4/3
2 g

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CUANTIZACION DE MINISUPERESPACIOS: SCHWARZSCHILD Y KERR

Tesis que para obtener el grado de Físico presenta

Marcelo Salgado Rodríguez

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1990

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INTRODUCCION

CAPITULO I

CAPITULO II

CAPITULO III

CAPITULO IV

CAPITULO V

CAPITULO VI

CAPITULO VII

CONCLUSIONES

NOTACION

Indices griegos corren de 0 a 3, índices latinos de 1 a 3.

Derivadas temporales: se denotan en la forma tradicional $\frac{\partial f}{\partial t}$, con un punto $\dot{f}$ o con un índice que haga referencia explícita al tiempo f_t o $f_{,t}$.

Derivadas espaciales: $\frac{\partial f}{\partial x^i}$, $f_{,i}$ o f' cuando exista solamente una variable espacial.

Derivadas en notación covariante: $\frac{\partial f}{\partial x^\mu}$, $\partial^\mu f$ o $f_{,\mu}$.

Signatura: (- + + +)

Vectores: se denotan con una flecha: $\vec{x}$.

Cuadrivectores: se denotan con tilde: $\tilde{x}$.

Función de onda: $|\Psi\rangle$.

Operadores cuánticos: se identifican por un gorro $\hat{A}$.

Las densidades de funciones y de variables canónicas se escriben con letra caligráfica y griega respectivamente.

INTRODUCCION.

Uno de los conceptos que han sido de gran utilidad, quizás clave, en el desarrollo de la gravedad cuántica ha sido el concepto de *superespacio.*

Usualmente, es decir, antes de que el concepto de superespacio fuera introducido, se consideraba al Universo como un continuo espacio-tiempo cuya descripción quedaba completamente establecida con el tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Esto es, por un conjunto de 10 cantidades, en principio línealmente independientes, que debían satisfacer las ecuaciones de Einstein . Sin embargo, esta manera de describir la dinámica del espacio-tiempo no era totalmente adecuada si se deseaba obtener una versión cuántica. El hecho de que la forma del espacio (g_{ij}) y su evolución temporal ($\dot{g}_{ij}$) regidos por una medida de tiempo (g_{00} , g_{0i}) fueran conocidos en todo momento, una vez que las ecuaciones de Einstein quedaran resueltas, iba en contra de los principios cuánticos.

El concepto de superespacio, que condujo en algún sentido a la reformulación de las ecuaciones de la gravitación permitió concebir al Universo de una manera en el que el tiempo ya no jugaba un papel importante en la descripción de la geometría, sino que éste quedaba como un parámetro que podía ser fijado arbitrariamente.

La definición original de superespacio se debe a Wheeler: se denomina superespacio al espacio de todas las 3-geometrías.

Desde este punto de vista, la dinámica del espacio (geometrodinámica) queda representada como una trayectoria en el superespacio. Es decir, comenzamos con una 3-geometría inicial g_{ij} en un tiempo dado y observamos como evoluciona en el tiempo. A diferencia de la concepción espacio-tiempo, el tiempo en el superespacio no agrega una dimensión, simplemente es un parámetro.

Esta manera de describir el Universo puede compararse con la dinámica de partículas. En la dinámica de partículas el objeto dinámico es la partícula, cuya posición en el espacio-tiempo queda determinada por 4 cantidades $\tilde{x} = (x_0, \vec{x})$ (línea universo) que definen una trayectoria (en el espacio-tiempo). En la geometrodinámica el objeto dinámico es el espacio o 3-espacio cuya forma queda determinada por la 3-geometría o cantidades g_{ij} que describen una trayectoria en el superespacio. Clásicamente la historia de la partícula está dada por las ecuaciones parametricas $\vec{x} = \vec{x}(\tau)$, $t = t(\tau)$, mientras que la historia del Universo es conocida a través de la 4-geometría o cantidades $g_{\mu\nu}$.

Tomando en cuenta las concepciones que establece el superespacio, el elemento de línea espacio temporal se ha roto en tres partes, una parte púramente espacial, otra temporal y una que contiene a las dos:

$$ds^2 = -\left[N^2(\vec{x}, t) + N^i N_i(\vec{x}, t)\right] dt^2 + 2N_i(\vec{x}, t)\, dt\, dx + g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

donde

$$g^{ij} \equiv {}^4g^{ij} + \frac{N^i N^j}{N^2}$$

$${}^4g^{ij} \equiv \text{componentes espaciales de la métrica}\, g^{\mu\nu}$$

$$g_{ij} = {}^4g_{ij}$$

$$N \equiv \frac{-1}{\sqrt{-g_{00}}}$$

$$N^i \equiv N^2\, {}^4g^{0i}$$

$$N_i = {}^4g_{0i}$$

$$g_{00} = N_i N^i - N^2$$

Así que la historia clásica de un espacio-tiempo dado (la métrica $g^{\mu\nu}$) podrá reconstruirse a través de la evolución de la 3-geometría g_{ij} correspondiente, la cual quedaría determinada dando en cada instante el valor de la funciones $N(\vec{x})$ y $N_i(\vec{x})$.

Esta nueva manera de concebir al Universo y la necesidad de obtener una descripción cuántica de la gravitación condujeron a reformular la acción de Hilbert

$$S = \int R\sqrt{-g}\; d^4x$$

mediante un formalismo Hamiltoniano. Uno de ellos es la formulación ADM en la que la acción toma la siguiente forma

$$S = \int \left[\pi^{ij}\dot{g}_{ij} - N\mathcal{H} - N_i\mathcal{H}^i\right] d^4x$$

donde los π_{ij} son los momentos canónicamente conjugados a g_{ij} y $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^i$ son cantidades definidas en términos de los momentos y la 3-métrica.

A partir de la acción anterior pueden derivarse las ecuaciones clásicas variando la acción respecto de π^{ij} y g_{ij}. Estas ecuaciones estarán constreñidas por

$$\mathcal{H} = 0$$

$$\mathcal{H}_i = 0$$

que surgen de variar S respecto de N y N_i. Ahora, como las ecuaciones para π_{ij} y g_{ij} contienen a N y N_i no se pueden considerar como ecuaciones de superespacio. Sin embargo, las constricciones no las contienen. De hecho se puede demostrar que la constricción $\mathcal{H}$ contiene toda la información dinámica de la 3-geometría. También se puede demostrar que la constricción $\mathcal{H}_i = 0$ implica la arbitrariedad de selección del sistema de coordenadas y que por tanto no contiene información dinámica.

La formulacion ADM ha permitido dar el salto cuantico para describir la geometrodinamica del espacio a través de la ecuación de Wheeler-De Witt

$$\hat{\mathcal{H}}|\Psi\rangle = 0$$

Esta ecuación es la ecuación de Schrödiger en gravitación, donde por hipótesis se identifica a los momentos π_{ij} como los operadores cuánticos

$$\hat{\pi}_{ij} = -i\hbar \frac{\delta}{\delta g_{ij}}$$

Ahora conviene definir el concepto de minisuperespacio que jugará un papel muy importante en el intento de cuantización de los espacios de Schwarzschild y Kerr. Se ha dado el nombre de minisuperespacios a aquellas 3 geometrías a las cuales les han sido impuestas ciertas simetrías y cuya métrica depende de un número finito de parámetros.

En general, una 3-métrica en superespacio podría desarrollarse en términos de un conjunto completo de funciones f_n

$$g_{ij}(\vec{x},t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{ij}^{(n)}(t)\, f_n(\vec{x})$$

La condición para obtener un minisuperespacio es restringirse a un hiperplano dentro del espacio abstracto de los párametros $g_{ij}^{(n)}$. En otras palabras, considerar a todos, excepto a algunos parámetros $g_{ij}^{(n)}$ idénticamente cero. Estos parámetros como funciones del tiempo representarían, una vez que han sido resueltas las ecuaciones de Einstein, una trayectoria dentro del hiperplano considerado. El problema en ocasiones es que las ecuaciones de Einstein no siempre resultan ser consistentes para un minisuperespacio. Es decir, no siempre tienen solución para los parámetros que definen ese minisuperespacio. Estas inconsistencias son uno de los problemas que dificultan los intentos de cuantización. Otro problema que se puede presentar es la falta de compatibilidad entre las ecuaciones (de los párametros) derivadas por el formalismo ADM y las ecuaciones de Einstein. Por ejemplo, si hemos decidido escoger n parámetros, se obtendrán del formalismo ADM, a lo más $2n$ ecuaciones de primer orden en éstos, n para las variables dinámicas (los parámetros como funciones del tiempo) y n para sus momentos canónicamente conjugados. Es decir n ecuaciones dinámicas de segundo orden en las variables. Este número de ecuaciones no necesáriamente coincide con el número de ecuaciones de Einstein linealmente independientes para estos parámetros.

En resumen, se puede decir lo siguiente: si se desea obtener un modelo de minisuperespacio que sea susceptible de ser cuantizado, 1. Debe escogerse un cierto número de parámetros hasta que se obtenga una trayectoria en el espacio de estos, 2. Una vez obtenida la trayectoria, verificar que la información contenida en las ecuaciones que surgen de variar la acción ADM respecto de los párametros definidos y de sus momentos es equivalente a la de las ecuaciones de Einstein. En caso de no ser así, tendría que inventarse otra formulación hamiltoniana para ese problema en concreto.

Si los puntos 1 y 2 han sido resueltos, puede procederse a obtener el modelo cuántico de minisuperespacio a través de la ecuación de Wheeler-De Witt. En esta aproximación, se podría interpretar a la función $|\Psi\rangle$ como un paquete de ondas centrado alrededor de la solución clásica.

Ahora que se han expuesto las generalidades de las imágenes de superespacio y minisuperespacio, será conveniente hablar de los problemas específicos de que trata el presente estudio.

Originalmente, se pretendió cuantizar el minisuperespacio de Schwarzschild como ejercicio previo a la cuantización del de Kerr, sin saber a priori que para este último espacio el punto número dos no estaría satisfecho. De modo que se pensó en el modelo más simple posible para el de Schwarzschild. Es decir, tomar a la solución misma como métrica del minisuperespacio.

Como la solución a la 3-métrica

$$g_{11} = -e^{\mu}$$

$$g_{22} = r^2 \sin^2\theta\, e^{\mu}$$

$$g_{33} = r^2 \sin^2\theta e^{\mu}$$

$$g_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{para } \mu \neq \nu$$

estaba dada por

$$e^{\mu} = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4$$

se decidió tomar un desarrollo en serie de Laurent

$$e^{\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(t)}{r^n}$$

Entonces el minisuperespacio quedó definido tomando los cinco primeros términos del desarrollo

$$e^{\mu} \equiv A_0 + \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \frac{A_3}{r^3} + \frac{A_4}{r^4}$$

con $A_n = 0$ para $n\rangle 4$. De esta forma cada uno de los coeficientes A no nulos podrían identificarse diréctamente con los términos de la solución al desarrollar el binomio. Esta definición de minisuperespacio condujo a ecuaciones de Einstein dinámicas en μ que se sabía no tenían inconsistencias, pero cuya única solución clásica era $\mu = \mu(r)$. Es decir que los parámetros A tendrían que mantenerse constantes y por consiguiente la masa también o viceversa. Sin embargo para obtener una descripción cuántica era necesario considerar a m como función del tiempo.

Aunque de una manera poco interesante, el punto número 1. se había satisfecho. El siguiente paso era deducir las ecuaciones en m a partir de la formulación ADM.

Las ecuaciones canónicas que se obtuvieron de variar la acción resultante utilizando la definición anterior de minisuperespacio tenían exactamente la misma información que las ecuaciones de Einstein, por tanto el punto 2. también se había cumplido. Sin embargo, a pesar de que matemáticamente el modelo era consistente, físicamente no representaba nada, ya que el hamiltoniano de Wheeler-De Witt no condujo a ninguna ecuación cuya solución quedara expresada en términos de algún paquete de ondas.

En la conclusión correspondiente a este problema se sugieren algunas alternativas para intentar obtener alguna situación cuántica interesante en un estudio ulterior.

Finalmente con tristeza, hablaré un poco de los intentos realizados por obtener ecuaciones de Einstein consistentes con las derivadas de la acción ADM para el caso del minisuperespacio de Kerr.

La métrica de Kerr posee dos parámentros naturales, el momento angular por unidad de masa (a) y la masa (m). Considerando estas cantidades como los parámetros que definían el minisuperespacio de Kerr, se calcularon las ecuaciones de Einstein hasta segundo orden en los parámetros, como una aproximación que físicamente no estaba justificada, pero que matemáticamente era necesaria, pues de otro modo hubiera sido imposible construir el modelo por la complejidad de los cálculos.

Las ecuaciones de Einstein resultantes tenían solución en el vacío al tomar a, m =ctes. El problema estaba no en la autoconsistencia de las ecuaciones de Einstein, pues como acabamos de indicar sí existía solución , sino en que surgieron tres ecuaciones linealmente independientes provenientes de las componentes espaciales del tensor de Einstein. Por lo tanto una de ellas no sería obtenida de variar la acción ADM puesto que solamente se habían definido dos variables dinámicas. Así que el modelo de minisuperespacio de Kerr con tan sólo a y m, como variables dinámicas no era consistente. Esto implicaba, que había que tomar, entonces, o bien más de dos parámetros para definir el minisuperespacio o considerar una de las ecuaciones de Einstein como una ecuación más de constricción.

La cuantización de este minisuperespacio no se estudió debido a estas inconsistencias, sin embargo, la aportación que dejó el calcular las componentes del tensor de Einstein fué mostrar el por qué en principio no es posible obtener un modelo de minisuperespacio con el momento angular y la masa como variables dinámicas.

Para concluir la introducción, comentaré brevemente sobre la organización del trabajo.

La tesis esta dividida en siete capítulos. En el primero se da una introducción a las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana un poco para fijar ideas sobre los métodos variacionales. En el capítulo dos se plantea el problema de la cuerda vibrante para ejemplificar el uso de las formulaciones mencionadas, y su solución se da utilizando el metodo de Fourier. De esta forma queda preparado el camino para mostrar la cuantización de este campo, problema que se aborda en el capítulo tres. En este capítulo hago un resumen de las imágenes de Schrödinger y Heisenberg de la mecánica cuántica para abordar el problema cuántico de la cuerda. A partir del capítulo cuatro comienza el tema de gravitación, presentando la métrica de Schwarzschild y sus ecuaciones de Einstein. También se enuncia y demuestra el teorema de Birkhoff para hacer hincapié en el significado secundario que juega el uso de un determinado sistema de coordenadas. El capítulo concluye con la introducción de la métrica de Kerr. En el capítulo cinco se postula la acción ADM y se deducen las ecuaciones canónicas del minisuperespacio de Schwarzschild, las cuales son comparadas con las ecuaciones de Einstein para verificar la consistencia del problema. Para finalizar con el espacio de Schwarzschild, en el capítulo seis se resuelve la ecuación de Wheeler-De Witt para tres casos que tienen el mismo sentido clásico pero que desafortunadamente no producen situaciones cuánticas físicas. Por último, en el capítulo siete, se presentan las ecuaciones de Einstein para el minisuperesespacio de Kerr con el momento angular y la masa dependientes del tiempo, destacando los problemas de inconsistencia que se presentarían si se quiere conseguir una formulación ADM..

CAPITULO I

En este primer capítulo se dará una breve introducción a los principios variacionales elementales tomando como ejemplos las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana de sistemas de partículas y de campos.

§ 0.Principio Variacional.

La forma más general de obtener las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un sistema físico es a través del principio de *mínima acción* o principio de *Hamilton*, de acuerdo al cual la acción S definida

$$S \equiv \int L\, dt \tag{0.1}$$

es estacionaria respecto a pequeñas variaciones de sus variables dinámicas, donde L, el *lagrangiano*, es una función característica del sistema físico en cuestión.

Matemáticamente el principio de mínima acción puede escribirse de la siguiente manera

$$\delta S = \delta \int L\, dt = 0$$

donde

$$\delta \int L\, dt \equiv \frac{d}{dh} \int L\,(\,A(t) + h\,\delta A(t), \ldots, t\,)\; dt \tag{0.2}$$

A representa a las variables dinámicas del sistema, tal que $A(t_1)$ y $A(t_2)$ están dadas, δA es una función que se anula en los extremos t_1 y t_2, h es un parámetro real, y los puntos suspensivos indican la variacion δ respecto de las derivadas de A.

Cuando se intenta describir la dinámica de un campo, más que un lagrangiano, lo que se busca es una *densidad lagrangiana* $\mathcal{L}$, tal que

$$L = \int \mathcal{L}\, d\Omega$$

donde $d\Omega$ es el elemento de linea, superficie o volumen según sea el caso. Esta densidad lagrangiana puede depender, además del campo, de sus derivadas espaciales.

§ 1.Formulación Lagrangiana.

a) Sistemas Mecánicos:

Considérese un sistema mecánico cuyo lagrangiano está dado por

$$L = L\left(q_i(t),\, \dot{q}_i(t),\, t\right)$$

donde q_i representa a las coordenadas generalizadas del sistema, $\dot{q}_i$ las velocidades correspondientes y t el tiempo.

Entonces, la acción del sistema, de acuerdo con (0.1), será

$$S = \int L\left(q_i(t),\, \dot{q}_i(t),\, t\right)\, dt$$

Por lo tanto, según (0.2)

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{d}{dh} \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_i(t) + h\,\delta q_i\,,\, \dot{q}_i(t) + \frac{d}{dt}\,\delta q_i\,,\, t\right)\bigg|_{h=0} dt = 0 \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dh}\, L\left(q_i + h\,\delta q_i,\, \dot{q}_i + h\,\frac{d}{dt}\,\delta q_i\,,\, t\right)\bigg|_{h=0} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\,\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\frac{d}{dt}\,\delta q_i\right) dt
\end{aligned}$$

Integrando el segundo término por partes, se obtiene

$$0 = \delta q_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i \, dt$$

Ahora, $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i \, dt = 0$$

Como las funciones δq_i son complétamente arbitrarias, se concluye que

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

o bien

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (1.1)$$

Estas i ecuaciones diferenciales de segundo orden reciben el nombre de ecuaciones de *Euler-Lagrange*.

b) Campos:

Sea $\Phi_i = \Phi_i(\vec{x}, t)$ una función que representa el estado del campo y $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\Phi_i, \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}, \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}, \vec{x}, t\right)$ la densidad lagrangiana.

Entonces

$$S = \int \mathcal{L}\left(\Phi_i, \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}, \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}, \vec{x}, t \right) d^3x\, dt$$

Por lo tanto,

$$\delta S = \int_{\vec{x_1}}^{\vec{x_2}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dh} \mathcal{L}\left(\Phi_i + h\,\delta\Phi_i, \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} + h\frac{\partial \delta\Phi_i}{\partial x_j}, \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + h\frac{\partial \delta\Phi_i}{\partial t}, \vec{x}, t \right)\Bigg|_{h=0} d^3x\, dt$$

$$= \int_{\vec{x_1}}^{\vec{x_2}} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i}\delta\Phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}} \frac{\partial \delta\Phi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}} \frac{\partial \delta\Phi_i}{\partial t} \right) d^3x\, dt = 0$$

Integrando por partes los dos últimos términos, se obtiene

$$\int_{\vec{x_1}}^{\vec{x_2}} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}} \right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}} \right) \right] \delta\Phi_i\, d^3x\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\partial S} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}} \delta\Phi_i\, ds_j\, dt$$

$$+ \int_{\vec{x_1}}^{\vec{x_2}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}} \delta\Phi_i \Bigg|_{t_1}^{t_2} d^3x = 0$$

Si $\delta\Phi_i$ se anula tanto en t_1 y t_2 como en la superficie de integración, entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}} \right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} = 0 \qquad (1.2)$$

son las ecuaciones que describen el comportamiento del campo.

Estas ecuaciones en notación covariante quedan escritas en la siguiente forma

$$\partial^{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{i,\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} = 0 \tag{1.3}$$

§ 2.Formulación Hamiltoniana.

a)Sistemas Mecánicos:

Se define

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{2.1}$$

como el momento generalizado del sistema.

Suponiendo que de (2.1) es posible obtener las $\dot{q}_i$ en términos de los p_i , entonces se define

$$H = H(q_i(t), p_i(t), t) \equiv p_i \dot{q}_i - L \tag{2.2}$$

como el *hamiltoniano* del sistema.

Entonces, diferenciando

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt = -\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \dot{q}_i \, dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

de donde se concluye

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Pero por (1.1) y (2.1)

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i$$

entonces

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

Las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

forman un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden que reciben el nombre de ecuaciones de *Hamilton.*

b) Campos:

Por extensión, se define

$$\Pi_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_i} \tag{2.4}$$

como la densidad de momento.
Entonces la densidad hamiltoniana $\mathcal{H}$ queda definida

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Phi_i, \Phi_{i,j}, \Pi_i, \vec{x}, t) = \Pi_i \dot{\Phi}_i - \mathcal{L} \tag{2.5}$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en inciso a), se obtienen por (1.2) y (2.4) las siguientes ecuaciones de campo de Hamilton

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi_i} = \dot{\Phi}_i \tag{2.6}$$

$$-\partial^j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_{i,j}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_i} = -\dot{\Pi}_i \tag{2.7}$$

En términos de derivadas funcionales las ecuaciones anteriores pueden escribirse en forma más simétrica

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Pi_i} = \dot{\Phi}_i \tag{2.8}$$

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Phi_i} = -\dot{\Pi}_i \tag{2.9}$$

donde

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Pi_i} \equiv \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi_i}$$

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Phi_i} \equiv \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_i} - \partial^j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_{i,j}}$$

§ 3.Paréntesis de Poisson.

Sea $f = f(\, q_i(t),\, p_i(t),\, t\,)$

Entonces

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\,\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\,\dot{p}_i$$

Por (2.3)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Se define

$$[f, g] \equiv \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \tag{3.1}$$

como el *paréntesis de Poisson* entre f y g, donde también $g = g(q_i(t), p_i(t), t)$. Entonces

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] \tag{3.2}$$

Si $f \equiv q_j, p_j$, entonces por (2.3) y (3.1)

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= [q_j, H] \\ \dot{p}_j &= [p_j, H] \end{aligned} \tag{3.3}$$

Las ecuaciones (2.3) son las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico en términos de los paréntesis de Poisson.

Cláramente

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij} \tag{3.4}$$

Hasta este momento hemos fijado ideas sobre los métodos variacionales elementales aplic..dos a sistemas mécanicos y campos clásicos. Esto con el fin de familiarizarnos con la terminología. Por esa razón decidí tomar ejemplos en los que el lagrangiano y hamiltoniano de los campos dependían a lo más del campo y de sus primeras derivadas.

En el siguiente capítulo estudiaremos un caso muy concreto para mostrar en qué forma se pueden aplicar los resultados obtenidos en estas primeras secciones.

CAPITULO II.

En este capítulo ejemplificaré el empleo de las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana planteando el problema de la cuerda vibrante: una cuerda elástica fija en sus extremos con ciertas condiciones iniciales y de frontera. Posteriormente resuelvo el problema por el método de Fourier construyendo un hamiltoniano para un número infinito de partículas (osciladores armónicos) a partir del cual se obtienen las ecuaciones canónicas para cada una de ellas.

§ 4. La cuerda vibrante (ejemplo).

En el siguiente ejemplo se considera una cuerda fija en sus extremos ($x = 0$, $x = l$) como campo mecánico a resolver.

Para facilitar la descripción se harán las siguientes consideraciones: 1. la densidad ρ de la cuerda es constante. 2. no existen fuerzas externas; 3. no existe torsión en la cuerda.

Entonces, si $u = u(x, t)$ representa la posición de la cuerda en el punto x al tiempo t, entonces la energía cinética de la cuerda será

$$T = \int_0^l \frac{u_t^2 \rho}{2} ds \qquad (u_t \equiv \frac{\partial u}{\partial t})$$

donde u_t es la velocidad de la cuerda y ds es el elemento de longitud de arco de la misma. Es decir que $\rho\, ds$ es la masa de una porción infinitesimal de la cuerda. Por lo tanto,

$$T = \int_0^l \frac{u_t^2 \rho}{2} \sqrt{1 + u_x^2}\, dx \qquad (u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x})$$

Ahora, para encontrar la energía potencial apelaramos a la ley de Hooke que establece que el cambio en la energía potencial de un resorte es proporcional al desplazamiento del mismo. Si se considera que el elemento de arco de cuerda ds es totalmente elástico de modo que se comporte como un resorte, la energía potencial de la cuerda estará dada por

$$
\begin{aligned}
U &= \int_0^l \tau\, ds - \int_0^l \tau\, dx \\
&= \int_0^l \tau \left(\sqrt{1 + u_x{}^2} - 1 \right) dx
\end{aligned}
$$

El lagrangiano de la cuerda es por tanto

$$
L = T - U = \int_0^l \left[\left(\frac{\rho}{2} u_t{}^2 - \tau \right) \sqrt{1 + u_x{}^2} + \tau \right] dx
$$

y la densidad lagrangiana

$$
\mathcal{L} = \left(\frac{\rho}{2} u_t{}^2 - \tau \right) \sqrt{1 + u_x{}^2} + \tau \qquad ((4.1))
$$

Es claro que de la densidad lagrangiana anterior no se obtendrán ecuaciones de movimiento lineales en u, así que haré otra simplificación[1]. Consideraré que las variaciones de u temporales y espaciales son pequeñas respecto de la unidad y consevaré solamente los términos cuadráticos en u. Entonces

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &\approx \left(\frac{\rho}{2} u_t{}^2 - \tau \right) \left(1 + \frac{1}{2} u_x{}^2 \right) + \tau \\
&\approx \frac{\rho}{2} u_t{}^2 - \frac{\tau}{2} u_x{}^2 \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

Para obtener la densidad hamiltoniana se reescribe (4.2) en términos de la densidad de momento.

[1]En la referencia [7] se obtiene la ecuación de movimiento exacta de la cuerda, que es una ecuación cuasilineal en u.

Por (2.4)

$$\Pi = \frac{\partial L}{\partial u_t} = \rho\, u_t \tag{4.3}$$

entonces

$$\mathcal{L} = \frac{\Pi^2}{2\rho} - \frac{\tau}{2}\, {u_x}^2$$

Por (2.5)

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \Pi u_t - \left(\frac{\Pi^2}{2\rho} - \frac{\tau}{2}\, {u_x}^2\right) \\
&= \frac{\Pi^2}{\rho} - \frac{\Pi^2}{2\rho} + \frac{\tau}{2}\, {u_x}^2 \\
&= \frac{\Pi^2}{2\rho} + \frac{\tau}{2}\, {u_x}^2
\end{aligned} \tag{4.4}$$

A partir de (4.2) y (4.4) pueden obtenerse las ecuaciones de movimiento de la cuerda utilizando (1.2) y (1.7).

Ecuaciones de Lagrange:

Sustituyendo (4.2) en (1.2) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial u_x}\left(\frac{\rho}{2}u_t{}^2 - \frac{\tau}{2}u_x{}^2\right)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial u_t}\left(\frac{\rho}{2}u_t{}^2 - \frac{\tau}{2}u_x{}^2\right)\right] - \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\rho}{2}u_t{}^2 - \frac{\tau}{2}u_x{}^2\right] = 0$$

De donde

$$\rho\, u_{tt} - \tau\, u_{xx} = 0$$

o bien

$$\tau\, u_{xx} - \rho\, u_{tt} = 0 \tag{4.5}$$

La ecuación (4.5) es la ecuación de movimiento de la cuerda.

Ecuaciones de Hamilton:

Sustituyendo (4.4) en (2.6) y (2.7)

$$\frac{\partial}{\partial \Pi}\left[\frac{\Pi^2}{2\rho} + \frac{\tau}{2}u_x{}^2\right] = u_t \quad ,$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial u_x}\left(\frac{\Pi^2}{2\rho} + \frac{\tau}{2}u_x{}^2\right)\right] + \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\Pi^2}{2\rho} + \frac{\tau}{2}u_x{}^2\right] = -\dot{\Pi}$$

De donde

$$\frac{\Pi}{\rho} = u_t \tag{4.6}$$

$$\tau u_{xx} = \dot{\Pi} \tag{4.7}$$

que son las ecuaciones de movimiento canónicas de la cuerda. De (4.6) y (4.7) se deduce de inmediato (4.5) mostrando la equivalencia de ambas formulaciones.

§ 5.Desarrollos de Fourier (modos normales).

Para el problema de la cuerda vibrante, se define

$$u(x, t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{2}\, q_k(t) \sin(\frac{\pi k x}{l}) \tag{5.1}$$

la cual satisface las condiciones de frontera

$$u(x = 0, t) = u(x = l, t) = 0 \quad ,$$

Entonces

$$u_x = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{2}\, q_k(t) \frac{\pi k}{l} \cos(\frac{\pi k x}{l}) \tag{5.2}$$

$$u_t = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{2}\, \dot{q}_k(t) \sin(\frac{\pi k x}{l}) \tag{5.3}$$

Por (4.3) y (4.4) se obtiene

$$\mathcal{H} = \sum_{k,\,k'=0}^{\infty} \rho\,\dot{q}_k\,\dot{q}_{k'}\,\sin(\frac{\pi k x}{l})\,\sin(\frac{\pi k' x}{l}) + \tau q_k q_{k'} \frac{\pi^2}{l^2}\,kk'\,\cos(\frac{\pi k x}{l})\,\cos(\frac{\pi k' x}{l})$$

Por lo tanto

$$H = \int_0^l \mathcal{H}\,dx$$

$$= \sum_{k,\,k'=0}^{\infty} \rho\,\dot{q}_k\,\dot{q}_{k'} \int_0^l \sin(\frac{\pi k x}{l})\,\sin(\frac{\pi k' x}{l})\,dx$$

$$- \sum_{k,\,k'=0}^{\infty} \tau q_k q_{k'}\,\frac{\pi^2}{l^2}\,kk' \int_0^l \cos(\frac{\pi k x}{l})\cos(\frac{\pi k' x}{l})\,dx$$

Por ortogonalidad de las funciones *seno* y *coseno*,

$$H = \sum_{k,\,k'=0}^{\infty} \rho\,\dot{q}_k\,\dot{q}_{k'}\,(\frac{l}{2}\,\delta_{kk'}) + \tau q_k q_{k'}\,\frac{\pi^2}{l^2}\,kk'\,(\frac{l}{2}\,\delta_{kk'})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho\,l}{2}\,\dot{q_k}^2 + \frac{k^2}{2l}\tau\pi^2 {q_k}^2$$

Si

$$\rho l \equiv m$$

$$p_k \equiv m\,\dot{q}_k \tag{5.4}$$

$$\omega_k{}^2 \equiv \frac{\tau}{\rho}\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \tag{5.5}$$

Entonces

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k{}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega_k{}^2 q_k{}^2 \tag{5.6}$$

es la energía de la cuerda.

De (5.6) se aprecia que la energía de la cuerda es la suma de las energías de un conjunto infinito de osciladores armónicos que vibran con frecuencia ω_k ,(frecuencias propias o modos normales) siendo q_k y p_k las coordenadas y momentos canónicos de dichos osciladores.

Si se sustituye la ecuación (5.6) en (2.3) se obtienen

$$\frac{p_k}{m} = \dot{q}_k \quad , \tag{5.7}$$

$$m\,\omega_k{}^2\,q_k = -\dot{p}_k \tag{5.8}$$

De donde se deduce

$$\ddot{q}_k + \omega_k{}^2\,q_k = 0 \tag{5.9}$$

La solución de (5.9) está dada por

$$q_k(t) = \frac{A_k}{\sqrt{2}} \sin(\omega_k t) + \frac{B_k}{\sqrt{2}} \cos(\omega_k t)$$

Si

$$u_t(x,\, t = 0) = 0 \quad \text{(velocidad inicial cero)}$$

entonces

$$q_k(t) = \frac{A_k}{\sqrt{2}} \sin(\omega_k t)$$

Finalmente la posición de la cuerda estará dada por

$$u(x,\, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(\omega_k t) \sin(\frac{\pi k x}{l})$$

donde las A_k-s quedan determinadas por la posición inicial de la cuerda.

De este modo $u(x,t)$ queda representada por un conjunto infinito de osciladores armónicos con amplitud variable en la posición (ondas estacionarias).

CAPITULO III.

En el capítulo anterior se construyó el hamiltoniano de la cuerda como la suma de un número infinito de osciladores armónicos clásicos. Cuánticamente se sabe como resolver el problema del oscilador armónico, de modo que en este capítulo se usarán esos resultados para obtener la cuantización de la cuerda vibrante.

En la siguiente sección se da una breve introducción a los principios de la mecánica cuántica para luego abordar el problema cuántico de la cuerda como ejemplo de cuantización de campos. Esta descripción se realiza a través de las imágenes de Schrödinger y Heisenberg.

§ 6.Mecánica Cuántica.

Si $|\Psi(\vec{x}, t)\rangle$ representa al estado de un sistema atómico, entonces la ecuación que describe el comportamiento de dicho sistema es

$$\hat{H}\,|\Psi\rangle = i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\Psi(t)\rangle \qquad (\text{ Ecuación de Schrödinger })$$

donde H es el hamiltoniano del sistema.

Si el hamiltoniano $\hat{H}$ no depende explícitamente del tiempo la 'solución' formal a la ecuación de Schrödinger está dada por

$$|\Psi(\vec{x}, t)\rangle = e^{\frac{-iH(t-t_o)}{\hbar}}\,|\Psi(\vec{x}, t_o)\rangle \tag{6.1}$$

donde $|\Psi(\vec{x}, t_o)\rangle$ es el estado del sistema en un tiempo inicial t_o.
En la imagen de Schrödinger

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(q) \tag{6.2}$$

$$\text{con} \qquad \hat{p} \equiv -\imath\hbar \frac{\partial}{\partial q} \tag{6.3}$$

es decir

$$\hat{H} = -\hbar^2 \frac{\nabla^2}{2m} + V(q)$$

Ahora si $\hat{A}$ es el operador asociado a la observable a, entonces

$$a(t) \equiv \langle \Psi(\vec{x}, t) | \hat{A} | \Psi(\vec{x}, t) \rangle \tag{6.4}$$

$$= \langle \Psi(0) | e^{\imath \frac{H t}{\hbar}} \hat{A} \, e^{-\imath \frac{H t}{\hbar}} | \Psi(0) \rangle$$

donde

$$\langle \Psi(\vec{x}, t) | \equiv | \Psi(\vec{x}, t) \rangle^*$$

$$\text{y} \qquad \langle \Psi(0) | \equiv \langle \Psi(\vec{x}, t_\circ) | \, e^{-\imath \frac{H t_\circ}{\hbar}}$$

$$\hat{A}(t) \equiv e^{i\frac{Ht}{\hbar}}\,\hat{A}\,e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} \tag{6.5}$$

entonces

$$a(t) = \langle \Psi(0)|\,\hat{A}(t)\,|\Psi(0)\rangle \tag{6.6}$$

La ecuación (6.6) muestra que se pueden usar dos imágenes distintas aunque equivalentes para describir la evolución temporal del sistema.

En la de Schrödinger los operadores $\hat{A}$ están fijos, mientras que los vectores de estado $|\Psi\rangle$ evolucionan en el espacio de Hilbert.

En la imagen de Heisenberg los vectores de estado están fijos al tiempo t_o, pero las observables cambian en el tiempo (ec. (6.5))

Ahora

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}(t) = \frac{i\hat{H}}{\hbar}\hat{A}(t) - \frac{i\hat{A}(t)}{\hbar}\hat{H}$$

$$= -\frac{i}{\hbar}(\hat{A}\hat{H} - \hat{H}\hat{A}) \tag{6.7}$$

Si

$$\hat{A}\hat{H} - \hat{H}\hat{A} \equiv [\hat{A}, \hat{H}] \tag{6.8}$$

se define como el *conmutador* entre $\hat{A}$ y $\hat{H}$, entonces

$$i\hbar \frac{\partial \hat{A}(t)}{\partial t} = [\hat{A}(t), \hat{H}] \tag{6.9}$$

La ecuación (6.8) es la ecuación de movimiento en la imagen de Heisenberg, donde el conmutador [,] es el operador cuántico correspondiente al paréntesis de Poisson.

Aunque la imagen de Heisenberg es más usada en la teoría cuántica de campos, en el presente trabajo se utilizará más bien la de Schrödinger para el caso de gravedad cuántica.

Para resumir los principios anteriores, se pueden nombrar las reglas básicas necesarias para cuantizar un sistema dinámico.

1. Encontrar el hamiltoniano del sistema a través del lagrangiano.

2. Asegurarse que las coordenadas canónicas y los momentos correspondientes son funciones de un sólo parámetro (trayectorias de partículas , p.ej. q_k y p_k en (5.6)) y que satisfacen las reglas de conmutación (3.4).

3. A partir del hamiltoniano, escribir la ecuación de Schrödinger o Heisenberg .

4. Resolver la ecuación de Schrödinger para el estado $|\Psi\rangle$ del sistema o construir éste a partir de los operadores de Heisenberg .

§ 7.Cuantización de Campos.

Existen varios métodos de cuantización de campos. Uno de ellos consiste , como se ha visto en el capítulo dos, en construir el hamiltoniano del campo a través de desarrollos en serie, en el que los coeficientes juegan el papel de coordenadas de un vector en un espacio de dimensión infinita. Estas coordenadas y sus momentos canónicamente conjugados se transforman por hipótesis en operadores cuánticos que deben satisfacer las reglas de conmutación anteriormente citadas. A partir de estas hipótesis se puede proceder a cuantizar el campo siguiendo cualquiera de las dos imágenes mencionadas. En la imagen de Schrödinger los operadores de momento toman la forma de operadores diferenciales, de modo que la ecuación de Schrödinger del problema será una ecuación diferencial parcial de segundo orden en una dimensión infinita que se aplica sobre una función $|\Psi\rangle$ (función de onda del campo) que depende igualmente de un número infinito de coordenadas (los coeficientes del desarrollo) y del tiempo.

En la imagen de Heisenberg, se construyen a partir de las coordenadas y momentos, operadores de creación y destrucción de partículas que operan sobre el estado inicial del campo (el vacio) o el final. Dependiendo de las reglas de conmutación o anticonmutación de estos operadores, se podrá interpretar el estado del campo como el estado de un conjunto infinito de bosones o fermiones.

Otro método que se emplea en la cuantización de campos es el de integrales de trayectoria, cuyo objetivo es contruir el propagador del campo por medio de la acción del sistema en cuestión.

A pesar de que extisten diversos métodos para cuantizar campos, ninguno de ellos ha podido liberarse de los problemas que emergen de la propia teoría. Uno de ellos es el manejo de infinitos que aparecen por todos lados. Por ejemplo, al considerar el hamiltoniano del sistema como la energía de un número infinito de partículas, la energía del estado base del campo será igual a la suma de las energías de los estados base de cada una de las partículas. Por lo tanto, la energía del estado base del campo será infinita. Es común, en este tipo de problemas, redefinir el origen de energías para evitar el infinito del estado base. Sin embargo esta alternativa no resuelve el problema intrínseco de la teoría.

A manera de ejemplo, consideraremos la cuerda vibrante como sistema a cuantizar. Las reglas 1 y 2, para este campo, ya se han satisfecho mediante las ecuaciones (5.6), (5.7) y (5.8). Así que procederemos a escribir la ecuación de Schrödinger usando (6.3).

Entonces

$$\hat{H} = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial {q_k}^2} + \frac{1}{2} m\, {\omega_k}^2\, {q_k}^2 \tag{7.1}$$

y por tanto

$$\left[\ \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial {q_k}^2} + \frac{1}{2} m\, {\omega_k}^2\, {q_k}^2 \right] \quad |\Psi(q_k\,,t)\rangle = \imath\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(q_k\,,t)\rangle$$

que es la ecuación de Schrödinger para un conjunto infinito de osciladores armónicos cuánticos.

Para el k-ésimo oscilador se tiene que

$$
|\Psi_n(q_k, t)\rangle_k = C_n e^{-\frac{m\omega_k}{\hbar} q_k^2} H_n(q_k) e^{-\frac{i E_{n k} t}{\hbar}} \tag{7.2}
$$

representa su estado en el nivel n.

Mientras que

$$
E_{n\,k} = \hbar\,\omega_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right) \tag{7.3}
$$

es su energía.

$$
C_n = \left(\sqrt{\pi}\,\alpha_o\,2^n\,n! \right) \qquad ({\alpha_o}^2 = \frac{\hbar}{m\,\omega_k})
$$

es el coeficiente de normalización, y H_n son los polinomios de Hermite.

Entonces, el estado de todo el sistema estará dado por

$$
|\Psi_n(q_1, \ldots, q_k, \ldots)\rangle = \prod_{k=0}^{\infty} |\Psi_{n\,k}\rangle \tag{7.4}
$$

y la energía

$$E_n = \sum_{k=0}^{\infty} E_{n\,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar\,\omega \left(n_k + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{1}{2}\hbar\,\omega + \sum_{k=0}^{\infty} n_k\,\hbar\,\omega \tag{7.5}$$

De la ecuación (7.5) se aprecia que la energía de la cuerda en su estado base es infinita

$$E_o = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\hbar\,\omega \tag{7.6}$$

Esta energía suele interpretarse como la energía del vacío, y con un corrimiento en el origen de energías puede "eliminarse".

Ahora cuanticemos la cuerda a través de la formulación de Heisenberg.

De (5.6) se tiene que el hamiltoniano del k-ésimo oscilador es

$$\hat{H}_k = \frac{\hat{p}_k^2}{2m} + \frac{1}{2} m\,{\omega_k}^2\,\hat{q}_k^2 \tag{7.7}$$

En la imagen de Heisenberg los operadores de momento y posición $\hat{p}_k$, $\hat{q}_k$ satisfacen las reglas de conmutación

$$[\,\hat{q}_k\,,\hat{p}_{k'}\,] = \imath\,\hbar\,\delta_{k\,k'} \tag{7.8}$$

Tomando en cuenta (7.8), la ecuación (7.7) puede reescribirse de la siguiente manera

$$\hat{H}_k = \hbar\,\omega_k \left(\hat{q}_k \sqrt{\frac{m\,\omega_k}{2\hbar}} - \frac{\imath\,\hat{p}_k}{\sqrt{2m\,\hbar\,\omega_k}} \right) \left(\hat{q}_k \sqrt{\frac{m\,\hbar}{2\hbar}} + \frac{\imath\,\hat{p}_k}{\sqrt{2m\,\hbar\,\omega_k}} \right) + \frac{\hbar\,\omega_k}{2}$$

Si

$$\hat{a}_k \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{q}_k \sqrt{\frac{m\,\omega_k}{\hbar}} + \frac{\imath\,\hat{p}_k}{\sqrt{m\,\hbar\,\omega_k}} \right)$$

$$\hat{a}_k^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{q}_k \sqrt{\frac{m\,\omega_k}{\hbar}} - \frac{\imath\,\hat{p}_k}{\sqrt{m\,\hbar\,\omega_k}} \right)$$

entonces

$$\hat{H}_k = \hbar\,\omega_k\,\hat{a}_k^\dagger\,\hat{a}_k + \frac{\hbar\,\omega_k}{2} \tag{7.9}$$

$$\text{con} \quad [\,\hat{a}_k\,, \hat{a}_{k'}^\dagger\,] = \delta_{k\,k'} \tag{7.10}$$

Ahora, si $|E_k\,\rangle$ es un eigenestado de $\hat{H}_k$ con eigenvalor E_k, entonces

$$\hat{H}_k\,\left(\,\hat{a}_k\,|E_k\,\rangle\,\right) = \left(\hat{a}_k\,\hat{H}_k - \hbar\,\omega_k\,\hat{a}_k\right)\,|E_k\rangle \tag{7.11}$$

que se obtiene del hecho

$$[\hat{H}_k , \hat{a}_k] = -\hbar\,\omega_k\,\hat{a}_k \tag{7.12}$$

Entonces

$$\hat{H}_k\ (\hat{a}_k |E_k\rangle) = (E_k - \hbar\,\omega_k)\ (\hat{a}_k |E_k\rangle) \tag{7.13}$$

Es decir, $\hat{a}_k |E_k\rangle$ es también eigenestado de H_k pero con eigenvalor $E_k - \hbar\,\omega_k$. Aplicando sucesivamente el operador $\hat{a}_k$ se concluye que H_k tiene los eigenvalores

$$E_k , E_k - \hbar\,\omega_k , \ldots , E_k - n\,\hbar\,\omega_k$$

Ahora

$$\langle \hat{H}_k \rangle = \hbar\,\omega_k \left(\langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle + \frac{1}{2} \right) \geq \frac{1}{2}\hbar\,\omega_k$$

Entonces la energía mínima del oscilador es

$$E_{k\,min} \equiv E_{b\,k} \geq \frac{1}{2}\hbar\,\omega_k$$

Por lo tanto

$$\hat{a}_k |E_{bk}\rangle = 0 \tag{7.14}$$

Como $\hat{a}$ reduce la energía en cantidades $\hbar\,\omega$, se concluye que la energía $E_{n\,k}$ estará dada por

$$E_{n\,k} = \frac{1}{2}\hbar\,\omega_k + n_k\,\hbar\,\omega_k \tag{7.15}$$

que coincide con (7.3).

Si se aplica $\hat{H}_k$ al estado $|E_{b\,k}\rangle$ se obtiene

$$\hat{H}_k\,|E_{b\,k}\rangle = \hbar\,\omega_k\,\left(\hat{a}_k^\dagger\,\hat{a}_k + \frac{1}{2}\right)\,|E_{b\,k}\rangle = \frac{1}{2}\hbar\,\omega_k\,|E_{b\,k}\rangle$$

lo cual confirma el valor obtenido para $|E_{b\,k}\rangle$.

Si ahora se calcula $\hat{H}_k\,\left(\hat{a}_k^\dagger\,|E_k\rangle\right)$ utilizando

$$[\,\hat{H}_k\,,\hat{a}_k^\dagger\,] = \hbar\,\omega_k\,\hat{a}_k^\dagger$$

se obtiene

$$\hat{H}_k\,\left(\hat{a}_k^\dagger\,|E_k\rangle\right) = (\,E_k + \hbar\,\omega_k\,)\,\left(\hat{a}^\dagger{}_k\,|E_k\rangle\right) \tag{7.16}$$

Es decir, $\hat{a}_k^\dagger$ aumenta la energía en cantidades $\hbar\,\omega$.

Por lo tanto

$$|E_{n\,k}\rangle = \frac{(\hat{a}_k^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|E_{b\,k}\rangle \tag{7.17}$$

donde $\frac{1}{\sqrt{n!}}$ es el factor de normalización.

Para obtener la dependencia temporal explícita en los eigenestados, deben obtenerse $\hat{a}_k = \hat{a}_k(t)$ y $\hat{a}_k^\dagger = \hat{a}_k^\dagger(t)$. Para ello se aplica la ecuación (6.9).

Entonces

$$\imath\hbar\,\dot{\hat{a}}_k = [\hat{a}_k, \hat{H}_k] = \hbar\,\omega_k\,\hat{a}_k$$

de donde

$$\dot{\hat{a}}_k = -\imath\,\omega_k\,\hat{a}_k$$

cuya solución es

$$\hat{a}_k(t) = \hat{a}_k(t=0)\,e^{-\imath\omega_k t}$$

Análogamente

$$\hat{a}_k^\dagger(t) = \hat{a}_k^\dagger(t=0)\,e^{\imath\omega_k t}$$

Así que

$$|E_{n\,k}\,,t\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}_k^\dagger(t=0)\right)^n |E_{b\,k}\,,t=0\rangle\, e^{i\,n\,\omega_k\,t} \tag{7.18}$$

es el estado del k-ésimo oscilador con energía

$$E_{n\,k} = \left(n_k + \frac{1}{2}\right)\hbar\,\omega_k$$

Por lo tanto el estado de la cuerda estará dado por

$$|E_n\,,t\rangle = \prod_{k=0}^{\infty} |E_{nk}\,,t\rangle \tag{7.19}$$

con energía

$$E_n = E_\circ + \sum_{k=0}^{\infty} n_k\,\hbar\,\omega_k$$

Ahora, como los operadores de creación de partículas $\hat{a}_k^\dagger$ conmutan entre sí, entonces en (7.19) se tiene una simetría de intercambio de partículas. Es decir, la cuerda está descrita por el estado de bosones.

Hasta esta sección he dado una breve introducción a las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana tanto de partículas como de campos, ejemplificando éstas con el planteamiento del problema de la cuerda vibrante. También se ha visto que el el método de Fourier es una muy buena alternativa para resolver problemas en los que intervienen campos, dejando el camino preparado para la cuantización. A partir del siguiente capítulo entramos al tema de gravitación, comenzando en la seción § 9 con el espacio de Schwarzschild, su métrica y sus ecuaciones de Einstein.

CAPITULO IV.

En la siguiente sección se obtendrá la métrica de un campo gravitacional esféricamente simétrico en dos sistemas de coordenadas (Schwarzschild e isotrópicas), ligadas por dos ecuaciones de transformación cuya solución aparece en términos de dos funciones que definen a la métrica. Estas funciones encontrarán su solución en las ecuaciones de Einstein (sección § 10). Más adelante, en la sección § 11, se enunciará el llamado *teorema de Birkhoff*, que establece la equivalencia de los sistemas de coordenadas utilizados para describir la métrica de este tipo de campos.

§ 8. Espacio de Schwarzschild.

Una manera de obtener la métrica que describe a la geometría del espacio-tiempo producida por la presencia de una distribucion de materia esféricamente simétrica es tratando de generalizar la métrica de Minkowski expresada en coordenadas esféricas. Esto es

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2\,d\Omega^2 \qquad (c=1) \tag{8.1}$$

donde

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2$$

Entonces, para introducir en (8.1) la presencia del campo esféricamente simétrico, podemos escribir el elemento de línea de la siguiente manera

$$ds^2 = -e^{\phi}\,dt^2 + e^{\Lambda}\,dr^2 + R^2 d\Omega^2 \tag{8.2}$$

donde ϕ, Λ, y R son funciones de r y t.

Aparentemente una métrica más general podría ser

$$ds^2 = -a^2\, dt'^2 - 2abdr\, dt' + c^2\, dr^2 + R^2\, d\Omega^2 \tag{8.3}$$

Sin embargo, definiendo

$$e^{\frac{\phi}{2}}\, dt \equiv a\, dt' + b\, dr$$

$$e^{\Lambda} \equiv b^2 + c^2$$

de (8.3) se deduce (8.2).

Por otro lado, como hasta ahora ϕ, Λ y R son arbitrarias, se puede escoger

$$R = r^2$$

entonces (8.2) queda

$$ds^2 = -e^{\phi}\, dt^2 + e^{\Lambda}\, dr^2 + r^2\, d\Omega^2 \tag{8.4}$$

faltando por determinar las dos funciones ϕ y Λ.

Este sistema de coordenadas recibe el nombre de coordenadas de *curvatura* o de *Schwarzschild.*

Si

$$
\left.\begin{aligned}
e^{\Lambda}\, dr^2 \;&\equiv\; e^{\mu}\, d\bar{r}^2 \\
r^2 \;&\equiv\; e^{\mu}\, \bar{r}^2
\end{aligned}\right\} \tag{8.5}
$$

entonces la ecuación (8.4) se transforma en

$$
ds^2 = -e^{\phi}\, dt^2 + e^{\mu}\,(d\bar{r}^2 + \bar{r}^2\, d\Omega^2) \tag{8.6}
$$

$$
\text{con} \qquad \mu = \mu(\bar{r}), \qquad \phi = \phi(\bar{r})
$$

Para que tengan sentido las ecuaciones de transformación (8.5) nos debemos limitar al caso estático. Entonces será posible resolver el sistema que se obtiene de (8.5)

$$
e^{\Lambda}\, r'^2 = e^{\mu}
$$

$$
r^2 = e^{\mu}\, \bar{r}^2
$$

donde $\Lambda = \Lambda(r)$

Dividiendo ambas ecuaciones se obtiene

$$
e^{\Lambda}\, \frac{r'^2}{r^2} = \frac{1}{\bar{r}^2}
$$

De donde

$$\bar{r} \propto \exp\left[\int \frac{e^{\frac{\Lambda}{2}}}{r}\, dr\right] \tag{8.7}$$

y por lo tanto

$$e^{\mu} \propto r^2 \exp\left[-2\int \frac{e^{\frac{\Lambda}{2}}}{r}\, dr\right] \tag{8.8}$$

Las ecuaciones (8.7) y (8.8) transforman las coordenadas de Schwarzschild a las llamadas coordenadas *isotrópicas* $\bar{r}$, t, θ, ϕ.

En la siguiente sección, al encontrar la solución a las ecuaciones de Einstein, se escribirá la relación explícita entre r y $\bar{r}$ así como el valor de Λ en términos de r.

§ 9. Ecuaciones de Einstein del espacio de Schwarzschild.

Consideremos la métrica (8.6)

$$ds^2 = -e^{\phi}\, dt^2 + e^{\mu}\,(\, d\bar{r}^2 + \bar{r}^2\, d\Omega^2\,)$$

$$\text{con} \qquad \phi = \phi(\bar{r}, t)$$

$$\mu = \mu(\bar{r}, t)$$

haciendo notar que las ecuaciones (8.7) y (8.8) sólamente fueron válidas para el caso estático.

El tensor métrico $g_{\mu\nu}$ estará dado por

$$
\left.\begin{aligned}
g_{00} &= -e^{\phi} \\
g_{11} &= e^{\mu} \\
g_{22} &= e^{\mu}\,\bar{r}^2 \\
g_{33} &= \bar{r}^2\, e^{\mu} \sin\theta^2 \\
g_{\mu\nu} &= 0 \qquad \text{para} \quad \mu \neq \nu.
\end{aligned}\right\} \tag{9.1}
$$

Sustituyendo (9.1) en las ecuaciones de Einstein

$$
R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}\, R = 8\pi\, T^{\mu}_{\nu} \tag{9.2}
$$

y recordando que

$$
R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\,\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\,\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}
$$

$$
\text{con} \quad \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}\left(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}\right)
$$

se obtienen

$$8\pi T_1^1 = -e^{-\mu}\left(\frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu'\phi'}{2} + \frac{\mu' + \phi'}{r}\right) + e^{-\phi}\left(\ddot{\mu} + \frac{3}{4}\dot{\mu}^2 - \frac{\dot{\mu}\dot{\phi}}{2}\right) \tag{9.3}$$

$$8\pi T_2^2 = 8\pi T_3^3 = -e^{\mu}\left(\frac{\mu''}{2} + \frac{\phi''}{2} + \frac{\phi'^2}{4} + \frac{\mu' + \phi'}{2r}\right) + e^{-\phi}\left(\ddot{\mu} + \frac{3}{4}\dot{\mu}^2 - \frac{\dot{\mu}\dot{\phi}}{2}\right) \tag{9.4}$$

$$8\pi T_4^4 = -e^{-\mu}\left(\mu'' + \frac{\mu'^2}{4} + \frac{2\mu'}{r}\right) + \frac{3}{4}e^{-\phi}\dot{\mu}^2 \tag{9.5}$$

$$8\pi T_4^1 = e^{\mu}\left(\dot{\mu}' - \frac{\dot{\mu}\phi'}{2}\right) \tag{9.6}$$

$$8\pi T_1^4 = e^{-\mu}\left(\dot{\mu}' - \frac{\dot{\mu}'\dot{\phi}'}{2}\right) \tag{9.7}$$

Se sabe que las soluciones estáticas de estas ecuaciones en el vacío están dadas por

$$e^{\mu} = \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)^4 \tag{9.8}$$

$$e^{\phi} = \left(\frac{1 - \frac{M}{2\bar{r}}}{1 + \frac{M}{2\bar{r}}}\right)^2 \tag{9.9}$$

Así que para el caso dinámico se tendrían que resolver las siguientes ecuaciones

$$e^{-\phi}\left(\ddot{\mu} + \frac{3}{4}\dot{\mu}^2 - \frac{\dot{\mu}\dot{\phi}}{2}\right) = 0 \tag{9.10}$$

$$e^{-\phi}\dot{\mu}^2 = 0 \tag{9.11}$$

$$e^{-\mu}\left(\dot{\mu}' - \frac{\dot{\mu}\dot{\phi}}{2}\right) = 0 \tag{9.12}$$

Sin embargo de (9.10) se obtiene que

$$\mu = \mu(r)$$

Con esta condición automáticamente se cumplen (9.10) y (9.11). Esto sucede independientemente de que ϕ sea o no función del tiempo. De hecho, en la sección § 11 veremos de que forma puede depender ϕ respecto del tiempo

Ahora bien, por sustitución directa se puede demostrar que

$$r = \bar{r}\left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)^2$$

$$\text{y} \quad e^{\Lambda} = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}$$

junto con (9.7), satisfacen las ecuaciones (8.5). Es decir, en coordenadas de Schwarzschild el elemento de línea (8.4) está dado por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2\, d\Omega^2 \tag{9.13}$$

§ 10. Teorema de Birkhoff.

Antes de enunciar el teorema, es conveniente hacer notar que desde el inicio de la sección § 9 se pudo tomar el punto de vista que se expondrá a continuación sin hacer mención alguna del teorema de Birkhoff. Pero de haberlo hecho así, quizás no se habría destacado el hecho de que el sistema de coordenadas no tiene ninguna relevancia física, sino que más bien la física está implícita en las hipótesis que condujeron a la geometría (9.13).

Considérese una región dada del espacio-tiempo que sea esféricamente simétrica y al mismo tiempo solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío. Entonces esa geometría es necesáriamente parte de la geometría de Schwarzschild.

Para probar el teorema utilicemos las coordenadas de Schwarzschild

$$ds^2 = -e^{\phi}\, dt^2 + e^{\Lambda}\, dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

$$\text{con} \qquad \phi = \phi(r,t) \quad \text{y} \quad \Lambda = \Lambda(r,t)$$

Sustituyendo en las ecuaciones de Einstein en el vacío, se obtiene

$$r^{-2}(1 - e^{-\Lambda}) + (\frac{\Lambda_{,r}}{r})\, e^{-\Lambda} = 0 \tag{10.1}$$

$$\frac{\Lambda_{,t}}{r}\, e^{-\frac{1}{2}(\Lambda+\Phi)} = 0 \tag{10.2}$$

$$\frac{\phi_{,r}}{r}\, e^{-\Lambda} + r^{-2}(e^{-\Lambda} - 1) = 0 \tag{10.3}$$

$$\frac{1}{2}(\phi_{,rr} + \frac{1}{2}\phi^2_{,r} - \frac{1}{2}\phi_{,r}\Lambda_{,r} + \frac{\phi_{,r}}{r} - \frac{\Lambda_{,r}}{r})\, e^{-\Lambda}$$
$$-\frac{1}{2}(\Lambda_{,tt} + \frac{1}{2}\Lambda^2_{,r} - \frac{1}{2}\Lambda_{,t}\phi_{,t})\, e^{-\phi} = 0 \tag{10.4}$$

De la ecuación (10.2) se concluye que Λ es función solamente de r.

La ecuación (10.1) se puede resolver diréctamente por separación de variables:

$$r^{-2}\left(1 - e^{-\Lambda}\right) = \frac{-\Lambda_{,r}}{r}e^{-\Lambda}$$

Entonces

$$\frac{1}{r} = -\frac{d\Lambda}{dr}\,\frac{e^{-\Lambda}}{1 - e^{-\Lambda}} \tag{10.5}$$

Por lo tanto

$$\frac{dr}{r} = \frac{-e^{-\Lambda}}{1 - e^{-\Lambda}}\,d\Lambda$$

Integrando

$$\mathrm{Ln}(r) + \mathrm{cte} = -\mathrm{Ln}(1 - e^{-\Lambda})$$

De donde

$$1 - e^{-\Lambda} = \frac{1}{kr} \qquad (\mathrm{k{=}cte})$$

Finalmente

$$\Lambda = -\mathrm{Ln}\left(1 - \frac{1}{kr}\right) \tag{10.6}$$

Ahora, de (10.3) se obtiene

$$r\,\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1-e^{-\Lambda}}{e^{-\Lambda}}$$

Pero de (10.5)

$$-r\,\frac{d\Lambda}{dr} = \frac{1-e^{-\Lambda}}{e^{-\Lambda}}$$

Así que

$$r\,\frac{\partial\phi}{\partial r} = -r\,\frac{d\Lambda}{dr}$$

Por lo tanto

$$\phi(r,t) = -\Lambda + f(t)$$

Entonces

$$\phi(r,t) = \mathrm{Ln}\left|1-\frac{1}{kr}\right| + f(t)$$

Si

$$k \equiv \frac{1}{2M}$$

entonces el elemento de línea queda

$$ds^2 = -e^{2f(t)}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)$$

Si redefinimos el tiempo

$$t_{nuevo} \equiv \int e^{f(t)}\, dt$$

entonces se obtiene el elemento de línea correspondiente a las coordenadas de Schwarzschild :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \tag{10.7}$$

§ 11.Métrica de Kerr.

En las secciones anteriores obtuvimos algunas representaciones de la geometría del espacio-tiempo producida por cuerpos que poseían simetría esférica.

Ahora consideraremos el caso en el que la simetría esférica ha sido rota debido a la rotación del cuerpo[2]. Entonces, desde este punto de vista, la métrica que antes dependía de un sólo parámetro (la masa), ahora dependerá además del momento angular del cuerpo.

[2]Estríctamente hablando debería decirse un cuerpo puntual con espin, ya que no se ha podido interpretar a la métrica de Kerr como la geometría producida por un cuerpo en rotación.

El campo gravitacional del cuerpo en rotación estará dado por la siguiente métrica axialmete simétrica y estacionaria (Métrica de Kerr):

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a\sin^2\theta\, d\phi)^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[(r^2 + a^2)\,d\phi - a dt\right]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2\, d\theta^2 \quad (11.1)$$

donde

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2$$

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta$$

$$a \equiv \frac{S}{M} \equiv \text{momento angular por unidad de masa.}$$

Es claro que si el momento angular a es cero, la métrica de Kerr se reduce a la de Shwarzschild.

De hecho, si consideramos que $a \ll r$, la métrica de Kerr queda descrita por la de Schwarzschild más una perturbación.

Para apreciar este punto, escribamos (11.1) explícitamente:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2\, d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\rho^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta\, d\phi$$

$$+ \frac{2Mra}{\rho^2}\sin^2\theta\, d\phi\, dt$$

Entonces

$$
\left.
\begin{aligned}
g_{tt} &= -\left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right) = -\left(1 - \frac{2M}{r\,(1 + \frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta)}\right) \\
g_{rr} &= \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 - 2Mr + a^2} = \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{(r^2 - 2Mr)\left(1 + \frac{a^2}{r^2 - 2Mr}\right)} \\
g_{\theta\theta} &= r^2 + a^2\cos^2\theta \\
g_{\phi\phi} &= r^2\sin^2\theta + a^2\sin^2\theta + \frac{2Mra^2\sin^4\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta} \\
&= r^2\sin^2\theta + a^2\sin^2\theta + \frac{2Ma^2\sin^4\theta}{r\,(1 + \frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta)} \\
g_{\phi t} &= \frac{Mra\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta} = \frac{Ma\sin^2\theta}{r\,(1 + \frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta)}
\end{aligned}
\right\} \qquad (11.2)
$$

Desarrollando en serie hasta términos de segundo orden en a, se obtiene

$$g_{tt} \approx -\left[1 - \frac{2M}{r}\,(1 - \frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta\,)\right]$$

$$= -(1 - \frac{2M}{r}) - \frac{2Ma^2\cos^2\theta}{r^3}$$

$$= g_{tt\ Shw} - \frac{2Ma^2\cos^2\theta}{r^3}$$

$$g_{rr} \approx \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 - 2Mr}\left(1 - \frac{a^2}{r^2 - 2Mr}\right)$$

$$\approx \frac{r^2}{r^2 - 2Mr} - \frac{a^2}{r^2 - 2Mr}\left(\frac{r^2}{r^2 - 2Mr} - \cos^2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{\frac{a^2}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}}\left(\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} - \cos^2\theta\right)$$

$$= g_{rr\ Shw} - \frac{\frac{a^2}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}}\left(\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} - \cos^2\theta\right)$$

$$g_{\theta\theta} = r^2 + a^2\cos^2\theta = g_{\theta\theta\ Shw} + a^2\cos^2\theta$$

$$g_{\phi\phi} \approx r^2\sin^2\theta + a^2\sin^2\theta + \frac{2Ma^2}{r}\sin^4\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta\right)$$

$$\approx r^2\sin^2\theta + a^2\sin^2\theta + \frac{2Ma^2}{r}\sin^4\theta$$

$$\approx g_{\phi\phi\ Shw} + a^2\sin^2\theta\left(1 + \frac{2M}{r}\sin^2\theta\right)$$

$$g_{\phi t} \approx \frac{Ma}{r}\sin^2\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta\right)$$

$$\approx \frac{Ma}{r}\sin^2\theta$$

Entonces para r muy grande respecto de a se puede escribir

$$g_{\mu\nu_{Kerr}} = g_{\mu\nu_{Shw}} + h_{\mu\nu}$$

donde

$$h_{tt} = -\frac{2Ma^2}{r^3}\cos^2\theta$$

$$h_{rr} = \frac{-\frac{a^2}{r^2}}{1-\frac{2M}{r}}\left(\frac{1}{1-\frac{2M}{r}} - \cos^2\theta\right)$$

$$h_{\theta\theta} = a^2\cos^2\theta$$

$$h_{\phi\phi} = a^2\sin^2\theta\left(1+\frac{2M}{r}\sin^2\theta\right)$$

$$h_{\phi t} = \frac{Ma}{r}\sin^2\theta$$

Ahora que se han presentado las métricas de los espacios de Schwarzschild y Kerr, expondré en el siguiente capítulo la formulación ADM de la teoría einsteniana de la gravitación introduciendo las nuevas variables (variables ADM) que definen el lagrangiano del campo.

CAPITULO V

§ 12.Formulación ADM

Las ecuaciones de Einstein (9.2) pueden ser deducidas a través de un principio variacional utilizando la acción de Hilbert

$$S \equiv \int R\sqrt{-g}\, d^4x$$

donde

$$\mathcal{L} = R$$

es el escalar de curvatura.

Sin embargo como hemos visto, para dar el salto cuántico es indispensable obtener una formulación hamiltoniana del sitema en cuestión.

Un acercamiento a la formulación canónica de la gravitación fue el obtenido por Arnowitt, Deser y Misner (*formulación ADM*), en la cual la acción queda escrita de la siguiente manera[1]

$$S = \int \left[-g_{ij}\pi^{ij} - N\mathcal{H} - N_i\mathcal{H}^i - 2[\pi^{ij}N_j - \frac{1}{2}N^i\pi^k_k + N^{|i}g^{1/2}]_{,i} \right] d^4x \qquad (12.1)$$

donde

[1]una descripción detallada sobre la formulación ADM y el significado geométrico de las nuevas variables puede verse en la referencia 15.

$$\pi_{ij} \equiv \frac{\sqrt{g}\,\dot{g}_{ij}}{2N} - \frac{g_{ij}}{N}[\sqrt{g}_{,t} - (\sqrt{g}\,N^i)_{,i}]$$

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

$\equiv$ densidad de momento canónicamente conjugado a g_{ij}

$$N \equiv \sqrt{-g_{00}}$$

$$\mathcal{H} \equiv g^{-1/2}\left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{1}{2}\pi_k^{k\,2}\right) - g^{1/2}\,{}^3R$$

$$N_i \equiv g_{0i}$$

$$\mathcal{H}_i \equiv -2\pi^{ij}_{|j}$$

${}^3R \equiv$ escalar de curvatura del 3-espacio

$_|\equiv$ derivada covariante en t=cte.

El último término de la acción anterior corresponde a la derivada total de una función, por lo que puede eliminarse sin afectar a las ecuaciones de movimiento.

Entonces la acción (12.1) se reduce a

$$S = \int \left[\pi^{ij}\,\dot{g}_{ij} - N\mathcal{H} - N_i\,\mathcal{H}^i\right] d^4x \tag{12.2}$$

Ahora bien, notemos que en (12.2) no aparecen derivadas temporales de N y tampoco de N_i. De ahí que estas variables puedan considerarse como multiplicadores de Lagrange y las variaciones de la acción respecto de éstos como constricciones al sistema. Es decir,

$$\mathcal{H} = 0 \tag{12.3}$$

$$\mathcal{H}_i = 0 \tag{12.4}$$

En la introducción se mencionó que la ecuación de constricción (12.3) contenía la información dinámica de la 3-métrica, mientras que (12.4) contenía información sobre la arbitrariedad de selección de coordenadas. Ahora, de (12.1) es posible obtener las ecuaciones canónicas de la gravitación variando la acción respecto de g_{ij} y π^{ij}, sujetas a las ecuaciones de constricción anteriores. Sin embargo, en estas ecuaciones aparecerán N y N_i, que son variables ADM temporales. Por lo tanto estas ecuaciones no pueden considerarse como ecuaciones de superespacio. En cambio, la ecuación (12.3) incluye solamente a la 3-métrica y a los momentos canónicamente conjugados. Por lo tanto, la constrición $\mathcal{H} = 0$ será la ecuación de superespacio. Por otro lado, si se quisiera reconstruir la dinámica del espacio-tiempo, a partir de esta formulación, habría que resolver las ecuaciones canónicas para g_{ij} y π^{ij}, dando el valor de las funciones N y N_i. De esta forma se conocería la forma del 3-espacio en cada momento. También se podría deducir la ecuación de Einstein-Hamilton-Jacobi a partir de la constricción (12.3), ecuación que contiene la misma información que las ecuaciones de Einstein.

Cabe mencionar el que no se hayan obtenido las ecuaciones canónicas para el caso general deliveradamente, ya que la métrica de un espacio en particular está dada en términos de funciones que contienen la información dinámica, de modo que siempre será conveniente definir, antes de variar la acción, transformaciones canónicas en las que aparezcan estas funciones como variables dinámicas y sus momentos canónicamente conjugados. Posteriormente, una vez que la acción quede en términos de las nuevas variables, se podrán obtener las ecuaciones dinámicas variando la acción respecto de esas nuevas variables y de sus momentos. Para el caso particular que se tratará en la siguiente sección (espacio de Schwarzschild) seguiré este último procedimiento.

§13.Formulación Hamiltoniana del espacio de Schwarzschild.

Consideremos las coordenadas isotrópicas del espacio de Schwarzschild:

$$g_{00} = -e^{\phi}$$

$$g_{11} = e^{\mu}$$

$$g_{22} = r^2 e^{\mu}$$

$$g_{33} = r^2 \sin^2\theta\, e^{\mu}$$

$$g_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{para } i \neq j$$

Hemos visto en la sección §9 que clásicamente $\mu = \mu(r)$. Es decir, μ no puede depender del tiempo. Sin embargo, para realizar un tratamiento cuántico es necesario, la existencia de variables canónicas. Por esta razón propondremos a la masa como función del tiempo, esperando obtener ecuaciones canónicas en m que cuánticamente proporcionen un problema interesante, aunque clásicamente nos obligue a considerar a la masa como constante.

Con estas consideraciones calculemos la acción (13.1) del espacio de Schwarzschild.

$$\dot{g}_{ij} = \dot{\mu}\, g_{ij}$$

Entonces

$$\pi^{ij}\, \dot{g}_{ij} = \dot{\mu}\, \pi^{ij}\, g_{ij}$$

Si

$$\pi_\mu \equiv \pi^{ij}\, g_{ij} = \pi^k{}_k$$

Entonces

$$\pi^{ij}\, \dot{g}_{ij} = \dot{\mu}\, \pi_\mu$$

Ahora tenemos que expresar el resto de los términos de la acción en función de de π_μ y $\dot{\mu}$.

De la definición de π_{ij} tenemos que

$$\pi_{ij} = \frac{\sqrt{g}}{2N}\, \dot{g}_{ij} - \frac{g_{ij}}{N} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g}$$

ya que $N_i = 0$.

Pero

$$\dot{g}_{ij} = \dot{\mu}\, g_{ij} \quad ,$$

$$\sqrt{g} = e^{3/2\,\mu}\, r^2 \sin^2\theta \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{g} = \frac{3}{2}\,\dot{\mu}\,\sqrt{g}$$

Entonces

$$\pi_{ij} = \frac{\sqrt{g}}{2N}\,\dot{\mu}\, g_{ij} - \frac{3}{2N}\,\dot{\mu}\sqrt{g}\, g_{ij} = -\frac{\dot{\mu}}{N}\,\sqrt{g}\, g_{ij} \tag{13.1}$$

Multiplicando por g^{ij} se obtiene

$$g^{ij}\,\pi_{ij} = \pi_\mu = -\frac{\dot{\mu}}{N}\,\sqrt{g}\, g^{ij}\, g_{ij} = \frac{-3\dot{\mu}}{N}\,\sqrt{g}$$

De donde

$$\dot{\mu} = -\frac{N\,\pi_\mu}{3\sqrt{g}}$$

Sustituyendo este resultado en (13.1) concluimos

$$\pi_{ij} = \frac{\pi_\mu}{3}\, g_{ij} \tag{13.2}$$

Así que

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\pi^{ij}\,\pi_{ij} - \frac{{\pi^k{}_k}^2}{2} \right) - \sqrt{g}\,{}^3R$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{{\pi_\mu}^2}{3} - \frac{{\pi_\mu}^2}{2} \right) - \sqrt{g}\,{}^3R$$

$$= -\frac{{\pi_\mu}^2}{6\sqrt{g}} - \sqrt{g}\,{}^3R$$

Entonces la acción (12.2) queda

$$S = \int \left[\pi_\mu\,\dot{\mu} + N \left(\frac{{\pi_\mu}^2}{6\sqrt{g}} + {}^3R\sqrt{g} \right) + N_i\,\pi^{ij}{}_{|j} \right] d^4x \qquad (13.3)$$

Sabemos que $N_i = 0$ ya que $g_{0i} = 0$. Sin embargo es un error considerar cero estas cantidades antes de variar la acción, ya que de hacerlo así se perdería la ecuación de constricción

$$\pi^{ij}_{|j} = \left(\frac{\pi_\mu}{3}\,g_{ij} \right)_{|j} = 0 \qquad (13.4)$$

Una vez que se toma en cuenta (13.4) ya se pueden anular las N_i's. Resolvamos entonces (13.4) para π_μ y sustituyamos el resultado en la acción (13.3).

Se puede demostrar que π_{ij} es una densidad tensorial[2], de modo que

[2]ver referencia 15

$$\pi^{ij}{}_{|j} = \pi^{ij}{}_{,j} + \Gamma^i_{jk}\,\pi^{jk}$$

$$= \left(\frac{\pi_\mu}{3}\, g^{ij}\right)_{,j} + \Gamma^i_{jk}\,\frac{\pi_\mu}{3}\, g^{jk}$$

$$= \frac{1}{3}\left[g^{ij}\,\pi_{\mu,j} + \pi_\mu\left(g^{ij}{}_{,j} + \Gamma^i_{jk}\, g^{jk}\right)\right]$$

Pero

$$g^{ij}{}_{;j} = g^{ij}{}_{,j} + \Gamma^j_{kj}\, g^{ik} + \Gamma^i_{jk}\, g^{jk} = 0$$

Entonces

$$\pi^{ij}{}_{|j} = \frac{1}{3}\left[\pi_{\mu,j}\, g^{ij} - \pi_\mu\, \Gamma^j_{kj}\, g^{ik}\right]$$

Además

$$\Gamma^j_{kj} = \frac{\partial[\,\mathrm{Ln}(\sqrt{g}\,)\,]}{\partial x^k}$$

Por lo tanto

$$\pi^{ij}{}_{|j} = \left[\pi_{\mu,j}\, g^{ij} - \pi_\mu\, g^{ik}\,[\,\mathrm{Ln}(\sqrt{g}\,)\,]_{,k}\right]$$

Ahora, por (13.4)

$$\mathcal{H}_i = \pi^{ij}{}_{|j} = 0$$

Entonces

$$0 = \pi_{\mu,j}\, g^{ij} - \pi_\mu\, g^{ij}\,[\,\mathrm{Ln}(\sqrt{g}\,)\,]_{,j}$$

De donde

$$\pi_{\mu,j} = \pi_\mu\,[\,\mathrm{Ln}(\sqrt{g}\,)\,]_{,j}$$

Cuya solución está dada por

$$\pi_\mu = p(t)\sqrt{g} \tag{13.5}$$

Siendo $p(t)$ una función del tiempo.

Sustituyendo este resultado en (13.3) se obtiene

$$S = \int \left[p(t)\sqrt{g}\dot{\mu} + N\left(\frac{p^2(t)}{6}\sqrt{g} + {}^3R\sqrt{g}\right)\right] d^4x$$

$$= \int \left[p(t)\dot{\mu} + N\left(\frac{p^2(t)}{6} + {}^3R\right)\right] e^{3\mu/2}\, r^2 \sin^2\theta\, dr\, d\theta\, d\phi\, dt$$

$$= 4\pi \int \left[p(t)\,\dot{\mu} + N\left(\frac{p^2(t)}{6} + {}^3R\right)\right] e^{3\mu/2}\, r^2\, dr\, dt \qquad (13.6)$$

La acción (13.6) es la acción exacta del espacio de Schwarzschild. No se ha hecho ninguna simplificación. Entonces, si no hemos cometido ningún error, variando la acción S respecto de N, μ y p deberían deducirse las ecuaciones de Einstein para μ y N cuya solución estaría dada por las ecuaciones (9.8) y (9.9).

En la siguiente sección definiré el minisuperespacio de Schwarzschild tomando a la 3-métrica que es solución de las ecuaciones estáticas de Einstein. Posteriormente compararé las ecuaciones de Einstein dinámicas del minisuperespacio con las canónicas que se obtengan de la formulación hamiltoniana. Esto con el objeto de verificar la consistencia de esta útlima formulación.

§14. Ecuaciones canónicas del minisuperespacio de Schwarzschild.

En la sección anterior vimos que la información dinámica del espacio de Schwarzschild estaría contenida en la función μ. A continuación definiré el minisuperespacio de Schwarzschild escogiendo

$$e^{\mu} \equiv \left(1 + \frac{m(t)}{2r}\right)^4 \qquad (14.1)$$

Esto equivaldría a desarrollar e^{μ} en serie de Laurent

$$e^{\mu} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{r^n}$$

y definir

$$A_0 \equiv 1$$

$$A_1 \equiv 4(m/2)$$

$$A_2 \equiv 6(m/2)^2$$

$$A_3 \equiv 4(m/2)^3$$

$$A_4 \equiv (m/2)^4$$

$$A_n \equiv 0 \quad \text{para } n > 4.$$

Ahora que se ha definido el minisuperespacio, conviene escribir explícitamente el valor de ${}^3R$[3].

$${}^3R = -2e^{-\mu}\left(\mu'' + \frac{\mu'^2}{4} + \frac{2\mu'}{r}\right)$$

Pero por la forma como definimos μ a partir de (14.1) y por (9.5)

$${}^3R = 0$$

de modo que la acción del minisuperespacio queda

$$s = \int \left[p(t)\,\dot{\mu} + \frac{N\,p^2}{6}\right] e^{3\mu/2}\, r^2 dr\, dt \tag{14.2}$$

[3]Este cáculo fue realizado por computadora utilizando REDUCE

Utilizando la definición (14.1) se podrá escribir (14.2) en términos de m y de su momento canónicamente conjugado. Para ello derivemos respecto del tiempo ambos miembros de (15.1)

$$\dot{\mu}\, e^{\mu} = 4\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \frac{\dot{m}}{2r}$$

De donde

$$\dot{\mu} = \frac{2\,\dot{m}/r}{1 + \frac{m}{2r}} = \frac{4\,\dot{m}}{2r + m} \tag{14.3}$$

Por lo tanto

$$s = 4\pi \int \left[\frac{2\,p(t)\,\dot{m}/r}{1 + \frac{m}{2r}} + \frac{N\,p^2}{6} \right] \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^6 r^2\, dr\, dt \tag{14.4}$$

Entonces el momento p_m lo podemos identificar como

$$p_m = 2p \int r \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^5 dr$$

Ahora por simplicidad aproximaré el integrando a primer orden en m[4]

$$p_m \approx 2p \int r \left(1 + \frac{5m}{2r}\right) dr$$

[4]Esta aproximación no tiene ninguna justificación física, pero de no hacerlo así habría problemas al momento de realizar la integración en r.

En principio debemos integrar de 0 a ∞, sin embargo integraré de 0 a R y consideraré que R es muy grande. Entonces

$$p_m \approx p\, R^2 \left(1 + \frac{5m}{R}\right) \tag{14.5}$$

A partir de (14.4) se puede escribir $p(t)$ en términos de p_m

$$\begin{aligned} p &= \frac{p_m}{R^2 \left(1 + \frac{5m}{R}\right)} \\ &\approx \frac{p_m}{R^2} \left(1 - \frac{5m}{R}\right) \end{aligned}$$

Por otro lado si

$$N \equiv N_\circ(t) \left(\frac{1 - \frac{m}{2r}}{1 + \frac{m}{2r}}\right) \tag{14.6}$$

el segundo término de la acción (14.2) que denotaré por s_N queda

$$s_N = \frac{N_\circ\, p^2}{6} \int \left(1 - \frac{m}{2r}\right) \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^5 r^2\, dr$$

Nuevamente aproximando a primer orden en m, obtenemos

$$\approx \frac{N_\circ\, p^2}{6} \int \left(1 - \frac{m}{2r}\right)\left(1 - \frac{5m}{2r}\right) r^2\, dr$$

$$\approx \frac{N_\circ\, p^2}{6} \int \left(1 + \frac{5m}{2r} - \frac{m}{2r}\right) r^2\, dr$$

$$= \int \left(1 + \frac{2m}{r}\right) r^2\, dr$$

$$= \frac{N_\circ\, p^2\, R^3}{18} \left(1 + \frac{3m}{R}\right)$$

Por lo tanto

$$s \approx 4\pi \int \left[p_m\, \dot{m} + \frac{R^3}{18}\left(1 + \frac{3m}{R}\right) N_\circ\, p^2\right] dt$$

$$= 4\pi \int \left[p_m\, \dot{m} + \frac{R^3}{18}\left(1 + \frac{3m}{R}\right) N_\circ\, \frac{{p_m}^2}{R^4}\left(1 - \frac{5m}{R}\right)^2\right] dt$$

$$\approx 4\pi \int \left[p_m \dot{m} + \frac{N_\circ\, {p_m}^2}{18R}\left(1 + \frac{3m}{R}\right)\left(1 - \frac{10m}{R}\right)\right] dt$$

$$\approx 4\pi \int \left[p_m\, \dot{m} + \frac{N_\circ\, {p_m}^2}{18R}\left(1 - \frac{7m}{R}\right)\right] dt$$

Ahora bien, la acción anterior puede escribirse como

$$s = 4\pi \int \left[p_m\, \dot{m} + \frac{N_\circ\, {p_m}^2}{BR}\left(1 - \frac{Am}{R}\right)\right] dt \tag{14.7}$$

Donde A y B son constantes que hemos introducido para comparar las ecuaciones que surjan de variar la acción (14.7) (formulación hamiltoniana) con las ecuaciones dinámicas (9.10), (9.11) y (9.12) (formulación lagrangiana). Para hacer la comparación obtengamos primero las ecuaciones de Einstein en m. Entonces, de (9.12)

$$\dot{\mu}' = \frac{\dot{\mu}\phi}{2}$$

Por lo tanto

$$\dot{\mu} = f(t)\, e^{\phi/2} \tag{14.8}$$

Ahora de (14.3) se obtiene

$$\ddot{\mu} = \frac{2\ddot{m}/r}{1 + \frac{m}{2r}} - \frac{\dot{m}^2/r^2}{\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2} \tag{14.9}$$

Sustituyendo el valor de $\dot{\mu}$ y N dados por (14.3) y (14.6) en (14.8) obtenemos

$$\dot{m} = \frac{1}{2} N_{\circ}(t)\, f(t) \left(r - \frac{m}{2}\right) \tag{14.10}$$

Pero de (9.11) y (14.8) se concluye

$$\dot{m} = 0 \tag{14.11}$$

Finalmente sustituyendo en (9.10) el valor de $\ddot{\mu}, \dot{\mu}$ y $\dot{\phi}$ en términos de $m(t)$ se obtiene

$$\frac{\frac{2\ddot{m}}{r}}{1+\frac{m}{2r}} - \frac{\dot{m}^2/r^2}{\left(1+\frac{m}{2r}\right)^2} + \frac{3\dot{m}/r^2}{\left(1+\frac{m}{2r}\right)^2} -$$

$$\frac{2\dot{m}/r}{\left(1+\frac{m}{2r}\right)}\left(\frac{\dot{N}_\circ}{N_\circ} - \frac{\dot{m}/2r}{1-\frac{m}{2r}} - \frac{\dot{m}/2r}{1+\frac{m}{2r}}\right) = 0$$

Simplificando

$$\ddot{m} - \dot{m}\frac{\dot{N}_\circ}{N_\circ} + \frac{\dot{m}^2\left(2 - m/2r\right)}{\left(r+\frac{m}{2}\right)\left(1-\frac{m}{2r}\right)} = 0$$

$$\approx \ddot{m} - \dot{m}\frac{\dot{N}_\circ}{N_\circ} + \frac{2\dot{m}^2}{r}\left(1-\frac{m}{4r}\right)\left(1-\frac{m}{2r}\right)\left(1+\frac{m}{2r}\right)$$

$$\approx \ddot{m} - \dot{m}\frac{\dot{N}_\circ}{N_\circ} + \frac{2\dot{m}^2}{r}\left(1-\frac{m}{4r}\right)$$

$$\approx \ddot{m} - \dot{m}\frac{\dot{N}_\circ}{N_\circ} + \frac{2\dot{m}^2}{r}$$

Esta ecuación diferencial en m, sin tomar en cuenta (14.11), no tiene sentido ya que por construcción esta variable solo depende del tiempo, y en la ecuación se muestra también una dependencia explícita en r. Asíque lo que haremos será fijar una r que definiremos como R, enfatizando que la ecuación de Einstein

$$\ddot{m} - \dot{m}\frac{\dot{N}_\circ}{N_\circ} + \frac{2\dot{m}^2}{R} = 0 \tag{14.12}$$

es una de las ecuaciones ya no del minisuperespacio, sino de un modelo del mismo. Ahora encontremos las ecuaciones canónicas que resulten de variar la acción (14.7). Variando respecto de p_m, m y $N_\circ$ se obtienen

$$\dot{m} + \frac{2N_\circ\, p_m}{BR}\left(1 - \frac{Am}{R}\right) = 0 \tag{14.13}$$

$$-\dot{p}_m - \frac{N_\circ\, {p_m}^2\, A}{BR^2} = 0 \tag{14.14}$$

$${p_m}^2\left(1 - \frac{Am}{R}\right) = 0 \tag{14.15}$$

Notemos que las ecuaciones (14.14) y (14.15) son equivalentes a (14.11). Falta verificar que de (14.15) y (14.13) se obtiene (14.12). Entonces, de (14.13)

$$p_m = -\frac{BR\,\dot{m}}{2N_\circ}\left(1 + \frac{Am}{R}\right)$$

Entonces sustituyendo el valor de p_m dado por la ecuación anterior en (14.14) tendremos

$$\frac{BR\,\ddot{m}}{2N_\circ}\left(1 + \frac{Am}{R}\right) + \frac{BR\,\dot{m}\,A\dot{m}}{2N_\circ\,R} - \frac{\dot{N}_\circ\,\dot{m}\,BR}{2N_\circ^2}\left(1 + \frac{Am}{R}\right)$$

$$-\frac{N_\circ\,B^2\,R^2\,\dot{m}^2}{4BR^2\,N_\circ^2}\left(1 + \frac{Am}{R}\right)^2 A = 0$$

Simplificando y aproximando a primer orden en m/R

$$\ddot{m} + \frac{A\dot{m}^2}{R}\left(1 - \frac{Am}{R}\right) - \frac{\dot{N}_\circ\,\dot{m}}{N_\circ} - \frac{A\dot{m}^2}{2R}\left(1 + \frac{Am}{R}\right)$$

$$\approx \ddot{m} - \frac{\dot{N}_o}{N_o}\dot{m} + \frac{A\dot{m}^2}{2R} = 0 \tag{14.15}$$

Notemos que la constante B no jugó ningún papel relevante en las ecuaciones canonicas, mientras que con $A = 4$, las ecuaciones (14.2) y (14.15) son idénticas. Asíque definamos $A \equiv 4$ y de esta forma ambas formulaciones serán consistentes.

En la siguiente sección obtendremos la cuantización del minisuperespacio de Schwarzschild con el hamiltoniano contenido en la acción (14.7) poniendo $A = 4$ y $B \equiv 1$.

§.15 Cuantización del minisuperespacio de Schwarzschild.

En la sección anterior hemos visto que la acción (14.7) con $A = 4$ conducía a ecuaciones canónicas que eran consistentes con las de Einstein. Para comprobar esta consistencia tomamos la aproximación hasta segundo orden en m.

Por otro lado, también hemos insistido en que la solución clásica a este problema es muy simple

$$\dot{m} = 0$$

De modo que en un principio existía la posibilidad de encontrar un hamiltoniano Wheeler-De Witt que fuera consistente con la solución clásica pero que cuánticamente produjera algún paquete de ondas. A pesar de las esperanzas iniciales, se puede apreciar diréctamente de la acción (14.7) que el hamiltoniano

$$\mathcal{H} = (p_m)^2 \left(1 - \frac{4m}{R}\right) \tag{15.1}$$

no conducirá a ninguna situación física. De cualquier forma, resolvamos la ecuación de *Wheeler-De Witt* y veamos que "funciones de onda" se obtienen

$$\hat{\mathcal{H}}\,|\Psi\rangle = 0 \tag{15.2}$$

donde

$$\hat{p}_m = -\hbar\,\frac{\partial}{\partial m} \tag{15.3}$$

es el operador cuántico asociado m.

Clásicamente la ecuación (15.1) puede escribirse de tres formas (evidentes) distintas, de ahí que haya tres posibilidades cuánticas:

$$\hat{p}_m^2\left(1-\frac{4m}{R}\right)|\Psi\rangle = 0 \tag{15.4}$$

$$\hat{p}_m\left(1-\frac{4m}{R}\right)\hat{p}_m|\Psi\rangle = 0 \tag{15.5}$$

$$\left(1-\frac{4m}{R}\right)\hat{p}_m^2\,|\Psi\rangle = 0 \tag{15.6}$$

Por (15.1), la ecuación (15.4) se transforma en

$$\frac{d^2}{dm^2}\left[\left(1-\frac{4m}{R}\right)|\Psi\rangle\right] = 0$$

Cuya solución es

$$|\Psi\rangle = \frac{\alpha m + \beta}{1 - \frac{Am}{R}}$$

donde α y β son constantes.

Análogamente, la ecuación (15.5) a resolver es

$$\frac{d}{dm}\left[\left(1 - \frac{4m}{R}\right)\frac{d|\Psi\rangle}{dm}\right] = 0$$

De donde

$$\left(1 - \frac{4m}{R}\right)\frac{d|\Psi\rangle}{dm} = \text{cte.} \equiv \gamma$$

Cuya solución es

$$|\Psi\rangle = -\frac{R\gamma}{4} Ln\left[1 - \frac{Am}{R}\right]$$

Finalmente la expresión (15.6) da lugar a la ecuación diferencial

$$\left(1 - \frac{4m}{R}\right)\frac{d^2}{dm^2}|\Psi\rangle = 0$$

que tiene por solución

$$|\Psi\rangle = am + b$$

con a y b constantes.

Las soluciones que hemos obtenido para las "funciones de onda" no están acotadas, de modo que no es posible construrir una amplitud de probabilidad finita. Tampoco queda muy claro como podría definirse con estas funciones una densidad de corriente de probabilidad.

En la siguiente y último capítulo escribiré las ecuaciones de Einstein para el espacio de Kerr aproximadas a segundo orden en el momento angular a y la masa m, en donde veremos las incosistencias que resultaron por proponer a m y a como variables canónicas del minisuperespacio de Kerr.

CAPITULO VII

En este capítulo concluiremos el estudio de minisuperespacios, indicando en la siguiente sección los problemas que se presentaron en las ecuaciones de Einstein correspondientes al minisuperespacio de Kerr. Por útlimo en las conclusiones, daré algunas posibles alternativas para un estudio futuro de las geometrías de Schwarzschild y Kerr que, desde el punto de vista de minisuperespacios, puedan conducir a situaciones cuánticas físicas.

§16. Minisuperespacio de Kerr.

El minisuperespacio de Kerr se definió tomando la métrica (12.2) con $a = a(t)$ y $m(t)$ como variables canónicas. A partir de estas hipótesis se calcularon[5] las ecuaciones de Einstein aproximando a segundo orden los términos que definen al tensor de Ricci.

Ecuaciones de Einstein

$$T_{11} = \frac{(2 - \sin^2\theta)(\dot{a}^2 + a\ddot{a})}{82a^2\sin^2\theta - 143a^2 - 6844m^2 + 118mr - r^2} \tag{16.1}$$

$$T_{13} = \frac{3\sin^2\theta\,(\dot{a}m + a\dot{m})}{3a^2\sin^2\theta - 4a^2 + 2mr - r^2} \tag{16.2}$$

$$T_{14} = \frac{(2 - 3\sin^2\theta)a\dot{a} + 8m\dot{m} - 2r\dot{m}}{r\,(8a^2\sin^2\theta - 11a^2 - 12m^2 + 6mr - r^2)} \tag{16.3}$$

$$T_{22} = \frac{\cos^2\theta\,(\ddot{a} + \dot{a}^2) - 68m\ddot{m} + r\ddot{m} + 4\dot{m}^2}{57a^2\sin^2 - 94a^2 - 2520m^2 + 72rm - r^2)} \tag{16.4}$$

$$T_{24} = \frac{a\dot{a}\sin\theta\cos\theta}{5a^2\cos^2\theta + r^2} \tag{16.5}$$

$$T_{33} = \frac{(1 - 2\sin^2\theta)(\dot{a}^2 + \ddot{a}) - 70m\ddot{m} + r\ddot{m} + 4\dot{m}^2}{68a^2\sin^2\theta - 106a^2 - 2644m^2 + 74rm - r^2} \tag{16.6}$$

[5] todos los cálculos se realizaron por computadora utilizando *REDUCE*

El resto de las componentes que no aparecen son nulas.

En el vacío, es claro que la única solución clásica a estas ecuaciones es

$$a = \text{cte.}$$

$$m = \text{cte.}$$

Esto se deduce de las ecuaciones (16.5) y (16.2). Sin embargo, como se mencionó en la introducción el problema está en la falta de consistencia de las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana para este minisuperespacio. Dicha inconsistencia se puede explicar sin necesidad de haber deducido la acción ADM para el minisuperespacio de Kerr. Por un lado, existen cuatro componentes espaciales del tensor $T_{\mu\nu}$ (T_{11}, T_{13}, T_{22} y T_{33}), que en principio son independientes (aunque T_{22} y T_{33} tienen la misma forma), por otro lado (sin tomar en cuenta las constricciones T_{14}, T_{24}), de la formulación ADM sólamente sería posible conseguir dos ecuaciones dinámicas. Estas se obtendrían de variar la acción ADM respecto de m, a y de sus respectivos momentos. Tales ecuaciones equivaldrían, en el mejor de los casos, a dos de las ecuaciones de Einstein "espaciales", quedando entonces una sin ser determinada. En pocas palabras se puede decir que el punto 2. que se mencionó en la introducción no se satisface. Por lo tanto no podemos construir un modelo de minisuperespacio de Kerr con tan solo la masa y el momento angular.

CONCLUSIONES

Hemos visto que una de las causas que condujeron a un situación cuántica afísica para el caso del minisuperespacio de Schwarzschild fue la forma en como lo definimos. Es decir, consideramos que sólamente existía una variable dinámica, la masa. Esto implicaba que la ecuación de Wheeler-De Witt no contuviera más que una componente cuadrática del momento, conduciendo a una ecuacion diferencial en $|\Psi\rangle$ cuya solución no representaba a ningún paquete de ondas. Una posible alternativa a este problema es no forzar demasiado a la métrica. Con esto queremos decir que quizá no es muy conveniente definir el minisuperespacio de Schwarzschild como el espacio de Schwarschild mismo. Probablemente escogiendo otros parámetros que no se identifiquen con la masa pueda obtenerse una situación más interesante . Por ejemplo, si desarrollásemos la métrica en términos de una serie de Laurent considerando más de cinco coeficientes o en una serie de funciones ortonormales esféricas con dos o más variables dinámicas , se podría conseguir, una vez que los momentos canónicos a las variables han sido definidos, un hamiltoniano que tenga la forma

$$\sum_{i=0}^{n} \hat{P}_{a_i}^2 \, |\Psi\rangle = 0$$

donde

$$\hat{P}_{a_i} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial a_i}$$

siendo a_i las variables dinámicas definidas en el minisuperespacio.

Entonces la solución a la ecuación de Wheeler-De Witt podría estar en términos de algún paquete de ondas.

Para el caso del minisuperespacio de Kerr no pudimos ni siquiera obtener ecuaciones de Einstein dinámicas que fueran equivalentes con las que se derivarían de la acción ADM o viceversa. Para este caso, una alternativa al problema sería el considerar sólo dos ecuaciones de Einstein como dinámicas y el resto como constricciones al sistema. Entonces, al construir la acción ADM se introducirían multiplicadores de Lagrange que tratarían de hacer consistentes ambas formulaciones. Esto es, al variar la acción respecto de los multiplicadores se intentarían resolver las ecuaciones de constricción cuyas soluciones se sustituirían en la acción pero ya considerando cero a los multiplicadores. De este modo se habrían eliminado, en algún sentido, las ecuaciones extra y el modelo posiblemente se volvería consistente. A partir de este punto, se llevaría a cabo la cuantización con el hamiltoniano ADM.

Otra alternativa para este último minisuperespacio también sería desarrollar la métrica en términos de un conjunto completo de funciones que definan a los coeficientes del desarrollo como variables dinámicas, y esperar que esa nueva definición conduzca no sólo a ecuaciones de Einstein equivalentes a las ecuaciones canónicas sino también a un problema cuántico interesante.

Para concluir con este trabajo diremos que la moraleja más importante a todo este estudio que hemos realizado es tal vez, que no se puede imponer cualquier forma a la métrica de un minisuperespacio para construir la acción ADM y suponer que las ecuaciones que surjan de variar dicha acción contengan la misma información que las ecuaciones de Einstein (además las ecuaciones de Einstein no necesariamente son consistentes para un minisuperespacio). Desgraciadamente no es posible saber a priori como definir el minisuperespacio para que las ecuaciones de Einstein sean desde un principio autoconsistentes por un lado y por el otro equivalentes a las canónicas.

REFERENCIAS

1. Bogoliubov,N.N-Shirkov,D.V., 1982, *Quantum Fields*, Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc.,[**Cap.1**].

2. De la Peña,L., *Introducción a la Mecánica Cuántica*, 1979, C.E.C.S.A, [**Cap.8,9**]

3. Dirac,P.A.M., *Principios de Mecánica Cuántica*, 1967, Ariel, [**Cap.5,6**].

4. Farlow,S.J.,*Partial Differential Equations*, 1982, Wiley, **Lección 20.**

5. Goldstein,H., *Mecánica Clásica*, 1987, Reverté, [**Cap.2**].

6. Gottfried,K.G.-Weisskopf,V.F., *Concepts of Particle Physics*, 1986, Oxford University Press,**Sección A.**

7. Ize,J., *Cálculo de Variaciones*, 1987, I.P.N, [**Cap.2,4**].

8. Kuchar,K.V.-Ryan,M.P., *Is minisuperspace quantization valid?: Taub in mixmaster*, 1989, Phy.Rev.

9. Landau,L.D.-Lifshitz,E.M., *Mechanics*, Pergamon Press, [**Cap.1,7**].

10. Landau,L.D.-Lifshitz,E.M., *The Classical Theory of Fields*, 1971, Pergamon Press, [**Cap.11**].

11. Landau,L.D.-Lifshitz,E.M., *Quantum Electrodynamics*, 1982, Pergamon Press, [**Cap.1**].

12. Misner, C.W.-Thorne,K.S.-Wheeler,J.A., *Gravitation*, 1973, Freeman, [**Cap.21,23,32,43**].

13. Ryan,M.P., *Hamiltonian Cosmology*, 1972, Springer-Verlag, [**Cap.2**].

14. Tijonov,A.-Samarsky, A., *Ecuaciones de la Física Matemática*, 1983, Mir, [**Cap.1,2**] .

15. Soto,C.M., *Formulación Hamiltoniana de la Relatividad General* (tesis de

licenciatura), UNAM, 1990.

16. Troutman,J.L., *Variational Calculus with Elementary Convexity*, 1983, Springer-Verlag, [**Cap.2**].

17. Weber,J., *General Relativity and Graviational Waves*, 1961, Interscience, [**Cap.4,9**].

18. Weinberg,S., *Gravitation and Cosmology*, 1972, John Wiley and Sons, [**Cap 8**].