condiciones iniciales tienen sobre la evolución temporal de los promedios y sus varianzas. Asimismo bajo la perspectiva de incluir los calculos de las varianzas, es tambien de interés analizar el efecto que pequeños cambios en el factor de adhesión ("sticking") tienen sobre la ganancia de neutrones, es decir, sobre la efectividad de un muón para catalizar reacciones de fusión nuclear. Lo anterior es motivado por el hecho de que existen evidencias experimentales que muestran que el proceso de adhesión, el cual teóricamente no ha sido entendido por completo (James S. Cohen y M. Leon, (1986) [40]), varía fuertemente con la concentración de tritio y con la densidad de la mezcla D + T.

En el capítulo siguiente se discute un método numérico para resolver el sistema de ecuaciones acopladas en cuestion.

CAPITULO IV

En el capítulo III se obtuvo un sistema de 35 ecuaciones diferenciales lineales acopladas de primer grado acopladas, en estas ecuaciones están incluidos los promedios y las varianzas, este sistema puede representarse de la siguiente forma:

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = A\bar{N} + \bar{S}, \quad (4.1)$$

donde \bar{N} es un vector columna cuyas componentes son las 35 especies, mencionadas anteriormente, es decir

$$\bar{N}^T = (N_1, N_2, N_3, \dots, N_7, \sigma_{11}^2, \sigma_{12}^2, \dots, \sigma_{17}^2, \dots, \sigma_{66}^2, \sigma_{67}^2, \sigma_{77}^2) \quad (4.2)$$

y A es una matriz cuadrada de 35 X 35 cuyos coeficientes son funciones de las concentraciones C_d y C_t , de las razones de formación para los distintos procesos que ocurren en la f.n.c.m. $(\lambda_0, \lambda_a, \lambda_{dt}, \lambda_{dt\mu}, \lambda_r)$ y del coeficiente de adhesión ω_s ("sticking"), finalmente \bar{S} es un vector columna cuyas componentes son las fuentes externas para cada especie. En nuestro caso consideramos sólo una fuente externa, la de muones, i.e.

$$\bar{S}^T = (S_0, 0, 0, 0, \dots, 0).$$

Se puede encontrar en principio para este sistema de ecuaciones una solución analítica para cada variable $N_1, N_2, \dots, N_7, \sigma_{11}^2, \dots, \sigma_{77}^2$; sin embargo, encontrar las expresiones analíticas es complicado dada la cantidad de ecuaciones involucradas. De aquí surge la necesidad de obtener soluciones numéricas para el sistema de ecuaciones.

En este capítulo se revisan varios métodos numéricos y se

propone un combinación de métodos para resolver el sistema que describe la cinética de los procesos que ocurren en la f.n.c.m.

Esencialmente los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden consisten en reescribir de una forma apropiada el desarrollo de Taylor hasta el orden de precisión deseado. Entre los diversos métodos numéricos que se analizaron están el de Taylor hasta cuarto orden y los llamados métodos corrector-predictor de cuarto orden; de entre éstos se estudio particularmente el método de Adams modificado[41].

[V.]

MÉTODOS DE ARRANQUE

Se decidió utilizar como método de arranque el desarrollo de Taylor por razones de conveniencia como se explicaran más adelante. El método de Taylor a pesar de ser una herramienta teórica para desarrollar los métodos numéricos, en general es poco usado ya que involucra el calculo de derivadas de orden superior que a veces resultan ser complicadas de obtener. Otro método de "arranque" es el de Runge-Kutta. En este método no es necesario calcular derivadas de orden superior pero en cambio hay que evaluar la primera derivada en varios puntos intermedios entre el inicial y aquel en el que se desea calcular al siguiente paso.

Para el caso de una ecuación diferencial lineal de primer grado,

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad (4.3)$$

el método de Runge-Kutta de cuarto orden funciona sin dificultad ya que deducir la expresión para calcular los siguientes puntos no

es difícil, pero en el caso de un sistema de ecuaciones acoplado, encontrar las expresiones para calcular los siguientes puntos de cada variable se complica demasiado y aumenta la dificultad al aumentar el número de ecuaciones. En nuestro caso particular resulta más sencillo usar el desarrollo de Taylor para calcular los cuatro primeros puntos de cada variable, con este desarrollo el cálculo se facilita debido a que $f_j(N_1, N_2, \dots, \sigma_{77}^2, t)$ depende linealmente de cada una de las variables, i.e.

$$f_j = \sum_{i=1}^{35} \alpha_{ij} N_i. \quad (4.4)$$

El desarrollo de Taylor para la variable y alrededor de x_0 es

$$y(x) = y(x_0) + \frac{dy}{dx}(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2y}{dx^2}(x_0)(x-x_0)^2 + \dots \quad (4.5)$$

si $x = x_0 + h$

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h \frac{dy}{dx}(x_0) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2y}{dx^2}(x_0) +$$

$$\frac{h^3}{3!} \frac{d^3y}{dx^3}(x_0) + \dots \quad (4.6)$$

Consideremos ahora una red igualmente espaciada de puntos en x , $\{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$, con $x_k = x_{k-1} + h$, entonces el valor de $y_{k+1} = y(x_{k+1})$, esta dado por

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1!} y'_k + \frac{h^2}{2!} y''_k + \frac{h^3}{3!} y'''_k + \dots \quad (4.7)$$

donde y'_k significa la derivada de y_k con respecto a x .

En nuestro caso tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de la forma

$$\frac{dx^i}{dt} = g^i(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n, t) \quad (4.8)$$

donde $g^i(x^1, x^2, \dots, x^n, t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x^j + s^i(t)$ $i = 1, 2, \dots, n$

con $a_{ij} = \text{constante}$.

Para encontrar los valores de x_{k+1}^i conociendo x_k^i se hace un desarrollo de Taylor,

$$x_{k+1}^i = x_k^i + h \frac{d x_k^i}{dt} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 x_k^i}{dt^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 x_k^i}{dt^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{d^4 x_k^i}{dt^4} + \dots \quad (4.9)$$

A continuacion deduciremos las expresiones para las derivadas hasta cuarto orden de x_k .

El operador derivada total con respecto al tiempo para el sistema de ecuaciones anterior es

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n g^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

las primeras derivadas estan dadas por la ecuación (4.8), entonces las primeras derivadas para cada variable al tiempo $t = t_k$ son

$$\frac{dx^j}{dt} = g_k^j \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.10)$$

Para las segundas derivadas se tiene

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} = \frac{d}{dt} g_k^j = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n g_k^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) g_k^j = \frac{ds^j(t_k)}{dt} + \sum_{i=1}^n g_k^i \frac{\partial g_k^j}{\partial x^i}$$

dado que $\frac{\partial S^j}{\partial x^1} = 0$ y $\frac{\partial a_{j1}}{\partial t^1} x^1 = 0$; entonces

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} = \dot{s}^j(t_k) + \sum_{r=1}^n g_k^r a_{jr} \delta_{r1} = \dot{s}_k^j + \sum_{r=1}^n g_k^r a_{jr} \quad (4.11)$$

para las terceras derivadas

$$\begin{aligned} \frac{d^3 x^j}{dt^3} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=1}^n g_k^l \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \frac{d^2 x^j}{dt^2} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=1}^n g_k^l \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \left(\dot{s}_k^j + \sum_{r=1}^n g_k^r a_{jr} \right) \\ &= \dot{s}_k^{\cdot j} + \sum_{l=1}^n \sum_{r=1}^n g_k^l \frac{\partial g_k^r a_{jr}}{\partial x^l} + \sum_{r=1}^n \frac{\partial g_k^r}{\partial t} a_{jr} \end{aligned}$$

$$\frac{d^3 x^j}{dt^3} = \dot{s}_k^{\cdot j} + \sum_{r=1}^n \dot{s}_k^r a_{jr} + \sum_{l=1}^n \sum_{r=1}^n g_k^l a_{r1} a_{jr} \quad (4.12)$$

para las cuartas derivadas

$$\begin{aligned} \frac{d^4 x^j}{dt^4} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=1}^n g_k^s \frac{\partial}{\partial x^s} \right) \frac{d^3 x^j}{dt^3} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=1}^n g_k^l \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \left(\dot{s}_k^{\cdot j} + \sum_{r=1}^n \dot{s}_k^r a_{jr} + \sum_{l=1}^n \sum_{r=1}^n g_k^l a_{r1} a_{jr} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \dot{s}_k^{\cdot J} + \sum_{r=1}^n \dot{s}_k^{\cdot r} a_{jr} + \sum_{l=1}^n \sum_{r=1}^n \dot{s}_k^l a_{rl} a_{jr} + \\
&\sum_{s=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{r=1}^n g_{kls}^* a_{ls} a_{rl} a_{jr} \quad (4.13)
\end{aligned}$$

por lo tanto el desarrollo de Taylor hasta cuarto orden queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
x_{k+1}^J &= x_k^J + hg_k^J + \frac{h^2}{2!} \left(\dot{s}_k^J + \sum_{l=1}^n g_{kl}^l a_{jl} \right) + \\
&\frac{h^3}{3!} \left(\dot{s}_k^{\cdot J} + \sum_{r=1}^n \dot{s}_k^{\cdot r} a_{jr} + \sum_{l=1}^n \sum_{r=1}^n g_{klr}^l a_{rl} a_{jr} \right) + \\
&\frac{h^4}{4!} \left(\ddot{s}_k^{\cdot J} + \sum_{r=1}^n \ddot{s}_k^{\cdot r} a_{jr} + \sum_{l=1}^n \sum_{r=1}^n \dot{s}_k^l a_{rl} a_{jr} + \right. \\
&\left. \sum_{s=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{r=1}^n g_{kls}^* a_{ls} a_{rl} a_{jr} \right) \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Para encontrar las expresiones utilizadas en el método de Adams modificado se parte de utilizar una aproximación polinomial de grado n para una función $f(x)$, esta aproximación tiene la propiedad de tener los mismos valores que $f(x)$ en los $n + 1$ puntos: $x_k, x_{k-1} = (x_k - h), x_{k-2} = (x_k - 2h), \dots, x_{k-n} = (x_k - nh)$, la aproximación se puede escribir de la siguiente forma,

$$f(x) \approx a_0 + a_1(x - x_k) + a_2(x - x_k)(x - x_{k-1}) + a_3(x - x_k)(x - x_{k-1})(x - x_{k-2}) + \dots + a_n(x - x_k)(x - x_{k-1}) \dots (x - x_{k-n+1}), \quad (4.15)$$

los coeficientes se calculan evaluando las diferencias en $x = x_k$.

Para encontrar a_0 se evalua la función en $x = x_k$, así resulta que

$$a_0 = f_k \quad (4.16a)$$

La diferencia $\Delta f(x) = f(x) - f(x-h)$, está dada por

$$\Delta f(x) \approx ha_1 + 2ha_2(x - x_k) + 3ha_3(x - x_k)(x - x_{k-1}) + \dots + nha_n(x - x_k)(x - x_{k-1}) \dots (x - x_{k-n+2})$$

evaluando en $x = x_k$ se obtiene

$$a_1 = \frac{1}{h} \Delta f_k \quad (4.16b)$$

después de calcular la segunda diferencia $\Delta^2 f(x) = \Delta f(x) - \Delta f(x-h)$,

es decir

$$\Delta^2 f(x) \approx 2.1h^2 a_2 + 3.2h^2 a_3 (x-x_k) + \dots \\ + n(n-1)h^2 a_n (x-x_k)(x-x_{k-1}) \dots (x-x_{k-n+3})$$

y evaluarla en $x = x_k$ resulta que

$$a_2 = \frac{1}{2!h^2} \Delta^2 f_k \quad (4.16c)$$

Para las diferencias de orden mayor se puede demostrar que

$$a_r = \frac{1}{r!h^r} \Delta^r f_k \quad (r=0,1,2,\dots,n). \quad (4.17)$$

si se hace el cambio de variable

$$x = x_k + sh \quad \text{i.e.} \quad s = \frac{x - x_k}{h}$$

entonces f queda expresada así

$$f(x_k + sh) \approx f_k + s\Delta f_k + \frac{s(s+1)}{2!} \Delta^2 f_k + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!} \Delta^3 f_k + \dots \\ + \frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{n!} \Delta^n f_k. \quad (4.18)$$

Integrando la función $f(x)$ entre x_k y $x_k + h$ resulta

$$\int_{x_k}^{x_k+h} f(x) dx = h \int_0^1 f(x_k + sh) ds \\ \approx h \left(f_k + \frac{1}{2} \Delta f_k + \frac{5}{12} \Delta^2 f_k + \frac{3}{8} \Delta^3 f_k + \frac{251}{720} \Delta^4 f_k + \dots \right). \quad (4.19)$$

Ahora de integrar $f(x)$ de $x_k - h$ a x_k resulta

$$\int_{x_k-h}^{x_k} f(x) dx = h \int_{-1}^0 f(x_k + sh) ds$$

$$\approx h \left\{ f_k - \frac{1}{2} \Delta f_k - \frac{1}{12} \Delta^2 f_k - \frac{1}{24} \Delta^3 f_k - \frac{19}{720} \Delta^4 f_k + \dots \right\}. \quad (4.20)$$

luego entonces, para el sistema de interes se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= g^i(x^1, x^2, \dots, x^n, t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ &= F^i(t) \end{aligned} \quad (4.21)$$

porque $x^1 = x^1(t)$, $x^2 = x^2(t)$, ..., $x^n = x^n(t)$.

Entonces

$$dx^i = F^i(t) dt$$

ó integrando

$$\int_{x_k^i}^{x_{k+1}^i} dx^i = \int_{t_k}^{t_{k+1}} F^i(t) dt \quad \text{con } t_{k+1} = t_k + h.$$

Ahora hacemos una aproximación polinomial para $F^i(t)$, y obtenemos

$$x_{k+1}^i \approx x_k^i + h \left\{ F_k^i + \frac{1}{2} \Delta F_k^i + \frac{5}{12} \Delta^2 F_k^i + \frac{3}{8} \Delta^3 F_k^i + \frac{251}{720} \Delta^4 F_k^i + \dots \right\}, \quad (4.22)$$

Análogamente pero ahora integrando de t_{k-1} a t_k , se tiene

$$\int_{x_{k-1}^i}^{x_k^i} dx^i = \int_{t_{k-h}}^{t_k} F^i(t) dt$$

$$x_{k-1}^i \approx x_k^i + h \left(F_k^i - \frac{1}{2} \nabla F_k^i - \frac{1}{12} \nabla^2 F_k^i - \frac{1}{24} \nabla^3 F_k^i - \frac{19}{720} \nabla^4 F_k^i + \dots \right), \quad (4.23)$$

y al cambiar k por $k + 1$ y $k - 1$ por k resulta

$$x_{k+1}^i = x_k^i + h \left(F_{k+1}^i - \frac{1}{2} \Delta F_{k+1}^i - \frac{1}{12} \Delta^2 F_{k+1}^i - \frac{1}{24} \Delta^3 F_{k+1}^i - \frac{19}{720} \Delta^4 F_{k+1}^i + \dots \right). \quad (4.24)$$

A la primera aproximación de x_{k+1}^i se la llama "predicador" y a la segunda "corrector". Si se trunca hasta la diferencia de cuarto orden se obtiene la siguiente aproximación "predicador-corrector":

$$x_{k+1,p}^i \approx x_k^i + h \left(F_k^i + \frac{1}{2} \Delta F_k^i + \frac{5}{12} \Delta^2 F_k^i + \frac{3}{8} \Delta^3 F_k^i + \frac{251}{720} \Delta^4 F_k^i \right) \quad (4.25)$$

$$x_{k+1,c}^i \approx x_k^i + h \left(F_{k+1}^i - \frac{1}{2} \Delta F_{k+1}^i - \frac{1}{12} \Delta^2 F_{k+1}^i - \frac{1}{24} \Delta^3 F_{k+1}^i - \frac{19}{720} \Delta^4 F_{k+1}^i \right). \quad (4.26)$$

La aproximación dada por el corrector es a menudo mejor que la dada por el predicador, aún cuando las dos expresiones tienen el mismo orden en las diferencias, la segunda tiene coeficientes más pequeños que multiplican las diferencias de orden mayor que dos. Esta ventaja es parcialmente compensada por el hecho de que la

segunda expresión involucra $F_{k+1} = F(x_{k+1}^1, x_{k+2}^2, \dots, x_{k+1}^n, t_{k+1})$, y para esto se tiene que evaluar F en los valores encontrados en la expresión para el predictor de cada una de las variables.

El criterio de convergencia para estimar que los valores del "predictor" y del "corrector" son muy cercanos entre sí depende del espaciamiento h , el cual debe ser suficientemente pequeño para que los términos despreciados de orden quinto y siguientes sean efectivamente más pequeños que los de orden cuarto.

La cuarta diferencia es

$$\begin{aligned}\Delta^4 F_k^i &= \Delta^3 F_k^i - \Delta^3 F_{k-1}^i = \Delta^2 F_k^i - \Delta^2 F_{k-1}^i - \Delta^2 F_{k-1}^i + \Delta^2 F_{k-2}^i \\ &= \Delta F_k^i - \Delta F_{k-1}^i - 2(\Delta F_{k-1}^i - \Delta F_{k-2}^i) + \Delta F_{k-2}^i - \Delta F_{k-3}^i\end{aligned}$$

Así entonces

$$\Delta^4 F_k^i = F_k^i - 4F_{k-1}^i + 6F_{k-2}^i - 4F_{k-3}^i + F_{k-4}^i \quad (4.27)$$

De esta expresión se observa que se requiere conocer los 5 puntos anteriores para calcular el siguiente. Para el cálculo de dichos puntos se usa el método de Taylor al inicio del programa.

Entonces el programa consistirá en calcular el valor "predictor" para x_{k+1}^i y luego el valor del "corrector". Después se calcula su diferencia y se compara con la cantidad c , cantidad que definirá la precisión de nuestros resultados.

Si se cumple

$$\left| \frac{x_p^i - x_c^i}{x_c^i} \right| < c \quad (4.28)$$

entonces se toma el valor del "corrector" como el valor de la variable correspondiente, si no se cumple el criterio se realiza

un proceso iterativo usando la expresión del "corrector". Este procedimiento iterativo se continua hasta que se cumpla la condición (4.28). Desde luego que existen condiciones de convergencia para la expresión (4.26) las cuales limitan el valor de h . En el caso extremo en que el sistema de ecuaciones (4.1) se reduce a una sola ecuación, $\frac{dN}{dt} = AN$, el criterio de convergencia es $1/2Ah \ll 1$. Como veremos más adelante, este criterio limitará (atraves del tiempo de máquina) el tiempo que podemos analizar la evolución de nuestro sistema.

En el apendice A, se presenta un programa con su respectivo diagrama de flujo para resolver el sistema de ecuaciones en cuestión, utilizando el método corrector-predictor discutido en este capítulo.

CAPITULO V

En el capítulo IV se explicaron los métodos numéricos usados para resolver el sistema de ecuaciones que aparecen en la rama principal de la fusión nuclear catalizada por muones para las cantidades promedio (ecs. 3.9 a 3.15) y para sus varianzas (ecs. 3.20 a 3.47), deducidas en el capítulo III a partir de la ecuación para la f. g. p. (ec. 3.7);

Este programa resuelve ecuaciones para procesos físicos del tipo nacimiento y muerte cuya formulación matemática presenta la misma estructura, como por ejemplo cadenas radiactivas, crecimiento de población, cinética de las reacciones químicas, etc.

V.1 VERIFICACION DEL PROGRAMA: EVOLUCION TEMPORAL DE LOS PROMEDIOS

Como una verificación del programa se resolvieron numéricamente las ecuaciones para los valores promedio de la fusión nuclear catalizada por muones del sistema tratado por A.P. Squigna y A.A. Harms [37], que es un sistema de nueve ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Considerando las mismas condiciones iniciales usadas por dichos autores ($N_{\mu}(0) = 10^{12}$, $N_{d\mu}(0) = N_{t\mu}(0) = \dots = N_n(0) = N_{nd}(0) = N_{nt}(0) = 0$) podemos comparar directamente nuestros resultados numéricos con los suyos. El sistema de ecuaciones para los valores promedios considerado por esos autores se puede obtener de inspeccionar la figura 3.1

teniendo en cuenta no sólo la rama principal sino también las otras dos ramas; es decir, aquellas en las que se forman los iones $dd\mu$ y $tt\mu$ en una mezcla de $D_2 + T_2$. Este sistema de ecuaciones es:

$$\frac{d\langle N_1 \rangle}{dt} = -(\lambda_o + \lambda_s)\langle N_1 \rangle + \lambda_f(1 - \omega_s)\langle N_4 \rangle + \lambda_{fd}[1 - 1/2(\omega_d + \omega'_d)]\langle N_5 \rangle + \lambda_{ft}(1 - \omega_t)\langle N_6 \rangle \quad (5.1)$$

$$\frac{d\langle N_2 \rangle}{dt} = \lambda_n C_d \langle N_1 \rangle - (\lambda_{dt} C_t + \lambda_o + \lambda_{dd\mu} C_d)\langle N_2 \rangle \quad (5.2)$$

$$\frac{d\langle N_3 \rangle}{dt} = \lambda_s C_t \langle N_1 \rangle + \lambda_{dt} C_t \langle N_2 \rangle - (\lambda_o + \lambda_{dt\mu} C_d + \lambda_{tt\mu} C_t)\langle N_3 \rangle + 1/2 \lambda_{fd} \omega'_d \langle N_5 \rangle \quad (5.3)$$

$$\frac{d\langle N_4 \rangle}{dt} = \lambda_{dt\mu} C_d \langle N_3 \rangle - (\lambda_o + \lambda_f)\langle N_4 \rangle \quad (5.4)$$

$$\frac{d\langle N_5 \rangle}{dt} = + \lambda_{dd\mu} C_d \langle N_2 \rangle - (\lambda_o + \lambda_{fd})\langle N_5 \rangle \quad (5.5)$$

$$\frac{d\langle N_6 \rangle}{dt} = \lambda_{tt\mu} C_t \langle N_3 \rangle - (\lambda_\mu + \lambda_{ft})\langle N_6 \rangle \quad (5.6)$$

$$\frac{d\langle N_7 \rangle}{dt} = \lambda_f \langle N_4 \rangle \quad (5.7)$$

$$\frac{d\langle N_8 \rangle}{dt} = 1/2 \lambda_{fd} \langle N_5 \rangle \quad (5.8)$$

$$\frac{d\langle N_9 \rangle}{dt} = 2\lambda_{ft} \langle N_6 \rangle \quad (5.9)$$

Las densidades de partículas que aparecen en este sistema de ecuaciones acopladas son: el número de muones $N_\mu = N_1$, de deuterios muónicos $N_{d\mu} = N_2$, de tritios muónicos $N_{t\mu} = N_3$, de

iones muónmoleculares $dt\mu$, $N_{dt\mu} = N_4$, de iones $dd\mu$, $N_{dd\mu} = N_5$, de iones $tt\mu$, $N_{tt\mu} = N_6$, de neutrones producto de la fusión del ión $dt\mu$, $N_n = N_7$, de neutrones producto de la fusión del ión $dd\mu$, $N_{nd} = N_8$ y de neutrones producto de la fusión de iones $tt\mu$, $N_{nt} = N_9$.

En la figura 5.1 se presentan los resultados numéricos donde se observa que la densidad de muones decae rápidamente hasta alrededor de 10^{-10} s. debido al decaimiento natural de los muones; posteriormente hay una meseta en donde el número de muones se mantiene casi constante hasta cerca de 10^{-7} s., esto es consecuencia del reciclamiento de los muones que se están liberando después de catalizar las fusiones de los iones $dt\mu$, $dd\mu$ y $tt\mu$, entre 10^{-8} y 10^{-7} s.. En esta región el número de iones $dt\mu$ y $tt\mu$ crece y alcanza su valor máximo, debido a que en esa región hay una gran cantidad de muones liberados. También se puede apreciar el crecimiento de la población de átomos muónicos hasta cerca de 10^{-9} s. para deuterios muónicos y hasta 10^{-7} s. para tritios muónicos. El número de deuterios empieza a decrecer antes que los tritios muónicos debido al efecto combinado de la transferencia del muón al tritio y al decaimiento de los muones. Luego, como es de esperarse, los átomos muónicos disminuyen por el inevitable decaimiento de los muones.

En la figura 5.2 se observa el crecimiento del número total de neutrones producidos por las reacciones de fusión hasta alcanzar un valor máximo en forma asintótica. La mayor parte de la población de neutrones es la que corresponde a la fusión de los iones $dt\mu$ que se forman más rápido que los otros ($dd\mu$ y $tt\mu$) debido a que $\lambda_{dt}^{-1} < \lambda_{dd\mu}^{-1}$, $\lambda_{tt\mu}^{-1}$.

Las gráficas obtenidas por Squigna y Harms (fig. 5.3) son similares a las presentadas en las figs. (5.1) y (5.2), lo cual nos da confianza respecto al funcionamiento correcto del programa.

NUMERO DE PARTICULAS

$$\omega_s = 0.0086$$

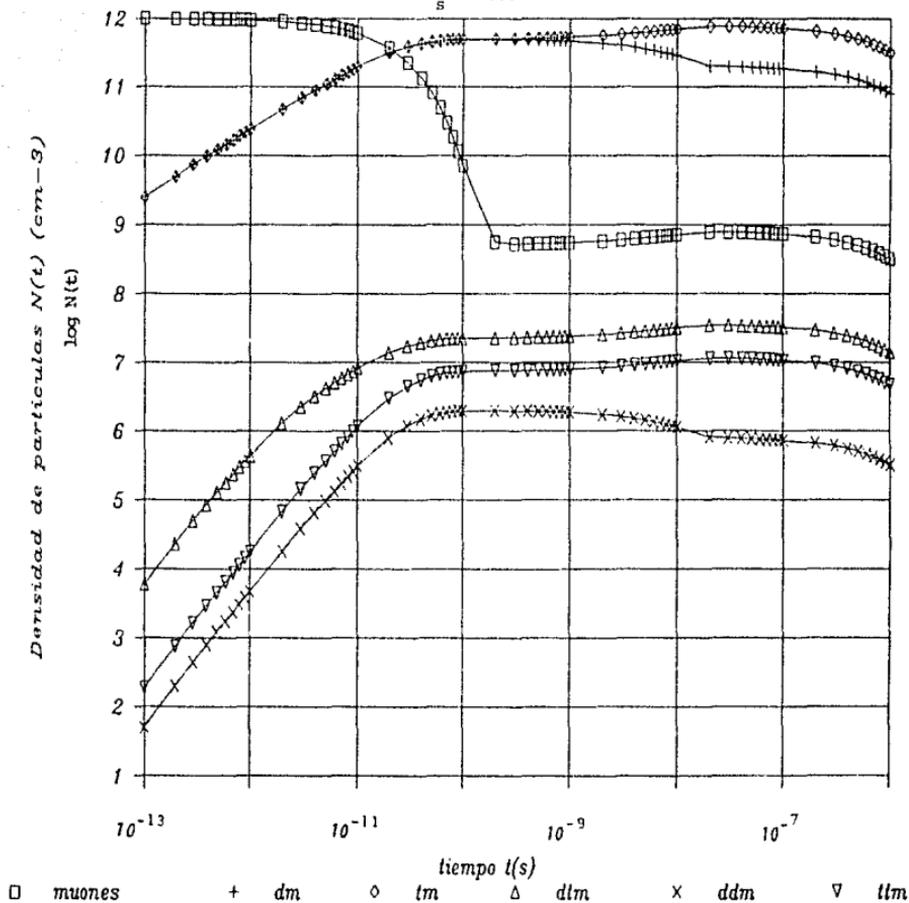


Fig. 5.1 Evolución temporal de las densidades de varias partículas cuando se inyecta un pulso de muones en la mezcla $D_2 + T_2$. $C_D = C_T = 0.5$

NUMERO DE PARTICULAS

$$\omega_s = 0.0086$$

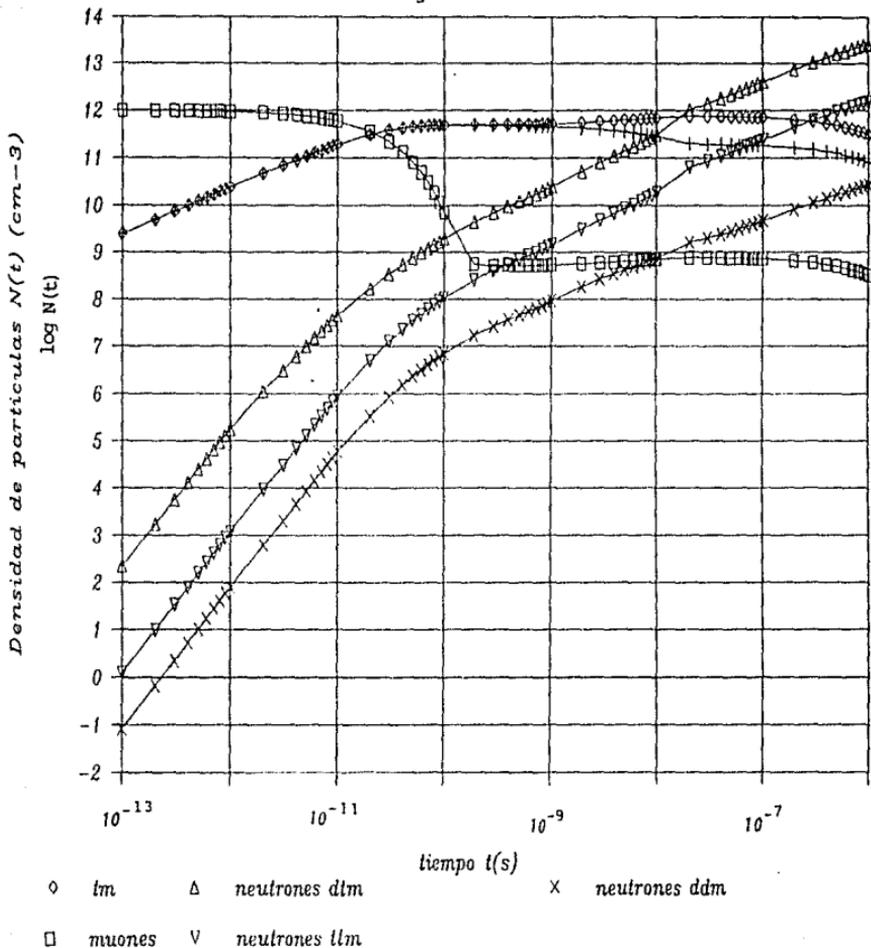


Fig. 5.2

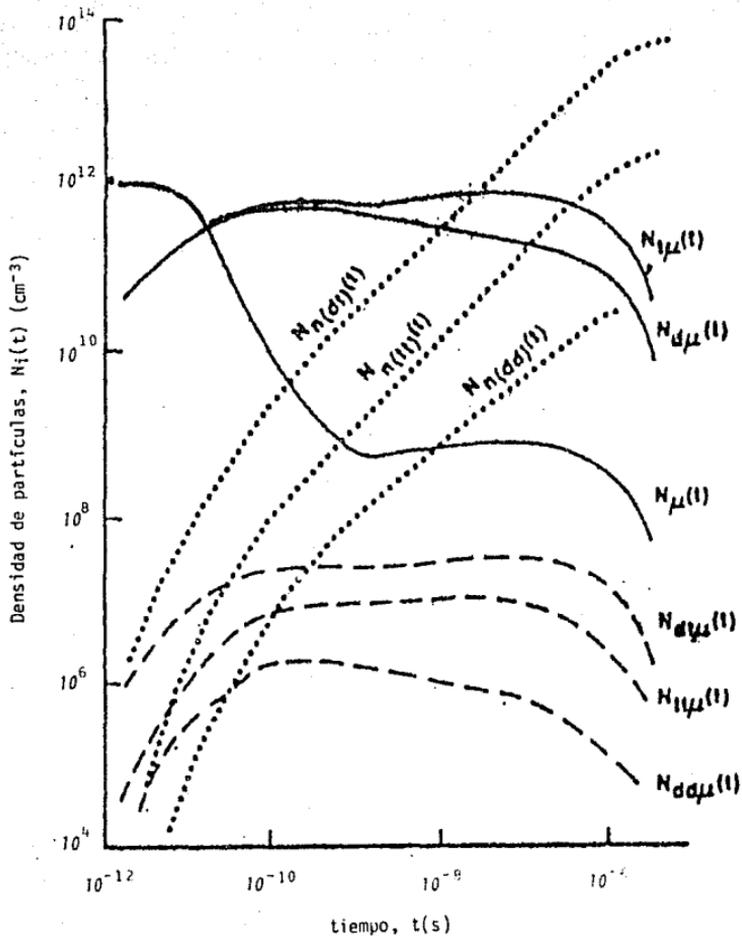


Fig. 5.3 Evolución temporal de varias partículas cuando se inyecta un pulso de muones en una mezcla de Deuterio-Tritio.

El programa se corrió primeramente para la rama principal de la fusión nuclear considerando valores promedio y sus varianzas (que es un sistema de 35 ecuaciones con 35 incógnitas) para el caso en que no hay fuente externa de muones. Se obtuvieron gráficas de la evolución temporal de los promedios, las autocovarianzas y las varianzas cruzadas. Se analizaron las soluciones para un factor de adhesión $\omega_{\mu} = 0.01$ y una mezcla con 50% de deuterio y 50% de tritio, que son condiciones cercanas a las reales. También se hicieron corridas con $\omega_{\mu} = 0.1$ y 0.001 para observar el efecto de esta variable en las soluciones. Como condición inicial fija se toma $N_1(0) = 1 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$, $N_2(0) = N_3(0) = \dots = N_{35}(0) = 0$

V.2.1 EVOLUCION TEMPORAL Y ESTADISTICA DEL PROCESO

En las figuras con los números del (5.4) al (5.10) se presentan los resultados numéricos que muestran el comportamiento temporal de los promedios y autocovarianzas de las distintas variables y en las figuras que van de la (5.11) a la (5.36) sus varianzas cruzadas, para el caso $\omega_{\mu} = 0.01$.

En la figura (5.4) se observa que la densidad de muones tiene una evolución temporal similar a la gráfica (5.1) del sistema anterior, se observa también una caída abrupta alrededor de

10^{-10} s., luego ocurre en 10^{-9} s. un ligero aumento en el número de muones y cerca de 10^{-7} s. empiezan nuevamente a decaer; la caída abrupta hasta $t \approx 10^{-10}$ s. corresponde, como ya se mencionó, al decaimiento natural de los muones así como a la producción de $t\mu$ y $d\mu$. El que el comportamiento decreciente se detenga y luego se incremente es precisamente una consecuencia de la catalización de fusiones nucleares. Así entonces el pequeño aumento de 10^{-9} s. hasta aproximadamente 10^{-7} s. es debido al reciclamiento de muones ya que alrededor de 10^{-10} s. se forman los iones muónmoleculares $d\mu$ y ocurre la fusión.

En la misma gráfica está la curva de la autocovarianza de los muones, $\sigma_{11}^2 = \sigma_{\mu\mu}^2$; se observa que crece linealmente en el tiempo, alcanza un máximo cerca de 10^{-11} s.; después se hace exactamente igual a la densidad de muones.

La densidad de muones hasta 10^{-6} s. baja notablemente por que los muones finalmente decaen y por lo tanto la autocovarianza también decae.

Es conveniente hacer notar que el máximo de $\sigma_{\mu\mu}^2$ ocurre cuando $\langle N_{\mu} \rangle$ se ve reducido exactamente a la mitad, i.e. en el punto en el cual $\log \langle N_{\mu} \rangle = 11.7$; este hecho aunado a que $\sigma_{\mu\mu}^2 = \langle N_{\mu} \rangle$ para cuando $\langle N_{\mu} \rangle$ es mucho más pequeño que el número inicial de muones, indica que la variable N_{μ} sigue una distribución binomial.

En el caso de una distribución binomial

$$\langle N \rangle = N_0 p(t) \quad (5.10)$$

donde $p(t)$ es la probabilidad de que al tiempo t un muón que fue introducido al tiempo inicial $t=0$ no haya "desaparecido" (i.e. decaído o sido absorbido por un átomo de deuterio o de tritio), y

que este libre (no formando iones ó moléculas muónicas).

La autocovarianza de un proceso binomial es

$$\sigma^2 = N_0 p(t) [1 - p(t)] \quad (5.11a)$$

ó en terminos del valor medio

$$\sigma^2 = \langle N \rangle [1 - \langle N \rangle / N_0] \quad (5.11b)$$

y

$$\frac{d\sigma}{dt} = N_0 [1 - 2p(t)] \frac{dp(t)}{dt} \quad (5.12)$$

luego entonces $d\sigma^2/dt=0$ implica que $p=1/2$ ó $dp/dt=0$ i.e.

$d\langle N \rangle/dt=0$. De la ec. (4.11a) se observa que debido a que $p \leq 1$ se cumple entonces $\sigma^2 \leq \langle N \rangle$. En el caso límite en que $p \ll 1$,

$\sigma^2 = \langle N \rangle$ (se tiene un proceso de Poisson). En las gráficas (4.3) a la (4.8) se observa esta propiedad.

En la figuras 5.5 y 5.6 se observa la evolución temporal de la densidad de átomos muónicos $d\mu$ y $t\mu$ y la de sus autocovarianzas. Para tiempos pequeños, $t < 10^{-11}$ s. $\langle N_1(t) \rangle \ll N_0$, la autocovarianza de los deuterios es igual al valor promedio, y por lo tanto esto nos da indicio de que se trata de un proceso de Poisson o en forma equivalente de un proceso binomial con $p \ll 1$. Para tiempos posteriores la varianza y el número promedio de deuterios se separan pero la forma de la curva de la varianza tiene el mismo comportamiento que la curva de los promedios. En esa región el proceso parece ser definitivamente binomial porque satisface la ec. (5.13) i.e. que los valores a los cuales la varianza alcanza un valor máximo o mínimo corresponde a los puntos en los cuales $d\langle N \rangle/dt = 0$, más adelante se mostrarán otras

propiedades que parecen reforzar el hecho de que la distribución que siguen estas especies es binomial. A partir de 10^{-7} s. las curvas para $\langle N_2 \rangle$, σ_{22}^2 , $\langle N_3 \rangle$ y σ_{33}^2 se empiezan a juntar y son decrecientes. Nuevamente se observa que alrededor de 10^{-8} seg el número de deuterios muónicos, $\langle N_{d\mu} \rangle$, disminuye y el número de tritios muónicos, $\langle N_{t\mu} \rangle$, aumenta debido al efecto de transferencia del muón del deuterio al tritio y al decaimiento natural de los muones.

En las figuras de la (5.7) a la (5.10) se muestran gráficas que corresponden a las curvas de los iones $d\mu$, del helio muónico, $He\mu$, del helio 4, 4He , y de los neutrones, estas gráficas a primera inspección parecen representar procesos del tipo de Poisson, $\langle N_i \rangle = \sigma_{ii}^2$. Se observa nuevamente que el máximo en la formación de iones $d\mu$ en la figura 5.7 corresponde al aumento en el reciclamiento de los muones; después de este máximo el número de iones $d\mu$ y también el número de muones reciclados en la figura 5.4 empiezan a decaer. De las figuras 5.8 y 5.9, correspondientes al helio muónico y al helio 4, se observa que el número de helios muónicos es aproximadamente dos ordenes de magnitud menor que el número de helios, lo cual es un resultado lógico por que $\omega_\mu = 0.01 \ll 1$. Las gráficas del helio 4, 4He , y la de los neutrones son iguales por que en cada fusión que se produce se liberan un helio y un neutrón. Es importante señalar que los helios que se grafican en la figura 5.9 son resultado de la fusión directa del ión $d\mu$ y de los helios muónicos que decaen.

En las gráficas antes mencionadas se han encontrado fuertes evidencias de que las especies involucradas en la serie de procesos que ocurren en la rama principal de la fusión nuclear

catalizada por muones, siguen una distribución multinomial; para esto hay que recordar que la f.g.p. de una distribución multinomial tiene la siguiente forma,

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = [1 + (x_1 - 1)p_1(t) + (x_2 - 1)p_2(t) + \dots + (x_n - 1)p_n(t)]^{N_0}$$

con N_0 el número inicial de muones o de núcleos padres, y las $p_i(t)$'s son las probabilidades de tener un núcleo de la especie i al tiempo t . Los valores medios para cada especie tienen la forma de la ec. (5.10) y las autocovarianzas tienen la forma de la ec. (5.11a), las varianzas cruzadas para esta distribución tienen la siguiente forma,

$$\sigma_{ij}^2 = - N_0 p_i(t) p_j(t) \quad (5.13a)$$

o en términos de los valores promedios con ayuda de la ec. (5.10),

$$\sigma_{ij}^2 = - \langle N_i \rangle \langle N_j \rangle / N_0 \quad i \neq j \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (5.13b)$$

En las gráficas 5.11 a la 5.36 se presentan todas las varianzas para cada especie, en cada figura se grafican también las predicciones tanto para las autocovarianzas usando la ec. (5.11b), como para las varianzas cruzadas usando la ec. (5.13b). De las gráficas se observa que las curvas obtenidas de las predicciones para las varianzas coinciden casi con todas las curvas obtenidas de las soluciones numéricas del programa, las curvas que no coinciden con las predicciones son las que se obtienen de las varianzas cruzadas que involucran a los helios, es decir las curvas que corresponden a $\sigma_{16}^2, \sigma_{26}^2, \sigma_{36}^2, \sigma_{46}^2$ y σ_{56}^2 , la autocovarianza de los helios, σ_{66}^2 , las varianzas cruzadas que involucran a los neutrones, $\sigma_{17}^2, \sigma_{27}^2, \sigma_{37}^2, \sigma_{47}^2, \sigma_{57}^2$ y σ_{67}^2 , y la

autocovarianza de los neutrones, σ_{77}^2 . Todas las especies que están etiquetadas por la presencia de un muón μ , $d\mu$, $t\mu$,...etc. deben seguir una distribución binomial (el conjunto de estas especies debe seguir una distribución multinomial). Notese que el número máximo de partículas de una especie determinada no puede rebasar el número inicial de muones.

En el caso de los helios y neutrones, su número a un tiempo dado puede ser mayor que el número inicial de muones. Esto puede explicarse puesto que:

- 1.- Los helios y los neutrones no decaen para los tiempos abarcados en las gráficas (el muón sí decae),
- 2.- Un muón puede dar origen a 2 ó más helios y neutrones productos de la fusión nuclear, esto se debe al reciclamiento de los muones.

Se observa que los valores promedios de todas las especies, excepto para los helios y para los neutrones, tenderán a cero cuando $t \rightarrow \infty$, debido a que todos los muones tendrán que decaer, por lo que las autocovarianzas y las varianzas cruzadas que se pueden expresar en función de los valores promedios para cada especie (ecs. (5.11b) y (5.13b)) también deberán tender a cero. En algunas gráficas se observa esta tendencia en las varianzas (tanto las curvas de las predicciones como las curvas obtenidas de las soluciones numéricas), como ejemplos de esto se pueden observar las gráficas 5.11, 5.12, 5.13, 5.17, 5.18, 5.22, 5.23, etc.

Es de esperarse el número de helios y neutrones tiendan asintóticamente al mismo valor. Sin embargo dado que estos no decaen y además que para un mismo valor del número inicial de

muones diferentes realizaciones dan origen a un número diferente (en total) de fusiones, la varianza en ambos casos no tiende asintóticamente a cero, pero sí a un mismo valor para ambas especies, este comportamiento sin embargo no se observa en las figuras (5.8)-(5.10) y tal vez sea necesario correr el programa hasta tiempos mucho mayores para observar la tendencia a una constante.

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

Para las gráficas siguientes se tienen las equivalencias:

- 1 → muones (μ)
- 2 → deuterios muónicos ($d\mu$)
- 3 → tritios muónicos ($t\mu$)
- 4 → iones deuterio-tritio muónico ($dt\mu$)
- 5 → helio muónico ($He\mu$)
- 6 → helio 4 (4He)
- 7 → neutrones (n)

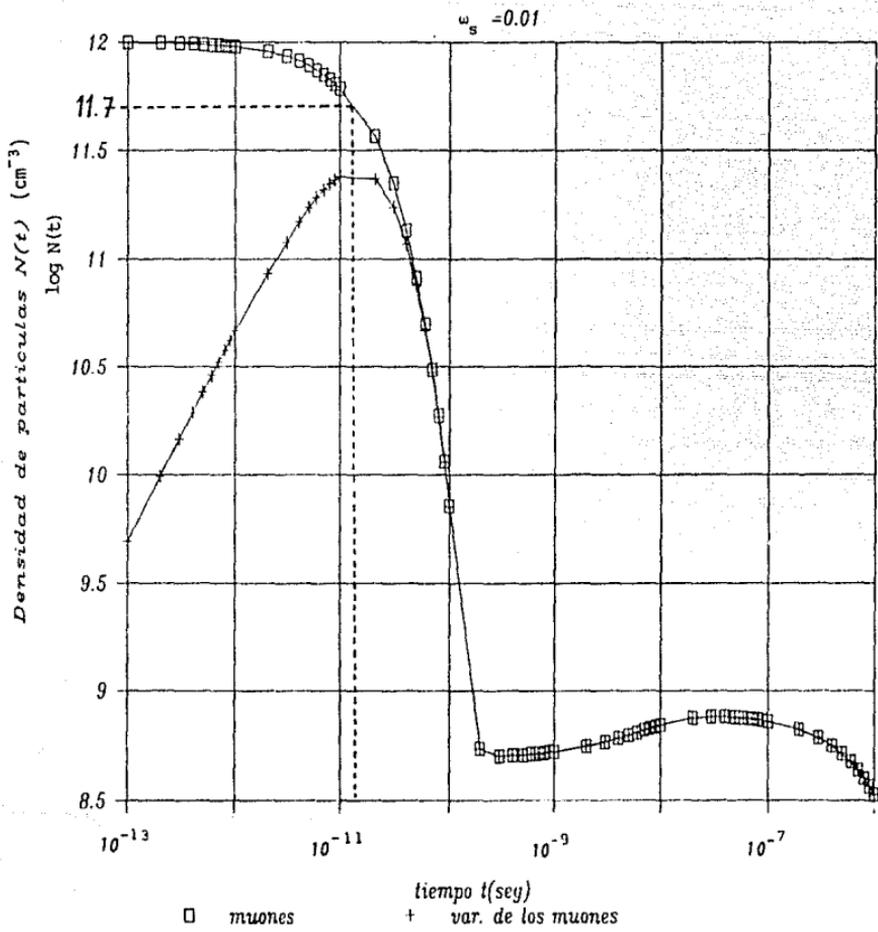


Fig. 5.4

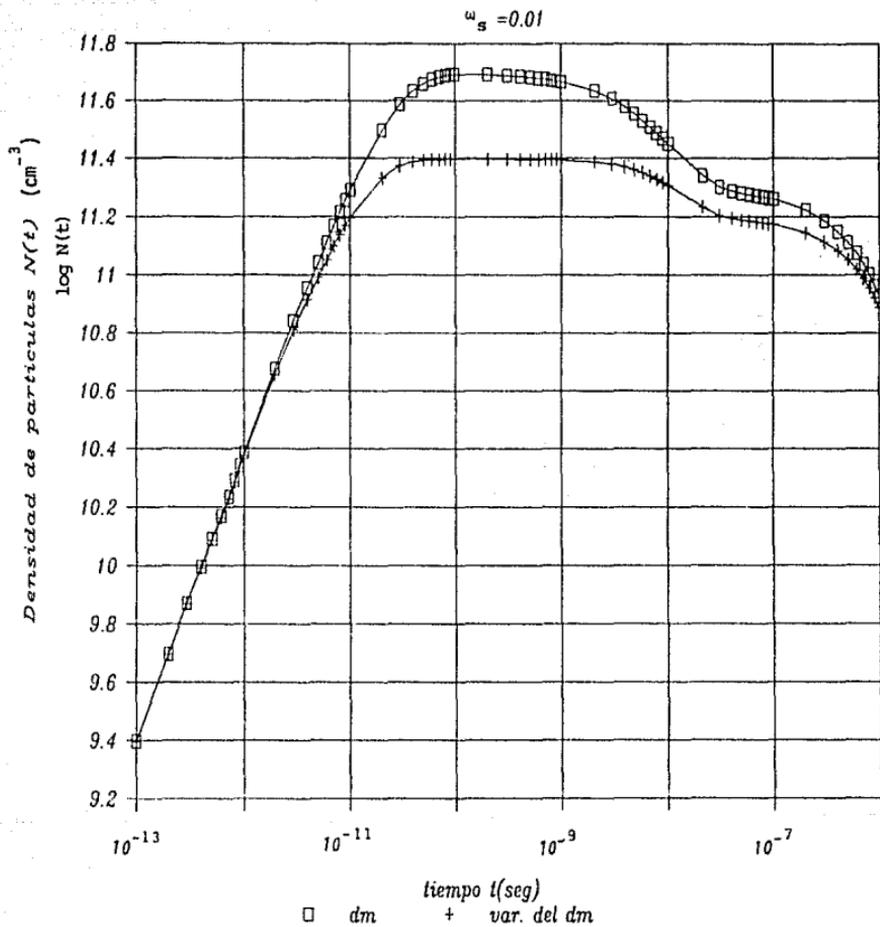


Fig. 5.5

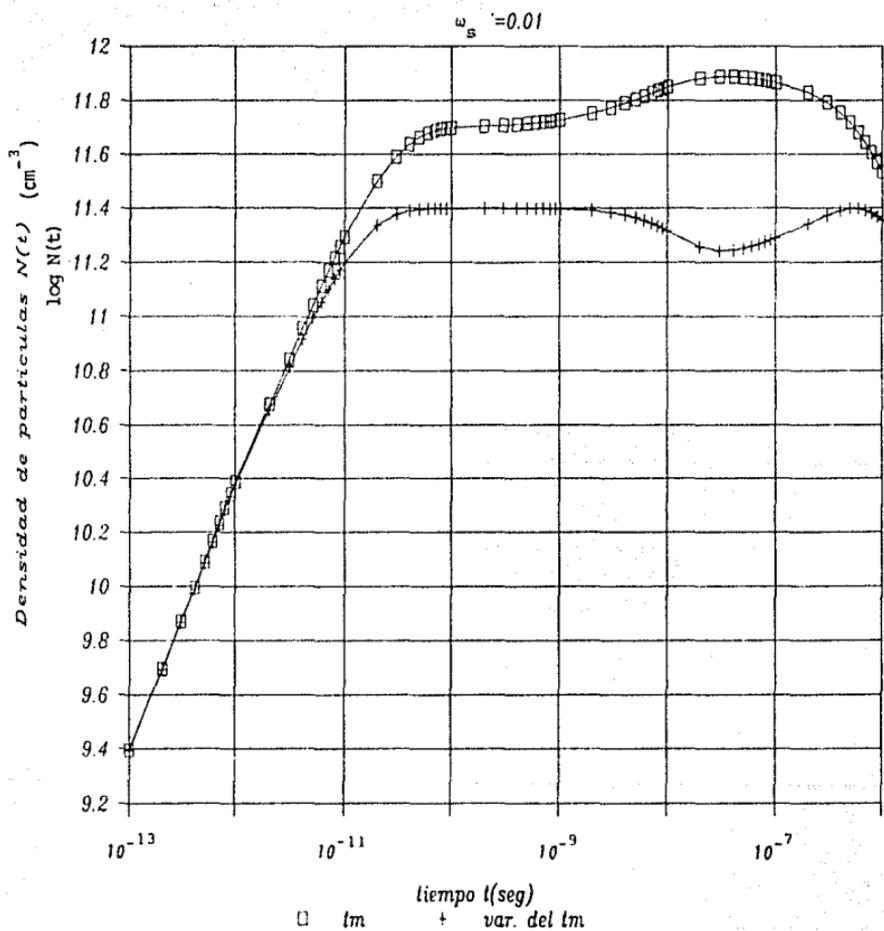


Fig. 5.6

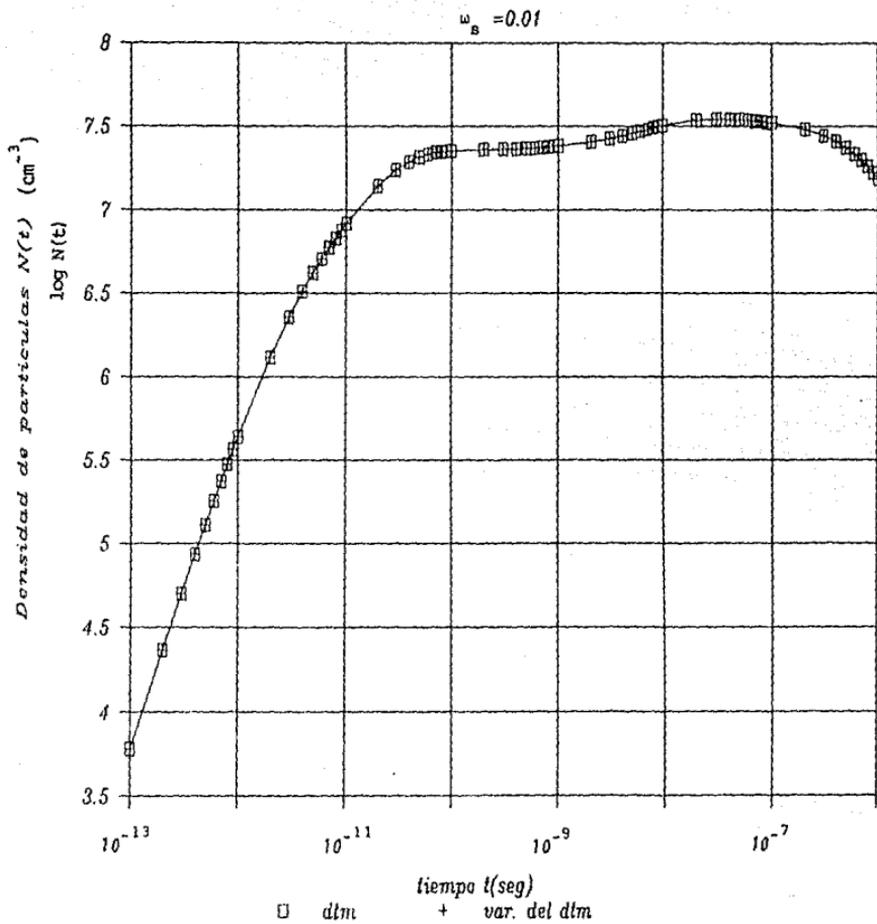


Fig. 5.7

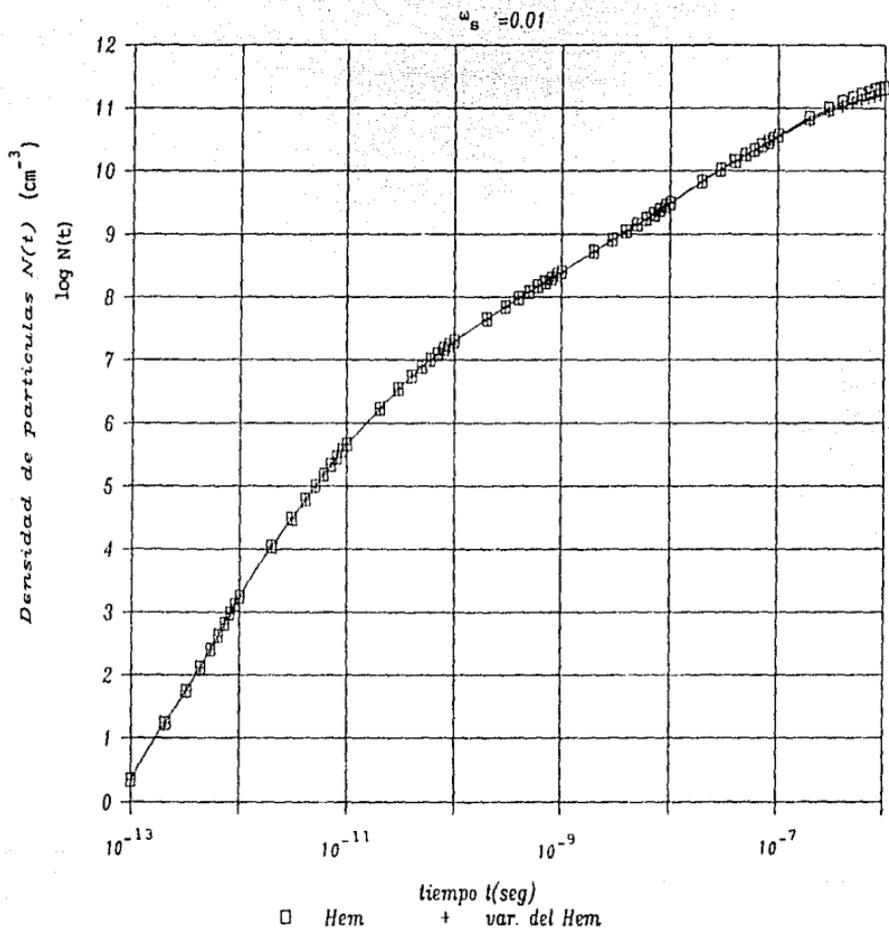


Fig. 5.8

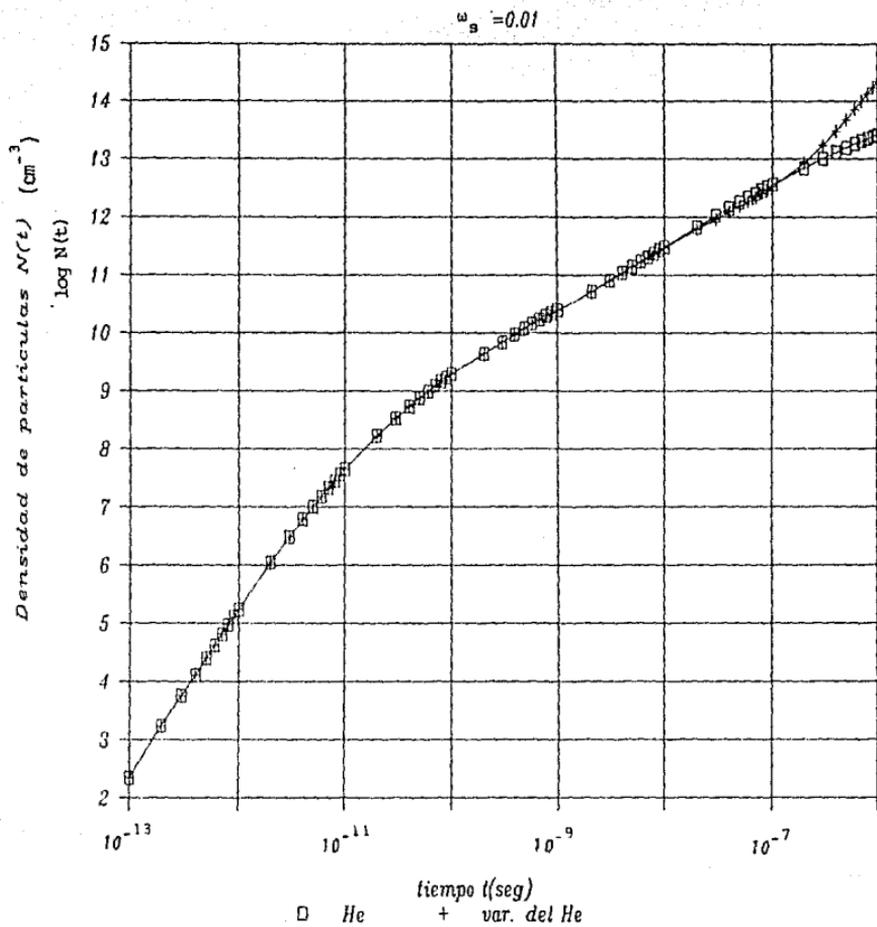


Fig. 5.9

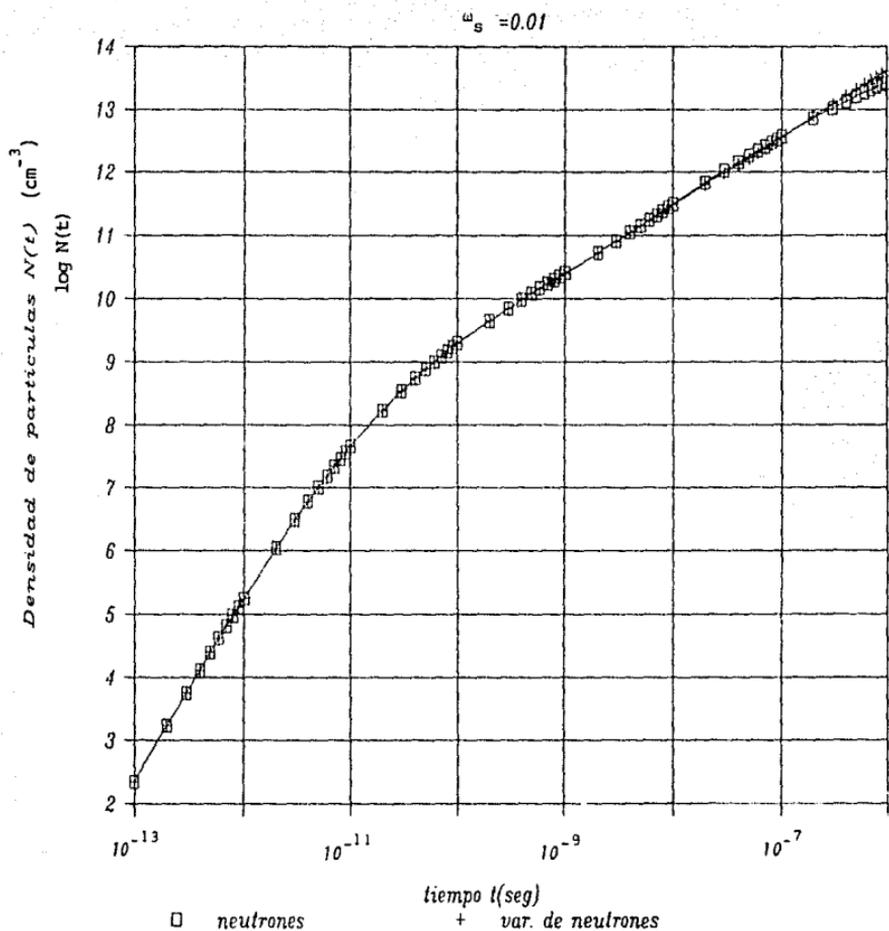


Fig. 5.10

VARIANZAS

$\omega_s = 0.01$

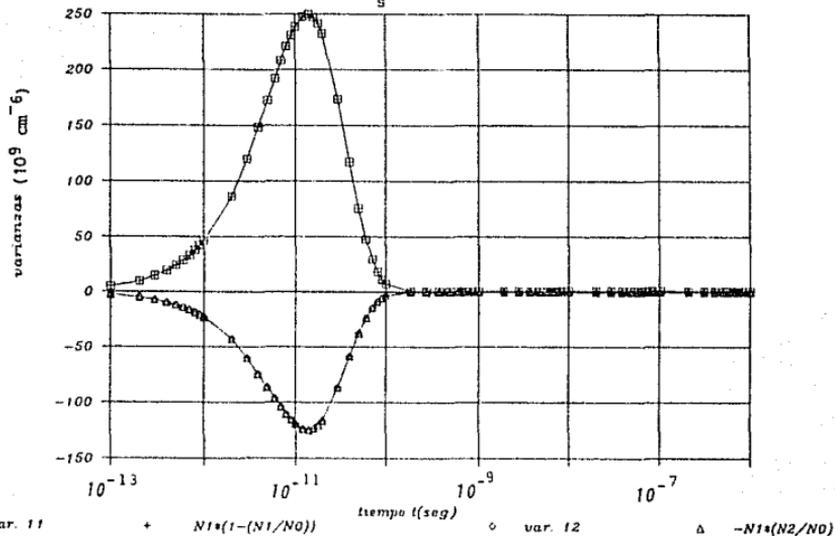


Fig. 5.11

VARIANZAS

$\omega_s = 0.01$

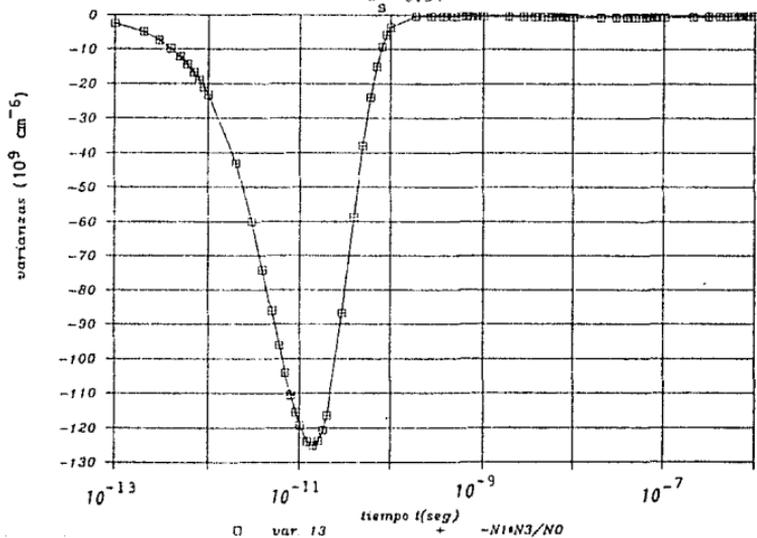


Fig. 5.12

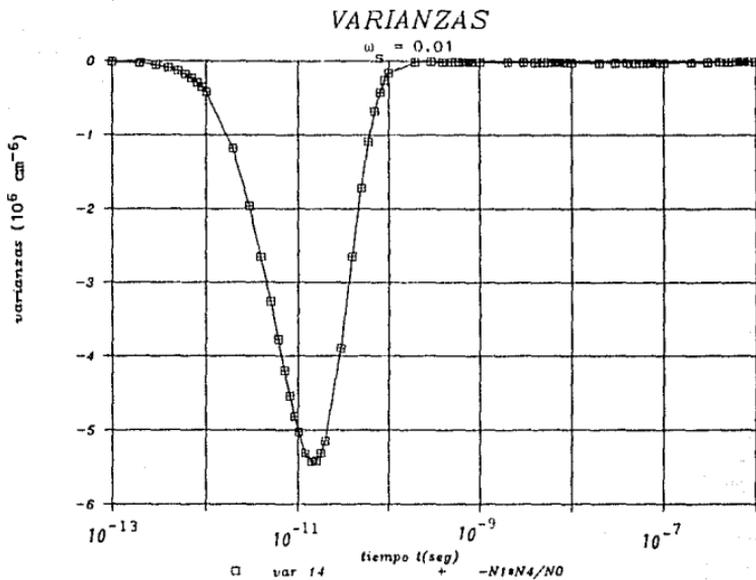


Fig. 5.13

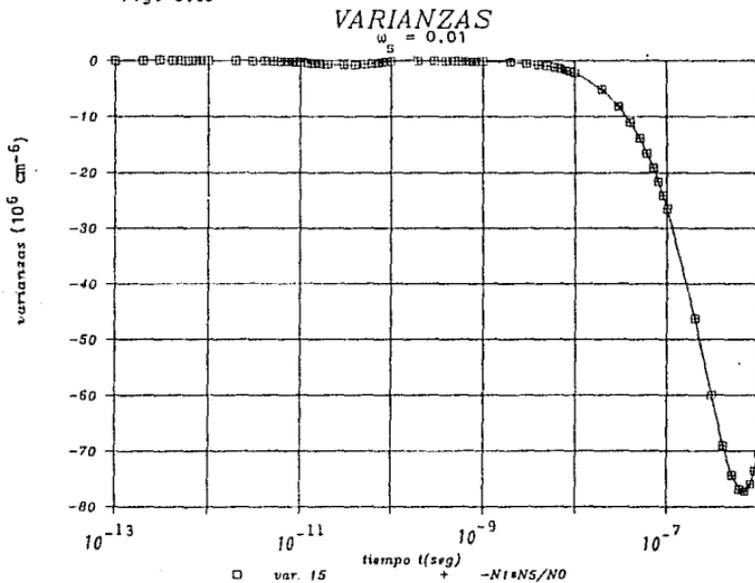


Fig. 5.14

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

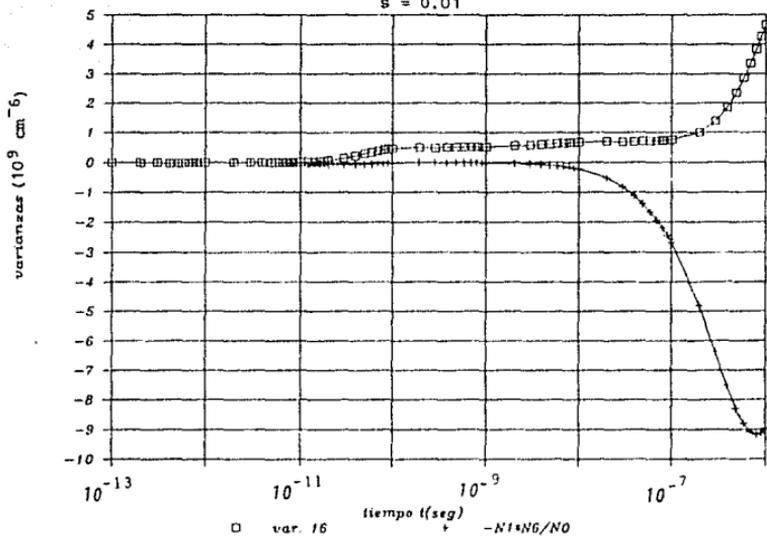


Fig. 5.15

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

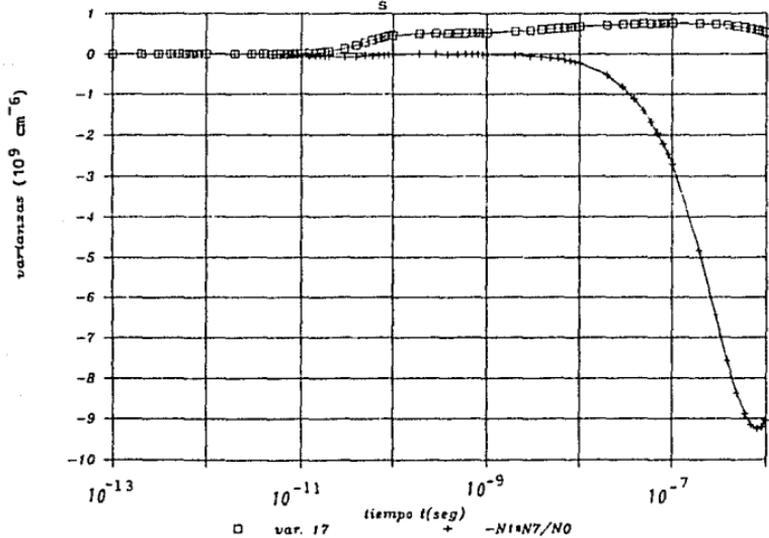


Fig. 5.16

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

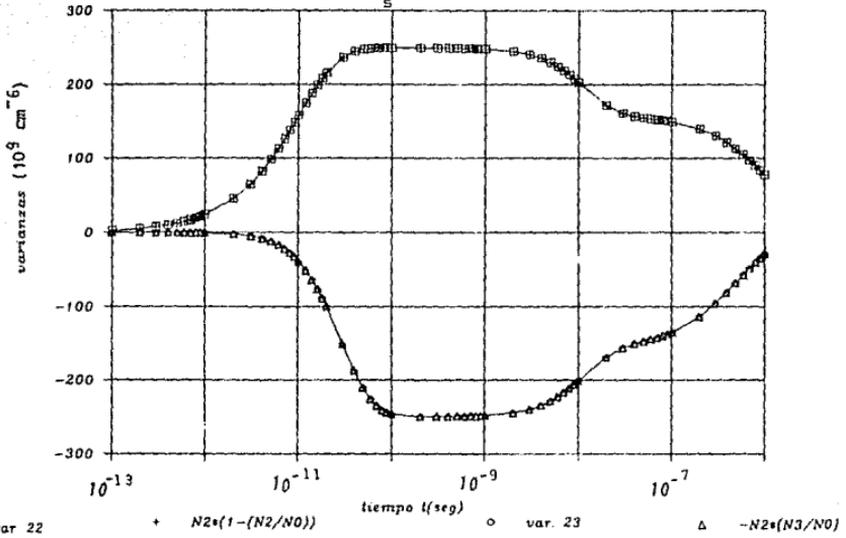


Fig. 5.17

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

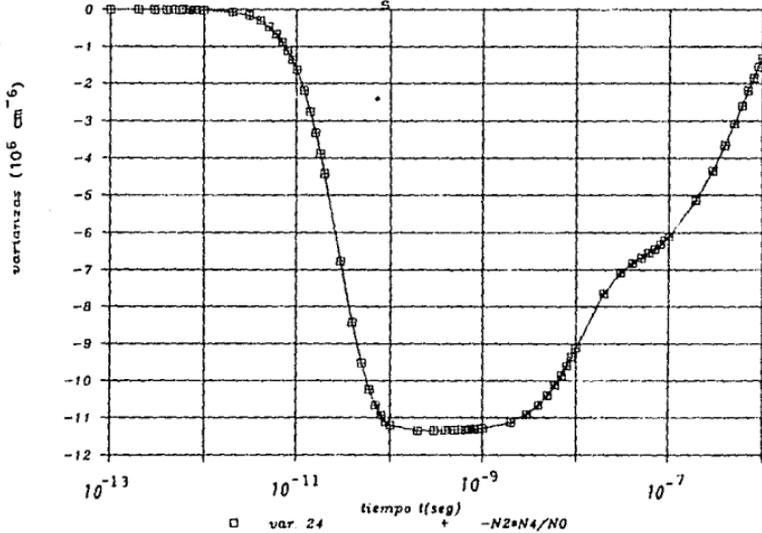


Fig. 5.18

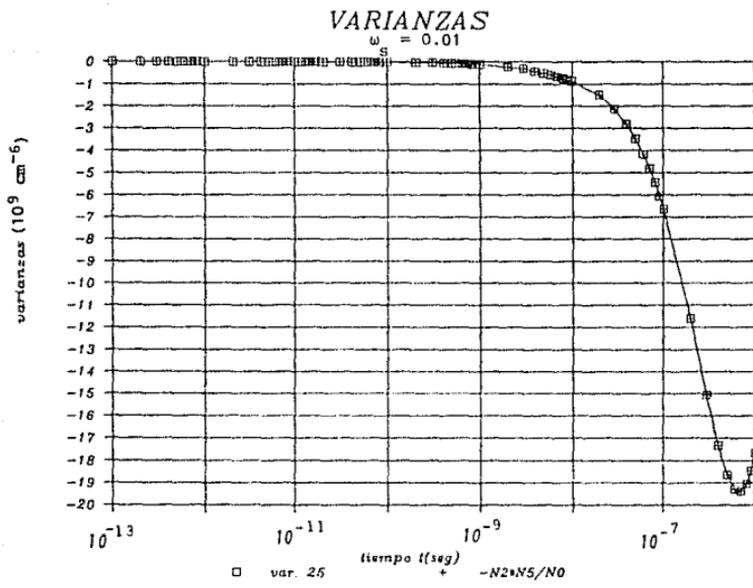


Fig. 5.19

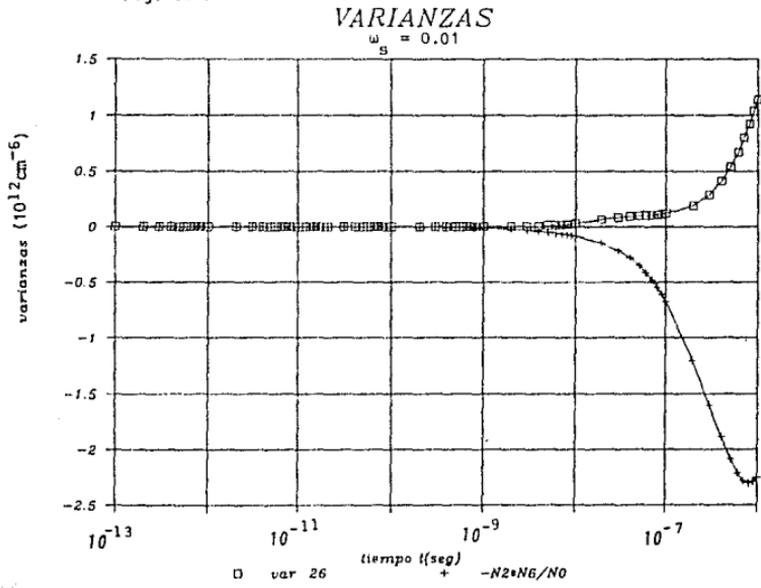


Fig. 5.20

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

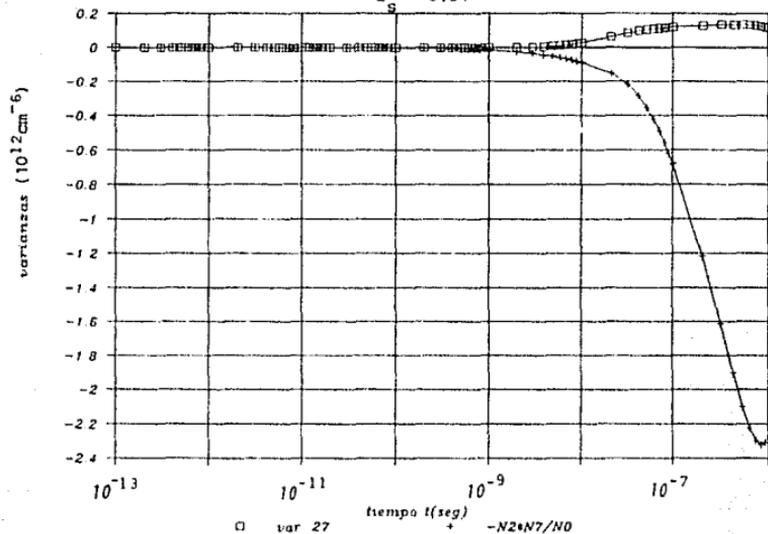


Fig. 5.21

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

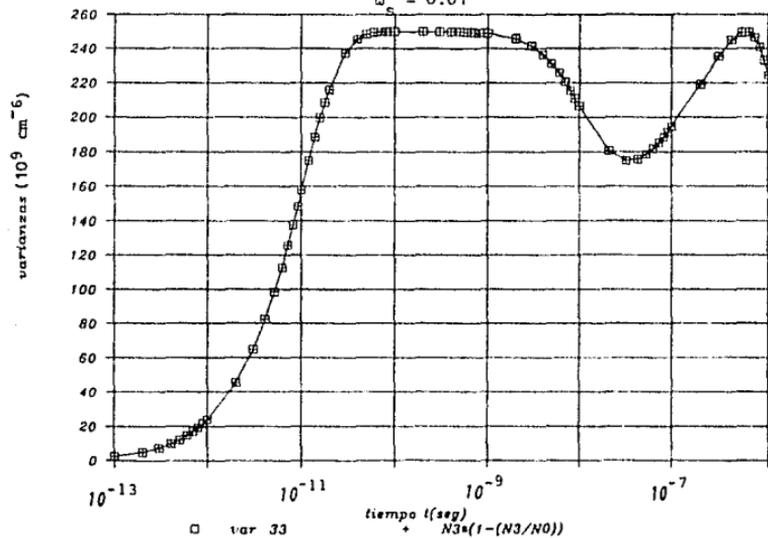


Fig. 5.22

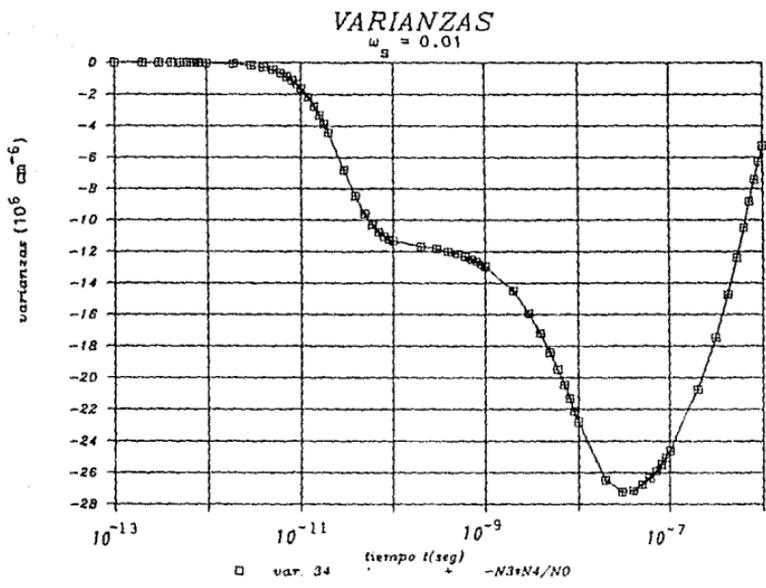


Fig. 5.23

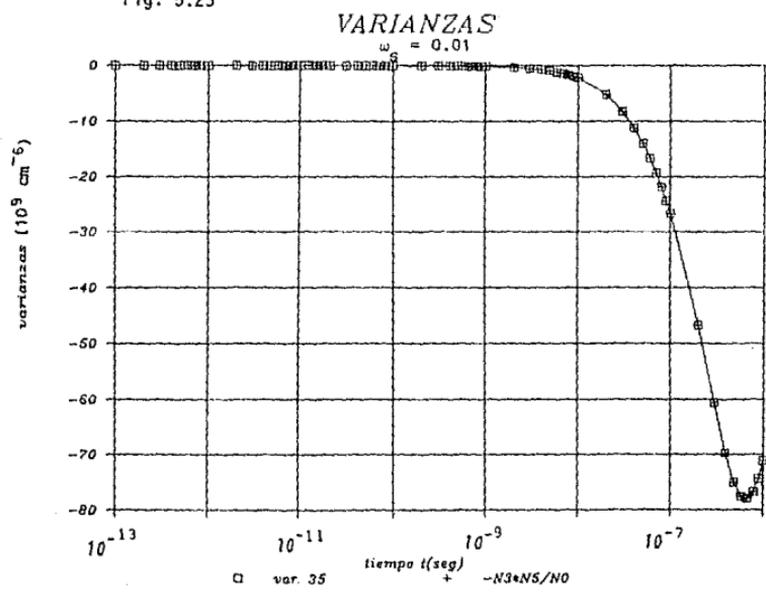


Fig. 5.24

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

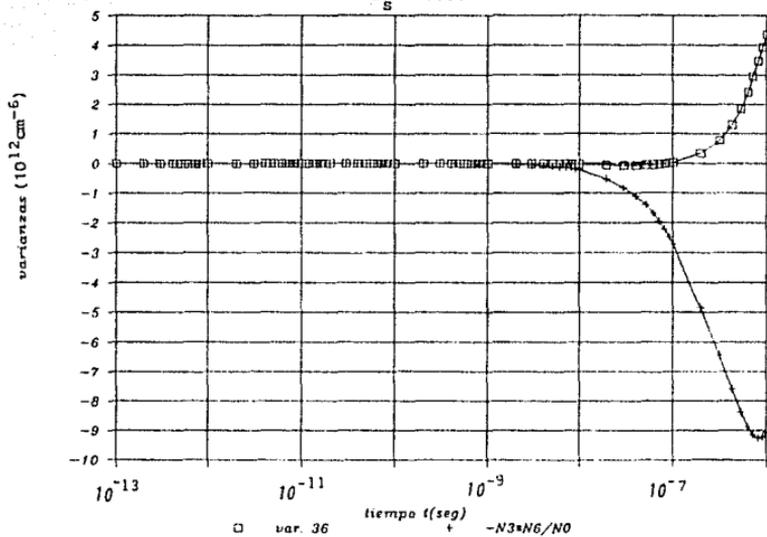


Fig. 5.25

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

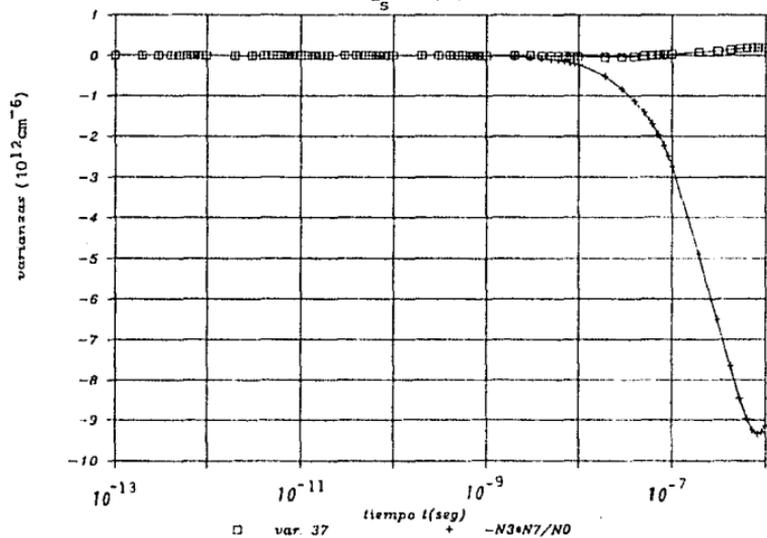


Fig. 5.26

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

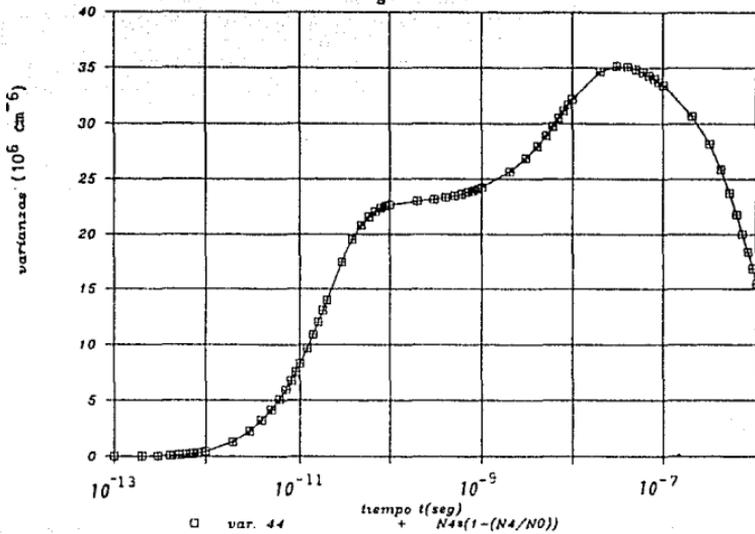


Fig. 5.27

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

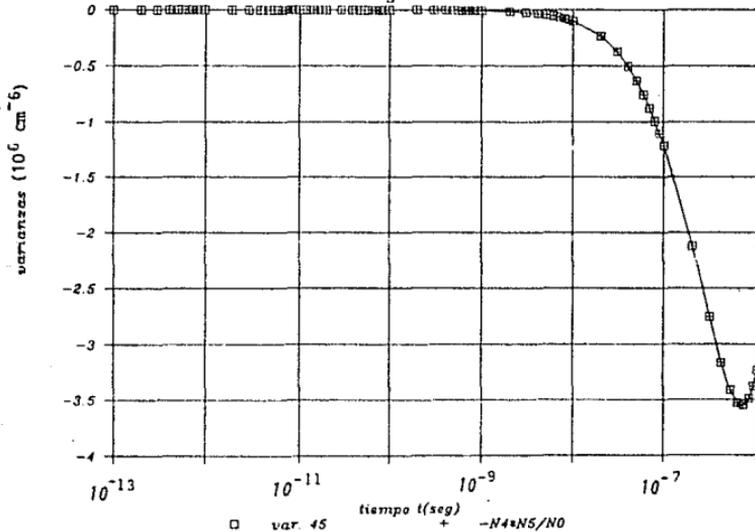


Fig. 5.28

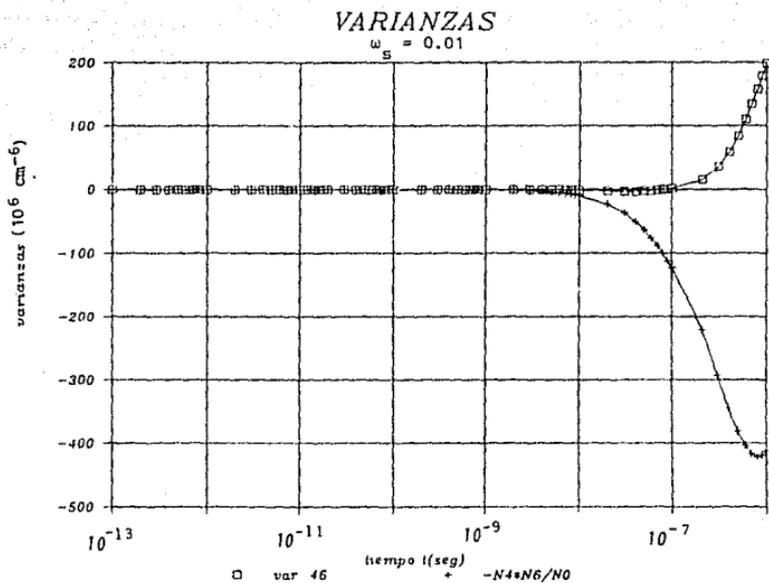


Fig. 5.29

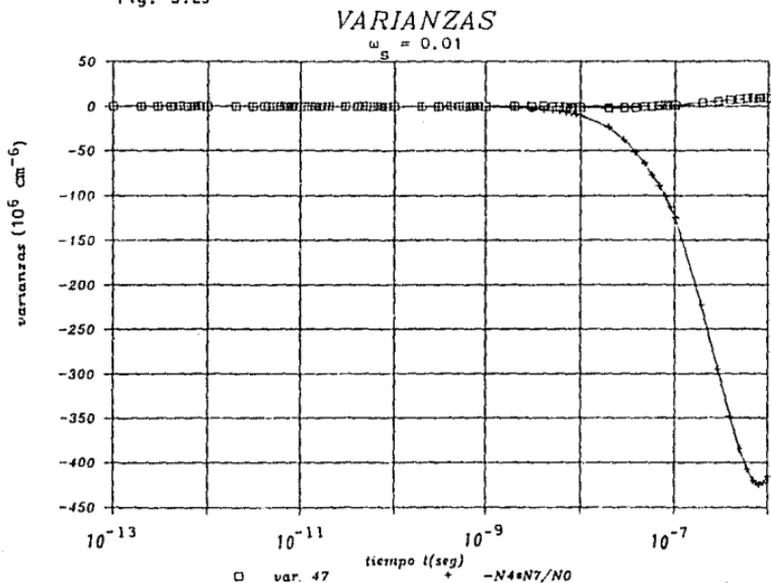


Fig. 5.30

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

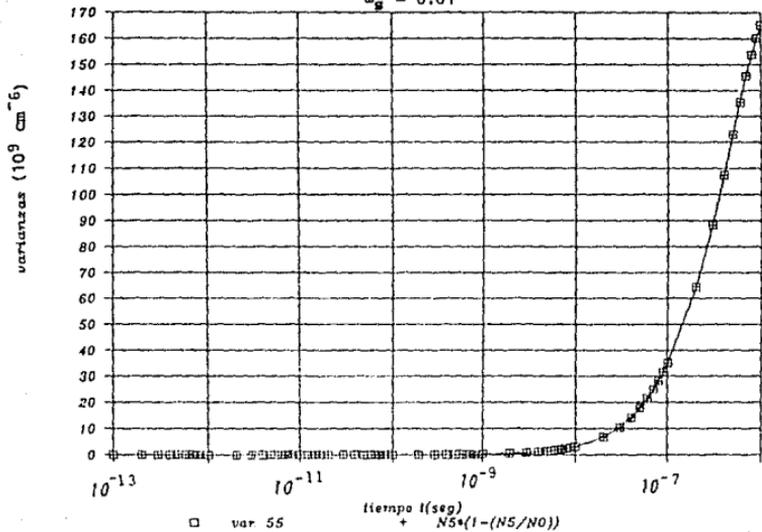


Fig. 5.31

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

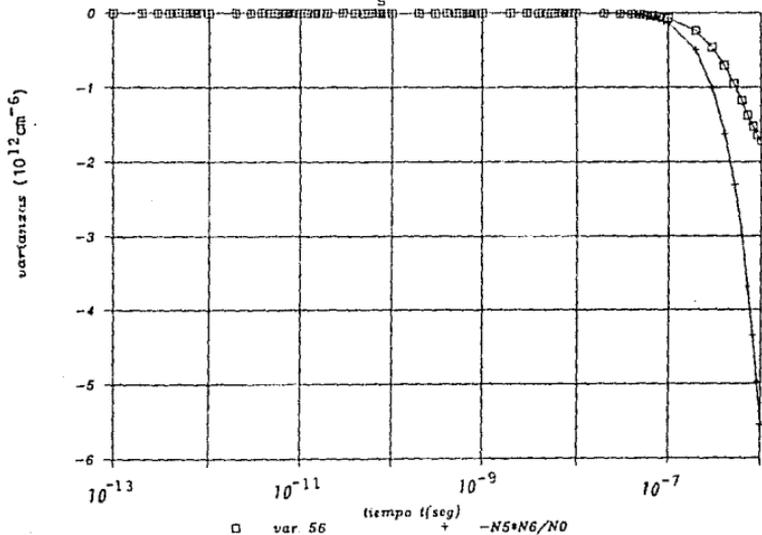


Fig. 5.32

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

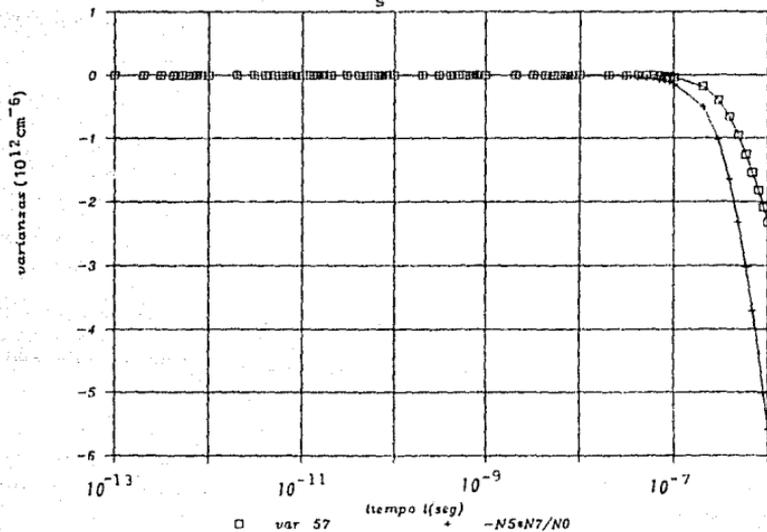


Fig. 5.33

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

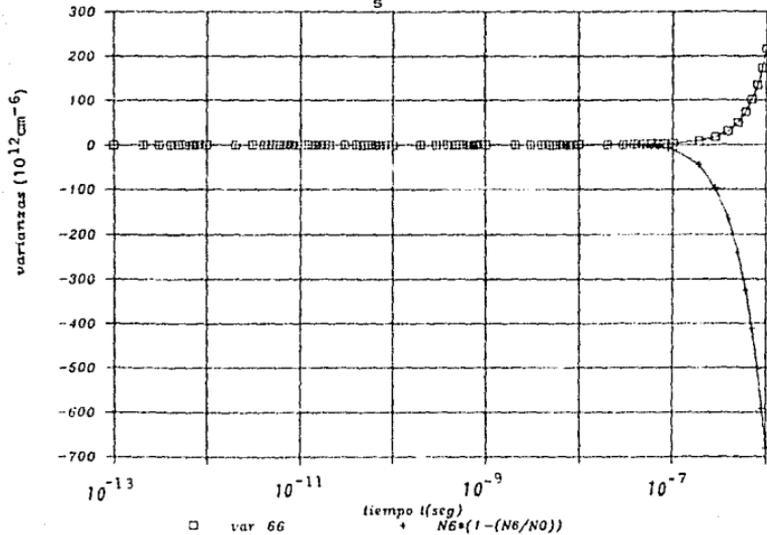


Fig. 5.34

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

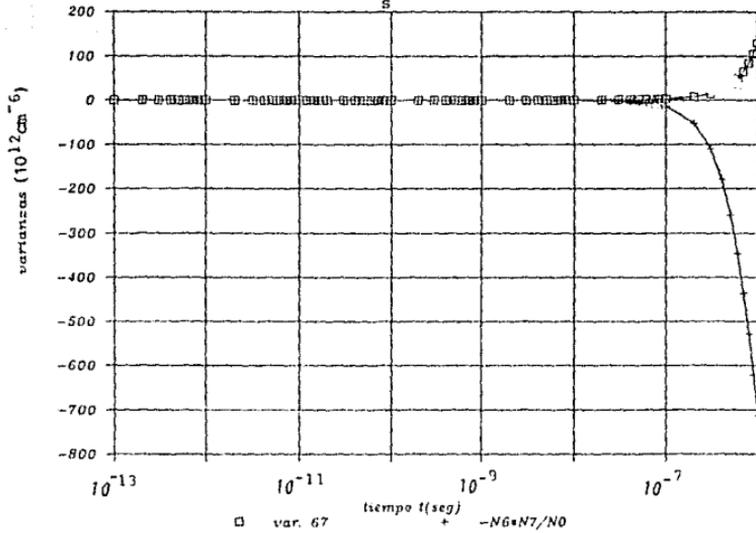


Fig. 5.35

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

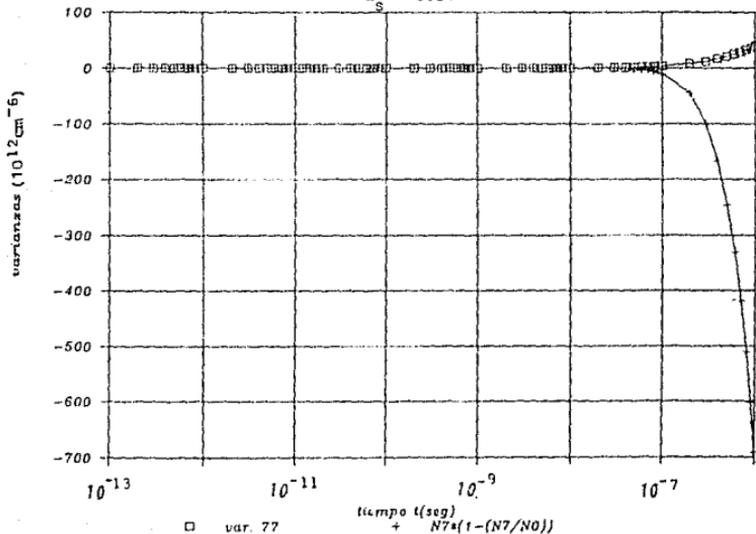


Fig. 5.36

V.2.2 DEPENDENCIA EN EL FACTOR DE ADHESION.

En las figuras 5.37, 5.38 y 5.39 se presentan las gráficas de los valores promedios de los muones, deuterios muónicos y tritios muónicos para $\omega_{\mu} = 0.1, 0.01$ y 0.001 con $C_D = C_T = 0.5$. Al principio las curvas de los muones, deuterios muónicos y tritios muónicos son muy similares pero entre 10^{-8} y 10^{-7} s. las diferencias empiezan a ser notables, cuando $\omega_{\mu} = 0.1$ más muones se quedan pegados a los helios producto de la fusión y por lo tanto se reciclan menos muones que cuando $\omega_{\mu} = 0.01$ y 0.001 , esto ocasiona que el número de átomos muónicos disminuya más rápidamente que en los otros casos, esto se aprecia claramente en las gráficas.

En las figuras 5.40 a 5.46 se presentan gráficas que contienen la serie de análisis acerca del efecto de ω_{μ} sobre las varianzas de las especies en la fusión catalizada por muones. En general un aumento en ω_{μ} ocasiona que las curvas de muones, deuterios muónicos, tritios muónicos y de iones muónmoleculares decaigan en su fase final más rápido a cero. Este resultado es lógico pues un incremento en ω_{μ} significa una reducción en el reciclamiento de muones. En las gráficas mencionadas se muestran curvas con $\omega_{\mu} = 0.1$ y $\omega_{\mu} = 0.001$, todas para $C_D = C_T = 0.5$. En general los cambios significativos en la evolución temporal de cada especie ocurren a partir de 10^{-7} , desgraciadamente debido a limitaciones de tiempo de máquina no es posible tener gráficas para tiempos mayores a los mostrados.

Las gráficas de la producción de neutrones son interesantes porque se ha estudiado teóricamente dicha producción para tiempos muy grandes es decir se han encontrado expresiones para el valor asintótico de los neutrones (Gershtein S. S. et al. [42]), la expresión aproximada para $N_n(\omega)$ esta dada por

$$\frac{1}{N_n(\omega)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_{dt} \mu_d C_d} + \frac{\lambda_0 C_d}{\lambda_{dt} C_t} + \omega_s + \frac{\lambda_{tt} \mu C_t}{\lambda_{dt} \mu C_d} \omega_t \quad (5.14)$$

debido al valor de las razones de formación resulta que

$N_n(\omega) \approx 1/\omega_s$, esto nos indica que los limites a los que tiende la producción de neutrones son diferentes de una gráfica a otra precisamente através de ω_s . Esto no se ve totalmente claro en la gráfica 5.46 para los neutrones, pero si se observa la tendencia asintótica hacia los valores esperados.

Conviene señalar que en la fig. (5.45) se empieza a observar el comportamiento esperado en la varianza de los helios, es decir, que deje está de crecer y tienda a una constante. Este fenómeno es observable a tiempos menores cuando se incrementa importantemente ω_s , como en el caso de la fig. (5.45) con $\omega_s = 0.1$.

NUMERO DE PARTICULAS

MUONES

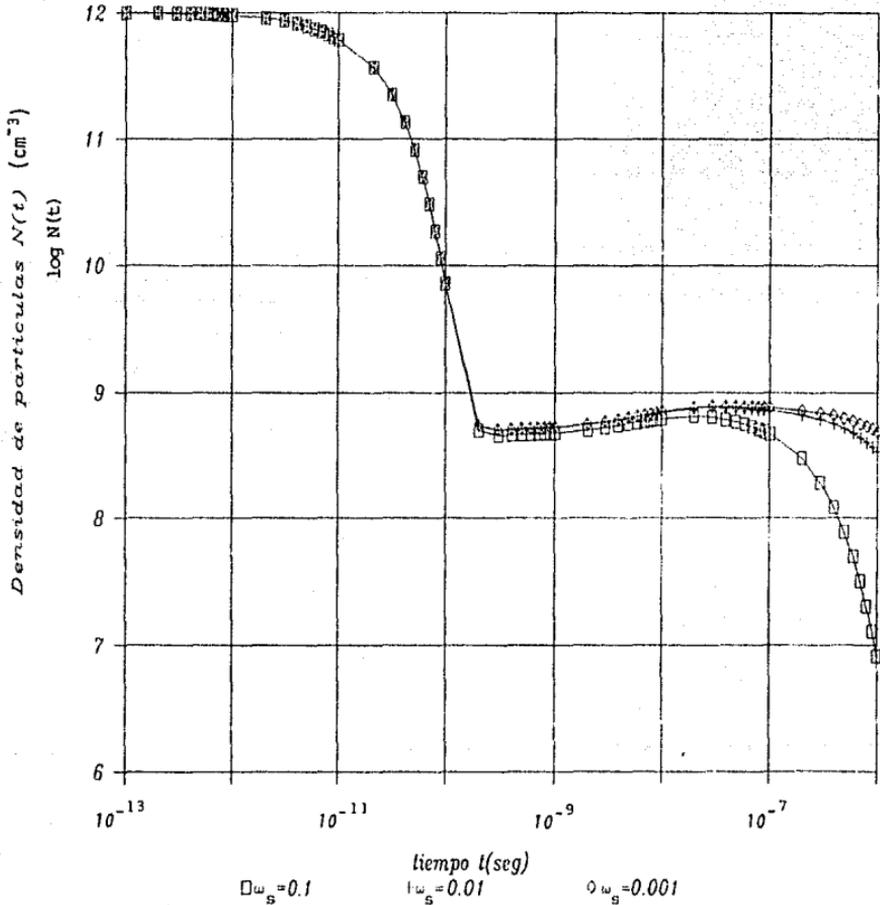


Fig. 5.37 Evolución temporal de los muones para diferentes valores ω_s , con $C_D = C_T = 0.5$

NUMERO DE PARTICULAS

DEUTERIO MUONICO

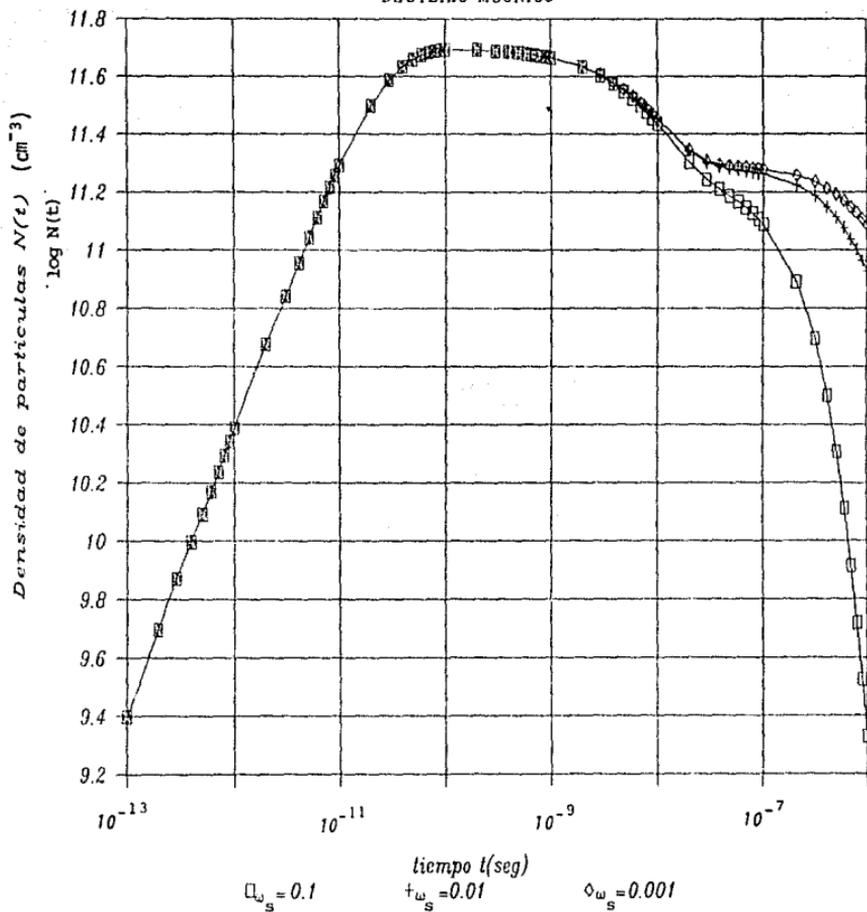


Fig. 5.38 Evolución temporal del deuterio muónico para diferentes valores de ω_s , $C_D = C_T = 0.5$

NUMERO DE PARTICULAS

TRITIO MUONICO

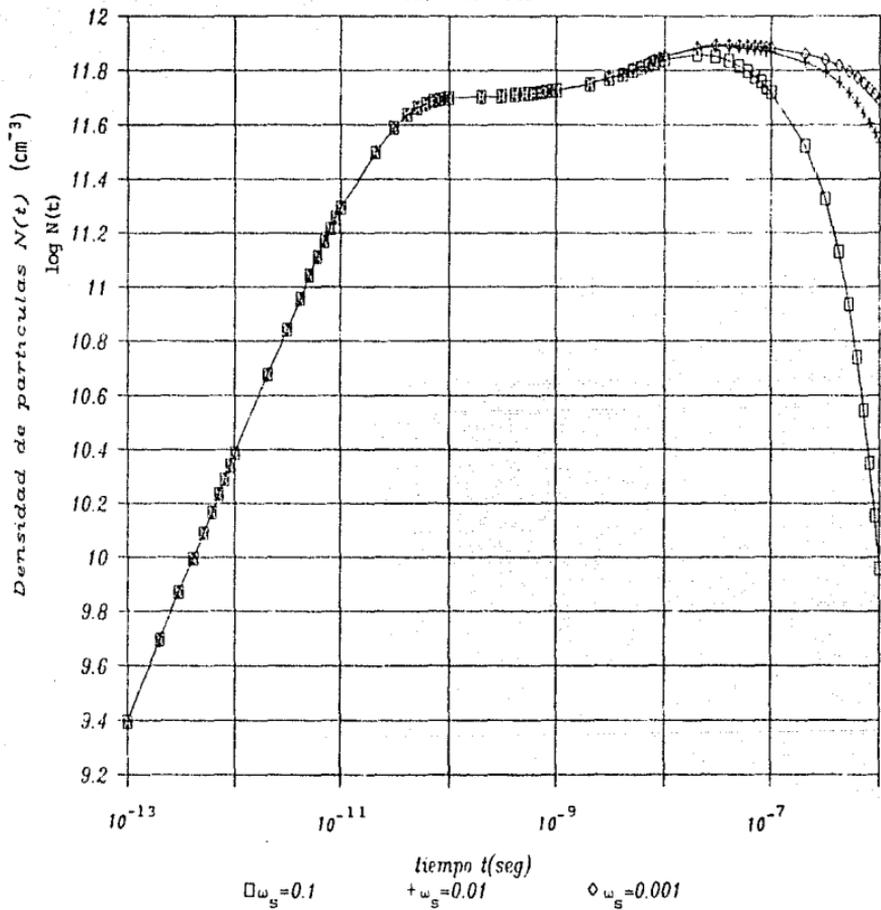


Fig. 5.39 Evolución temporal del tritio muónico para diferentes valores de ω_s , $C_D = C_T = 0.5$

NUMERO DE PARTICULAS

muestras y autocovarianza

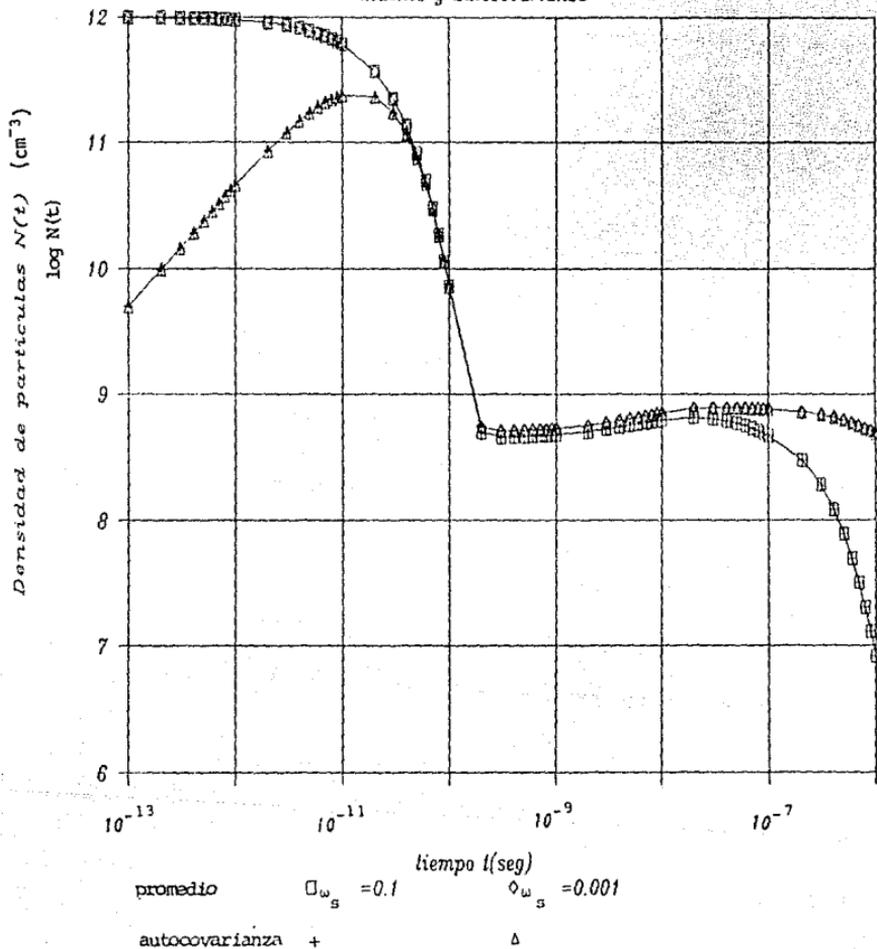


Fig. 5.40

NUMERO DE PARTICULAS

dm y autocovarianza

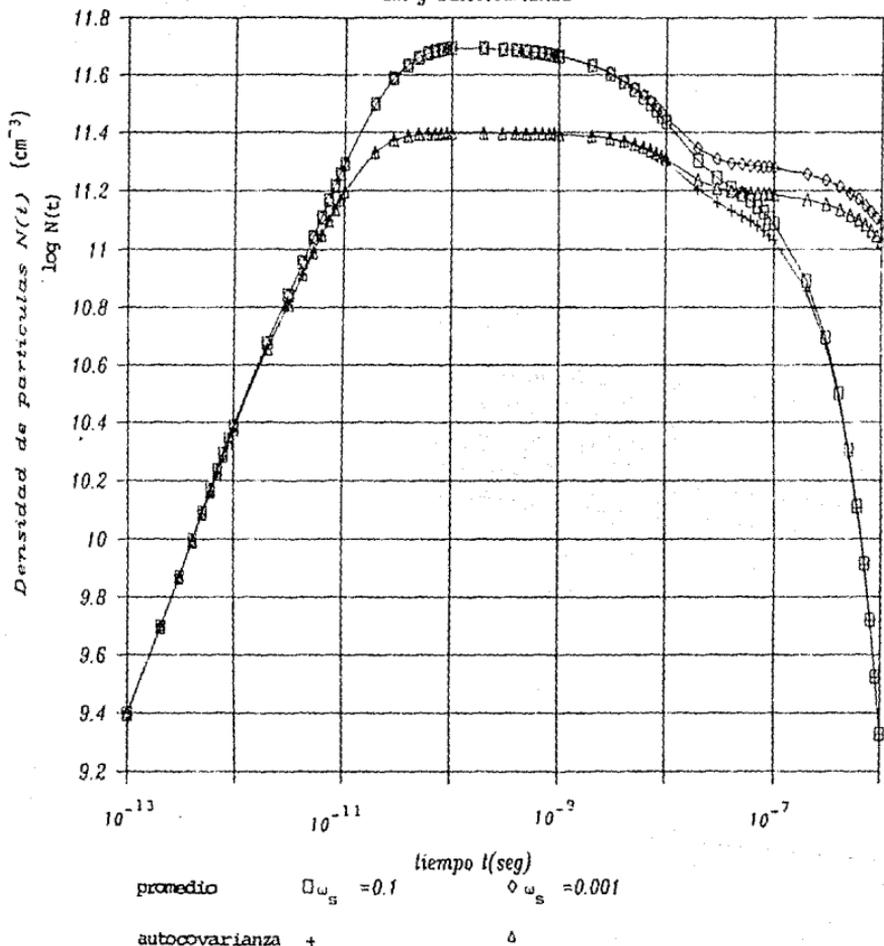


Fig. 5.41

NUMERO DE PARTICULAS

tm y autocovarianza

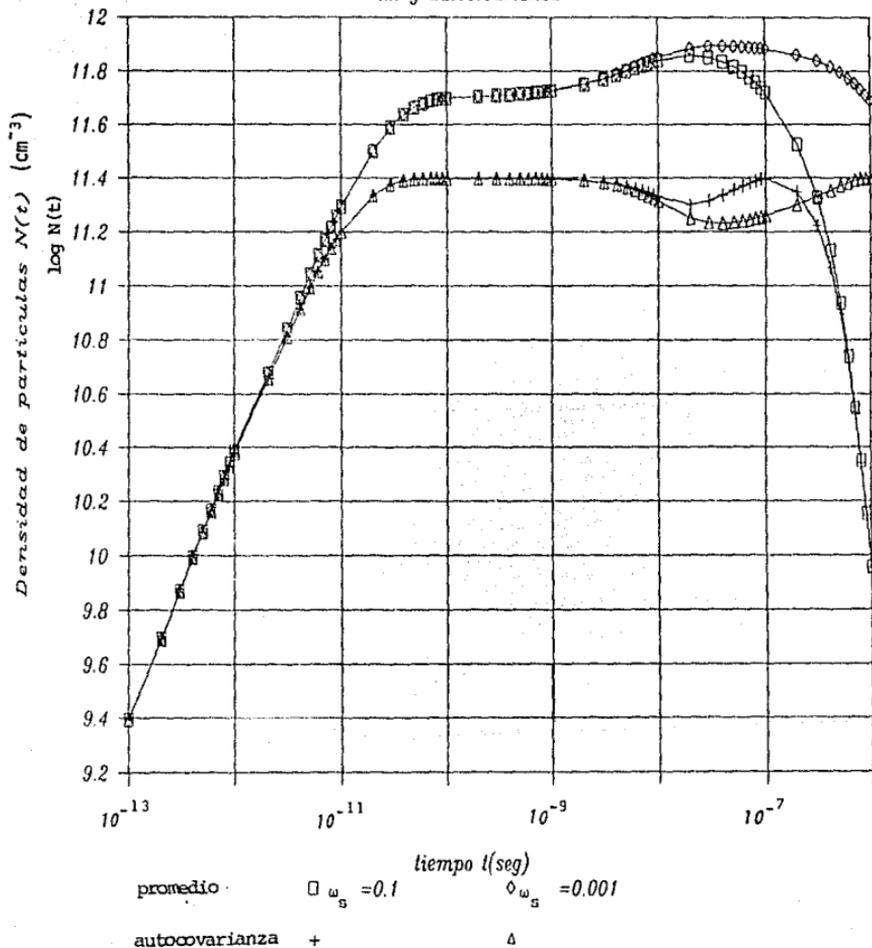


Fig. 5.42

NUMERO DE PARTICULAS

dtm y autocovarianza

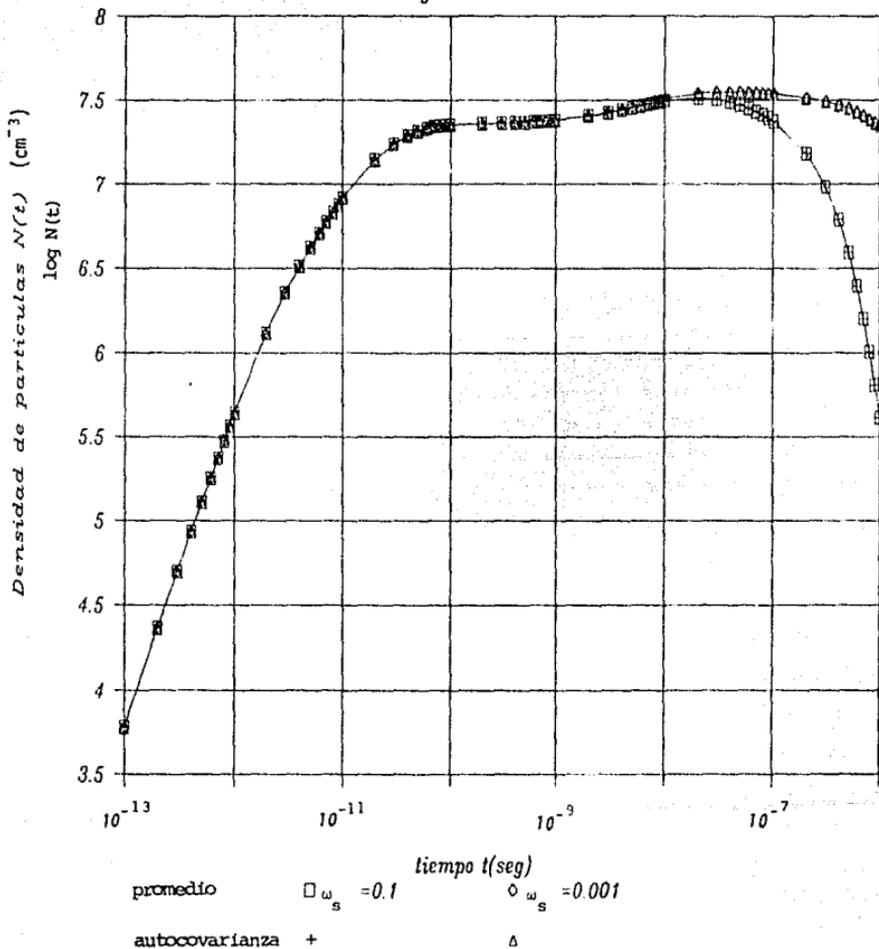


Fig. 5.43

NUMERO DE PARTICULAS

Hem y autocovarianza

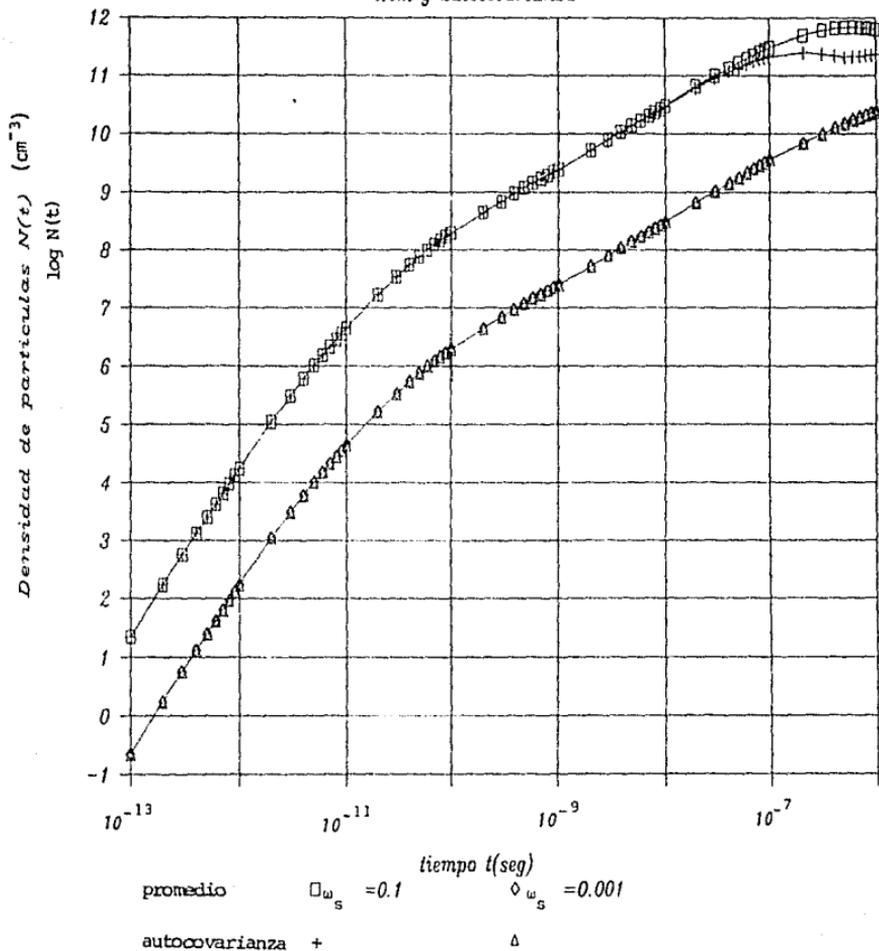


Fig. 5.44

NUMERO DE PARTICULAS

He y autocovarianza

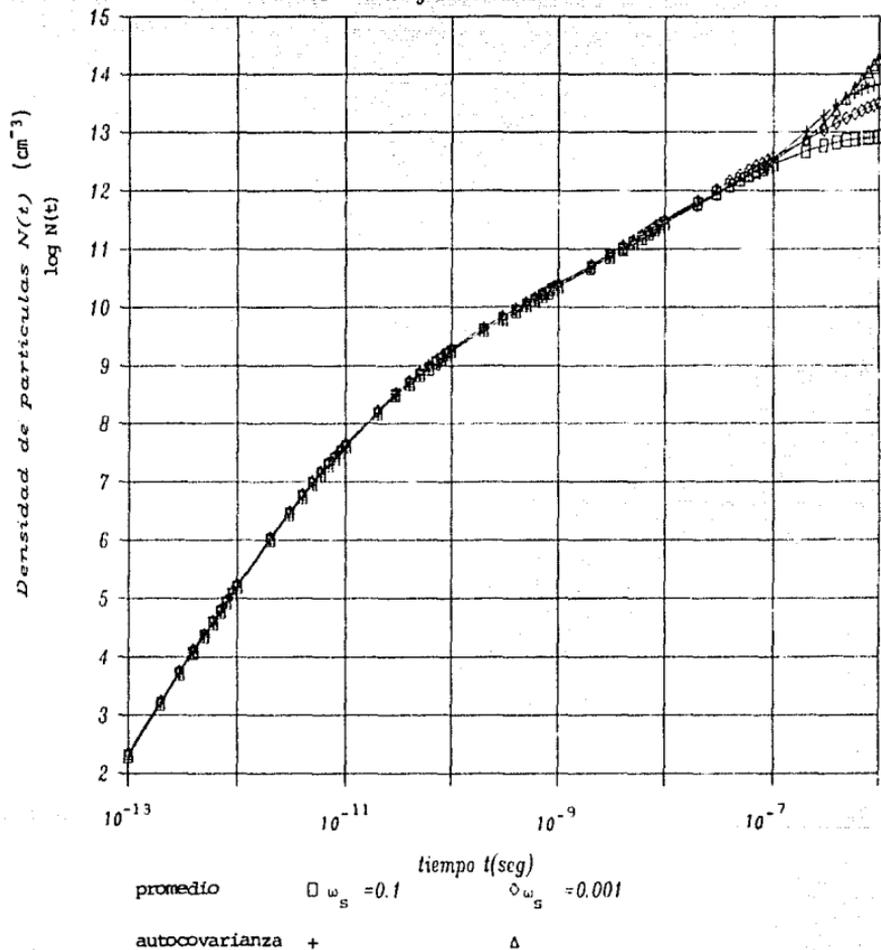


Fig. 5.45

NUMERO DE PARTICULAS

neutrones y autocovarianza

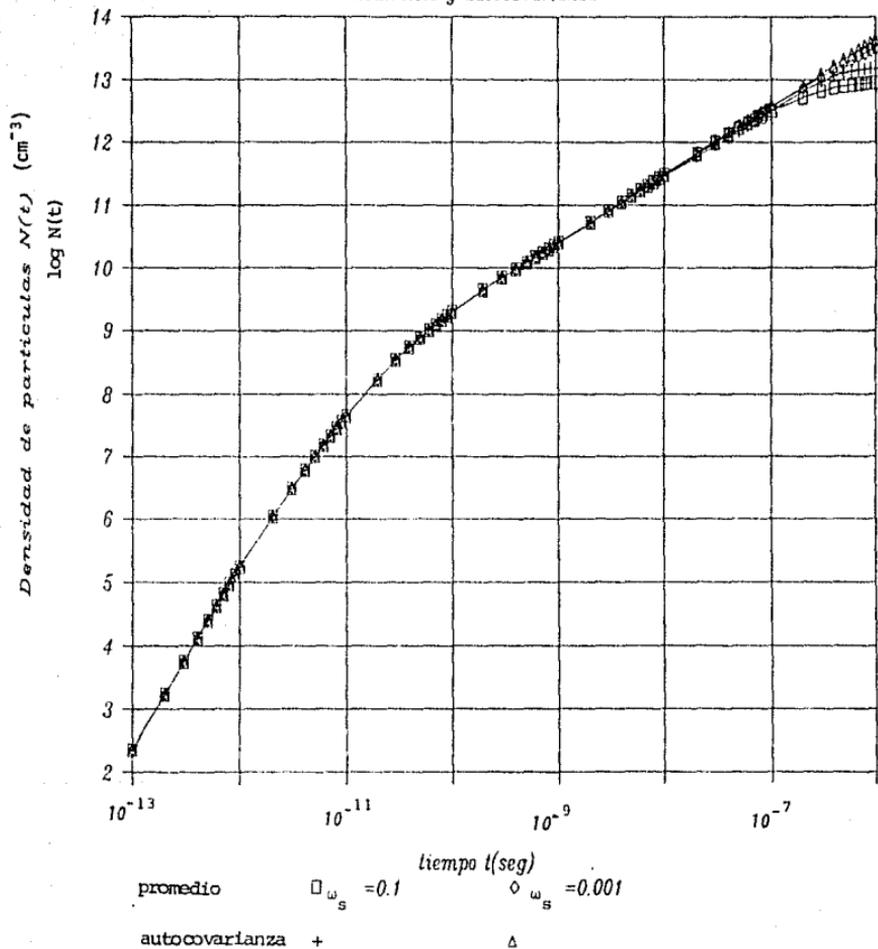


Fig. 5.46

V.2.3 DEPENDENCIA EN LA CONCENTRACION DE LA MEZCLA

En la figura 5.47 se muestran curvas de las densidades de muones, de deuterios muónicos y tritios muónicos con $\omega_a = 0.001$ y $C_D = 0.7$, $C_T = 0.3$, se quiere analizar el efecto que tienen las concentraciones en la dinámica del proceso; para tiempos pequeños hay más deuterio muónico que tritio muónico, como es de esperarse, por que hay más deuterios en la mezcla pero a medida que transcurre el tiempo el número de tritios muónicos aumenta debido a la transferencia de los muones del deuterio al tritio. A partir de 10^{-8} s. el número de tritios muónicos llega ser tan grande como en el caso en que $C_D = C_T = 0.5$ con la misma ω_a .

NUMERO DE PARTICULAS

$$\epsilon_s = 0.001$$

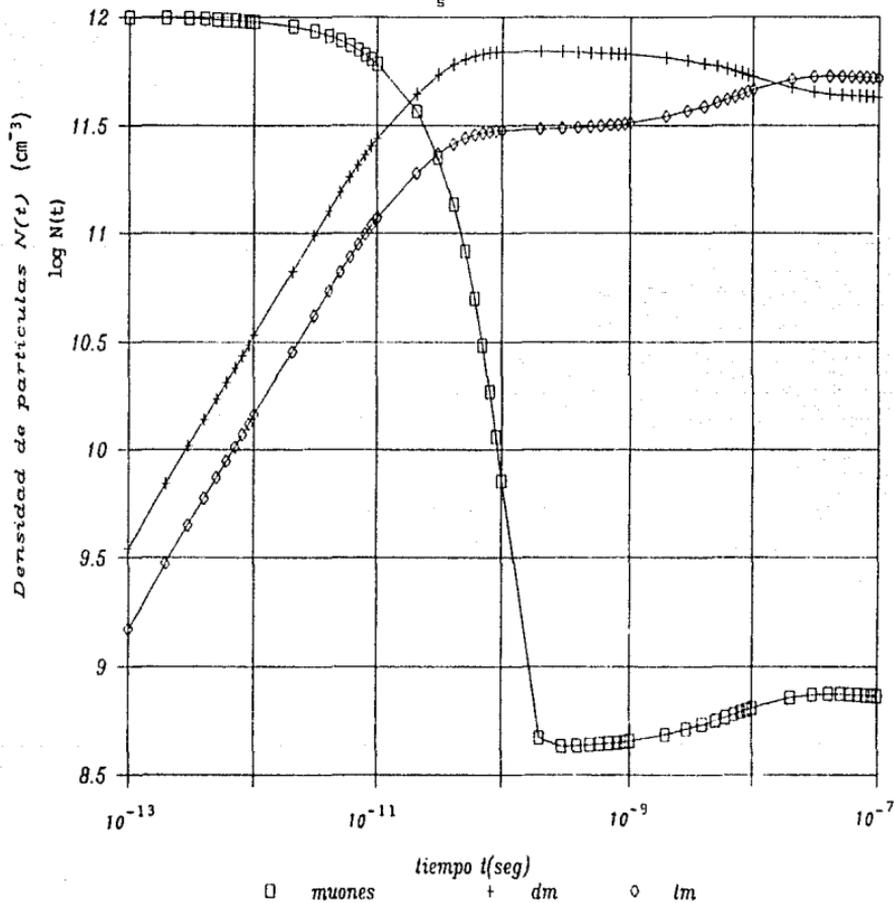


Fig. 5.47 Evolución temporal de las densidades para varias partículas cuando se inyecta un pulso de muones $C_D = 0.3$, $C_T = 0.7$

V.3 ESTADISTICA DE LA RAMA PRINCIPAL CON FUENTE CONSTANTE DE MUONES

Se analizó también el caso en que se tiene una fuente estadísticamente constante, S_0 , que proporciona 10^{20} muones/seg. durante 10^{-8} s., como condiciones iniciales se toman:

$$N_1(0) = N_2(0) = \dots = N_7(0) = 0.$$

A continuación se presentan gráficas de la evolución temporal del sistema con las mismas razones de formación usadas en la sección anterior y con $\omega_\mu = 0.01$.

En la figura 5.48 se muestra la gráfica de los muones con su varianza, al principio la varianza y el promedio son distintos uno del otro pero luego estos se igualan después de desconectar la fuente. Esto último es indicio de que se puede tratar de un proceso de Poisson para tiempos posteriores a la interrupción de la fuente. Sin embargo, debido a que el máximo de $\sigma_{\mu\mu}^2$ ocurre en el máximo de N_μ ($\approx 10^{-8}$ s.) parece más bien tratarse de un proceso binomial.

En las curvas se observa una caída abrupta después de 10^{-8} s., lo cual es natural debido a que ya no se están introduciendo más muones al sistema. Posteriormente el número se mantiene constante por los efectos de la formación de los iones $d\mu$, como se mencionó anteriormente, que producen la fusión y el reciclamiento de los muones, esto depende claramente del coeficiente de adhesión. Con los datos obtenidos podemos analizar como influyen los diferentes valores de ω_μ en la evolución temporal de cada especie y en particular en la producción de neutrones. Desgraciadamente como en

la sección anterior, el tiempo de máquina impidió llegar a tiempos suficientemente largos para observar el valor límite alcanzado por el número de neutrones, que teóricamente es proporcional a ω_{μ}^{-1} para el caso sin fuente, un análisis importante sería estimar el valor límite para el caso con fuente.

En las figuras 5.49 y 5.50 se presentan los deuterios muónicos con sus varianzas y los tritios muónicos con sus varianzas, aquí también se observan las propiedades de la distribución binomial mencionadas anteriormente.

Para tiempos posteriores a 10^{-11} s. la varianza y el promedio son distintos y cuando se corta la fuente el número de deuterios muónicos disminuye pero el número de tritios aumenta; esto, como se explicó, es debido a la transferencia de muones del deuterio al tritio a causa de las colisiones entre estos átomos.

En las figuras 5.51, 5.52, 5.53 y 5.54 que corresponden a los iones $d\mu$, a los helios muónicos, a los helios y a los neutrones con sus respectivas varianzas, se observa que dichas varianzas son aproximadamente iguales a los valores medios de las especies mencionadas. Resulta interesante llegar al valor asintótico de la curva de neutrones para poder determinar cuantas fusiones por muón se pueden lograr con ese valor de ω_{μ} , pero esto involucra avanzar otro orden de magnitud en el tiempo, lo cual, debido al criterio de convergencia del proceso iterativo en la expresión numérica para el corrector, implica que el valor de h (paso en el tiempo) debe permanecer suficientemente pequeño, luego entonces el tiempo de máquina en la MICROVAX II del I.C.N. aumentaría de 100 hrs. (que es el tiempo necesario para llegar a tiempos del orden de 10^{-6} s.) a 1000 hrs.

En las figuras 5.55 a la 5.73 se presentan todas las varianzas, en varias gráficas se puede apreciar un comportamiento similar al observado en las varianzas cruzadas cuando no se tiene fuente de muones, en el caso anterior se comparaban las gráficas con las expresiones obtenidas de la función generadora multinomial, en este caso no es tan fácil obtener una expresión de una función multinomial por que al tomar como tiempo inicial cualquier tiempo después de desconectar la fuente las condiciones iniciales son tales que se tiene una población distinta de cero en todas las especies. En general se puede decir sólo por comparación que las especies para el caso con fuente parecen seguir una distribución multinomial excepto las especies terminales que son los helios y los neutrones; aquí también se observa que en ciertas regiones las especies se comportan como si siguieran una distribución de Poisson, especialmente al principio y al final después de que se corta la fuente, esto se puede observar en las figuras 5.48 a la 4.54.

NUMERO DE PARTICULAS

$$\omega_s = 0.01$$

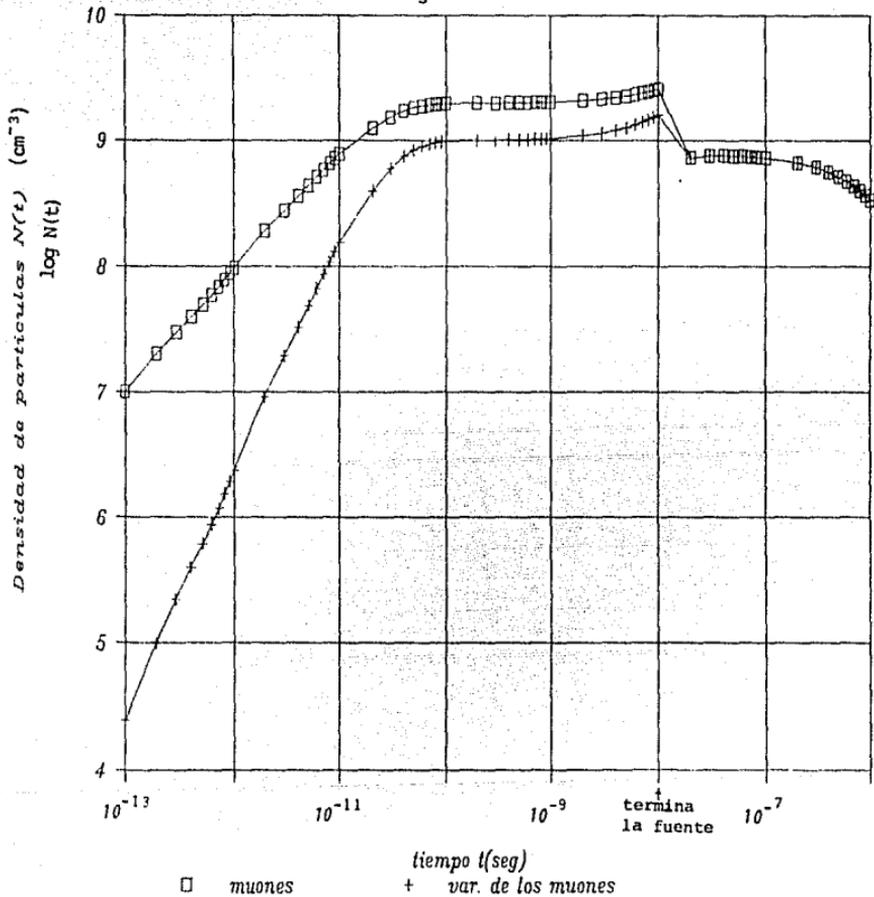


Fig. 5.48 Evolución de las densidades para varias partículas cuando se tiene una fuente constante de muones hasta 10^{-8} s., $C_D = C_T = 0.5$

NUMERO DE PARTICULAS

$$\omega_s = 0.01$$

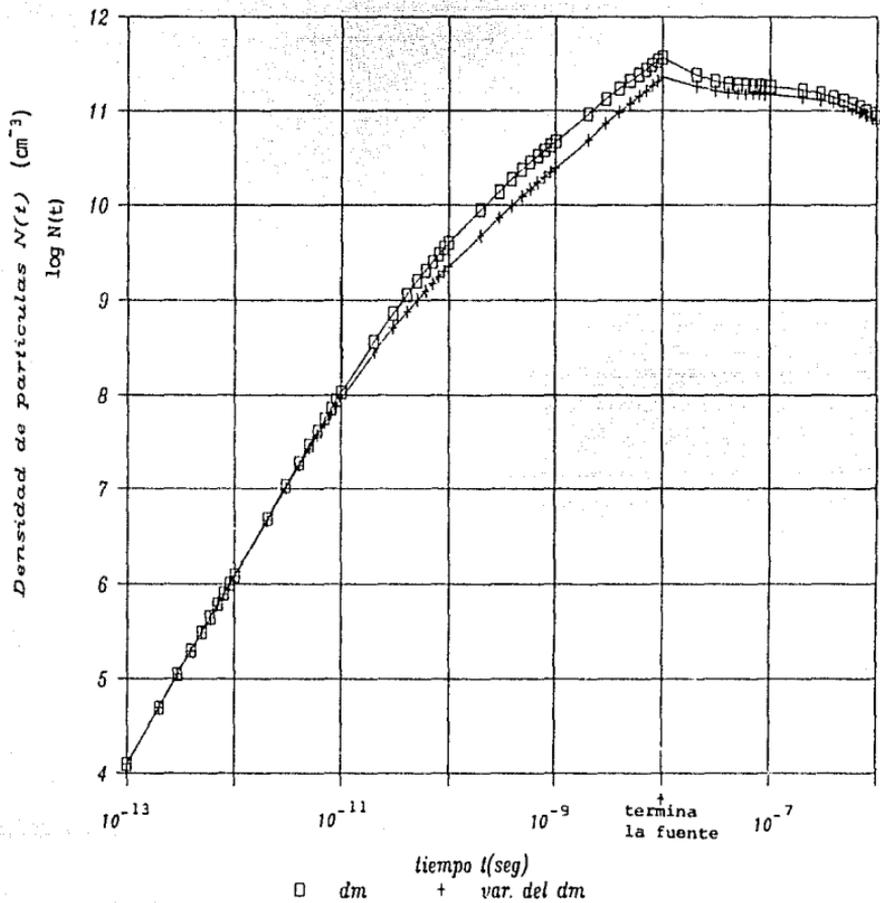


Fig. 5.49

NUMERO DE PARTICULAS

$$\epsilon_s = 0.01$$

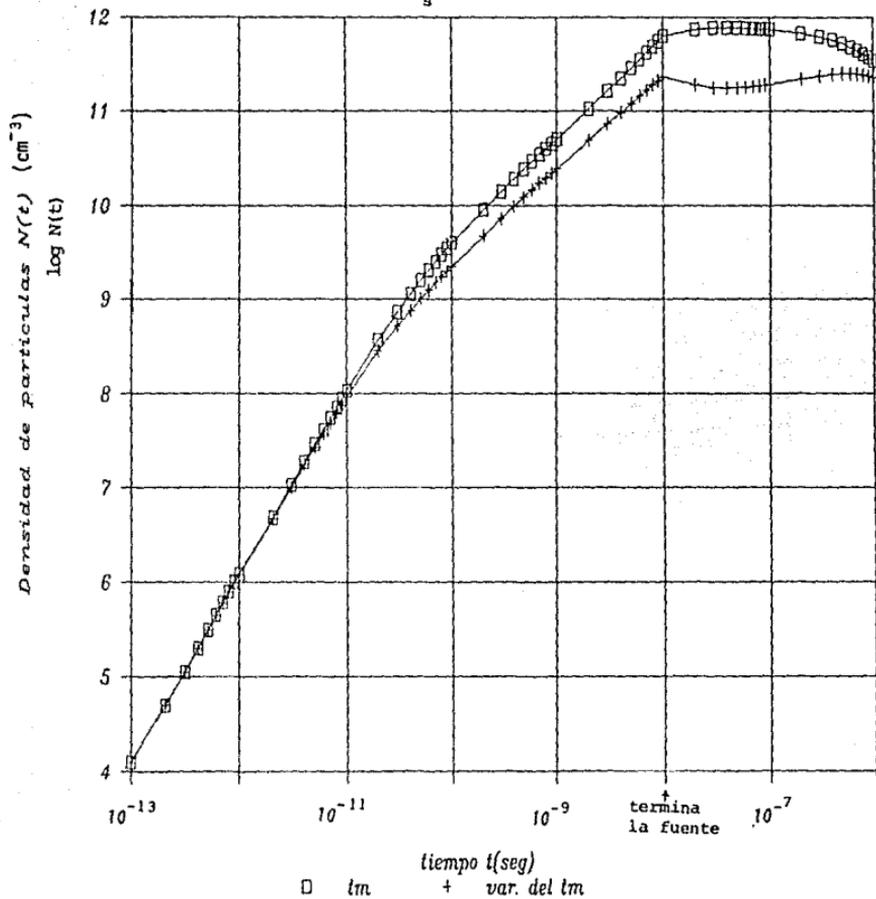


Fig. 5.50

NUMERO DE PARTICULAS

$$\omega_5 = 0.01$$

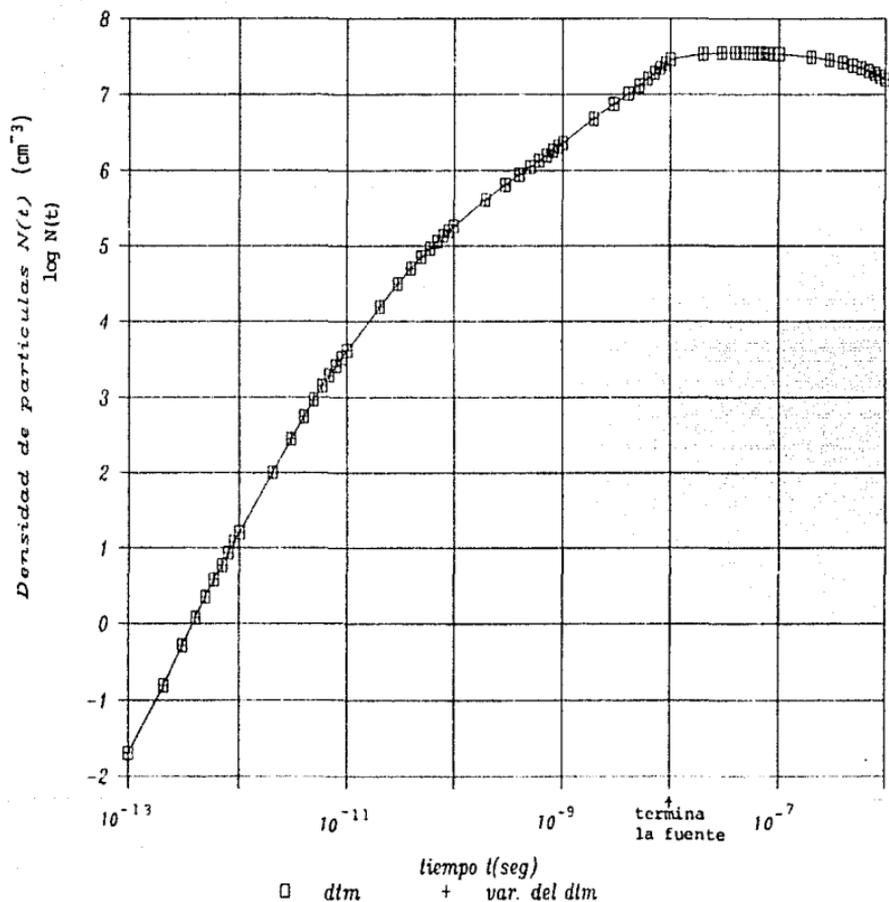


Fig. 5.51

NUMERO DE PARTICULAS

$$\omega_s = 0.01$$

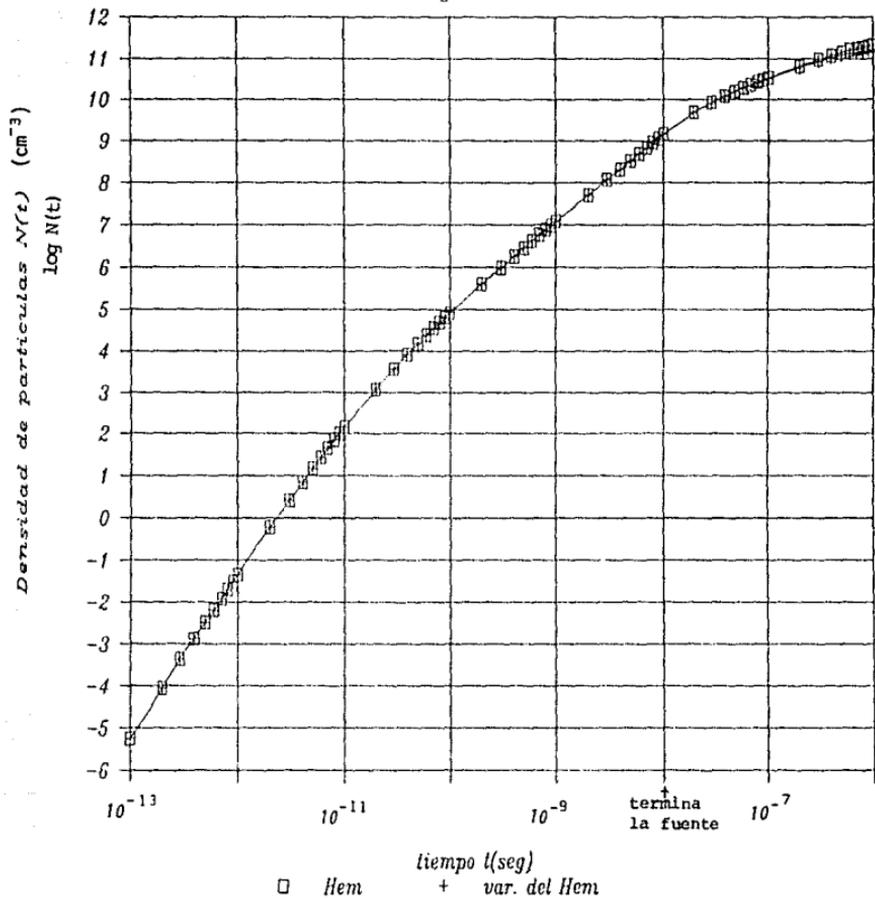


Fig. 5.52

NUMERO DE PARTICULAS

$$\omega_s = 0.01$$

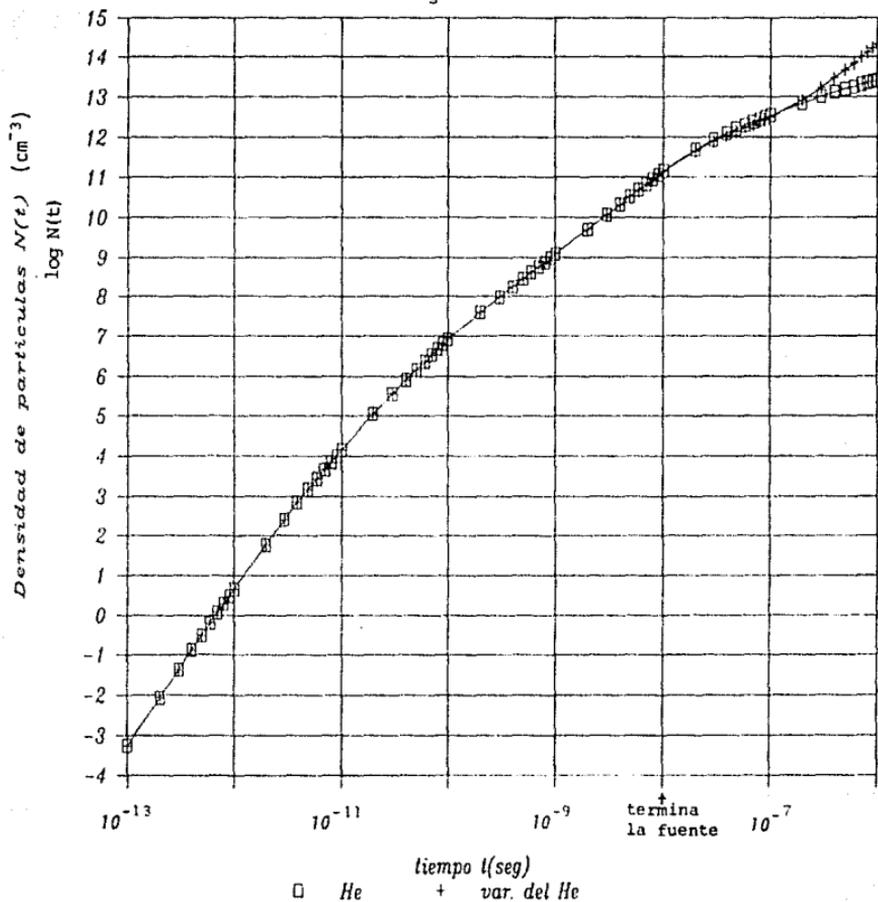


Fig. 5.53

NUMERO DE PARTICULAS

$$\omega_s = 0.01$$

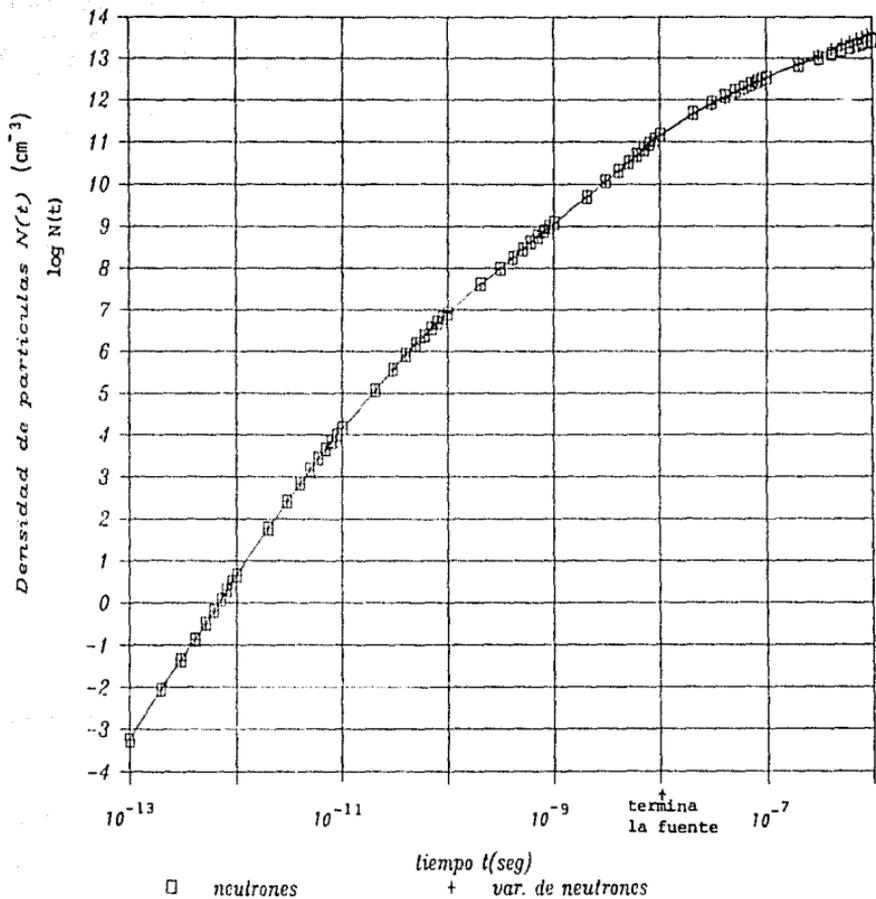


Fig. 5.54

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

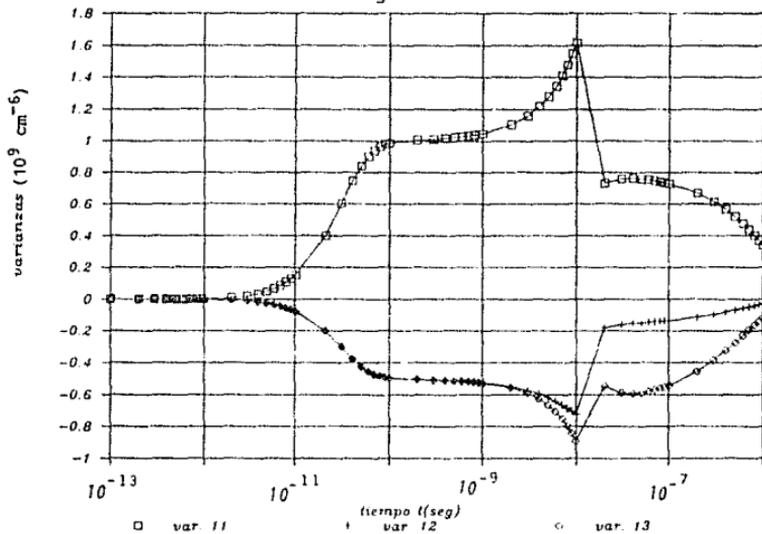


Fig. 5.55

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

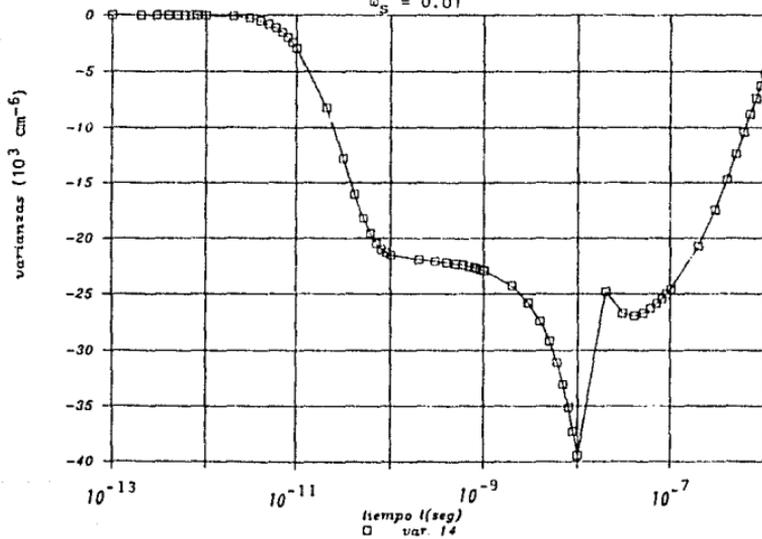


Fig. 5.56

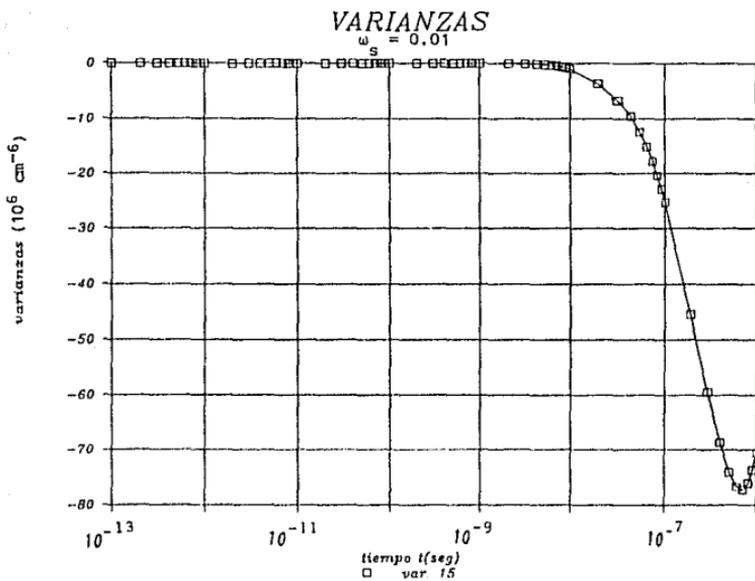


Fig. 5.57

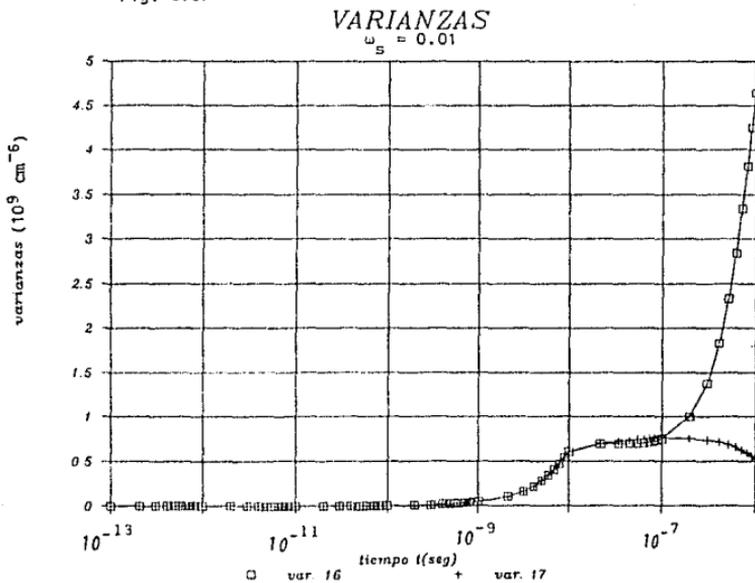


Fig. 5.58

VARIANZAS

$\omega = 0.01$

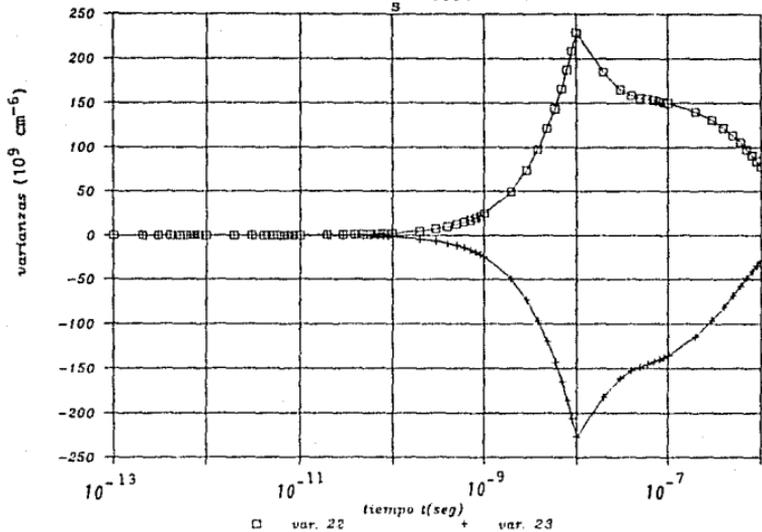


Fig. 5.59

VARIANZAS

$\omega = 0.01$

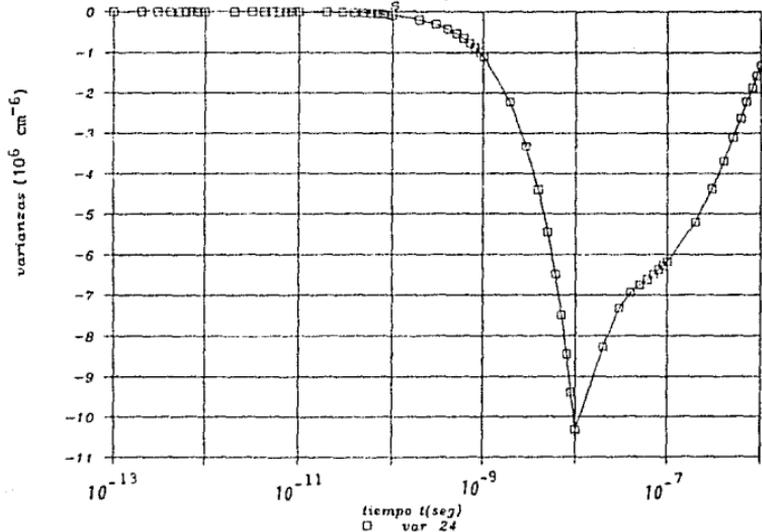


Fig. 5.60

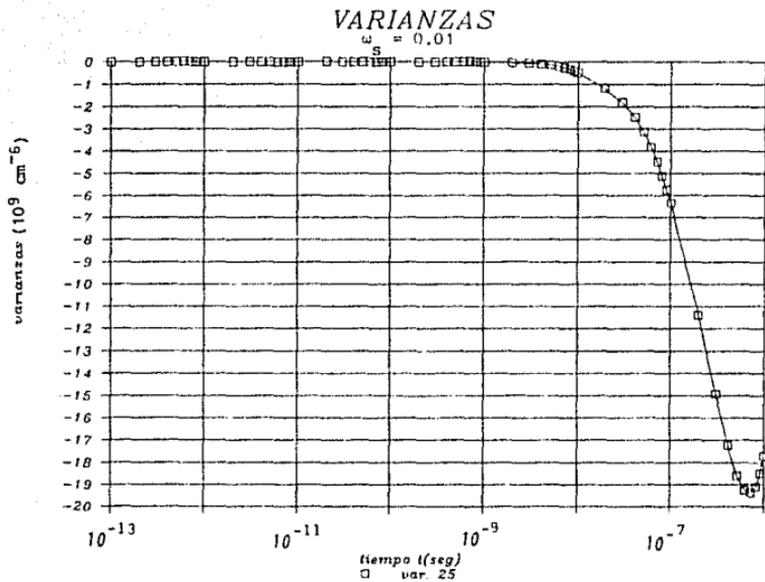


Fig. 5.61

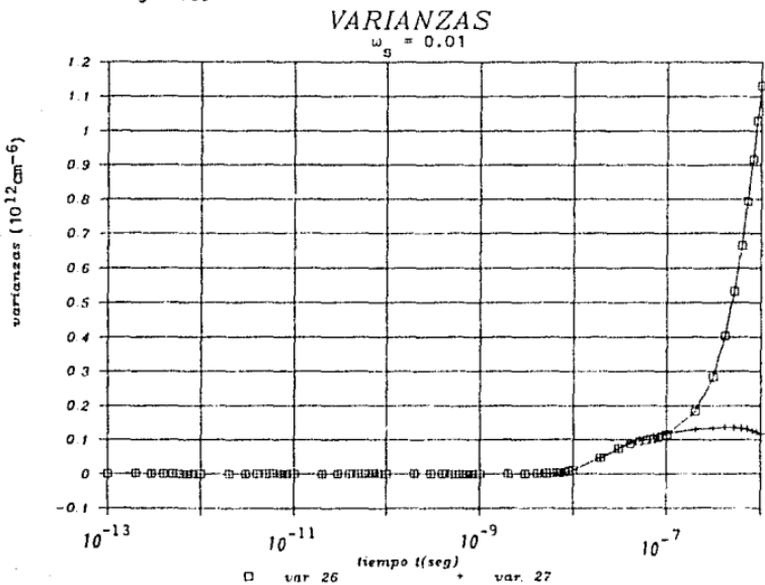


Fig. 5.62

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

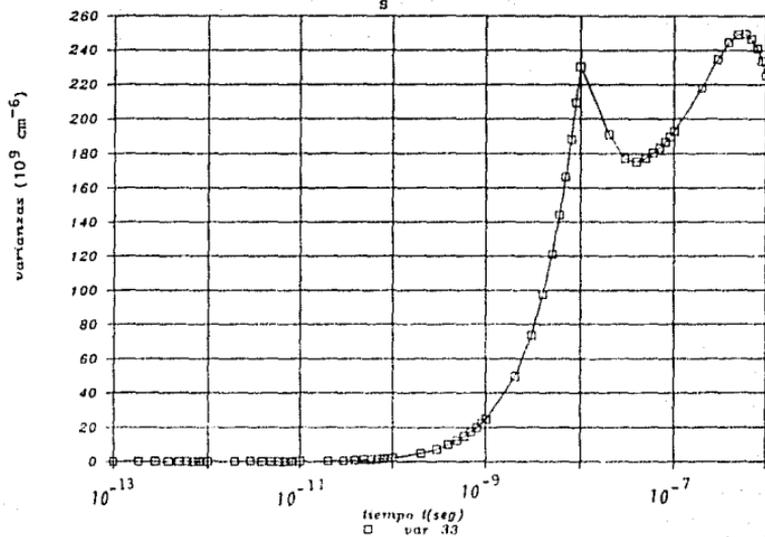


Fig. 5.63

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

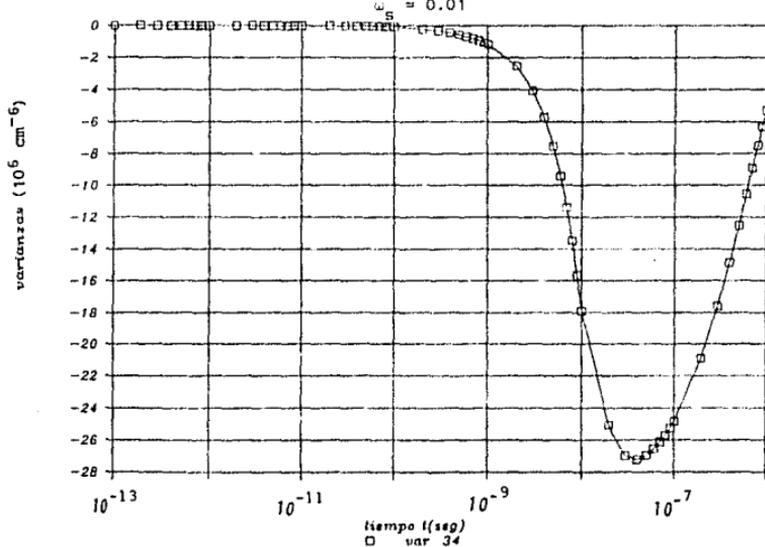


Fig. 5.64

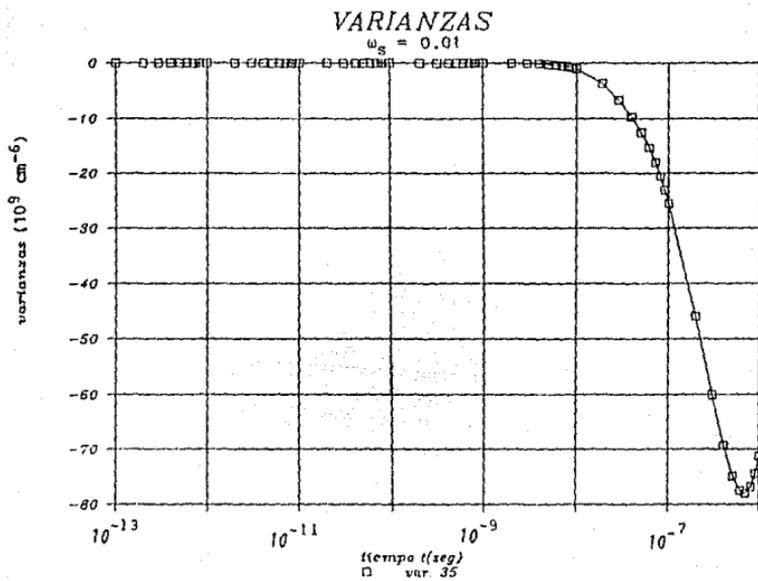


Fig. 5.65

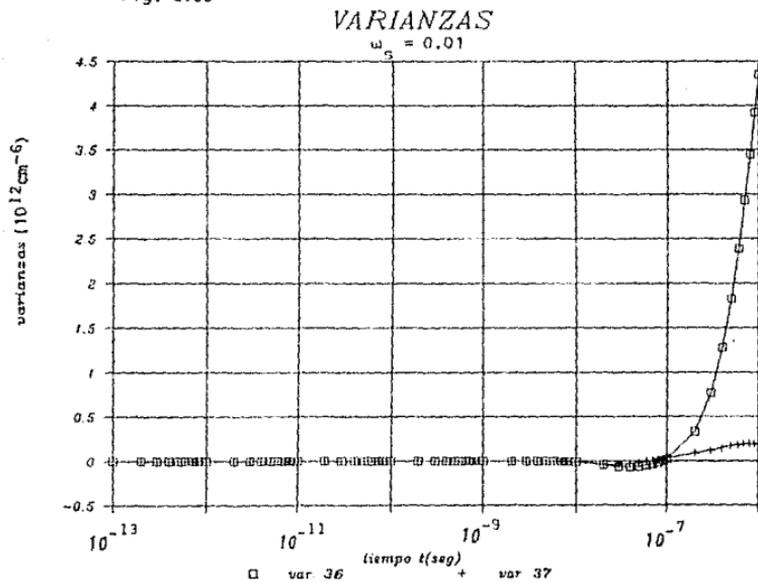


Fig. 5.66

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

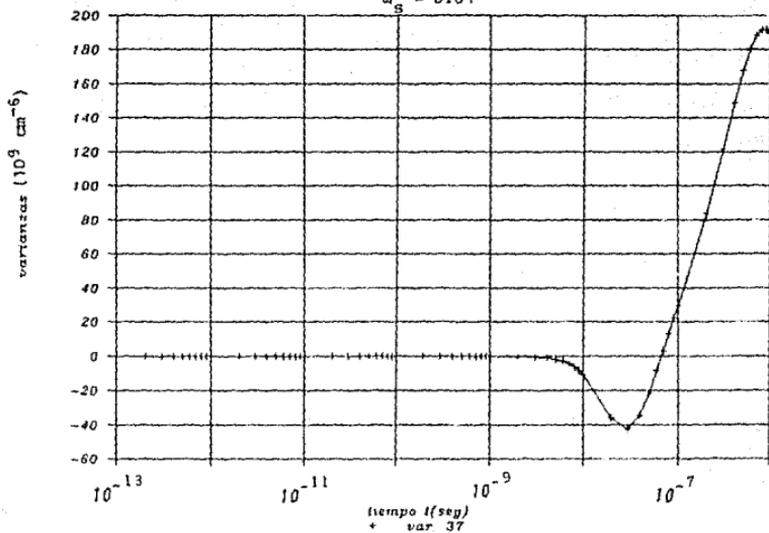


Fig. 5.67

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

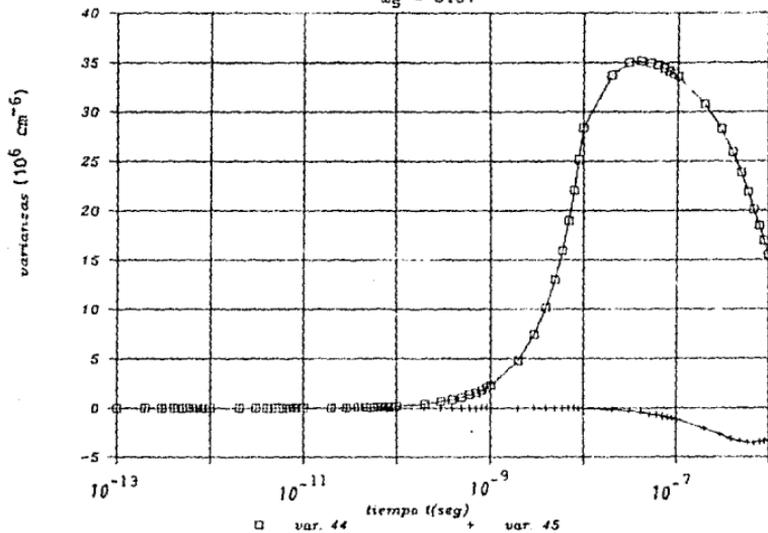


Fig. 5.68

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

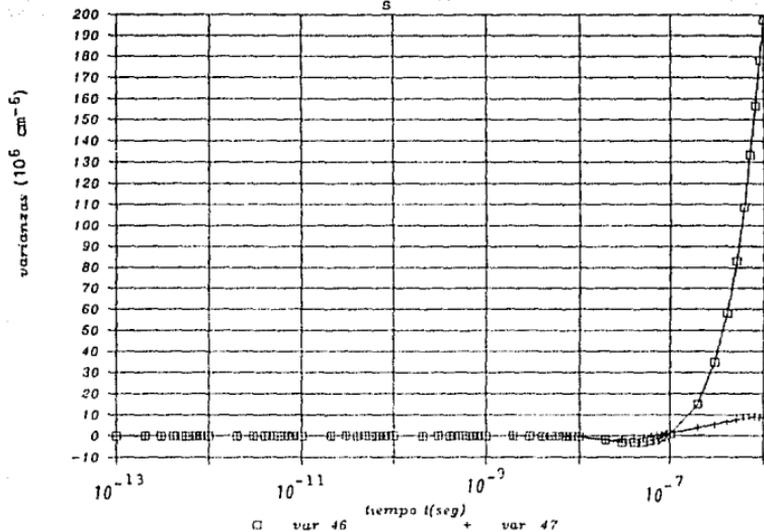


Fig. 5.69

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

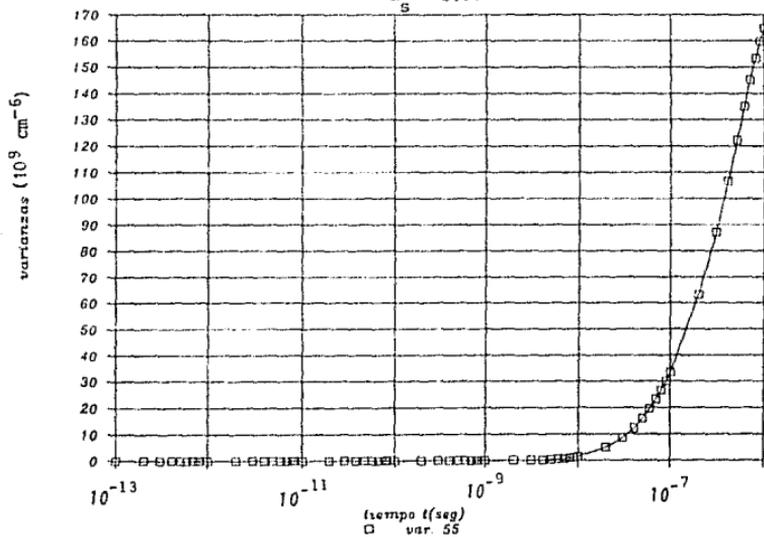


Fig. 5.70

VARIANZAS

$$\omega_B = 0.01$$

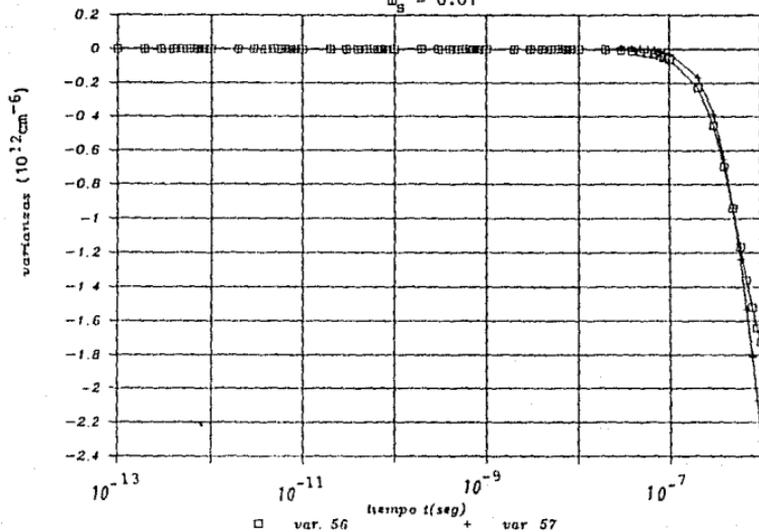


Fig. 5.71

VARIANZAS

$$\omega_B = 0.01$$

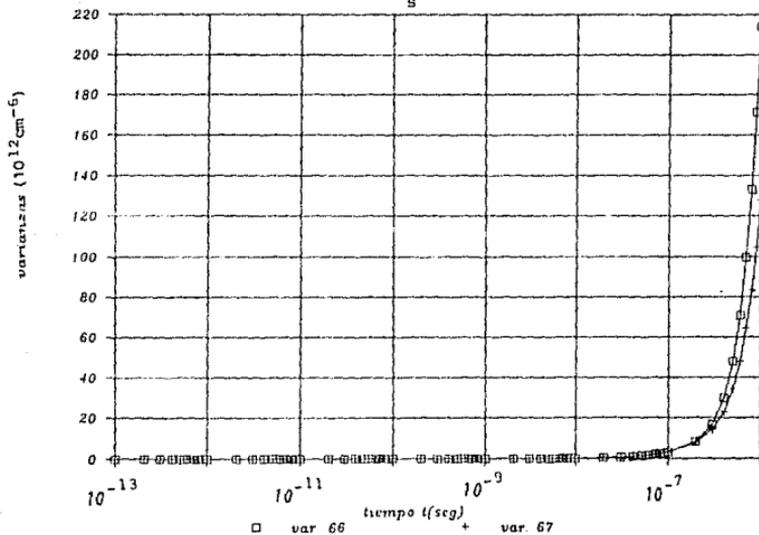


Fig. 5.72

VARIANZAS

$$\omega_s = 0.01$$

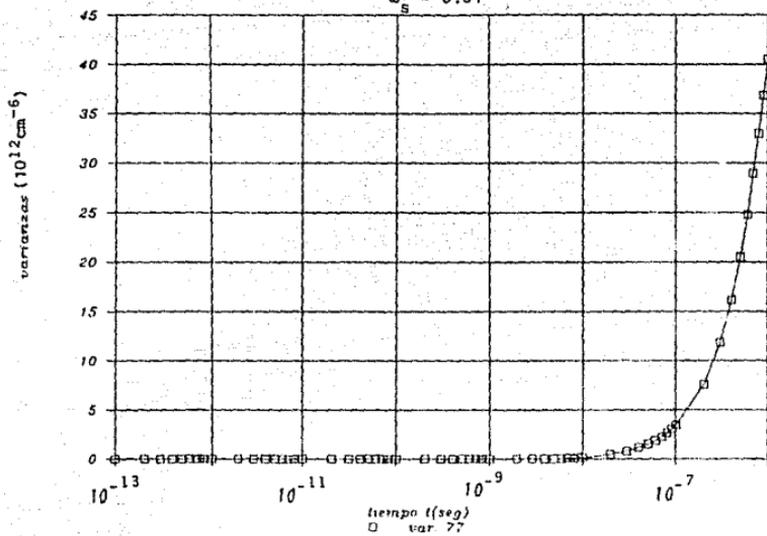


Fig. 5.73

CONCLUSIONES

En el trabajo se analizó la cinética de la fusión nuclear en una mezcla D-T catalizada por muones y se analizó su estadística.

Como una verificación del programa de computo se reprodujeron los resultados del artículo de Sguigna y Harms [37] donde se resuelve numéricamente el sistema de ecuaciones para los promedios; ahí se observa que para tiempos pequeños el número de muones decae abruptamente debido a su decaimiento natural y a los fenómenos de absorción de muones por los iones dt , tt y dd y a los núcleos d y t . Posteriormente en el tiempo, el número de muones se mantiene constante (como resultado directo del reciclamiento de muones en la cadena principal de la fusión nuclear) y después decae exponencialmente, lógicamente hasta cero. El número total de neutrones crece hasta alcanzar un máximo que esencialmente hasta alcanzar un máximo que esencialmente corresponde a los neutrones resultantes de la cadena $dt\mu$. El número de los neutrones producidos a través del ión $tt\mu$ es dos ordenes de magnitud menor que el número producido a través del ión $dt\mu$ y el número de neutrones resultantes de la fusión del ión $dd\mu$ es a su vez tres ordenes de magnitud menor que el número correspondiente a la rama $dt\mu$.

Se resolvieron las ecuaciones que involucran a los promedios y a las varianzas de dichos promedios en el caso de la rama principal, *i.e.* la que involucra la fusión del ión $dt\mu$; para el

caso sin fuente de muones se encontró que casi todas las especies siguen una distribución multinomial, como puede apreciarse al comparar las curvas para las varianzas obtenidas con las expresiones esperadas para una función de distribución multinomial. Sin embargo los helios y los neutrones (${}^4\text{He}$, ne) no siguen una distribución multinomial pues sus poblaciones instantaneas no tienen un nexo directo con la población instantanea de muones. Se estudiaron los cambios en la evolución temporal de las diversas especies cuando se cambia el factor de adhesión ("sticking") y se observó que para diferentes valores de ω_{μ} en relación a una misma especie, al principio de los procesos las curvas son todas iguales y sólo aparecen cambios significativos hasta después de la formación de los iones $\text{dt}\mu$ ó bien en la región cercana al tiempo de vida media para los muones. También se observó que un aumento en ω_{μ} trae como consecuencia un menor reciclamiento de muones porque una mayor cantidad de muones se quedan pegados a los helios productos de la fusión.

En el caso en que se modifica la concentración ($C_d = 0.7$ y $C_t = 0.3$), como es de esperarse se observa que inicialmente el número de los deuterios muónicos crece más rápidamente que los tritios muónicos pero después éstos aumentaban hasta rebasar el número de deuterios muónicos, debido transferencia de muones del deuterio al tritio.

El cálculo aproximado de fusiones por muón al tiempo 10^{-6}s. , se puede obtener de los resultados numéricos calculando el cociente $N_{\mu}(10^{-6}\text{s.})/ N_n(10^{-6}\text{s.})$. Este cociente se calcula para diferentes valores de ω_{μ} y se compara con el valor obtenido a partir de la expresión analítica para la producción asintótica de

neutrones (ec. 5.14), para $C_d = C_t = 0.5$. Así entonces se obtiene:

ω	N_n aprox. numérico	$N_n(\infty)$ teórico
0.1	8.87	8.97
0.01	26.80	46.78
0.001	31.41	80.8

Se encuentra que para $\omega = 0.1$ los valores teórico y numérico son muy cercanos entre sí, esto es de esperarse porque una ω grande significa que muchos muones quedaran pegados a una partícula α y ya no podran seguir catalizando más reacciones de fusión, y por lo tanto la región asintótica final se alcanzará antes para ω pequeños. Con $\omega = 0.1$ se llega más cerca de la región asintótica (donde N_n ya casi no cambia) que con $\omega = 0.01$ ó $\omega = 0.001$, lo cual queda claramente establecido en la tabla anterior.

Podemos esperar que si empleamos más tiempo de máquina nos acercaremos más a los valores asintóticos del número de fusiones por muón para $\omega = 0.01$ y 0.001 que teóricamente son 46.8 y 80.8 respectivamente.

En el caso con fuente de muones se observa un comportamiento similar al caso sin fuente y las especies involucradas tienen algunas características que corresponden a una distribución de probabilidad multinomial, sólo que en este caso no fue posible hacer una indentificación con una expresión equivalente al caso sin fuente; sin embargo la forma de las autocovarianzas y de las

varianzas cruzadas presenta el mismo tipo de comportamiento que en el caso sin fuente. Aquí hay que notar que existe una caída aún más abrupta que en el caso sin fuente debido a que en 10^{-8} s. se cortó la fuente, por lo que en muchas curvas se observa una especie de discontinuidad en esa región.

En el futuro se espera poder optimizar el programa de computo para avanzar más en el tiempo y llegar a encontrar el valor asintótico de las curvas de neutrones, y estimar de una manera más precisa el número de fusiones catalizadas por muón.

APENDICE A

DIAGRAMA DE FLUJO

Y

PROGRAMA EN FORTRAN

PARA EL SISTEMA DE ECUACIONES

QUE DESCRIBE LA CINETICA

DE LOS PROCESOS

INVOLUCRADOS EN LA

FUSION NUCLEAR CATALIZADA POR MUONES

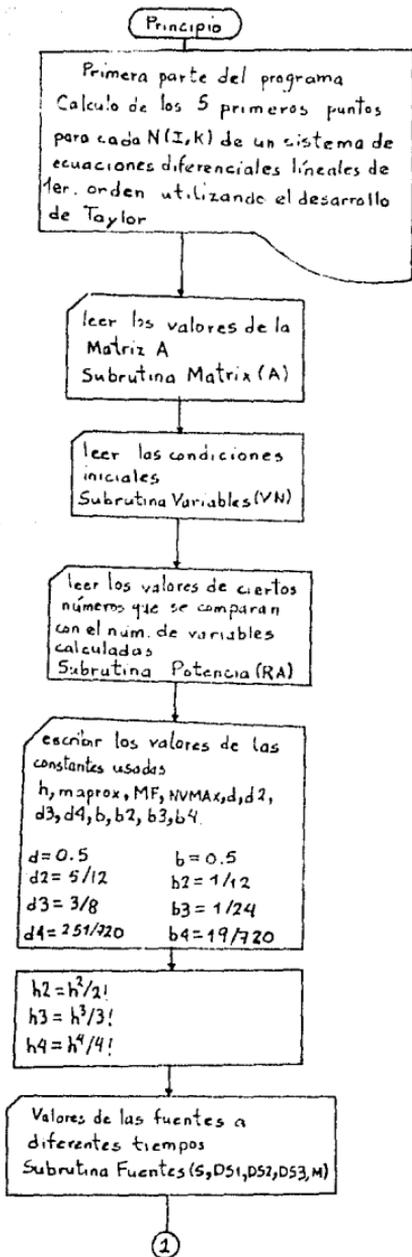
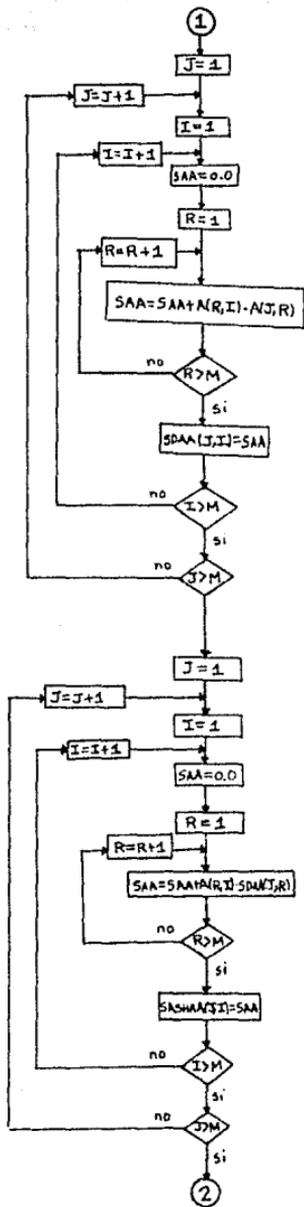
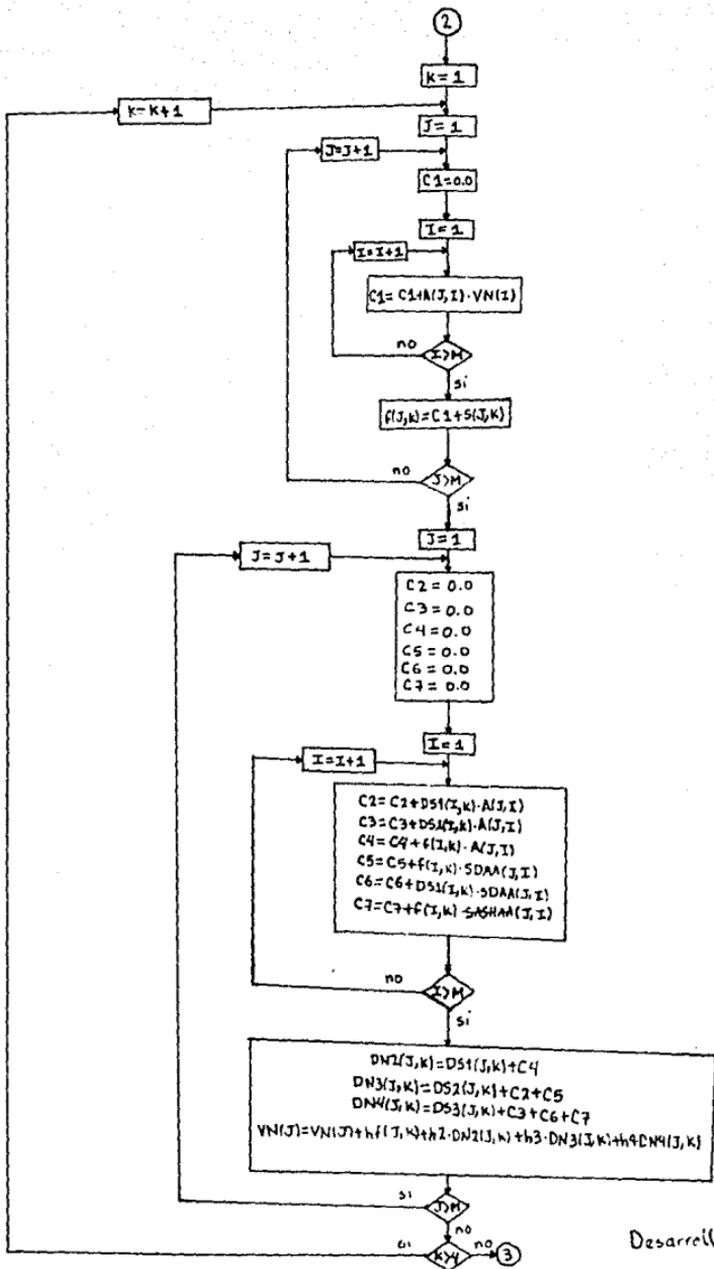


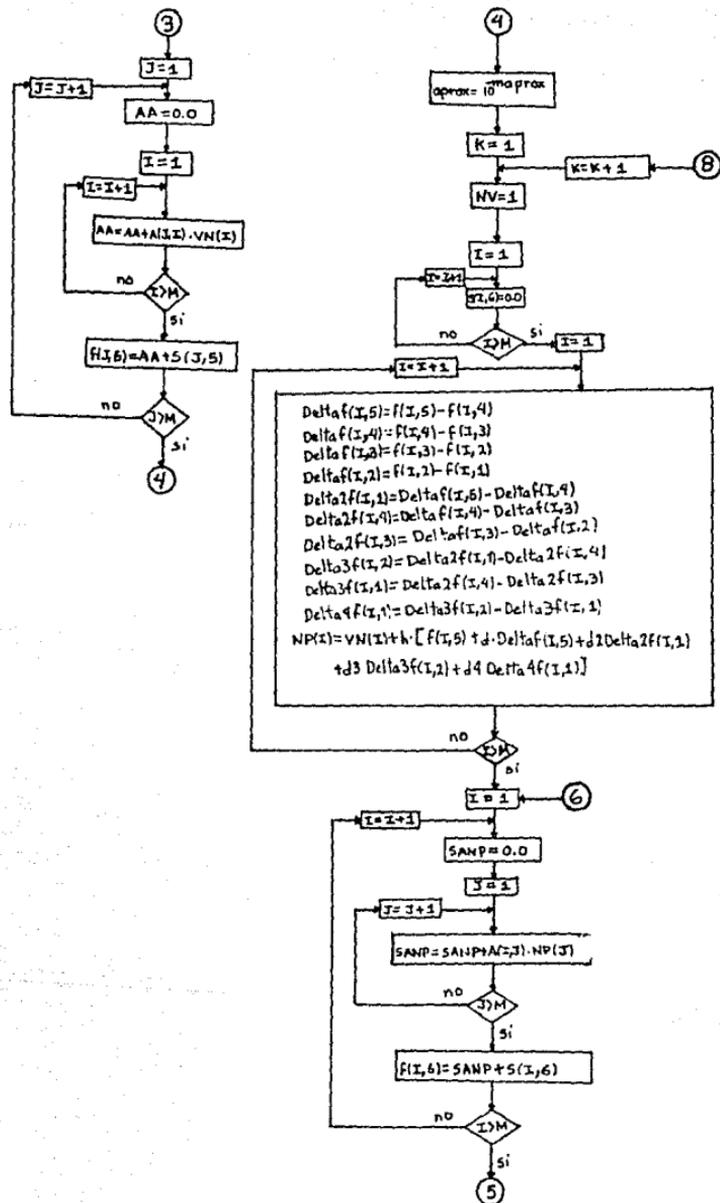
Diagrama def. del programa



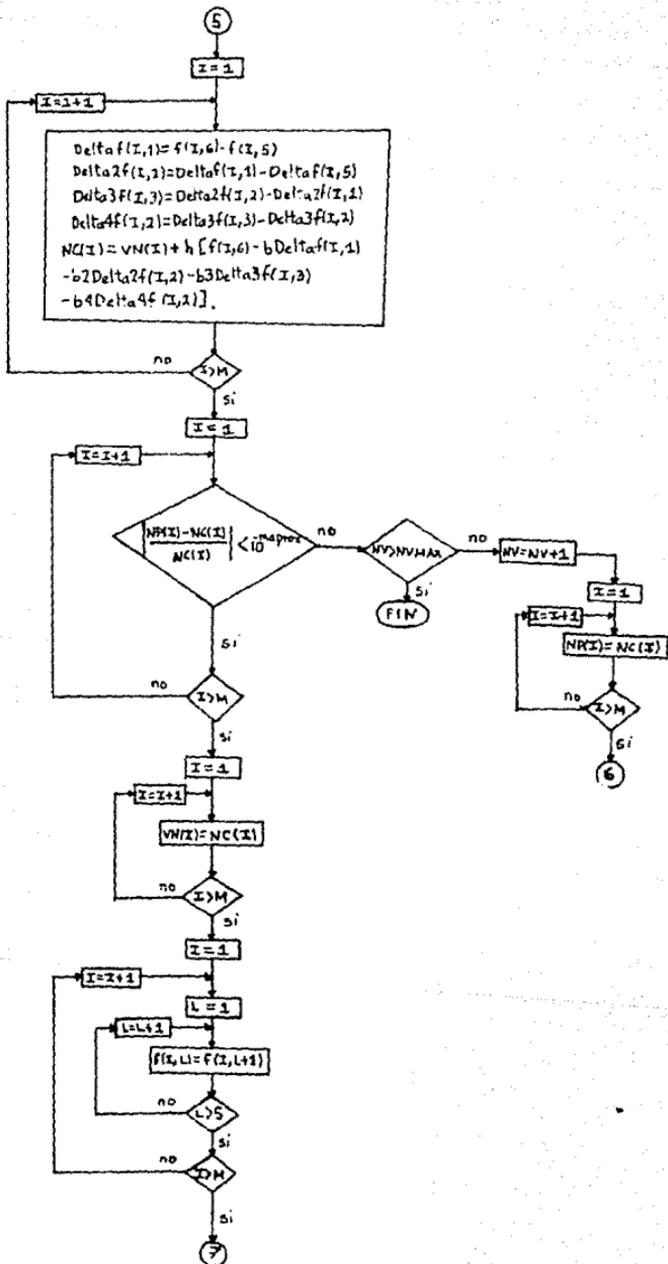
Calculo de las Matrices
 $S0AA(J,I)$ y $SASHAA(J,I)$

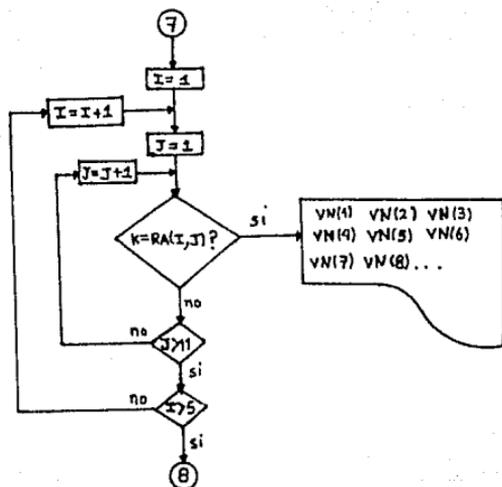


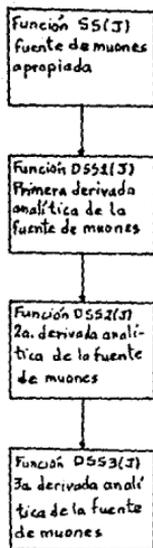
Desarrollo de Taylor



2a. parte Método de Adams

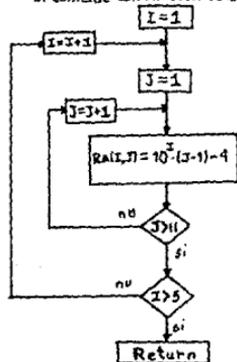




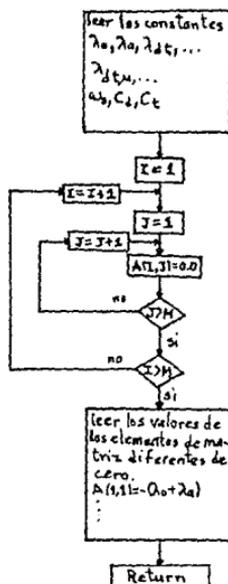


Subrutina Potencia

Compara el número de la variable calculada, si coincide con un valor de la subrutina lo almacena

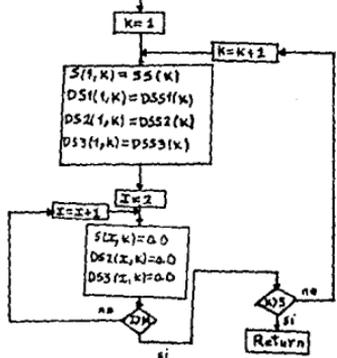


Subrutina Matrix



Subrutina Fuentes

En esta subrutina se calculan los valores de las fuentes a diferentes tiempos, todos valen cero excepto la fuente de muones



```

C
C   Cálculo de los primeros 5 puntos para cada Nf(I,K) de un sistema
C   de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden utilizando
C   el desarrollo de Taylor y los siguientes utilizando el metodo
C   corrector-predicor para un sistema de 35 ecuaciones con 35
C   incógnitas

```

```

-----
C
C **          PROGRAMA   POINTK FLP   on h=1 E-14          **
C
C-----

```

```

IMPLICIT REAL*8(A-H,N-Z)
Dimension A(35,35), S(35,6), DS1(35,4)
Dimension DS2(35,4), DS3(35,4)
Dimension SDAA(35,35), F(35,2), SASHAN(35,35), DN2(35,4)
Dimension DN3(35,4), DPA(35,4)
Dimension DELTAf(35,5), DELTA2f(35,4), DELTA3f(35,3)
Dimension DELTA4f(35,2), NF(35)
Dimension REL(35), NC(35), VN(35), RA(6,11), ZN(35,5)
COMMON ZLAMDTM, ZLAMDDT, CD, CT, OMES

```

```

OPEN (UNIT=5, FILE='SK351.DAT', STATUS='NEW', FORM='FORMATTED')
OPEN (UNIT=6, FILE='SK352.DAT', STATUS='NEW', FORM='FORMATTED')
OPEN (UNIT=7, FILE='SK353.DAT', STATUS='NEW', FORM='FORMATTED')
OPEN (UNIT=8, FILE='SK354.DAT', STATUS='NEW', FORM='FORMATTED')
OPEN (UNIT=9, FILE='SK355.DAT', STATUS='NEW', FORM='FORMATTED')
OPEN (UNIT=10, FILE='SK356.DAT', STATUS='NEW', FORM='FORMATTED')
OPEN (UNIT=11, FILE='SK357.DAT', STATUS='NEW', FORM='FORMATTED')
OPEN (UNIT=12, FILE='SK358.DAT', STATUS='NEW', FORM='FORMATTED')
OPEN (UNIT=13, FILE='SK359.DAT', STATUS='NEW', FORM='FORMATTED')
OPEN (UNIT=14, FILE='SK360.DAT', STATUS='NEW', FORM='FORMATTED')
OPEN (UNIT=15, FILE='SK361.DAT', STATUS='NEW', FORM='FORMATTED')
OPEN (UNIT=16, FILE='SK362.DAT', STATUS='NEW', FORM='FORMATTED')
OPEN (UNIT=17, FILE='SK363.DAT', STATUS='NEW', FORM='FORMATTED')
OPEN (UNIT=8, FILE='SK35X.DAT', STATUS='NEW', FORM='FORMATTED')

```

```

ITER=1
CE=1.D+5
M=35

```

```

C-----LLAMAR A LAS SUBROUTINAS MATRIX, VARIABLES, POTENCIA-----
call MATRIX(A, M, CE)
call VARIABLES(VN)
call POTENCIA(RA)
C-----

```

```

C   SE ESCRIBEN LOS LETREROS EN LOS ARCHIVOS QUE SE ABREN
WRITE(5,21)
WRITE(5,73)CD,CT
WRITE(5,74)ZLAMDDTM*1.E+09,ZLAMDDT*1.E+09
WRITE(5,75)OMES
WRITE(5,35)
WRITE(5,36)
WRITE(5,37)
WRITE(5,23)
WRITE(5,16)
WRITE(6,38)
WRITE(6,39)
WRITE(6,40)

```

WRITE(5, 24)
WRITE(6, 16)
WRITE(7, 41)
WRITE(7, 42)
WRITE(7, 43)
WRITE(7, 25)
WRITE(7, 16)
WRITE(9, 44)
WRITE(9, 45)
WRITE(9, 46)
WRITE(9, 26)
WRITE(9, 16)
WRITE(10, 47)
WRITE(10, 48)
WRITE(10, 49)
WRITE(10, 27)
WRITE(10, 16)
WRITE(11, 51)
WRITE(11, 52)
WRITE(11, 53)
WRITE(11, 28)
WRITE(11, 16)
WRITE(12, 54)
WRITE(12, 55)
WRITE(12, 56)
WRITE(12, 29)
WRITE(12, 16)
WRITE(13, 57)
WRITE(13, 58)
WRITE(13, 59)
WRITE(13, 30)
WRITE(13, 16)
WRITE(14, 61)
WRITE(14, 62)
WRITE(14, 63)
WRITE(14, 31)
WRITE(14, 16)
WRITE(15, 64)
WRITE(15, 65)
WRITE(15, 66)
WRITE(15, 32)
WRITE(15, 16)
WRITE(16, 67)
WRITE(16, 68)
WRITE(16, 69)
WRITE(16, 33)
WRITE(16, 16)
WRITE(17, 71)
WRITE(17, 72)
WRITE(17, 34)
WRITE(17, 16)

C*****CONSTANTES DEL PROGRAMA*****

h=1. D=05
nexpri=6
MF=99996
NVMAX=10000
d=0 5
d2=5 /12
d3=3 /8
d4=251 /720.
b=0 5


```

DN2(J, K)=DS1(J, K)+CJ
DN3(J, K)=DS2(J, K)+C2+CS
DN4(J, K)=DS3(J, K)+C3+C6+C7
VN(J)=VN(J)+h*f(J, K)+h2*DN2(J, K)+h3*DN3(J, K)+h4*DN4(J, K)
C write(*,*)vn(j)
120 CONTINUE
150 CONTINUE

      DO 220 J=1,M
      AA=0.0
      DO 210 I=1,M
      AA=AA+A(J, I)*VN(I)
210 CONTINUE
      F(J, 5)=AA+S(J, 5)
220 CONTINUE

C*****
C 2a parte - Calculo de los siguientes puntos por el metodo de Adams
C modificado (Corrector-Predictor)
C*****
      aprox=1.0/(*(-maprox))
229 DO 340 K=1,MP
      NV=1
      DO 230 I=1,M
230 S(I, 6)=0.0
      DO 240 I=1,M
      DELTAf(I, 5)=f(I, 5)-f(I, 4)
      DELTAf(I, 4)=f(I, 4)-f(I, 3)
      DELTAf(I, 3)=f(I, 3)-f(I, 2)
      DELTAf(I, 2)=f(I, 2)-f(I, 1)
      DELTA2f(I, 1)=DELTAf(I, 3)-DELTAf(I, 4)
      DELTA2f(I, 4)=DELTAf(I, 4)-DELTAf(I, 3)
      DELTA2f(I, 3)=DELTAf(I, 3)-DELTAf(I, 2)
      DELTA3f(I, 2)=DELTA2f(I, 1)-DELTA2f(I, 4)
      DELTA3f(I, 1)=DELTA2f(I, 4)-DELTA2f(I, 3)
      DELTA4f(I, 1)=DELTA3f(I, 2)-DELTA3f(I, 1)
      NP(I)=VN(I)+h*( f(I, 5)+d*DELTAf(I, 5)+d2*DELTA2f(I, 1)
      1+d3*DELTA3f(I, 2)+d4*DELTA4f(I, 1) )
240 CONTINUE

245 DO 255 I=1,M
      SANP=0.0
      DO 250 J=1,M
      SANP=NP(J)*A(I, J)+SANP
250 CONTINUE
      f(I, 6)=SANP+S(I, 6)
255 CONTINUE
      DO 260 I=1,M
      DELTAf(I, 1)=f(I, 6)-f(I, 5)
      DELTA2f(I, 2)=DELTAf(I, 1)-DELTAf(I, 5)
      DELTA3f(I, 3)=DELTA2f(I, 2)-DELTA2f(I, 1)
      DELTA4f(I, 2)=DELTA3f(I, 3)-DELTA3f(I, 2)
      NC(I)=VN(I)+h*( f(I, 6)+b*DELTAf(I, 1)+b2*DELTA2f(I, 2)
      1+b3*DELTA3f(I, 3)+b4*DELTA4f(I, 2) )
260 CONTINUE

      DO 270 I=1,M
      REL(I)=ABS( (NP(I)-NC(I))/NC(I) )

```

```

IF (REL11) GT. aprox) GO TO 280
270 CONTINUE
GO TO 117
280 IF (NV GT. NVMAX)STOP
NV=NV+1
C   write(*,*)NV
   DO 290 I=1,M
   NP(I)=NC(I)
290 CONTINUE
GO TO 245
117 DO 300 I=1,M
300 VN(I)=NC(I)
   DO 310 I=1,M
   DO 310 L=1,5
310 f(I,L)=f(I,L+1)

IF (ITER .EQ. 2)GO TO 660
IF (K .EQ. 99956)GO TO 400
IF (K .EQ. 99966)GO TO 450
IF (K .EQ. 99976)GO TO 500
IF (K .EQ. 99986)GO TO 550
IF (K .EQ. 99996)GO TO 600

309 DO 301 I=1,5
DO 301 J=2,10
IF (K .EQ. RA(I,J)) GO TO 302
301 CONTINUE
GO TO 340
302 WRITE (5,17)((RA(I,J)+4)*1 E-14), (VN(I), I=1,3)
WRITE (6,17)((RA(I,J)+4)*1 E-14), (VN(I), I=4,6)
WRITE (7,17)((RA(I,J)+4)*1 E-14), (VN(I), I=7,9)
WRITE (9,17)((RA(I,J)+4)*1 E-14), (VN(I), I=10,12)
WRITE (10,17)((RA(I,J)+4)*1 E-14), (VN(I), I=13,15)
WRITE (11,17)((RA(I,J)+4)*1 E-14), (VN(I), I=16,18)
WRITE (12,17)((RA(I,J)+4)*1 E-14), (VN(I), I=19,21)
WRITE (13,17)((RA(I,J)+4)*1 E-14), (VN(I), I=22,24)
WRITE (14,17)((RA(I,J)+4)*1 E-14), (VN(I), I=25,27)
WRITE (15,17)((RA(I,J)+4)*1 E-14), (VN(I), I=28,30)
WRITE (16,17)((RA(I,J)+4)*1 E-14), (VN(I), I=31,33)
WRITE (17,17)((RA(I,J)+4)*1 E-14), (VN(I), I=34,35)
IF (K .EQ. 99996)GO TO 615
GO TO 340
C*****Cambio de escala ahora h=1.e-13shg*****
C****se reescalán los elementos de la Matriz A y las Fuentes
C****externas
400 DO 420 I=1,M
420 ZN(I,1)=VN(I)
GO TO 340
450 DO 460 I=1,M
460 ZN(I,2)=VN(I)
GO TO 340
500 DO 510 I=1,M
510 ZN(I,3)=VN(I)
GO TO 340
550 DO 560 I=1,M
560 ZN(I,4)=VN(I)
GO TO 340
600 DO 610 I=1,M
610 ZN(I,5)=VN(I)

```

```

      GO TO 309
615   DO 550 J=1, 5
      C1=0.0
      DO 520 I=1, M
620   C1=C1+ATZ(I)*DN(I, L)
650   F(J, L)=C1+97.75*L

```

```

      N=1 D=04
      ITER=0

```

```

      MF=9990000
      GO TO 229

```

```

C*****EMPIEZA A ALMACENAR VALORES CON EL SEGUNDO ESCALAMIENTO*****
C*****

```

```

660   IF (K .EQ. 9989960)GO TO 760
      IF (K .EQ. 9989970)GO TO 770
      IF (K .EQ. 9989980)GO TO 780
      IF (K .EQ. 9989990)GO TO 790
      IF (K .EQ. 9990000)GO TO 800

```

```

      DO 665 J=2, 10
      IF (K .EQ. (PA(4, J)+1))GO TO 700
665   CONTINUE
      DO 670 J=2, 10
      IF (K .EQ. (PA(5, J)+90004))GO TO 750
670   CONTINUE
666   DO 671 J=2, 10
      IF (K .EQ. (PA(6, J)+90004))GO TO 751
671   CONTINUE
      GO TO 340

```

```

700   WRITE (5, 17)((RA(4, J)+1)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=1, 3)
      WRITE (6, 17)((RA(4, J)+1)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=4, 6)
      WRITE (7, 17)((RA(4, J)+1)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=7, 9)
      WRITE (9, 17)((RA(4, J)+1)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=10, 12)
      WRITE (10, 17)((RA(4, J)+1)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=13, 15)
      WRITE (11, 17)((RA(4, J)+1)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=16, 18)
      WRITE (12, 17)((RA(4, J)+1)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=19, 21)
      WRITE (13, 17)((RA(4, J)+1)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=22, 24)
      WRITE (14, 17)((RA(4, J)+1)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=25, 27)
      WRITE (15, 17)((RA(4, J)+1)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=28, 30)
      WRITE (16, 17)((RA(4, J)+1)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=31, 33)
      WRITE (17, 17)((RA(4, J)+1)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=34, 35)
      GO TO 340

```

```

750   WRITE (5, 17)((RA(5, J)+90004)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=1, 3)
      WRITE (6, 17)((RA(5, J)+90004)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=4, 6)
      WRITE (7, 17)((RA(5, J)+90004)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=7, 9)
      WRITE (9, 17)((RA(5, J)+90004)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=10, 12)
      WRITE (10, 17)((RA(5, J)+90004)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=13, 15)
      WRITE (11, 17)((RA(5, J)+90004)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=16, 18)
      WRITE (12, 17)((RA(5, J)+90004)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=19, 21)
      WRITE (13, 17)((RA(5, J)+90004)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=22, 24)
      WRITE (14, 17)((RA(5, J)+90004)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=25, 27)
      WRITE (15, 17)((RA(5, J)+90004)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=28, 30)
      WRITE (16, 17)((RA(5, J)+90004)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=31, 33)
      WRITE (17, 17)((RA(5, J)+90004)*1 E-13+1 E-09), (VN(I), I=34, 35)
      GO TO 340

```

```

751 WRITE(*,*)K
WRITE (5,17) ((RA(6,J)+990004)*1 E-13+1 E-09) (VN(I), I=1,3)
WRITE (5,17) ((RA(6,J)+990004)*1 E-13+1 E-09) (VN(I), I=4,6)
WRITE (7,17) ((RA(6,J)+990004)*1 E-13+1 E-09) (VN(I), I=7,9)
WRITE (9,17) ((RA(6,J)+990004)*1 E-13+1 E-09) (VN(I), I=10,12)
WRITE (11,17) ((RA(6,J)+990004)*1 E-13+1 E-09) (VN(I), I=13,15)
WRITE (11,17) ((RA(6,J)+990004)*1 E-13+1 E-09) (VN(I), I=16,18)
WRITE (12,17) ((RA(6,J)+990004)*1 E-13+1 E-09) (VN(I), I=19,21)
WRITE (13,17) ((RA(6,J)+990004)*1 E-13+1 E-09) (VN(I), I=22,24)
WRITE (14,17) ((RA(6,J)+990004)*1 E-13+1 E-09) (VN(I), I=25,27)
WRITE (15,17) ((RA(6,J)+990004)*1 E-13+1 E-09) (VN(I), I=28,30)
WRITE (16,17) ((RA(6,J)+990004)*1 E-13+1 E-09) (VN(I), I=31,33)
WRITE (17,17) ((RA(6,J)+990004)*1 E-13+1 E-09) (VN(I), I=34,35)
IF (K E3) 9990000100 TO 810
GO TO 340

C*****CAMBIO DE ESCALA CON h=1 e=12seg*****
C**SE REESCALAN LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ A Y LAS FUENTES EXTERNAS**
C*****

760 DO 763 I=1,M
763 ZN(I,1)=VN(I)
GO TO 340
770 DO 775 I=1,M
775 ZN(I,2)=VN(I)
GO TO 340
780 DO 785 I=1,M
785 ZN(I,3)=VN(I)
GO TO 340
790 DO 795 I=1,M
795 ZN(I,4)=VN(I)
GO TO 340
800 DO 805 I=1,M
805 ZN(I,5)=VN(I)
GO TO 666
810 WRITE (8,22) (VN(I), I=1,3)
WRITE (8,22) (VN(I), I=4,6)
WRITE (8,22) (VN(I), I=7,9)
WRITE (8,22) (VN(I), I=10,12)
WRITE (8,22) (VN(I), I=13,15)
WRITE (8,22) (VN(I), I=16,18)
WRITE (8,22) (VN(I), I=19,21)
WRITE (8,22) (VN(I), I=22,24)
WRITE (8,22) (VN(I), I=25,27)
WRITE (8,22) (VN(I), I=28,30)
WRITE (8,22) (VN(I), I=31,33)
WRITE (8,22) (VN(I), I=34,35)

340 continue

10 FORMAT(3X,'N1(0)=' ,E15.8,5X,'N2(0)=' ,E15.8,5X,'N3(0)=' ,E15.8)
11 FORMAT(3X,'N4(0)=' ,E15.8,5X,'N5(0)=' ,E15.8,5X,'N6(0)=' ,E15.8)
12 FORMAT(3X,'N7(0)=' ,E15.8,5X,'N8(0)=' ,E15.8,5X,'N9(0)=' ,E15.8)
13 FORMAT(3X,'t=(E-13seg)',11x,'N1(t)',15x,'N2(t)',15x,'N3(t)')
14 FORMAT(3X,75(' '))
15 FORMAT(3X,E10.3,(1X,E20.13))
16 FORMAT(3X,3(1X,E20.13))
C 18 FORMAT(3X,'t=(E-13seg)',11x,'N4(t)',15x,'N5(t)',15x,'N6(t)')
19 FORMAT(3X,'t=(E-13seg)',11x,'N7(t)',15x,'N8(t)',15x,'N9(t)')

```

20 FORMAT(3X,75(' '),//)
 21 FORMAT(3X,'SOLUCION NUMERICA DE UN SISTEMA DE 35 ECUACIONES
 1 DIFERENCIALES LINEALES',/,3X,'DE PRIMER ORDEN DADAS LAS
 2 CONDICIONES INICIALES. EL SISTEMA DE ECUACIONES',/,3X,
 3'DESCRIBE LA CINETICA DE LA FUSION NUCLEAR CATALIZADA
 4POR MUONES',/,3X)
 22 FORMAT(3X,E20(13),3X,E20(13),3X,E20(13))
 23 FORMAT(/,7X,'t(seg)',9X,'N1(t)',16X,'N2(t)',16X,'N3(t)')
 24 FORMAT(/,7X,'t(seg)',9X,'N4(t)',16X,'N5(t)',16X,'N6(t)')
 25 FORMAT(/,7X,'t(seg)',9X,'N7(t)',16X,'N8(t)',16X,'N9(t)')
 26 FORMAT(/,7X,'t(seg)',9X,'N10(t)',16X,'N11(t)',16X,'N12(t)')
 27 FORMAT(/,7X,'t(seg)',9X,'N13(t)',16X,'N14(t)',16X,'N15(t)')
 28 FORMAT(/,7X,'t(seg)',9X,'N16(t)',16X,'N17(t)',16X,'N18(t)')
 29 FORMAT(/,7X,'t(seg)',9X,'N19(t)',16X,'N20(t)',16X,'N21(t)')
 30 FORMAT(/,7X,'t(seg)',9X,'N22(t)',16X,'N23(t)',16X,'N24(t)')
 31 FORMAT(/,7X,'t(seg)',9X,'N25(t)',16X,'N26(t)',16X,'N27(t)')
 32 FORMAT(/,7X,'t(seg)',9X,'N28(t)',16X,'N29(t)',16X,'N30(t)')
 33 FORMAT(/,7X,'t(seg)',9X,'N31(t)',16X,'N32(t)',16X,'N33(t)')
 34 FORMAT(/,7X,'t(seg)',9X,'N34(t)',16X,'N35(t)')
 35 FORMAT(3X,'N1 ES EL NUMERO DE MUONES')
 36 FORMAT(3X,'N2 ES EL NUMERO DE DEUTERIOS MUONICOS')
 37 FORMAT(3X,'N3 ES EL NUMERO DE TRITIOS MUONICOS')
 38 FORMAT(3X,'N4 ES EL NUMERO DE IONES MUONMOLECULARES
 % DEUTERIO-TRITIO MUONICO')
 39 FORMAT(3X,'N5 ES EL NUMERO DE HELIOS MUONICOS')
 40 FORMAT(3X,'N6 ES EL NUMERO DE HELIOS')
 41 FORMAT(3X,'N7 ES EL NUMERO DE NEUTRONES')
 42 FORMAT(3X,'N8 ES LA AUTOCOVARIANZA DE LOS MUONES')
 43 FORMAT(3X,'N9 ES LA VARIANZA DE LOS MUONES
 % CON EL DEUTERIO MUONICO')
 44 FORMAT(3X,'N10 ES LA VARIANZA DE LOS MUONES
 % CON EL TRITIO MUONICO')
 45 FORMAT(3X,'N11 ES LA VARIANZA DE LOS MUONES CON EL ION'
 1',/,3X,'MUONMOLECULAR DEUTERIO-TRITIO MUONICO')
 46 FORMAT(3X,'N12 ES LA VARIANZA DE LOS MUONES CON EL HELIO MUONICO')
 47 FORMAT(3X,'N13 ES LA VARIANZA DE LOS MUONES CON EL HELIO')
 48 FORMAT(3X,'N14 ES LA VARIANZA DE LOS MUONES CON LOS NEUTRONES')
 49 FORMAT(3X,'N15 ES LA AUTOCOVARIANZA DEL DEUTERIO MUONICO')
 51 FORMAT(3X,'N16 ES LA VARIANZA DEL DEUTERIO MUONICO CON EL TRITIO
 1 MUONICO')
 52 FORMAT(3X,'N17 ES LA VARIANZA DEL DEUTERIO MUONICO CON EL ION'
 1',/,3X,'MUONMOLECULAR DEUTERIO-TRITIO MUONICO')
 53 FORMAT(3X,'N18 ES LA VARIANZA DEL DEUTERIO MUONICO
 % CON EL HELIO MUONICO')
 54 FORMAT(3X,'N19 ES LA VARIANZA DEL DEUTERIO MUONICO CON EL HELIO')
 55 FORMAT(3X,'N20 ES LA VARIANZA DEL DEUTERIO MUONICO
 % CON LOS NEUTRONES')
 56 FORMAT(3X,'N21 ES LA AUTOCOVARIANZA DEL TRITIO MUONICO')
 57 FORMAT(3X,'N22 ES LA VARIANZA DEL TRITIO MUONICO CON EL'
 1',/,3X,'ION MUONMOLECULAR DEUTERIO-TRITIO MUONICO')
 58 FORMAT(3X,'N23 ES LA VARIANZA DEL TRITIO MUONICO
 % CON EL HELIO MUONICO')
 59 FORMAT(3X,'N24 ES LA VARIANZA DEL TRITIO MUONICO CON EL HELIO')
 61 FORMAT(3X,'N25 ES LA VARIANZA DEL TRITIO MUONICO
 % CON LOS NEUTRONES')
 62 FORMAT(3X,'N26 ES LA AUTOCOVARIANZA DEL ION MUONMOLECULAR
 1 DEUTERIO-TRITIO MUONICO')
 63 FORMAT(3X,'N27 ES LA VARIANZA DEL ION MUONMOLECULAR
 1 DEUTERIO-TRITIO MUONICO',/,3X,'CON EL HELIO MUONICO')
 64 FORMAT(3X,'N28 ES LA VARIANZA DEL ION MUONMOLECULAR
 1 DEUTERIO-TRITIO MUONICO',/,3X,'CON EL HELIO')
 65 FORMAT(3X,'N29 ES LA VARIANZA DEL ION MUONMOLECULAR

```

1 DEUTERIO-TRITIO MUONICO', /, 3X, 'CON LOS NEUTRONES')
66 FORMAT(3X, 'N30 ES LA AUTOCOVARIANZA DEL HELIO MUONICO')
67 FORMAT(3X, 'N31 ES LA VARIANZA DEL HELIO MUONICO CON EL HELIO')
68 FORMAT(3X, 'N32 ES LA VARIANZA DEL HELIO MUONICO
% CON LOS NEUTRONES')
69 FORMAT(3X, 'N33 ES LA AUTOCOVARIANZA DEL HELIO')
71 FORMAT(3X, 'N34 ES LA VARIANZA DEL HELIO CON LOS NEUTRONES')
72 FORMAT(3X, 'N35 ES LA AUTOCOVARIANZA DE LOS NEUTRONES')
73 FORMAT(3X, 'CD=', E10 4, 2X, 'CT=', E10 4)
74 FORMAT(3X, 'LAMBDA DTH=', E10 4, 26X, 'LAMBDA DT=', E10 4)
75 FORMAT(3X, 'OMEGA"S"=', E10 4)
STOP
END

```

```

C
C
C SUBPROGRAMAS
C
C Function S9(J)
C S9=0.0
C return
C end
C
C FUNCION DSS1
C
C Function DSS1(J)
C DSS1=0.0
C return
C end
C

```

```

C      FUNCTION DSS2
C
C      Function DSS2(J)
C      DSS2=0.0
C      return
C      end

```

```

C      FUNCTION DSS3
C
C      Function DSS3(J)
C      DSS3=0.0
C      return
C      end

```

```

C      SUBROUTINAS

```

```

C      SUBROUTINE POTENCIA(RA)
C      IMPLICIT REAL*8(A-H,N-Z)
C      DIMENSION RA(6,11)
C      DO 20 I=1,6
C      DO 20 J=1,11
120 RA(I,J)=0.0
C      DO 50 I=1,6
C      DO 50 J=2,11
150 RA(I,J)=(10**I)*(J-1)-4
C      RETURN
C      END

```

```

C      Subroutine MATRIX(A, M, CE)
C      IMPLICIT REAL*8(A-H,N-Z)
C      Dimension A(35,35)
C      COMMON ZLAMDTH, ZLAMBDT, CD, CT, DMES
C
C      ZLAMBO=(0.455E-08)*CE
C      ZLAMBA=(3.E-4)*CE
C      ZLAMBDT=(2.E-6)*CE
C      ZLAMBFD=(1.1E-2)*CE
C      ZLAMBFT=(1.E-3)*CE
C      ZLAMBDTH=(1.E-6)*CE
C      ZLAMDDDM=(8.E-9)*CE
C      ZLAMBTTH=(3.E-8)*CE
C      DMES=0.1
C      DMET=0.1
C      DMED=0.13
C      DMEP=0.0027
C      CD=0.5
C      CT=0.5
C      DO 10 I=1,M
C      DO 10 J=1,M
100 A(I,J)=0.0
C      A(1,1)=- (ZLAMBO+ZLAMBA)
C      A(1,4)=ZLAMBFD*(1.-DMES)
C      A(1,5)=ZLAMBFD*(1.-3*(DMED+DMEP))
C      A(1,6)=ZLAMBFT*(1.-DMET)
C      A(2,1)=ZLAMBA*CD
C      A(2,2)=- (ZLAMBDT*CT+ZLAMBO)
C      A(3,1)=ZLAMBA*CT
C      A(3,2)=ZLAMBDT*CT

```

A(3,3)=-ZLAMBO-ZLAMBDM*CD
 C A(3,5)=5*ZLAMBDF*OMEP
 A(4,3)=ZLAMBDM*CD
 A(4,4)=-(ZLAMBO+ZLAMBO)
 C A(5,2)=ZLAMBDDM*CD
 A(5,4)=ZLAMBF*OMES
 A(5,5)=-ZLAMBO
 C A(6,2)=ZLAMRTM*CT
 A(6,4)=ZLAMBF*(1.-OMES)
 A(6,5)=ZLAMBO
 C A(6,6)=-ZLAMBO+ZLAMBFT)
 A(7,4)=ZLAMBF
 A(8,1)=(ZLAMBO+ZLAMBA)
 A(8,4)=ZLAMBF*(1.-OMES)
 C A(8,5)=3*ZLAMBDF
 A(8,9)ⁿ⁻²*(ZLAMBO+ZLAMBA)
 A(8,11)=2*ZLAMBF*(1.-OMES)
 A(9,1)=-ZLAMBA*CD
 A(9,8)=ZLAMBA*CD
 A(9,9)=-ZLAMBDT*CT+2*(ZLAMBO+ZLAMBA)
 A(9,17)=ZLAMBF*(1.-OMES)
 C A(9,5)=2.*ZLAMBFT
 A(10,1)=-ZLAMBA*CT
 A(10,2)=ZLAMBA*CT
 A(10,9)=ZLAMBDM*CT
 A(10,10)=-2.*ZLAMBO+ZLAMBA+ZLAMBDM*CD)
 A(10,22)=ZLAMBF*(1.-OMES)
 A(11,4)=-ZLAMBF*(1.-OMES)
 A(11,10)=ZLAMBDM*CD
 A(11,11)=-2.*ZLAMBO+ZLAMBA+ZLAMBF)
 A(11,26)=ZLAMBF*(1.-OMES)
 A(12,11)=ZLAMBF*OMES
 A(12,12)=-2.*ZLAMBO+ZLAMBA)
 A(12,27)=ZLAMBF*(1.-OMES)
 A(13,4)=ZLAMBF*(1.-OMES)
 A(13,11)=ZLAMBF*(1.-OMES)
 A(13,12)=ZLAMBO
 A(13,13)=-ZLAMBO+ZLAMBA)
 A(13,28)=ZLAMBF*(1.-OMES)
 A(14,4)=ZLAMBF*(1.-OMES)
 A(14,11)=ZLAMBF
 A(14,14)=-ZLAMBO+ZLAMBA)
 A(14,29)=ZLAMBF*(1.-OMES)
 A(15,1)=ZLAMBA*CD
 A(15,2)=ZLAMBDM*CT+ZLAMBO
 A(15,9)=2.*ZLAMBA*CD
 A(15,15)=-2.*(ZLAMBDM*CT+ZLAMBO)
 A(16,2)=-ZLAMBDM*CT
 A(16,9)=ZLAMBA*CT
 A(16,10)=ZLAMBA*CD
 A(16,15)=ZLAMBDM*CT
 A(16,16)=-ZLAMBDM*CT+2.*ZLAMBO+ZLAMBDM*CD)
 A(17,11)=ZLAMBA*CD
 A(17,16)=ZLAMBDM*CD
 A(17,17)=-ZLAMBDM*CT+2.*ZLAMBO+ZLAMBF)
 A(18,12)=ZLAMBA*CD
 A(18,17)=ZLAMBF*OMES
 A(18,18)=-ZLAMBDM*CT+2.*ZLAMBO)
 A(19,13)=ZLAMBA*CD
 A(19,17)=ZLAMBF*(1.-OMES)
 A(19,18)=ZLAMBO
 A(19,19)=-ZLAMBDM*CT+ZLAMBO)

A(20, 14)=ZLAMBA*CD
A(20, 17)=ZLAMB
A(20, 20)=- (ZLAMBDT*CT+ZLAMBO)
A(21, 1)=ZLAMBA*CT
A(21, 2)=ZLAMBDT*CT
A(21, 3)=ZLAMBDTH*CD+ZLAMBO
A(21, 10)=2 *ZLAMBA*CT
A(21, 15)=2 *ZLAMBDT*CT
A(21, 21)=-2. *(ZLAMBDTH*CD+ZLAMBO)
A(22, 3)=-ZLAMBDTH*CD
A(22, 11)=ZLAMBA*CT
A(22, 17)=ZLAMBDT*CT
A(22, 21)=ZLAMBDTH*CD
A(22, 22)=- (ZLAMBDTH*CD+2. *ZLAMBO+ZLAMBF)
A(23, 12)=ZLAMBA*CT
A(23, 13)=ZLAMBDT*CT
A(23, 22)=ZLAMBF*OMES
A(23, 23)=- (ZLAMBDTH*CD+2. *ZLAMBO)
A(24, 13)=ZLAMBA*CT
A(24, 19)=ZLAMBDT*CT
A(24, 22)=ZLAMBF*(1. -OMES)
A(24, 23)=ZLAMBO
A(24, 24)=- (ZLAMBDTH*CD+ZLAMBO)
A(25, 14)=ZLAMBA*CT
A(25, 20)=ZLAMBDT*CT
A(25, 22)=ZLAMBF
A(25, 25)=- (ZLAMBDTH+ZLAMBO)
A(26, 3)=ZLAMBDTH*CD
A(26, 4)=ZLAMBO+ZLAMBF
A(26, 22)=2. *ZLAMBDTH*CD
A(26, 26)=-2. *(ZLAMBO+ZLAMBF)
A(27, 4)=-ZLAMBF*OMES
A(27, 23)=ZLAMBDTH*CD
A(27, 26)=ZLAMBF*OMES
A(27, 27)=- (2. *ZLAMBO+ZLAMBF)
A(28, 4)=-ZLAMBF*(1. -OMES)
A(28, 24)=ZLAMBDTH*CD
A(28, 26)=ZLAMBF*(1. -OMES)
A(28, 27)=ZLAMBO
A(28, 28)=- (ZLAMBO+ZLAMBF)
A(29, 4)=-ZLAMBF
A(29, 25)=ZLAMBDTH*CD
A(29, 26)=ZLAMBF
A(29, 29)=- (ZLAMBO+ZLAMBF)
A(30, 4)=ZLAMBF*OMES
A(30, 5)=ZLAMBO
A(30, 27)=2. *ZLAMBF*OMES
A(30, 30)=-2. *ZLAMBO
A(31, 5)=-ZLAMBO
A(31, 27)=ZLAMBF*(1. -OMES)
A(31, 28)=ZLAMBF*OMES
A(31, 30)=ZLAMBO
A(31, 31)=-ZLAMBO
A(32, 4)=ZLAMBF*OMES
A(32, 27)=ZLAMBF
A(32, 29)=ZLAMBF*OMES
A(32, 32)=-ZLAMBO
A(33, 4)=ZLAMBF*(1. -OMES)
A(33, 5)=ZLAMBO
A(33, 28)=2. *ZLAMBF*(1. -OMES)
A(33, 31)=2. *ZLAMBO
A(34, 4)=ZLAMBF*(1. -OMES)

```

A(34, 28)=ZLAMB
A(34, 29)=ZLAMB*(1 -DMES)
A(34, 32)=ZLAMB
A(35, 4)=ZLAMB
A(35, 29)=2. *ZLAMB
return
end

```

```

C
C..... SUBROUTINA VARIABLES
C

```

```

Subroutine VARIABLES(VN)
IMPLICIT REAL*8(A-H, N-Z)
DIMENSION VN(35)
VN(1)=1.0+12
DO 100 I=2, 35
100 VN(I)=0.0
return
end

```

```

C
C..... SUBROUTINA FUENTES
C

```

```

Subroutine FUENTES(S, DS1, DS2, DS3, M)
IMPLICIT REAL*8(A-H, N-Z)
DIMENSION S(25, 6), DS1(35, 4), DS2(35, 4), DS3(35, 4)
do 500 K=1, 4
DO 500 I=1, M
S(I, K)=0.0
C DS1(I, K)=DSS1(K)
DS1(I, K)=0.0
C DS2(I, K)=DSS2(K)
DS2(I, K)=0.0
C DS3(I, K)=DSS3(K)
500 DS3(I, K)=0.0
C S(I, 5)=SS(K)
DO 200 I=1, M
200 S(I, 5)=0.0
return
end

```

APENDICE B

FUNCIONES DE DISTRIBUCION

DE PROBABILIDAD

PARA PROCESOS

DE POISSON

Y

MULTINOMIALES

PROCESO DE POISSON.

Un proceso de Poisson esta representado por la fusi3n de distribuci3n de probabilidad :

$$P(N) = \begin{cases} k^n e^{-k} / n! & \text{para } n = 0, 1, \dots \\ 0. & \text{para } n < 0. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

La funci3n generadora de probabilidad (ec. 3.5) es

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k^n e^{-k} x^n / n! = e^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} (kx)^n / n! = e^{-k} e^{kx}$$

$$G(x) = e^{k(x-1)} \quad (\text{B.2})$$

de esta funci3n calculamos el promedio y la varianza (ecs. 3.8, 3.17 y 3.19)

$$\langle n \rangle = \left[\frac{dG(x)}{dx} \right]_{x=1} = ke^{k(x-1)} \Big|_{x=1} = k$$

$$\sigma^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2.$$

donde

$$\langle n^2 \rangle = \left[\frac{d^2 G}{dx^2} + \frac{dG}{dx} \right]_{x=1} = \left[k^2 e^{k(x-1)} + ke^{k(x-1)} \right]_{x=1} = k^2 + k$$

$$\sigma^2 = k^2 + k - k^2 = k.$$

entonces

$$\langle n \rangle = \sigma^2 = k. \quad (\text{B.3})$$

PROCESO BINOMIAL.

Un proceso binomial esta caracterizado por una función de distribución de la forma :

$$P(n) = \begin{cases} \frac{N_0!}{(N_0-n)!n!} p^n (1-p)^{N_0-n} & \text{para } n = 0, 1, \dots, N_0. \\ 0. & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Su función generadora de probabilidad (ec. 3.5) es

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N_0!}{(N_0-n)!n!} p^n (1-p)^{N_0-n} x^n \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N_0!}{(N_0-n)!n!} (xp)^n (1-p)^{N_0-n} = [px + 1 - p]^{N_0}$$

$$G(x) = [1+p(x-1)]^{N_0} \quad (\text{B.5})$$

el promedio es

$$\langle n \rangle = \left[\frac{dG}{dx} \right]_{x=1} = \left[N_0 [1 + p(x-1)]^{N_0-1} (p) \right]_{x=1} = N_0 p. \quad (\text{B.6})$$

y su varianza es

$$\sigma^2 = \left[\frac{d^2 G}{dx^2} - \frac{dG}{dx} \left(\frac{dG}{dx} - 1 \right) \right]_{x=1} = \left[N_0(N_0-1) [1 + p(x-1)]^{N_0-2} (p^2) \right. \\ \left. - N_0 [1 + p(x-1)]^{2N_0-2} (p^2) + N_0 [1 + p(x-1)]^{N_0-1} + \right. \\ \left. + N_0 [1 + p(x-1)]^{N_0-1} (p) \right]_{x=1} = N_0(N_0-1)p^2 - N_0^2 p^2 + N_0 p \\ = N_0 p(1-p) \quad (\text{B.7})$$

DISTRIBUCION MULTINOMIAL.

Un proceso multinomial se caracteriza por una función de distribución multinomial de la forma :

$$P(n) = \begin{cases} \frac{N_0!}{(N_0 - n_1 - n_2 - \dots - n_m)! n_1! n_2! \dots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m} \\ \times [1 - p_1 - p_2 - \dots - p_m]^{N_0 - n_1 - n_2 - \dots - n_m} & \text{para } n_1 + n_2 + \dots + n_m \leq N_0 \\ 0. & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (B.8)$$

donde n es ahora un vector que consta de m componentes, es decir

$$n = (n_1, n_2, \dots, n_m)$$

Su función generadora de probabilidad (ec. 3.5) es:

$$G(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_m=0}^{\infty} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m} \frac{N_0!}{(N_0 - n_1 - \dots - n_m)! n_1! \dots n_m!} \\ p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m} [1 - p_1 - p_2 - \dots - p_m]^{N_0 - n_1 - n_2 - \dots - n_m} \\ = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_m=0}^{\infty} \frac{N_0!}{(N_0 - n_1 - \dots - n_m)! n_1! \dots n_m!} \\ (x_1 p_1)^{n_1} (x_2 p_2)^{n_2} \dots (x_m p_m)^{n_m} \\ [1 - p_1 - p_2 - \dots - p_m]^{N_0 - n_1 - n_2 - \dots - n_m}$$

$$\begin{aligned}
&= [x_1 p_1 + x_1 p_2 + \dots + x_n p_n + (1 - p_1 - p_2 - \dots - p_n)]^{N_0} \\
&= [1 + p_1(x_1 - 1) + p_2(x_2 - 1) + \dots + p_n(x_n - 1)]^{N_0} \quad (\text{B.9})
\end{aligned}$$

La media n_i es

$$\begin{aligned}
\langle n_i \rangle &= \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)_{x_1 = \dots = x_n = 1} \\
&= N_0 [1 + p_1(x_1 - 1) + \dots + p_n(x_n - 1)]^{N_0} p_i \Big|_{x_1 = \dots = x_n = 1} \\
&= N_0 p_i \quad (\text{B.10a})
\end{aligned}$$

y en general para cualquier n_i , donde $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\langle n_i \rangle = N_0 p_i \quad (\text{B.10b})$$

Para las varianzas calculamos primero las autocovarianzas para n_i su autocovarianza es

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^2 &= \langle n_1^2 \rangle - \langle n_1 \rangle^2 \\
&= \left[\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} - \frac{\partial G}{\partial x_1} \left(\frac{\partial G}{\partial x_1} - 1 \right) \right]_{x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[N_0(N_0-1) \left[1 + p_1(x_1-1) + \dots + p_n(x_n-1) \right]^{N_0-2} p_1^2 \right. \\
&\quad \left. - N_0^2 \left[1 + p_1(x_1-1) + \dots + p_n(x_n-1) \right]^{2(N_0-1)} p_1^2 \right. \\
&\quad \left. + N_0 \left[1 + p_1(x_1-1) + \dots + p_n(x_n-1) \right]^{N_0} p_1 \right]_{x_1 = \dots = x_n = 1} \\
&= N_0(N_0-1)p_1^2 - N_0^2 p_1^2 + N_0 p_1 = N_0 p_1 (1-p_1) \tag{B.11a}
\end{aligned}$$

para n_2 su autocovarianza es:

$$\sigma_{22}^2 = \langle n_2^2 \rangle - \langle n_2 \rangle^2$$

y de manera analoga se llega a

$$\sigma_{22}^2 = N_0 p_2 (1-p_2). \tag{B.11b}$$

en general la autocovarianza para n_i esta dada por

$$\sigma_{ii}^2 = \left[\frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} - \frac{\partial G}{\partial x_i} \left(\frac{\partial G}{\partial x_i} - 1 \right) \right]_{x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1}$$

$i=1, 2, \dots, m$

$$\sigma_{ii}^2 = N_0 p_i (1-p_i) \tag{B.11c}$$

las covarianzas estan definidas como

$$\sigma_{ij}^2 = \langle n_i n_j \rangle - \langle n_i \rangle \langle n_j \rangle$$

o bien

$$\sigma_{ij}^2 = \left[\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial G}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j} \right]_{x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1}$$

por ejemplo

$$\sigma_{12}^2 = \left[\frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial G}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_2} \right]_{x_1 = x_2 = \dots = x_m = 1}$$

$$= \left[N_0(N_0-1) \left[1 + p_1(x_1-1) + \dots + p_m(x_m-1) \right]^{N_0-2} p_1 p_2 \right. \\ \left. - \left(N_0 \left[1 + p_1(x_1-1) + \dots + p_m(x_m-1) \right]^{N_0-1} p_1 \right) \right. \\ \left. \left(N_0 \left[1 + p_1(x_1-1) + \dots + p_m(x_m-1) \right]^{N_0-1} p_2 \right) \right]_{x_1 = \dots = x_m = 1}$$

$$= N_0(N_0-1)p_1 p_2 - N_0^2 p_1 p_2 = -N_0 p_1 p_2. \quad (\text{B.12a})$$

o en terminos de los promedios (ec. B.10b)

$$\sigma_{12}^2 = - \frac{\langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle}{N_0} \quad (\text{B.12b})$$

en general la covarianza de n_i y n_j es

$$\sigma_{ij}^2 = -N_0 p_i p_j$$

o bien

$$\sigma_{ij}^2 = - \frac{\langle n_i \rangle \langle n_j \rangle}{N_0} \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad i \neq j \quad (\text{B.12c})$$

las distribuciones anteriormente mencionadas no excluyen el caso en que las probabilidades p_i son dependientes del tiempo.

REFERENCIAS

- [1] Lattes, C.M, M.G.S. Occhialini y C.F. Powell(1947a), Nature 160,453(1947).
- [2] Frank, F.C., Nature 160,525(1947).
- [3] Sakharov, A.D. y Levedev, P.N., Physics Inst. Rep (1948).
- [4] Alvarez, L.W., Adventures expl. Phys. α , 72-79(1972).
- [5] Alvarez, L.W. et al., Phys. Rev. 105,1127(1957).
- [6] Dzhelepov, V.P. et al., Soviet Phys. JETP 23,820(1966).
- [7] Gershtein, S.S. y Ya.B. Zel'dovich, soviet Physics Usp, 3,593(1961).
- [8] Vesman, E.A., Zh.éssp. teor. Fiz. Pis'ma Redapt 5,113(1967).
- [9] Gershtein, S.S. y Ponomarev, L.I., Phys. Lett. 72B,80(1977).
- [10] Bystritsky, V.M. et al. Sov. Phys. JETP 49,232(1979).
- [11] Breunlich, W.H., Nucl. Phys. A353,201(1981).
- [12] Massey, H.S., E.H.S. Burhop y H.B. Gilbody, Electronic and ionic phenomena, Vol V(Oxford, 12970).
- [13] Hughes, V. y C.S. Wu, eds, Muon Physics(Academic Press, 1975).
- [14] Ponomarev, L.I, en: Proc. 6th. Intern. Conf. on Atomic Phys. 374A,607(1979).
- [15] Meyer-ter-Vehn, J., Physik Blaeter 35,211(1979).
- [16] Rafelski, J. (1979). Esotic Atoms (plenum, 1979).
- [17] Fiorentini, G. (1981), en Proc. (3th. Int. Conf. on Atomic Phys. 29,67(1979).
- [18] Petrov, Yu. V. y Yu. M. Shabelski (18981), Leningrad preprint; 699.

- [19] Breunlich, W.H. Phys. Rev. Lett. 53,1137(1984).
- [20] Lederman et al., Phys. Rev. 132,2679(1963).
- [21] Jones, S.E. et al. Phys. Rev. Lett. 56,588(1986).
- [22] Jones, S.E. et al. 51,1757(1983).
- [23] Caffrey, A.J. et al. Pap. presentado en el taller de Fusión catalizada por muones, Jackson, 7 y 8 de Junio (1984).
- [24] Anderson, A.N. et al. Pap. presentado en el taller de Fusión catalizada por muones, Jackson, 7 y 8 de Junio (1984).
- [25] Jones, S.E. en Atomic Physics, 99-115(World Scientific, Singapore, 1984).
- [26] Bracci, L. y G. Fiorentinni, Phys. Rep. 86,169(1982).
- [27] Bracci, L. y G. Fiorentinni,(1981a0, Nucl. Phys. 364A,383(1981).
- [28] Born. M. y J.R. Oppenheimer, Ann. d. Physik 84,457(1927).
- [29] Ponomarev, L.I. y S.I. Vinitzky, Sov. Phys. JETP 45,876(197).
- [30] Ponomarev, L.I., S.I. Vinitzky y F.R. Vukajlovic, J. Phys. B13,847(1980).
- [31] Gersthtein, S.S.,y L.I. Ponomarev, Sov Phys.(1975), en (Hughes y Wu. 1975, vol: II)
N.P. Popov, L.P. Presnyakov y L.N. Somov, Sov. Phys. JETP 52,872(1981).
- [32] Melezhik, V.S. et al., Sov Phys. JETP 52, 353(1981).
- [33] Morse, P.M. (1929).
- [34] Gershtein, S.S., Yu. V. Petrov, L.I. Ponomarev, N.P. Popov, L.P. Presnyakov y L.N. Somov, Sov. Phys. JETP 53,872(1981).
- [35] Van den Broeck C., "Stochastic processes applied to Physics", artículo de Pesquera y Rodriguez.

- [36] Gershtein et al. Sov. Phys. JETP 6,51(1980).
- [37] Alan P.S. y A.A. Harms, Atomkernenergie-kerntechnik 43,191(1983).
- [38] D. R. Wyman R.E. Stone y A.A. Harms, Nucl. Sci. and Engineering 96,46(1987).
- [39] Anil Kumar, Atomkernenergie-kerntechnik 43(1983).
- [40] Cohen J.s. y M. Leon, Phys. Rev. A33,1437(1986).
- [41] Ver por ejemplo el método de Adams en "Advanced Calculus for Applications" de Hildebrand, pags. 96-100, 107-111.

- [36] Gershtein et al. Sov. Phys. JETP 4,51(1980).
- [37] Alan P.S. y A.A. Harms, Atomkernenergie-kerntechnik 43,191(1983).
- [38] D. R. Wyman R.E. Stone y A.A. Harms, Nucl. Sci. and Engineering 96,46(1987).
- [39] Anil Kumar, Atomkernenergie-Kerntechnik 43(1983).
- [40] Cohen J.S. y M. Leon, Phys. Rev. A33,1437(1985).
- [41] Ver por ejemplo el método de Adams en "Advanced Calculus for Applications" de Hildebrand, page. 96-100, 107-111.

BIBLIOGRAFIA

- Bracci L. y Fiorentini G., Phys. Reports 86(4), 169-216(1982).
- Gershtein S. S., Petrov V. Yu., et al , Soviet Phys. JETP51(6), 1053-1058(1980).
- Hildebrand F. B., "Advanced Calculus for applications" Prentice-Hall (1976)
- Jones Earl Steven, Nature 321,127-133(1986).
- Jones E. S., Caffrey J. A., Walter J. B., Anderson Alan N.,Kenneth D. W. et al, Atomkernenergie Kerntechnik 43(3), 179-183(1983).
- Jones S. E. et al Phys. Rev. Lett. 51(19), 1757-1760(1983)
- Kumar Anil, Atomkernenergie Kerntechnik 43(3), 203-207(1983)
- Luthe R, Olivera A. y Shutz F., "Métodos Numéricos", Limusa 1986.
- McCracken D. D. y W. S. Dor, "Métodos numéricos y programación FORTRAN", Limusa, 1980.
- Papoulis A., "probability, Randon Variables and Stochastics Processes" Mc Graw-Hill, New York, 1965.
- Pesquera y Rodriguez, "Stochastic Processes applied to Physics"
- Ponomarev L. I., Atomkernenergie Kerntechnik 43(3), 175-178(1983).
- Rafelski Johann y Jones E. Steven, Scientific American 257(1),84-89(1987).
- Vitela J. y Coronado M. , Generatin functions and the Stactistics of Radiactive Chains, por publicarse en A.J.P.
- Zmeskal Johan, Breunlich W. H., Cargnelli Michael, Fuhrman Hermann, Kammel Peter, Marton Johann, Pawlek Peter, Werner Johannes, Atomkernenergie Kerntechnik 43(3), 1930-1941(1983).

BIBLIOGRAFIA

- Bracci L. y Fiorentini G., Phys. Reports 86(4), 169-216(1982).
- Gershtein S. S., Petrov V. Yu., et al , Soviet Phys. JETP51(6), 1053-1058(1980).
- Hildebrand F. B., "Advanced Calculus for applications" Prentice-Hall (1976)
- Jones Earl Steven, Nature 321,127-133(1986).
- Jones E. S., Caffrey J. A., Walter J. B., Anderson Alan N., Kenneth D. W. et al, Atomkernenergie Kerntechnik 43(3), 179-183(1983).
- Jones S. E. et al Phys. Rev. Lett. 51(19), 1757-1760(1983)
- Kumar Anil, Atomkernenergie Kerntechnik 43(3), 203-207(1983)
- Luthe R, Olivera A. y Shutz F., "Métodos Numéricos", Limusa 1986.
- McCracken D. D. y W. S. Dor, "Métodos numéricos y programación FORTRAN", Limusa, 1980.
- Papoulis A., "probability, Randon Variables and Stochastics Processes" Mc Graw-Hill, New York, 1965.
- Pesquera y Rodriguez, "Stochastic Processes applied to Physiscs"
- Ponomarev L. I., Atomkernenergie Kerntechnik 43(3), 175-178(1983).
- Rafelski Johann y Jones E. Steven, Scientific American 257(1),84-89(1987).
- Vitela J. y Coronado M. , Generatin functions and the Stactistics of Radiactive Chains, por publicarse en A.J.P.
- Zmeskal Johan, Breunlich W. H., Cargnelli Michael, Fuhrman Hermann, Kammel Peter, Marton Johann, Pawlek Peter, Werner Johannes, Atomkernenergie Kerntechnik 43(3), 1930-1941(1983).