15
24

UNIVERSIDAD NACIONAL

AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

GEOMETRIA ANALITICA INDIVIDUALIZADA

PASANTE: RAUL LOPEZ GARCIA

DIRECTORA DE TESIS: DRA. ISABEL PUGA

1990

GEOMETRIA ANALITICA

INDICE

P R O L O G O

PRESENTACION DE LA TESIS: GEOMETRIA ANALITICA

Desde siempre he sido consciente de la dificultad en el aprendizaje de las matemáticas que sufre una gran cantidad de estudiantes. Muchos maestros piensan que los alumnos deben captar de una manera inmediata los conceptos y teorías matemáticas, y por lo tanto, no es necesario dar mayores explicaciones en sus clases.

Desde mi punto de vista es al contrario, la responsabilidad del maestro radica en explicar con todo detalle, los conceptos, definiciones, teoremas y corolarios que expone diariamente, para que de esa manera sus alumnos capten íntegramente sus explicaciones y adquieran firmemente el conocimiento matemático.

Claro está que el maestro tiene también la responsabilidad de inculcar en el alumno el hábito por el estudio, la inquietud por la investigación y el gusto por la matemática en general. Sin embargo, est última, es una labor que considero muy ambiciosa, debido a que la gran mayoría de los estudiantes elude a las matemáticas y todo lo que se relaciones con ellas. Este rechazo se debe, en gran medida, a la instrucción deficiente que imparten los profesores desde el Jardín de Niños y Primaria, que es donde a mi juicio, se genera dicha aversión.

Desgraciadamente esta problemática, por demás interesante, sale del espacio de tiempo que tenemos para laintroducción de esta tesis.

Pero es precisamente tal problemática, la que me impulsa a a elaborar este libro; en el cual me propongo eliminar muchos de los vicios didácticos, tanto de profesores como de autores de matemáticas, dedicados en este caso, a la enseñanza de la Geometría Analítica.

Dentro de mi darrera profesional, de casi ya veinte años he tenido el privilegio de enseñar las matemáticas en todos los niveles educativos, desde Jardín de Niños hasta profesional; también he tendio la oportunidad de escribir doce libros de matemáticas para los niveles primario y secundario. Todo esto ha hecho que mi interés por la enseñanza de las matemáticas, a través de un libro de texto, continúe hasta bachillerato, escribiendo en esta ocasión, un libro de texto para la materia de Geometría Analítica.

Las cónicas son el material esencial del presente libro.

La forma de presentarlas, es a través de su definición, para pasar posteriormente a los teoremas, y de éstos, a los problemas. A diferencia de otros textos. muestro al alumno, con lujo de detalle, el análisis y resolución de los problemas expuestos. Con ésto, trato de disminuir la dificultad de muchos alumnos para entender la geometría analítica.

Así mismo, los ejercicios están planteados con la misma complejidad que los resueltos, ya que cuando se eleva su dificultad, la gran mayoría, al no encontrar la formade resolverlos, se frustra, generándose así la aversión hacia las matemáticas, a la que nos hemos referido anteriormente.

También se incluye la solución de los ejercicio para que los alumnos puedan evaluar su aprendizaje.

Atentamente: Raúl López García .

R E C O N O C I M I E N T O S

Pluralizo: "RECONOCIMIENTOS", pues muchas personas tuvieron que ver para el logro de esta tesis.

Debo mencionar, en especial, a todos los maestros que me apoyaron en mis estudios y en la elaboración de mi tesis, ya que sin ello hubiera sido imposible la culminación de mi carrera.

También estoy endeudado con mi prima América, que me facilitó la ardua tramitación para la realización de esta tesis.

Siempre agradecido: Raúl López G

D E D I C A T O R I A S

A mi esposa Ma. de Lourdes, con todo mi amor.

A mis adoradas hijas: Lourdes y Adriana.

A mi tía María de la Luz, que sin darme la vida me enseñó a vivirla.

CAPITULO I

NUMERACION

La Geometría Analítica trata con números, por lo tanto tienes que conocerlos y distinguirlos.

1)
N= NUMEROS NATURALES. Son los primeros números que usó el hombre:

1,2,3,4,5,...

2)
Z= NUMEROS ENTEROS -...,-3,-2,-1,0, 1, 2, 3, ...

3)
Z^+ = ENTEROS POSITIVOS = Números Naturales

4)
Z^- = ENTEROS NEGATIVOS -...,-3,-2,-1

5)
W=ENTEROS NO NEGATIVOS = Números Naturales, incluyendo el cero.

6)
M= ENTEROS NO POSITIVOS = Enteros negativos incluyendo el cero.

Como observarás el conjunto de los Naturales está contenido en el conjunto de los enteros. Con símbolos : $N \subset Z$

7)
Q= NUMEROS RACIONALES. Son todos los números que se pueden expresar como el cociente de dos números enteros, con el denominador diferente de cero.

Ejemplo: $-\frac{3}{5}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{6}{-4}$

Los números naturales y enteros son subconjuntos de los racionales, pues se pueden expresar como el cociente de dos enteros.

Ejemplo: $8 = \frac{8}{1} = \frac{16}{2} = \dots$

$-9 = \frac{-9}{1} = \frac{18}{-2} = \dots$

Con símbolos: $N \subset Z \subset Q$

Por medio de diagramas de Venn.

Q

Z

N

8) NUMEROS IRRACIONALES.

I= Irracionales son los números que no son racionales. Es decir, los que no se pueden expresar como el cociente de dos enteros.

Ejemplos: $\sqrt{2}$, π , $\sqrt[3]{4}$, ...

Observación. Los racionales en su forma decimal siempre conducen a un período.

Ejemplo $\frac{3}{7} = .\overline{428571}$ (la raya indica que el grupo de cifras "428571" se repite indefinidamente).

Este resultado se obtiene al hacer la siguiente división:

```
       .428571...
  7 |  30
        20
         60
          40
           50
            10
             30
              .
               .
                .
```

En cambio los irracionales no tiene período en su forma decimal.

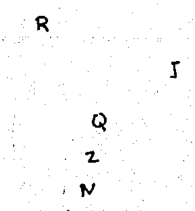
Ejemplo: $\sqrt{2} = 1.4142135 \ldots$

9) Números reales.

R= Reales. El conjunto de números reales es la unión de los conjuntos de números naturales, enteros, racionales e irracionales. Ejemplo. $-2, 3, \frac{8}{7}, \pi, \sqrt{7}, \ldots$ son todos números reales.

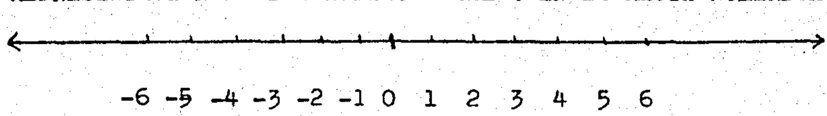
Con símbolos R= NUZUQUI

Con diagramas de Venn.



Observación. Los números irracionales únicamente son subconjunto de los reales.

10) REPRESENTACION DE LOS NUMEROS REALES EN LA RECTA NUMERICA



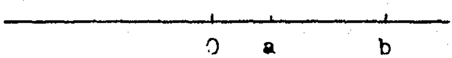
En esta representación, a todo punto de la recta numérica le corresponde un número real y vicevefsa. Al cero se le llama origen.

Los números positivos van a la derecha del origen; los negativos, a la izquierda.

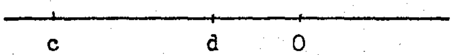
11)

ORDEN DE LOS NUMEROS REALES EN LA RECTA NUMERICA. Un número real "a" será menor que un número real "b" si "a" está a la izquierda de "b". Y mayor, si "a" está a la derecha de"B".

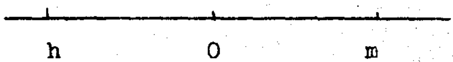
Ejemplo



a menor que b, con símbolos: $a < b$



d mayor que c, con símbolos: $d > c$



h menor que m, $h < m$, o bien,

m mayro que h, $m > h$

12)

VALOR ABSOLUTO DE UN NUMERO REAL.

$\boxed{\text{La definicion}}$ del valor absoluto de un número a , es:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ si } a \geq 0 \\ -a, \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Nótese que el valor absoluto de un número real, geométricamente, es la distancia del número (punto) al origen, en la recta numérica.

Ejemplo: $|8| = 8$, $\left|\frac{-3}{5}\right| = \frac{3}{5}$, $|-\pi| = \pi$

13) LEYES DE LOS SIGNOS PARA LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES.

1) Para sumar númefos de igual signo, se suman sus valores absolutos y al resultado se le antepone el signo común.

Ejemplo $(-8) + (-5) = -13$, $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2}$

2) Para sumar números de disti·nto signo se resta al mayor vabr absoluto el menor, y al resultado se le antepone el signo del número con mayor valor absoluto.

Ejemplo $(-3) + (5) = 2$, $(-16) + (9) = -7$

$$-\frac{3}{4} + \frac{9}{4} = \frac{6}{4}$$

3) Para restar se le cambia el signo al sustraendo y se suma al minuendo.

Ejemplo. $(-8) - (6) = (-8) + (-6) = -14$

$$\frac{-2}{5} - \left(\frac{-6}{5}\right) = \frac{-2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

4) Para multiplicar (dividir) dos números con el mismo signo, se multiplican (dividen) sus valores absolutos y al resultado se le antepone el signo positivo (+)

Ejemplo $(3)(8) = 24$, $\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{2}{6}\right) = \frac{6}{30}$ $\quad \frac{-9}{-3} = 3$, $\frac{16}{8} = 2$

5) Para multiplicar (dividir) dos números con distinto signo, se multiplican (dividen) sus valores absolutos y al resultado se le antepone el signo negativo (-)

Ejemplo: $(-3)\ (9) = -27$, $\left(\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{3}{7}\right) = -\frac{6}{35}$

$\frac{36}{-9} = -4$, $\frac{6}{5} \div \frac{-8}{9} = -\frac{54}{+40}$

14)

LEYES DE LOS EXPONENTES. Sean m y n enteros positivos .

1) $a^n = \underbrace{a.a.\ldots\ldots a}_{n\ veces}$; a=base, n=exponente

Ejemplo. $3^5 = 3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$, $\left(\frac{-4}{6}\right)^2 = \left(\frac{-4}{6}\right)\left(\frac{-4}{6}\right)$

2) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Ejemplos. $8^5 \cdot 8^7 = 8^{12}$, $\pi^2\ \pi^4 = \pi^6$

3) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Ejemplos. $\frac{7^5}{7^3} = 7^{5-3} = 7^2$, $\frac{2^8}{2^5} = 2^{8-5} = 2^3$

4) $(a^m)^n = a^{mn}$

Ejemplos. $\left[(-6)^8\right]^5 = (-6)^{40}$, $\left[\left(\frac{2}{7}\right)^4\right]^5 = \left(\frac{2}{7}\right)^{20}$

5) $(ab)^m = a^m \cdot b^m$

Ejemplos. $(3.7)^2 = 3^2 \cdot 7^2$, $\left[\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{3}{9}\right)\right]^5 = \left(\frac{2}{7}\right)^5 \left(\frac{3}{9}\right)^5$

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, $b \neq 0$

Ejemplo. $\left(\frac{6}{8}\right)^7 = \frac{6^7}{8^7}$, $\left(\frac{-4}{9}\right)^8 = \frac{(-4)^8}{9^8}$

PROBLEMAS RESUELTOS.

1. Escribe 5 números naturales

   a) 8   b) 3874   c) 900082   d) 1   e) 1050026

2. Escribe 5 números enteros.

   a) -2   b) 64   c) -10028   d) -500   e) 0

3. Escribe 5 números racionales

   a) $\frac{-3}{5}$ b) $\frac{27}{360}$ c) 8   d) -9   e) .26

4. Escribe 5 números irracionales.

   a) $\sqrt{6}$ b) $\sqrt[3]{7}$ c) π d) $\sqrt[6]{3}$ e) $\sqrt[5]{6}$

5. Escribe 5 números reales.

   a) 0   b) 186.25   c) $\sqrt[4]{9}$ d) $\frac{-3}{10}$ e) -49

6. Escribe el símbolo ($\subset$, $\not\subset$) según corresponda:

   a) $N \subset R$ b) $Q \not\subset Z$ c) $R \not\subset I$

   d) $I \subset R$ e) $Q \not\subset I$

7. Escribe todos los nombres posibles comunes a los elementos de los conjuntos de números.

   a) $\{1,2,8,3569\}$ Naturales, enteros, racionales, reales.

   b) $\{0,9,25\}$ Enteros, Enteros no negativos, racionales, reales

   c) $\{2, \sqrt{8}, \pi, -\frac{3}{7}\}$ Reales

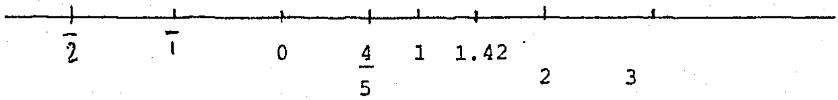
   d) $\{0, -50, -20, -9\}$ Enteros no positivos, racionales, reales

8. Escribe dos diferencias entre los números racionales e irracionales.

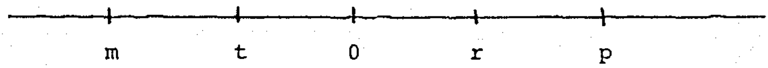
   a) Los racionales se expresan como el cociente de dos números enteros con el denominador diferente de cero y los irracionales no.

b) Los racionales, en su forma decimal, conducen a un período y los irracionales no.

9. Localiza los números -2, $\frac{4}{5}$, 1.42, 3 en la recta numérica (aproximadamente).



10. Escribe el símbolo ($>$, $<$) según corresponda.



a) $m < t$ b) $r > t$ c) $p > m$

11. Encuentra el valor absoluto de los siguientes números.

a) $|-\pi| = \pi$ b) $|-.67| = .67$ c) $|54| = 54$

12. Realiza los siguientes operaciones de potencias.

a) $6^5 \cdot 6^8 = 6^{13}$ b) $(8^5)^2 = 8^{10}$ c) $\frac{7^5}{7^3} = 7^2$

d) $(8.9)^5 = 8^5 \cdot 9^5$ e) $\left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{9^3}{10^3}$

f) $m^0 = 1$, $5^0 = 1$, $(-3)^0 = 1$

13. Realiza las siguientes operaciones.

b) $(-8) + (-6) = -14$ b) $(-4)\ (-5) = 20$

c) $\frac{-30}{6} = -5$ d) $(-9) - (-8) = -9 + 8 = -1$

e) $(-5)\ (7) = -35$ f) $\frac{-40}{-8} = 5$

Ejercicio 1.

1.1 Escribe 5 números naturales.

a) b) c) d) e)

1.2 Escribe 5 números enteros.

a) b) c) d) e)

1.3 Escribe 5 números racionales.

a) b) c) d) e)

1.4 Escribe 5 números irracionales

a) b) c) d) e)

1.5 Escribe 5 números reales.

a) b) c) d) e)

1.6 Escribe el símbolo ($\subset$, $\not\subset$) según corresponda

a) N ______ Z b) I _____ R c) Q ______ I

d) Q ______ R e) Z _____ Q f) Z ______ R

1.7 Escribe todos los nombres posibles comunes a todos los elementos de los siguientes conjuntos de números.

a) $\{0, 8, 13\}$ ______________________________

____

b) $\{-32, -8, 0\}$ ______________________________

____

c) $\{7, \frac{3}{5}, -.82\}$ ______________________________

____

1.8 Escribe la diferencia entre los números racionales e irracionales. ______________________________

____

1.9 Localiza los números -8, $\frac{4}{7}$, π, $\sqrt{10}$ en la recta numérica.

0

1.10 Después de observar la recta numérica, escribe el símbolo

($>$, $<$) según corresponda

p r 0 t m

a) p ___m b) t____r c) r____m

1.11 Encuentra el valor absoluto de los siguientes números.

a) $|\pi| =$ b) $\left|-\frac{4}{7}\right| =$ c) $|-.28| =$

1.12 Realiza las siguientes operaciones de potencias.

a) $8^2 \cdot 8^5 =$ b) $\frac{3^7}{3^4} =$ c) $\left[\left(\frac{2}{9}\right)^2\right]^4 =$

d) $\left(\frac{6}{5}\right)^8 =$ c) $\left[(7)(5)\right]^4 =$ f) $h^0 =$

1.13 Realiza las siguientes operaciones.

a) $(-6) + (-5) =$ b) $(6) + (9) =$

c) $(-5)\ (-10) =$ d) $\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{8}{7}\right) =$

e) $\frac{40}{-5} =$ f) $\frac{-6}{-3} =$

CAPITULO 2

Sistema de coordenadas rectangulares, Gráfica de una función.

15) El sistema de coordenadas rectangulares es usado, principalmente, para localizar puntos y graficar funciones.

Ejemplo:

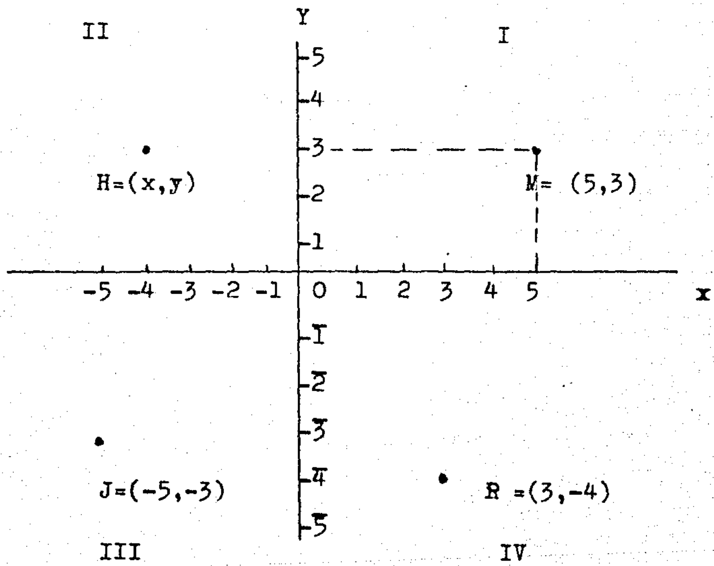


fig. 1

El SISTEMA está formado por dos rectas de números reales (ejes X y Y), perpendiculares entre sí, cuya intersección es el cero (origen). Observación: Este sistema divide al plano en cuatro cuadrantes y todo punto de él se localiza por medio de sus coordenadas (x,y), donde la "X" recibe el nombre de abscisa y la "y", de ordenada. (fig.1) Ejemplos M=(5,3), H=(x,y), J= (-5,-3)

Las coordenadas del punto M son: 5 y 3.

Las coordenadas del Punto H son: x,y

Las coordenadas del punto J son :-5 y -3

A todo punto del pàano le corresponde una pareja de coo rdenadas y viceversa.

16) Ala pareja de coordenadas (x,y) se le llama par ordenado, pues $(x,y) \neq (y,x)$

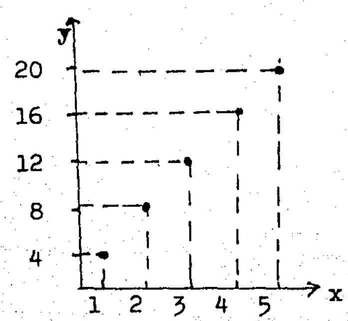
17) Existen magnitudes que dependen èntre sí dada alguna relación. Por ejemplo elperímetro de un cuadrado depende de la medida de su lado. La ecuación que establece esta relación está dada por la expresión P=4l . Utilizando las varibales usuales x,y, podemos escribir la ecuación de la siguiente manera: $y=4x$, donde "y" representa al perímetro y la "x" a la magnitud de los lados. Esta relación la podemos tabular así:

x	1	2	3	4	5
y	4	8	12	16	20

Las magnitudes relacionadas se expresan de variasmaneras: usando paréntesis, mediante una gráfica, o bien, mediante lá misma tabulación , veámoslo:

(1,4) ,(2,8),(3,12),(4,16),(5,20)

o bien; mediante los ejes coordenados:



Para generalizar la relación entre estas cantidades, se usa la notación funcional:

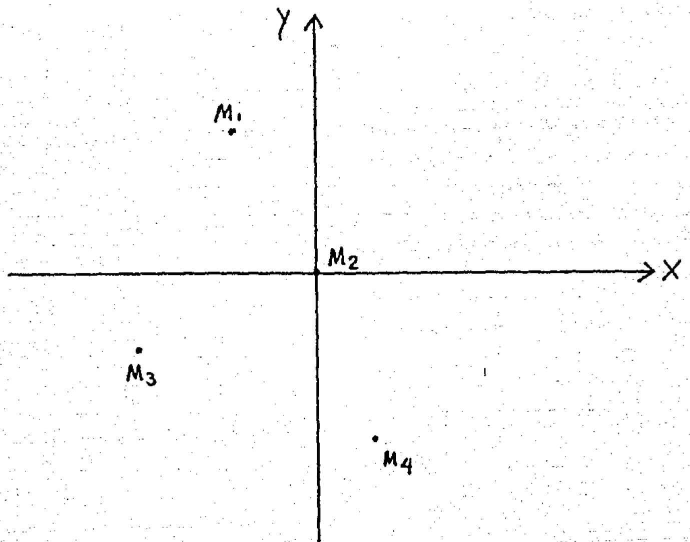
$y = f(x) = 4x$.

Esta notación significa que a cada magnitud x, se multiplica por 4, para obtener el perímetro y.

PROBLEMAS RESUELTOS

SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

1. Localiza los puntos: $M_1 = (-3, 5)$, $M_2 = (0, 0)$
$M_3 = (-6.5, -2.8)$, $M_4 = (2, -6)$.



2. En las siguientes parejas ordenadas escribe una "a" a la abscisa y una "o" a la ordenada.

a) (-8, -0) b) (0, 7) c) (π , $\sqrt{8}$)
   a 0 a 0 a 0

3. ¿Cómo se les llama a la abscisa y a la ordenada juntos?
R = coordenadas o pareja ordenada

4. ¿ En qué cuadrantes estan los puntos (3, 5), (-2, 5), (-2, -5) y (2, -5)

R: 1o. 2o, 3o y 4o. cuadrantes, respectivamente.

5. A todo punto del plano, ¿Qué le corresponde?

R= Una pareja de coordenadas.

GRAFICA DE UNA FUNCION

6. Decir si los puntos: A = (0,0), B=(1,3) y C= (6,36) pertenecen a la gráfica de la función $F(x) = x^2$,

Solución. El punto A sí perteneee a la gráfica de la función, pues $0=0^2$

El punto B no pertenece a la gráfica de la función, pues $3 \neq 1^2$

El punto C si pertenece a la gráfica de la función, pues $36 = 6^2$

7. Encuentra la tabulación de la función f(x) con los siguientes datos.

$f(x) = 2x^3-8$, para x=-2,-1,0,4,5

Solución

x	-2	-1	0	4	5
y =f(x)	-24	-10	-8	120	242

Operaciones

$f(-2) = 2(-2)^3- 8 = 2(-2)(-2)(-2) -8= 2(-8) -8 = -16-8 = -24$

$f(-1) = 2(-1)^3- 8 = 2(-1)(-1)(-1) -8= 2(-1) -8 = -2-8 = -10$

$f(0) = 2(0)^3- 8 = 2(0)(0)(0) -8= 2(0) -8 = 0-8 = - 8$

$f(4) = 2(4)^3- 8 = 2(4)(4)(4) -8= 2(64) -8 = 128-8= 120$

$f(5) = 2(5)^3- 8 = 2(5)(5)(5) -8= 2(125)-8 = 250-8= 242$

8 ¿Cuáles son las variables independientes y dependientes (o imágenes) en la tabulación anterior?

Solución , Independientes: x= -2,-1, 0, 4, 5

Dependientes o imágenes: y= -24, -10, -8, 120 , 242

9. Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = \sqrt{x}$, c) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

soluciones:

a) Todos los números reales, pues a todos los números x se les puede elevar al cuadrado

b) Solamente los números reales positivos y el cero, pues los números negativos no tiene raíz cuadrada.

c) Todos los números reales menos el 3, pues si x =3 entonces

$f(3) = \dfrac{1}{3-3} = \dfrac{1}{0}$ y esta expresión no tiene sentido matemático.

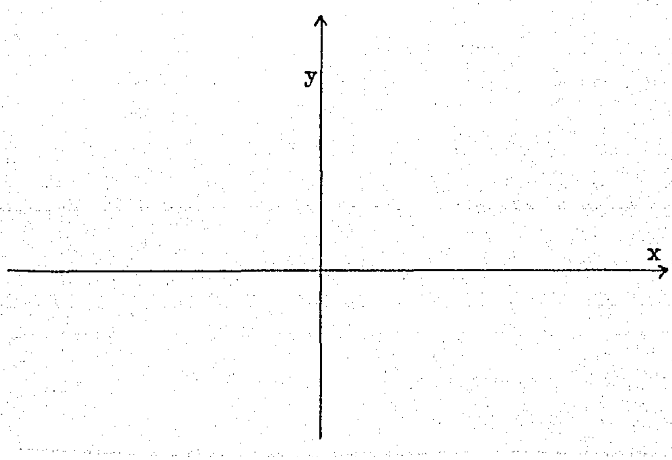
En otras palabras, la matemátida no considera a los quebrados con denominador cero.

Ejercicio 2

SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

2.1 Localiza los puntos : H = (-3,4) , M = (5,-7)

R= (0,0) y T = (0,7)



2.2 En las siguientes parejas ordenadas escribe una "a" a la abscisa y una "o" a la ordenada.

a) (-6, 4)   b) (9, -8)   c) (0, 5)   d)(-7, -4)

__ __   __ __   __ __   __ __

2.3 ¿Qué nombre se les dá a la abscisa y ordenada juntas?

R:

2.4 ¿En qué cuadrantes están los puntos (-3,4) , (8,-7), (-2,-3) y(5,-9) ?

R:

2.8 ¿Cuáles son las variables independientes y dependientes (o imágenes) en la tabulación anterior?

Solución:

____

2.9 Encuentra el dominio de las siguientes funciones

a) $f(x)= x^3$, b) $f(x)=\frac{1}{x-5}$, c) $f(x)=\sqrt{x}$

Soluciones:

a) ______________________________

b) ______________________________

c) ______________________________

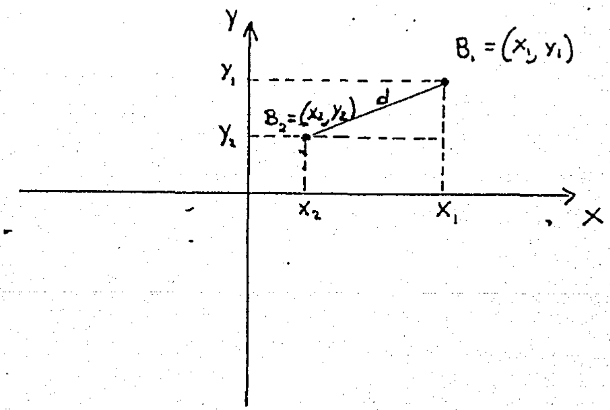
CAPITULO 3

CONOCIMIENTO Y APLICACION DE FORMULAS DE GEOMETRIA ANALITICA.

Distancia entre dos puntos. División de un segmento en una razón dada. Inclinación y pendiente de una recta, inclinación y pendiente de rectas paralelas a los ejes. Angulo entre dos rectas.

24) DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

La distancia entre dos puntos, se encuentra aplicando el teorema de Pitágoras, veamos: los puntos B_1 y B_2 en el siguiente dibujo.



*→ Por el teorema de Pitágoras que dice: El cuadro de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, tenemos:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$ (se sacó raiz cuadrada a ambos miembros de la ecuación)

y con esto hemos encontrado el siguiente Teorema: La distancia de un punto $B_1 = (x_1, y_1)$ a un punto $B_2 = (x_2, y_2)$ está dada por la fórmula

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

OBSERVACION. No importa en qué cuadrantes se encuentren los dos puntos, ni cuál se tome como B_1 o B_2

PROBLEMAS RESUELTOS.

1. Encontrar la distancia del punto $M = (a, b)$ al punto $P = (c, d)$.

Solución. Sea $M = B_1$ y $P = B_2$

$a = x_1$, $b = y_1$, $c = x_2$, $d = y_2$, entonces:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

OBSERVACION. En este caso se queda indicada la raíz, pues no sabemos de qué números se trata.

2. Encontrar la distancia del punto
$H = (-3, 4)$ al $J = (-2, -7)$

Solución. sea $H = B_1$, $J = B_2$ (puede ser al revés)

$-3 = x_1$, $4 = y_1$, $-2 = x_2$, $-7 = y_2$; entonces

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(-3-(-2))^2 + (4-(-7))^2}$$

$$= \sqrt{(\bar{3}+2)^2 + (4+7)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 11^2} = \sqrt{1 + 121} = \sqrt{122}$$

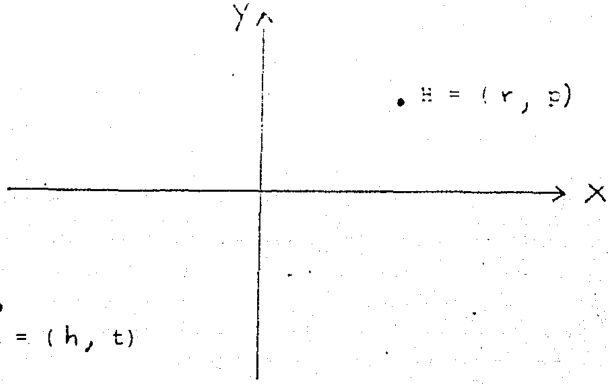
o sea, $d = \sqrt{122}$

Ejercicio 3.

1. Encuentra la distancia del punto J = (m,n) al punto R = (h, g).

2. Encuentra la distancia del punto P = (-6, + 2) al H = (-3,-6)

3. Encuentra la distancia de los puntos que aparecen en el dibujo



25) APLICACION DE LA FORMULA DE DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN PROBLEMAS GEOMETRICOS

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demostrar que el punto R = (4,3) es el punto medio del segmento cuyos extremos son: H = (2 , 1) y J = (6 , 5)

Solución. Para que R sea el punto medio de dicho segmento, necesita tener la misma distancia al punto H que al J. Veamos.

la distancia del punto H al R es:

$$HR = \sqrt{(2-4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

Ahora la distancia del J al R es

$$JR = \sqrt{(6-4)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

La distancia del punto R al H y al J fue la misma, por lo tanto

R sí es el punto medio.

2. Demostrar que los puntos: $R = (4, 3)$, $T = (7, 6)$ y $Q = (10, 3)$, son los vértices de un triángulo isósceles.

Solución. Un triángulo isósceles es el que tiene dos lados de la misma medida, por lo tanto tenemos que encontrar la longitud de los lados y ver si dos son iguales.

La distancia del punto R al T es:

$$RT = \sqrt{(4-7)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

La distancia del punto R al Q es

$$RQ = \sqrt{(4-10)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 0^2} = \sqrt{36+0} = \sqrt{36} = 6$$

La distancia del punto T al Q es

$$TQ = \sqrt{(7-10)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

Dos lados tienen la medida $\sqrt{18}$, por lo tanto sí es isósceles.
Nota: Puedes simplificar $\sqrt{18}$ **como** $3\sqrt{2}$

3. Encontrar el perímetro del polígono cuyos vértices son:
$M_1 = (-5, -3)$, $M_2 = (4, 4)$, $M_3 = (8, 2)$, $M_4 = (7, -2)$.

Solución: Tenemos que encontrar la magnitud de todos sus lados y sumarlas. **Ver figura 2**

$$M_1 M_2 = \sqrt{(4-(-5))^2 + (4-(-3))^2} = \sqrt{(4+5)^2 + (4+3)^2}$$
$$= \sqrt{9^2 + 7^2} + \sqrt{81+49} = \sqrt{130}$$
$$M_2 M_3 = \sqrt{(4-8)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$
$$M_3M_4 = \sqrt{(8-7)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{1^2 + (2+2)^2} = \sqrt{1^2 + 4^2}$$
$$= \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$M_4M_1 = \sqrt{(-5-7)^2 + (-3-(-2)\ ^2} = \sqrt{(-12)^2 + (-3+2)^2} =$$

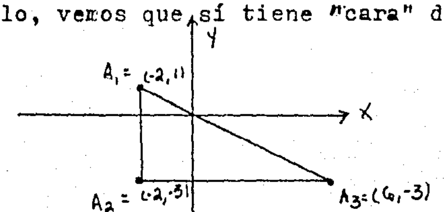
$$\sqrt{(-12)^2 + (-1)^2} = \sqrt{144+1} = \sqrt{145}$$

Perímetro: $\sqrt{130} + \sqrt{20} + \sqrt{17} + \sqrt{145}$

$= 11.40 + 4.47 + 4.12 + 12.04 = 32.03$ (resultado aproximado a centésimos)

4. Demostrar que los puntos: $A_1 = (-2, 1)$, $A_2 = (-2,-3)$ y $A_3 = (6,-3)$ son los vértices de un triángulo rectángulo y encontrar su área.

Solución. Trazándolo, vemos que sí tiene "cara" de triángulo rectángulo.



Para demostrarlo, tenemos que usar el teorema inverso del teorema de Pitágoras, esto es, ver si las longitudes de sus lados cumplen con el teorema de Pitágoras, para entonces afirmar que se trata de un triángulo rectángulo.

Veámoslo:

$$A_1A_2 = \sqrt{(-2-(-2))^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{(-2+2)^2 + (1+3)^2}$$

$$= \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$A_2A_3 = \sqrt{(-2-6)^2 + (-3-(-3))^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-3+3)^2} =$$

$$= \sqrt{64 + 0^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$A_3A_1 = \sqrt{(6-(-2))^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{(6+2)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$$

En caso de que el triángulo fuera rectángulo, el segmente A_3A_1 debe ser la hipotenusa por ser el de mayor longitud.

Nótese que:

$$80 = \left(\sqrt{80}\right)^2 = 4^2 + 8^2$$

por lo tanto el triángulo $A_1A_2A_3$ sí es un triángulo rectángulo

El área es base por altura sobre dos . Apoyándonos en el dibujo tomamos como base al segmente A_2A_3 y como altura el A_1A_2 .

$A_2A_3 = 8$, $A_1A_2 = 4$; por lo tanto su área es:

$$\frac{8 \times 4}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

5. La longitud de un segmento es $\sqrt{29}$.

Si uno de sus extremos es el punto (1, 1) y la abscisa del otro extremo es 6, encuentra su ordenada. (dos soluciones).

Solución. Los extremos de este segmento son lospuntos (1,1) y (6,y) por lo tanto deben satisfacer la fórmula de distancia, veamos:

$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, sustituyendo:

$$\sqrt{29} = \sqrt{(1-6)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{25 + (1-y)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos extremos de la ecuación tenemos:

$29 = 25 + (1-y)^2$, de donde $4 = (1-y)^2 \therefore \pm 2 = 1 - y$ (recuerda que una ráiz cuadrada tiene dos soluciones simétricas), $\pm 2 - 1 = -y$, multiplicando por (-1) ambos miembros: $\mp 2 + 1 = y$. De aquí tomamos las dos soluciones:

$y_1 = -2+1=-1$, $y_2=2+1=3$

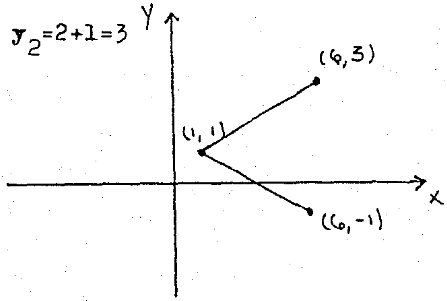


figura.

Como te das cuenta se trata de dos segmentos.

6. Encuentra la ecuación que determina el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los puntos M = (2, -2) y F= (5, -5). Da tres puntos que pertenezcan a dicho lugar geométrico.

Solución. Cualquier punto P = (x, y) que tomemos de este lugar geométrico su distancia a los puntos M y F debe ser la misma, o sea.

MP = PF, aplicando la fórmula, tenemos:

$$MP = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - (-2))^2} = \sqrt{(x -2)^2 + (y + 2)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 -4x + 4 + y^2 + 4y + 4} = \sqrt{x^2 -4x + y^2 + 4y + 8}$$

$$PF = \sqrt{(x -5)^2 + (y -(-5))^2} = \sqrt{(x -5)^2 + (y + 5)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 -10x + 25 + y^2 + 10y + 25} = \sqrt{x^2 - 10x + y^2 + 10y + 50}$$

Igualando, tenemos

$$\sqrt{x^2 - 4x + y^2 + 4Y + 8} = \sqrt{x^2 - 10x + y^2 + 10y + 50}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros (para quitar las raices).

$x^2 - 4x + y^2 + 4y + 8 = x^2 -10 x + y^2 + 10y + 50$, de donde:

$$x^2 -4x + y^2 + 4y + 8 - x^2 + 10x - y^2 - 10 y - 50 = o$$

Simplificando

$6 x - 6y - 42 = 0$, dividiendo ambos miembros entre 6 queda

$$x - y - 7 = 0$$

Esta ecuación es la que determina los puntos del plano que pertenecen al lugar geométrico, y son aquellos cuya diferencia de la abscisa con la ordenada es iguál a 7, para que después al restar 7, el resultado sea igual a cero.

Para encontrar los puntos que pertenezcan al lugar geométrico hacemos lo siguiente:

Buscamos puntos cuyas cooordenadas cumplan la condición $x-y-7=0$ por ejemplo, $B_1=(1,-6)$, pues $1-(-6)-7 = 1+6-7= 7-7=0$

$B_2= (0,-7)$, pues $0-(-7)-7=0+7-7=0$

$B_3= (8,-15)$, pues $-8-(-15)-7 = -8+15-7= 7-7=0$

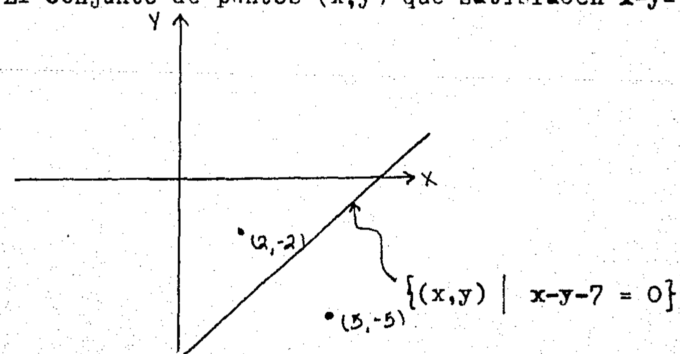
Otra forma de encontrarlos es la siguiente. Se despeja la "y" y se tabula, dando los valores que se quiera a la x.

$Y=x-7$

x	-5	-2	0	4
y	-12	-9	-7	-3

y los puntos serán: $(-5,-12)$, $(-2,-9)$, $(0,-7)$, $(4,-3)$

El conjunto de puntos (x,y) que satisfacen $x-y=7$ es infinito.



Siendo el segmento dibujado, parte del lugar geométrico.

Ejercicio 4

4.1 Demuestra que el punto B = (5 , 4) es el punto medio del segmento cuyos extremos son: H = (2, 1) y J = (8 , 7)

4.2 Demuestra que los puntos: H = (5,3), T = (4 , 8), S = (9,7) son los vértices de un triángulo isósceles.

4.3 Encuentra el perímetro del polígono cuyos vértices son:
$T_1 = (2, 4)$, $T_2 = (-3, 6)$
$T_3 = (-5, -4)$ y T_4 (3,-2)

4.4 Demuestra que los puntos: $R_1 = (3,4)$, $R_2 = (5,2)$ y $R_3 = (9,6)$ son los vértices de un triángulo rectángulo y encuntra su área.

4.5 La longitud de un segmento es $\sqrt{260}$.
Si uno de sus extremos es el punto (2,6) y la abscisa del otro extremo es 18, halla su ordenada (Dos soluciones)

6. Encuentra la ecuación que determina el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los puntos T = (3,-2) y J (-6, 7). Dar dos puntos que pertenezcan al lugar geométrico.

26). DIVISION DE UN SEGMENTO EN UNA RAZON DADA.

Teorema 1. Si $M_1 = (x_1, y_1)$ y $M_2 = (x_2, y_2)$ son los extremos de un $\overline{M_1M_2}$ entonces las coordenadas de un punto $P = (x, y)$ que divide a este segmento en la razón

$$r = \frac{M_1P}{P\,M_2}$$

están dadas de la siguiente manera.

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \qquad y = \frac{y_1 + r\,y_2}{1 + r}, \quad r \neq 1$$

Nota. La notación $\overline{M_1M_2}$ Denota un segmento dirigido, con punto inicial M_1 y final M_2.

COROLARIO 1. Las coordenadas del punto medio $P = (x, y)$ de un segmento dirigido $\overline{M_1M_2}$, donde $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (X_2, y_2)$, están dadas de la siguiente manera:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

PROBLEMAS RESUELTOS.

1. Demostrar el teorema 1. (Razón de un segmento).

Solución. Sean $M_1 = (x_1 , y_1)$, $M_2 = (x_2 , y_2)$ los extremos del segmento $\overline{M_1M_2}$

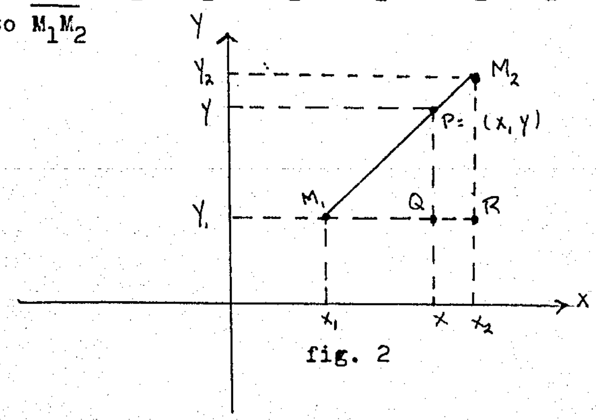


fig. 2

Por geometría sabemos que los triángulos formados por las líneas punteadas (fig. 2) son semejates es decir:

$\triangle M_1QP \sim \triangle M_1RM_2$ ($\sim$ semejante), y por el teorema de Tales de Mileto que dice: Al cruzar uha serie de rectas paralelas a dos

dos rectas convergentes, los segmentos formados son proporcionales; tenemos:

$$(1)\quad \frac{M_1P}{PM_2} = \frac{M_1Q}{Q\,R}$$

pero $M_1Q = x - x_1$, $QR = x_2 - x$, sustituyendo en (1) tenemos:

$\frac{x-x_1}{x_2-x}$, y como esta expresión es la división de dos números reales cuyo resultado es un número real también, podemos escribir lo siguiente:

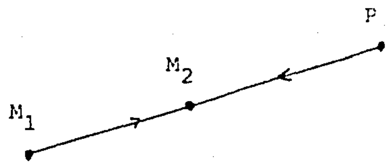
$$\frac{x-x_1}{x_2-x} = r$$

de esta ecuación despejamos a la "x".

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$$

Para encontrar la ordenada "y", te lo dejamos como ejercicio, que se hace de la misma manera.

OBSERVACION. Como estamos trabajando con segmentos dirigidos, la razón r, puede ser positiva o negativa. Por ejemplo, si el punto P está fuera del segmento $\overline{M_1M_2}$, entonces la razón es negativa, pues



los segmentos dirigidos $\overline{M_1 P}$ y $\overline{P M_2}$ son de sentidos opuestos.

2. Demostrar el corolario 1.

Solución.

Sabemos que $r = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$, pero

en el caso especial de que P sea el punto medio del segmento $\overline{M_1 M_2}$, tenemos que $x - x_1 = x_2 - x$, por lo tanto: $r = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = 1$

Sustituyendo r en $x = \dfrac{x_1 + rx_2}{1 + r}$, queda: $x = \dfrac{x_1 + (1)(x_2)}{1 + 1} =$

$\dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

La demostración para la ordenada y es similar, te la dejo como ejercicio.

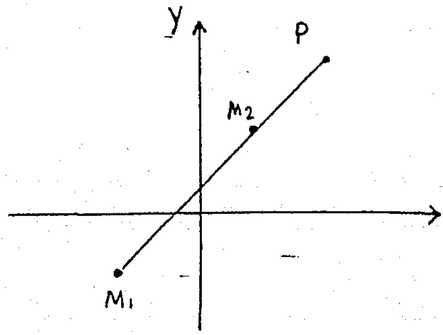
3. Si $M_1 = (-3, -2)$ y $M_2 = (2, 3)$ son los extremos de un segmento dirigido $\overline{M_1 M_2}$, encontrar las coordenadas del punto $P = (x, y)$ que divide al segmento en la razón: $-3 = \dfrac{M_1 P}{P M_2}$

Solución. Como la razón es negativa, el punto de división, P, es externo, como veremos al encontrar sus coordenadas.

$$x = \frac{x_1 + r\,x_2}{1 + r} = \frac{-3 + (-3)\ (2)}{1 + (-3)} = \frac{-3\ -6}{-2} = \frac{-9}{-2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$y = \frac{y_1 + r\,y_2}{1 + r} = \frac{-2 + (-3)\ (3)}{1 + (-3)} = \frac{-2\ -9}{-2} = \frac{-11}{-2} = \frac{11}{2} = 5.5$$

Trazo:



4. Encontrar las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{JK}$, donde J = (-8, -3), K = (6, -2).

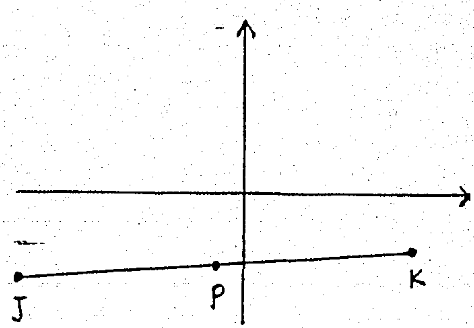
Solución. Aplicando el corolario 1, tenemos:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-8 + 6}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$Y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-3 + (-2)}{2} = \frac{-3\ -2}{2} = \frac{-5}{2} = -2.5$$

O sea P = (-1, - 2.5)

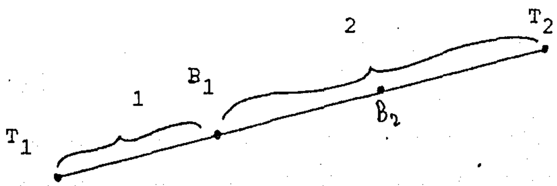
Trazo:



5. Encontrar los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son:

$T_1 = (-2,5)$ y $T_2 = (3, -4)$.

Solución. Trisección significa cortar en tres. ¿Cual será la razón? Veamos un dibujo para facilitarnos el razonamiento.



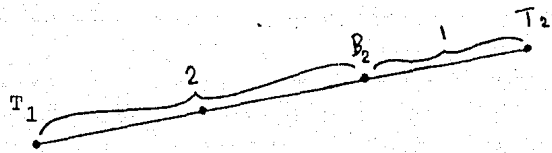
El primer punto B_1 de trisección, como nos podemos dar cuenta, divide al segmento $\overline{T_1 T_2}$ en la razón 1 : 2 , o sea 1 es a 2, o bien $\frac{1}{2}$. Aplicando el teorema 1 podemos encontrar sus coordenadas.

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{-2+\frac{1}{2}\cdot(3)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{-2+\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$Y = \frac{y_1 + r.\,y_2}{1 + r} = \frac{5 + 1/2\,(-4)}{1 + 1/2} = \frac{5 - 4/2}{3/2} = \frac{6/2}{3/2} = \frac{12}{6} = 2$$

donde $B_1 = (-\frac{1}{3}\ , 2)$

Ahora para el segundo punto de trisección, tenemos:



Donde nos damos cuenta que el punto B_2 divide al segmento $\overline{T_1\ T_2}$ en la razón 2: 1, o sea, 2 es a 1, o bien $\frac{2}{1} = 2$

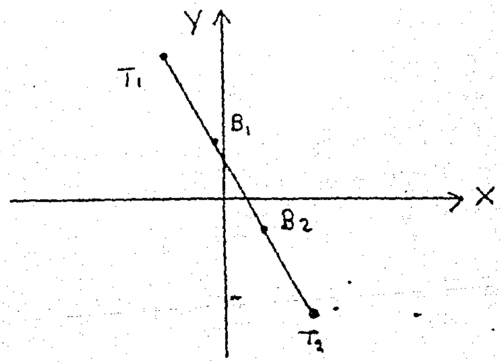
Aplicando el teorema 1 podemos encontrar sus coordenadas.

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{-2 + (2)\ (3)}{1 + 2} = \frac{-2 + 6}{3} = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{y_1 + r \cdot y_2}{1 + r} = \frac{5 + (2)\ (-4)}{1 + (2)} = \frac{5 - 8}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

donde $B_2 \simeq (4/3\ ,\ -1)$

Trazo:



6. Demostrar analíticamente que los puntos anteriores: B_1 y B_2 son los puntos de trisección del segmento $\overline{T_1\ T_2}$

Solución. Mostrando que las distancias T_1B_1 , B_1B_2 **y** B_2T_2 **son iguales y** que la distancia del segmento $\overline{T_1\ T_2}$ es igual a la suma de las distancias de los tres segmentos $\overline{T_1\ B_1}$ $\overline{B_1\ B_2}$ y $\overline{B_2\ T_2}$, habremos demostrado la trisección.

$$T_1\ B_1 = \sqrt{(-2 - (-1/3)\ )^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{(-2 + 1/3)^2 + 3^2} =$$

$$= \sqrt{(-5/3)^2 + 9} = \sqrt{25/9 + 81/9} = \sqrt{106/9} = \frac{\sqrt{106}}{3}$$

$$E_1 E_2 = \sqrt{(-1/3 - 4/3)^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{(-5/3)^2 + (2+1)^2} =$$

$$= \sqrt{(-5/3)^2 + 3^2} = \sqrt{25/9 + 9} = \sqrt{25/9 + 81/9} = \sqrt{106/9} = \frac{\sqrt{106}}{3}$$

$$E_2 T_2 = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 3\right)^2 + (-1 - (-4))^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - \frac{9}{3}\right)^2 + (-1+4)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{106}}{3}$$

Ahora la distancia del $\overline{T_1 T_2}$

$T_1 T_2 = \sqrt{(-2-3)^2 + (5+4)^2} = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$, de donde vemos que efectivamente se cumple lo señalado.

7. El extremo de un diámetro de la circunferencia de centro $C = (3,1)$ es el punto $M = (-2, -1)$. Encontrar las coordenadas (x, y) del otro extremo P del diámetro.

Solución. Tomando el radio $\overline{MC}$ como nuestro segmento de partida, vemos que el otro extremo P, del diámetro, es exterior al segmento, dándonos una razón negativa.

Ver figura 3

$$r = \frac{CP}{PM} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}$$

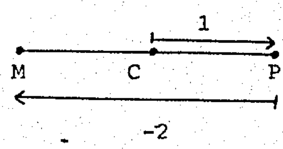


Fig. 3

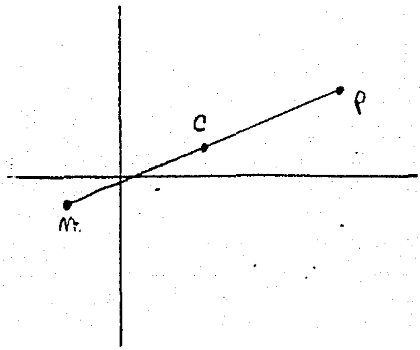
Aplicando el teorema 1.

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{3 + (-\frac{1}{2})\ (-2)}{1 + (-\frac{1}{2})} = \frac{3 + \frac{2}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{8}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{16}{2} = 8$$

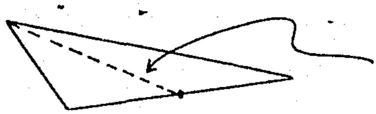
$$Y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} = \frac{1 + (-\frac{1}{2})\ (-1)}{1 + (-\frac{1}{2})} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{2} = 3$$

donde P = (8, 3)

Trazo:



8. Se llama mediana de un triángulo al segmento cuyos extremos son el punto medio de un lado y el vértice opuesto. Ejemplo.



Las tres medianas de un triángulo, se cortan en un punto común llamado baricentro. Demostrar que las coordenadas del baricentro son:

$$B = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} , \frac{y_1 + y_2 + y_2}{3} \right)$$

Solución. Tracemos la figura:

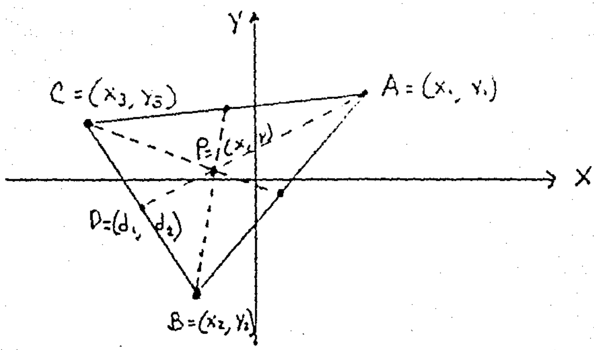


Figura 5

Por geometría sabemos que el baricentro de un triángulo está sobre el segmento que une al vértice con el punto medio de su lado opuesto, a $\frac{2}{3}$ del vértice y a un tercio del punto medio. (Verfigura 5)

Tomando la razón $\frac{DP}{PA} = \frac{1}{2}$, tenemos:

Fórmula Sustitución

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{d_1 + \frac{1}{2}x_1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{x_2 + x_3}{2} + \frac{x_1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

De la misma manera se encuentra la "y". Ver ejercicio 5-1.

EJERCICIO 5

5-1. Encuentra la ordenada respectiva al baricentro de un triángulo.

5-2. Demuestra que la ordenada del punto medio de un segmento es $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

5-3. Si $J_1 = (-6, -7)$ y $J_2 = (3, -8)$ son los extremos de un segmento dirigido $\overline{J_1 J_2}$, encuentra las coordenadas del punto $P = (x, y)$ que divide al segmento en la razón: $-5 = \dfrac{J_1 P}{PJ_2}$

5.4 Encuentra las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{FP}$, donde $F = (-7, 2)$, $P = (6, -8)$

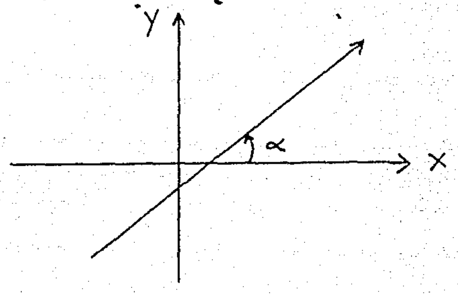
5.5 Encuentra los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son:
$M_1 = (3, -6)$ y $M_2 = (-8, -9)$.

5-6. Demuestra analíticamente que los puntos anteriores (que encontraste) son los puntos de trisección del segmento $\overline{M_1 M_2}$

5-7 El extremo de un diámetro de la circunferencia de centro $C = (4, -8)$ es el punto $N = (-2, 5)$.
Encuentra las coordenadas (x, y) del otro extremo del diámetro.

27) INCLINACION Y PENDIENTE DE UNA RECTA.

Inclinación. Se llama ángulo de inclinación de una recta al ángulo (α) formado por la parte positiva del eje x y la recta dirigida hacia arriba.



PENDIENTE DE UNA RECTA. Se llama pendiente de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación.

PROBLEMAS RESUELTOS

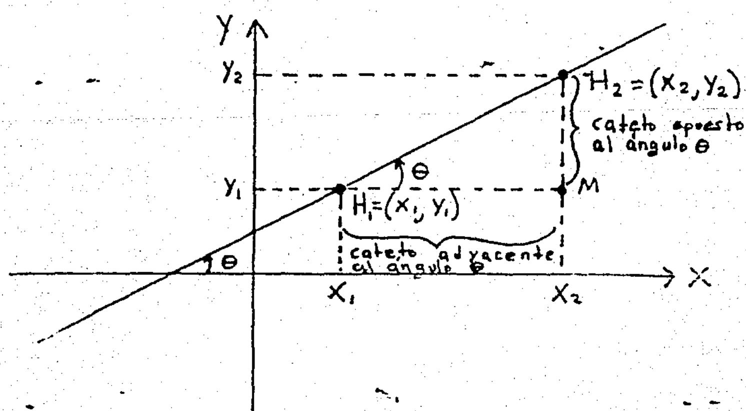
1. Demostrar que la pendiente de una recta que pasa por dos puntos:

$H_1 = (x_1, y_1)$ y $H_2 = (x_2, y_2)$ está dada por la fórmula :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

donde $x_2 \neq x_1$

Solución. Hagamos un dibujo para facilitar el razonamiento.



θ es el ángulo de inclinación de la recta.

Ahora aplicando la definición de tangente (cateto opuesto entre cateto adyacente tenemos:

$$m = tg\,\theta = \frac{c.\ op}{c.\ ady} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Como la matemática no considera fracciones comunes con denominador " cero ", se debe pedir que $x_2 \neq x_1$. Con lo cual queda demostrado el problema.

2. ¿Cuál será la pendiente de las rectas paralelas al eje "x" y las paralelas al eje y ?

   Solución: Analicemos la fórmula de pendiente y los siguientes dibujos.

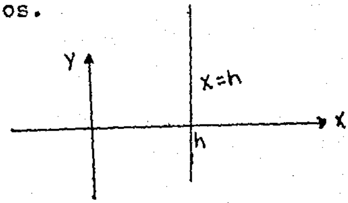


fig. (a)

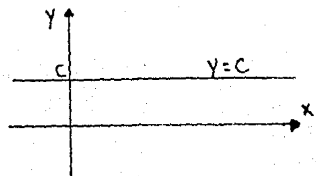


fig (b)

En la figura (b) observamos que todas las "yes" (ordenadas) de la recta son iguales a una constante c, aplicando la fórmula, tenemos:

$$tg = \frac{Y_2 - Y_1}{x_2 - x_1} = \frac{c - c}{x_2 - x_1} = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0$$

Es decir, que la pendiente decualquier recta paralela al eje "x" es igual a cero.

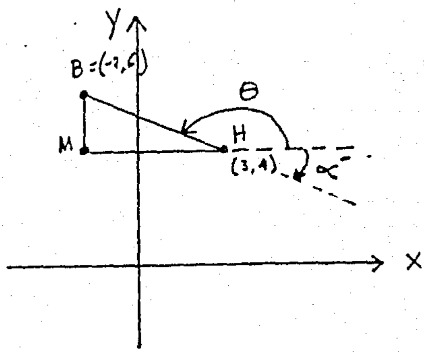
En la figura (a) observamos que todas las "equis" (abscisas) son iguales a una constante h, aplicando la fórmula tenemos:

$$tg\,\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{h - h} = \frac{y_2 - y_1}{0}$$ (término carente de sentido matemático).

Es decir que una recta paralela al eje "y" no tiene pendiente.

3. Encontrar la pendiente y el ángulo de inclinación de la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos vértices son: $M = (-2,4)$, $H = (3, 4)$ y $B= (-2,6)$

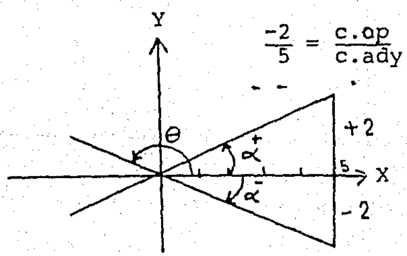
Solución. Tracemos la figura



Podemos considerar a la hipotenusa como parte de la recta que pasa por sus extremos y aplicar la fórmula de pendiente.

$$\therefore\ tg\,\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 6}{3 - (-2)} = \frac{-2}{3+2} = \frac{-2}{5}$$

El valor $\frac{-2}{5}$ significa que el ángulo θ es obtuso, debido a la siguiente convención:



Por lo tanto para encontrar el valor de θ , buscas en la tabla el valor del ángulo α^{+} cuya tangente es $\frac{2}{5}$ = .4000

y se lo restas a 180°, así:

= 180°- 21°48'

Nota: 1)Se calcula el valor de α^{+} porque en las tablas trigonométricas no aparecen ángulos negativos.
2)Calculando $\tan^{-1}(-0.4)$ en las calculadoras obtienes el valor de α^{-}.

Desarrollo :

$\alpha = \tan^{-1}(.4000)$

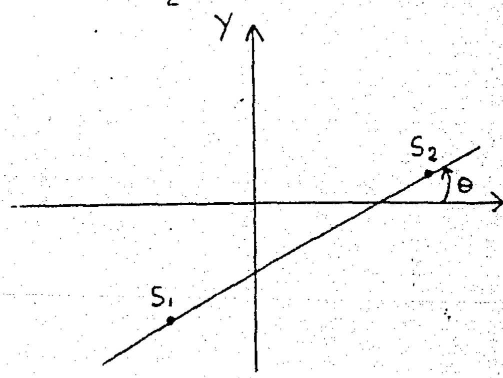
$\alpha = 21°48'$

$\Theta = 179°60' - 21°48'$

$\Theta = 158°12'$

4. Encontrar la pendiente y ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $S_1 = (-3,-4)$ y $S_2 = (6,1)$

Solución: Tracemos la figura



$$m = tg\,\Theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-4)}{6-(-3)} = \frac{1+4}{6+3} = \frac{5}{9}$$

$$\Theta = tg^{-1}\left(\frac{5}{9}\right) = tg^{-1}(.555) = 29°2'$$

Nota. Cuando la pendiente es positiva, no es necesario utilizar a

5. Demostrar que los puntos :

$R_1 = (-5,-2)$, $R_2 = (1, 0)$ y $R_3=(4,1)$ Son colineales.

Solución. Colineales significa que los tres deben pertenecer a una misma línea, por lo tanto si la pendiente del segmento $\overline{R_1 R_2}$ es igual a la del $\overline{R_2 R_3}$, habremos demostrado que son colineales.

La pendiente del $\overline{R_1 R_2}$ es:

$$m = tg\,\theta = \frac{0 - (-2)}{1 - (-5)} = \frac{2}{1+5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

La pendiente del $\overline{R_2 R_3}$ es

$$m = tg\,\theta = \frac{1 - 0}{4 - 1} = \frac{1}{3} \quad \therefore \text{ Son colineales.}$$

OBSERVACION. También pudiste haber tomado los segmentos $\overline{R_1 R_2}$ y $\overline{R_1 R_3}$ para verificar sus pendientes.

6. Una recta tiene pendiente m = 2 y pasa por el punto T = (-5,3) La abscisa del otro punto de la recta es 6. Encontrar su ordenada.

Solución:

Substituyendo los valores dados en la fórmula de la pendiente, tenemos:

Fórmula: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, substituciones: $2 = \dfrac{3 - y}{-5 - 6}$

ya que: $T = (-5,3) = (x_2, y_2)$ y $(x_1, y_1) = (6, y)$

Resolviendo $2 = \dfrac{3 - y}{-5 - 6}$, tenemos:

$$2 = \frac{3 - y}{-11}\,; \quad -22 = 3 - y\,;\; y = 3 + 22\,;\; y = 25$$

INDICACION. Realiza el dibujo y verifica que y = 25 es la ordenada pedida.

7. Encontrar la ecuación que determina el conjunto de todos los puntos P = (x, y) del plano que pertenezcan a la recta que pasa

por el punto $N = (-2, 0)$ y tiene pendiente $m = -\frac{4}{5}$

Solución. Si el punto $P = (x, y)$ pertenece a la recta, entonces debe cumplir con la fórmula de la pendiente respectiva, o sea:

Fórmula: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, Substitución: $\frac{-4}{5} = \frac{0 - y}{-2 - x}$

Resolución de la ecuación:

$-4\ (-2 - x) = 5\ (0 - y)$; $8 + 4x = 0 - 5y$;

$4x + 5y + 8 = 0$, esta es la ecuación deseada.

8. ¿Cómo se debe entender la condición que implica la ecuación $4x + 5y + 8 = 0$?

Solución. Que para que un punto del plano pertenezca a la recta determinada por dicha ecuación, el cuádruple de su abscisa sumada con el quíntuple de su ordenada más 8, el resultado debe ser igual a cero.

9. Encontrar tres puntos que pertenezcan a la recta determinada por la ecuación $4x + 5y + 8 = 0$

Solución. Se despeja "y" en la ecuación y se tabula para tres valores arbitrarios de la "x".

Despeje: $y = \frac{-8 - 4x}{5}$

Tabulación:

x	-3	2	0
y	$\frac{4}{5}$	$\frac{-16}{5}$	$-\frac{8}{5}$

Operaciones:

Para $x = -3$

$$y = \frac{-8 -4\ (-3)}{5} = \frac{-8 + 12}{5} = \frac{4}{5}$$

Para $x = 2$

$$y = \frac{-8 -4\ (2)}{5} = \frac{-8 -8}{5} = \frac{-16}{5}$$

Para $x = 0$

$$y = \frac{-8 -4\ (0)}{5} = \frac{-8 -0}{5} = \frac{-8}{5}$$

Siendo los tres puntos deseados:

$\left(-3, \frac{4}{5}\right)$, $\left(2, -\frac{16}{5}\right)$ y $\left(0, -\frac{8}{5}\right)$

10. Comprobar que el punto $B = \left(1, -\frac{12}{5}\right)$ pertenece a la recta determinada por la ecuación $4x + 5y + 8 = 0$

Solución. Basta con sustituir las coordenadas del punto en la ecuación $4x + 5y + 8 = 0$, así:

$$4\ (1) + 5\ \left(-\frac{12}{5}\right) + 8 = 0$$

$$4 - 12 + 8 = 0$$

$$0 = 0 \quad \therefore$$ Quedó comprobado. Si no se hubiera obtenido la igualdad, entonces el punto no hubiera pertenecido a la recta.

Ejercicio 6.

6.1 Demuestra que la pendiente de una recta que pasa por dos puntos $M_1 = (a,b)$ y $M_2 = (c,d)$ está dada por la fórmula:

$$m = \operatorname{tg}\theta = \frac{d - b}{c - a}, \quad c \neq a.$$

6.2. ¿Cuál es la pendiente de las rectas paralelas al eje X, y paralelas al eje Y?

6.3 Encuentra la pendiente y el ángulo de inclinación de la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos vértices son: $P = (-3, 6)$, $J = (-3, 0)$ y $T = (9,0)$.

6.4 Encuentra la pendiente y ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $F_1 = (2,5)$ y $F_2 = (-3, -8)$

6.5 Demuestra que los puntos: $D_1 = (1,1)$, $D_2 = (-2, -8)$ y $D_3 = (0, -2)$ son colineales.

6.6 Una recta tiene pendiente $m = -3$ y pasa por el punto $Q = (-2, -6)$.

La abscisa del otro punto de la recta es 9. Encontrar su ordenada.

6.7 Encuentra la ecuación que determina el conjunto de todos los puntos $P = (x, y)$ del plano que pertenezcan a la recta que pasa por el punto $T = (-3,0)$ y tiene pendiente $m = -\frac{2}{7}$

6.8 ¿Cómo se debe entender la condición que implica la ecuación $3x + 2y + 7 = 0$?

6.9 Encuentra tres puntos que pertenezcan a la recta determinada por la ecuación $3x + 2y + 7 = 0$.

6.10 Comprueba que el punto $S = (0, -\frac{7}{2})$ pertenece a la recta determinada por la ecuación $3x + 2y + 7 = 0$.

28) INCLINACION Y PENDIENTE DE RECTAS PARALELAS A LOS EJES.

Hemos hablado de que las rectas paralelas al eje X tienen pendiente cero y que las paralelas al eje "Y" no tienen pendiente. Sin embargo se permite usar ciertas expresiones para dar un -

significado a la pendiente, veamos los siguientes

PROBLEMAS RESUELTOS.

1. Encontrar la pendiente y ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos:

$H_1 = (-3,6)$ y $H_2 = (5,6)$.

Solución.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-6}{5-(-3)} = \frac{0}{5+3} = \frac{0}{8} = 0$$

$$\theta = tg^{-1}\ 0 = 0°$$

2. Encontrar la pendiente y ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $R_1 = (2,5)$ y $R_2 = (2,-4)$

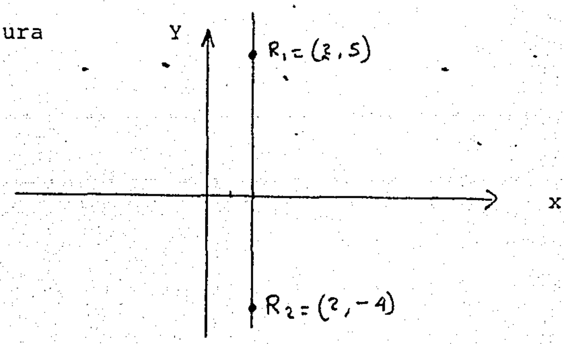
Solución.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-5}{2-2} = \frac{-9}{0}$$

Nota:

A la fracción común $\frac{-9}{0}$ (que no tiene sentido matemático) se le da una expresión provisional: ∞ (infinito), indicando que la recta tiene una pendiente infinita y el ángulo θ corresponde a 90° (En tus clases de cálculo diferencial vas a verlo con mayor detenimiento y entendimiento.

Figura



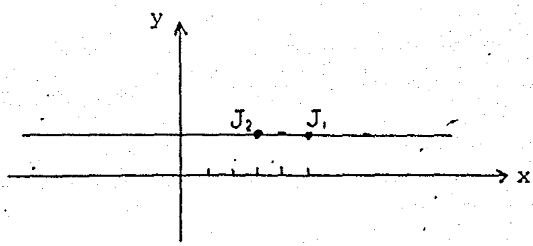
3. Encontrar la pendiente y ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos: $J_1 = (5,2)$ y $J_2 = (3,2)$.

Solución:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 2}{3 - 5} = \frac{0}{-2} = 0.$$

$$\Theta = tg^{-1}\, 0 = 0°$$

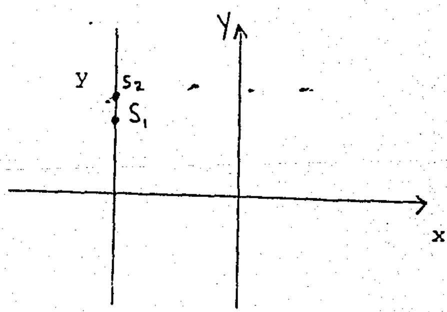
Figura:



4. Encontrar la pendiente y ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos

$S_1 = (-5,3)$ y $S_2 = (-5,4)$.

Figura.



Solución.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 3}{-5-(-5)} = \frac{1}{-5+5} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\Theta = tg^{-1}\infty = 90°$$

Ejercicio 7

7.1 Encuentra la pendiente y ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos: $G_1 = (-5,6)$ y $G_2 = (1,6)$.

7.2 Encuentra la pendiente y ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos: $A_1 = (8,3)$ y $A_2 = (8,-4)$

29) ANGULO ENTRE DOS RECTAS.

TEOREMA 2. Un ángulo Θ determinado entre dos rectas, está dado por la fórmula: $\operatorname{tg}\Theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

con $m_1 m_2 \neq -1$.

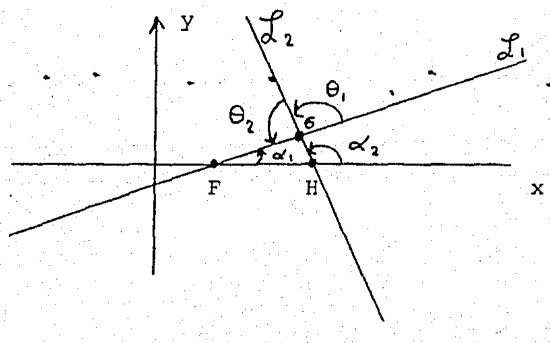
COROLARIO 2. La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares entre sí, es que el producto de sus pendientes sea igual a -1, o sea: $m_1 m_2 = -1$

PROBLEMAS RESUELTOS.

1. Demostrar el teorema 2.

Solución.

Tracemos la figura para facilitar el razonamiento.



Observado la figura podemos darnos cuenta de lo siguiente:
Los ángulos Θ_1 y Θ_2 se han medido en sentido positivo (en contra el giro de las manecillas del reloj, [↺])
Para el ángulo Θ_1 su lado inicial es $\mathcal{L}_1$ y su lado final es $\mathcal{L}_2$ y las pendientes m_1 y m_2 de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son pendiente inicial y final respectivamente. Calculemos cada uno de los ángulos Θ_1 y Θ_2.
Por geometría sabemos que un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él.
En el triángulo FGH de la figura anterior vemos que el ángulo FGH es igual a Θ_1, por ser opuestos por el vértice; tomando a α_2 como el ángulo exterior, tenemos

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \Theta_1$$

de donde $\Theta_1 = \alpha_2 - \alpha_1$
Ahora aplicando la tangente al ángulo Θ_1, tenemos:

$$\operatorname{tg} \Theta_1 = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1}$$

Nota. Este resultado se obtiene de las fórmulas de trigonometría para la tangente de la resta de dos ángulos.
Ahora como $m_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$ y $m_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$,
substituyendo tenemos:

$$\operatorname{tg} \Theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}, \quad m_2 m_1 \neq -1 \qquad \text{C.Q.D}$$

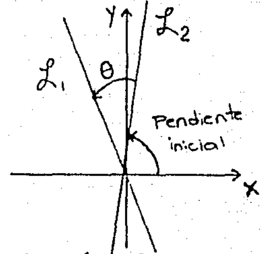
2. Demostrar el corolario 2

Solución. A partir de la fórmula $tg\,\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$, vemos que si $m_2 m_1 = -1$ el denominador

se hace cero y $tg\,\theta = \infty$

$\therefore \quad \theta = tg^{-1}\infty = 90°$, lo cual implica que las rectas son perpendiculares.

3. Encontrar el ángulo agudo de inclinación entre las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ cuyas pendientes son: $m_1 = -3$ y $m_2 = 8$, respectivamente



Solución:

$$tg\,\theta = \frac{m_2 - m_1}{1+m_2\,m_1} = \frac{-3-8}{1+8(-3)} = \frac{-11}{1-24} = \frac{-11}{-23} = \frac{11}{23}$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{11}{23}\right) = tg^{-1}\,(.4782) = 25°\ 33'$$

Nota: Para aplicar los valores de las pendientes en la fórmula se considera $m_2 = 8$ como la pendiente inicial y $m_1 = -3$, como la pendiente final, para obtener el ángulo agudo.

4. Encontrar el ángulo agudo y obtuso que forman las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ que pasan por los puntos: $H_1 = (-2,5)$, $H = (3,6)$ y $M_1 = (0,4)$, $M_2 = (8,0)$ respectivamente.

Solución. Encontremos las pendientes de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-5}{3-(-2)} = \frac{1}{5}$$

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-4}{8-0} = -\frac{1}{2}$$

Aplicando la fórmula de ángulo entre dos rectas

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{5}}{1 + (-\frac{1}{2})(\frac{1}{5})} = \frac{\frac{-7}{10}}{1-(1/10)} = \frac{\frac{-7}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{-70}{90}$$

$$\operatorname{tg}\Theta = -\frac{7}{9} \quad \cdot \quad \Theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{7}{9}\right) = 180^\circ - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{7}{9}\right) =$$

$$179°60' - \operatorname{tg}^{-1}(.777) = 179°60' - 37°50' = 142°10'$$

$\therefore$ El ángulo obtuso es 142°10' y el agudo, 37°50'

5. El ángulo formado por dos rectas es de 60°. La pendiente m_1 de $\mathcal{L}_1$ es $\frac{3}{4}$, encontrar la pendiente m_2 de $\mathcal{L}_2$.

Solución. Aplicando la fórmula del ángulo entre dos rectas, tenemos:

Fórmula: $\operatorname{tg}\Theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$,

Substituyendo: $\operatorname{tg} 60° = \dfrac{m_2 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4} m_2}$, o sea

$1.732 = \dfrac{m_2 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4} m_2}$, despejando m_2

$$1.732\left(1 + \frac{3}{4} m_2\right) = m_2 - \frac{3}{4} \; ; \; 1.732 + \frac{5.196}{4} m_2 = m_2 - \frac{3}{4} \; ;$$

$\dfrac{5.196}{4} m_2 - m_2 = -\dfrac{3}{4} - 1.732$; multiplicando por 4 ambos miembros: $5.196\, m_2 - 4m_2 = -3 - 6.928$;

$$1.196\, m_2 = -9.928 \; ; \; m_2 = \frac{-9.928}{1.196} = -8.3$$

6. Demostrar que los puntos: $R_1 = (-5,2)$, $R_2 = (-3,4)$ y $R_3 = (-1,-2)$ son los vértices de un triángulo

rectángulo.

Solución. Calculando las pendientes de los lados del triángulo y multiplicándolas dos a dos, podemos darnos cuenta de su perpendicularidad si su producto es -1.

La pendiente del lado que tiene por extremos los puntos R_1 y R_2 es

$$m_1 = \frac{2-4}{-5-(-3)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

La pendiente del lado cuyos extremos son R_1 y R_3, es

$$m_2 = \frac{2-(-2)}{-5-(-1)} = \frac{4}{-4} = -1$$

La pendiente del lado cuyos extremos son R_2 y R_3, es

$$m_3 = \frac{-2-4}{-1-(-3)} = \frac{-6}{2} = -3$$

A simple vista vemos dos pendientes cuyo producto es igual a -1. Son m_1 y m_2, pues $m_1\, m_2 = (1)\,(-1) = -1$.

$\therefore$ Estos dos segmentos: $\overline{R_1 R_2}$ y $\overline{R_1 R_3}$ son perpendiculares. Con símbolos $\overline{R_1 R_2} \perp \overline{R_1 R_3}$. Siendo el triángulo, triángulo rectángulo.

7. Multiplicar las siguientes pendientes de segmentos para saber cuales son perpendiculares.

a) $\frac{-3}{4}, \frac{5}{6}$ b) $\frac{-1}{2}, \frac{6}{3}$ c) $\frac{8}{9}, \frac{-27}{24}$

Solución.

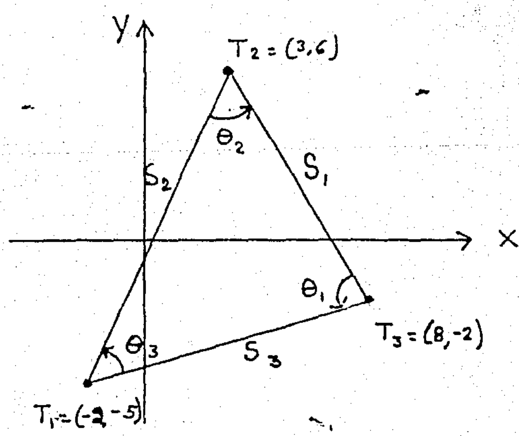
a) $\frac{-3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{-15}{24} \neq -1$ $\therefore$ no son perpendiculares.

b) $-\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{3} = \frac{-6}{6} = -1$ $\therefore$ sí son perpendiculares

c) $\frac{8}{9} \cdot \frac{-27}{24} = \frac{-216}{216} = -1$ $\therefore$ sí son perpendiculares.

8. Encontrar la medida de los tres ángulos del triángulo cuyos vértices son: $T_1 = (-2,-5)$ $T_2 = (3,6)$ $T_3 = (8, -2)$

Solución. Tracemos la figura.



En base al sentido positivo de los ángulos para encontrar el ángulo θ_1, tenemos que tomar la pendiente del segmento S_1 como m_1 y la del S_3 como m_2. Encontremos el valor de estas pendientes.

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 -6}{8 - 3} = \frac{-8}{5} = -1.6$$

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5 - (-2)}{-2 - 8} = \frac{-5 + 2}{-10} = \frac{-3}{-10} = .3$$

$$tg\ \theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = \frac{.3 - (-1.6)}{1 + (.3)(-1.6)} \frac{.3 + 1.6}{1 - .48}$$

$$= \frac{1.9}{.52} = 3.6$$

$$\theta_1 = tg^{-1}(3.6) = 74°40'$$

Para encontrar el ángulo θ_2, tenemos que tomar la pendiente del segmento S_2 como m_1 y la del S_1 como m_2.

La pendiente del segmento S_1 es $- 1.6 = m_2$

Encontremos m_1 de S_2 -

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-5)}{3-(-2)} = \frac{11}{5} = 2.2$$

$$tg\ \theta_2 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = \frac{-1.6 - 2.2}{1 + (-1.6)(+2.2)} = \frac{-3.8}{1 - 3.52} = \frac{-3.8}{-2.52} = 1.507$$

$$\theta_2 = tg^{-1}\ (1.507) = 56° 27'$$

Para encontrar θ_3, aplicamos el teorema que dice: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°, o sea

$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 180°$; substituyendo:

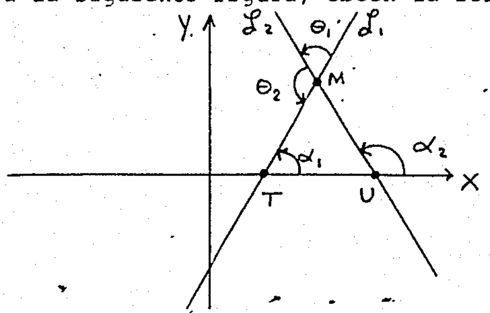
$74°40' + 56°27' + \theta_3 = 180°$

$\theta_3 = 180° - 74°40' - 56°27'$

$= 179°60' - 130°67' = 179°60' - 131°7' = 48°53'$

EJERCICIO 8

8.1 En base a la siguiente figura, obtén la fórmula de $tg\ \theta_2$.



8.2. En base a la fórmula que obtuviste en el ejercicio 1, expresa la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares.

8.3 Encuentra el ángulo θ de inclinación entre las rectas cuyas pendientes son: $m_1 = -5$ y $m_2 = 9$

8.4 Encuentra el ángulo agudo y obtuso que forman las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ que pasan por los puntos: $M_1 = (-3,6)$, $M_2 = (5,7)$ y $H_1 = (2,0)$, $H_2\ (-6,-3)$ respectivamente.

8.5 El ángulo formado por dos rectas es de 80° La pendiente

m_1 de $\mathcal{L}$ 1 es $\frac{7}{8}$, encuentra la pendiente m_2 de $\mathcal{L}$ 2.

8.6. Demuestra que los puntos: $J_1 = (3,4)$, $J_2 = (-2,-1)$ y $J_3 = (1,-4)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

8.7 Multiplica las siguientes pendientes de segmentos para saber cuales son perpendiculares.

a) . $\frac{-2}{7}$, $\frac{14}{6}$, b) $\frac{36}{4}$, $\frac{2}{18}$, c) $\frac{-1}{2}$, $\frac{-4}{2}$

8.8 Encuentra la medida de los tres ángulos del triángulo cuyos vértices son: $E_1 = (-3\ -2)$, $E_2 = (6,2)$, $E_3 = (-4,-8)$.

27 Bis. RECTAS PERPENDICULARES

Un caso especial del ángulo entre dos rectas, es cuando son perpendiculares. Vamos a ver cuál es la relación entre las pendientes de las dos rectas para que sean perpendiculares. Para que sean perpendiculares necesitan formar un ángulo de 90°entre sí. Usando la fórmula

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

tenemos que $\operatorname{tg} 90° = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$, o sea:

$$\infty = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

Para evitar trabajar con el símbolo infinito (∞) usamos la función inversa a la tangente que es la cotangente en la fórmula anterior

$$\text{tg } 90° = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

$$\cot 90° = \frac{1 + m_2 m_1}{m_2 - m_1} \qquad \text{(por ser inversa)}$$

$$o = \frac{1 + m_2 m_1}{m_2 - m_1} \qquad (\text{ ya que } \cot 90° = 0)$$

$$0 = 1 + m_2 m_1$$

$$-1 = m_2 m_1$$

Esta condición dice que dos rectas son perpendiculares si su producto es -1.

Otra forma de esta ecuación se obtiene despejando a m_1 : $m_1 = \frac{-1}{m_2}$

Esta otra manera de decir lo mismo es: Dos rectas son perpendiculares si una de las pendientes es recíproca negativa de la otra.

Para encontrar la condición de paralelismo entre dos rectas observamos que el ángulo formado entre las dos rectas es cero.

Por lo tanto de la ecuación

$$tg\ \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1}$$, obtenemos

$$tg\ 0° = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1}$$

$0 = m_2 - m_1$

$m_1 = m_2$

Concluimos que dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales.

Problemas resueltos.

1) Comprueba si las rectas

$3x - 2y + 5 = 0$ y $6x - 4y + 9 = 0$

son paralelas.

Resolución. Necesitamos despejar "y" de las ecuaciones y escribirlas en forma de ordenada al origen:

$3x - 2y + 5 = 0$ $\qquad$ $6x - 4y + 9 = 0$

$y = \frac{-3x - 5}{-2}$ $\qquad$ $y = \frac{6x + 9}{4}$

$y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ $\qquad$ $y = \frac{6x}{4} + \frac{9}{4}$

De la ecuación

$y = mx + b$

vemos que $m = \frac{3}{2}$ en las dos. $\qquad$ $y = \frac{3x}{2} + \frac{9}{4}$

2) Comprueba si las dos rectas

$4x + 5y - 1 = 0$ y $-5x + 4y + 2 = 0$ son perpendiculares.

Resolución.

Necesitamos despejar "y" de las ecuaciones y escribirlas en forma de ordenada al origen.

$4x + 5y - 1 = 0$

$$y = \frac{-4x + 1}{5}$$

$$y = \frac{-4x}{5} + \frac{1}{5}$$

$$m = \frac{-4}{5}$$

$-5x + 4Y + 2 = 0$

$$y = \frac{5x - 2}{4}$$

$$y = \frac{5x}{4} - \frac{2}{4}$$

$$m = \frac{5}{4}$$

Vemos que $-\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{-20}{20} = -1$

Cumplen con la condición de que su producto sea igual a -1.
Por lo tanto son perpendiculares.

3) La ecuación de una recta es $3x - y - 1 = 0$, encontrar la ecuación de la recta perpendicular a ella y que pasa por el punto (3, 5)

Resolución.

La ecuación de una recta está definida si sabemos su pendiente y uno de sus puntos. En este caso sab emos que uno de sus puntos es (3,5), lo único que nos falta es saber su pendiente. Para esto, sacamos la pendiente de la recta dada y encontramos su recíproco negativo y ya podemos obtener la ecuación.

Veamos:

La pendiente de la recta $3x - y - 1 = 0$ es $y = \frac{-3x + 1}{-1}$,

$y = 3x - 1$

$m = 3$

El recíproco negativo de 3 es $-\frac{1}{3}$

Por lo tanto la ecuación de la recta perpendicular será.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = \frac{-1}{3}(x - 3)$$

$$3y - 15 = -x + 3$$

$x + 3y - 18 = 0$ Forma general.

Confirmación Geométrica. Realicemos la gráfica de las rectas para ver si en efecto son las ecuaciones requeridas.

$3x - y - 1 = 0$

$y = \frac{-3x + 1}{-1}$

$y = 3x - 1$

	x	y
A	-2	-7
B	2	5

$x + 3y - 18 = 0$

$y = \frac{-x + 18}{3}$

	x	y
C	-1	$\frac{19}{3}$
D	1	$\frac{17}{3}$

$$y - 4 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad (x - (-2))$$

$$\sqrt{3}\, y - 4\sqrt{3} = -x - 2$$

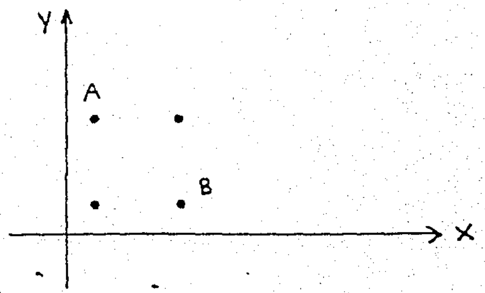
$$x + \sqrt{3}y - 4\sqrt{3} + 2 = 0$$ **Ecuación**

El trazado de estas rectas resulta aproximado, debido a la dificultad de localizar números irracionales en los ejes. Por lo general trataremos siempre con ecuaciones cuyos coeficientes sean enteros.

5. Los vértices opuestos de un cuadrado son $A = (1,4)$ y $B = (4,1)$. Encontrar las ecuaciones de sus cuatro lados.

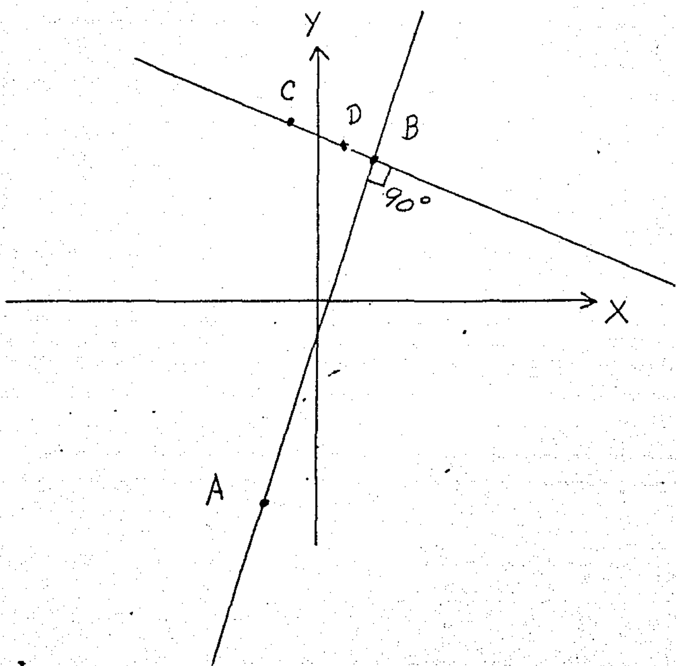
Análisis. Con los puntos dados, podemos encontrar los otros dos: con éstos, encontrar las pendientes de sus lados y así sus ecuaciones.

Resolución:



Al observar esta figura obtenemos los otros dos puntos $C = (1,1)$ y $D = (4,4)$ del cuadrado.

Usando la fórmula de pendiente



Y
C
D
B
90°
X
A

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, tenemos, para los puntos

A = (1,4) y D = (4,4) lo siguiente:

$$m = \frac{4 - 4}{4 - 1}$$

$$m = \frac{0}{3}$$

$$m = 0$$

Es decir, la pendiente de los lados horizontales es cero, por lo tanto, usando la ecuación $y - y_1 = m\,(x - x_1)$ para el punto (1,4), tenemos.

$y - 4 = 0\ (x - 1)$

$y - 4 = 0$

$y = 4$

Qué simple es la ecuación del lado $\overline{AD}$. La condición de esta ecuación nos indica que la ordenada "y" de todos sus puntos es 4. Con esta observación concluimos rápidamente la ecuación para el lado $\overline{CB}$, que es y = 1

Para los lados $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ nos encontraremos con el siguiente - problema.

Sus pendientes serían , para el lado $\overline{AC}$

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{4 - 1}{1 - 1} = \dfrac{3}{0}$ Lo cual no es una - expresión matemática. Cuando el denominador es cero, decimos que la pendiente es infinita, o sea, $m = \infty$ (**como lo vimos anteriormente**)

Y no podemos usar la ecuación $y - y_1 = m (x - x_1)$. Por lo tanto, tomamos la característica general de todos los puntos del lado $\overline{AC}$, observando que su abscisa x vale 1. Por lo tanto su ecuación es $x = 1$.

Para el lado $\overline{DE}$, su ecuación es $x = 4$.

Ejercicio 8 - A . Rectas perpendiculares y paralelas.

8a-1. Comprueba si las rectas $4x - 2x + 6 = 0$ y $3x - 2y + 4 = 0$ son paralelas.

8a-2. Comprueba si las rectas $x + 3y + 1 = 0$ y $-3x + y + 2 = 0$ son perpendiculares.

8a-3. La ecuación de una recta es $2x - 3y - 4 = 0$, encontrar la ecuación de la recta perpendicular a ella y que pasa por el punto (2,4).

8a-4. Dos rectas perpendiculares se cortan en el punto (-3,5), formando una de ellas un ángulo de 30°con el eje X Encontrar sus ecuaciones respectivas.

CAPITULO 4

ECUACIONES Y LUGARES GEOMETRICOS.

Dos problemas fundamentales de Geometría Analítica. Intersecciones con los ejes. Simetría, Extensión y Asíntotas .

30) LUGAR GEOMETRICO. es el conjunto de puntos del plano cuyas coordenadas (x, y) satisfacen una ecuación. Se llama también, a este conjunto, gráfica de la ecuación.

PROBLEMAS RESUELTOS.

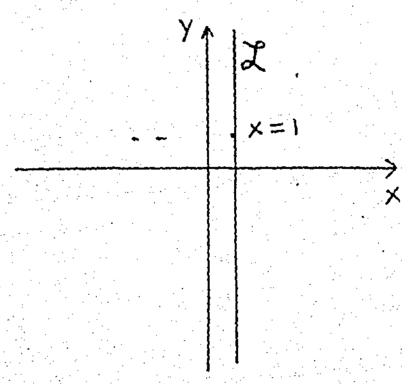
1. Encontrar el lugar geométrico o gráfica de la ecuación, de las siguientes ecuaciones.

a) $x = 1$, b) $y = 0$, c) $y = x^2$, d) $y = \frac{5x^3}{2}$

SOLUCIONES.

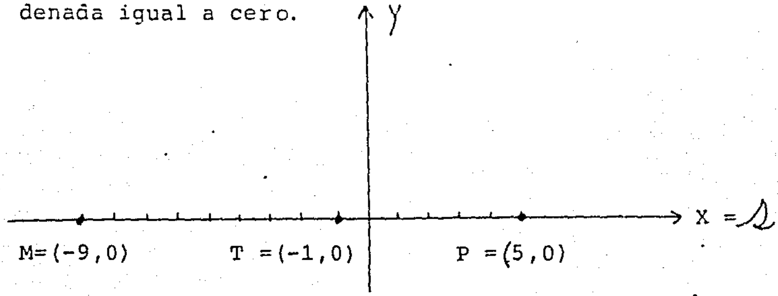
a) El conjunto de puntos del plano que satisface esta ecuación es precisamente el formado por puntos cuya abscisa sea igual a 1.

La figura es



Donde la línea $\mathcal{L}$ es precisamente el conjunto solución, pues todos sus puntos tienen su abscisa igual a 1.

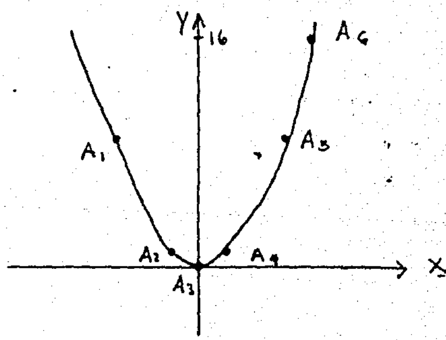
b) El conjunto $\mathcal{S}$ de puntos del plano que satisface esta ecuación es el eje X, pues todos sus puntos tienen su ordenada igual a cero.



c) Para darnos cuenta del lugar geométrico de la ecuación $Y = x^2$, necesitamos encontrar algunos puntos que pertenezcan al lugar geométrico.

Tabulación

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
X	-3	-1	0	1	3	4
y	9	1	0	1	9	16



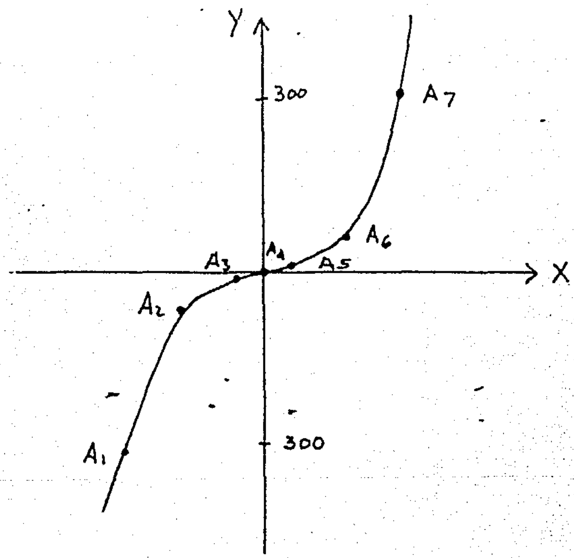
El trazo de la línea contínua representa parte de la gráfica de la ecuación, pues el dominio de ella como en las anteriores, es el conjunto de todos los números reales. (Más adelante comprenderás mejor esto).

d) También necesitamos tabular la ecuación $y = \dfrac{5x^3}{2}$ para -

encontrar algunos puntos pertenecientes al lugar geométrico y poder trazar la gráfica.

Tabulación.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
x	-5	-3	-1	0	1	3	5
y	-312.5	-67.5	-2.5	0	2.5	67.5	312.5



Lugar geométrico o gráfica de la ecuación o conjunto de puntos del plano que satisfacen la ecuación

$$y = \frac{5x^3}{2}$$

Ejercicio 9

9.1 Encuentra el lugar geométrico o gráfica de la ecuación, de las siguientes ecuaciones.

a) $y = -1$, b) $x = 0$, c) $y = x^4$, d) $y = -x^3$

31) DOS PROBLEMAS FUNDAMENTALES DE GEOMETRIA ANALITICA.

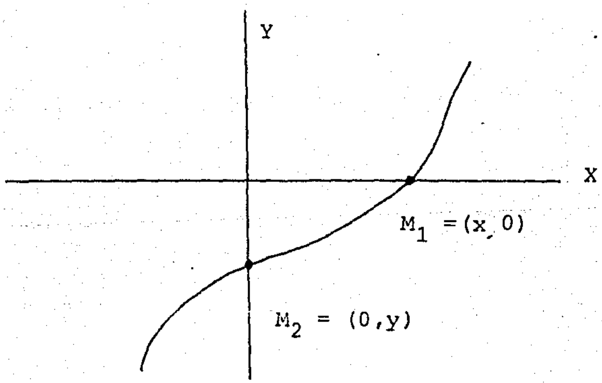
PRIMERO. Dada una ecuación, encontrar su lugar geométrico.

SEGUNDO. Dado un lugar geométrico, por ciertas condiciones, encontrar la ecuación que lo determina.

PROBLEMA PRIMERO.

Como hemos visto anteriormente, resulta un poco difícil trazar determinado lugar geométrico. Necesitamos saber ciertas características de este lugar geométrico para hacer su trazo. Por ejemplo: Sus intersecciones con los ejes, simetrías, extensión y asíntotas.

32) INTERSECCIONES CON LOS EJES.



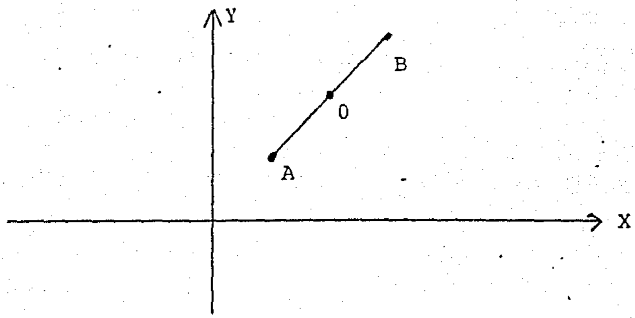
Como vemos, la curva corta al eje x cuando la ordenada es igual a cero. Y corta al eje Y cuando la abscisa es igual a cero.

Para encontrar el valor de la abscisa u ordenada correspondiente se substituye el valor "0" en la ecuación y se encuentra el valor de la X o y según se requiera.

33) SIMETRIA

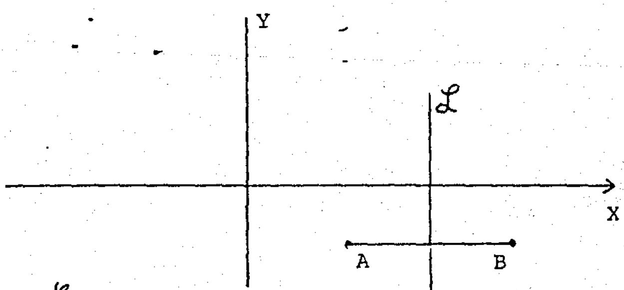
a) Dos puntos A y B son simétricos respecto a un punto O si es el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

Ejemplo.



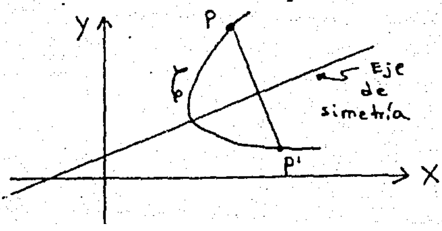
b) Dos puntos A y B son simétricos respecto a una recta $\mathcal{L}$ si ésta es perpendicular al segmento $\overline{AB}$ en su punto medio.

Ejemplo



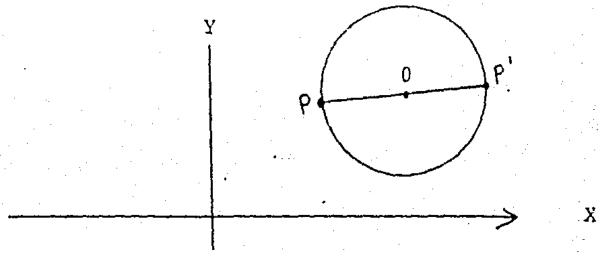
c) Una curva $\mathcal{C}$ es simétrica respecto a un eje de simetría si para cada punto P de la curva existe otro P', también de la curva, tal que estos puntos son simétricos respecto a dicho eje.

Ejemplo.



d) Una curva $\mathcal{C}$ es simétrica respecto a un centro 0 de simetría si para cada punto P de la curva existe otro Punto P', también de la curva, tal que estos puntos son simétricos respecto a 0.

Ejemplo



Analíticamente lo anterior se ve así:

34) SIMETRIA RESPECTO AL EJE X.

Una curva es simétrica respecto al eje X si al substituir, en su ecuación, la variable y por -y, la ecuación no se altera.

35) SIMETRIA RESPECTO AL EJE y.

Una curva es simétrica respecto al eje y si al substituir, en su ecuación, la variable x por - x, la ecuación no se altera.

36) SIMETRIA RESPECTO AL ORIGEN.

Una curva es simétrica respecto al origen si al substituir, en su ecuación las variables x, y por - X, -y, la ecuación no se altera.

37) EXTENSION DE UNA CURVA.

La extensión de una curva se determina conociendo el dominio y recorrido (rango) de la función.

38) ASINTOTA de una curva $\mathcal{C}$ es una recta $\mathcal{L}$ que a medida que un punto P de la curva se aleja indefinidamente del - origen, la distancia de P a la recta decrece tendiendo a

cero.

OBSERVACIONES.

a) Una asíntota nunca intersecta a su curva mas que en el infinito.

b) Sólamente tienen asíntotas las curvas de extensión infinita. (El recíproco de esta afirmación es falsa)

c) Una curva puede tener una o más asíntotas.

39) OBTENCION DE LA ECUACION DE UNA ASINTOTA VERTICAL U HORIZONTAL.

Para la asíntota vertical se despeja la y en la ecuación y se iguala a cero a los factores lineales del denominador.

Para la horizontal se despeja la x.

40) TRAZO DE CURVAS.

Para trazar una curva necesitamos aplicar los conceptos anteriores: Intersecciones con los ejes, simetría de la curva respecto a los ejes coordenados y origen; extensión, asíntotas y su tabulación con suficientes puntos de la curva para trazarla.

PROBLEMAS RESUELTOS.

1. Trazar la curva determinada por la ecuación: xy-y-5=0

Solución.

a) Intersecciones con los ejes.

Para encontrar la intersección de la curva con el eje X substituimos y = 0 en la ecuación.

x(0)-0-5=0; -5 = 0 ¡Absurdo!

Por lo cual

No intersecta al eje x

Para encontrar la intersección de la curva con el eje Y substituimos $x = 0$ en la ecuación.

$0.y - y -5 = 0$; $-y = 5$; $y = -5$

Intersecta al eje Y en $y = -5$

b) Simetrías.

Respecto al eje X. Substituyendo Y por -y, tenemos:

$x(-y) - (-y) -5 = 0$, obteniéndose

$-xy + y -5 = 0$, lo cual es distinta a la ecuación original

$\therefore$ No es simétrica la curva respecto al eje X .

Respecto al eje Y . Substituyendo x por -x, tenemos:

$-xy -y -5 = 0$, lo cual es distinta a la ecuación original $\therefore$

No es simétrica respecto al eje Y .

Respecto al origen. Substituyendo x por -x, y por -y, tenemos.

$(-x)(-y) - (-y) -5 = 0$, o sea,

$xy + y -5 = 0$, lo cual es distinta a la ecuación original $\therefore$

No es simétrica respecto al origen.

c) Extensión. Despejando a "y" en la ecuación $xy - y - 5 = 0$, tenemos:

$$y(x-1) -5 = 0, \quad y = \frac{5}{x-1}$$

Donde para $x = 1$, se obtiene $y = \frac{5}{0} = \infty$, o sea que la x puede tomar como valor numérico a todos los números reales menos al 1.

Despejando a X en la ecuación

$xy - y - 5 = 0$; tenemos

$x = \dfrac{5 + y}{y}$, donde para $y = 0$ se obtiene $x = \frac{5}{0} = \infty$,

o sea que la y puede tomar como valor numérico a todos los número reales menos al cero.

d) Asíntotas. De la ecuación en donde se despejó a la Y,

$y = \dfrac{5}{x - 1}$, vemos que la ecuación de la asíntota vertical es $x = 1$, pues para este valor de la x, la y se hace infinita.

De la ecuación en donde se despejó a la x,

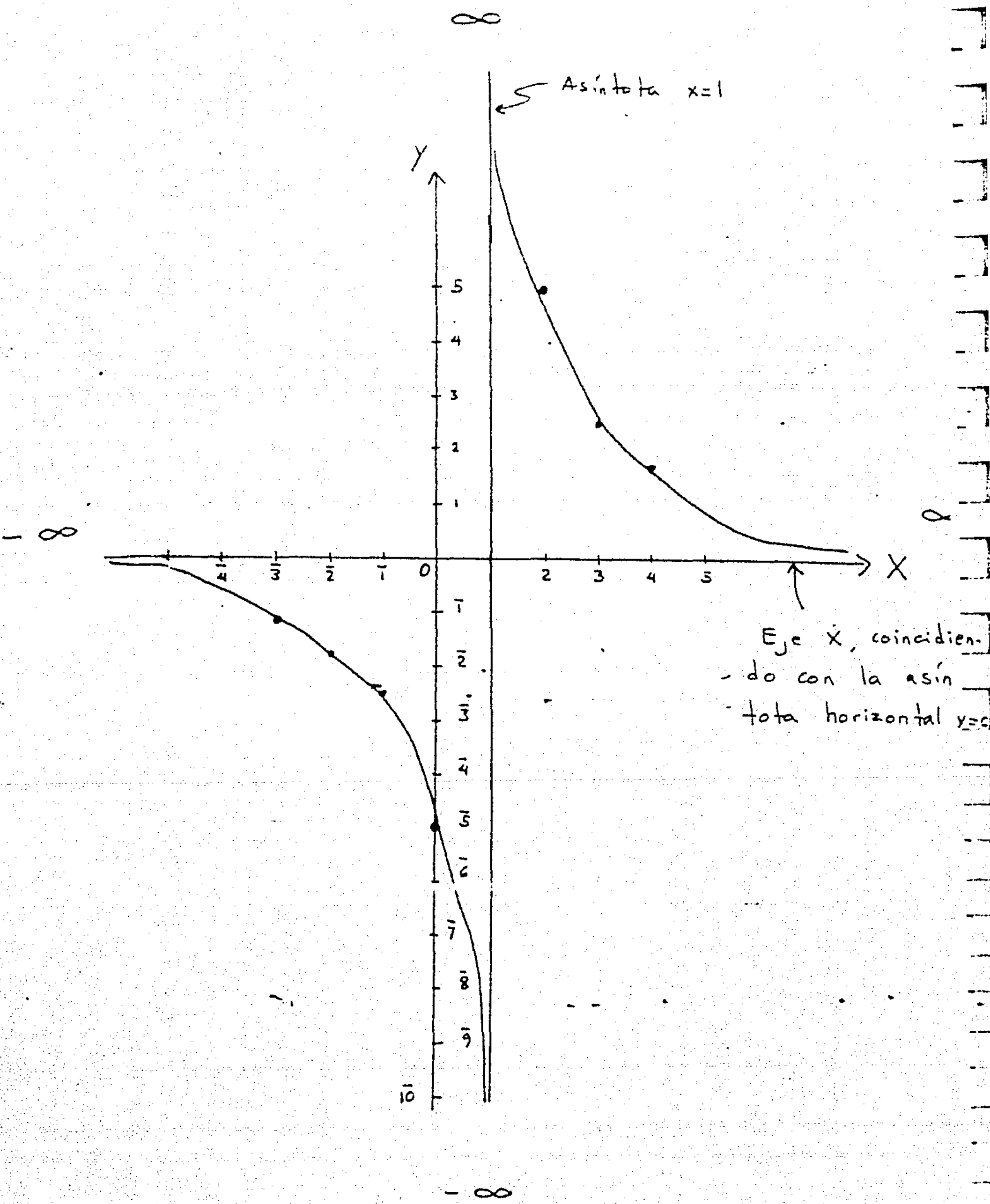
$x = \dfrac{5 + y}{y}$, se observa que la ecuación de la - asíntota horizontal es $y = 0$, pues para este valor de la y, la x se hace infinita.

c) Tabulación. Ecuación: $y = \dfrac{5}{x - 1}$

x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	2	3	4
y	$\frac{5}{-4}$	$\frac{5}{-3}$	$\frac{5}{-2}$	$\frac{5}{-1}$	-10	5	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$

f) Trazo.

(La figura está en el reverso)



∞
Asíntota x=1
Y
X
0
- ∞
- ∞
Eje X, coincidien-
do con la asín-
tota horizontal y=0

Con un poco de práctica, se pueden unir los puntos con la línea que verdaderamente representa la gráfica de la función, y más aún, continuar esta línea aunque no hayamos encontrado más puntos de la gráfica mediante la tabulación.

En ésta gráfica vemos que la curva viene desde menos infinito (de la izquierda) y se va hasta menos infinito (hacia - abajo) para después aparecer infinitamente arriba e irse infinitamente a la derecha.

En el párrafo anterior que dice "vemos", se supone que mental e idealmente estamos tomando todos los valores reales para la "x" desde $-\infty$ hasta $+\infty$ (excluyendo al 1) y viendo qué valores va obteniendo la y.

2. Trazar la curva determinada por la ecuación:

$x^3 + xy^2 + y^2 = 0.$

Solución.

a) Intersecciones con los ejes.

Para encontrar la intersección de la curva con el eje X, substituimos $y = 0$ en la ecuación.

$x^3 + x\,(0)^2 + 0^2 = 0$, o sea $x^3 = 0$, o sea $x = 0$

$\therefore$ La curva intersecta al eje x en el origen.

Para encontrar la intersección de la curva con el eje Y, substituimos $x = 0$ en la ecuación.

$$0^3 + 0y^2 + y^2 = 0, \text{ o sea } y^2 = 0,$$

o sea $y = 0$.

$\therefore$ La curva intersecta al eje Y en el origen.

b) Simetrías.

Respecto al eje X . Substituyendo "y" por "-y", tenemos:

$x^3 + x(-y)^2 + (-y)^2 = 0$, o sea $x^3 + xy^2 + y^2 = 0$

obteniéndose la misma ecuación.

Por lo tanto sí es simétrica respecto al eje X.

Respecto al eje Y. Substituyendo x por -x, tenemos:

$(-x)^3 + (-x)\, y^2 + y^2 = 0$, o sea $-x^3 - xy^2 + y^2 = 0$

obteniéndose una ecuación distinta a la original, por lo tanto la curva no es simétrica respecto al eje Y.

Respecto al origen. Substituyendo x por -x y y por -y, tenemos:

$(-x)^3 + (-x)(-y)^2 + (-y)^2 = 0$, o sea $-x^3 - xy^2 + y^2 = 0$

Obteniéndose una ecuación distinta a la original, por lo tanto la curva no es simétrica respecto al origen.

c) Extensión. Despejando a y en la ecuación, tenemos:

$x^3 + y^2 (x+1) = 0$, o sea $y^2 = \dfrac{-x^3}{x+1}$, o sea,

$y^2 = \dfrac{-x^3}{(x+1)}$, o sea $y = \pm\sqrt{\dfrac{-x^3}{(x+1)}}$

En esta última ecuación, a simple vista vemos que la x no puede tomar el valor -1, pues se obtendría $y = \pm\sqrt{\infty}$, que no representa algún número. Tampoco la x puede tomar valores menores a - 1, pues se obtendrían raíces cuadradas de números negativos, las cuales no tienen solución en el conjunto de los números reales, por ejemplo, para x = -2, se obtiene

$$y = \pm\sqrt{\frac{(-2)^3}{-(-2+1)}} = \pm\sqrt{\frac{-8}{1}} = \pm\sqrt{-8}$$

y $\sqrt{-8}$ no tiene solución en el conjunto de números reales. Tampoco la x puede tomar valores mayores que cero, pues se obtendrían raíces cuadradas de números negativos, por ejemplo, para x = 0.1 , se obtendría:

$$y = \pm\sqrt{\frac{(.1)^3}{-(.1+1)}} = \pm\sqrt{\frac{.001}{-1.1}} = \pm\sqrt{-.0009}$$

y $\sqrt{-.0009}$ no tiene solución en el conjunto de números reales.

Por lo tanto, la x solo puede tener valores mayores a -1 y menores o iguales a cero, con símbolos: $-1 < x \leq 0$

Por supuesto que para hacer este análisis necesitas tener cierto dominio.

Cuando en el denominador aparece alguna restricción (como en este caso el -1) se necesitan tomar dos valores cercanos a la restricción -1, por ejemplo -.5 y -1.5, substituirlos en el despeje y observar qué sucede. Veamos:

$$\sqrt{\frac{-(-.5)^3}{-.5+1}} = \sqrt{\frac{.125}{.5}}$$ solucionable

$$\sqrt{\frac{-(-1.5)^3}{-1.5+1}} = \sqrt{\frac{3.375}{-.5}}$$ irresoluble, por ser negativo el radicando.

Esto nos indica (se puede demostrar) que para valores menores de -1, la "y" no tiene solución. Por lo tanto nos quedamos con la siguiente extensión para la x: $-1 < x \leq 0$ (Observa la gráfica)

Ahora estudiemos la extensión para la "y"
Como el despeje de la x no resulta fácil, se aconseja analizar la misma ecuación y ver qué valores toma la "y" al recorrer la "x" su intervalo de variación $-1 < x \leq 0$.

Se ve que la y toma como valor a todos los números reales cuando la x recorre su intervalo de variación, ya que el doble signo (+,-), nos da los valores positivos y negativos; el cero, cuando la x vale cero, y números muy grandes cuando la x se acerca a -1.

d) Asíntotas. De la ecuación

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{-(x+1)}}$$

vemos que para $x = -1$ se obtiene una asíntota vertical, ya que el denominador se hace cero.

Debido a la dificultad de despejar a la x, se aconseja darle valores cada vez mayores en valor absoluto y ver qué comportamiento obtiene la variable y; pero en este caso el intervalo $-1 < x \leq 0$ nos impide darle valores tan grandes a la x en valor absoluto como queramos. Por lo tanto no existe asíntota horizontal, ya que una de las variables debe tender al infinito.

e) Tabulación. Ecuación: $y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{-(x+1)}}$

Dominio de la variable independiente: $-1 < x \leq 0$

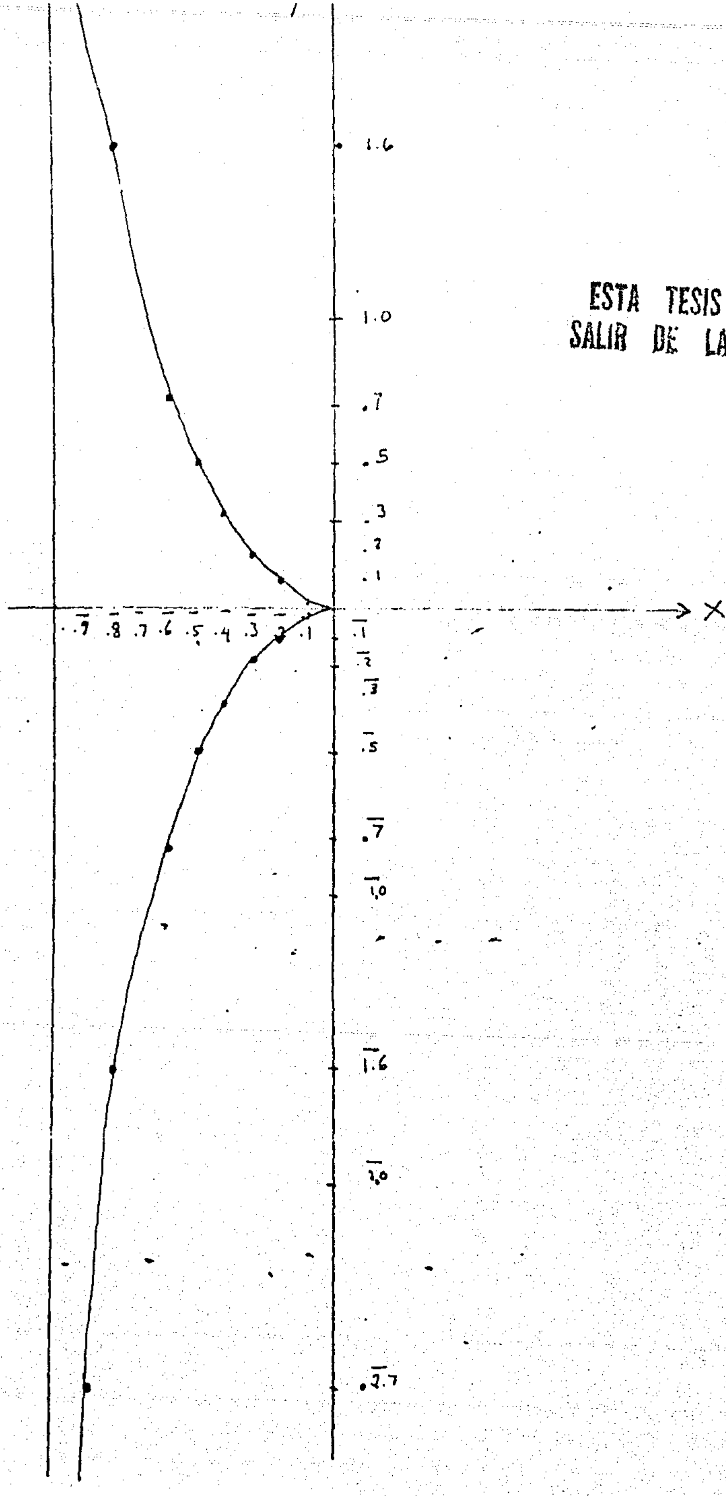
Dando algunos valores para la variable independiente "x", se obtienen valores para la variable dependiente.

x	-.9	-.8	-.6	-.5	-.4	-.3	-.2	-.1	0
y	±2.7	±1.6	±.73	±.5	±.32	±.19	±.1	±.03	0

f) Trazo

Asíntota

(La figura está en el reverso)



1.6
1.0
.7
.5
.3
.2
.1
X
.9 .8 .7 .6 .5 .4 .3 .2 .1
.1
.2
.3
.5
.7
1.0
1.6
2.0
2.7

Observando la figura puedes comprobar lo referente a las intersecciones con los ejes, simetrías, extensión y asíntotas.

3. Analizar y trazar la curva determinada por la ecuación:

$$x^2 y + x^2 - y = 0$$

Solución.

a) Intersecciones con los ejes.

Para encontrar la intersección de la curva con el eje X, substituimos Y = 0 en la ecuación.

$$x^2 (0) + x^2 - 0 = 0 \; ; \quad x^2 = 0 \text{ , o sea } x = 0$$

La curva intersecta al eje X en el origen.

Para encontrar la intersección de la curva con el eje Y, substituimos x = 0 en la ecuación.

$$(0^2)\, y + 0^2 - y = 0 \; ; \quad -y = 0, \text{ o sea } y = 0$$

La curva intersecta al eje Y en el origen.

b) Simetrías.

Respecto al eje X. Substituyendo y por -y, tenemos:

$$x^2 (-y) + x^2 - (-y) = 0, \text{ o sea } -x^2 y + x^2 + y = 0$$

Obteniéndose una ecuación distinta a la original, por lo tanto la curva no es simétrica respecto al eje X.

Respecto al eje Y. Substituyendo x por -x, tenemos:

$(-x)^2\ y + (-x)^2\ -y = 0$, o sea, $x^2\ y + x^2\ -y = 0$

obteniéndose la misma ecuación.

Por lo tanto sí es simétrica respecto al eje Y.

Respecto al origen. Substituyendo x por -x, y por -y en la ecuación, tenemos:

$(-x)^2\ (-y) + (-x)^2\ -(-y) = 0$, o sea, $-x^2y + x^2 + y = 0$

obteniéndose una ecuación distinta a la original, por lo tanto no es simétrica respecto al origen.

c) Extensión.

Despejando a y en la ecuación, tenemos: $y\ (x^2\ -1) + x^2 = 0$

o sea $y = \dfrac{-x^2}{x^2\ -1} = \dfrac{x^2}{1-x^2}$

En esta última ecuación en que ha quedado despejada la y, vemos que la x puede tomar como valor a todos los números reales menos a $\pm$ 1, puesto que en estos dos casos se obtendría $y = \dfrac{x^2}{0} = \infty$

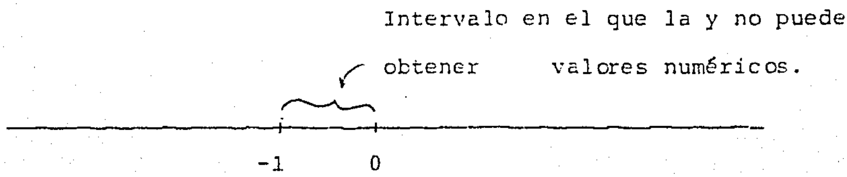
Despejando a x en la ecuación, tenemos

$x^2\ (y +1)\ -y = 0$; o sea

$x^2 = \dfrac{y}{y + 1}$; $x = \pm \sqrt{\dfrac{y}{y + 1}}$

Donde vemos que la y puede tomar como valor a todos los números reales no negativos y a todo los números reales menores a -1. Quedando excluidos los números mayores o iguales a - 1 y menores que 0, pues se obtendrían raíces cuadradas de números negativos.

En la siguiente recta numérica lo vemos:



Como vez la recta de los números reales quedó dividida en tres subconjuntos: $(-\infty, -1)$, $[-1, 0)$ y $[0, \infty)$.

Escoge algunos números pertenecientes a estos intervalos y comprueba lo dicho en el párrafo anterior.

d) Asíntotas.

De la ecuación $y = \frac{x^2}{1 - x^2}$.

obtenemos dos asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$, ya que en estos valores el denominador se hace cero.

De la ecuación $x = \pm\sqrt{\frac{y}{y + 1}}$

obtenemos una síntota horizontal: $y = -1$

e) Tabulación. Ecuación: $y = \frac{x^2}{1 - x^2}$

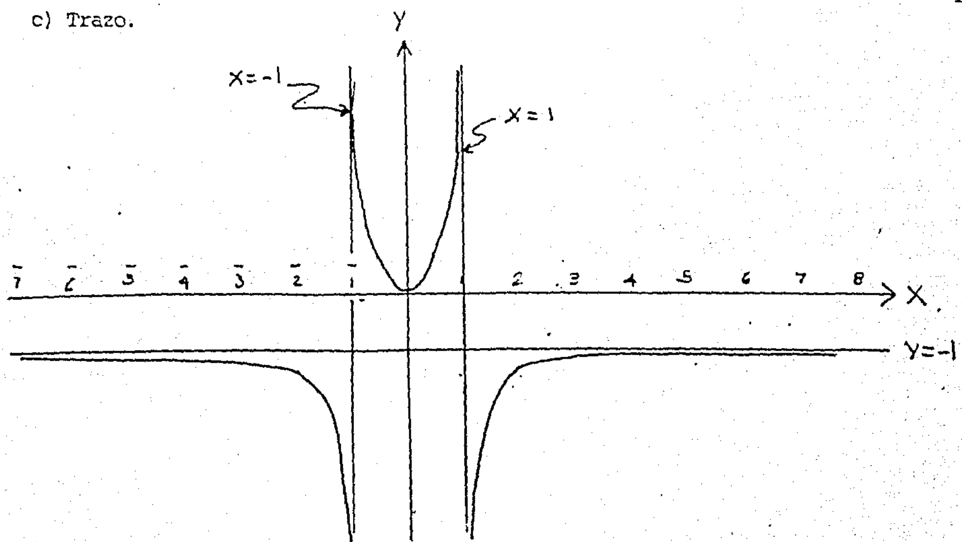
Dominio de la variable independiente:

$R - \{1, -1\}$, quiere decir todos los números reales menos el 1 y -1

x	-10	-8	-6	-4	-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	2	4	6	8	+10
y	-1.010	-1.015	-1.028	-1.066	-1.33	.33	.015	0	.015	.33	-1.33	-1.066	-1.028	-1.015	-1.010

$x = -1$ $\qquad\qquad$ $x = 1$

c) Trazo.



Observando la figura puedes comprobar lo referente a intersecciones, simetría, etc.

4) Trazar la curva determinada por la ecuación: $x^2y - 2y + x = 0$

Solución.

a) Intersecciones con los ejes.

Para encontrar la intersección de la curva con el eje X, substituimos $y = 0$ en la ecuación.

$x^2(0) - 2(0) + x = 0$; o sea, $x = 0$

La curva intersecta al eje X en el origen.

Para encontrar la intersección de la curva con el eje Y, substituimos $x = 0$ en la ecuación.

$0^2y - 2y + 0 = 0$; o sea, $-2y = 0$, $y = 0$.

La curva intersecta al eje Y en el origen.

b) Simetrías.

Respecto al eje X. Substituyendo y por -y, tenemos $x^2(-y) - 2(-y) + x = 0$, o sea, $-x^2y + 2y + x = 0$

Obteniéndose una ecuación distinta a la original, por lo tanto la curva no es simétrica respecto al eje X.

Respecto al eje Y. Substituyendo x por -x, tenemos.

$(-x)^2y - 2y + (-x) = 0$; o sea, $x^2y - 2y - x = 0$.

Obteniéndose una ecuación distinta a la original, por lo tanto la curva no es simétrica respecto al eje y.

Respecto al origen. Substituyendo x por -x, y "y" por -y, en la ecuación, tenemos:

$(-x)^2 (-y) - 2(-y) + (-x) = 0$, o sea $-x^2y + 2y - x = 0$, que multiplicándose por -1 se obtiene la ecuación original, por lo tanto la curva sí es simétrica respecto al origen.

c) Extensión

Despejando a y en la ecuación, tenemos: $y(x^2-2) + x = 0$,

$y = \frac{-x}{x^2-2}$; $\quad y = \frac{x}{2-x^2}$

En esta última ecuación en que ha quedado despejada la y, vemos que la x puede tomar como valor a todos los números reales menos a $\sqrt{2}\, y - \sqrt{2}$, pues se obtendría $y = \frac{x}{0} = \infty$.

Despejando a x en la ecuación, tenemos:

Ecuación: $x^2 y - 2y + x = 0$, o sea,

$yx^2 + x - 2y = 0$, como es una ecuación de 2o. grado en x, podemos utilizar la fórmula:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Veamos, en este caso, a = y, b = 1, y c = -2y

$$\therefore \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\,(y)\,(-2y)}}{2(y)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8y^2}}{2y}$$

En esta última ecuación en que ha quedado despejada la x, vemos que la y puede tomar como valor a todos los números reales menos al 0, pues se obtendría $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8\,(0)^2}}{2(0)} =$

$$= \frac{-1 \pm 1}{0}$$

d) Asíntotas.

De las ecuaciones

$y = \frac{x}{2-x^2}$, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8y^2}}{2y}$, obtenemos

las asíntotas siguientes :

$x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$ y $y = 0$, pues son los valores de la variable que al sustituirlos en las ecuaciones respectivas se obtiene como denominador al número 0.

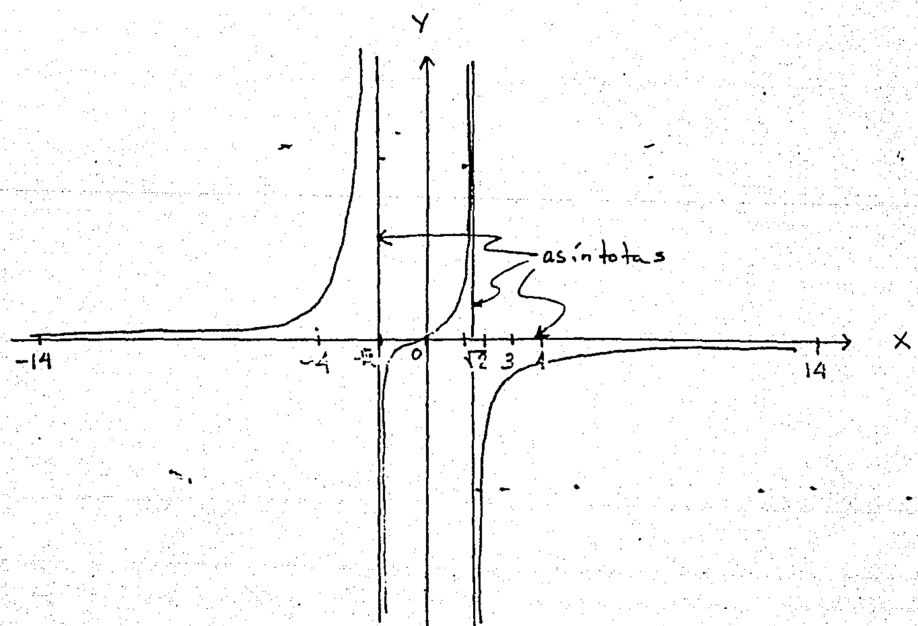
c) Tabulación. Ecuación: $y = \dfrac{x}{2 - x^2}$

Dominio de la variable independiente x:

$D_x = R - \left\{ -\sqrt{2},\ \sqrt{2} \right\}$

X	−14	−4	0	2	4	14
Y	.072	.28	0	−1	−.28	−.072

f) Trazo.



5. Trazar la curva determinada por la ecuación:

$$3x^2 - \frac{y^2}{3} = 36$$

Solución.

a) Intersecciones con los ejes.

Para encontrar la intersección de la curva con el eje x, sustituimos y=O en la ecuación:

$$3x^2 - \frac{0^2}{3} = 36 \text{ ; osea } \quad 3x^2 = 36 \text{ ; } x^2 = 12 \text{ ; } x = \pm\sqrt{12}$$

La curva intersecta al eje x, en x = 12 y - 12

Para encontrar la intersección de la curva con el eje y sustituimos x=O en la ecuación:

$$3(0)^2 - \frac{y^2}{3} = 36, \text{ o sea, } \quad -\frac{y^2}{3} = 36$$

$$y^2 = -108$$

$y = \pm\sqrt{-108}$. Esta raíz no tiene solución en el conjunto de números reales, por lo tanto la curva no intersecta al eje y.

b) Simetrías.

Respecto al eje x. Sustituyendo y por -y , tenemos:

$$3x^2 - \frac{(-y)^2}{3} = 36; \qquad 3x^2 - \frac{y^2}{3} = 36$$

Obteniéndose la misma ecuación, por lo tanto sí es simétrica respecto al eje x.

Respecto al eje y. Sustituyendo x por - x , tenemos:

$$3(-x)^2 - \frac{y^2}{3} = 36, \text{ o sea, } 3x^2 - \frac{y^2}{3} = 36$$

Obteniéndose la misma ecuación, por lo tanto sí es simétrica respecto al eje y. Respecto al origen. Sustituyendo x por -x y y por -y tenemos:

$3(-x)^2 - \frac{(-y)^2}{3} = 36$; o sea , $3x^2 - \frac{y^2}{3} = 36$

Obteniéndose la misma ecuación, por lo tanto sí es simétrica respecto al origen.

c) Extensión.

Despejando a y en la ecuación, tenemos:

$\frac{-y^2}{3} = 36 - 3x^2$; $-y^2 = 108 - 9x^2$; $y^2 = 9x^2 - 108$,

$$y = \pm \sqrt{9x^2 - 108}$$

En esta última ecuación, en que ha quedado despejada la y, vemos que el radicando $9x^2 - 108$ no puede ser negativo, ¿pero para qué valores de la x el radicando es positivo o cero? Para saberlo necesitamos resolver la siguiente desigualdad.

$9x^2 - 108 \geq 0$ Condición para el radicando: debe ser mayor o igual a cero.

$9x^2 \geq 108$

$x^2 \geq \frac{108}{9}$

$x^2 \geq 12$.

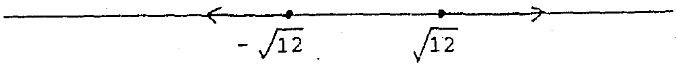
Las desigualdades se resuelven en forma parecida a las igualdades. (Estudia el tema si es necesario).

La desigualdad $x^2 \geq 12$ nos pregunta...¿Qué números reales, al elevarlos al cuadrado su resultado es mayor o igual a 12? Vemos que hay dos subconjuntos de números reales que resuelven esta pregunta:

1) Todos los reales mayores o iguales a $\sqrt{12}$.

2) Todos los reales menores o iguales a $-\sqrt{12}$.

En la recta numérica estos subconjuntos se ven así:



Con símbolos: $x \geq \sqrt{12}$ ó $x \leq -\sqrt{12}$, o bien, $|x| \geq 12$

Despejando a x en la ecuación, tenemos :

$$3x^2 = 36 + \frac{y^2}{3} \quad ; \quad x^2 = \frac{36 + \frac{y^2}{3}}{3} \quad ;$$

$$x^2 = 12 + \frac{y^2}{9} \quad ; \quad x = \pm\sqrt{\frac{y^2}{9} + 12}$$

En esta última ecuación en que ha quedado despejada la y, vemos que la y puede tomar como valor numérico al conjunto de todos los números reales, ya que al estar elevada al cuadrado el radicando siempre será positivo.

d) Asíntotas.

De la ecuación $y = \pm\sqrt{9x^2 - 108}$ podemos obtener otra equivalente a ésta pero que tenga un denominador en el que aparezca la variable x.

Veamos: $y = \pm\sqrt{9x^2\left(1 - \frac{12}{x^2}\right)}$; o sea

$$x = \pm\, 3x\sqrt{1 - \frac{12}{x^2}}$$

Ahora podemos observar que cuando la x aumenta su valor numérico sin límite, la t tiende al valor $\pm 3x$.

Te lo voy a escribir de la siguiente manera (indebida) mientras aprendes límites en Cálculo diferencial.

El decir que la x crece sin límite se "puede" escribir así:

$$y = \pm\ 3x\sqrt{1 - \frac{12}{\infty}} = \pm\ 3x\sqrt{1-0}, \text{ o sea}$$

$y = \pm\ 3x$. Obteniendo así la ecuación de dos asíntotas:

$y = 3x$, $y = -3x$; que para graficarlo necestias hacer una tabulación

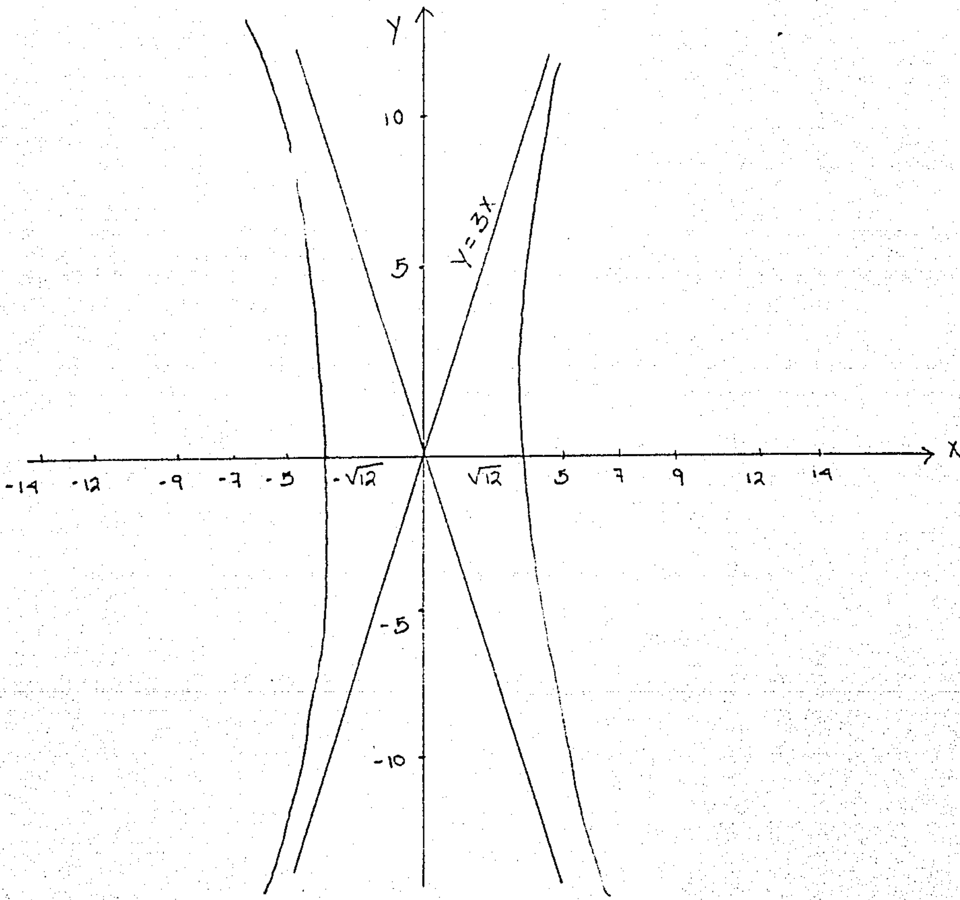
e) Tabulación. Ecuación: $y = \pm\sqrt{9x^2 - 108}$

Dominio de la variable independiente: $D_x = \{ x \in R \ / \ x \geqslant 12$ ó $x \leqslant -\sqrt{12}$ (quiere decir: todos los números reales tales que, son mayores o iguales a $\sqrt{12}$ ó menores o iguales a $-\sqrt{12}$).

x	-14	-12	-9	-7	-5	-3.5	- 12	12	3.5	5	14
y	±40.7	±34.4	±25	±18.2	±10.8	±1.5	0	0	±1.5	±10.8	±40.7

f) Trazo

(en el reverso de la hoja)


Y
X
10
5
-5
-10
Y=3X
-14
-12
-9
-7
-5
-√12
√12
5
7
9
12
14

6. Trazar la curva determinada por la ecuación:

$x^2 + \frac{4}{9} y^2 = 4$

Solución.

a) Intersecciones con los ejes.

Para encontrar la intersección de la curva con el eje x, substituimos $y = 0$ en la ecuación.

$x^2 + \frac{4}{9} (0)^2 = 4$, o sea $x^2 = 4 \therefore x = \pm \sqrt{4}$;

$x = \pm 2.$

La curva intersecta al eje x en $x = 2$ y $x = -2$

Para encontrar la intersección de la curva con el eje y, substituimos $x = 0$ en la ecuación.

$0^2 + \frac{4}{9} y^2 = 4$, o sea, $y^2 = \frac{4(9)}{4}$; $y^2 = \frac{36}{4} = 9$

$y = \pm \sqrt{9}$, $y = \pm 3.$

La curva intersecta al eje y en $y = 3$ y $y = -3$

b) Simetrías.

Respecto al eje x. Substituyendo y por -y, tenemos:

$x^2 + \frac{4}{9} (-y)^2 = 4$, o sea, $x^2 + \frac{4}{9} y^2 = 4$

Obteniéndose la misma ecuación, por lo tanto sí es simétrica respecto al eje x.

Respecto al eje y. Substituyendo x por -x, tenemos:

$$(-x)^2 + \frac{4}{9}y^2 = 4, \text{ o sea, } x^2 + \frac{4}{9}y^2 = 4$$

Obteniéndose la misma ecuación, por lo tanto sí es simétrica respecto al eje y.

Respecto al origen. Substituyendo x por -x y y por -y, tenemos:

$$(-x)^2 + \frac{4}{9}(-y)^2 = 4; \text{ o sea, } x^2 + \frac{4}{9}y^2 = 4$$

Obteniéndose la misma ecuación, por lo tanto sí es simétrica respecto al origen.

c) Extensión.

Despejando a y en la ecuación, tenemos:

$$\frac{4}{9}y^2 = 4 - x^2 \ ; \ y^2 + \frac{9(4-x^2)}{4} \ ; \ y^2 = \frac{36 - 9x^2}{4} \ ; \ y = \pm\sqrt{\frac{36-9x^2}{4}} = \pm\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$$

En esta última ecuación en que ha quedado despejada la y, vemos que el numerador del radicando no puede ser negativo, ¿Pero para qué valores de la x el numerador es positivo o cero?

Para saberlo necesitamos resolver la siguiente desigualdad.

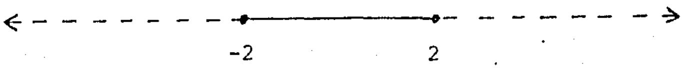
$4 - x^2 \geq 0$ Condición.

$-x^2 \geq -4$ Resolución

$x^2 \leq 4$

La desigualdad $x^2 \leq 4$ nos pregunta...¿Qué números reales, al elevarlos al cuadrado su resultado es menor o igual a 4? Vemos que sólo el subconjunto de números reales mayores o iguales que -2 y menores o iguales que 2 cumple con la respuesta a dicha pregunta.

En la recta numérica este subconjunto se ve así:



Con símbolos: $-2 \leq x \leq 2$, o bien: $|x| \leq 2$

Despejando a x en la ecuación, tenemos:

$x^2 = 4 - \frac{4}{9} y^2$; $x = \pm \sqrt{4 - \frac{4}{9} y^2} = \pm 2 \sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}$

En esta última ecuación en que ha quedado despejada la x, vemos que el radicando $4 - \frac{4}{9} y^2$ no puede ser negativo, ¿pero para qué valores de la y el radicando es positivo o cero? Para saberlo necesitamos resolver la siguiente desigualdad.

$1 - \frac{y^2}{9} \geq 0$ Condición.

$-\frac{y^2}{9} \geq -1$ Resolución.

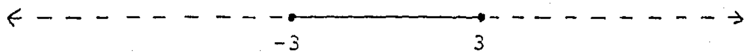
$\frac{y^2}{9} \leq 1$

$y^2 \leq 9$

La desigualdad $y^2 \leq 9$ nos pregunta... ¿Qué números reales al elevarlos al cuadrado su resultado es menor o igual a 9?

Vemos que solo el subconjunto de números reales mayores o iguales a -3 y menores o iguales a 3 cumple con la respuesta a dicha pregunta.

En la recta numérica este subconjunto se ve así:



Con símbolos: $-3 \leq y \leq 3$, o bien, $|y| \leq 3$

d) Asíntotas.

Debido a los intervalos de variación de la x e y ($-2 \leq x \leq 2$, $-3 \leq y \leq 3$) no podemos darles valores tan grandes como queramos, $\therefore$ no existen asíntotas. En estas ecuaciones no resulta conveniente factorizar el radicando de tal manera que quede la x o y como denominador, debido que al tender cualquiera de las dos variables al infinito, el radicando se hace negativo.

Veámoslo:

$$y = \sqrt{\frac{36 - 9x^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{9x^2\left(\frac{4}{x^2} - 1\right)}{4}}$$

$$= \frac{3x}{2}\sqrt{\frac{4}{x^2} - 1}$$

Cuando la x tiende al infinito, $\frac{4}{x^2}$ tiende a cero y el radicando quedaría $0 - 1 = -1$, por lo cual no se le puede sacar raíz cuadrada.

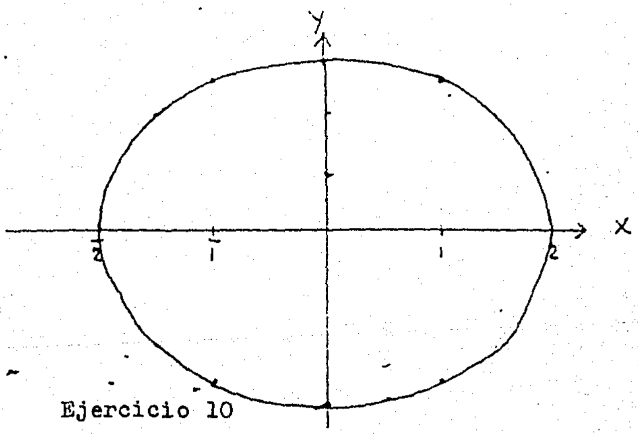
e) Tabulación. Ecuación: $y = \pm \sqrt{\dfrac{36 - 9x^2}{4}} = \pm \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$

Dominio de la variable independiente:

$$R = \left\{ x \in R \;\middle|\; -2 \leq x \leq 2 \right\}$$

X	-2	-1.5	-1	-.5	0	.5	1	1.5	2
y	0	± 2	±2.6	± 2.9	± 3	±2.9	±2.6	± 2	0

f) Trazo



Ejercicio 10

10.1 Analiza y traza la curva determinada por la ecuación:

$xy - y + 8 = 0$

10.2 Analiza y traza la curva determinada por la ecuación:

$x^3 - xy^2 - y^2 = 0$

10.3 Analiza y traza la curva determinada por la ecuación:

$x^2y - x^2 + y = 0$

10.4 Analiza y traza la curva determinada por la ecuación:

$x^2y - 6y + x = 0$

10.5 Analiza y traza la curva determinada por la ecuación: $9x^2 - 16y^2 = 144$

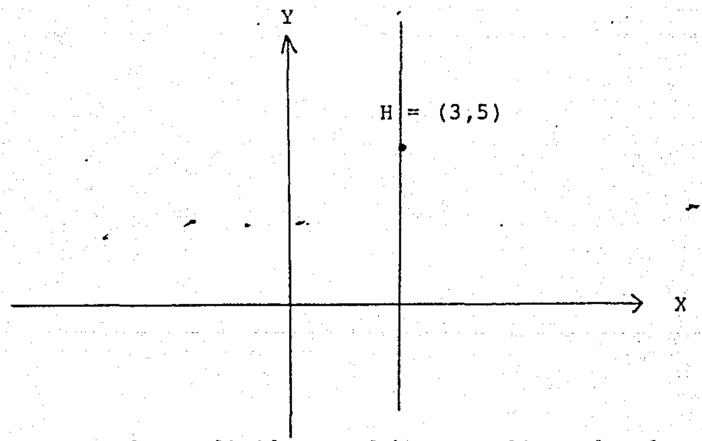
10.6 Analiza y traza la curva determinada por la ecuación: $36x^2 + 64y^2 = 2304$

PROBLEMA SEGUNDO. Dado un lugar geométrico por ciertas condiciones, encontrar la ecuación que lo determina.

Problemas resueltos.

1. Encontrar la ecuación de la recta que sea paralela al eje Y y pase por el punto $H = (3,5)$.

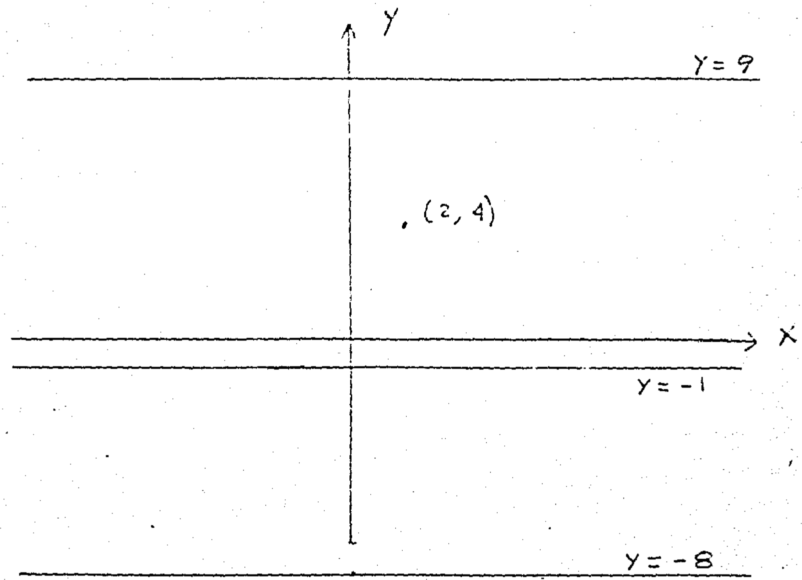
Solución. Hagamos el dibujo para una mayor comprensión



Observamos que la condición que deben cumplir todos los puntos de esta recta es que su abscisa sea igual a 3. O sea que su ecuación será $x = 3$; o bien $x - 3 = 0$.

2. Encontrar la ecuación de las rectas que sean paralelas a la recta $y + 8 = 0$ y disten del punto $R = (2,4)$, 5 unidades.

Solución   Hagamos el dibujo.

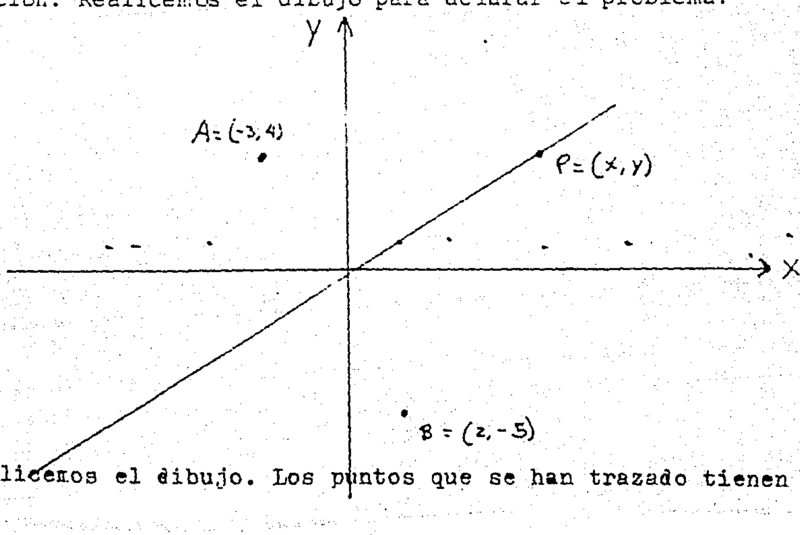


De la figura vemos que las ecuaciones de las rectas son $y - 9=0$ y $y + 1=0$.

3. Hallar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de los puntos:

$A = (-3,4)$ y $B = (2,-5)$

Solución. Realicemos el dibujo para aclarar el problema.



Analicemos el dibujo. Los puntos que se han trazado tienen la propiedad indicada en el texto del problema, es decir, tienen la misma distancia -cada uno de ellos- a los puntos A y B. Se ha tomado a uno cualquiera, P = (x,y), trazando los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$, indicando las distancias que según el problema deben ser iguales, es decir: AP = BP.

Aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos, tenemos:

$$AP = \sqrt{(x-(-3))^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2}$$

$$BP = \sqrt{(x-2)^2 + (y-(-5))^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+5)^2}$$

Como AP = BP, tenemos:

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+\ )^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, nos queda:

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = (x-2)^2 + (y+5)^2$$

Desarrollando los binomios:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 10y + 25$$

Eliminando términos iguales:

$$6x + 9 - 8y + 16 = -4x + 4 + 10y + 25$$

Pasando al 1er. miembros todos los términos:

$$6x + 9 - 8y + 16 + 4x - 4 - 10y - 25 = 0$$

Reduciendo términos semejantes:

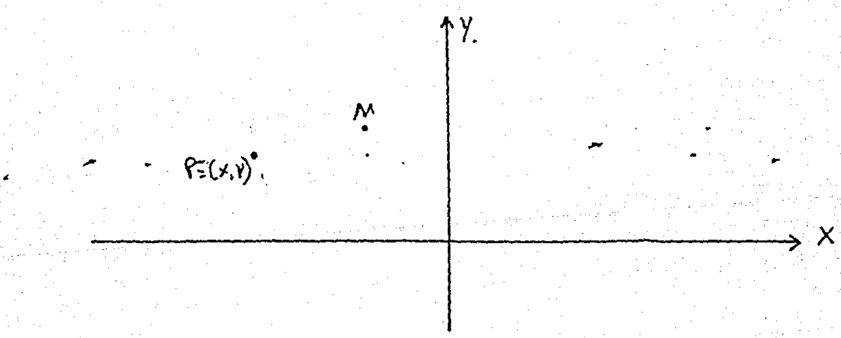
$10x - 18y - 4 = 0$

Obteniendo así la ecuación del lugar geométrico indicado.

Observación. La x e y de la ecuación, representan a las coordenadas de cualquier punto que equidiste con A y B. La condición - según la ecuación - para que un punto pertenezca a este lugar geométrico, es que al multiplicar la abscisa por 10, la ordenada por 18, restar los productos y al resultado restarle 4, se obtenga el número cero.

4. Hallar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia al punto $M = (-3,7)$ es igual a 4 unidades.

Solución. Realicemos el dibujo para aclarar el problema.



Analicemos el dibujo. Los puntos que se han trazado tienen la propiedad indicada en el texto del problema, es decir, la distancia de cada uno de ellos al punto $M = (-3,7)$ es de 4 unidades.

Se ha tomado a uno cualquiera, $P = (x,y)$, trazando el segmento $\overline{PM}$ que indica la distancia del Punto P al M.

Aplicando la fórmula de distancia e igulá ndola a 4, tenemos:

$PM = \sqrt{(x-(-3))^2 + (y-7)^2}$, desarrollando, $\sqrt{x^2+6x+9+y^2-14y+49} = 4$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$x^2+6x+9+y^2-14y+49 = 16$

Pasando el 16 al miembro izquierdo:

$x^2+y^2+6x-14y+49-16 = 0$, o sea, $x^2+y^2+6x-14y+33 = 0$

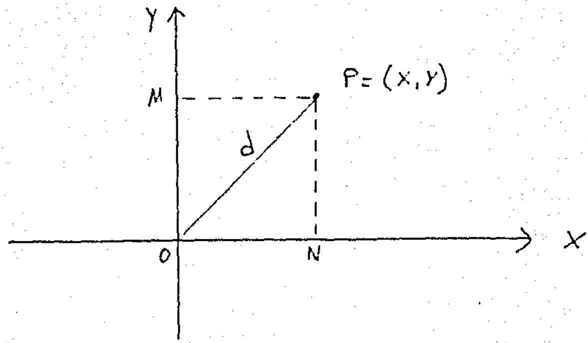
Siendo ésta la ecuación del lugar geométrico indicado.

Observación: La x e y de la ecuacón, representan a las coordenadas de cualquier punto cuya distancia a $M=(-3,7)$ es de 4 unidades.

La condición para que esas coordenadas x e y pertenezcan a este lugar geométrico, es que: la abscisa al cuadrado, más la ordenada al cuadrado , más es séxtuple de la abscisa, menos el producto de la ordenada por 14 más 33, sea igual a cero.

5. Hallar la ecuación del lugar geometrico de todos los puntos cuya suma de sus distancias a los ejes coordenadas sea igual al cuadrado de sus distancias al origen.

Solucion. Realicemos el dibujo para aclara el problema:



Analicemos el dibujo. Aquí se ha trazado un solo punto P, en vista de la dificultad de ir trazando a los demás.

La distancia de P al eje Y es el segmento $\overline{MP}$, y su distancia al eje x es el segmento $\overline{PN}$. Debido a las coordenadas del punto P, sabemos que MP = x y PN = y.

La distancia del punto P al origen está indicada con la letra d, que por medio del teorema de Pitágora sabemos que $d^2 = x^2 + y^2$.

Ahora nos resta únicamente traducir al lenguaje algebráico las condiciones de dicho lugar geométrico.

Condiciones: La suma de sus distancias a los ejes coordenados sea igual al cuadrado de su distancia al origen.

Traducción: $x + y = d^2$; o sea, $x + y = x^2+y^2$.

Pasando al miembro izquierdo e igualando a cero:

$-x^2 - y^2 + x + y = 0$

Siendo ésta la ecuación del lugar geométrico indicado. Recuerda que para que un punto pertenezca a este lugar geométrico, sus coordenadas (x,y) deben satisfacer las condiciones de la ecuación.

Ejercicio 11

11.1 Encuentra la ecuación de la recta que sea paralela al eje Y y pase por el punto R = (2,7)

11.2 Encuentra la ecuación de las rectas que sean paralelas a la recta y + 5 = 0 y disten del punto M = (3,5), 2 unidades.

11.3 Encuentra la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de los puntos: F = (-2,3) y G=(6,-4).

11.4 Encuentra la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia al punto k = (-5,9) es igual a 6 unidades.

11.5 Encuentra la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos cuya suma de sus distancias a los ejes coordenados sea igual al cuadrado de sus distancias al origen.

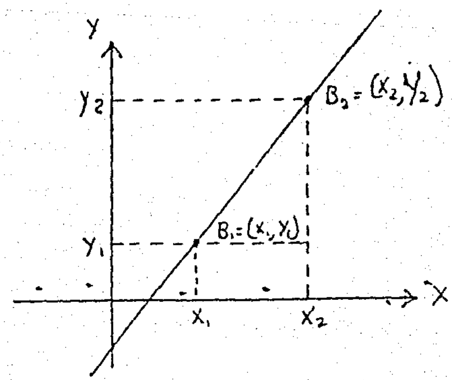
CAPITULO 5

LINEA RECTA

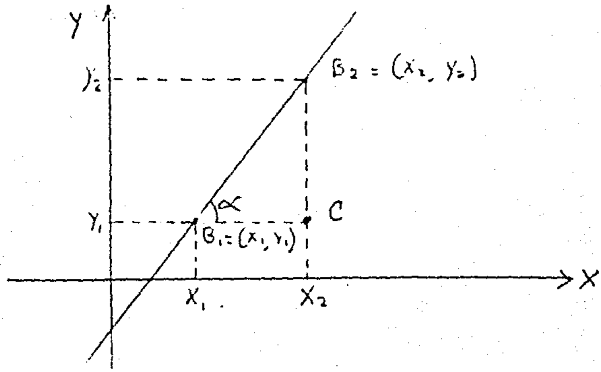
41. Línea recta (Introducción). Séneca decía que no tenía sentido entender el concepto de "línea recta" sin antes comprender el concepto de rectitud. Nosotros podemos decir que una línea recta es un conjunto de puntos, uno seguido de otro, que no cambian de dirección y cuya longitud (de la recta) es infinita en ambos sentidos. Este concepto de línea recta se determina con precisión a través de sus características geométrico-algebráicas.

42. Características de una línea recta.

Una línea recta está determinada por dos puntos $B_1=(x_1,y_1)$ y $B_2=(x_2,y_2)$ que le pertenezcan. Ya que según Euclides por dos puntos solamente se puede trazar una recta. Veamos.



Con la figura anterior y el concepto de tangente de un ángulo, podemos realizar trazos auxiliares y utilizar estos conceptos.



Con estos trazos auxiliares formamos el triángulo rectángulo B_1 B_2C, con el ángulo α de inclinación de la recta.

Sabiendo que la tangente de un ángulo es cateto opuesto sobre cateto adyacente, obtenemos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{B_2\ C}{B_1\ C}$$

Al resultado de esta división le llamamos pendiente (m), es decir:

$$m = \text{tg } \alpha = \frac{B_2\ C}{B_1\ C}$$

Esta ecuación la podemos escribir en función de las proyecciones a los ejes de los puntos B_1 y B_2.

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{x_2 - x_1}$$

Esta ecuación define a la pendiente de una recta.

Con esto podemos concluir que una recta está determinada si conocemos dos de sus puntos, o bien, su pendiente y uno de sus puntos.

43. Con estas dos características de una línea recta podemos determinar su ecuación.

Usando la fórmula $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ podemos pasar múltiplicando el denominador y obtener.

$y_2 - y_1 = m\ (x_2 - x_1)$

Pero esta ecuación es válida para cualquier punto (x,y) de la recta. Por lo tanto la ecuación anterior se puede escribir como

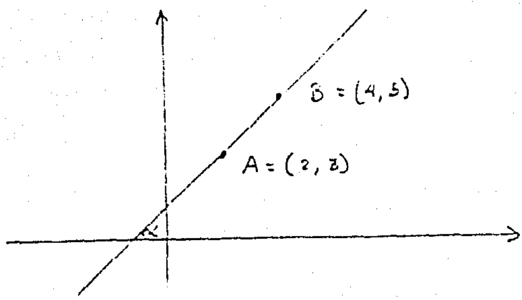
$$Y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

Siento esta ecuación la de una recta con pendiente m y que pasa por el punto (x_1, y_1)

Problemas resueltos.

1. Encuentra el valor de la pendiente de la recta que pasa por los puntos A = (2,3) y B = (4,5)

Resolución. (Siempre realiza el trazo).



Usando la ecuación de la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y substituyendo los datos, tenemos : $m = \frac{5 - 3}{4 - 2} = \frac{2}{2} = 1$

Nota. Es indistinto que consideres al punto A como el primer punto o a B, pero una vez determinado su orden ya no lo puedes cambiar durante el desarrollo del problema.

Que el valor de la pendiente m sea 1, significa que la tangente del ángulo de inclinación (α) de la recta es 1. Es decir, tg α = 1. Para encontrar el valor del ángulo α, buscas en la tabla trigonométrica el ángulo α cuya tangente vale 1, y es de 45° o sea, $\alpha = 45°$

Observa que el valor de la pendiente "m" está dado en decimal y el valor del ángulo α de inclinación está dado en sexagesimal.

2. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos M = (-6,0) y N= (-2,7)?

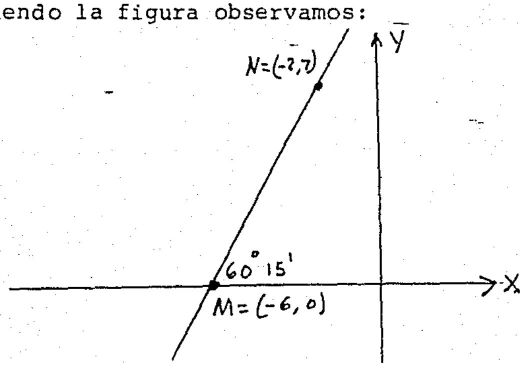
Resolución: De la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

se substituyen los datos se encuentra el valor de m, que viene a ser la tan α, y se busca en las tablas trigonométricas el valor del ángulo α. Veamos:

$$m = \frac{7-0}{-2-(-6)} = \frac{7}{-2+6} = \frac{7}{4} = 1.75 \quad \therefore$$

$$\text{tg}\ \alpha = 1.75 \quad \text{y} \quad \alpha = \text{tg}^{-1}(1.75) = 60^\circ\ 15'$$

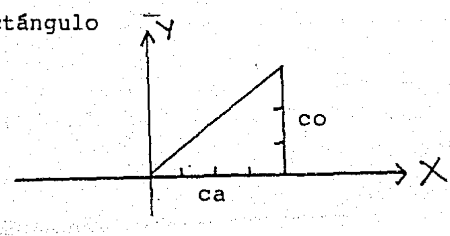
Haciendo la figura observamos:



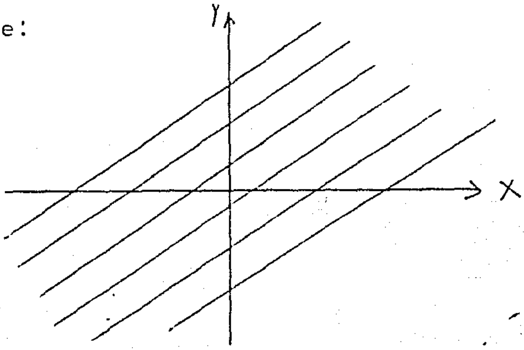
3. Dado el valor de su pendiente $m=\frac{3}{4}$, encontrar la dirección de la recta.

Resolución. Si el valor de la pendiente de una recta es $m = \frac{3}{4}$ podemos dibujar un triángulo rectángulo cuyo cateto opuesto mida 3 y el adyacente 4.

Lo podemos dibujar a partir del origen y la dirección de la recta será la misma que la de la hipotenusa de dicho triángulo rectángulo



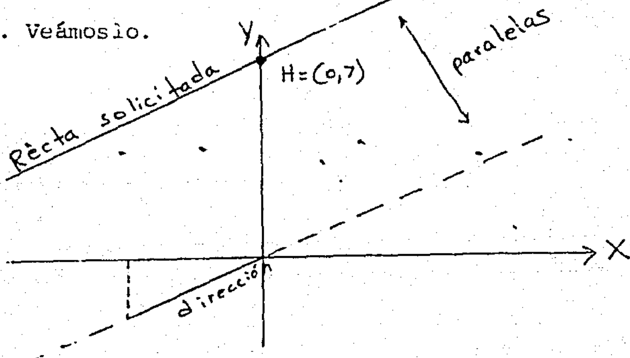
Ahora bien, sabemos la dirección de la recta, es decir qué tanto levantada o acostada está, pero no sabemos cuál es la recta, pues existen una infinidad de rectas con esa dirección, fíjate:



Para saber cuál es la recta de todas éstas, necesitamos saber uno de sus puntos, con eso ya la obtenemos.

4. Trazar la recta cuya pendiente es $m = \frac{-2}{5}$ y pasa por el punto $H = (0,7)$.

Resolución. Primero se encuentra la dirección de la recta por el método anterior, luego se localiza el punto H y finalmente se hace pasar una recta por este punto con la dirección encontrada. Veámoslo.



5. Dar la ecuación de la recta del ejercicio 4.

Resolución. Para encontrar la ecuación de la recta anterior necesitamos su pendiente y el punto por el que pasa, y substituir estos valores en la ecuación $y - y_1 = m\ (x - x_1)$.

Veamos: $y - 7 = \frac{-2}{5}\ (x - 0)$

$$5(y-7) = -2(x)$$

$$5y - 35 = -2x$$

Solución: $2x + 5y - 35 = 0$

Ejercicio 12.

Resuelve los siguientes problemas relacionados con la línea recta.

12.1 Encuentra el valor de la pendiente de la recta que pasa por los puntos $M = (1,4)$ y $N = (3,5)$

12.2 ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $R = (-3,0)$ y $H = (-4,5)$?

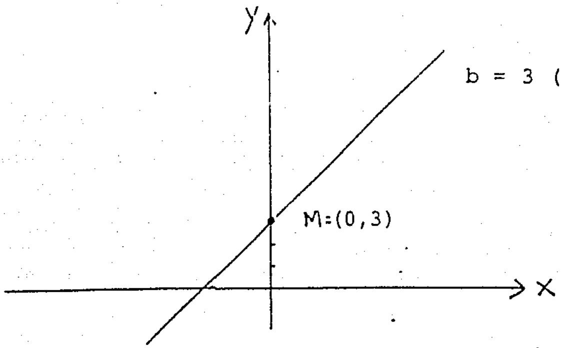
12.3 Dado el valor de la pendiente, $m = \frac{2}{5}$, encuentra la dirección de la recta respectiva.

12.4 Traza la recta cuya pendiente es $m = \frac{-3}{4}$ y pasa por el punto $T = (0,6)$

12.5 Obtén la ecuación de la recta del ejercicio 12.4.

44. Ecuación de la recta dada su pendiente y su ordenada en el origen.

Aquí el concepto que desconocemos es "ordenada en el origen". Tu recuerdas que un punto P en el plano está determinado por dos coordenadas x e y, que se llaman abscisa y ordenada respectivamente. La abscisa es el número sobre el eje X y la ordenada, sobre el eje Y. Cuando la abscisa está en el origen (vale cero) la ordenada recibe el nombre de "ordenada en el origen" y se denota con la letra b.



b = 3 (ordenada en el origen)

De la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ podemos obtener la ecuación de la recta con ordenada al origen, substituyendo los valores de las coordenadas del punto M.

Veamos:

$$y - 3 = m\,(x - 0)$$
$$y - 3 = mx$$
$$y = mx + 3$$

Donde las coordenadas x,y, representan a las coordenadas de cualquier punto de la recta. Queriendo decir la ecuación $y = mx + b$, que la ordenada (y) es igual a la suma de la ordenada al origen (b) con el producto de la pendiente (m) y la abscisa (x).

Problemas resueltos.

1. ¿Cuál es la ordenada al origen de la recta que pasa por los puntos M = (-3,4) y H = (2,5)?

Resolución. Tenemos que encontrar la intersección de la recta con el eje Y.

Para esto, encontramos la ecuación de la recta y después hacemos $x = 0$ para encontrar la ordenada al origen b.

Veamos: Como conocemos dos de sus puntos, encontramos su pendiente y luego con la pendiente y uno de sus puntos, la ecuación.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$m = \dfrac{5 - 4}{2-(-3)} = \dfrac{1}{5}$ Ahora usando la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ y el punto H, tenemos:

$$y - 5 = \frac{1}{5} (x - 2)$$

$$5(y-5) = 1 (x -2)$$

$$5y - 25 = x - 2$$

$$-x + 5y - 25 + 2 = 0$$

$$-x + 5y - 23 = 0$$

Ecuación general de la recta. $\left\{ \quad x - 5y + 23 = 0 \right.$ (Se acostumbra dejar positiva a la x, por la cual se le cambia de signo a toda la ecuación)

Nota. Se hubiera obtenido la misma ecuación usando el punto M.

Ahora, para encontrar la ordenada al origen, hacemos $x = 0$ en la ecuación obtenida:

$$x - 5y + 23 = 0$$

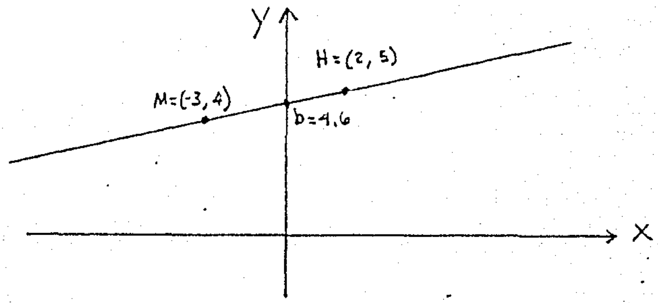
$$0 - 5y + 23 = 0$$

$$y = \frac{-23}{-5} = 4.6$$

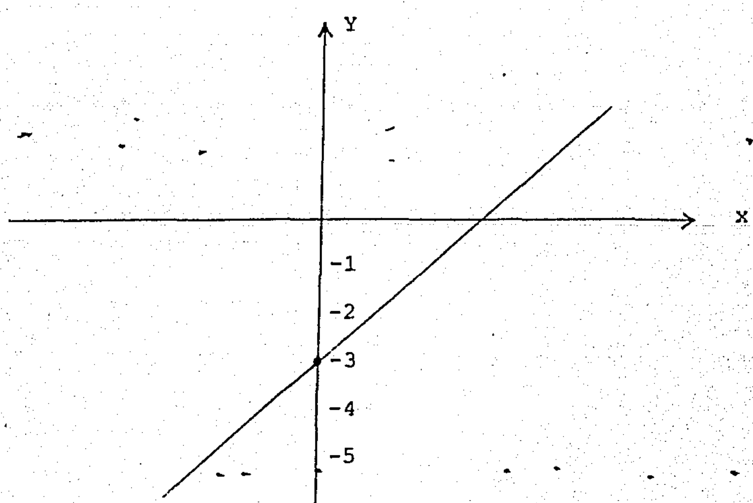
En este caso la y toma el valor de la ordenada al origen y = b = 4.6

Solución: b = 4.6

Todo esto en el dibujo se vé así:



2. Observando la figura, encontrar el valor de la ordenada al origen b



Solución: b = -3

Simplemente observamos el valor de la y en el que se intersecta la recta con el eje Y.

3. Encontrar la ordenada al origen de la recta cuya ecuación general es:

$-3x + 2y - 5 = 0.$

Resolución. Lo que se debe entender también es: Encontrar el valor de y en el cual se intersecta la recta con el eje Y. Para eso, hacemos $x = 0$ en la ecuación general.

$$-3x + 2y - 5 = 0$$
$$-3(0) + 2y - 5 = 0$$
$$2y - 5 = 0$$
$$y = \frac{5}{2} = 2.5$$

Solución: $b = 2.5$

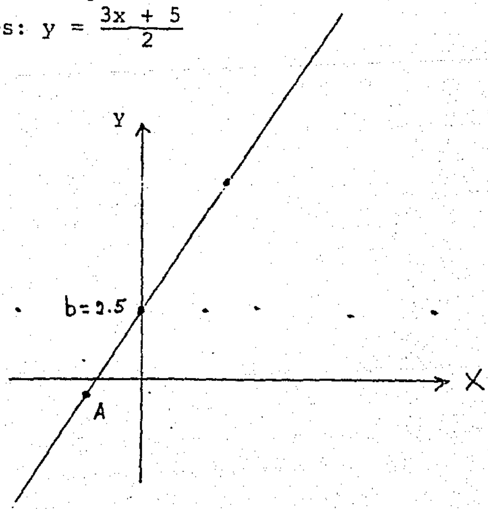
Para verificar geométricamente y de una manera aproximada el resultado, tomamos dos puntos de la recta, la trazamos y observamos si en realidad la ordenada al origen vale 2.5

Veamos: $-3x + 2y - 5 = 0$

Despejando y, tenemos: $y = \dfrac{3x + 5}{2}$

Tabulando:

	x	y
A	-2	$-\frac{1}{2}$
B	3	7

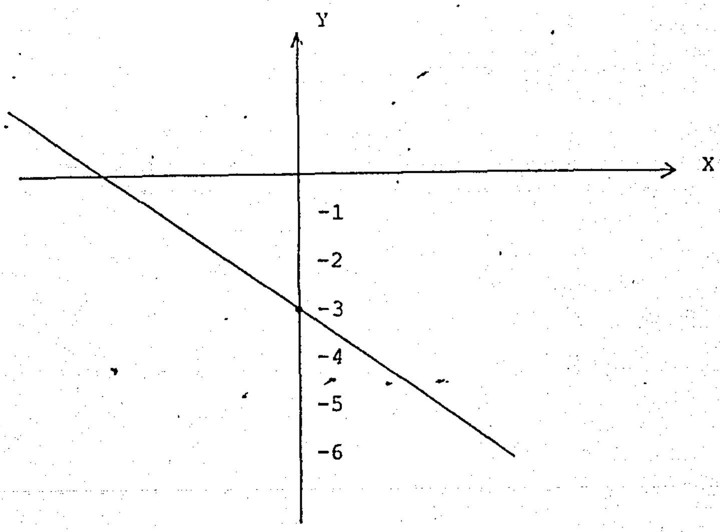


Vemos que el valor 2.5 de la ordenada al origen sí es el valor adecuado al resultado obtenido algebráicamente, que es el exacto.

Ejercicio 13.

13.1 ¿Cuál es la ordenada al origen de la recta que pasa por los puntos N = (-2,5) y J = (3,4)?

13.2 Observando la figura, encuentra el valor de la ordenada al origen b.



13.3 Encuentra la ordenada al origen de la recta cuya ecuación general es $-2x + 3y - 4 = 0$

45. Ecuación de una recta dados dos de sus puntos.

Para encontrar la ecuación, substituyes el valor de la pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{en la ecuación}$$

$y - y_1 = m (x - x_1)$, quedando:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1), \text{ con } x_2 - x_1 \neq 0$$

Como viste, los dos puntos nos sirvieron para encontrar la pendiente, y finalmente se usa la ecuación de la recta con pendiente y uno de sus puntos conocidos.

¿Cuántos puntos de la recta aparecen en la ecuación anterior? Veamos: (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x,y) : Tres.
Pero como (x,y) son las coordenadas de cualquier punto, la ecuación es válida para toda la infinidad de puntos que forman a la recta.
Recuerda que la ecuación de un lugar geométrico nos da las condiciones para que un punto (x,y) pertenezca a dicho lugar geométrico.

PROBLEMAS RESUELTOS.

1. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $M = (-3,-4)$ y $H = (-5,0)$

Resolución. Usamos la ecuación

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$ y substituimos

las coordenadas de los puntos M y H de la siguiente manera: $M = (-3,-4) = (x_1, y_1)$ y $H = (-5,0) = (x_2, y_2)$. Por supuesto que se pueden invertir M por H, de todas maneras se obtiene el mismo resultado.

Veamos: $y - (-4) = \frac{0 - (-4)}{-5 - (-3)} (x - (-3))$

$$y + 4 = \frac{4}{-2} (x + 3)$$

$$-2 (y + 4) = 4 (x + 3)$$

$$-2y - 8 = 4x + 12$$

$$-4x - 2y - 8 - 12 = 0$$

$$-4x - 2y - 20 = 0$$

Solución: $4x + 2y + 20 = 0$

2. La ecuación de una recta es $3x - 4y + 1 = 0$, encuentra dos de sus puntos que tengan como abscisas a los números -2 y 2.

Resolución. Tenemos que substituir los valores $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ en la ecuación y así obtener las ordenadas respectivas y_1, y_2.

Veamos para $x_1 = -2$

$$3x - 4y + 1 = 0$$

$$3(-2) - 4y + 1 = 0$$

$$-6 - 4y + 1 = 0$$

$$y = \frac{-1 + 6}{-4}$$

$$y = \frac{5}{-4}$$

$$y = \frac{-5}{4}$$

Por lo tanto el primer punto es $\left(-2, \frac{-5}{4}\right)$

Para $x_2 = 2$

$$3x - 4y + 1 = 0$$

$$3(2) - 4 + 1 = 0$$

$$6 - 4y + 1 = 0$$

$$y = \frac{-1 - 6}{-4}$$

$$y = \frac{-7}{-4}$$

$$y = \frac{7}{4}$$

Obteniéndose así el segundo punto: $(2, \frac{7}{4})$

3. Comprueba si los puntos $P = (2,5)$ y $R = (14,8)$ pertenecen a la recta cuya ecuación es $3x - 2y + 4 = 0$

Resolución. Para que estos puntos pertenezcan a la recta, necesitan cumplir sus coordenadas las condiciones de la ecuación, es decir, que el triple de la abscisa, menos el doble de la ordenada y sumando cuatro, se obtenga cero.

Veamos: Para $P = (2,5)$:

$$3x - 2y + 4 = 0$$

$$3(2) - 2(5) + 4 = 0$$

$$6 - 10 + 4 = 0 \quad \therefore \quad \text{sí pertenece.}$$
$$0 = 0$$

Para $R = (14,8)$

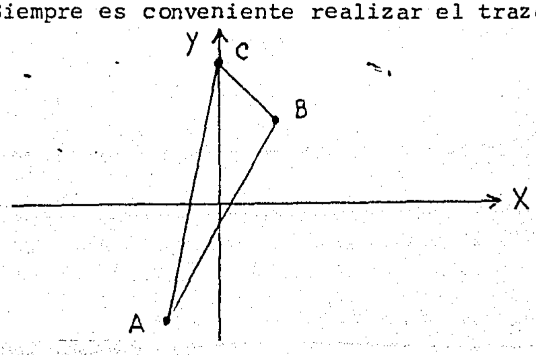
$$3x - 2y + 4 = 0$$

$$3(14) - 2(8) + 4 = 0$$

$$42 - 16 + 4 = 30 \neq 0 \quad \therefore \quad \text{No pertenece.}$$

4. Encuentra las ecuaciones de las rectas que tienen contenidos a los lados del triángulo cuyos vértices son $A = (-2,-4)$, $B = (2,3)$ y $C = (0,5)$.

Resolución. Siempre es conveniente realizar el trazo.



Para encontrar las ecuaciones respectivas necesitamos repetir tres veces la ecuación $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ con las coordenadas de los puntos A, B y C respectivamente

Ejercicio 14.

1. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $R = (-2,-1)$ y $J = (-4,0)$

2. La ecuación de una recta es $-2x - 3y + 4 = 0$, encuentra dos de sus puntos que tengan como abscisas a los números $-3, 3$.

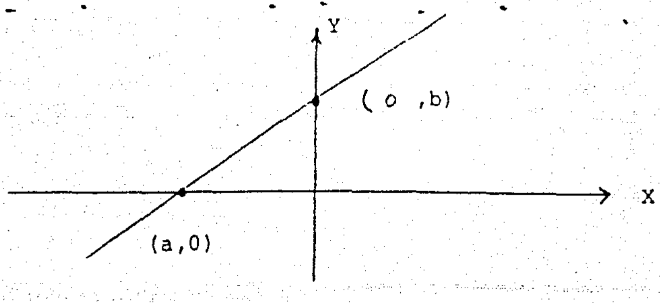
3. Comprueba si los puntos $D = (1,6)$ y $E = (3,5)$ pertenecen a la recta cuya ecuación es $4x - 2y + 8 = 0$.
4. Encuentra las ecuaciones de las rectas del problema anterior.

46. Ecuación de la recta dependiendo de sus intersecciones con los ejes.

La recta tiene otra ecuación dependiendo de sus intersecciones con los ejes.

Por ser situaciones muy especiales se obtienen estos tipos de ecuaciones, que en realidad son simplemente una simplificación de las vistas anteriormente.

Veamos la siguiente figura.



De la figura tomamos como (x_1, y_1) a $(a, 0)$, y como (x_2, y_2) a $(0, b)$, substituyendo estos valores en la ecuación:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \text{ obtenemos:}$$

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a} (x - a)$$

$$y = \frac{b}{-a} (x - a)$$

$$-ay = bx - ab$$

$$-bx - ay = -ab$$

$$bx + ay = ab \quad \text{(dividiendo entre ab, tenemos)}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Esta es la ecuación de la recta cuyas intersecciones con los ejes x e y son a y b, respectivamente. También se puede decir: con la ordenada y la abscisa en el origen.

PROBLEMAS RESUELTOS.

1. Obtener la ecuación de la recta cuyas intersecciones con los ejes son: $a = 2$, $b = -3$

Resolución. Tenemos que substituir estos valores en la ecuación.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ecuación requerida $\left\{ \frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1 \right.$ (Multiplicando por el mcm de 2 y - 3 obtenemos la ecuación:

$$-6\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{-3}\right) = -6(1)$$

$$-3x + 2y + 6 = 0$$

Ecuación general
de la recta: $3x - 2y - 6 = 0$

2. ¿En qué puntos intersecta la recta cuya ecuación es $\frac{-x}{3} + \frac{y}{4} = 1$, a los ejes coordenados?

Análisis. Tenemos que transformar la ecuación

$\frac{-x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ a la ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Resolución: $\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1$ Por lo cual las intersecciones son: $a = -3$, $b = 4$.

3. ¿En qué puntos intersecta la recta $\frac{2x}{4} - \frac{3y}{2} = -5$ a los ejes coordenados?

Análisis: Tenemos que convertir la ecuación $\frac{2x}{4} - \frac{3y}{2} = -5$ a la ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Resolución: Multiplicamos ambos miembros de la ecuación $\frac{2x}{4} - \frac{3y}{2} = -5$ por $\frac{-1}{5}$, obteniendo

$$\frac{-1}{5}\left(\frac{2x}{4} - \frac{3y}{2}\right) = \frac{-1}{5}(-5)$$

$$\frac{-2x}{20} + \frac{3y}{10} = 1$$

Ahora multiplicamos al numerador y denominador de la primer fracción por $\frac{-1}{2}$ y al numerador y denominador de la segunda fracción por $\frac{1}{3}$

$$\frac{\frac{-1}{2}\ (-2x)}{\frac{-1}{2}\ (20)} + \frac{\frac{1}{3}\ (3y)}{\frac{1}{3}\ (10)} = 1 \qquad \text{, quedando}$$

$$\frac{x}{-10} + \frac{y}{\frac{10}{3}} = 1 .$$

Donde obtenemos: $a = -10$ y $b = \frac{10}{3}$

Verificación geométrica.

Despejando la "y" en la primera ecuación, tenemos:

$$\frac{2x}{4} - \frac{3y}{2} = -5$$

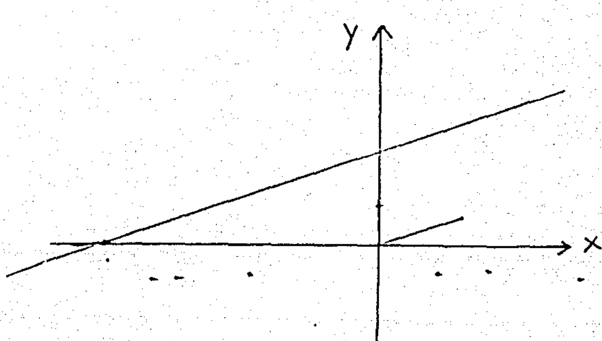
$$\frac{-3y}{2} = \frac{-2x}{4} \quad -5$$

$$-3y = \frac{-4x}{4} - 10$$

$$y = \frac{-4x}{-12} - \frac{10}{-3}$$

$$y = \frac{x}{3} + \frac{10}{3}$$

$$m = \frac{1}{3} , \; b = \frac{10}{3}$$



Vemos que los resultados obtenidos son los adecuados.

Ejercicio 15.

1. Obtén la ecuación de la recta cuyas intersecciones con los ejes son:

$a = 4, \quad b = 7$

2. ¿En qué puntos intersecta la recta $\frac{3x}{4} - \frac{2y}{5} = -2$ a los ejes coordenados?

47. FORMA GENERAL DE LA ECUACION DE UNA RECTA.

Todas la ecuaciones de las rectas que hemos visto hasta ahora se pueden transformar en una ecuación que llamaremos "general" . Se llama general porque abarca a todas las rectas, en cambio a las ecuaciones anteriores se les podría llamar "particulares", porque se refieren solamente a un tipo de rectas.

La ecuación generla de na recta tiene la siguiente forma: $Ax_1 + By_1 + C = 0$, donde los coeficientes A y B de las variables, pueden valer cero, pero no al mismo tiempo; y la C, término independiente puede o no ser cero.

Las ecuaciones anteriores se convierten a la forma general quitando denominadores, paréntesis, reduciendo términos semejantes y pasándolos todos al miembro izquierdo. Veamos caso por caso en los siguientes problemas resueltos

a) Convertir a la forma general la ecuación de la recta con pendiente $\frac{1}{4}$ y punto (-2,3), $y - 3 = \frac{1}{4}(x+2)$

Resolución:

$y - 3 = \frac{1}{4} \quad (x + 2)$

$4y - 12 = x + 2$

$-x + 4y - 12 - 2 = 0$

$-x + 4y - 14 = 0$

$x - 4y + 14 = 0$ Ecuación general.

En esta ecuación general los coeficientes son:

A = 1, B = -4 y C = 14.

b) Convertir a la forma general la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-3,2) y (4,5):

$$y - 2 = \frac{5 - 2}{4 - (-3)} \left(x - (-3)\right)$$

Resolución:

$$y - 2 = \frac{5 - 2}{4 - (-3)} (x - (-3))$$

$$y - 2 = \frac{3}{7} (x + 3)$$

$7y - 14 = 3x + 9$

$-3x + 7y - 14 - 9 = 0$

$-3x + 7y - 23 = 0$

$3x - 7x + 23 = 0$ Ecuación general.

En esta ecuación general los coeficientes son $A = 3$, $B = -7$ y $C = 23$.

c) Convertir a la forma general la ecuación de la recta cuyas intersecciones con los ejes son $a = -4$, $b = 3$;

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$$

Resolución:

$\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$, multiplicando por 12:

$-3x + 4y = 12$

$-3x + 4y - 12 = 0$

$3x - 4y + 12 = 0$ Ecuación general.

Los coeficientes son $A = 3$, $B = -4$ y $C = 12$

d) Convertir a la forma general la ecuación de la recta cuya pendiente es $\frac{2}{5}$ y ordenada al origen -3; $y = \frac{2}{5}x - 3$

Resolución:

$y = \frac{2}{5}x - 3$

$5y = 2x - 3$

$-2x + 5y + 3 = 0$

$2x - 5y - 3 = 0$ Ecuación general.

Los coeficientes son $A = 2$, $B = -5$ y $C = -3$

Ejercicio 16

16.1 Convertir a la forma general la ecuación de la recta con pendiente $\frac{1}{5}$ y punto (-4,7)

16.2 Convertir a la forma general la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-2,1) y (3,4).

16.3 Convertir a la forma general la ecuación de la recta cuyas intersecciones con los ejes son:

$a = -3$, $b = 5$; $\frac{x}{-3} + \frac{y}{5} = 1$

16.4 Convertir a la forma general la ecuación de la recta cuya pendiente es $\frac{5}{7}$ y ordenada al origen -4 ; $y = \frac{5}{7}x - 4$

48. DISCUSION DE LA FORMA GENERAL.

Por discutir la forma general de la ecuación $Ax + By + C = 0$ de una recta, significa interpretar las relaciones que existen entre los puntos de la recta y los coeficientes A, B y C; además de las relaciones entre dos rectas y los coeficientes mencionados.

En primer lugar, para que un punto (x_1, y_1) pertenezca a la recta $Ax + By + C = 0$, debe cumplir con los coeficientes A, B y C, la condición $Ax_1 + By_1 + C = 0$.

En segundo lugar, para que dos rectas $Ax + By + C = 0$ y $A_1x + B_1y + c_1 = 0$ sean paralelas, los coeficientes, deben cumplir la relación:

$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}$, o bien, $AB_1 - A_1B = 0$.

En tercer lugar, para que dos rectas $Ax + By + C = 0$ y $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ sean perpendiculares, los coeficientes deben cumplir la relación:

$AA' + BB' = 0$

En cuarto lugar, para que dos rectas $Ax + By + C = 0$, $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ se intersecten en un solo punto, los coeficientes deben cumplir la relación.

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$$, o bien, $AB' - A'B \neq 0$

En quinto lugar, para que dos rectas se sobrepongan (coincidan) la relación entre los coeficientes de las ecuaciones debe ser $A = KA'$, $B = KB'$ y $C = KC'$, con $K \neq 0$

PROBLEMAS RESUELTOS.

1) Determinar si los puntos $A = (2,5)$, $B = (4, -2)$ pertenecen a la recta $-4x - 5y + 6 = 0$

Resolución

Para el punto $A = (2,5)$

$-4(2) -5 (5) + 6 = ?$

$-8 -25 + 6 = -27$, diferente de cero.

Por lo tanto no pertenece a la recta

Para el punto $(4, -2)$

$-4(4) -5(-2) + 6 = ?$

$-16 + 10 + 6 = 0$ Por lo tanto sí pertenece a la recta.

2) Determina la relación de paralelismo, perpendicularidad e intersección única que cumplen las siguientes rectas.

$3x - 2y + 4 = 0$

$-4x + 5y - 1 = 0$

Resolución:

a) Paralelismo $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$

$\frac{3}{-4} = \frac{-2}{5}$? , veamos $3\ (5) = 15$

$-4\ (-2) = 8$

b) Perpendicularidad $AA' + BB' = 0$

$3(-4) + (-2)\ (5) = 0$?

$-12 - 10 = -22$ Diferente de cero por lo tanto no son perpendiculares.

c) Intersección en un solo punto.

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$$

$\frac{3}{-4} \neq \frac{-2}{5}$?, veamos: $3(5) = 15$

$-4\ (-2) = 8$

3) Determinar si las rectas

$-3x + 4y - 1 = 0$, $-6x + 8y - 2 = 0$

coinciden

Resolución.

Coincidencia: $A = KA'$, $B = KB'$, $C = KC'$.

$-3 = K(-6)$, $4 = K(8)$, $-1 = K(-2)$

$$K = \frac{-3}{-6} = \frac{4}{8} = \frac{-1}{-2}$$

$K = \frac{1}{2}$. Por lo tanto coinciden

Sí son diferentes, por lo tanto se intersectan en un solo punto.

Ejercicio 17.

17.1 Determina si los puntos $M = (-2, -5)$ y $J = (4, 0)$ pertenecen a la recta $-2x - 4y + 8 = 0$

17.2 Determina la relación de paralelismo, perpendicularidad e intersección única, que cumplen las siguientes rectas.

$-4x - 3y + 9 = 0$ y $8x + 6y + 10 = 0$

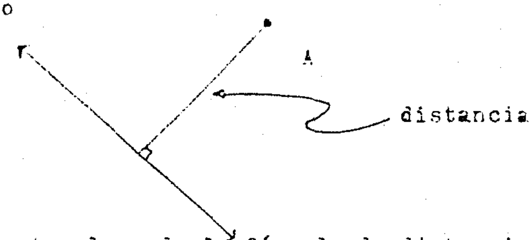
17.3 Determina si las rectas

$-6x + 2y - 8 = 0$, $-3x + y - 4 = 0$ coinciden.

49. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.

Primero tenemos que definir la distancia de un punto a una recta y es el segmento perpendicular a la recta $Ax_1 + By_1 + C = 0$ que va del punto (x_1, y_1) a dicha recta.

Veámoslo



Por la naturaleza de la fórmula de distancia definiremos distancia dirigida y distancia absoluta.

La ecuación de la distancia dirigida es :

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(Su demostración se la dejamos al lector como trabajo de investigación)

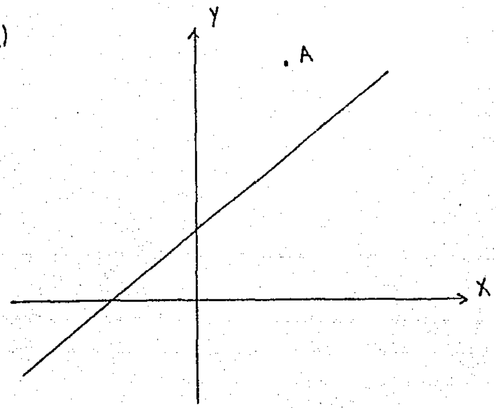
En donde el signo del radical se elige de acuerdo a lo siguiente:

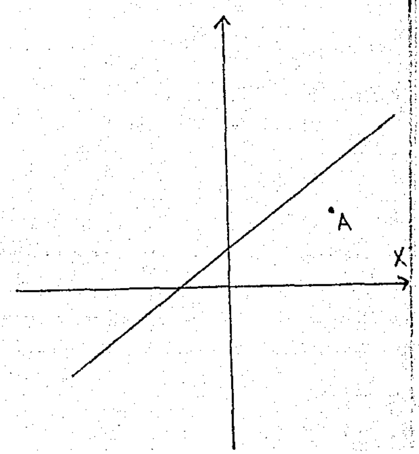
a) Si la recta no pasa por el origen, d es positiva o negativa según el punto A y el origen estén en lados opuestos o del mismo lado de la recta, respectivamente.

b) Si la recta pasa por el origen, d es positiva o negativa según el punto A este arriba o abajo de la recta. respectivamente.

Veámoslo en las siguientes figuras.

a)

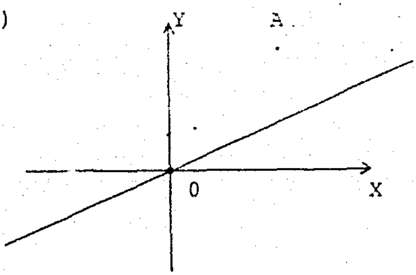


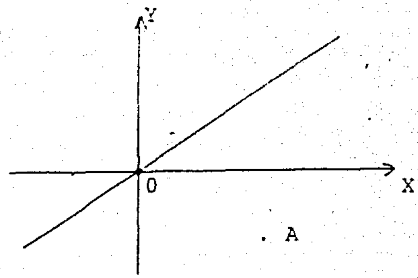


El signo del radical es positivo, pues: La recta no pasa por el origen y el punto A y el origen están en lados opuestos de la recta.

El signo del radical es negativo, pues: La recta no pasa por el origen y el punto A y el origen están del mismo lado de la recta.

b)





El signo del radical es positivo por estar el punto A arriba de la recta que pasa por el origen

El signo del radical es negativo por estar el punto A àbajo de la recta que pasa por el origen.

Cuando la distancia no es dirigida, es decir que nos interesa si es de aquí para allá o de allá para acá, la llamamos absoluta. Para eso le ponemos el valor absoluto al numerador de la fracción de la fórmula anterior, así:

$$d(\text{absoluta}) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS.

1. Encontrar la distancia de la recta

$-2x + 4y - 1 = 0$ al punto $M = (-3, -2)$

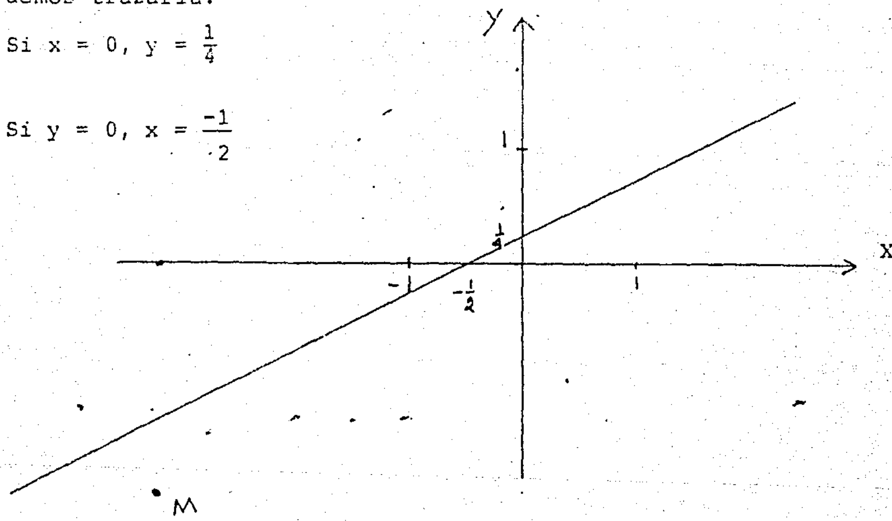
Análisis. Tenemos que trazar la recta y el punto, y substituir los valores de A, B, C y de M en la fórmula para la distancia respectiva.

Resolución.

Encontrando las intersecciones de la recta con los ejes, podemos trazarla.

Si $x = 0$, $y = \frac{1}{4}$

Si $y = 0$, $x = \frac{-1}{2}$



En este caso vemos que el punto M queda abajo de la recta. Para saberlo sin necesidad del trazo, se substituye $x_1 = -3$ en la ecuación de la recta, si la "y" resultante del punto de la recta es menor que Y_1 , entonces la recta esta abajo del punto. Y si la y resultante de la recta es mayor que Y_1, entonces la recta está arriba del punto.

En este caso tenemos:

$$-2x + 4y - 1 = 0$$

$$y = \frac{2x + 1}{4}$$

Para $x_1 = -3$, $\quad y = \frac{2(-3) + 1}{4}$

$$y = \frac{-6 + 1}{4}$$

$$y = \frac{-5}{4} \text{, donde } \frac{-5}{4} > -2$$

es decir, $y > y_1$, por lo tanto la recta queda arriba del punto.

Usando el criterio de que la recta no pasa por el origen, y éste y el punto M están del mismo lado de la recta, la distancia será negativa.

Para saber si el signo del radical es positivo o negativo, se sigue el siguiente criterio:

a) Si $C \neq 0$, r es de signo contrario a C.

b) Si $C = 0$, $B \neq 0$, r y B tienen el mismo signo.

c) Si $C = B = 0$, r y A tienen el mismo signo.

donde $r = \pm \sqrt{A^2 + B^2}$

Substituyendo los valores $A = -2$, $B = 4$, $C = -1$, $X_1 = -3$, $y_1 = -2$ en

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \text{, tenemos:}$$

$$d = \frac{-2(-3) - 4(-2) + (-1)}{+\sqrt{(-2)^2 + 4^2}}$$ (el signo del radical es (+) debido a que $C \neq 0$)

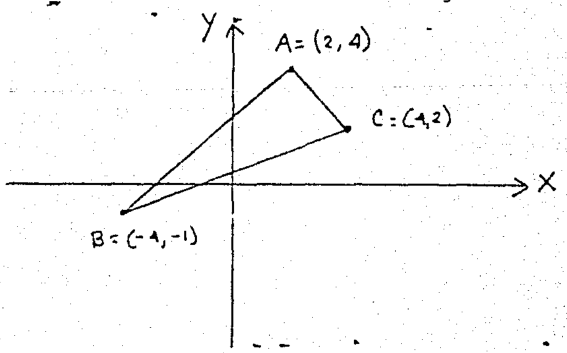
$$d = \frac{6 - 8 - 1}{+\sqrt{4 + 16}} = \frac{-3}{+\sqrt{20}} = \frac{-3}{\sqrt{20}}$$

Haciendo operaciones $d = \frac{-3}{\sqrt{20}} \doteq \frac{-3}{4.47} = -.66$ **(Aproximadamente)**

Verificándolo en el dibujo vemos que el resultado es apropiado.

El signo menos de la distancia significa que el origen y el punto están del mismo lado de la recta.

2. Encontrar la distancia de cada vértice del triángulo a su lado opuesto



a) Análisis. El lado $\overline{AB}$ no pasa por el origen y el punto C y el origen están del mismo lado, por lo tanto, el signo de la distancia será negativo.

Resolución. La ecuación de la recta que pasa por los puntos

A,B es: $5x - 6y + 14 = 0$. Las coordenadas (x_1, y_1) del punto C son (4, 2)

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{-\sqrt{A^2 + B^2}}$$ (el signo del radical es (-) debido a que $C \neq 0$, por lo tanto r es de signo contrario a C)

$$d = \frac{5(4) + (-6)(2) + 14}{-\sqrt{25 + 36}}$$

$$d = \frac{20 - 12 + 14}{-\sqrt{61}}$$

$$d = \frac{+22}{-\sqrt{61}} = -2.81$$

La distancia es 2.81,

El signo negativo de la distancia indica que el punto y el origen están del mismo lado de la recta.

b) Análisis. El lado $\overline{AC}$ no pasa por el origen, y éste y el punto B están del mismo lado, por lo tanto el signo de la distancia será negativo.

Resolución. La ecuación de la recta que pasa por los puntos A y C es $2x + 2y - 12 = 0$, sacándole mitad: $x + y - 6 = 0$

Las coordenadas (x_1, y_1) del punto B son (-4, -1), el signo del radical r debe ser (+) debido a que $C \neq 0$ y negativo.

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{+\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1(-4) + 1(-1) + (-6)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4-1-6}{\sqrt{2}} = \frac{-11}{\sqrt{2}} \approx 77$$

La distancia es aproximadamente 77, debido a que al dividir entre $\sqrt{2}$ no se obtiene un número exacto, por ser infinita la parte decimal de $\sqrt{2}$.

El signo menos indica que el punto B y el origen están del mismo lado de la recta.

c) Análisis. El lado $\overline{BC}$ no pasa por el origen, y el punto A está arriba de la recta que pasa por los puntos B y C, por lo tanto la distancia será positiva (por estar el punto A y el origen en lados opuestos a la recta $\overleftrightarrow{BC}$)

Resolución. La ecuación de la recta que pasa por los puntos B y C es $3x - 8y + 4 = 0$

Las coo rdenadas (x_1 y_1) del punto A son (2,4). el signo del radical r debe ser (-) debido a que C ≠ 0 y positivo.

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{-\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{3(2) - 8(4) + 4}{-\sqrt{3^2 + (-8)^2}} = \frac{6-32+4}{-\sqrt{9+64}} = \frac{-22}{-\sqrt{73}} \approx 2.58$$

La distancia es aproximadamente de 2.58 unidades lineales.

Ejercicio 18.

18.1 Encuentra la distancia de la recta $-3x + 5y - 2 = 0$ al punto $M = (-4, -5)$

18.2 Encuentra la distancia de cada vértice del triángulo $A = (-2, -3)$, $B (3,4)$ y $C = (4,-5)$ a su lado opuesto respectivo.

50. AREA DE UN TRIANGULO

Vamos a ver la manera de encontrar el área de un triángulo en base a las coordenadas de sus vértices.

Este procedimiento involucra el uso de los determinantes, pues el método es el siguiente:

$$A_T = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

, debiéndose tomar el valor absoluto del determinante.

Problemas resueltos.

1) Encuentra el área del triángulo:

$M = (-2, -4)$, $N = (2,5)$ y $C = (4, -3)$

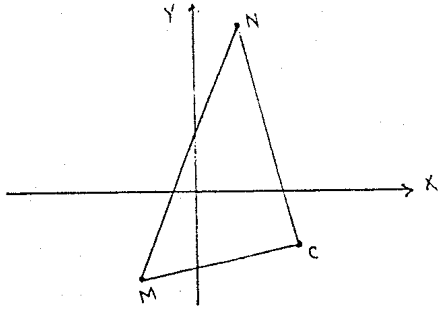
Resolución.

$$A_T = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \\ 4 & -3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = \frac{-2(5)+2(-3)+4(-4)-(-2)(-3)-4(5)-2(-4)}{2}$$

$$= \frac{-10 -6 -16 -6 -20 + 8}{2} = \frac{-50}{2} = -25$$

$A_T = |-25| = 25$

Verificación geométrica.



Midiendo la base MC y multiplicándola por la altura del triángulo, sobre dos vemos que 25 unidades cuadradas es el resultado apropiado del área.

Ejercicio 19.

Encuentra el área de los siguientes triángulos.

19.1 El área del triángulo: M = (0,0), B = (3,2) y P = (4,0)

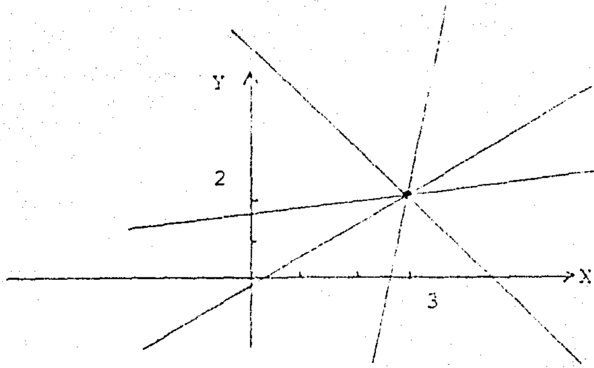
19.2 El área del triángulo :R = (-4,-2) J=(5,-3) y Q = (0,-5)

51. FAMILIA DE RECTAS (HAZ)

Sabemos que una recta está determinada por dos datos que pueden ser: dos puntos, o bien, un punto y su pendiente. Cuando las rectas solamente cumplen con una condición constante para todas, se forma una familiade recta, a la que llamaremos haz de rectas.

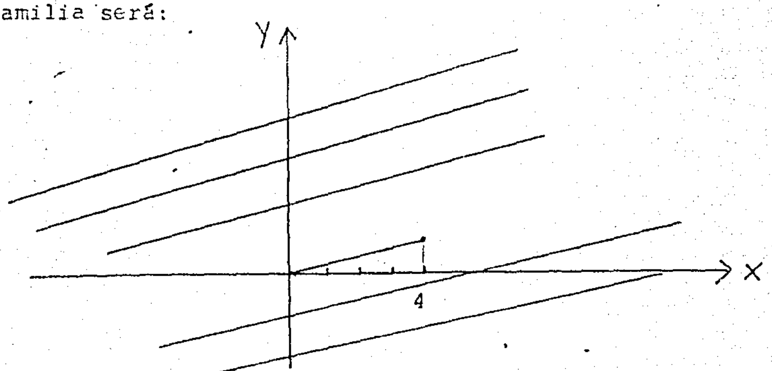
a) Veamos el caso de que todas pasen por el punto (3,2)

La familia será:



b) Cuando las rectas tengan pendiente $m = \frac{1}{4}$

La familia será:



Esta "condición única" aparece como constante en las ecuaciones de las rectas que forman a la familia.

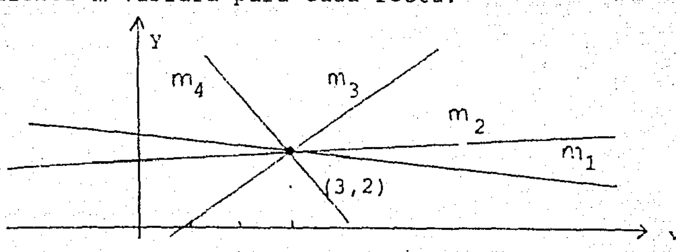
a) Para el caso de que todas pasen por el punto (3,2), la ecuación de cada una de ellas será:

$$y - y_1 = m\ (x - x_1\ )$$

$$y - 2 = m\ (x - 3)$$

$$mx - y - 3m + 2 = 0$$

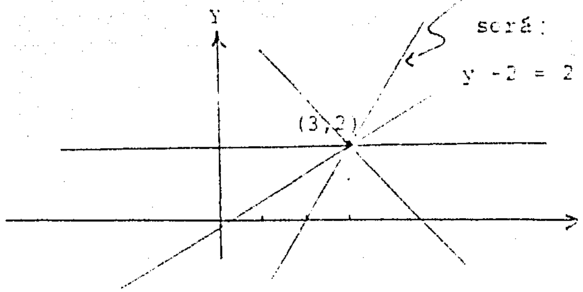
donde la pendiente m variará para cada recta.



Por ejemplo:

Para $m = 2$, su ecuación será:

$y - 2 = 2\ (x - 3)$



b) Para el caso de que todas tengan la misma pendiente $m = \frac{1}{4}$, la ecuación de cada una de èllas será:

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

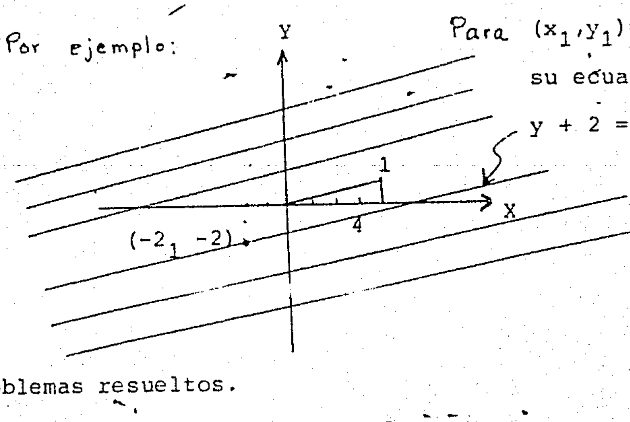
$$y - y_1 = \frac{1}{4}\ (x - x_1)$$

Para dar con alguna recta en especial, necesitamos obtener la otra condición faltante.

Por ejemplo:

Para $(x_1, y_1) = (-2, -2)$, su ecuación será:

$y + 2 = \frac{1}{4}\ (x + 2)$

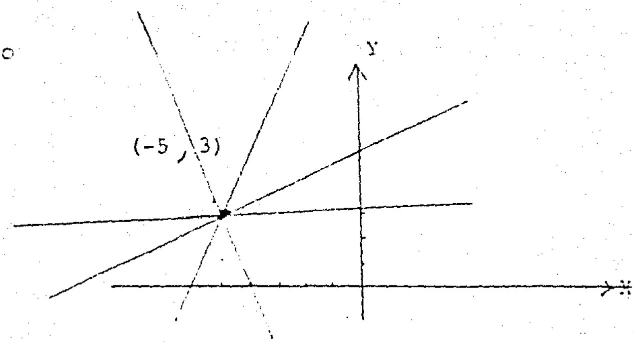


Problemas resueltos.

Traza las siguientes familias de rectas.

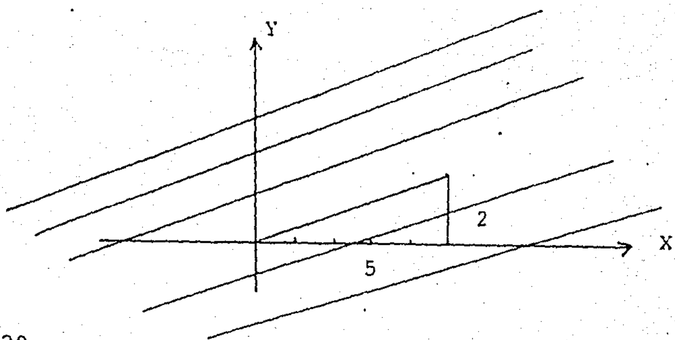
1) $y - 3 = m\ (x + 5)$

Trazo



2) $y - y_1 = \frac{2}{5} \quad (x - x_1)$

Trazo



Ejercicio 20

Traza las siguientes familias de rectas:

20.1 $y - 2 = m\ (x + 8)$

20.2 $y - y_1 = \frac{3}{4} \ (x - x_1)$

PROBLEMAS RESUELTOS.

1) Determinar el valor del parámetro K de manera que la

recta de la familia $4x - Ky - 3 = 0$ que le corresponda, sea perpendicular a la recta $7x + 3y - 5 = 0$. Una vez encontrado el valor del parámetro K, escribir su ecuación correspondiente.

Análisis. En primer lugar debemos entender el concepto "parámetro", como la constante de la familia de rectas.

Para encontrar el valor de este parámetro nos ayudaremos de la otra recta $7x + 3y - 5 = 0$ sabiendo que entre sí son perpendiculares.

Esto nos permitirá encontrar el valor de la pendiente de la recta $4x - Ky - 3 = 0$.

Resolución.

La pendiente de la recta $7x + 3y - 5 = 0$ es $m_1 = \frac{-7}{3}$. Por lo tanto la pendiente de la recta $4x - Ky - 3 = 0$ será

$m_2 = \frac{3}{7}$, por ser ambas perpendiculares.

Pero la pendiente de la recta $4x - Ky - 3 = 0$ incluyendo el parámetro K, es $m_2 = \frac{4}{K}$,

Por lo tanto $\frac{4}{K} = \frac{3}{7}$ $\therefore$ $K = \frac{28}{3}$,

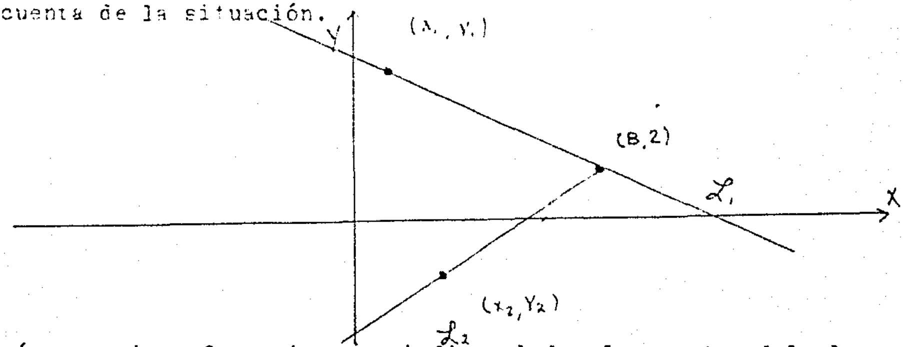
finalmente la ecuación $4x - Ky - 3 = 0$ será $4x - \frac{28}{3}y - 3 = 0$.

Quitando denominadores: $12x - 28y - 9 = 0$.

2. La distancia de una recta al origen es 4.

La recta pasa por el punto (8,2) Encontrar su ecuación.

Análisis . Siempre es conveniente realizar un dibujo para darse mejor cuenta de la situación.



Se trazón una circunferencia para indicar todos los puntos del plano que están a una distancia de 4 unidades. Por geometría sabemos que el radio de una circunferencia es perpendicular a la tangente en su punto de tangencia.

Vemos que son dos rectas las que deben cumplir con la condición del problema.

Resolución. De la figura podemos obtener las siguientes ecuaciones.

a) La ecuación general de la recta que pasa por el punto de tangencia (X_1, Y_1) es $Ax_1 + By_1 + C = 0$

b) La ecuación de la recta que contiene al radio y que pasa por el punto de tangencia $(x_1 y_1)$ y es perpendicular a la recta $Ax_1 + By_1 + C = 0$ es $Bx_1 - Ay_1 = 0$

c) Despejando y de (b) $y = \dfrac{Bx_1}{A}$

d) La relación entre los coeficientes A, B y C de la recta que pasa por

(8, 2) . . . . $8A + 2B + C = 0$

e) La relación de la distancia entre la recta $Ax + By + C = 0$ y el punto (0,0) . . . . $C = 4\sqrt{A^2 + B^2}$

A lo que tenemos que llegar es a encontrar los valores de los coeficientes A, B y C,

Para eso, tenemos que encontrar las relaciones entre las ecuaciones anteriores para llegar al resultado deseado.

Veamos:

Relacionando (e) con (d), tenemos:

$$8A + 2B + 4\sqrt{A^2 + B^2} = 0,$$

$$8A + 2B = -4\sqrt{A^2 + B^2}$$

$$64A^2 + 32AB + 4B^2 = 16A^2 + 16B^2$$

$$48A^2 + 32AB - 12B^2 = 0$$

$$12A^2 + 8AB - 3B^2 = 0$$

$$A = \frac{-8B \pm \sqrt{64B^2 + 144B^2}}{24}$$

$$A = \frac{-2B \pm B\sqrt{13}}{6}$$

$$A = \frac{(-2 \pm \sqrt{13})\,B}{6}$$

Substituyendo este valor en (c) $y = \frac{Bx_1}{A}$,

tenemos: $$y_1 = \frac{Bx_1}{\frac{(-2 \pm \sqrt{13})\ B}{6}}$$

$$y_1 = \frac{6x_1}{-2 \pm \sqrt{13}}$$, de donde B = 6 y $A = -2 \pm \sqrt{13}$

Substituyendo estos valores en (d) $8a + 2B + C = 0$, tenemos: Para $-2+\sqrt{13}$, $(-2 + \sqrt{13})^{-}\ 8 + 12 + C = 0$, $c = 4 - 8\sqrt{13}$. Substituyendo los valores de A, B y C en $Ax + By + C = 0$, tenemos:

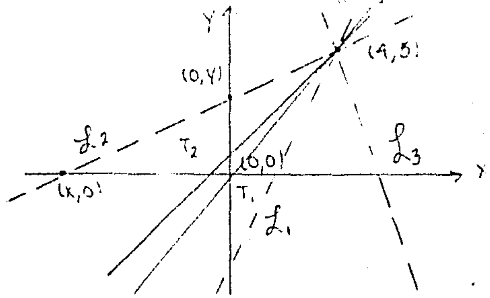
$(-12 + \sqrt{13}\ )\ x + 6y + 4 - 8\sqrt{13}\ = 0$ Siendo ésta la ecuación de una de las rectas, la otra se encuentra considerando $-2-\sqrt{13}$, obteniendo: $(-2 - \sqrt{13}\ )x + 6y + 4 + 8\sqrt{13} = 0$

Puedes verificar estos resultados de las ecuaciones trazando sus gráficas.

Nota. Para resolver este tipo de problemas se necesita intuición, basada en la experiencia. Muchas veces estos problemas tienen más de una manera de resolverlos.

3) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las rectas $5x - 4y = 0$, $x - y + 1 = 0$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de área 6.

Análisis. Es conveniente hacer un dibujo para analizar mejor el problema



Encontramos que las rectas se intersectan en el punto (4,5).

De las tres rectas (familias) que pasan por el punto (4,5), las únicas que tienen posibilidad de formar con los ejes un triángulo de área seis son $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$; ya que el área del triángulo formado por la (familia de) recta $\mathcal{L}_3$ siempre será mayor de 20. Ahora, los vértices, por ejemplo, (x,0), (0,y) y (0,0) de los triángulos formados con las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ sus coordenadas x,y siempre tendrán signo diferente, lo cual conduce a que su producto tenga signo negativo. El área de cada triángulo se encuentra multiplicando la base "x" por la altura "y" entre 2. Según las condiciones del rpoblema.

Resolución.

Para encontrar la ecuación de las rectas solicitadas, consideramos los puntos $(x,0)$ y $(0,y)$, observando que las pendientes de estos puntos con el punto $(4,5)$ deben ser iguales.

Por lo tanto podemos establecer la siguiente ecuación:

$\frac{y-5}{-4} = \frac{-5}{x-4}$, resolviéndola,

$(y-5)(x-4) = 20$

$xy - 4y - 5x + 20 - 20 = 0$

$5x + 4y - xy = 0$

Por otro lado, según las condiciones del problema, sabemos que:

$\frac{xy}{2} = -6$, de donde,

$xy = -12$, $x = \frac{-12}{y}$

Relacionando estas ecuaciones, tenemos:

$5\left(\frac{-12}{y}\right) + 4y + 12 = 0$, resolviendo,

$-60 + 4y^2 + 12y = 0$

$y^2 + 3y - 15 = 0$. Al resolver esta ecuación cuadrática vamos a obtener dos valores para la "y", lo cual era de esperarse ya que serán dos rectas las que cumplan con las condiciones del problema.

$$y_{12} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+60}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{69}}{2}$$

$$y_1 = \frac{-3 + \sqrt{69}}{2} \quad , \quad y_2 = \frac{-3 - \sqrt{69}}{2}$$

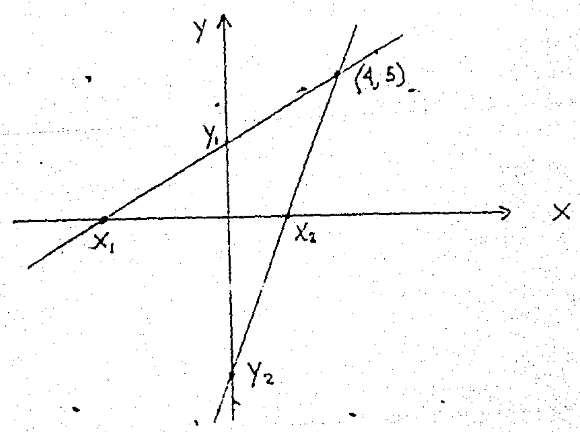
$$x_1 = \frac{-12}{\frac{-3+\sqrt{69}}{2}} = \frac{-24}{-3+\sqrt{69}}; \quad x_2 = \frac{-12}{\frac{-3-\sqrt{69}}{2}} = \frac{-24}{-3-\sqrt{69}}$$

Para verificar que $\frac{1}{2}\left|x_1\ y_1\right| = 6$, es decir, el valor absoluto del semiproducto de la base por la altura, ya que el área siempre es una cantidad no negativa, realizamos la operación:

$$\frac{1}{2}\left|x_1\ y_1\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{-24}{-3+\sqrt{69}} \cdot \frac{-3+\sqrt{69}}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{-12}{1}\right| = \frac{12}{2} = 6$$

Debe suceder lo mismo para $\frac{1}{2}\left|X_2\ Y_2\right|$.

Para ubicarnos en la localización de X_1, Y_1 ; X_2 , Y_2, los trazamos de manera aproximada en los ejes.



$$X_1 = \frac{-24}{-3+\sqrt{69}} = \frac{-24}{5.3} = -4.52$$

$$Y_1 = \frac{-3+\sqrt{69}}{2} = \frac{5.30}{2} = 2.65$$

$$X_2 = \frac{-24}{-3-\sqrt{69}} = \frac{-24}{-11.3} = 2.12$$

$$Y_2 = \frac{-3-\sqrt{69}}{2} = \frac{-11.3}{2} = -5.65$$

Las ecuaciones de las rectas son (considerando los puntos (4,5) y $(0,\frac{-3+\sqrt{69}}{2}))$:

$$y-5 = \frac{\frac{-3+\sqrt{69}}{2} - 5}{-4}(x-4)$$

$$-4y + 20 = \frac{-3+\sqrt{69} - 10}{2} \quad (x-4)$$

$$-8y + 40 = (-13+\sqrt{69})\ (x-4)$$

$$-8y + 40 = (-13+\sqrt{69})\,x - 4(\sqrt{69}-13)$$

$$(13-\sqrt{69})\ x - 8y + 40 + 4\ (\sqrt{69}-13) = 0$$

Ahora considerando los puntos (4,5) y

$(\frac{-24}{-3-\sqrt{69}}\ ,\ 0)$ para la otra ecuación:

$$y-5 = \frac{-5}{\frac{24}{3+\sqrt{69}} - 4}\ (x-4)$$

$$y-5 = \frac{-5}{\frac{24-12-4\sqrt{69}}{3+\sqrt{69}}}\ (x-4)$$

$$y - 5 = \frac{-15 \quad -5\sqrt{69}}{12 \quad -4\sqrt{69}} \quad (x - 4)$$

$$(12 - 4\sqrt{69})\ y - 60 + 20\sqrt{69} = -x\ (15+5\sqrt{69}) + 60 + 20\sqrt{69}$$

$$(15 + 5\sqrt{69})\ x + (12 - 4\sqrt{69})\ y - 120 = 0$$

Con el siguiente ejercicio de problemas damos por terminado el tema de línea recta.

Ejercicio 21. Problemas

1. Encuentra la ecuación de la recta cuya pendiente es -4 y pasa por el punto de intersección de las rectas $4x + 2y - 16 = 0$ y $3x - 2y + 9 = 0$

Sol. $4x + y - 10 = 0$

2. El punto M de ordenada 10 está sobre la recta cuya pendiente es $\frac{6}{2}$ y pasa por el punto $B = (7, -2)$. Calcula la abscisa de M.

Sol. $x = 11$

3. Determina el valor de los coeficientes A y B de la recta $Ax - By + 4 = 0$ que pasa por los puntos $C = (-3,1)$ y $D = (1,6)$

Sol. $A = \frac{20}{19}$, $B = \frac{16}{19}$

4. Encuentra la ecuación general de la recta que es perpendicular a la recta $3x - 4y + 11 = 0$ y pasa por el punto $(-1, -3)$

Sol. $4x + 3y + 13 = 0$

5. Encuentra el ángulo agudo formado por las rectas

$4x - 9y + 11 = 0$ y $3x + 2y - 7 = 0$

Sol. $80°16'$

6. Los vértices de un triángulo son

(1,1), (4, 7) y (6,3). Demuestra que el baricentro (punto de intersección de las medianas), el circuncentro (punto de intersección de las mediatrices) y el ortocentro (puntos de intersección de las alturas), son colineales. **(Ve las definiciones anteriores al problema 12)**

7. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,1) y su distancia al punto (-1,1) es $2\sqrt{2}$.

Sol. $x + y - 4 = 0, \quad x - y - 2 = 0$

8. Encuentra la ecuación de la recta cuyos puntos equidistan de las rectas paralelas $12x - 5y + 3 = 0$ y $12x - 5y - 6 = 0$

Sol. $24x - 10y - 3 = 0$

9. Encuentra la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por las rectas:

$x - 2y - 4 = 0$ y $4x - y - 4 = 0$

Sol. $(\sqrt{17} + 4\sqrt{5})x - (2\sqrt{17} + \sqrt{5})y - 4\sqrt{17} - 4\sqrt{5} = 0$

10. Determinar el valor del parámetro K, correspondiente a la recta de la familia $5x - 12y + K = 0$, cuya distancia del origen es igual a 5. Encuentra la ecuación de la recta correspondiente.

Sol. $5x - y - 13 = 0$

11. Una recta pasa por la intersección de las rectas cuyas ecuaciones son: $3x + 2y + 8 = 0$ y $2x - 9y - 5 = 0$. Hallar su ecuación sabiendo que esparalela a la recta $6x - 2y + 11 = 0$

Sol. $3x - y + 5 = 0$

Todo triángulo tiene tres mediatrices, tres medianas y tres alturas Sus definiciones son las siguientes:

Mediatriz. Perpendicular del lado en su punto medio.
Mediana. Segmento que va del punto medio del lado al vértice opuesto.
Altura. Segmento perpendicular al lado (o su prolongación) y que va al vértice opuesto.

12. Encuentra las ecuaciones de las mediatrices de cada uno de los lados del triángulo cuyos vértices son:

$A = (-4,5)$ $B = (3,2)$ y $C = (9,2)$

Sol. $13x - 3y - 22 = 0$, respecto del lado AC
$7x - 3y + 14 = 0$, respecto del lado AB
$x - 6 = 0$, respecto del lado BC

13. Encuentra las ecuaciones de las medianas del triángulo del ejercicio 12.

Sol. $3x + y - 11 = 0$, respecto del lado AC
$3x + 19y - 65 = 0$, respecto del lado AB
$3x + 10y - 38 = 0$, respecto del lado BC

14. Encuentra las ecuaciones de las alturas de l triángulo del ejercicio 12.

Sol. $13x - 3y - 33 = 0$, respecto del lado AC
$7x - 3y - 57 = 0$, respecto del lado AB
$x + 4 = 0$, respecto del lado BC

15. Encuentra las coordenadas del circuncentro del triángulo del ejercicio 12.

Sol. $(6, 18\frac{2}{3})$

16. Encuentra las coordenadas del baricentro.

Sol. $(\frac{8}{3}, 3)$

17. Encuentra las coordenadas del ortocentro.

Sol. $(-4, -28\frac{1}{3})$

Los tres puntos, incentro, baricentro y ortocentro, de un triángulo son colineales. La línea que los une se llama recta de Euler.

18. Encuentra la ecuación de la recta de Euler respecto del triángulo del ejercicio 12.

Sol. $141X - 30y - 286 = 0$

19. Una recta pasa por el punto $A = (2, \frac{4}{3})$ y forma con los ejes coordenadas un triángulo de perímetro igual a 12. Encuentra su ecuación.

Sol. $4x + 3y - 12 = 0$ y $8x + 15y - 36 = 0$

20. Una recta pasa por la intersección de las rectas $7x - 2y = 0$ y $4x - y - 1 = 0$ y es perpendicular a la recta $3x + 8y - 19 = 0$.

Encuentra su ecuación. Sol. $8x - 3y + 5 = 0$

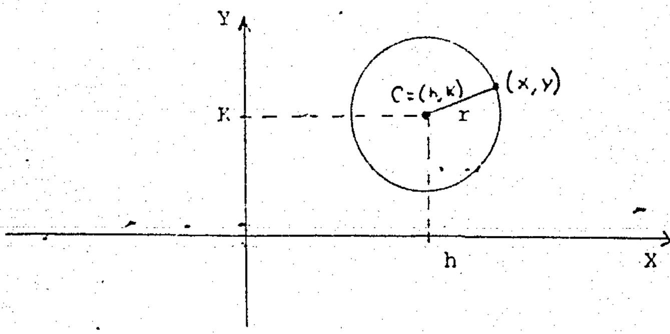
CAPITULO [illegible]

CIRCUNFERENCIA. La circunferencia como lugar geométrico, se define así:

Circunferencia es el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto llamado centro. La distancia del centro a cualquiera de sus puntos se llama radio.

Para encontrar la ecuación que determine las condiciones entre las coordenadas (x,y) de los puntos del plano, que pertenezcan a la circunferencia, se usa la definición de la misma junto con la fórmula para la distancia entre dos puntos.

Veamos como: Tracemos una circunferencia de radio r y centro $C = (h,k)$



La distancia el centro $C = (h,K)$ y el punto $P = (x,y)$ está r entre dado por la fórmula $r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-K)^2}$, elevando al cuadrado ambos miembros, se obtiene :

52 . . . . $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, siendo

ésta la ecuación ordinaria de la circunferencia de radio r, y centro $C = (h,k)$, dondo el radio r no varía.

Si trasladamos al centro de la circunferencia al origen, se obtiene la ecuación canónica

53 . . . . $x^2 + y^2 = r^2$

Nota. Se llama ecuación ordinaria de una curva, a la que exprese de manera evidente las características principales de la curva y se llama ecuación canónica de una curva a la forma más simple de la ecuación ordinaria.

PROBLEMAS RESUELTOS.

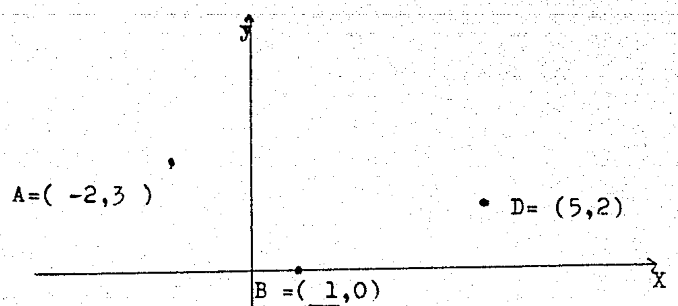
1) Encontrar la ecuación de la circunferencia circunscrita en el triángulo cuyos vértices son:

A= (-2,3) B= (1,0) y D = (5,2)

<u>Análisis</u>. Primero tenemos que saber que "circunferencia circunscrita" significa que pasa por los tres puntos A, B y D, del triángulo. Los trespuntos del triángulo nos sirven para encontrar las mediatrices y su punto de intersección será el centro de la circunferencia. La distancia del centro a cualquiera de los tres puntos nos da el radio , con ésto ya podemos encontrar la ecuación de lacircunferencia.

<u>Resolución</u>.

Trazo de la circunferencia



La ecuación de la mediatriz del lado $\overline{AB}$ se encuentra así: Primero obteniendo la pendiente m_1 de $\overline{AB}$, despues la pendiente m_2 de la mediatriz, y finalmente el punto medio de $\overline{AB}$

$$m_1 = \frac{3 - 0}{-2 -1} = \frac{3}{-3} = -1$$

La pendiente de la mediatriz será $m_2 = 1$

El punto medio del $\overline{AB}$ es

$$x_1 = \frac{-2 + 1}{2} = \frac{-1}{2} \quad , \quad y_1 = \frac{3 + 0}{2} = \frac{3}{2}$$

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{-1}{2} , \frac{3}{2} \right)$$

Con la pendiente m_2 y el punto $(x_1; y_1)$ podemos encontrar la ecuación de la mediatriz

$$y - \frac{3}{2} = 1 \left(x - \frac{-1}{2}\right)$$

$$y - \frac{3}{2} = x + \frac{1}{2}$$

$$2y - 3 = 2x + 1$$

$$2x - 2y + 4 = 0$$

$x - y + 2 = 0$ Esta es la ecuación de la mediatriz

La ecuación de la mediatriz del lado $\overline{BD}$ se encuentra similarmente:

$$m_3 = \frac{2 - 0}{5 - 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

La pendiente de la mediatriz será $m_4 = -2$

El punto medio del $\overline{BD}$ es :

$$x_2 = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \; , \; Y_2 = \frac{0 + 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$(x_2, Y_2) = (3,1)$$

Con la pendiente m_4 y el punto (x_2, y_2) podemos encontrar la ecuación de la mediatriz :

$y - 1 = -2 \ (x - 3)$

$y - 1 = -2x + 6$

$2x + y - 7 = 0$. Esta es la ecuación de la mediatriz.

Ahora la intersección C de las dos mediatrices.

$$\begin{array}{l|l} x - y + 2 = 0 & \frac{5}{3} - y + 2 = 0 \\ \underline{2x + y - 7 = 0} & y = \frac{5}{3} + 2 \\ 3x - 5 = 0 & \\ x = \frac{5}{3} & y = \frac{11}{3} \end{array} \qquad C = \left(\frac{5}{3} , \frac{11}{3} \right)$$

La distancia del centro C al punto

B = (1,0) nos dará el radio r.

$$r = \sqrt{\left(1 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{11}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{121}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{125}{9}} = \frac{\sqrt{125}}{3}$$

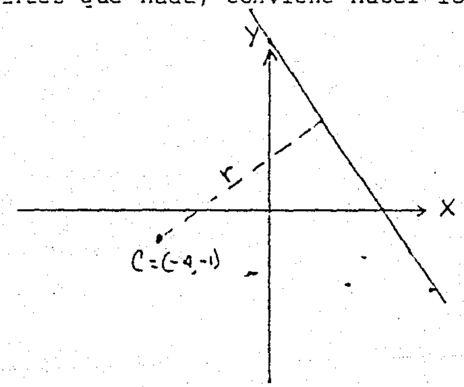
La ecuación de la circunferencia será :

$$\left(x - \frac{5}{3} \right)^2 + \left(y - \frac{11}{3} \right)^2 = \frac{125}{9}$$

2) Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto (-4,-1) y es tangente a la recta $3x + 2y - 12 = 0$

Análisis. Ya tenemos el centro $C = (-4,-1)$ pero nos falta conocer alguno de sus puntos para encontrar el radio. Por geometría elemental sabemos que la recta tangente a la circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia. Conociendo la ecuación de la recta que contiene al radio y luego su intersección con la tangente, obtenemos un punto de la circunferencia. Con esto ya podemos encontrar la ecuación ordinaria.

Resolución. Antes que nada, conviene hacer los trazos que podamos:



Para obtener la ecuación de la recta que contiene al radio usamos el recíproco de la pendiente de la recta y el centro C.

La pendiente de la recta $3x + 2y - 12 = 0$ es

$m = \frac{-3}{2}$. Su recíproca es $m_1 = \frac{2}{3}$

La ecuación será:

$y - (-1) = \frac{2}{3} \; (x - (-4) \;)$

$y + 1 = \frac{2}{3} \; (x + 4)$

(Continua al reverso)

$3y + 3 = 2x + 8$

$2x - 3y + 5 = 0$

Para encontrar las coordenadas del punto de tangencia obtenemos la intersección de las rectas $3x + 2y - 12 = 0$ y $2x - 3y + 5 = 0$

$$3x + 2y - 12 = 0$$

$$2x - 3y + 5 = 0$$

Multiplicando la primera ecuación por -2 y la segunda por 3, obtenemos:

$$-6x - 4y + 24 = 0$$

$$6x - 9y + 15 = 0$$

$$-13y + 39 = 0$$

$$y = \frac{-39}{-13} = 3$$

Para encontrar la x:

$$2x - 3(3) + 5 = 0$$

$$2x - 9 + 5 = 0$$

$$x = \frac{9 - 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

El punto de intersección es $P = (2,3)$

El radio lo encontramos obteniendo la distancias del centro al punto de tangencia P

$$d = \sqrt{(-4 - 2)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} \approx 7.2$$

La ecuación de la circunferencia será:

$$(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 52$$

3) Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre el eje Y y pasa por los puntos

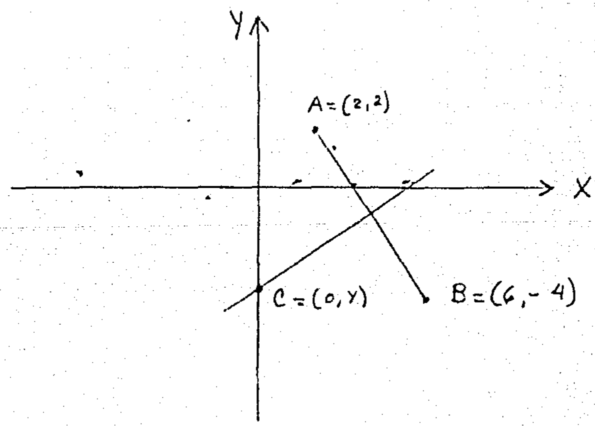
A = (2,2) y B = (6, -4)

<u>Análisis</u>. Aquí nos dan dos puntos de la circunferencia y su centro.

Sabemos por geometría elemental que la mediatriz de una cuerda de la circunferencia pasa por el centro.

Encontrando la intersección de la mediatriz con el eje Y sabemos las coordenadas del centro, y con esto la ecuación de la circunferencia.

<u>Resolución</u>. Primero realizamos el trazo de todo lo que podamos.



Para encontrar

La ecuación de la mediatriz, encontramos el punto medio del $\overline{AB}$ y su pendiente.

$$x_1 = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4, \qquad Y_1 = \frac{2+(-4)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

P. Medio = (4, -1)

Pendiente; $M = \frac{-4 -2}{6 -2} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$,

La recíproca: $m_1 = \frac{2}{3}$

La ecuación de la mediatriz:

$y - (-1) = \frac{2}{3} \quad (x -4)$

$y + 1 = \frac{2}{3} \quad (x -4)$

$3y + 3 = 2x \quad -8$

$2x - 3y - 11 = 0$

La intersección de la mediatriz con el eje Y.

$2x - 3y - 11 = 0$

$x = 0$

$y = \frac{-11}{3}$

Intersección: $(0, \frac{-11}{3}) = C$

El radio mide:

$$r = \sqrt{(0 -2)^2 + (\frac{-11}{3} -2)^2} = \sqrt{4 + \frac{289}{9}} = \sqrt{\frac{325}{9}}$$

La ecuación de la circunferencia:

$$(x - 0)^2 + (y - (\frac{-11}{3}))^2 = \frac{325}{9}$$

$$x^2 + (y + \frac{11}{3})^2 = \frac{325}{9}$$

4. La ecuación de una circunferencia es $(x + 2)^2 + (y -3)^2 = 5$.

Pendiente; $M = \frac{-4\ -2}{6\ -2} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$,

La recíproca: $m_1 = \frac{2}{3}$

La ecuación de la mediatriz:

$y - (-1) = \frac{2}{3} \quad (x - 4)$

$y + 1 = \frac{2}{3} \quad (x - 4)$

$3y + 3 = 2x \quad -8$

$2x - 3y - 11 = 0$

La intersección de la mediatriz con el eje Y.

$2x - 3y - 11 = 0$

$x = 0$

$y = \frac{-11}{3}$

Intersección: $(0, \frac{-11}{3}) = C$

El radio mide:

$$r = \sqrt{(0 - 2)^2 + (\frac{-11}{3} - 2)^2} = \sqrt{4 + \frac{289}{9}} = \sqrt{\frac{325}{9}}$$

La ecuación de la circunferencia:

$$(x - 0)^2 + (y - (\frac{-11}{3}))^2 = \frac{325}{9}$$

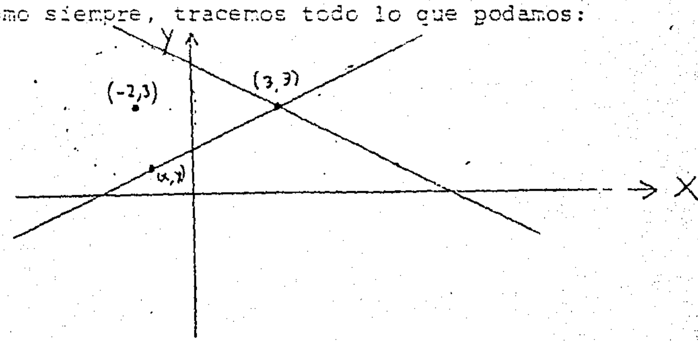
$$x^2 + (y + \frac{11}{3})^2 = \frac{325}{9}$$

4. La ecuación de una circunferencia es $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

Encontrar las coordenadas de su centro, la longitud de su radio y la ecuación de la tangente a ella en y que pasa por el punto (3,3)

Análisis . Como tenemos la ecuación ordinaria, saltan a la vista las coordenadas del centro y la longitud del radio. La ecuación de la tangente la encontramos sabiendo que es perpendicular al radio en el punto de tangencia.

Resolución. Como siempre, tracemos todo lo que podamos:



De la figura nos podamos dar cuenta de que van a ser dos tangentes.

Tomando el punto (x,y) como punto de tangencia, podemos obtener la pendiente del radio y la de la tangente, que por ser perpendiculares su producto tiene que ser -1.

$$\frac{y-3}{x+2} \cdot \frac{y-3}{x-3} = -1$$

$$(y-3)^2 = -1\ (x+2)\ (x-3)$$

$(y-3)^2 = -x^2 + x + 6$. Pero la ecuación de la circunferencia es:

$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$, de donde,

$(y - 3)^2 = 5 - (x - 2)^2$. Igualando $(y - 3)^2$,

nos queda:

$- x^2 + x + 6 = 5 - (x + 2)^2$

$-x^2 + x + 6 = 5 - x^2 - 4x - 4$

$-x^2 + x + 6 - 1 + x^2 + 4x = 0$

$5x + 5 = 0$

$x = -1$

Substituyendo $x = -1$ en

$(y - 3)^2 = 5 - x^2 - 4x - 4$, tenemos:

$(y - 3)^2 = 5 - 1 + 4 - 4$

$(y - 3)^2 = 4$

$y - 3 = \pm 2$

$y = \pm 2 + 3$, $y_1 = 5$, $y_2 = 1$

Por lo tanto los dos puntos de tengencia serán: $(-1,5)$ y $(-1,1)$

La pendiente de la tangente que pasa por $(-1,5)$ es:

$\frac{3 - 5}{3 - (-1)} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$, por lo tanto su

ecuación será : $y - 5 = \frac{-1}{2} (x + 1)$

$2y - 10 = -x - 1$

$x + 2y - 9 = 0$

La pendiente de la tangente que pasa por $(-1,1)$ es:

$\frac{+ 1 - 3}{-1 - 3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$, por lo tanto su ecuación será: $y - 3 = \frac{1}{2} \quad (x - 3)$

$2y - 6 = x - 3$

$x - 2y + 3 = 0$

EJERCICIO 22

22.1 Escribe la ecuación de la circunferencia de centro $C = (-2,5)$ y radio 8.

22.2 Encuentra la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C = (7, -6)$ y pasa por el punto $A = (2,2)$

Sol. $(x-7)^2 + (y+6)^2 = 89$

22.3 Una circunferencia tiene su centro en el punto $C = (0,-2)$ y es tangente a la recta $5x - 12y + 2 = 0$. Encuentra su ecuación.

Sol. $x^2 + (y+2)^2 = 4$

22.4 Respecto del triángulo cuyos vértices son $A = (-1,0)$, $B = (2, \frac{9}{4})$ y $C = (5,0)$, resuelve lo siguiente:

22.4A Encuentra la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el vértice A y es tangente al lado $\overline{BC}$.

Sol. $(x+1)^2 + y^2 = \frac{324}{25}$

22.4B Encuentra la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Sol. $(x-2)^2 + (y + \frac{7}{8})^2 = \frac{625}{64}$

22.4C Encuentra la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo.

Sol. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

22.4D Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo.

Sol. $(x-2)^2 + (y - \frac{25}{16})^2 = \frac{625}{256}$

22.4E Comprueba que la circunferencia del ejercicio 22-4D pasa por los pies de las alturas del triángulo.

22.5 Una circunferencia pasa por los puntos $A = (-3,3)$ y $B = (1,4)$. Su centro está sobre la recta $3x - 2y - 23 = 0$. Encúentra su ecuación.

Sol. $(x-2)^2 + (y+ \frac{17}{2})^2 = \frac{629}{4}$

22.6 Encuentra la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta $6x + 7y - 16 = 0$ y es tangente a cada una de las rectas $8x + 15y + 7 = 0$ y $3x - 4y - 18 = 0$.

Sol. $(x-5)^2 + (y + 2)^2 = 1$,

$(x-3)^2 + (y + \frac{2}{7})^2 = \frac{121}{49}$

54. Ecuación general de la circunferencia.

Desarrollando la ecuación ordinaria de la circunferencia $(x-h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, obtenemos:

$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$, la cual puede escribirse en la forma

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

en donde

$D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 - k^2 - r^2$

lo cual representará a una circunferencia solamente si $D^2+E^2-4F > 0$.

Las coordenadas del centro son:

$C = \left(\frac{-D}{2} , \frac{-E}{2} \right)$ y el radio $r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$

Este resultado se obtiene empleando el método de completar cuadrados y convirtiendo la ecuación general a la forma - ordinaria.

Problemas Resueltos.

1) Reducir a la forma ordinaria de la circunferencia la ecuación general $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$, **encontrando su centro y su radio.**

Análisis. Debemos observar que en la forma general de la circunferencia no tienen coeficientes los términos en x^2 y y^2; por lo tanto tenemos que dividir entre dos a la ecuación.

Luego completar trinomios cuadrados perfectos y pasar al miembro derecho los términos independientes.

Resolución.

$2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$ (Dividiendo entre 2):

$x^2 + y^2 - 3x + 5y + \frac{7}{2} = 0$

$x^2 - 3x + y^2 + 5y = \frac{-7}{2}$, (Completando trinomio cuadrado perfecto):

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 + 5y + \frac{25}{4} = \frac{-7}{2} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}$$

$(x - \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = 5$ Forma ordinaria.

Centro $C = \left(\frac{3}{2} , \frac{-5}{2} \right)$, radio $r = \sqrt{5}$

2) Encuentra la longitud de la cirunferncia anterior.

Análisis. Con la longitud del radio encontramos rápidamente su perímetro

Resolución. $P = 2 \pi r$

$P = 2\ (3.14)\ (\sqrt{5}) \doteq 14.04$

3) Demostrar que las circunferencias:

$4x^2 + 4y^2 - 16x + 12y + 13 = 0$ y

$12x^2 + 12y^2 - 48x + 36y + 55 = 0$, son concéntricas.

Análisis. Concéntricas quiere decir que tienen el mismo centro. Obteniendo la forma ordinaria de ambas ecuaciones sabremos si tienen el mismo centro.

Resolución. Obtengamos las ecuaciones ordinarias.

$4x^2 + 4y^2 - 16x + 12y + 13 = 0$ (Dividiendo entre 4):

$x^2 + y^2 - 4x + 3y + \frac{13}{4} = 0$, (completando el trinomio cuadrado perfecto)

$(x - 2)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{12}{4}$ $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 3y + \frac{9}{4} = -\frac{13}{4} + 4 + \frac{9}{4}$

$C_1 = (2 , \frac{-3}{2})$

$12x^2 + 12y^2 - 48x + 36y + 55 = 0$ (Dividiendo entre 12):

$$x^2 + y^2 - 4x + 3y + \frac{55}{12} = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 3y + \frac{9}{4} = \frac{-55}{12} + 4 + \frac{9}{4}$$

$$(x - 2)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{+20}{12}$$

$$C_2 = (2 , \frac{-3}{2})$$

Vemos que efectivamente son concéntricos.

4) ¿Qué condiciones deben cumplir las circunferencias

$$x^2 + y^2 + D_1 X + E_1 Y + F_1 = 0 \quad y$$

$x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 Y + F_2 = 0$, para que sean concéntricas ?

Análisis. Tenemos que convertir las ecuaciones a su forma ordinaria para obtener las coordenadas de los centros, y así, descubrir las condiciones necesarias.

Resolución.

$x^2 + y^2 + D_1 X + E_1 y + F_1 = 0$ (Completando trinomios cuadrados perfectos):

$$x^2 + D_1 X + \frac{D_1^2}{4x^2} + y^2 + E_1 y + \frac{E_1^2}{4y^2} = -F_1 + \frac{D_1^2}{4x^2} + \frac{E_1^2}{4y^2}$$

$$\left(x + \frac{D_1}{2x} \right)^2 + \left(y + \frac{E_1}{2y} \right)^2 = -F_1 + \frac{D_1^2}{4x^2} + \frac{E_1^2}{4y^2}$$

De aquí obtenemos las coordenadas del centro:

$$c = \left(\frac{-D_1}{2x} , \frac{-E_1}{2y} \right)$$

De la misma manera obtenemos las coordenadas del centro para la segunda ecuación.

$$C = \left(\frac{-D_2}{2x} , \frac{-E_2}{2y} \right)$$

Para que sea concéntricas, las abscisas y ordenadas tienen que ser iguales ∴.

$$\frac{-D_1}{2\ x} = \frac{-D_2}{2x} \quad \therefore \quad D_1 = D_2 \quad y,$$

$$\frac{-E_1}{2y} = \frac{-E_2}{2y} . \quad \therefore \quad E_1 = E_2$$

Estas son las condiciones para que las circunferencias sean concéntricas.

5) Demostrar que las circunferencias

$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 23 = 0$ y

$x^2 + y^2 - 8x - 10\ y + 25 = 0$ son tangentes.

Análisis. Que sean tangentes las circunferencias significa que se tocan en un solo punto. Esto a su vez significa que solamente un punto (x, y) del plano cumple con las dos ecuaciones.

Encontrémoslo resolviendo las dos ecuaciones simultáneamente.

Resolución

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 23 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 25 \quad 0$$

Restando la (2) de la (1), tenemos:

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 + 4x + 6y - 23 = 0 \\ -x^2 - y2 + 8x + 10y - 25 = 0 \\ \hline 12x + 16y - 48 = 0 \end{array}$$

$$y = \frac{48 - 12x}{16}$$

$$y = \frac{12 - 3x}{4}$$

Sustituyendo en (1) tenemos:

$$x^2 + \left(\frac{12 - 3x}{4}\right)^2 + 4x + 6\left(\frac{12 - 3x}{4}\right) - 23 = 0$$

$$x^2 + \frac{144 - 72x + 9x^2}{16} + 4x + \frac{72 - 18x}{4} - 23 = 0$$

$$16x^2 + 144 - 72x + 9x^2 + 64x + 288 - 72x - 368 = 0$$

$$25x^2 - 80x + 64 = 0$$

$$x = \frac{-(-80) \pm \sqrt{(-80)^2 - 4(25)(64)}}{2(25)}$$

$$x = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 6400}}{50} = \frac{80}{50} = \frac{8}{5}$$

Por lo tanto: $y = \dfrac{12 - 3x}{4} = \dfrac{12 - 3\left(\frac{8}{5}\right)}{4} = \dfrac{12 - \frac{24}{5}}{4} =$

$$y = \frac{\frac{60 - 24}{5}}{4} = \frac{36}{20} = \frac{9}{5}$$

En el punto $\left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$ está el punto de tangencia. Para comprobarlo necesitamos substituir este punto en las dos ecuaciones para ver si las satisface . Veamos:

$$\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{8}{5}\right) + 6\left(\frac{9}{5}\right) - 23 = 0\ ?$$

$$\frac{64}{25} + \frac{81}{25} + \frac{32}{5} + \frac{54}{5} - 23 \overset{?}{=} 0$$

$\dfrac{64}{25} + \dfrac{81}{25} + \dfrac{160}{25} + \dfrac{270}{25} - \dfrac{575}{25} = 0$. Veámoslo en la otra ecuación.

$$\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2 - 8\left(\frac{8}{5}\right) - 10\left(\frac{9}{5}\right) + 25 \overset{?}{=} 0$$

$$\frac{64}{25} + \frac{81}{25} - \frac{64}{5} - \frac{90}{5} + 25 \overset{?}{=} 0$$

$$\frac{64}{25} + \frac{81}{25} - \frac{320}{25} - \frac{450}{25} + \frac{625}{25} = 0$$

$\therefore \left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$ sí es el punto de tangencia.

Ejercicio 23.

23.1 Reduce a la forma ordinaria la ecuación general

$$4x^2 + 4y^2 - 12x + 20y + 14 = 0$$

Sol. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = 5$.

23.2 Determina la ecuación general, ecuación ordinaria, centro y radio de la circunferencia que pasa por los puntos

$A = (2, -2)$, $B = (-1, 4)$ y $C = (4, 6)$

Sol. $6x^2 + 6y^2 - 32x - 25y - 34 = 0$

$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{25}{12}\right)^2 = \frac{2465}{144}$$

$C = \left(\frac{8}{3}, \frac{25}{12}\right)$, $\quad r = \frac{\sqrt{2465}}{12}$

23.3 Dos puntos siempre están sobre una circunferencia

Tres puntos no colineales siempre están sobre una circunferencia.

Cuatro puntos no colineales $B_1 = (x_1, y_1)$, $B_2 = (x_2, y_2)$, $B_3 = (x_3, y_3)$ y $B_4 = (x_4, y_4)$ estarán sobre una circunferencia

$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$, si por ternas, sus coordenadas cumplen el determinante

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Cuatro puntos se llaman concíclicos

si pertenecen a una misma circunferencia.

Usa el determinante anterior para saber si los puntos $(-1, -1)$, $(2, 8)$, $(5, 7)$ y $(7, 3)$ son concíclicos.

23.4 La ecuación de una circunferencia es $4x^2 + 4y^2 - 16x + 20y + 25 = 0$. Encuentra la ecuación de la circunferencia concéntrica a ésta y que es tangente a la recta $5x - 12y - 1 = 0$

Sol. $(x - 2)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = 9$

23.5 Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-1, -4)$, $(2, -1)$ y cuyo centro está sobre la recta

$4x + 7y + 5 = 0$

Sol. $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 29$

23.6 Una circunferencia de radio $\sqrt{13}$ es tangente a la circunferencia

$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 47 = 0$ en el punto (6,5)

Encuentra su ecuación.

Sol. $(x - 8)^2 + (y - 8)^2 = 13$, $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 13$

23.7 Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto (5, 9) y es tangente a la recta $x + 2y - 3 = 0$ en el punto (1, 1).

Sol. $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 20$

23.8 Una circunferencia de radio 5 pasa por los puntos (0, 2) y (7, 3). Encuentra su ecuación.

Sol. $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$, $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 25$

23.9 Demuestra analíticamente que cualquier recta que pase por el punto (-1,5) no puede ser tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6 = 0$. Interpreta el resultado geométricamente.

23.10 Encuentra la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta $7x - 2y - 1 = 0$ y que es tangente a cada una de las rectas $5x - 12y + 5 = 0$ y $4x + 3y - 3 = 0$

Sol. $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$, $\left(X - \frac{227}{747}\right)^2 + \left(y - \frac{421}{747}\right)^2 = \left(\frac{14}{747}\right)^2$

55. FAMILIA DE CIRCUNFERENCIAS.

Para que una circunferencia quede determinada, se necesitan tres condiciones independientes;

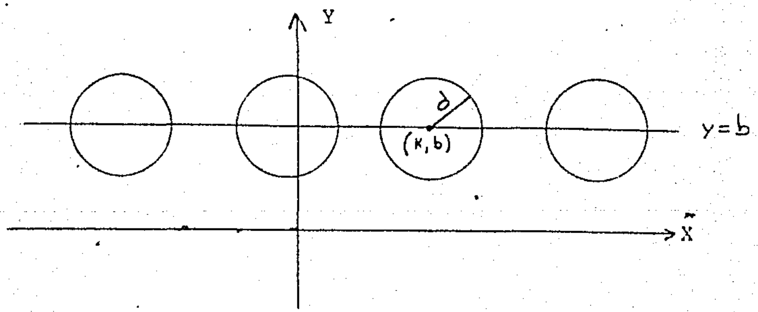
la abscisa y la ordenada de su centro, así como su radio.

Otras tres condiciones determinantes de una circunferencia pueden ser tres puntos B_1 , B_2 y B_3.

Cuando falta una de estas tres condiciones y las otras dos quedan fijas, entonces se obtiene un parámetro K, que al ser variable conduce a una familia de circunferencias.

¿Qué tipo de familias de circunferencias podemos obtener?

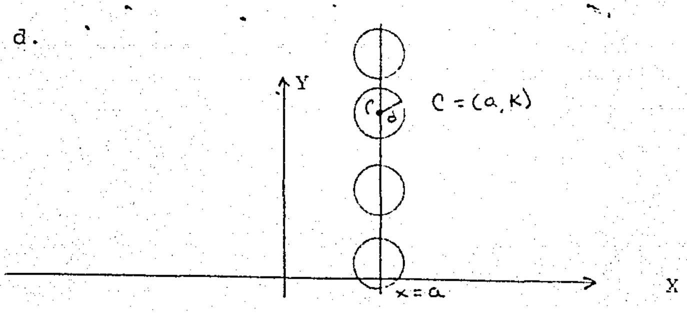
a) Supongamos que el parámetro K sea la abscisa del centro de la circunferencia, entonces la familia sería: $C = (K, b)$ y $r = d$, una familia de circunferencias



cuyo centro va a estar sobre la recta $y = b$, y de radio d.

La ecuación de la familia será: $(x - K)^2 + (y - b)^2 = d^2$

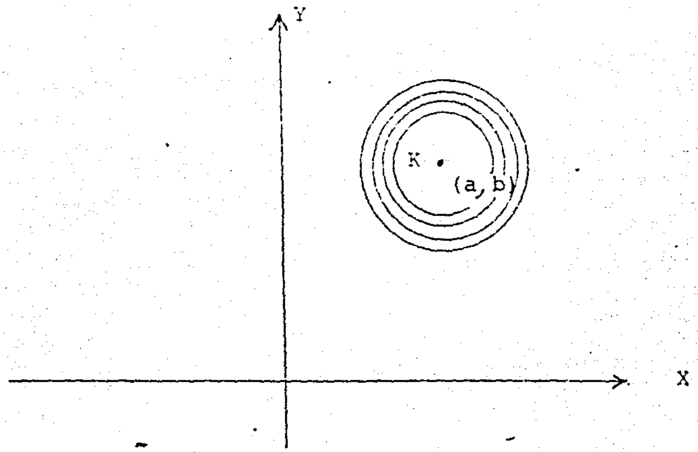
b) Supongamos que el parámetro K sea la ordenada del centro de la circunferencia, entonces la familia sería: $C = (a, k)$, $r = d$.



Una familia de circunferencias con el centro sobre la recta x = a y de radio d.

La ecuación de la familia será $(x - a)^2 + (y - k)^2 = d^2$

c) Supongamos que el parámetro fuera el radio $r = K$; entonces la familia sería : $C = (a, b)$, $r = K$

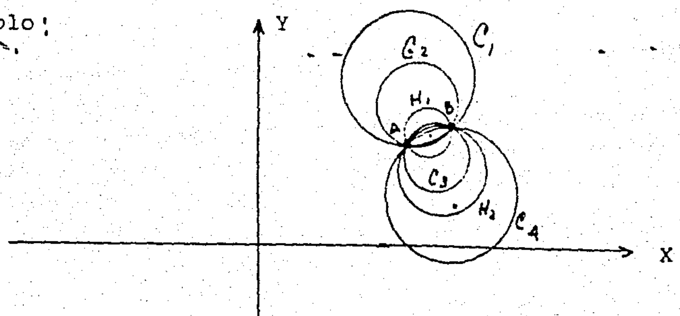


Una familia de circunferencias concéntricas.

La ecuación de la familia será

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = K^2$

d) Otro caso importante de familias de circunferencias son las que pasan por dos puntos A y B , por ejemplo:



Geométricamente vemos que los centros son colineales. Vamos a analizarlo analíticamente.

Sean sus puntos de intersección $A = (x_1 , y_1)$ y $B = (x_2 , y_2)$. Cualquier circunferencia que pase por los puntos A y B tendrá su centro en la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ (ver geometría).

La ecuación de esta mediatriz es

$$2y - y_1 - y_2 = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} (2x - x_1 - x_2)$$ **¡ Compruébalo !**

PROBLEMAS RESUELTOS

1) Encontrar la ecuación de la familia de circunferencias cuyo centro es $C = (5 , K)$ y radio = 8.

<u>Análisis</u>. Teniendo las coordenadas del centro y el radio, la ecuación resulta inmediata.

<u>Resolución</u>.

$$(x - 5)^2 + (y - K)^2 = 64$$

2) Encontrar la ecuación de la familia de circunferencias cuyo centro es $C = (6 , 8)$ y radio $r = K$.

<u>Resolución</u>

$$(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = K^2$$

3) Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por las intersecciones de las circunferencias:
$x^2 + y^2 + 7x - 10y + 31 = 0$, $x^2 + y^2 - x - 6y + 3 = 0$
y tiene su centro sobre la recta $x - y - 2 = 0$.

Análisis. Si tiene su centro sobre la recta $x - y - 2 = 0$ entonces encontrando la intersección de esta recta con la mediatriz del segmento formado por las intersecciones de las circunferencias, encontraremos las coordenadas del centro. Finalmente encontrando el radio obtendremos la ecuación correspondiente.

Resolución

Primero tenemos que encontrar las intersecciones de las circunferencias.

$$\begin{array}{rl} x^2 + y^2 + 7x - 10y + 31 = 0 & \\ -x^2 - y^2 + x + 6y - 3 = 0 & \text{(se cambió de signo)} \\ \hline 8x - 4y + 28 = 0 & \\ 2x - y + 7 = 0 & \text{(se sacó cuarta)} \\ y = 2x + 7 & \end{array}$$

$x^2 + (2x + 7)^2 + 7x - 10(2x + 7) + 31 = 0$ (Se substituyó en la primera ecuación)

$x^2 + 4x^2 + 28x + 49 + 7x - 20x - 70 + 31 = 0$

$5x^2 + 15x + 10 = 0$

$x_1 = -1$, $x_2 = -2$

$y_1 = 5$, $y_2 = 3$

Los dos puntos de intersección son:

(-1,5) y (-2,3)

La ecuación de la mediatriz será:

$$2y - 5 - 3 = \frac{-1 + 2}{3 - 5}(2x + 1 + 2), \text{ quedando}$$

$2x + 4y - 13 = 0.$ (Ecuación de la mediatriz)

Encontrando la intersección de las dos rectas sabremos las coordenadas del centro.

$2x + 4y - 13 = 0$

$x - y - 2 = 0$...(multiplicando por 4, se obtiene):

$2x + 4y - 13 = 0$
$4x - 4y - 8 = 0$

Resolviendo este sistema tenemos:

$$x = \frac{7}{2}, \quad y = \frac{3}{2}$$

Siendo las coordenadas del centro $C = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Encontrando la distancia del centro al punto (-1,5) obtendremos el radio.

$$d = \sqrt{\left(\frac{7}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 5\right)^2} = \sqrt{\frac{130}{4}} = \sqrt{\frac{65}{2}}$$

Por lo tanto la ecuación de la circunferencia será:

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}$$

Existe una manera más sencilla de encontrar la ecuación de la familia de circunferencias que pasan por la intersección de dos circunferencias dadas. Consiste en incluir un parámetro K, evitando así encontrar primero la intersección de las dos circunferencias.

Veamos cómo.

Sean las dos circunferencias que se intersectan:

$$x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0 ,$$

$$x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0$$

Sabemos que en una ecuación, al multiplicar ambos miembros o sumar por la misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente. Por lo tanto, si sumamos el miembro izquierdo de la primera ecuación por un múltiplo K del primer miembro de la segunda ecuación, seguiremos obteniendo cero como resultado.

Esto es:

$$x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 + K (x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2) = 0$$

Si las circunferencias se cortan en los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), entonces ambos puntos cumplirán las tres ecuaciones. Reduciendo términos semejantes, obtenemos:

$$(K + 1) x^2 + (K + 1)y^2 + (D_1 + KD_2) x + (E_1 + KE_2) y + F_1 + KF_2 = 0$$

Dividiendo entre K + 1, obtenemos:

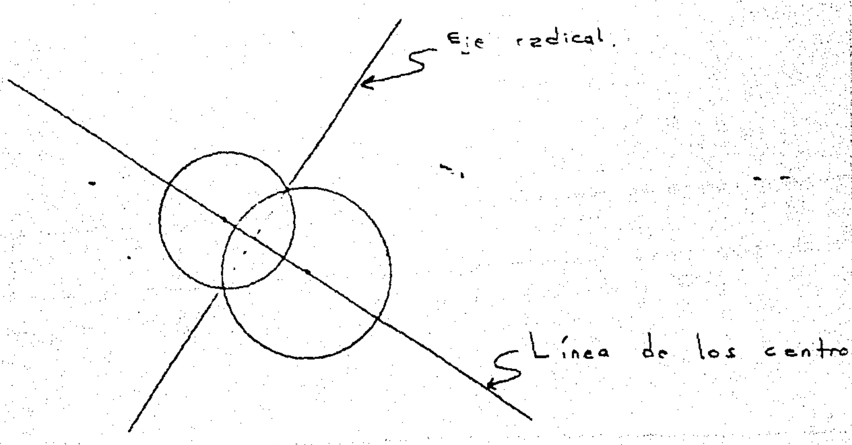
$$x^2 + y^2 + \frac{D_1 + KD_2}{K + 1}\, x + \frac{E_1 + KE_2}{K + 1}\, y + \frac{F_1 + K F_2}{K + 1} = 0$$

Como los coeficientes D_i, E_i y F_i cumplen la condición $D_i^2 + E_i^2 - 4F_i > 0$ para que las ecuaciones sean circunferencias, (i=1,2) también los coeficientes con denominador K + 1, cumplirán la condición para que la última ecuación sea una circunferencia. El parámetro K puede tomar todos los valores reales menos, evidentemente, el -1.

Curiosamente en la penúltima ecuación al tomar K el valor de -1, se obtiene la ecuación.

$$(D_1 - D_2)\, x + (E_1 - E_2)\, y + F_1 - F_2 = 0$$

que no es la de una circunferencia, sino la de una recta que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias, conteniendo a la cuerda común y siendo perpendicular a la línea de los centros, se llama Eje Radical:



4) Determinar la ecuación de la familia de circunferencias que pasan por las intersecciones de las circunferencias

$x^2+y^2+7x-10y+31=0$ y $x^2+y^2-x-6y+3=0$

Encuentra también la ecuación de eje radical .

Análisis.

Ya sabemos cuál es la ecuación, solo necesitamos/substituir / encontrar y los valores de los coeficientes D_i, E_i y F_i para obtener la ecuación de la familia. Y substituyendo $K = -1$ en la ecuación, después de quitar denominadores, obtendremos la ecuación del eje radical.

Resolución. Ecuación de la familia de circunferencias que pasan por los puntos de intersección de dos circunferencias.

$$x^2 + y^2 + \frac{D_1 + KD_2}{K+1}x + \frac{E_1 + KE_2}{K+1}y + \frac{F_1 + K F_2}{K+1} = 0$$

Substituyendo los valores de los coeficientes D_1, D_2, E_1, E_2, F_1 y F_2, obtenemos :

$$x^2 + y^2 + \frac{7-K}{K+1}x + \frac{-10-6K}{K+1}y + \frac{31+3K}{K+1} = 0$$

Quitando denominadores y substituyendo el valor de $K = -1$, obtendremos la ecuación del eje radical.

$$(K+1)x^2 + (K+1)y^2 + (7-K)x + (-10-6K)y + (31+3K) = 0$$

simplificando obtenemos:

$$8x - 4y + 28 = 0$$

$2x - y + 7 = 0$ Ecuación del eje radical

Ejercicio 24.

24.1 Escribe la ecuación de la familia de circunferencias que pasan por el origen.
Sol: $x^2 + y^2 = K^2$

24.2 Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A = (-8, 5)$ y por las intersecciones de las circunferencias

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 17 = 0$ y $x^2 + y^2 - 18x - 4y + 67 = 0$

Sol. $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 33 = 0$

24.3 Demuestra que las circunferencias

$x^2 + y^2 - 3x - 6y + 10 = 0$ y $x^2 + y^2 - 5 = 0$

son tangentes. Encuentra la ecuación de la circunferencia tangente a ellas en su punto de contacto y que pasa por el punto $A = (7, 2)$

Sol. $x^2 + y^2 - 8x - 16y + 35 = 0$

24.4 Encuentra la ecuación del eje radical de las circunferencias.

$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 = 0$ y

$4x^2 + 4y^2 - 32x - 12y + 37 = 0$

Sol. $24x - 28y + 3 = 0$

CAPITULO 7

PARABOLA

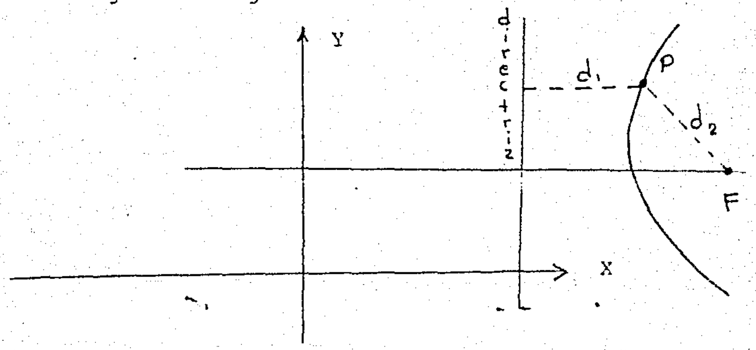
56. Definición de parábola.

Una parábola es el lugar geométrico de un punto P que se mueve en un plano de tal manera que su distancia a una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta.

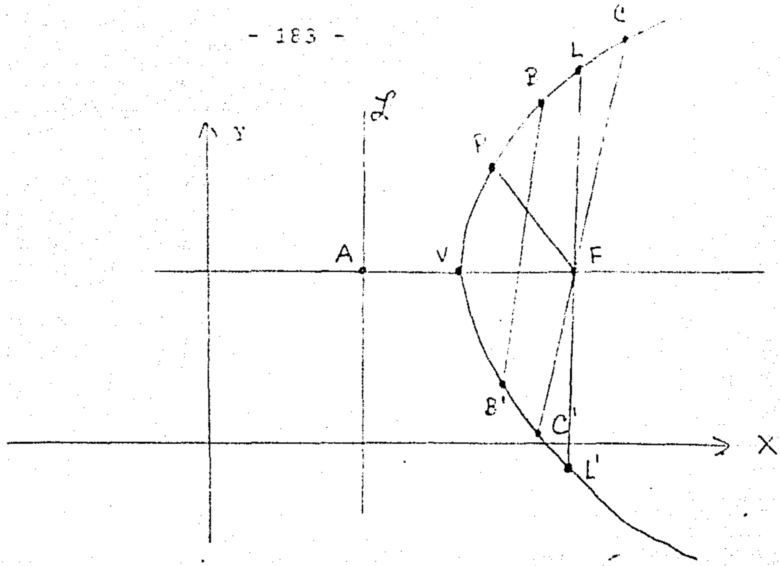
El punto fijo se llama foco y la recta fija, directriz de la parábola.

La definición excluye el caso en que el foco esté sobre la directriz.

Veamos la siguiente figura.



En base a la figura anterior se definen los siguientes trazos. así:



a) Eje de la parábola. Recta que pasa por F y es perpendicular a $\mathcal{L}$.

b) Vértice V: Punto medio del segmento $\overline{AF}$.

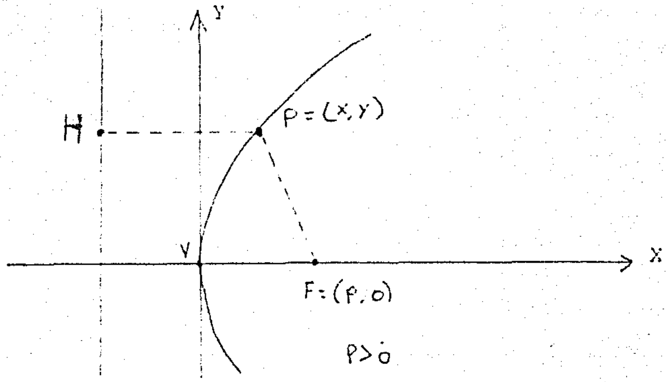
c) Cuerda $\overline{BB'}$: Segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la parábola.

d) Cuerda focal $\overline{CC'}$: Cuerda que pasa por el foco.

e) Lado recto $\overline{LL'}$: Cuerda focal perpendicular al eje.

f) Radio vector o radio focal $\overline{FP}$:
Segmento de recta que une al foco con cualquier punto de la parábola.

57. Ecuación de la parábola.
Analizando su definición y aplicando los conocimientos aprendidos, podemos obtener su ecuación, veamos primero el caso en que el vértice esté en el origen y el eje coincida con el eje X.



De la figura obtenemos inmediatamente los siguientes datos:

Coordenadas del foco: $F = (p, 0)$

Ecuación del eje: $y = 0$

Ecuación de la directriz: $x = -p$.

Sean las coordenadas (x, y) del punto P cualquiera de la parábola.

El segmento $\overline{PH}$ perpendicular a la directriz, mide lo mismo que el segmento $\overline{PF}$, por definición, por lo tanto el punto P debe satisfacer la condición geométrica.

$|PF| = |PA|$, es decir:

$|FP| = \sqrt{(x - p)^2 + (y)^2}$ (distancia entre dos puntos),

$|PA| = |x + p|$

$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = x + p$, elevando al cuadrado ambos miembros, tenemos:

$$(x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2$$

$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 - x^2 - 2xp - p^2 = 0$$

$$-4xp + y^2 = 0$$

$$y^2 = 4px$$

Siendo ésta la condición geométrica que deberán cumplir las coordenadas (x y) de cualquier punto P de la parábola con vértice en el origen. Demos este resultado formalmente en el siguiente teorema.

Teorema. La ecuación de una parábola de vértice en el origen y eje en el eje x, es

$$y^2 = 4px$$

en donde el foco es el punto (p, 0) y la ecuación de la directriz es $x = -p$. Si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha; si $p < 0$, la parábola se abre hacia la izquierda

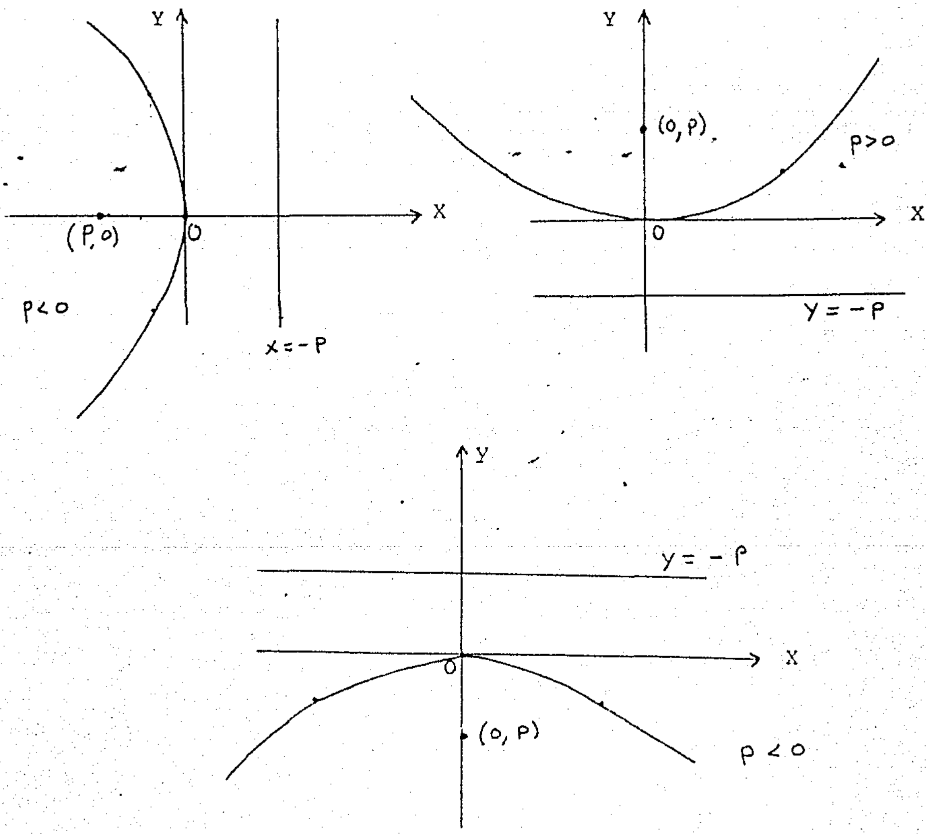
Si el eje de una parábola coincide con el eje Y, y el vértice está en el origen, su ecuación es

$$x^2 = 4py,$$

en donde el foco es el punto (0, p), y la ecuación de la directriz es $y = -p$. Si $p > 0$, la parábola se abre hacia

arriba; si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.
En cada caso, la longitud del lado recto está dada por el valor absoluto de 4p, que es el coeficiente del término de primer grado.

Gráficamente estos resultados se ven así:



Recuerda que si $p < 0$, el signo de p es negativo, por lo tanto el signo de -p será positivo. es decir, $-p > 0$.

Problemas resueltos

1) Encuentra las coordenadas del foco, la ecuación de la

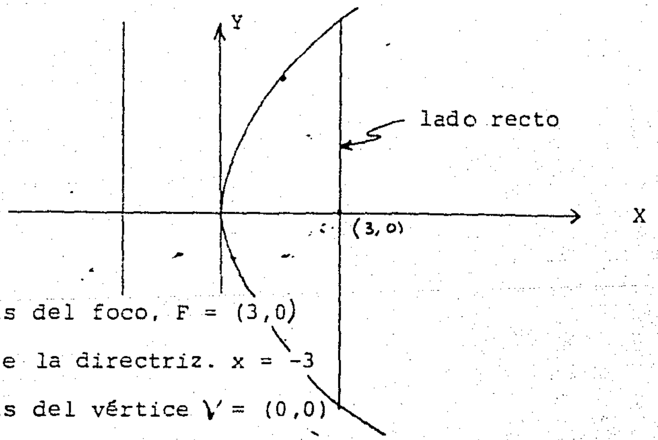
directriz y la longitud del lado recto de la parábola $y^2 = 12X$.

Análisis.

De inmediato se ve que la parábola, por la forma de su ecuación, tiene su vértice en el orígen y su eje sobre el eje X.

Resolución.

La forma de la ecuación $y^2 = 12x$, es $y^2 = 4Px$ por lo tanto, $p = 3$. Con este valor de p, podemos encontrar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz.



Coordenadas del foco, $F = (3,0)$

Ecuación de la directriz. $x = -3$

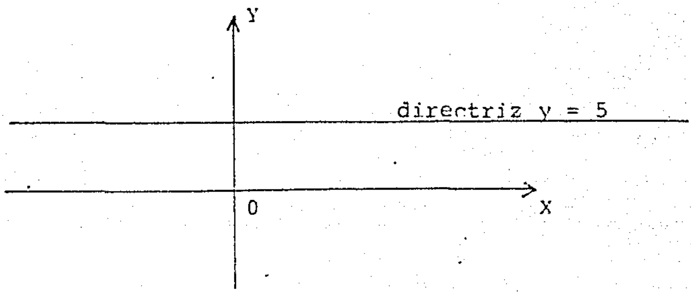
Coordenadas del vértice $V = (0,0)$

La longitud del lado recto está dado por el valor absoluto de 4P, es decir, $|4P| = |12| = 12$

2) Encontrar la ecuación de la parábola que tiene vértice en el origen y como directriz la recta $y - 5 = 0$.

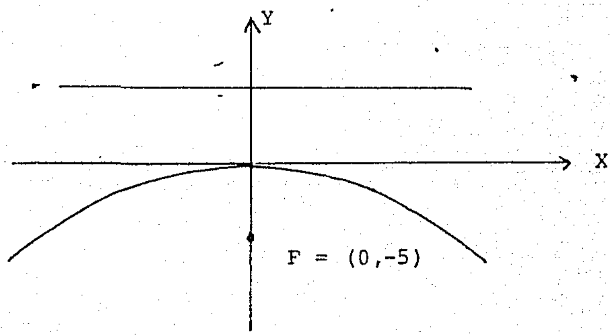
Análisis. Lo que nos va a dar la pauta para saber si la parábola se abre hacia la derecha, la izquierda, arriba o hacia abajo, es la directriz.

Resolución. Tracemos la directriz $y - 5=0$



Con esto sabemos que la parábola se abre hacia abajo y que su foco tiene coordenadas (0,-5), por lo tanto p vale -5.

La parábola queda dibujada así:



Y su ecuación:

$$x^2 = 4(-5)y \text{ , o sea,}$$

$$x^2 = -20y$$

3) Una cuerda de la parábola $y^2 - 4x = 0$ es un segmento de la recta $x - 2y + 3 = 0$.

Encontrar su longitud

Análisis. Tenemos que encontrar la intersección de la recta $x - 2y + 3 = 0$ con la parábola $y^2 = 4x$.
Vamos a obtener dos puntos, su distancia nos dará la longitud de la cuerda.

Resolución.

Para encontrar la intersección de estas dos curvas, substituimos el valor de $x = \frac{y^2}{4}$ en la recta $x - 2y + 3 = 0$

$\frac{y^2}{4} - 2y + 3 = 0$, multiplicando por 4:

$y^2 - 8y + 12 = 0$, resolviéndola;

$(y - 6)(y - 2) = 0$

$y_1 = 6$, $y_2 = 2$, por lo tanto los puntos de intersección serán:

$$\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right), \left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right);$$

$(9, 6)$, $(1, 2)$

La distancia entre estos dos puntos es:

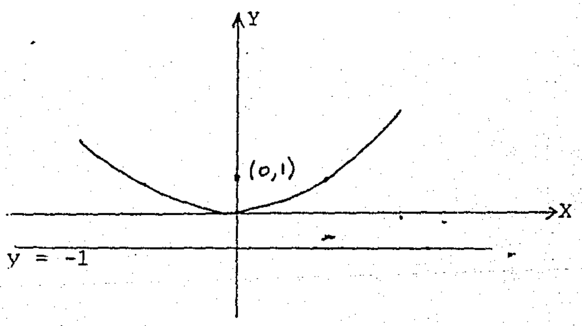
$$d = \sqrt{(9 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{64 + 16}$$

$= \sqrt{80} = \sqrt{16(5)} = 4\sqrt{5}$, por lo tanto, la longitud de la cuerda es $4\sqrt{5}$.

4) Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por el vértice y los puntos extremos del lado recto de la parábola $x^2 - 4y = 0$.

<u>Análisis</u> La circunferencia pasa por tres puntos, con esto ya está definida y podemos encontrar su ecuación. Solo nos falta encontrar los puntos extremos del lado recto.

Resolución. Con la ecuación de la parábola $x^2 = 4y$, podemos trazarla:



Analizando la figura, podemos obtener la ecuación de la recta que contiene al lado recto. Esta ecuación es $y = 1$ Substituyendo este valor en la ecuación $x^2 = 4y$, encontraremos los dos puntos extremos.

$x^2 = 4(1)$, $x^2 = 4$, $x = \pm\sqrt{4}$, $x = \pm 2$.

Los dos puntos extremos serán:

(2,1) y (-2,1)

Para encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por

los tres puntos: (0,0), (2,1) y (-2,1),
observamos que el centro de ésta se encuentra en el eje de la parábola. Por lo tanto sus coordenadas serán (0,y), con $y > 0$.

Ahora bien. la distancia de este punto a cualquiera de los tres es la misma, veamos:

$$d = \sqrt{(0-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{y^2} = y$$

$$d = \sqrt{(0-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{4 + y^2 - 2y + 1} = \sqrt{y^2 - 2y + 5}$$

$\therefore\ y = \sqrt{y^2 - 2y + 5}$, de donde:

$y^2 = y^2 - 2y + 5; \quad -2y + 5 = 0, \quad y = \frac{5}{2}$

La ecuación de la circunferencia será entonces:

$$x^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

Ejercicio 25.

25.1 Encuentra las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto de la ecuación:
$x^2 = 12y$ Solución $F = (0,3)$ $y = -3$ $LR = 12$

25.2 (Ver el reverso de la hoja)

25.3 Encuentra la longitud del radio vector del punto de la parábola $y^2 - 9x = 0$, cuya ordenada es igual a 6.

Sol. $\frac{25}{4}$

25.4 Una circunferencia cuyo centro es C = (4,-1) pasa por el foco de la parábola $x^2 + 16y = 0$. Demuestra que es tangente a la directriz de la parábola.

58. ECUACION DE LA PARABOLA CON VERTICE FUERA DEL ORIGEN.

De la misma manera que obtuvimos la ecuación de la parábola con vértice en el origen, se obtiene la ecuación con vértice fuera del origen.

Estos resultados los podemos resumir en el siguiente teorema.

Teorema. La ecuación de una parábola de vértice $V = (h, K)$ y eje paralelo al eje x, es de la forma:

$(Y - K)^2 = 4p\,(x - h)$, siendo $|p|$ la longitud del segmento del eje comprendido entre el foco y el vértice.

Si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha, si $p < 0$, a la izquierda. Si el vértice $V = (h, K)$ y el eje de la parábola es paralelo al eje Y, su ecuación es de la forma:

$$(x - h)^2 = 4p\,(y - K).$$

Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba; si $p < 0$, hacia abajo.

58 A. Ecuación general de una parábola.

De la misma forma que obtuvimos la ecuación general de una circunferencia, se obtiene la de la parábola. Analicemos el siguiente teorema.

Teorema. La ecuación:

$$Ax^2 + cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa una parábola con eje paralelo al eje X, si $A = 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$.

Si $D = 0$, la ecuación representa dos rectas diferentes paralelas al ejeX, dos rectas paralelas coincidentes al eje X, o ningún lugar geométrico; según las raíces de $Cy^2 + Ey + F = 0$ sean reales y desiguales, reales e iguales o complejas.

Si $A \neq 0$, $C = 0$ y $E \neq 0$, la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje Y.

Si en cambio, $E = 0$, la ecuación representa dos rectas diferentes paralelas al eje Y, dos rectas concidentes paralelas al eje Y o ningún lugar geométrico, según las raíces de $Ax^2 + Dx + F = 0$ sean reales y desiguales, reales e iguales o complejas.

Problemas resueltos.

1. Reducir la ecuación $4y^2 - 48x - 20y = 71$ a la forma ordinaria de la ecuación de la parábola y encontrar las coordenadas del vértice y del foco, las ecuaciones de la directriz y eje, y la longitud del lado recto.

Análisis. La ecuación $4y^2 - 48x - 20y = 71$ corresponde a la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ donde $A = 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$. La ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo o coincidente con el eje X.

Resolución:

Completando a trinomio cuadrado perfecto en y, tenemos.

$$4y^2 - 20y + 25 = 48x + 71 + 25$$

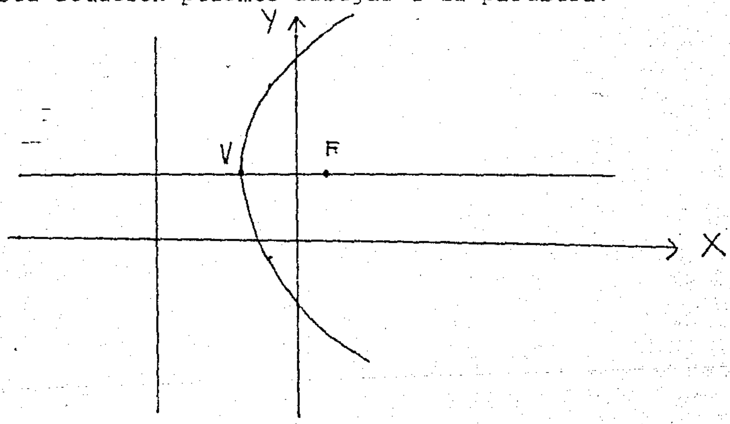
$$y^2 - 5y + \frac{25}{4} = 12x + 24$$

$$\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12x + 24$$

$$\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12\,(x + 2)$$

(Segunda forma ordinaria de la parábola)

Con esta ecuación podemos dibujar a la parábola.



De la figura y la ecuación, obtenemos los siguientes datos:

Vértice $V = (-2, \frac{5}{2})$

Foco $F = (1, \frac{5}{2})$

Ecuación de la directriz: $x = -5$

Ecuación del eje : $y = \frac{5}{2}$

Como $4p = 12$, $p = 3 > 0$,

por lo tanto la parábola se abre hacia la derecha.

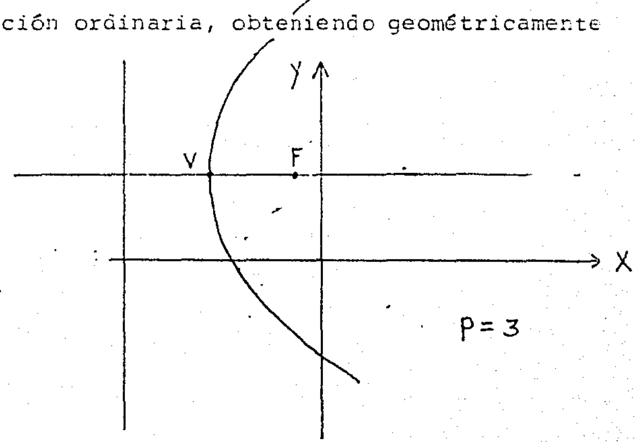
Longitud del lado recto. $|4\,p| = |12| = 12$

2) Encontrar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos $V = (-4,3)$ y $F = (-1, 3)$.

Econtrar también las ecuaciones de su directriz y eje.

Análisis. Teniendo las coordenadas del vértice y foco podemos dibujar, aproximadamente, la parábola y encontrar la forma de su ecuación ordinaria, obteniendo geométricamente el valor de P.

Resolución.



De la figura, obtenemos la forma de su ecuación.

$$(y - K)^2 = 4p (x - h)$$

Substituyendo valores, obtenemos:

$$(y - 3)^2 = 4(3) (x - (-4))$$

$$(y - 3)^2 = 12 (x + 4)$$ (Segunda ecuación ordinaria de la parábola).

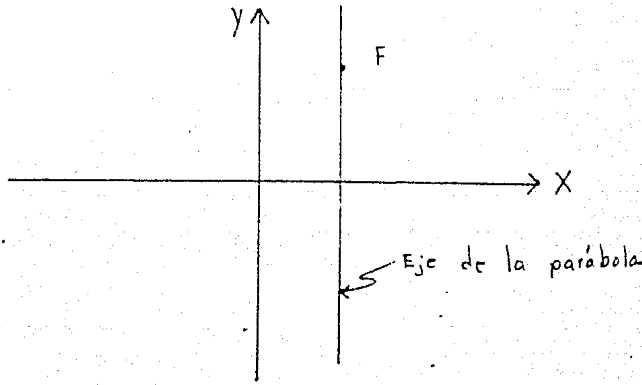
Ecuación de la directriz: $x = \overline{7}$.

Ecuación del eje. $y = 3$

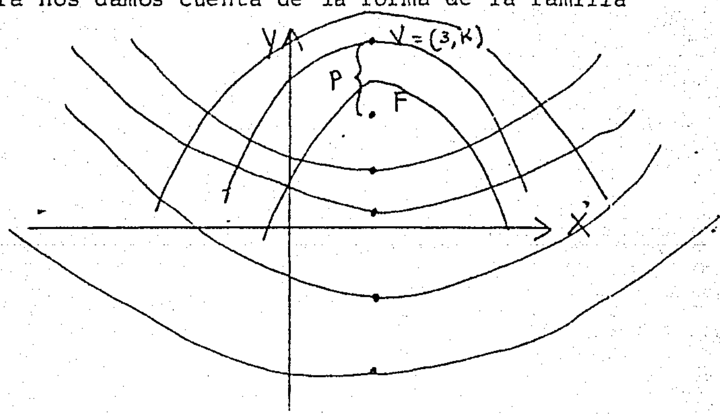
3) Determinar la ecuación de la familia de parábolas que tienen un foco común $F = (3,4)$ y un eje común paralelo al eje Y.

<u>Análisis.</u> Es conveniente, a través de una figura, darnos cuenta de la forma de la familia de parábolas, para que así podamos idenfificar al parámetro.

<u>Resolución</u>



Con esta figura nos damos cuenta de la forma de la familia de parábolas.



Vemos que las coordenadas de los vértices son V = (3,K), donde la K toma todos los valores reales, es decir, para cada K tendremos una parábola distinta.

También de la figura observamos que p = K −4. Si la parábola se abre hacia arriba, $4 > K \therefore \quad P = K-4 < 0$

Si se abre hacia abajo $K - 4 > 0$.

Con esto ya obtenemos la segunda ecuación ordinaria de la parábola:

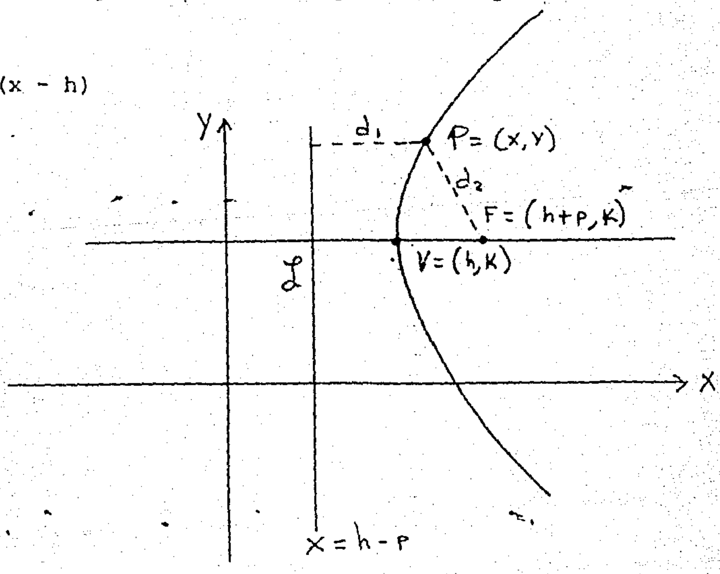
$$(x - 3)^2 = 4\ (4 - K)(y - K)$$

4) Demostrar que la longitud del radio vector de cualquier punto $P_1 = (x_1, Y_1)$ de la parábola, $(y - K)^2 = 4p(x - h)$ es igual a $|x_1 - h + p|$.

Análisis. Sabiendo, por definición de parábola, que la distancia de cualquier punto de la parábola al foco y a la directriz, es la misma, daremos de inmediato con la demostración.

Resolución. Tracemos genéricamente la parábola cuya ecuación es

$(y - K)^2 = 4p\ (x - h)$



Sabemos que $d_1 = d_2$, usando las fórmulas de distancia - respectivas, encontramos:

La distancia del punto P al F, resulta inmediata:

$$d_2 = \sqrt{\left[x_1 - (h + p)\right]^2 + (y_1 - k)^2}$$

Para encontrar la distancia del punto P a la directriz $\mathcal{L}$, tenemos que encontrar primero la ecuación de la directriz, que es: $x - h + p = 0$, donde $A = 1$, $B = 0$ y $C = -h + p$. Substituyendo estos valores en la ecuación

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$, obtenemos

$$d_1 = \frac{|x_1 + (-h + p)|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |x_1 - h + p|$$

Sabiendo que las dos distancias son iguales, nos quedamos con d_1, es decir

$$d = |x_1 - H + p|$$ C QD. (Con lo cual quedó demostrado)

Ejercicio 26.

26.1 Encuentra la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos (3,3) y (3,1), respectivamente.
Encontrar también la ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto.
Sol. $(x - 3)^2 = -8 (y - 3)$; $y = 5$; 8.

26.2 Reduce la siguiente ecuación a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la parábola, encontrando las coordenadas del vértice y del foco, las ecuaciones de la directriz y eje, así como la longitud del lado recto.

Ecuación. $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$

Sol. $(x + \frac{4}{3})^2 = -8y$; $(\frac{-4}{3}, 0)$; $(\frac{-4}{3}, -2)$,

$y = 2$; $x = -\frac{4}{3}$; 8.

26.3 La ecuación de una familia de parábolas es $y = 9x^2+bx$. Encuentra la ecuación del elemento de la familia que pasa por los dos puntos (2,8) y (-1,5).

Sol. $Y = 3x^2 - 2x$

26.4 Encuentra la longitud del radio vector del punto de la parábola $y^2 + 4x + 2y - 19 = 0$ cuya ordenada es igual a 3.

Sol. 5.

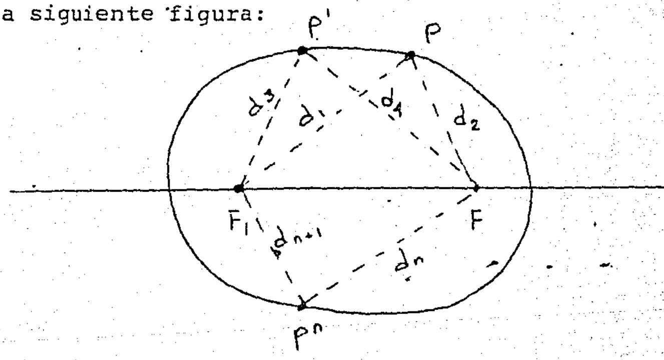
CAPITULO 8

ELIPSE

59. Definición. Elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos.

Nota. La definición excluye el caso cuando el punto móvil está sobre el eje de la elipse.

Veámoslo en la siguiente figura:



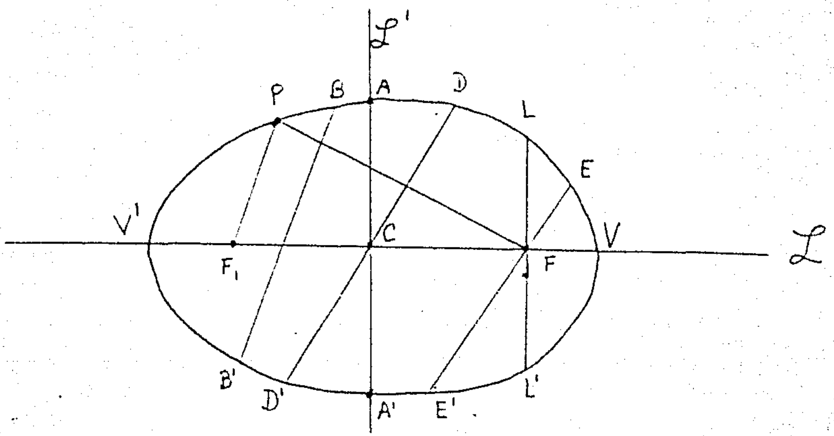
De la definición resulta que

$d_1 + d_2 = K$

$d_3 + d_4 = K,$

$d_n + d_{(n+1)} = K$

Describamos todas las partes que aparecen en un elipse:



Focos. Son los puntos fijos F y F_1.

Eje focal. Recta $\mathcal{L}$ que pasa por los focos.

Vértices. Puntos V y V' en que el eje focal corta a la elipse.

Eje mayor. Porción $\overline{VV'}$ del eje focal comprendida entre los vértices.

Centro. Punto C del eje focal que es el punto medio del segmento que une los focos.

Eje normal. Recta $\mathcal{L}'$ que pasa por el centro C y es perpendicular al eje focal $\mathcal{L}$.

Eje menor. Porción $\overline{AA'}$ del eje normal comprendida entre la elipse.

Cuerda. Segmento $\overline{BB'}$ que une dos puntos cualesquiera de la elipse.

Cuerda focal. Cuerda $\overline{EE'}$ que pasa por uno de los focos.

Lado recto. Cuerda focal $\overline{LL'}$ perpendicular al eje (Evidentemente la elipse tiene dos lados rectos).

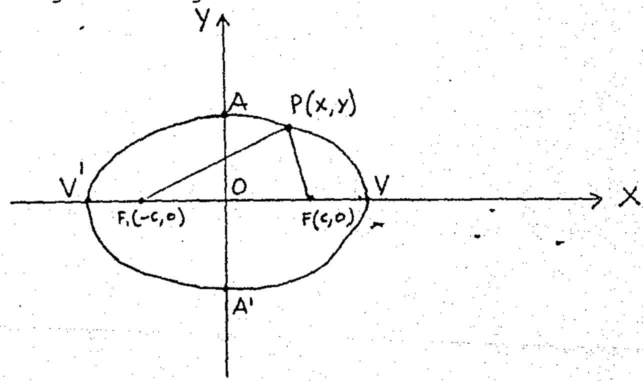
Diámetro. Cuerda $\overline{DD'}$ que pasa por el centro.

Radio vector. Segmento FP o F_1P que une a un foco con cualquier punto.

60. Ecuación ordinaria de una elipse con centro en el origen.

Consideremos a la elipse con centro en el origen y eje focal sobre el eje de las X, los focos F y F_1 están también sobre este eje. Como el centro 0 es el punto medio del segmento $\overline{FF_1}$, las coordenadas de los focos serán $F = (c, 0)$ $F_1 = (-c, 0)$, siendo c una constante positiva.

Veámoslo en la siguiente figura:



Sea P un punto cualquiera de la elipse, por definición, el punto P debe satisfacer la condición geométrica:

$\left|F_1 P\right| + \left|FP\right| = K$, desarrollando, tenemos:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = K$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = K - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$,elevando al cuadrado:

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = K^2 - 2k\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2$$

$$-4xc - K^2 = -2K\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$4xc + k^2 = 2k\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, elevando al cuadrado:

$$16x^2c^2 + 8xck^2 + K^4 = 4k^2\ (x^2 + 2xc + C^2 + y^2)$$

$$16x^2c^2 + 8xck^2 + K^4 - 4k^2x^2 - 8K^2xc - 4K^2C^2 - 4k^2y^2 = 0$$

$$(16c^2 - 4K^2)\,x^2 - 4K^2Y^2 = -k^4 + 4K^2C^2$$

$$(16c^2 - 4k^2)\,x^2 - 4K^2Y^2 = K^2\,(4c^2 - K^2)$$

$$4(4c^2 - K^2)x^2 - 4k^2y^2 = K^2\,(4c^2 - k^2)$$

$$(4c^2 - k^2)x^2 - k^2y^2 = \frac{k^2}{4}\,(4c^2 - K^2)$$

multiplicando por -1, tenemos:

$$(k^2 - 4c^2)\,x^2 + K^2Y^2 = \frac{k^2}{4}\,(k^2 - 4c^2)$$

Como $K > 2C$, $K^2 > 4C^2$ $\therefore 4C^2 - K^2 < 0$ y $K^2 - 4C^2 > 0$

Tomando $K = 2a$, $K^2 = 4a^2$, substituyendo, tenemos:

$$(4a^2 - 4c^2)\,x^2 + 4a^2y^2 = \frac{4a^2}{4}\,(4a^2 - 4c^2),$$

$$(4a^2 - 4c^2)\,x^2 + 4a^2y^2 = a^2\,(4a^2 - 4C^2)$$

Dividiendo entre 4, tenemos:

$$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Tomando $a^2 - c^2 = b^2$, tenemos:

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, dividiento por a^2b^2 , tenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Este resultado lo podemos resumir en el siguiente teorema:

Teorema: La ecuación de una elipse con centro en el origen, eje focal sobre el eje X, distancia focal igual a 2c y cantidad constante K = 2a , es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal coincide con el eje Y, de manera que las coordenadas de los focos sean (0,c) y (0-c),

la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Para cada elipse, a es la longitud del semieje mayor; b, la del semieje menor; y a, b y c estan ligados por la relación

$$a^2 - c^2 = b^2$$

También, para cada elipse, la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$, y la excentricidad(e)está dada por la fórmula

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1.$$

Nota. A estas ecuaciones ordinarias de la elipse también las llamaremos canónicas.

La excentricidad es un número mayor que 0 y menor que 1, que nos dice qué tanto está achatada la elipse.

Problemas resueltos.

1. Encuentra las coordenadas de los vértices y focos; la longitud de los ejes, mayor, menor y lados rectos, así

como la excentricidad de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.

Análisis. Debemos convertir la ecuación a su forma canónica y los resultados se obtienen de inmediato.

Resolución.

Dividamos entre 36 a la ecuación:

$$\frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

De esta forma ordinaria de la elipse obtenemos:

$a = 3, \quad b = 2$

ya que $a^2 = b^2 + c^2$, $C^2 = a^2 - b^2$, $C^2 = 9-4$, $c = \pm\sqrt{5}$

Las coordenadas de los focos son $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$.

Los vértices son $(0,3)$ $(0,-3)$. La longitud del eje mayor es $2a = 6$. La longitud del eje menor es $2b = 4$. La longitud de los lados rectos es $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{3}$, $\frac{8}{3}$

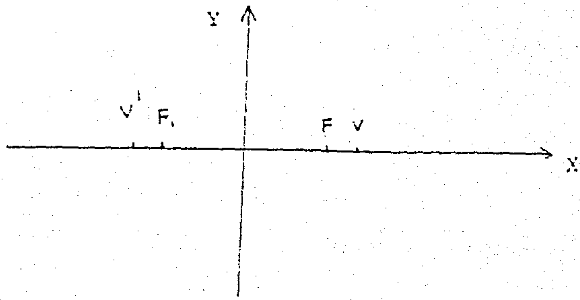
y la excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

2. Encuentra la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos $(4,0)$, $(-4,0)$, y focos, los puntos $(3,0)$ y $(-3,0)$

<u>Análisis</u>. Dibujando / lo que podamos con / los datos obtenemos la forma de la -

elipse, y por lo tanto , de la ecuación

Resolución



Vemos que la elipse tiene su eje mayor sobre el eje X, por lo tanto la forma de la ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La ecuación de la elipse resulta inmediata, después de obtener $c^2 = a^2 - b^2$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

3) Encontrar los radios vectores del punto $(3, \frac{7}{4})$ que está sobre la elipse $7x^2 + 16y^2 = 112$.

Análisis. Los radios vectores de un punto de la elipse - son sus distancias a los focos. Transformando la ecuación a su forma ordinaria y obteniendo C, podremos calcular los radios vectores.

Resolución Dividiendo la ecuación $7x^2 + 16y^2 = 112$ entre

112, tenemos

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

De aquí sabemos que $a^2 = 16$ y $b^2 = 7$, por lo tanto, $a = 4$, y $b = \sqrt{7}$. Con esto podemos calcular C.

$$C = \sqrt{a^2 - B^2} = \sqrt{16 - 7} = \sqrt{9} = 3.$$

Por lo tanto las coordenadas del foco son (-3,0) y (3,0). Calculando las distancias del punto $(3, \frac{7}{4})$ a los focos obtendremos los radios vectores.

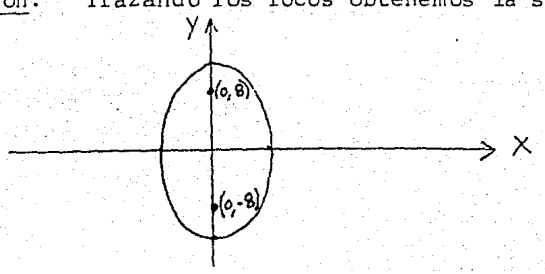
$$r_1 = \sqrt{(3-3)^2 + (\frac{7}{4} - 0)^2} = \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$$

$$r_2 = \sqrt{(3-(-3))^2 + (\frac{7}{4} - 0)^2} = \sqrt{36 + \frac{49}{16}} = \sqrt{\frac{625}{16}} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$$

4) Encontrar la ecuación de la elipse cuyos focos son (0,8) y (0,-8) con longitud del eje mayor de 20 unidades.

Análisis. Con las coordenadas de los focos podemos obtener el valor de C. Con este valor y la fórmula respectiva conoceremos el valor de a.

Resolución. Trazando los focos obtenemos la siguiente figura:



De la figura, y los datos del problema, obtenemos los siguientes valores:

$C = 8, \quad 2a = 20, \ a = 10.$

Usando la fórmula $b^2 = a^2 - c^2$,

tenemos

$b^2 = 100 - 64 = 36 \therefore$ La fórmula será:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$$

Ejercicio 27.

27.1 Encuentra las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor, menor, y la de sus lados rectos, y la excentricidad de la elipse $16x^2 + 25y^2 = 400$

Sol. Vértices (5,0), (-5,0); focos (3,0), (-3,0); $2a = 10$, $2b = 8$, $e = \frac{3}{5}$; longitud del lado recto $= \frac{32}{5}$

27.2 Una elipse tiene su centro en el origen y su eje mayor coincide con el eje x.

Encuentra su ecuación sabiendo que pasa por los puntos

$(\sqrt{6}, -1)$ y $(2, \sqrt{2})$

Sol. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

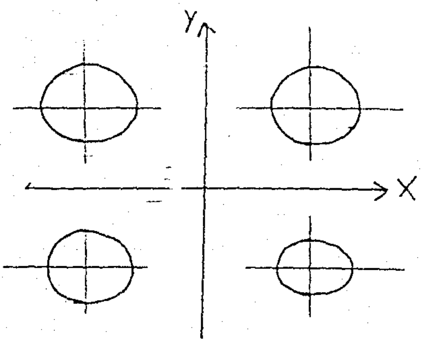
Nota. Si lo necesitas, resuelve el sistema de ecuaciones simultáneas por suma o resta.

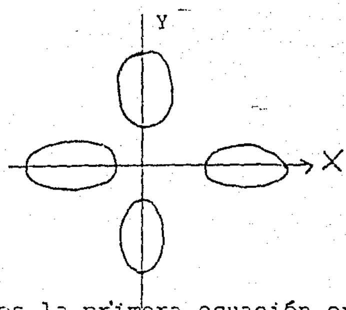
27.3 Si K es un número positivo, demostrar que la ecuación $3x^2 + 4y^2 = K$ representa una familia de elipses, cada una de las cuales tiene excentricidad 1/2.

Nota. Recuerda que a una fracción se le puede dividir el n u- merador y denominador por el mismo número y no se altera.

61. SEGUNDA FORMA ORDINARIA DE LA ECUACIÓN DE UNA ELIPSE, CON CENTRO FUERA DEL ORIGEN.

Cuando el centro de una elipse está fuera del origen, puede tomar cualquiera de las siguientes formas:





De la misma manera que obtuvimos la primera ecuación ordinaria de la elipse, obtenemos la segunda, además de hacer un traslado de ejes y transformación de coordenadas. Este resultado lo podemos resumir en el siguiente teorema.

Teorema. La ecuación de una elipse con centro en el punto $C = (h, K)$ y eje focal paralelo al eje X, está dada por la segunda forma ordinaria:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal es paralelo al eje Y, su ecuación será:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Para cada elipse, a es la longitud del semieje mayor; b, del menor; c, es la distancia del centro a cada foco, y a, b y c están ligados por la relación $a^2 = b^2 + c^2$

También, para cada elipse, la longitud de cada uno de sus lados rectos es $\frac{2b^2}{a}$, y la excentricidad está dada por la relación $e = \frac{c}{a} < 1$

62. Ecuación general de una elipse.

Considerando la segunda forma ordinaria de la ecuación de una elipse

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

quitando denominadores, desarrollando los cuadrados de binomios, igualando a cero y ordenando términos semejantes, obtenemos:

$$AX^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en donde $A = b^2$, $C = a^2$, $D = -2b^2h$,

$E = -2a^2 k$ y $F = b^2h^2 + a^2 K^2 - a^2b^2$.

Este resultado se resume en el siguiente teorema:

Teorema. Si los coeficientes A y C son del mismo signo, la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa una elipse de ejes paralelos a los coordenados, o bien un punto, o no representa algún lugar geométrico.

Problemas resueltos.

1. Reducir la ecuación $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$ a la segunda forma ordinaria de la ecuación de una elipse; determinar las coordenadas del centro, vértice y focos; las longitudes de los ejes mayor y menor, y la de cada lado recto, así como su excentricidad.

Análisis. Tenemos que completar trinomios cuadrados perfectos para adecuar la ecuación a la segunda forma ordinaria, ya con esto, los resultados saltarán a la vista.

<u>Resolución</u> Completando trinomios cuadrado perfectos, tenemos:

$$x^2 - 6x + 9 + 4y^2 + 16y + 16 = -21 + 9 + 16$$

$$x - 6x + 9 + 4(y^2 + 4y + 4) = 4$$

$$(x-3)^2 + 4(y+2)^2 = 4$$

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$$

Segunda forma ordinaria de la ecuación de una elipse.

De esta ecuación obtenemos los siguientes datos:

$a^2 = 4$, $b^2 = 1$ Con estos datos obtenemos los siguientes:

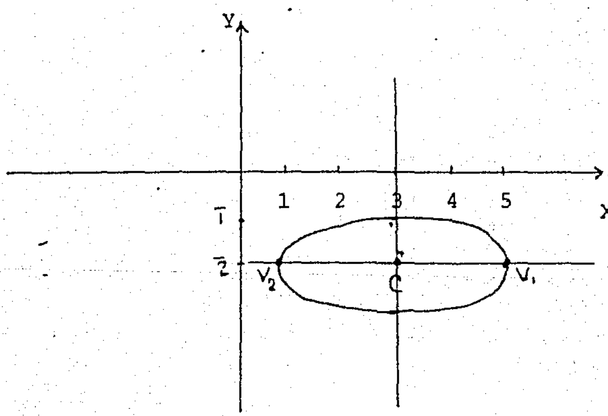
$$C = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 2a = 4, \quad 2b = 2$$

$$\text{Lado recto: } \frac{2b^2}{a} = \frac{2(1)}{2} = 1$$

$C = (3,-2)$

Con estos datos podemos dibujar fácilmente la elipse.



Con esta figura se nos facilita encontrar las coordenadas de los vértices: $V_1 = (5,-2)$, $V_2 = (1,-2)$ y de los focos

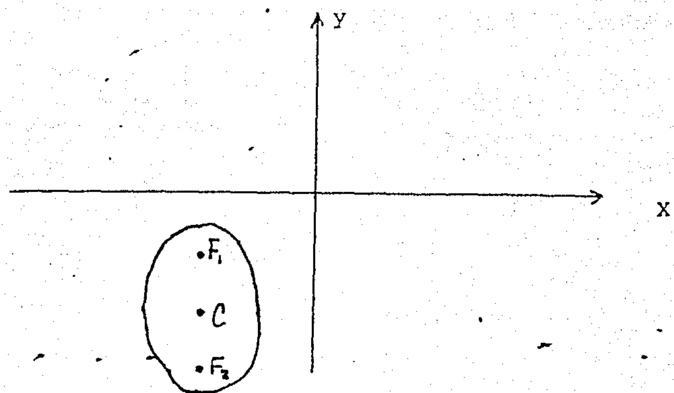
$F_1 = (3 + \sqrt{3}, -2)$

$F_2 = (3 - \sqrt{3}, -2)$.

2. Los focos de una elipse son los puntos $(-4,-2)$ y $(-4,-6)$; la longitud de cada lado recto es 6. Encontrar la ecuación de la elipse y su excentricidad.

Análisis. Con las coordenadas de los focos nos damos cuenta de que el eje focal es paralelo al eje Y, también con ellas obtenemos las coordenadas del centro de la elipse y consecuntemente el valor de C. Con todo esto la obtención de la ecuación resulta inmediata.

Resolución. Tracemos los focos para observar la forma posible de la elipse.



De la figura obtenemos los siguientes datos:

$C = (-4\ ,\ -4)\quad ,\ c = 2$

Con las fórmulas $\frac{2b^2}{a}$ y $c^2 = a^2 - b^2$

obtenemos lo siguiente:

$$\frac{2b^2}{a} = 6 \quad \therefore \quad b^2 = 3a$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$4 = a^2 - 3a \quad \therefore \quad a^2 - 3a - 4 = 0$$

$$a_1 = 4,\ a_2 = -1.$$

Eliminamos el segundo valor de a por ser negativo.

Sabiendo que $a = 4$, $b^2 = 3\ (4)$,

$b = \sqrt{12}$. Con esto ya podemos obtener la segunda ecuación ordinaria de la elipse:

$$\frac{(x + 4)^2}{12} + \frac{(y + 4)^2}{16} = 1$$

Siendo la excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

3. Encontrar la ecuación de la familia de elipses que tienen un centro común (2,3), un eje focal común paralelo al eje X, y la misma excentricidad $e = \frac{1}{2}$

Análisis.

Al decir "familia" significa que debe estar incluido un parámetro K en la ecuación. Sabiendo que el eje focal es paralelo al eje X, podemos encontrar su forma.

Resolución. Como el centro común de la familia de elipses es (2,3) y el eje focal común es paralelo al eje X, su ecuación será de la forma: $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$

Sabiendo que la excentricidad es igual a $\frac{1}{2}$, tenemos

$e = \frac{1}{2} = \frac{c}{a}$

Pero debemos tener cuidado y no apresurarnos al igualar

$\frac{1}{2} = \frac{c}{a}$ y afirmar que: $c = 1$, $a = 2$, ya que

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} , \ldots$$

Lo que podemos afirmar es que

$$\frac{C}{a} = \frac{K\ (1)}{k\,(2)} \quad ; \quad C = K \text{ y}$$

a = 2K, para algún parámetro K.

Ahora usando la fórmula $c^2 = a^2 - b^2$, tenemos:

$K^2 = 4K^2 - b^2 \quad \therefore \quad b^2 = 4K^2 - K^2 = 3K^2$

Con estos valores y los datos del problema, obtenemos la ecuación de la familia de elipses.

$$\frac{(x - 2)^2}{4K^2} + \frac{(y -3)^2}{3K^2} = 1$$

Donde para cada valor de K, obtenemos un elemento de la familia de elipses.

4. La ecuación de una familia de elipses es $4x^2 + 9y^2 + ax + by - 11 = 0$. Encontrar la ecuación del elemento de la familia que pasa por los puntos (2,3) y (5,1).

Análisis. Vemos que los parámetros son a y b. Como los puntos (2,3) y (5,1) pertenecen a la elipse requerida, - entonces cada uno debe cumplir con la ecuación general. Con esto obtenemos dos ecuaciones lineales con a y b como incógnitas pudiéndolas resolver simultáneamente.

Resolución. Substituyendo los valores de las coordenadas de los puntos en la ecuación general de la familia de elipses, obtenemos:

Para el punto (2,3), tenemos:

$4(4) + 9(9) + 2a + 3b - 11 = 0,$

$2a + 3b + 86 = 0$

Para el punto (5,1) , tenemos:

$4(25) + 9(1) + 5a + b - 11 = 0,$

$5a + b + 98 = 0$

Resolviendo estas dos ecuaciones simultáneamente, tenemos:

$2a + 3b + 86 = 0$

$5a + b + 98 = 0$, donde $a = -16$, $b = -18$.

Conociendo los valores de los parámetros a y b, encontramos la ecuación general de la elipse de la familia que pasa por dichos puntos:
Dicha ecuación es:

$4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 11 = 0.$

5. Desde cada punto de la circunferencia $x^2 + y^2 -6x -2y + 1 = 0$, se traza una perpendicular al diámetro paralelo al eje X. Encontrar e identificar el lugar geométrico de los puntos medios de dichas perpendiculares.

<u>Análisis</u>. Tenemos que dibujar la circunferencia y trazar algúnas de las perpendiculares con sus puntos medios para observar qué pasa.

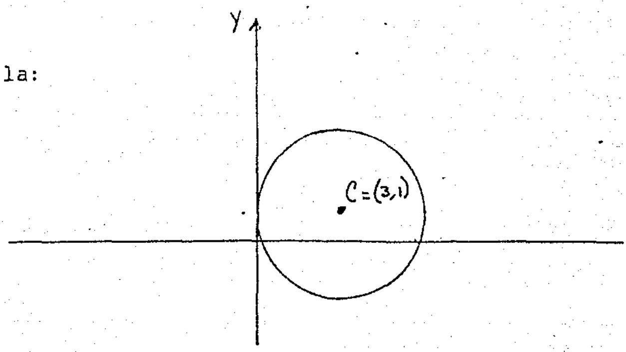
Resolución . Completando trinomios cuadrados perfectos en la ecuación anterior y simplificando, obtenemos:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = -1 + 9 + 1$$

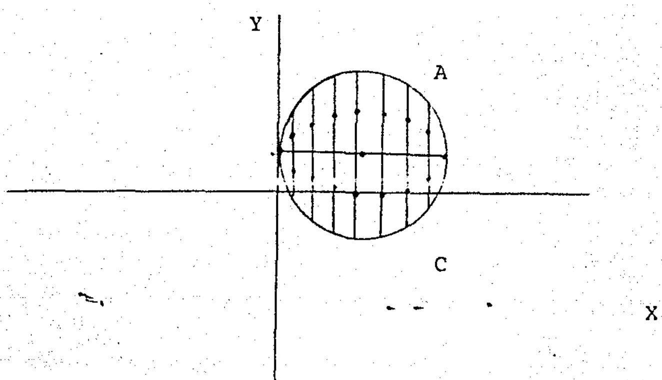
$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

Se trata de una circunferencia con centro C = (3,1) y radio r = 3.

Tracémosla:



Al trazar las perpendiculares al diámetro paralelo al eje X y sus puntos medios, obtenemos:



Observando los puntos vemos que posiblemente se trate de una elipse.

Suponiendo que se tratase de una elipse, observando la figura, veríamos que tendría su centro en

$C = (3,1)$, sus vértices $V_1 = (6,1)$, $V_2 = (0,1)$,

$a = 3$, $b = \frac{3}{2}$ $\quad c = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36-9}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{2}$

$$e = \frac{c}{a} \quad \frac{\frac{\sqrt{27}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{27}}{6}$$

Sus focos:

$F_1 = (3 + \frac{\sqrt{27}}{6}, 1)$ y $F_2 = (3 - \frac{\sqrt{27}}{6}, 1)$

Su ecuación : $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{\frac{9}{4}} = 1$

Esta ecuación efectivamente es de una elipse, pero ¿cómo comprobamos que cada punto del lugar geométrico indicado cumple con la ecuación de la elipse?

Cualquier punto del lugar geométrico lo encontramos sacando el punto medio de la perpendicular que va de la circunferencia al diámetro.

Las coordenadas de este punto medio se encuentran de la siguiente manera:

De la ecuación de la circunferencia

$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$ se despeja la "y" :

$y = \sqrt{9 - (x-3)^2} + 1$ (consideremos como ilustración la parte superior de la circunferencia).

Ahora encontremos la semisuma de este valor con la ordenada correspondiente al diámetro, y = 1,

$$y' = \frac{\sqrt{9-(x-3)^2}+1+1}{2} = \frac{\sqrt{-x^2+6x}}{2}+1$$

por lo tanto el punto medio de la perpendicular será

$$PM = \left(x, \frac{\sqrt{-x^2+6x}}{2}+1\right)$$

Para saber si este punto corresponde a la elipse, substituimos el valor de la ordenada del punto medio en la ecuación de la elipse:

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{\frac{9}{4}} = 1 ,$$

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{\left[\frac{\sqrt{-x^2+6x}}{2}+1-1\right]^2}{\frac{9}{4}} = \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{\frac{-x^2+6x}{4}}{\frac{9}{4}} =$$

$$= \frac{x^2-6x+9-x^2+6x}{9} = \frac{9}{9} = 1 \quad \therefore \quad \text{queda}$$

demostrado que la ecuación de la elipse $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{\frac{9}{4}} = 1$

corresponde al lugar geométrico descrito en el problema.

Ejercicio 28.

28.1 Reduce la ecuación $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0$ a la segunda forma ordinaria de la ecuación de una elipse; determina las coordenadas del centro, vértices y focos; las longitudes de los ejes mayor y menor, y la de cada lado recto, así como su excentricidad.

Sol. $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$, $C = (-4,1)$,

$V_1 = (-1,1)$, $V_2 = (-7,1)$, $F_1 = (-4+\sqrt{5},1)$,

$F_2 = (-4-\sqrt{5},1)$, $2a = 6$, $2b = 4$, $LR = \frac{8}{3}$,

$e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

28.2 La ecuación de una familia de elipses es $Kx^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 5 = 0$.

Encuentra las ecuaciones de aquellos elementos de la familia que tienen una excentricidad igual a $\frac{1}{2}$.

Sol. $3x^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 5 = 0$

$16x^2 + 12y^2 + 18x - 24y - 15 = 0$

28.3 Encuentra e identifica la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del eje Y es siempre igual al doble de su distancia al punto (3,2).

Sol. $3x^2 + 4y^2 - 24x - 16x + 52 = 0$

28.4 Desde cada punto de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$, se traza una perpendicular al diámetro paralelo al eje Y. Encuentra e identifica la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas perpendiculares.

Sol. $4x^2 + y^2 - 24x - 2y + 28 = 0$

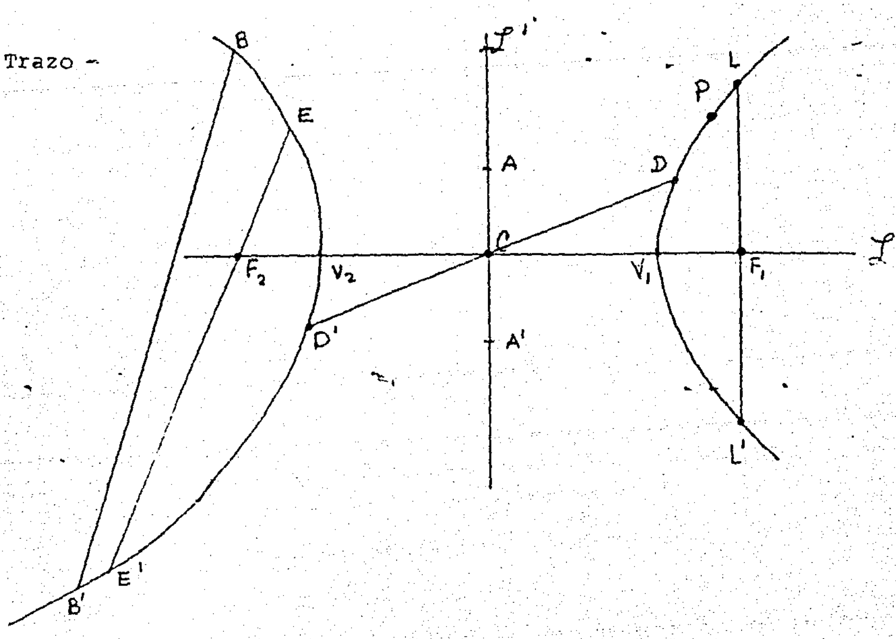
CAPITULO 9

HIPERBOLA

63. Definición. Una hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.

Nota. Aplica la definición y verás que excluye el caso en que el punto móvil se mueva sobre la recta que pasa por los focos a excepción del segmento comprendido entre ellos. - Los focos y el punto medio de este segmento no pertenece al lugar geométrico.

- Trazo -



Vamos a identificar a los puntos y segmentos característicos de la hipérbola.

Focos: F_1 y F_2

Vértices. V_1 y V_2

Centro : C. Punto medio del eje transverso.

Eje focal: $\mathcal{L}$. Recta que pasa por los focos.

Eje transverso: $\overline{V_1V_2}$ Porción del eje focal comprendido entre los vértices.

Eje normal: $\mathcal{L}'$. Recta perpendicular al eje focal y que pasa por C.

Eje conjugado: AA'. Parte definida del eje normal.

Cuerda: $\overline{BB'}$. Segmento que une dos puntos cualesquiera de la hipérbola, ya sea de la misma rama o diferente.

Cuerda focal. $\overline{EE'}$. Cuerda que pasa por uno de los focos.

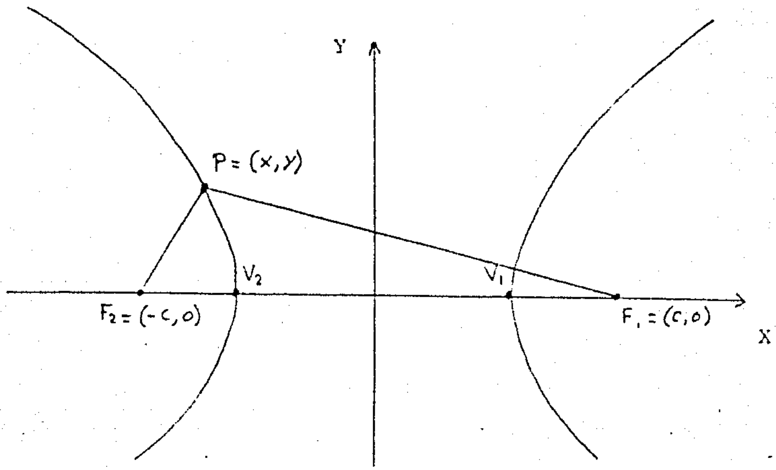
Lado recto. $\overline{LL'}$. Cuerda focal perpendicular al eje focal. (Son dos lados rectos).

Diámetro: $\overline{DD'}$. Cuerda que pasa por C.

Radio vector. $\overline{FP}$ y FP'. Segmento que une a cualquier punto de la hipérbola con alguno de los focos.

64. Primera ecuación ordinaria de la hipérbola.

Consideremos, como ejemplo ilustrativo, a la hipérbola con centro en el origen y eje focal sobre el eje X.



Sea P = (x, y) un punto culquiera de la hipérbola. Las coordenadas de los focos $F_1 = (c,0)$ y $F_2 = (-c,0)$

Por la definición de hipérbola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica:

$$\left| F_1P - F_2P \right| = 2a$$

(De una vez escribimos 2a en lugar de K, como en el caso de la elipse)

$a > 0$ y $2a < 2c$.

Cuando P está en la rama izquierda, se cumple: $F_1P - F_2P > 0 \therefore$

$|F_1P - F_2P| = F_1P - F_2P = 2a,$

Cuando P está en la rama derecha, tenemos: $F_1P - F_2P < 0 \therefore$

$|F_1P - F_2P| = -F_1P + F_2P = 2a$, o sea: $F_1P - F_2P = -2a$

Encontrando distancias, tenemos:

$$F_1P = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$F_2P = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$, por definición:

$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$ (para p en la rama izquierda).

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=-2a$$ (para P en la derecha).

Después de eliminar raíces y reducir términos semejantes, obtenemos, de cada una de las ecuaciones:

$$(c^2-a^2)\,x^2-a^2y^2=a^2\,(c^2-a^2)$$

Donde $c > a$, $c^2-a^2 > 0$

Sea $b^2 = c^2 - a^2$, entonces la ecuación anterior queda así:

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, o bien,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ Primera ecuación ordinaria de la hipérbola.

Nota. Como verás solo se distingue de la ecuación de la elípse en el signo menos.

Este resultado lo resumimos en el teorema siguiente:

Teorema. La ecuación de la hipérbola de centro en el origen, eje focal sobre el eje X, y focos $(c,0)$, $(-c,0)$ es

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Si el eje focal coincide con el eje Y, de manera que las coordenadas de los focos sean $(0,c)$ y $(0,-c)$, su ecuación es

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

Para cada hipérbola, 2a es la longitud del eje transverso y 2b, la del conjugado; c, la distancia del centro a cada foco; y a, b, c están ligadas por la relación $c^2 = a^2 + b^2$.

Además, para cada hipérbola, la longitud de cada uno de sus lados rectos es $\frac{2b^2}{a}$, y la excentricidad (e) está dada por la relación

$$e = \frac{c}{a} > 1$$

Nota. La posición de una elipse con relación a los ejes coordenados puede determinarse según los valores de a y b. Sin embargo, este método no se puede aplicar a la hipérbola, ya que se puede tener $a > b$, $a < b$ o $a = b$.
La posición de la hipérbola se determina por los signos de los coeficientes de las variables en la forma canónica de su ecuación. La variable de coeficiente positivo corresponde al eje coordenado que contiene al eje transverso de la hipérbola.

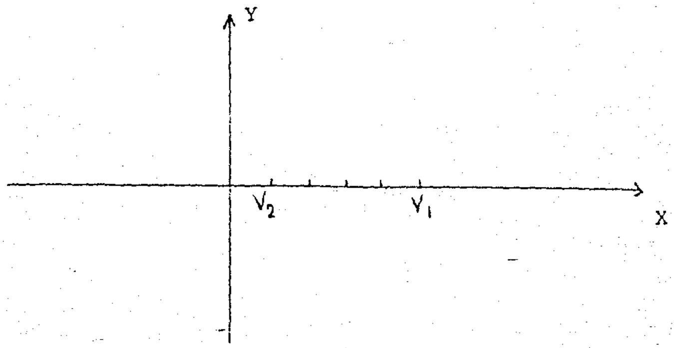
Problemas resueltos.

1. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos vértices son los puntos (1,0), (5,0), y la longitud de su lado recto es igual a 5.

<u>Análisis.</u> De los datos del problema obtenemos los valores de a, b y c.

Con esto podemos trazar la hipérbola y encontrar su ecuación.

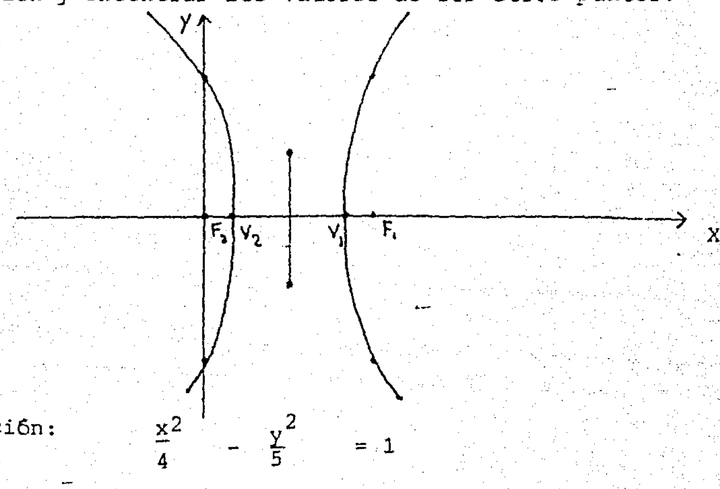
Resolución. Trazando los datos del problema, tenemos



Ahora bien, de la figura obtenemos el valor de $2a = 4$, por lo tanto, $a = 2$

Del dato $\frac{2b^2}{a} = 5$, obtenemos el valor de $b = \sqrt{5}$. De la relación $c^2 = a^2 + b^2$, obtenemos el valor de $c = 3$.

Con estos resultados podemos trazar la hipérbola, dar su ecuación y encontrar los valores de los otros puntos.



Ecuación: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

$F_1 = (6,0)$, $F_2 = (0,0)$ $\quad e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$

2. Los extremos del eje conjugado de una hipérbola son los puntos (0,3) y (0,-3) y la longitud de cada lado recto es 6. Encontrar la ecuación de la hipérbola y su excentricidad.

Análisis. Con los extremos del eje sabemos el valor de b, y con el valor de los lados rectos podemos encontrar el de a.
Con a y b encontramos c, y por lo tanto, la ecuación y la excentricidad.
Resolución: $\quad b = 3, \quad \frac{2b^2}{a} = 6 \therefore$

$$a = \frac{2b^2}{6} = \frac{2(9)}{6} = 3, \quad c^2 = a^2 + b^2, \; c = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

La ecuación es.

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{9} = 1, \qquad e = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}.$$

3. Si K es un número diferente de cero, demostrar que la ecuación $3x^2 - 3y^2 = K$ representa una familia de hipérbolas de excentricidad igual a $\sqrt{2}$.

Análisis. Convirtiendo la ecuación a su forma canónica, obtenemos el valor de a y b; con estos valores obtenemos el de c, y con éste, el de la excentricidad.

Resolución

$3x^2 - 3y^2 = K,$

$x^2 - y^2 = \frac{K}{3}$, $\frac{x^2}{\frac{K}{3}} - \frac{y^2}{\frac{K}{3}} = 1$, $\therefore$

$a^2 = \frac{K}{3} = b^2$.

De la relación $c^2 = a^2 + b^2$, obtenemos $c = \sqrt{\frac{2}{3}K}$

Como $e = \frac{c}{a}$, obtenemos:

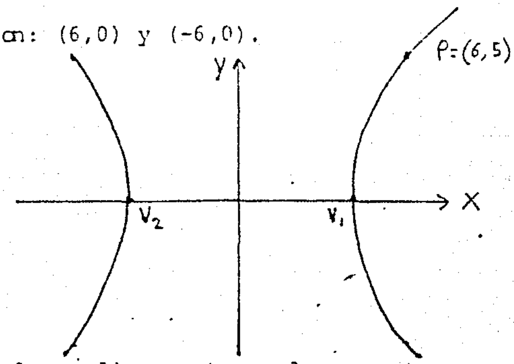
$$e = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}K}}{\sqrt{\frac{K}{3}}} = \sqrt{2}\ , \quad \text{CQD.}$$

4. Encontrar las longitudes de los radios vectores del punto (6,5) de la hipérbola $5x^2 - 4y^2 = 80$

Análisis. Convirtiendo la ecuación a la forma canónica, obtenemos el valor de a y b; con estos valores encontramos el de c; con éste, las coordenadas de los focos, y finalmente calculando la distancia entre los focos y el punto, encontramos la longitud de los radios vectores.

Resolución. De la ecuación $5x^2 - 4y^2 = 80$, dividiendo entre 80, tenemos : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$, de aquí obtenemos: $a^2 = 16$, $b^2 = 20$.

De la relación $c^2 = a^2 + b^2$ obtenemos $c = 6$. Con esto - podemos trazar la parábola y observar que las coordenadas de los focos son: (6,0) y (-6,0).



La longitud de los radios vectores la encontramos usando la fórmula de distancia:

$$PF_1 = \sqrt{(6-6)^2 + (5-0)^2} = 5$$

$$PF_2 = \sqrt{(6+6)^2 + (5-0)^2} = 13$$

Ejercicio 29

29.1 Los vértices de una hipérbola son los puntos (0,3) y (0,-3), y sus focos los puntos (0,5) y (0,-5). Encuentra la ecuación de la hipérbola, las longitudes de sus - ejes transverso y conjugado, su excentricidad y la longitud de cada lado recto.

Sol. $2c = 10$, $a = 3$, $b = 4$, $2b = 8$,

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1, \quad e = \frac{5}{3}, \quad \frac{2b^2}{a} = \frac{32}{3}$$

29.2 Encuentra las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes transverso y conjugado, la excentricidad y la longitud de cada lado recto de la hipérbola $9y^2 - 4x^2 = 36$

Sol. $V_1 = (0,2)$, $V_2 = (0,-2)$,

$F_1 = (0, \sqrt{13})$, $F_2 = (0, -\sqrt{13})$, $2a = 4$, $2b = 6$,

$e = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $\frac{2b^2}{a} = 9$

29.3 Los vértices de una hipérbola son los puntos (2,0) y (-2,0), y sus focos son los puntos (3,0) y (-3,0). Encuentra su ecuación y su excentricidad.

Sol. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$, $e = \frac{3}{2}$

29.4 El centro de una hipérbola está en el origen y su eje transverso está sobre el eje Y. Si un foco es el punto (0,5) y la excentricidad es igual a 3, encuentra la ecuación de la hipérbola y la longitud de los lados rectos.

Sol. $72 y^2 - 9x^2 = 200$, $\frac{2b^2}{a} = \frac{80}{3}$

29.5 Los vértices de una hipérbola son los puntos (0,4), (0,-4), y su excentricidad es igual a $\frac{3}{2}$. Encuentra la ecuación de la hipérbola y las coordenadas de sus focos.

Sol. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$, $F_1=(0,6)$, $F_2 = (0,-6)$

29.6 Encuentra e identifica la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto (6,0) es siempre igual al doble de su distancia de la recta $2x - 3 = 0$.

Sol. $3x^2 - y^2 = 27$

65. ASINTOTAS DE LA HIPERBOLA.

De la ecuación ordinaria de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$, vemos

que el miembro izquierdo es una diferencia de cuadrados, por lo tanto podemos factorizarlo:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1$$

Observamos que al estar igualado a 1 el producto, entonces cada factor debe ser el inverso multiplicativo del otro. Tomemos el caso más simple en que cada factor sea igual a la unidad;

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1 \quad ,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad .$$

Como ejemplo ilustrativo, tomemos solamente una de las ecuaciones; quitando denominadores, tenemos:

$xb + ay = ab$, que es la ecuación de una recta; para saber si esta recta intersecta a la hipérbola, despejamos la x de la hipérbola, $x = a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}$ y la substituimos en la y despejada de la recta, así:

$$y = \frac{ab - xb}{a} = \frac{ab - a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}\; b}{a}$$

$$y = b - \sqrt{b^2 + y^2} \quad \therefore \quad y - b = -\sqrt{b^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado, tenemos:

$$y^2 - 2yb + b^2 = b^2 + y^2$$

$$-2yb = 0 \quad \therefore \quad y = 0, \text{ ya que } b \neq 0.$$

Para estos valores de x, y, la recta intersecta a la hipérbola. En general para cualesquiera valores inversos multiplicativos de $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ y $\frac{x}{a} - \frac{y}{b}$ se obtienen intersecciones de las rectas con la hipérbola. Veamos qué sucede si el producto lo igualamos a cero:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$$

Entonces $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$

Haciendo la misma substitución de x en la "y" despejada de estas ecuaciones, obtenemos:

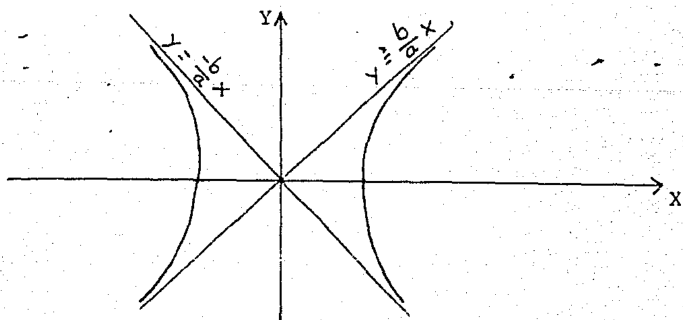
$bx + ay = 0$, $y = \frac{-bx}{a}$, ∴

$$y = \frac{-b\left(a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}\right)}{a} = -\sqrt{b^2 + y^2}$$, elevando

al cuadrado, tenemos:

$$y^2 = b^2 + y^2$$

$b^2 = 0$ ∴ $b = 0$ ¡Contradicción, ya que $b \neq 0$! Por lo tanto, para las rectas $bx + ay = 0$, $bx - ay = 0$, no existe punto de intersección con la hipérbola. Estas rectas pasan por el origen, tienen pendientes $m = \pm \frac{b}{a}$ y reciben el nombre de asíntotas de la hipérbola.



Geométricamente se dice que cuando la variable x tiende a $\pm\infty$, la gráfica de la hipérbola se acerca a las asíntotas, pero nunca las llega a tocar.

Estos resultados los podemos resumir en el siguiente teorema:

Teorema. La hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

tiene por asíntotas las rectas $bx - ay = 0$ y $bx + ay = 0$

Nota. Si la ecuación de la hipérbola está dada en su forma canónica $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, las ecuaciones de las asíntotas se obtienen factorizando el miembro izquierdo e igualándolo a cero.

Problemas resueltos:

Encontrar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola.

$9x^2 - 4y^2 = 36.$

<u>Análisis.</u> Necesitamos convertir la ecuación a su forma canónica, para factorizar su miembro izquierdo e igualarlo a cero.

<u>Resolución.</u> Convirtiendo la ecuación $9x^2 - 4y^2 = 36$ a su forma canónica tenemos: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, factorizando el miembro izquierdo e igualando a cero, tenemos: $\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) = 0$, de aquí obtenemos las ecuaciones de las asíntotas:

$\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0$, o sea, $3x - 2y = 0$, y

la otra:

$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0$, o sea, $3x + 2y = 0$.

2. Encontrar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (6,2), tiene su centro en el origen, su eje transverso sobre el eje X, y una de sus asíntotas es la recta $2x - 5y = 0$.

<u>Análisis.</u> Sabiendo la ecuación de una de sus asíntotas, podemos encontrar la otra. Con las dos ecuaciones podemos encontrar el miembro izquierdo de la ecuación de la hipérbola, el miembro derecho lo encontramos substituyendo las coordenadas del punto en el miembro izquierdo.

<u>Resolución.</u> Si una de las asíntotas es $2x - 5y = 0$, la otra será $2x + 5y = 0$. Con el producto de éstos, encontramos el miembro izquierdo de la ecuación de la hipérbola, o sea:

$4x^2 - 25y^2$, para encontrar el miembro derecho substituimos las coordenadas (6,2) en $4x^2 - 25y^2$, así:

$(4(36) - 25(4) = 144 - 100 = 44$.

Igualando el miembro izquierdo con el derecho, obtenemos la ecuación de la hipérbola:

$4x^2 - 25y^2 = 44$, su forma canónica es:

$$\frac{x^2}{11} - \frac{y^2}{\frac{44}{25}} = 1$$

Vemos que efectivamente la ecuación corresponde a la hipérbola con centro en el origen y eje transverso sobre el eje X.

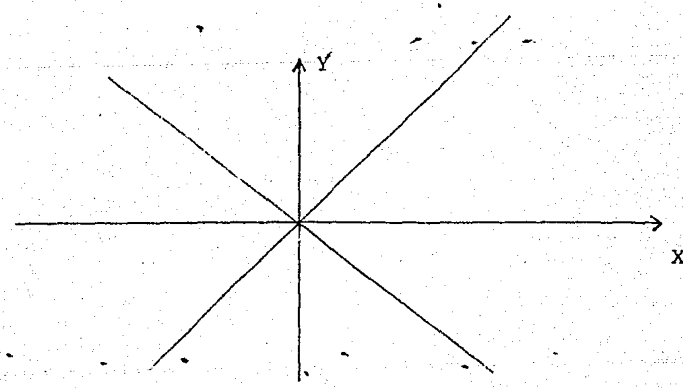
Definiciones:

Hipérbola rectangular se llama a la hipérbola que tiene sus ejes transverso y conjugado de la misma longitud. Su ecuación : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$

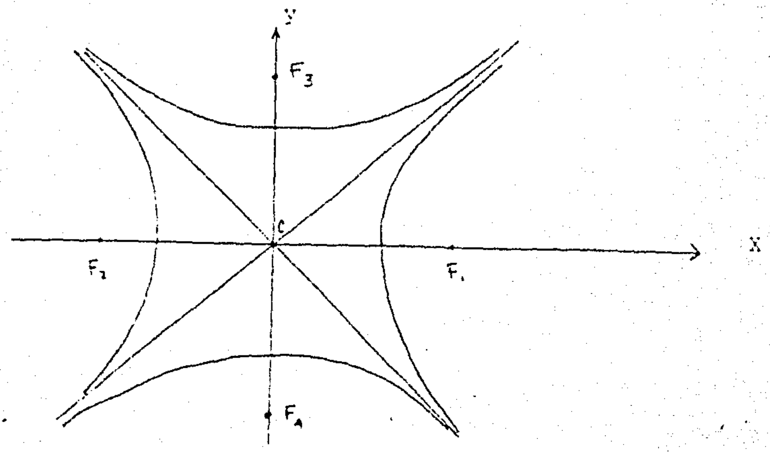
Hipérbolas conjugadas son las que tienen el eje transverso igual al conjugado de la otra. Sus ecuaciones son:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Ejemplo ilustrativo: Si gráficamente tuviéramos dos asíntotas.



Gráficamente obtendríamos las hipérbolas conjugadas:



Una propiedad de las hipérbolas conjugadas, es que sus focos equidistan de su centro común.

Problemas resueltos (continuación)

3. Si un punto $P = (x_1, y_1)$ pertenece a la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ ¿Qué condición geométrica **debe cumplir?**

expresada en la ecuación de la hipérbola.

Resolución.
$$\frac{x_1^{\,2}}{a^2} - \frac{y_1^{\,2}}{b^2} = 1$$

4. Si el punto $P = (x_1, y_1)$ está sobre la parte superior de la rama izquierda de la hipérbola $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$, demostrar que la recta $bx + ay = 0$ es una asíntota de dicha rama.

Análisis. Que el punto $P = (x_1, y_1)$ está sobre la parte superior de la rama izquierda de la hipérbola con centro en el origen y eje transverso sobre el eje x, significa que $x_1 < 0$ en particular, y $x < 0$ para todo x del punto que pertenezca a dicha rama. Sabemos que si $x < 0$, entonces $|x| = -x$. Despejando la y de la ecuación de la hipérbola y sacando del radical a la x, daremos con el resultado deseado.

Resolución. Si la recta $bx + ay = 0$ se espera que sea la asíntota, entonces despejando la y, vemos que se trata de una recta que pasa por el origen y tiene pendiente $\frac{-b}{a}$

Si despejamos la y de la ecuación de la hipérbola, obtenemos:

$$y = \sqrt{-b^2 + \frac{b^2x^2}{a^2}} = \sqrt{b^2\, x^2\left(\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{a^2}\right)},$$

$$y = b\,|x|\sqrt{\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{a^2}}.$$

Si hacemos tender a la x hacia $-\infty$, el radical tiende a $\sqrt{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a}$,

por lo tanto quedaría: $y = \frac{b\,|x|}{a}$, como $|x| = -x$, por ser $x < 0$, tenemos que la ecuación $y = \frac{-bx}{a}$ es la de una recta que pasa por el origen y tiene pendiente $\frac{-b}{a}$.

Con lo cual queda demostrado.

5. Encontrar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbo-

la $4x^2 - 5y^2 = 7$

Análisis. Convirtiéndola a la forma canónica, factorizando el miembro izquierdo e igualándolo a cero, obtenemos las ecuaciones de las asíntotas.

Resolución. $4x^2 - 5y^2 = 7$,

Dividiendo entre 7, tenemos:

$$\frac{4x^2}{7} - \frac{5y^2}{7} = 1 \,, \quad \frac{x^2}{\frac{7}{4}} - \frac{y^2}{\frac{7}{5}} = 1 \text{ (forma canónica).}$$

$$\left(\frac{x}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + \frac{y}{\sqrt{\frac{7}{5}}}\right)\left(\frac{x}{\frac{\sqrt{7}}{2}} - \frac{y}{\sqrt{\frac{7}{5}}}\right) = 0$$

(Factorizando e igualando a cero).

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + \frac{y}{\sqrt{\frac{7}{5}}} = 0, \text{ o bien } \frac{x}{\frac{\sqrt{7}}{2}} - \frac{y}{\sqrt{\frac{7}{5}}} = 0 \,,$$

quitando denominadores y factorizando, tenemos:

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}\, x + \frac{\sqrt{7}}{2}\, y = 0 \quad , \quad 2\sqrt{7}\, x + \sqrt{5}\,\sqrt{7}x = 0$$

$$\sqrt{7}\,(2x + \sqrt{5}y) = 0, \quad 2x + \sqrt{5}\, y = 0$$ Ecuación de la asíntota.

Haciendo lo mismo, obtenemos la otra ecuación de la asíntota: $2x - \sqrt{5}y = 0$

6. Encontrar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(3,-1)$, con centro en el orígen, eje transverso sobre el eje X, y una de sus asíntotas igual a $2x + 3\sqrt{2}y = 0$

Análisis. Con los datos del problema, sabemos que la ecuación de la hipérbola es de la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Sabiendo la ecuación de una de las asíntotas, sabemos la otra; con el producto de ellas, obtenemos el miembro izquierdo de la ecuación de la hipérbola. Substituyendo las coordenadas del punto en el miembro izquierdo, obtenemos el miembro derecho, Con esto, encontramos la ecuación de la hiérbola.

Resolución

Una ecuación de la asíntota es: $2x + 3\sqrt{2}\ y = 0$, la otra será $2x - 3\sqrt{2}\ y = 0$.

Multiplicando los miembros izquierdos, tenemos:

$4x^2 - 18y^2$, substituyendo en esta expresión las coordenadas $(3,-1)$, obtenemos el miembro derecho.

$$4(9) - 18\ (1) = 36 - 18 = 18.$$

Con esto ya tenemos la ecuación de la hipérbola:

$4x^2 - 18y^2 = 18$, sacando mitad:

$$2x^2 - 9y^2 = 9$$

7. Encontrar la distancia del foco de la derecha de la hipérbola $16x^2 - 9y^2 = 144$ a cualquiera de sus asíntotas.

Análisis. De la ecuación de la hipérbola, factorizando e igualando cero el miembro izquierdo de la ecuación, obtenemos las ecuaciones de las asíntotas.

Usando la fórmula de distancia de un punto a una recta, damos con el resultado deseado.

Resolución. Factorizando a igualando a cero el miembro izquierdo de la ecuación $16x^2 - 9y^2 = 144$, obtenemos:
$(4x + 3y)(4x - 3y) = 0$, por lo tanto, las ecuaciones de las asíntotas serán:
$4x + 3y = 0$ y $4x - 3y = 0$.

Usando la fórmula de distancia de un punto a una recta, daremos con el resultado deseado:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad A = 4, \; B = \pm 3, \; C = 0$$

$$d = \frac{4(5) \pm 3(0) + 0}{\sqrt{4^2 + (\pm 3)^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

8. Demostrar que el producto de las distancias de cualquier

punto de una hipérbola equilatera a sus asíntotas es una constante.

Análisis. De la forma ordinaria de la hipérbola equiláte- ra se obtienen las ecuaciones de las asíntotas, después aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a una recta y finalmente la propiedad de que son equiláteras.

Resolución De la ecuación de la hipérbola equilátera, obtenemos: $x^2 - y^2 = a^2$

Las ecuaciones de sus asíntotas son:

$x + y = 0$, $x - y = 0$. Usando la fórmula de distancia, tenemos:

$$d_1 = \frac{ax_1 + by_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$, para $P = (x_1, y_1)$

$$d_2 = \frac{ax_1 - by_1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$, ahora el producto $d_1 d_2$:

$$d_1 d_2 = \frac{ax_1 + by_1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{ax_1 - by_1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^2x_1^2 - b^2y_1^2}{a^2 + b^2}$$

pero por ser equiláteros, $a = b$, por lo tanto.

$$d_1 d_2 = \frac{a^2(x_1^2 - y_1^2)}{2a^2} = \frac{x_1^2 - y_1^2}{2}$$; por pertenecer

x, y a la hipérbola, $x_1^2 - y_1^2 = a^2$, por lo tanto.

$$d_1 d_2 = \frac{a^2}{2}$$

9. Encontrar la ecuación de la hipérbola equilátera que pasa por el punto (-1,-5) y tiene por asíntotas a los ejes coordenados.

Análisis . Una ecuación de la hipérbola que tiene como asíntotas el caso particular de los ejes coordenados, es $xy=K$, donde K es una constante cualquiera diferente de cero. Sustituyendo las coordenadas del punto (-1,-5) obtenemos la ecuación.

Resolución. Usando la ecuación $xy=K$ de la hipérbola que tiene como asíntotas a los ejes coordenados y substituyendo las coordenadas (-1,-5) en la ecuación, tenemos:

$$xy = (-1)\,(-5) = 5$$, por lo tanto,

la ecuación de la hipérbola es $xy = 5$.

10. Encontrar las coordenadas de los vértices, focos y la excentricidad de la hipérbola que es conjugada a la que

tiene por ecuación $9x^2 - 4y^2 = 36$.

Análisis. Intercambiando los términos en el miembro izquierdo de la ecuación dada obtenemos la de la conjugada.

Con la ecuación obtenida podemos encontrar rápidamente lo requerido.

Resolución. Si la ecuación dada es $9x^2 - 4y^2 = 36$, entonces la ecuación de la hipérbola conjugada será $4y^2 - 9x^2 = 36$. Convirtiendo a la forma canónica, obtenemos:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$$

de donde $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} =$

$c = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$ $\therefore$ $V_1 = (0,3)$, $V_2 = (0,-3)$

$F_1 = (0, \sqrt{13})$, $F_2 = (0, -\sqrt{13})$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

11. Demostrar que los focos de un par de hipérbolas conjugados están sobre una circunferencia.

Análisis. De las ecuaciones de las hipérbolas y de la relación de c con a y b, obtenemos las coordenadas de los focos. Como el centro de las hipérbolas esta en el origen lo que nos queda por demostrar es que la distancia del origen a cada uno de los focos es la misma.

Resolución. Las ecuaciones de las hipérbolas son:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 , \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Las coordenadas de los focos son:

$$F_1 = (\sqrt{a^2 + b^2},0), \ F_2 = (-\sqrt{a^2 + b^2}, 0),$$

$$F_3 = (0,\sqrt{a^2 + b^2}) \ \text{ y } F_4 = (0, -\sqrt{a^2 + b^2})$$

La distancia del origen a cada uno de los focos es :

$$d_1 = \sqrt{(0 - \sqrt{a^2 + b^2})^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(0 + \sqrt{a^2 + b^2})^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$d_3 = \sqrt{(0 - 0)^2 + (0 - \sqrt{a^2 + b^2})^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$d_4 = \sqrt{(0 - 0)^2 + (0 + \sqrt{a^2 + b^2})^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Como vemos, las distancias fueron las mismas, por lo tanto los cuatro puntos pertenecen a la circunferencia de centro en el origen y radio $\sqrt{a^2 + b^2}$.

12. Demostrar que la distancia de un foco a una cualquiera de sus asíntotas de una hipérbola, es igual a la longitud de su semieje conjugado.

Análisis. De la fórmula de la hipérbola encontramos las coordenadas del foco. Usando la fórmula de distancia de un punto a una recta, obtenemos el resultado deseado.

Resolución. Usemos la fórmula $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ de la hipérbola.

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$bx + ay = 0$, $bx - ay = 0$.

Las coordenadas de uno de los focos son $(c,0)$.

Usando la fórmula de distancia de un punto a una recta obtenemos:

$$d = \frac{|b(c) + a(0) + 0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|bc|}{c} = b, \text{ C.Q.D.}$$

Para el foco $(0, -c)$ se obtiene el mismo resultado, sabiendo que si $c > 0$ entonces $|-c| = -(-c) = c$

13. Demostrar que si una recta es paralela a una asíntota de la hipérbola, corta a la curva solamente en un punto.

Análisis. De la ecuación de la hipérbola conseguimos las ecuaciones de las asíntotas, agregando una constante a las ecuaciones de las asíntotas obtenemos una recta paralela a ellas; despejando la y de la recta paralela y substituyéndola por la y de la hipérbola, obtenemos un valor de x en donde se intersecten las curvas, solo exixte una x del punto de intersección; por lo cual se afirma que la intersección, es en un solo punto de la hipérbola.

Resolución.

Ecuación de la hipérbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Asíntotas:

$bx - ay = 0$, $bx + ay = 0$

Tomemos $bx - ay = 0$.

Una recta paralela será $bx - ay + c = 0$

Despejando la y: $y = \frac{bx + c}{a}$

Despejando la y de la hipérbola, tenemos:

$$y = \sqrt{\frac{a^2b^2 - b^2x^2}{-a^2}}$$

Igualando , tenemos:

$$\sqrt{\frac{a^2\ b^2\ -b^2x^2}{-a^2}} = \frac{bx + c}{a}$$, elevando al cuadrado

$$\frac{a^2\ b^2 - b^2x^2}{-a^2} = \frac{b^2x^2 + 2bcx + c^2}{a^2}$$, quitando denominadores

$$a^2\ b^2 - b^2x^2 = -b^2x^2 - 2bcx - c^2$$

$$a^2b^2 + 2bcx = -c^2$$

$$x = \frac{-a^2b^2 - c^2}{2bc}$$

donde vemos que para la ordenada común "y", obtenemos solamente una abscisa común x. C.Q.D.

Ejercicio 30.

30.1 Si el punto P (x_1, y_1) está sobre la parte inferior de la rama derecha de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que la recta $bx + ay = 0$ es una asíntota de la rama derecha.

30.2 Encontrar los puntos de intersección de la recta $2x - 9y + 12 = 0$ con las asíntotas de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 11$

Sol. $(3,2)$, $(\frac{3}{2}, 1)$

30.3 Encontrar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (2,3), tiene su centro en el origen, su eje transverso sobre el eje Y, y una de sus asíntotas es la recta:

$2y - \sqrt{7}x = 0.$

Sol. $4y^2 - 7x^2 = 8$

30.4 Demostrar que si las asíntotas de una hipérbola son perpendiculares, la hipérbola es equilátera.

30.5 Demostrar que la excentricidad de toda hipérbola equilátera es igual a $\sqrt{2}$.

30.6 Demostrar que dos hipérbolas conjugadas tienen las mismas asíntotas.

30.7 Demostrar que si una hipérbola es equilátera, su conjugada también lo es.

30.8 Si las excentricidades de dos hipérbolas conjugadas son e_1 y e_2, demostrar que $e_1^2 + e_2^2 = e_1^2 e_2^2$

30.9 Demostrar que el producto de las distancias de cualquier punto de una hipérbola a sus asíntotas es constante.

66. SEGUNDA ECUACION ORDINARIA DE LA HIPERBOLA.

Cuando el centro de una hipérbola está fuera del origen, y sus ejes son paralelos a los ejes coordenados, sus ecuaciones pueden obtenerse de una manera similar a la primera ecuación ordinaria vista en el artículo 64. Estos resultados los resumimos en el siguiente teorema.

Teorema. La ecuación de una hipérbola de centro $C = (h,K)$ y eje focal paralelo al eje X, es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal es paralelo al eje Y, su ecuación es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

La literal "a" representa la longitud del semieje transverso; la b, del semieje conjugado y c, la distancia del centro a cada uno de los focos; a, b y c están relacionadas de la siguiente manera: $c^2 = a^2 + b^2$. La longitud del lado recto es $\frac{2b^2}{a}$ y su excentricidad está dada por la relación $e = \frac{c}{a} > 1$.

66A. ECUACION GENERAL DE UNA HIPERBOLA

Cuando la ecuación de una hipérbola está dada en su forma general, tenemos un análisis en el siguiente teorema:

Teorema. Si los coeficientes A y C difieren en signo, la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa una hipérbola de ejes paralelos a los coordenados, o bien, un par de rectas convergentes.

Problemas resueltos.

1. Reducir la ecuación $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$ a la segunda forma ordinaria de la ecuación de una hipérbola; determinar las coordenadas del centro, vértices y focos; las longitudes de los ejes transverso y conjugado,

así como la de los lados rectos;

la excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas.

Análisis. Tenemos que completar trinomios cuadrados perfectos e igualar a uno el miembro derecho. Ya con la segunda forma ordinaria obtenida, resultan inmediatos los demás datos usando las relaciones indicadas.

. Dibujando la hipérbola nos resultará más fácil encontrar los vértices y focos.

Resolución. Completando trinomios cuadrados perfectos, obtenemos:

$$x^2 - 4x - 9y^2 + 36y = 41$$

$$x^2 - 4x + 4 - (9y^2 - 36y + 36) = 41 + 4 - 36$$

$$x^2 - 4x + 4 - 9(y^2 - 4y + 4) = 9$$

$$(x - 2)^2 - 9(y - 2)^2 = 9$$

$$\frac{(x - 2)^2}{9} - \frac{(y - 2)^2}{1} = 1$$ (Segunda forma ordinaria de la hipérbola)

De esta ecuación obtenemos los valores de: $a = 3$, $b = 1$, $2a = 6$, $2b = 2$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

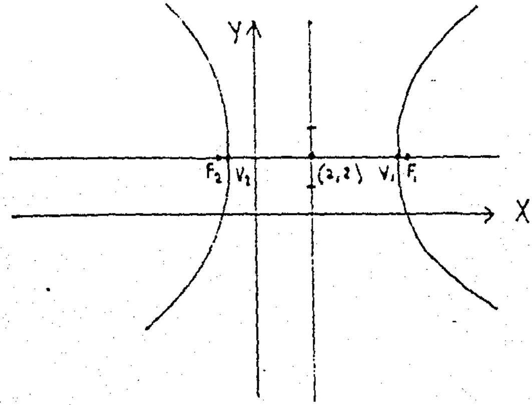
$$L.R. = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(1)}{3} = \frac{2}{3}, \quad C = (2,2)$$

El eje transverso es paralelo al eje X

$V_1 = (5,2)$, $V_2 = (-1,2)$, $F_1 = (2 + \sqrt{10}, 2)$, $F_2 = (2 - \sqrt{10}, 2)$

Asíntotas: $\frac{x-2}{3} + \frac{y-2}{1} = 0$, $x + 3y - 8 = 0$,

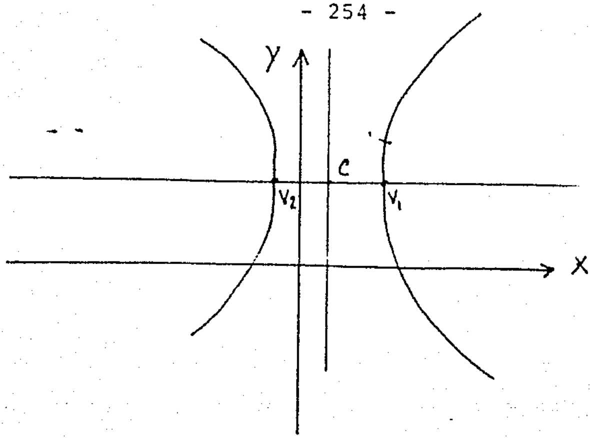
$\frac{x-2}{3} - \frac{y-2}{1} = 0$, $\quad x - 3y + 4 = 0$



2. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-1,3)$ y $(3,3)$, su excentricidad es $\frac{3}{2}$. Encuentra la ecuación de la hipérbola, las coordenadas de sus focos, las longitudes de sus ejes transverso y conjugado, así como la longitud de su lado recto.

<u>Análisis</u>. Con las coordenadas de los vértices encontramos la longitud del eje transverso, y con él, el valor y la excentricidad de C; con ellos dos encontramos el valor de b, además de todas las demás características de la hipérbola.

<u>Resolución</u>. Al trazar los vértices, nos damos cuenta de la forma de la hipérbola y podemos encontrar fácilmente todos los valores característicos.



La ecuación tendrá la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - K)^2}{b^2} = 1$$

De la figura obtenemos:

$a = 2$, como $e = \frac{3}{2}$, , ,

$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$; $C = (1,3)$

$\frac{2b^2}{a} = \frac{2(5)}{2} = 5$, $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1$

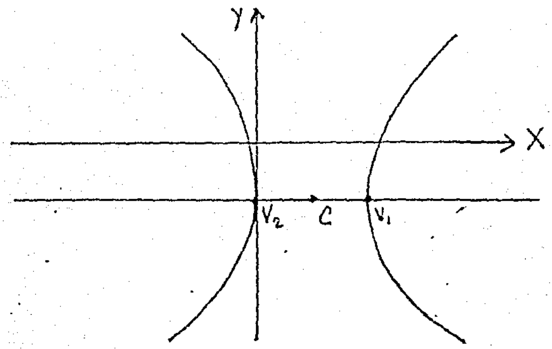
$F_1 = (4,3)$, $F_2 = (-2,3)$

3. El centro de una hipérbola es el punto (2,-2) y uno de sus vértices el punto (0 , -2). Si la longitud de su lado recto es 8, encontrar la ecuación de la curva, la longitud de su eje conjugado y su excentricidad.

<u>Análisis</u>. Con los datos del centro y uno de los vértices,

encontramos las coordenadas del otro, y con esto, podemos darnos idea de la posición de la hipérbola y encontrar todos los demás datos.

<u>Resolución</u>. Trazando el centro y el vértice, tenemos:



De la figura vemos que la forma de la ecuación debe ser:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - K)^2}{b^2} = 1 \ , \ a = 2, \ V_1 = (4 , -2)$$

Sabiendo que $\frac{2b^2}{a} = 8$, $\frac{2b^2}{2} = 8$, $b^2 = 8$, $b=\sqrt{8}$, $2b = 4\sqrt{2}$

Substituyendo los datos en la ecuación, obtenemos:

$$\frac{(x - 2)^2}{4} - \frac{(y + 2)^2}{8} = 1$$

que es la ecuación de la hipérbola; de la relación

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 8} = \sqrt{12}$, obtenemos:

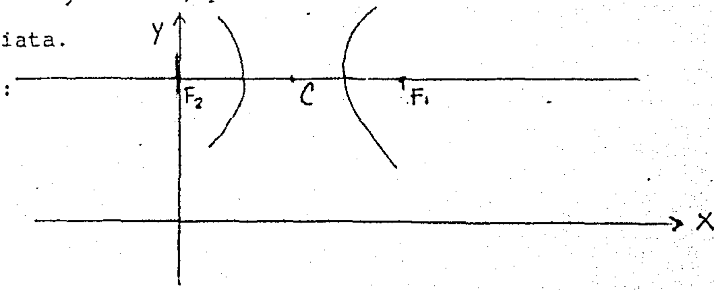
$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

4. El centro de una hipérbola es el punto (4,5) y uno de

sus focos es (8,5). Si la excentricidad de la hipérbola es 2, encontrar su ecuación y las longitudes de sus - ejes transverso y conjugado.

<u>Análisis</u>. Con los datos del centro y del foco podemos dar la posición de la hipérbola y encontrar el valor de c, con esto y la excentricidad damos con el valor de a, y consecuentemente, el de b, por lo tanto la ecuación re- sulta inmediata.

Resolución :



De la figura y los datos, obtenemos:

$c = 4$, por lo tanto, $e = 2 = \frac{4}{2}$,

por lo cual $a = 2$, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$2a = 4$, $2b = 4\sqrt{3}$,

$$\frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{12} = 1$$

5. Encontrar el ángulo agudo de las asíntotas de la - hipérbola

$9x^2 - y^2 - 36x - 2y + 44 = 0$

<u>Análisis.</u> Tenemos que convertir la ecuación a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la hipérbola, para

así obtener las ecuaciones de las asíntotas, y finalmente aplicar la fórmula para encontrar el ángulo entre dos rectas.

Resolución. Completando trinomios cuadrados perfectos, tenemos:

$$9x^2 - 36x + 36 - (y^2 + 2y + 1) = -44 + 36 - 1$$

$$9(x^2 - 4x + 4) - (y^2 + 2y + 1) = -9$$

$$9(x - 2)^2 - (y + 1)^2 = -9$$

$$-9(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

$$\frac{(y + 1)^2}{9} - \frac{(x - 2)^2}{1} = 1$$

Las asíntotas son:

$$\frac{y + 1}{3} + \frac{x - 2}{1} = 0, \quad y + 1 + 3x - 6 = 0, \quad 3x + y - 5 = 0$$

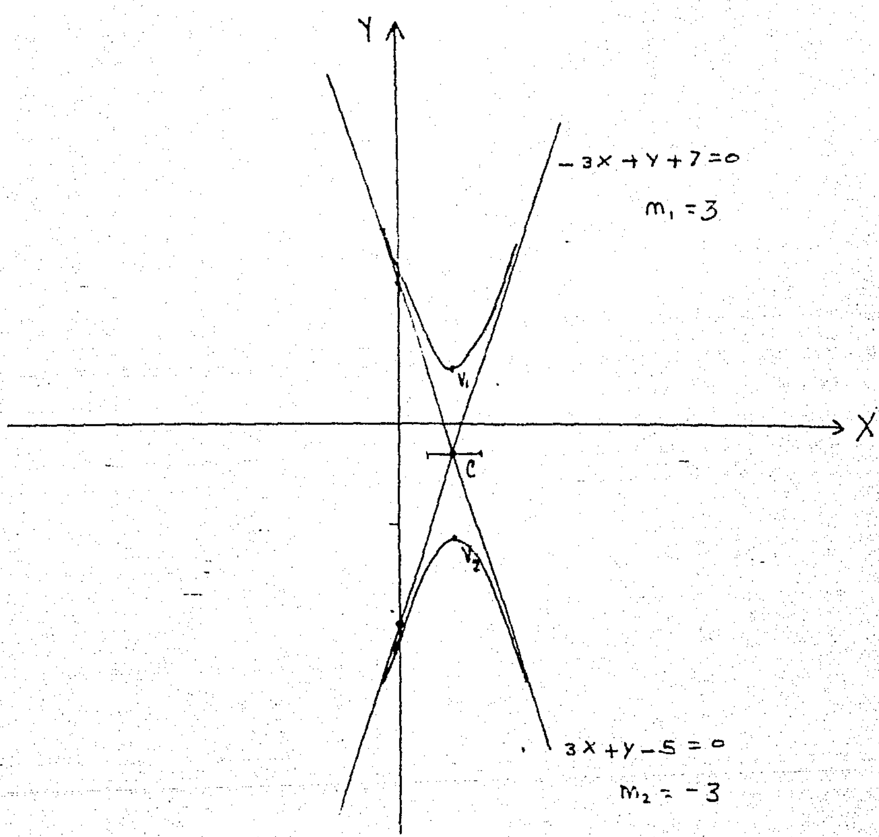
y la otra,

$$\frac{y + 1}{3} - \frac{x - 2}{1} = 0, \quad y + 1 - 3x + 6 = 0, \quad -3x + y + 7 = 0$$

La fórmula para encontrar el ángulo entre dos rectas es:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Dibujando la hipérbola con sus asíntotas, tenemos:



Aplicando la fórmula, tenemos:

$$\text{tg } \theta = \frac{-3 \quad -3}{1 + (-3)(3)} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4} = .75$$

$$= 36°52'$$

6. Encontrar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto (3,2) es siempre igual al triple de su distancia a la recta y + 1 = 0.

Análisis. Usando las fórmulas de distancia entre dos puntos y de un punto a una recta, damos rápidamente con el resultado deseado.

Resolución.

La distancia del punto $P = (x,y)$ al punto $(3,2)$ es:

$$d_1 = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2}$$

La distancia del punto $P = (x,y)$ a la recta $y + 1 = 0$ es:

$$d_2 = \frac{|0 \cdot x + 1 \cdot y + 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = |y + 1|$$

Siguiendo las condiciones del problema, tenemos:

$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2} = 3\,|y + 1|$, elevando al cuadrado,

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9(y + 1)^2$, desarrollando ;

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 9y^2 + 18y + 9$

$x^2 - 8y^2 - 6x - 22y + 4 = 0$ Ecuación requerida.

Ejercicio 31.

31.1 Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-2,2)$ y $(-2,-4)$, y la longitud de su lado recto es 2. Encuentra la ecuación de la curva, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

Sol. $\dfrac{(y + 1)^2}{9} - \dfrac{(x + 2)^2}{3} = 1.$

$F_1 = (-2, -1 + 2\sqrt{3})$, $F_2 = (-2, -1 - 2\sqrt{3})$,

$e = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

31.2 Los focos de una hipérbola son los puntos (4,-2) y (4,-8), y la longitud de su eje transverso es 4. Encuentra la ecuación de la hipérbola, la longitud de su lado recto y su excentricidad.

Sol. $\frac{(y + 5)^2}{4} - \frac{(x - 4)^2}{5} = 1$, $\frac{2b^2}{a} = 5$, $e = \frac{3}{2}$

31.3 Los vértices de una hipérbola son los puntos (-3,2) y (-3,-2), y la longitud de su eje conjugado es 6. Encuentra la ecuación de la hipérbola, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

Sol. $\frac{y^2}{4} - \frac{(x + 3)^2}{9} = 1$,

$F_1 = (-3, \sqrt{13})$, $F_2 = (-3, -\sqrt{13})$, $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$

31.4. Reduce la ecuación

$4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$ a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la hipérbola, determina las coordenadas del centro, vértices y focos; las longitudes de los ejes transverso y conjugado, del lado recto; la excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas.

Sol. $\frac{(y - 2)^2}{4} - \frac{(x + 4)^2}{9} = 1$, $C = (-4,2)$,

$V_1 = (-4,4)$, $V_2 = (-4,0)$, $F_1 = (-4,2+\sqrt{13})$,

$F_2 = (-4, 2-\sqrt{13})$, $2a = 4$, $2b = 6$,

$\frac{2b^2}{a} = 9$, $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$, asíntotas:

$2x + 3y + 2 = 0$ y $2x - 3y + 14 = 0$

31.5. Encuentra la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (4,6), tiene el eje focal paralelo al eje X, y sus asíntotas son las rectas $2x + y - 3 = 0$ y $2x - y - 1 = 0$

Sol. $4x^2 - y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$.

31.6 Encuentra la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $P = (2,-1)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $x + 2 = 0$.

Sol. $3x^2 - y^2 + 20x - 2y + 11 = 0$

31.7 La base de un triángulo es de longitud constante, sus extremos son los puntos (0,0) y (4,0). Encuentra la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto si uno de los ángulos de la base es siempre igual al doble del otro.

Sol. $3x^2 - y^2 - 16x + 16 = 0$, $3x^2 - y^2 - 8x = 0$

INDICE ALFABETICO

BIBLIOGRAFIA

1) Anfossi, Agustín
Geometría Analítica
Editorial Progreso

2) Bohuslor, Ronald
Geometría Analítica
Utheha

3) Kletemik, D.
Geometría Analítica
Mir, Publishers.

4) Lehmann, Charles
Geometría Analítica.
Limusa

5) Taylor, Howard
Geometría Analítica
Limusa

6) Steen, Frederick
Geometría Analítica
Publicaciones Cultural.