



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**“UN MODELO MOTIVADO DE LA
CROMODINÁMICA CUÁNTICA A BAJAS
ENERGÍAS PARA LOS NIVELES ORBITALES
S Y P”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

TOCHTLI CUAUHTLI YÉPEZ MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. PETER OTTO HESS BECHSTEDT

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTORAL:

DR. ALFONSO MONDRAGÓN BALLESTEROS

DR. JUAN CARLOS LÓPEZ VIEYRA



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

2011



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

Dedico este trabajo

A mi familia, por ser el apoyo necesario para seguir adelante.

A mi padre: por ser un gran ejemplo en mi vida y creer siempre en mí.

A mi madre: por mostrarme día a día lo que es querer vivir.

A mis hermanos: por ser los mejor amigos de toda mi vida y por compartir sus conocimientos y experiencias.

Agradecimientos

Quiero agradecer a:

La Universidad Nacional Autónoma de México, por darme la educación de calidad en los niveles medio superior (ENP-8), superiores (Facultad de Ciencias) y de posgrado (Posgrado en Ciencias Físicas); fundamental para mi crecimiento personal y académico.

Al Instituto de Ciencias Nucleares, en donde he sido estudiante asociado durante mis estudios de posgrado (Febrero-2006 a Febrero-2011).

Al Dr. Peter Otto Hess Bechstedt por dirigir mi trabajo de tesis doctoral. Por las horas y horas invertidas en innumerables reuniones; en donde si escatimar, compartió su conocimineto e ideas. Por estar al tanto del progreso de mi trabajo, por corregirme en los momento precisos y guiarme a encontrar alguna solución a cada una de las dificultades que se presentaron. Por rodearme de un grupo de investigación experto durante la elaboración de mi trabajo de tesis. Muchas pero muchas gracias Peter.

A los Doctores Alfonso Mondragón Ballesteros y Juan Carlos López Vieyra, por formar parte de mi comité tutorial. Gracias por su amabilidad siempre que toqué a sus puertas.

A los miembros de mi jurado: Dra. Myriam Mondragón Ceballos, Dr. Roelof Bijker, Dr. Axel Weber, Dr. Juan Carlos López Vieyra, Dr. Genaro Toledo Sánchez y Dr. Sergio Adrián Lerma Hernández, por haber revisado con detenimiento mi tesis, por sus comentarios y sugerencias.

A los Doctores: Adam Szczepaniak, Osvaldo Civitarese y Sergio Lerma, por la colaboración en mi trabajo de doctorado; sus comentarios, sus sugerencias y su conocimiento fueron de gran ayuda para dar buen fin al presente trabajo.

Al Dr. Osvaldo Civitarese, por invitarme a colaborar en una estancia de investigación en La Plata, Argentina, en Septiembre del 2010. Muchas gracias Osvaldo por la multiples ayudas brindadas.

Al Dr. Adam Szczepaniak, por ofrecerme seguir colaborando mediante una estancia posdoctoral, la cual atenderé a la brevedad posible.

Al Posgrado en Ciencias Físicas de la UNAM, mediante el Programa de Apoyo a los Estudios de Posgrado (PAEP), me apoyaron económicamente para realizar una estancia de investigación en La Plata, Argentina.

Al Consejo de Ciencia y Tecnología, por financiar mis estudios de posgrado de Febrero del 2006 a Enero del 2011, siendo mi número de registro 205494.

También quiero agradecer a:

Mi tía Chayo, mis primos Moisés y Chayito, por estar al lado de mi familia en los momentos más difíciles. De igual forma a mi tía Tere por estar siempre al pendiente de mi madre.

A mis mejores amigos: César, Román, Cristhian y Yanet, por todos los inolvidables momentos que hemos pasado juntos. Se que pase lo que pase seguiremos siendo muy buenos amigos y cada vez más unidos.

A los amigos del instituto: Emmanuel, Pavel y Paul por compartir conmigo muy buenos momentos durante estos últimos años. A los amigos del cubo 105: Hector, Horacio y Paul, por adoptarme en el cubo y hacer un ambiente muy ameno.

A mi amigo y amigo de la familia: Andrés Porta, por transmitirme tu experiencia y las miles de anécdotas. Muchas gracias también por tener la paciencia de leer detalladamente tanto mi tesis de licenciatura como la de doctorado.

Al Doctor Castañeda por estar al tanto de la salud mía y de mi familia durante más de 20 años.

A mi sobrino Raul, por ayudarme con mi computadora siempre que le pasaba algo malo.

Resumen

El presente trabajo es un modelo en donde se estudia un Hamiltoniano motivado de la Cromodinámica Cuántica (CDC) al trabajar en la norma de Coulomb; en el régimen de bajas energías. La estructura del Hamiltoniano de la CDC en la norma de Coulomb luce poco agradable y no muy fácil de trabajar, sin embargo, al trabajar en la norma de Coulomb se evitan los campos no físicos o campos fantasmas. El Hamiltoniano motivado de la CDC que se trabaja aquí, se divide en dos Hamiltonianos H_0 y H_1 para su investigación. El Hamiltoniano H_0 contiene los términos cinético y de masa de cuarks, el término cinético de gluones y el término Coulombiano en la CDC, donde para este último se usa una aproximación de interacción promedio (V_0) entre las densidades de carga de color. El Hamiltoniano H_1 contiene todos los demás términos del Hamiltoniano de la CDC, de tal forma que $H_0 + H_1$ es la CDC.

El modelo desarrollado en el presente trabajo, tiene dos consideraciones generales: la primera de ellas es la implementación de un volumen finito, esto es, se impone a mano el confinamiento y la segunda, es el uso de una interacción promedio entre las densidades de carga de color, tanto para los cuarks como para los gluones. La idea es que el Hamiltoniano H_0 genere las escalas de energía de los estados ligados de cuarks y gluones, las cuales posteriormente se puedan asociar al espectro hadrónico y, que el Hamiltoniano H_1 genere las correcciones a dichas escalas de energía mediante la interacción entre cuarks-gluones y gluones interactuantes; todo esto, partiendo de primeros principios. El primer trabajo en este tipo de modelos y previo al aquí presentado, considera un modelo de cuarks donde: 1) solo el nivel orbital-s más bajo es accesible y se restringe a un volumen finito, 2) se usa una interacción de contacto entre las densidades de carga de color de cuarks, 3) no se consideran gluones dinámicos y 4) se utiliza un grupo SU(2) para describir el color (caso no físico, pero su extensión a un grupo SU(3) es inmediata) y sabor. Como resultado de estas aproximaciones es posible encontrar una solución analítica (no obvia en este tipo de modelos), para una aproximación de la CDC. Dicha solución tiene una alta degeneración, sin embargo, puede dar de forma cuantitativa la escala mesónica y bariónica correcta.

Motivado por este hallazgo, el presente trabajo investiga el Hamiltoniano H_0 bajo las consideraciones generales arriba mencionadas, con la finalidad de relajar las restricciones en el número de niveles orbitales accesibles para los cuarks, manteniendo en una primera instancia la restricción de no gluones dinámicos. El primer intento consistió en tomar los dos niveles orbitales más bajos, el primer estado-s y el primer estado-p, utilizando un grupo SU(2) para describir el color y el sabor. Tratar de resolver este problema de forma numérica, implicaba trabajar con una matriz para el Hamiltoniano de dimensión 80000×80000 , dificultando cualquier extensión futura del modelo. En la actualidad existen cálculos numéricos (LGT) muy elaborados capaces de reproducir espectros hadrónicos, aunque con sus correspondientes limitantes. Por tanto, para evitar trabajar con cálculos numéricos tan elaborados en el pre-

sente trabajo, se retoma la línea de investigación de posibles soluciones analíticas en la CDC, para la cual se implementa la utilización de un grupo $SU(3)$ en el color. Siguiendo esta línea de investigación, el presente trabajo muestra dos soluciones analíticas para sistemas de cuarks sin masa, a las cuales se les denotó: soluciones- $SU(2)$ debido a que los operadores que definen la acción del Hamiltoniano satisfacen un álgebra característica de un grupo $SU(2)$. La primera de estas soluciones considera los dos niveles orbitales más bajos, esto es, el primer nivel orbital-s y el primer nivel orbital-p, accesibles para los cuarks. La segunda solución considera tres niveles orbitales, esto es, los dos niveles orbitales-s más bajos y el nivel orbital-p más bajo. Estas soluciones son capaces de reproducir las escalas hadrónicas reportadas en la literatura, mediante ajustar un solo parámetro. La extensión inmediata, cuatro niveles orbitales, no tiene solución analítica- $SU(2)$, debido a que el álgebra $SU(2)$ encontrada previamente se rompe para cualquier número de niveles orbitales mayor a tres.

La siguiente extensión del presente modelo es la de relajar en su totalidad la restricción en el número de niveles orbitales accesibles para los cuarks, para lo cual se desarrolla un método matemático denotado: método- $\alpha\beta - BCS$, con el cual se pueden resolver de forma semi-analítica (donde semi-analítica significa que es necesario resolver un sistema de ecuaciones cuadráticas y bilineales) un número arbitrario de niveles orbitales. Este método se compara con la solución analítica- $SU(2)$ para el caso de dos niveles orbitales, coincidiendo de forma exacta. De igual forma se prueba la capacidad de reproducir las escalas hadrónicas reportadas en la literatura, al considerar los casos de 2 a 22 niveles orbitales mediante estas soluciones semi-analíticas. El resultado es satisfactorio, encontrando también que la energía de una partícula converge a un valor finito distinto de cero y por tanto, las escalas mesónica y bariónica convergen. La escala mesónica más baja encontrada en este modelo de cuarks es de $300MeV$, por lo que, tratar de reproducir la energía del pión ($\approx 140MeV$) en este modelo, es necesario correcciones pequeñas, las cuales deben provenir del Hamiltoniano H_1 .

Para culminar la investigación del Hamiltoniano H_0 , se extiende el modelo al sector gluónico. Se muestra en el presente trabajo que este hecho no altera las soluciones analíticas- $SU(2)$ y semi-analíticas- $\alpha\beta - BCS$ encontradas previamente. Además, la solución encontrada en el sector gluónico también es analítica, con la cual, se ajusta el parámetro del modelo de tal forma que se reproduce la energía del glueball ($1600MeV$). Este ajuste implica un valor para el parámetro del modelo muy cercano al encontrado en el sector de cuarks. En el presente trabajo también se determina la energía del primer estado excitado en el sector gluónico, el cual es aproximadamente $600MeV$ mayor que la energía del glueball.

La última extensión del modelo aquí presentada, corresponde a la incorporación de un término del Hamiltoniano H_1 , el cual describe la interacción cuark-gluón-cuark. Se deduce la forma efectiva de éste, sin embargo, al no tener un método general para tratar este término, se utilizan estados coherentes como herramienta para determinar el valor de expectación de los operadores bosónicos y así reducir el término de interacción a solamente operadores de cuarks. Esta reducción, hace posible encontrar nuevamente soluciones semi-analíticas, en donde se considera que el gluón tiene ciertas componentes preferentes, por lo que el nivel de búsqueda de posibles correcciones a las escalas hadrónicas es del tipo prueba. Finalmente, se determina la magnitud de las correcciones a las escalas hadrónicas para el caso de los dos niveles orbitales más bajos en el sector de cuarks y el nivel orbital más bajo en el sector gluónico. Dichas correcciones generan nuevas escalas hadrónicas que se encuentran dentro de intervalos reportados en la literatura.

Summary

The present work is a model for a Hamiltonian motivated by that of QCD, working in the Coulomb gauge and in the low energy regime. The structure of the QCD Hamiltonian in the Coulomb gauge doesn't look friendly and also its mathematical manipulation is difficult. However, working in this gauge the unphysical fields so-called ghost fields are avoided. The Hamiltonian motivated by QCD used here is divided into two parts, H_0 and H_1 . H_0 contains quark kinetic and mass terms, the gluon kinetic term, and the QCD Coulomb term. For this last term, it is considered an average interaction between color charge densities. The other term, H_1 , contains all other terms of the QCD Hamiltonian, such that $H_0 + H_1$ is identically the QCD Hamiltonian.

The model developed in this work includes two general considerations: the first of these is the implementation of a finite volume, to impose by hand, confinement; and the second is the implementation of an average interaction between color charge densities of both quarks and gluons. The purpose of the H_0 Hamiltonian is to generate the energy scales of the bound states of quarks and gluons, which afterwards can be associated with a hadronic spectrum. The purpose of the H_1 Hamiltonian is to generate corrections to the afore-mentioned energy scales stemming from the interactions between gluons and between quarks and gluons; all of this is developed from first principles. One previous work on this type of models, on which this investigation is based, 1) consider a system of quarks restricted to occupy only the lowest-level s-orbital, and a finite volume, 2) use a contact interaction between quarks, 3) do not consider dynamical gluons, and 4) implement an SU(2) group in order to describe color (despite being unphysical, the extension is directly) and flavor. Owing to these considerations it is possible to obtain an analytic solution (not usually obvious in this type of model) for an approximation of QCD. That solution has a high degeneracy, but it gives in a quantitative form the hadronic energy scale.

Motivated by these findings, the present work considers the H_0 Hamiltonian under the general considerations, but broadens the scope by easing the restrictions on the number of orbital levels accessible by the quarks, while maintaining in the first instance the exclusion of dynamical gluons. The first investigation was numerical and considered only the two lowest orbital levels, being the first s- and p-orbital levels, utilizing an SU(2) group to describe color and flavor, as in the previous work. Attempting to solve this problem numerically requires working with a Hamiltonian matrix of dimensions 80000×80000 , complicating any future extension of the model. In actuality, there already exist very elaborate numerical (LGT) calculations which reproduce hadronic spectra, also under some considerations. Therefore avoiding working with such elaborate numerical problems, thus, the approach used in this work is to return to seeking possible analytical solutions in QCD, for which an SU(3) group in the color is implemented. The first results of these investigations are two analytic solutions,

both denoted as $SU(2)$ -solutions herein, because of the operators that describe the action of the Hamiltonian, which satisfy a common $SU(2)$ algebra. The first of these analytic solutions corresponds to a system of quarks restricted to occupying the lowest s- and p-orbital levels. The second corresponds to a system of quarks occupying the three orbital levels, being the lowest two s- and the lowest p-orbital levels. These solutions are able to reproduce hadronic energy scales reported in the literature by adjusting a single parameter. The immediate extension from here is to have four levels, but this case does not have an analytic solution because of the $SU(2)$ algebra obtained before is broken for more than three orbital levels.

This work develops a new mathematical method to solve the restriction in the orbital levels. With this new method, denoted $\alpha\beta - BCS$, it is possible to solve an arbitrary number of orbital levels in a semi-analytic way (where semi-analytic means the solution of a system of quadratic and bilinear equations). This method is compared with the analytic solution mentioned before, for the case of two orbital levels, and they are found to coincide exactly. In the same way, the new semi-analytic solutions are tested to see if they reproduce reported hadronic scales for the cases of 2 to 22 orbital levels. They proved satisfactorily, finding also that the energy of a single particle converges and thus the meson and baryon energies also converge. The lowest mesonic scale found is $300MeV$, and therefore reproducing the pion energy with this quarks model requires only small corrections, which should be provided by the H_1 Hamiltonian.

Additionally, the model is extended to the gluon sector where analytic solutions are found, without altering the analytic and semi-analytic solutions in the quark sector. In order to reproduce the glueball energy ($1600MeV$) the parameter of the model is adjusted giving a value similar to that obtained in the quark sector. With this solution in the gluon sector it is possible to calculate any excited energy, and in this work, the first excited energy is calculated and found to be $600MeV$ greater than that of the glueball.

Having these results for the H_0 Hamiltonian, it is decided to incorporate an interaction term from the H_1 Hamiltonian into the model. The term considered is for the quark-gluon-quark interaction, where its effective form is deduced. As there is no general method for treating this specific term, coherent states method is used to describe the expectation value of the bosonic operator and this reduce the interaction term to just quark operators, making it possible to find new semi-analytic solutions. For such new solutions, it is assumed that the gluon has some preferred components. At the level of this investigation, it is sufficient to prove the existence of corrections to hadronic scales. Finally, it is possible to determine the magnitude of the corrections in the case of the two lowest orbital levels in the quark sector, and the lowest orbital level in the gluon sector. Such corrections corresponds to hadronic scales reported in the literature.

Índice general

1. Introducción	9
2. Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica en la Norma de Coulomb	14
2.1. El Formalismo Lagrangiano de la Cromodinámica Cuántica	15
2.2. Hamiltoniano de la CDC en la Norma de Coulomb	18
2.2.1. Norma Axial Temporal, $\mathbf{V}_0^a = 0$	19
2.2.2. Norma de Coulomb, $\nabla_i \mathbf{A}_i^a(\mathbf{r}) = 0$	21
2.3. Hamiltoniano Motivado de la CDC en la Norma de Coulomb	25
2.4. Consideraciones Generales del Modelo de la CDC a Bajas Energías	27
3. Modelo de Cuarks para los Niveles de Menor Energía	30
3.1. Descripción del Término Cinético de Cuarks	31
3.1.1. Descripción de los Campos y Operadores Fermiónicos	32
3.1.2. Término Cinético de Cuarks para el Orbital S más Bajo	34
3.2. Estructuras SU(2) del Término Cinético de Cuarks	36
3.2.1. Álgebra de los Operadores de Ascenso y Descenso, 2 Niveles	37
3.2.2. Álgebra de los Operadores de Ascenso y Descenso, 3 Niveles	41
3.3. Rompimiento del Álgebra SU(2)	45
4. Modelo de Cuarks para un Número Arbitrario de Niveles	47
4.1. Término de Masa de Cuarks	48

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	2
4.2. Transformación $\alpha\beta$	49
4.2.1. Transformación- $\alpha\beta$ aplicada al Término Cinético de Cuarks Efectivo	51
4.2.2. Transformación- $\alpha\beta$ aplicada al Término de Masa de Cuarks Efectivo	54
4.3. Transformación-BCS para el Hamiltoniano de Cuarks	55
4.4. Casos Prueba para el Método $\alpha\beta - BCS$	58
4.4.1. Solución- $\alpha\beta - BCS$ para el Caso de Dos Niveles Orbitales	59
4.4.2. Solución- $\alpha\beta - BCS$ para el Caso de Cuatro Niveles Orbitales	62
5. Hamiltoniano de Coulomb	65
5.1. Aproximación del Potencial de Interacción	66
5.2. Hamiltoniano de Coulomb Efectivo para Cuarks	68
5.2.1. Operador de Casimir vs $\mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q}(V_0)$	70
5.3. Hamiltoniano de Coulomb Efectivo para Cuarks y Gluones	74
5.4. Posibles Extensiones del Hamiltoniano de Coulomb	76
6. Modelo de Gluones para la Cromodinámica Cuántica	78
6.1. Caso Cuántico de una Caja Esférica	79
6.2. Operadores Bosónicos y Números Cuánticos	80
6.3. Gluones en una Caja Esférica	81
6.4. Estados de Gluones, Glueballs	84
7. Interacción Cuark-Gluón-Cuark	86
7.1. Hamiltoniano de Interacción Efectivo	87
7.2. Estado Prueba y sus Propiedades	92
7.3. Hamiltoniano de Interacción para los Estados de Menor Energía	94
7.4. Diagonalización del Hamiltoniano de Interacción para los Estados de Menor Energía	97
7.4.1. Diagonalización del Hamiltoniano de Interacción para Conexiones $s - s$ y $p - p$ en un Sistema Intrínseco de Color	97

8. Extensión del Modelo de Cuarks y Gluones	103
8.1. Soluciones del Método $\alpha\beta - BCS$ y su Comportamiento para más Niveles . . .	104
8.1.1. Energías Propias para Sistemas de Cuarks de 2 a 22 Niveles	106
8.2. Valor de expectación de los Operadores Bosónicos	109
8.2.1. Método de minimización-1	110
8.2.2. Método de minimización-2	111
8.2.3. Espectros Hadrónicos Generados al Considerar un Componente Gluónico	113
8.3. Temas de Investigación a Futuro	114
9. Resumen y Conclusiones	117
Apéndices	123
A. Deducción del Término Cinético de Cuarks	124
B. Factores de Interacción y Conexiones para el Término Cinético de Cuarks	129
C. Álgebra SU(2) para Tres Niveles	132
D. Deducción del Hamiltoniano de Coulomb Efectivo	135
D.1. Deducción del Hamiltoniano Efectivo de Cuarks	135
D.2. Hamiltoniano de Coulomb de Cuarks y Gluones	139
D.2.1. Densidad de Carga como Generador de SU(3)	140
E. Álgebra de los Operadores y Campos Bosónicos	143
E.1. Álgebra de los Operadores Bosónicos	143
E.2. Álgebra de los Campos Bosónicos	144
F. Gluones en una Cavidad Esférica	146
G. Deducción del Hamiltoniano de Interacción	149

H. Estados Coherentes para el Hamiltoniano Motivado de la CDC	153
H.1. Estados Coherentes	153
H.1.1. Constante de Normalización Bosónica	154
H.1.2. Elementos de Matriz de Operadores Bosónicos	155
H.1.3. Elementos de Matriz de Operadores Fermiónicos	156
H.2. Estrategía de Minimización	156
H.2.1. Consideraciones para el uso de Estados Coherentes	156
H.3. Hamiltoniano Efectivo con Estados Coherentes	158
H.3.1. Término Cinético de Cuarks	158
H.3.2. Término de masa de Cuarks	159
H.3.3. Hamiltoniano de Coulomb	159
H.3.4. Término Cinético de Gluones	161
H.3.5. Hamiltoniano de Interacción	161
I. Programas Utilizados	162
I.1. Programas .FOR y .EXE Utilizados	162
I.1.1. SU2-WIG.FOR (.EXE)	162
I.1.2. SU2-3J.FOR (.EXE)	162
I.1.3. SU2-6J.FOR (.EXE)	163
I.1.4. SU2-9J.EXE	163
I.1.5. su3su2cg.exe	163
I.2. Programas de Mathematica	163
I.2.1. Programa: Solución Ecuaciones Cuadráticas y Bilineales	164
I.2.2. Programa de Minimización del Hamiltoniano de la CDC	166
Bibliografía	169

Índice de figuras

2.1. Representación simbólica del Lagrangiano (ec. (2.11)) de la Cromodinámica Cuántica, líneas sólida \rightarrow cuarks y curvilíneas \rightarrow gluones	18
3.1. a) El mar de Dirac, esto es, todos los estados de energía negativa llenos, b) Aniquilación de un cuark de $E < 0$ y la creación de un cuark con $E > 0$, lo cual puede interpretarse como la creación de un cuark-anticuark.	33
3.2. a) Acción del operador K_+ para dos niveles, b) Acción del operador K_- para dos niveles y c) La representación gráfica compacta para describir la acción $K_+ + K_-$ de cualesquiera dos niveles	40
3.3. a) Acción del operador K_+ para tres niveles, b) Acción del operador K_- para tres niveles y c) La representación gráfica compacta para describir la acción $K_+ + K_-$ de cualesquiera tres niveles	44
4.1. Cambio de números principales mediante la transformación $\alpha\beta$	51
4.2. Estructura y número de variables de las matrices α y β . Ver discusión siguiente a la ec. (4.6)	52
4.3. Corte arbitrario en el número de niveles. Mediante n se determina la dimensión de los números principales n_j	53
5.1. Aproximación del potencial de interacción mediante una constante.	67

8.1. Comportamiento de los niveles de energía (GeV) como función del número de niveles considerados. 108

8.2. Espectro hadrónico para los cuarks más ligeros 109

8.3. Energías de minimización y correcciones para un componente gluónico mediante el método de minimización-1 111

8.4. Energías de minimización y correcciones para un componente gluónico mediante el método de minimización-2, para a) $g=3$, b) $g=5$ y c) $g=7$. . . 112

8.5. Corrección al espectro hadrónico de dos niveles al considerar solo un componente gluónico, para $g=3,5,7$ 114

Índice de cuadros

3.1. Energías del vacío, de excitación más bajas para un mesón y un barión.	41
3.2. Energías del vacío y de excitación más bajas para un mesón y un barión, para el caso de tres niveles orbitales.	43
4.1. Solución- $\alpha\beta - BCS$, caso dos niveles orbitales para cuarks sin masa.	60
4.2. Solución- $\alpha\beta - BCS$, caso dos niveles orbitales para cuarks con masa.	61
4.3. Soluciones α 's, β 's, para el sistema de cuatro niveles. Los factores de in- teracción \tilde{k}_{kk} están dados en GeV.	62
4.4. Solución- $\alpha\beta - BCS$, caso cuatro niveles orbitales. Los ángulos θ_1 y θ_2 están dados en radianes mientras que las energías están dadas en GeV.	64
7.1. Números cuánticos para cuarks y gluones correspondientes a las energías más bajas.	94
7.2. Corrección a las energías- $\alpha\beta - BCS$ (GeV), valores de expectación para los operadores bosónicos con $(\{Y_C, I_C, I_{Z_C}\} = \{0, 1, I_{Z_C}\}$ y $M = -1, 0, 1$), como función de la constante de interacción fuerte g y el valor V_0 . Para determinar $V_0(GeV)$ y g se usó el método de minimización-2 que se describe en el capítulo 8.	95

7.3. **Corrección a las energías- $\alpha\beta - BCS$ (GeV) y valores del expectación del operador bosónico con $(\{Y_C, I_C, I_{Z_C}\} = \{0, 1, 0\}$ y $M = 0$), como función del valor V_0 . Para determinar $V_0(GeV)$ se utilizó el método de minimización-2 que se describe en el capítulo 8. 98**

8.1. **Energías de una partícula $\epsilon_{j\pm\frac{1}{2},kk}$ [GeV], para los casos de 2 a 22 niveles . 107**

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad la Cromodinámica Cuántica (CDC) se acepta como la teoría fundamental que describe las interacciones fuertes. En el caso perturbativo (altas energías o distancias muy pequeñas) donde la constante de acoplamiento es pequeña, se pueden aplicar métodos de teoría de campo perturbativa para tratar la CDC. Por otro lado, en el caso no-perturbativo (energías bajas o distancias grandes) existe la posibilidad de entender ciertas propiedades de la CDC como tal, mediante distintos métodos, como los que discutimos más adelante: [1–22]. La idea es dar una breve introducción de qué se ha hecho al respecto en el límite no-perturbativo de la CDC (posiblemente la cronología no sea la exacta), para dar el enfoque y el contexto del presente trabajo.

A. De Rújula et al. [1], estudiaron las implicaciones en la espectroscopía de hadrones al trabajar la CDC con cuatro diferentes sabores para los cuarks, cada uno con tres posibles colores, acoplados a gluones sin masa. Además de la espectroscopía hadrónica y los arreglos mesónicos y bariónicos para el caso de cuatro cuarks, discutieron la interacción q - q y su posible origen. Desde entonces se han realizado muchos trabajos en la espectroscopía de hadrones y para entender diferentes características de la CDC como la interacción entre cuarks [2, 3]. Desafortunadamente, la CDC es una teoría de norma local, no-Abeliana y con ecuaciones de movimiento tan complicadas, que tratar de resolverla de forma directa es prácticamente imposible. Se han buscado diferentes caminos a seguir, entre los cuales se pueden mencionar

dos de los más conocidos: la teoría de norma de redes (Lattice Gauge Theory) y el modelo de bolsa del MIT (MIT Bag Model).

El modelo de bolsa del MIT es un modelo fenomenológico con un cierto número de parámetros por ajustar. Este tipo de modelos consideran diferentes términos de cuarks y gluones en una bolsa estática, en donde las energías asociadas a espectros de masas se determinan mediante ecuaciones de frontera. El radio de los diferentes mesones o bariones se obtiene de hacer una minimización en la ecuación de masas de dicho modelo. El éxito de los trabajos originales [4, 5], se dio en una época donde las computadoras no eran tan eficientes como en la actualidad. Posteriormente, con el avance de las computadoras, los cálculos de redes se convirtieron en la mejor herramienta para trabajar la CDC a bajas energías. Existen modelos de bolsa más recientes [6] que pueden verse como extensiones de los trabajos originales. En dichos trabajos es claro el argumento de por qué estos modelos no se han convertido en algo obsoleto y la respuesta es que: por un lado, el cálculo de niveles excitados, así como la información directa sobre la función de estados de cuarks y gluones, tales como anchos de decaimiento son difíciles de realizar usando las técnicas numéricas actuales. Por otro lado, los modelos fenomenológicos dan una imagen física de cómo los cálculos numéricos estiman las masas hadrónicas. El problema con estos modelos fenomenológicos es tratar de hacer una conexión con la teoría de la Cromodinámica Cuántica.

La teoría de norma de redes (Lattice Gauge Theory) [7, 8], parte de primeros principios, en el sentido de ser una teoría de norma local e incluir grados de libertad intrínsecos. Es una discretización del espacio tiempo, donde se definen las partículas y sus interacciones, además de que puede simular el límite continuo haciendo los puntos de la red cada vez más cercanos. En la actualidad [9, 10] es lo mejor con lo que se cuenta para hacer cálculos no perturbativos de la CDC, sin embargo el precio que hay que pagar puede ser alto. Los cálculos son muy elaborados, requiriendo de computadoras muy poderosas (cronológicamente fue un desarrollo paralelo) y los cálculos pueden tardar incluso en estas grandes computadoras varios días.

La CDC al igual que la Electrodinámica Cuántica EDC, permite trabajar en diferentes normas ya que la física del problema no debe cambiar. Pueden escogerse diferentes normas,

algunas de ellas son simplemente restricciones en el campo de norma o bien funciones del campo de norma. Estas normas pueden mantener o no la estructura covariante del Lagrangiano o Hamiltoniano resultante [23, 24]. En algunos casos es necesario introducir términos para mantener la estructura covariante, dichos términos contienen a los campos conocidos como fantasmas [19, 25], pues no tienen una interpretación física. La ventaja de estos métodos es que las técnicas de teoría de campo pueden aplicarse de forma directa. Por otro lado, perder la estructura covariante puede generar una teoría sin estos fantasmas pero las estructuras de Lagrangianos o Hamiltonianos pueden complicarse bastante [15, 23] y su manipulación resulta muy elaborada [13].

El estudio de la CDC a bajas energías como problemas de muchos cuerpos [12–15, 20–22], fue una evolución de los modelos teóricos. Por tanto, de manera natural surgen los conceptos de mar de cuarks, cuarks de valencia y estados excitados. En otros casos el enfoque de los métodos de muchos cuerpos es aproximativo, por ejemplo, la random phase approximation, RPA, en donde para el caso de fermiones, se proponen nuevos operadores (combinación lineal de los operadores originales del tipo partícula agujero), que satisfacen, de forma aproximada, las reglas de conmutación.

El presente trabajo, es la extensión de un trabajo anterior [18], en donde se consideró un modelo de cuarks para la CDC partiendo de primeros principios y donde se restringe a los cuarks a ocupar solo un nivel, el orbital- s , bajo la aproximación $SU(2)$ de color (no real) y sabor (solo los cuarks más ligeros). El resultado fue una solución analítica no obvia para este tipo de modelos. Este resultado motivó la búsqueda de posibles soluciones analíticas más generales en la teoría de la CDC a bajas energías. La primera extensión del modelo consistió en suavizar la restricción del número de niveles orbitales que los cuarks pueden ocupar, manteniendo la aproximación $SU(2)$ de color. El primer estudio realizado consistió en investigar la diagonalización numérica del término cinético, sin embargo, la dimensión del espacio a trabajar implicaba matrices del orden 10^9 para el caso de dos niveles orbitales, por lo que pensar en una extensión futura era algo complicado. Por tanto, se retomó la búsqueda de soluciones analíticas (posteriormente semi-analíticas) con éxito para el caso de dos y tres

niveles orbitales (correspondientes a cuatro y seis niveles respectivamente pues se trabaja en la descripción de Dirac), [20]. El éxito de las soluciones analíticas se ve truncado para tres niveles orbitales, ya que la extensión inmediata, cuatro niveles orbitales no tiene solución analítica. Sin embargo, la solución analítica dependiente de un solo parámetro, es capaz de ajustar la escala mesónica y bariónica con la elección correcta de dicho parámetro.

La extensión a cuatro niveles orbitales llevó al desarrollo de un nuevo método matemático para encontrar soluciones semi-analíticas para un número arbitrario de niveles orbitales y con ello, la extensión a un grupo $SU(3)$ de color, [21]. Siendo así que el modelo tenía como retos analizar las complicaciones al hacer cálculos para un número mayor a cuatro niveles orbitales [22], la incorporación de gluones de forma dinámica al modelo, así como interacciones entre cuarks, cuarks-gluones y gluones interactuantes, todos ellos partiendo de primeros principios. En este sentido, la búsqueda de soluciones analíticas, semi-analíticas (donde es necesario resolver sistemas de ecuaciones no lineales para obtener una solución analítica), diagonalizaciones numéricas sencillas sería cada vez más complicada, requiriendo así nuevas aproximaciones, siendo algunas de estas aproximaciones de tipo no fundamental (para el cálculo de interacciones), debido a no haber un método estándar para trabajar la Cromodinámica Cuántica a bajas energías (fuera de cálculos de redes). Sin embargo, el uso de estas aproximaciones puede ser la guía para retomar el camino de primeros principios y cada vez hacer un modelo más cercano a la CDC real.

El presente modelo no requiere tiempos de espera muy grandes en el cálculo numérico para menos de veinte niveles orbitales (correspondiente a cuarenta niveles en la descripción de Dirac). Sin embargo, el tiempo de cálculo para energías hadrónicas empieza a incrementarse para un número mayor a veintidos niveles orbitales (cuarenta y cuatro niveles en la descripción de Dirac). El cálculo para veintidos niveles orbitales, presentado en este trabajo ya muestra un comportamiento asintótico de la escala mesónica y bariónica, por lo que, se podría trabajar este sistema de veintidos niveles y enfocar los esfuerzos para incluir gluones dinámicos en el modelo. Tanto las soluciones analíticas (2 y 3 niveles) como las soluciones semi-analíticas (2 a 22 niveles), generan las escalas mesónicas de forma correcta. Por otro lado, la escala bariónica

obtenida por la solución semi-analítica tiene discrepancias a partir de considerar sistemas con más de doce niveles orbitales accesibles para los cuarks, siendo necesario hacer correcciones mediante la incorporación de gluones al modelo.

El presente modelo puede dar idea de posibles conexiones entre la CDC y modelos fenomenológicos, sugiriendo una base que simplifique los cálculos numéricos y en la cual los términos de interacción sean más fáciles de trabajar. En este momento no se puede considerar concluido el modelo, pues el actual estatus del modelo genera temas de investigación futuras como son: estados de gluones (glueballs), condensados, estados híbridos y estados excitados hasta el orden cuadrático.

La estructura del presente trabajo es la siguiente: En el capítulo 2, se presenta el formalismo de la CDC al trabajar en la norma de Coulomb y consideraciones generales del modelo. En el capítulo 3, se presentan las soluciones analíticas para dos y tres niveles orbitales. En el capítulo 4, se muestra el método- $\alpha\beta$ - *BCS* desarrollado para la solución a un número arbitrario de niveles orbitales, así como un cálculo de prueba para 4 niveles orbitales. En el capítulo 5, se muestra la estructura del término Coulombiano bajo la aproximación de una interacción promedio, V_0 y la extensión de éste al incluir gluones. En el capítulo 6, se introduce el término cinético de gluones y se calcula un primer espectro para estados de gluones. En el capítulo 7, se presenta el término de interacción qqq y se discuten posibles caminos a seguir para trabajar la interacción a un nivel no fundamental. En el capítulo 8, se presentan los alcances del modelo aquí desarrollado y sus posibles extensiones futuras. En el capítulo 9, se discuten las características del modelo desarrollado en este trabajo a manera de conclusión.

Capítulo 2

Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica en la Norma de Coulomb

La Cromodinámica Cuántica es una teoría de campo de las llamadas teorías de norma, no-Abelianas, la cual trata la interacción SU(3) de color entre los cuarks y gluones. Los generadores del grupo SU(3), son las matrices de Gell-Mann λ^a . En este trabajo por conveniencia se usará la notación $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$ para denotar a los generadores del grupo SU(3) de color.

El Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica, CDC (o QCD de sus siglas en inglés), puede trabajarse en distintas normas de manera semejante que la Electrodinámica Cuántica (QED), esto debido a que la física es la misma ya que trabajar en una u otra norma no altera las ecuaciones de movimiento. Algunas de las normas más utilizadas son: la norma axial temporal $\mathbf{A}_0^a = 0$, donde \mathbf{A}_0^a es la componente temporal del cuadrivector \mathbf{A}_μ^a y el superíndice a , denota el color del gluón. Otras normas son la norma axial-espacial, $\mathbf{A}_i^a = 0$, donde i puede ser 1, 2 o 3. Incluso la elección de la norma puede ser una función lineal del campo de norma, esto es, $F(A_\mu^a) = 0$ [19, 23, 26], tal es el caso de la norma de Feynman y la norma Coulomb $\nabla_i \mathbf{A}_i^a = 0$; esta última es una condición sobre los componentes espaciales del campo de norma.

En este trabajo se eligió trabajar el Hamiltoniano de la CDC en la norma de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A}^a = 0$), debido a que todos los grados de libertad dinámicos del campo de norma son físicos, esto es, el campo de norma o campo gluónico tiene dos polarizaciones transversales.

Estas componentes transversales independientes, corresponden a las componentes eléctrica (e) y magnética (m) del campo de norma (ver capítulo 6), más sin embargo, los campos cromomagnético ec. (2.16) y cromo-eléctrico ec. (2.26) dependen de ambas componentes. Elegir esta norma tiene ciertas repercusiones en la estructura del Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica, las cuales se discuten en las siguientes secciones.

Este capítulo se distribuye de la siguiente forma: En la sección 2.1 se muestra un resumen del formalismo Lagrangiano de la CDC. En la sección 2.2, se muestra un resumen de los pasos necesarios para deducir el Hamiltoniano de la CDC en la norma de Coulomb. En la sección 2.3, se da y se discute la estructura del Hamiltoniano (motivado de la CDC) que se usará en este trabajo, así como las posibles conexiones con el Hamiltoniano deducido en la sección 2.2. Finalmente, en la sección 2.4, se mencionan las consideraciones generales del modelo, las cuales son la base para trabajar el Hamiltoniano motivado de la CDC de la sección 2.3.

2.1. El Formalismo Lagrangiano de la Cromodinámica Cuántica

Como se ha mencionado previamente, la Cromodinámica Cuántica es una teoría de norma local [25, 27, 28], en el sentido de requerir que la forma de la densidad Lagrangiana que lo rige, sea invariante bajo una transformación local del campo. En esta sección se muestran los pasos elementales para mantener la invariancia de norma y las consecuencias de esto [23], [29]. En este sentido se tiene que la CDC describe partículas fermiónicas elementales como son los cuarks, descritos por la densidad Lagrangiana libre, la cual está dada por

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x)_{cf} (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{cc'} - m\delta_{cc'}) \psi(x)_{c'f} \quad (2.1)$$

con $\psi_{cf}(x)$, los campos de cuarks, $\bar{\psi}(x)_{cf} = \psi^\dagger(x)_{cf}\gamma^0$, una para cada color $c, c' = 1, \dots, N_c$ (N_c número de colores considerados) y sabor $f = 1, \dots, N_f$ (N_f número de sabores considerados). Se ha usado c y c' para indicar índices de color de cuarks, sin embargo, más adelante esta notación no será suficiente y se usará también c_i para indicar índices de color de cuarks y

así distinguir de los índices a, b, d, e , usados para etiquetar el índice de color de gluones y generadores, los cuales van de $1, \dots, N_c^2 - 1$. Este problema no se presenta con el índice de sabor ya que el Lagrangiano de la CDC, como se mostrará, no cambia sabor y será suficiente usar f y f' cuando sea necesario.

Por tanto, para inferir la estructura de la Cromodinámica Cuántica partiendo de la invariancia de norma local, es necesario pedir que \mathcal{L}_0 sea invariante bajo una transformación de fase local, de la forma

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}(x)_{cf} &\rightarrow (e^{-i\alpha^a(x)T^a})_{cc'} \boldsymbol{\psi}(x)_{c'f} \\ \bar{\boldsymbol{\psi}}(x)_{cf} &\rightarrow (e^{i\alpha^a(x)T^a})_{cc'} \bar{\boldsymbol{\psi}}(x)_{c'f}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

donde los generadores T^a del grupo $SU(3)$ no conmutan entre sí

$$[T^a, T^b] = if^{abd}T^d,\tag{2.3}$$

y f^{abd} son constantes reales llamadas constantes de estructura del grupo.

Sin embargo, la transformación de norma local arriba definida, implica que la derivada de $\boldsymbol{\psi}(x)_{cf}$ rompe la invariancia de \mathcal{L}_0 , ya que

$$\partial_\mu \boldsymbol{\psi}(x)_{cf} \rightarrow (e^{-i\alpha^a(x)T^a})_{cc'} \partial_\mu \boldsymbol{\psi}(x)_{c'f} - i (T^a \partial_\mu \alpha^a(x) e^{-i\alpha^a(x)T^a})_{cc'} \boldsymbol{\psi}(x)_{c'f}.\tag{2.4}$$

Para requerir la invariancia de norma local, es necesario buscar una derivada modificada D_μ , tal que $D_\mu \boldsymbol{\psi}(x)_{cf} \rightarrow (e^{-i\alpha^a(x)T^a})_{cc'} D_\mu \boldsymbol{\psi}(x)_{c'f}$. Para la forma de esta derivada se tiene que introducir un campo $\mathbf{V}_\mu^a(x)$, donde $\mu = 0, 1, 2, 3$ (componentes espacio temporal), $a = 1, \dots, 8$ (componentes de color) y con propiedades de transformación tales que cancelen el término no deseado (el segundo término en la ec. (2.4)). Este propósito se consigue con la siguiente construcción

$$D_{\mu, cc'} \equiv \partial_\mu \delta_{cc'} - ig T_{cc'}^a \mathbf{V}_\mu^a(x)\tag{2.5}$$

donde $\mathbf{V}_\mu^a(x)$ transforma de la siguiente forma

$$\mathbf{V}_\mu^a(x) \rightarrow \mathbf{V}_\mu^a(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a(x)\tag{2.6}$$

y con lo cual pedir la invariancia de norma local en el Lagrangiano \mathcal{L}_0 genera un nuevo término de interacción, esto es:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)_{cf} (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{cc'} - m\delta_{cc'}) \psi(x)_{c'f} - g (\bar{\psi}(x)_{cf} \gamma^\mu T_{cc'}^a \psi(x)_{c'f}) \mathbf{V}_\mu^a. \quad (2.7)$$

Hasta este punto se tiene una estructura análoga al caso de la Electrodinámica Cuántica, sin embargo, para una transformación de norma no-Abeliana este formalismo no es suficiente para producir un Lagrangiano invariante de norma local. Para mostrar ésto, basta con considerar una transformación de fase infinitesimal

$$\psi(x)_{cf} \rightarrow [1 - i\alpha^a(x)T^a]_{cc'} \psi(x)_{c'f} \quad (2.8)$$

en el término de interacción, con lo cual se tiene que

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}(x)_{cf} \gamma^\mu T_{cc'}^a \psi(x)_{c'f}) &\rightarrow (\bar{\psi}(x)_{cf} \gamma^\mu T_{cc'}^a \psi(x)_{c'f}) - i\alpha^b(x) \bar{\psi}(x)_{cf} \gamma^\mu (T^a T^b - T^b T^a)_{cc'} \psi(x)_{c'f} \\ &\rightarrow (\bar{\psi}(x)_{cf} \gamma^\mu T_{cc'}^a \psi(x)_{c'f}) + f^{abd} \alpha^b(x) (\bar{\psi}(x)_{cf} \gamma^\mu T_{cc'}^d \psi(x)_{c'f}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Tomando en cuenta este resultado, se redefine la transformación del campo de norma de la siguiente forma

$$\mathbf{V}_\mu^a(x) \rightarrow \mathbf{V}_\mu^a(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a(x) + f^{abd} \alpha^b(x) \mathbf{V}_\mu^d(x) \quad (2.10)$$

Por último, si se desea considerar al nuevo campo de norma como un campo físico (al igual que se hace con el fotón), se debe añadir al Lagrangiano un término correspondiente a su energía cinética. Este término debe ser invariante bajo ec. (2.10), con lo cual se tiene finalmente que el Lagrangiano de la CDC invariante de norma está dado por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)_{cf} (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{cc'} - m\delta_{cc'}) \psi(x)_{c'f} - g (\bar{\psi}(x)_{cf} \gamma^\mu T_{cc'}^a \psi(x)_{c'f}) \mathbf{V}_\mu^a(x) - \frac{1}{4} \mathbf{V}_{\mu\nu}^a(x) \mathbf{V}^{a,\nu\mu}(x) \quad (2.11)$$

donde

$$\mathbf{V}_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu \mathbf{V}_\nu^a(x) - \partial_\nu \mathbf{V}_\mu^a(x) + g f^{abd} \mathbf{V}_\mu^b(x) \mathbf{V}_\nu^d(x). \quad (2.12)$$

Las ecuaciones de movimiento para este Lagrangiano se expresan como:

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi_{cf}(x) = 0 \tag{2.13}$$

$$\partial_\mu \mathbf{V}^{a,\mu\nu}(x) + gf^{abd} \mathbf{V}_\mu^b(x) \mathbf{V}^{d,\mu\nu}(x) - g\bar{\psi}_{cf}(x) \gamma^\nu T_{cc'}^a \psi_{c'f}(x) = 0 \tag{2.14}$$

La ec. (2.11), es el Lagrangiano para cuarks ψ_{cf} y gluones \mathbf{V}_μ^a interactuando a través del color con un acoplamiento dado por g .

$$\mathcal{L} \rightarrow \bar{\psi}(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi + \frac{1}{2} \mathbf{V}^\mu i g_{\mu\nu} p^2 \mathbf{V}^\nu + g\bar{\psi}\psi\mathbf{V} + g\mathbf{V}^3 + g^2(\mathbf{V})^4$$

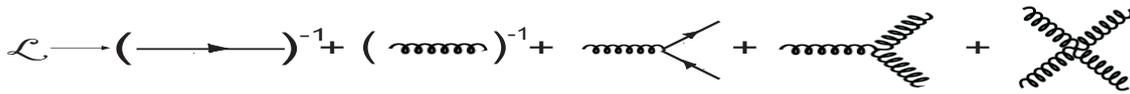


Figura 2.1: Representación simbólica del Lagrangiano (ec. (2.11)) de la Cromodinámica Cuántica, líneas sólida \rightarrow cuarks y curvilíneas \rightarrow gluones

El término cinético de gluones incluido en el Lagrangiano (2.11), para imponer simetría de norma, se ha convertido en un término no solamente cinético sino también de auto-interacción entre los campos de norma. Si se representa el Lagrangiano de forma simbólica, figura (2.1), se tiene que los primeros dos términos describen la propagación libre de cuarks y gluones respectivamente. El tercer término corresponde a la interacción cuark-gluón, mientras que los dos términos restantes exhiben la presencia de vértices de tres y cuatro gluones en la CDC. La existencia de estos vértices ratifica el hecho de que los gluones tienen carga de color y que pueden interactuar con ellos mismos, hecho que no sucede en la electrodinámica cuántica (EDC).

2.2. Hamiltoniano de la CDC en la Norma de Coulomb

En esta sección se aplica el formalismo canónico para la deducción del Hamiltoniano de la CDC en la norma de Coulomb. T. D. Lee, [23] ha hecho la deducción de este Hamiltoniano y la

relación con ciertos casos clásicos. Posteriormente, Christ y Lee, [24], extendieron su trabajo a normas más generales. A . P. Szczepaniak et al. [12–14], han hecho esfuerzos por trabajar la CDC en la norma de Coulomb con la finalidad de describir ciertas características de esta teoría, como son los estados de gluones o glueballs.

Por tanto, se usa la cuantización canónica para pasar del Lagrangiano (2.11) al Hamiltoniano, lo cual requiere escoger una norma específica que permita escribir relaciones de conmutación entre los campos y sus momentos conjugados para un tiempo dado. La elección de la norma no debe cambiar la física, ya que las ecuaciones de movimiento pueden escribirse sin la previa elección de cualquier norma. Por otro lado, la elección de una norma en la teoría cuántica de campos tiene consecuencias no obvias en la estructura del Hamiltoniano de la CDC; por tal motivo, se presenta un resumen de la notación y los pasos a seguir para la deducción del Hamiltoniano de la CDC en la norma de Coulomb.

2.2.1. Norma Axial Temporal, $V_0^a = 0$

Haciendo uso de la invariancia de norma del Lagrangiano de la CDC, es posible mediante una transformación de norma, pasar de un campo de norma V_μ^a arbitrario, a uno que cumple con la condición $V_0^a = 0$ para toda a . La demostración de éste hecho está fuera del contexto del presente trabajo, dicha demostración se puede consultar en [23].

Tomando el formalismo canónico usual, el Hamiltoniano de la CDC está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} (\boldsymbol{\Pi}^a \cdot \boldsymbol{\Pi}^a + \mathbf{B}^a \cdot \mathbf{B}^a) - g \int d\mathbf{r} \bar{\psi}_{cf} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{V}^a T_{cc'}^a \psi_{c'f} \\ & + \int d\mathbf{r} \bar{\psi}_{cf} (-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m) \psi_{cf} \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde $i\boldsymbol{\psi}^\dagger$ es el momento conjugado de $\boldsymbol{\psi}$ y $\bar{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{\psi}^\dagger \boldsymbol{\gamma}^0$, mientras que $\boldsymbol{\Pi}^a = \dot{\mathbf{V}}^a = -\mathbf{E}^a$ es el momento conjugado de \mathbf{V}^a , el cual está relacionado con el campo eléctrico. El campo magnético \mathbf{B}^a está dado por

$$\mathbf{B}_i^a = \epsilon_{ijk} \nabla_j \mathbf{V}_k^a + \frac{g}{2} \epsilon_{ijk} f^{abd} \mathbf{V}_j^b \mathbf{V}_k^d, \quad (2.16)$$

los subíndices i, j, k denotan índices espaciales. En la ec. (2.15), se usa para los campos fermiónicos c, f para representar índices de color y sabor respectivamente. Como se ha hecho explícito, el segundo término de la ec. (2.15), no cambia el sabor pero si el color debido al generador T^a , el cual acopla la parte de color de los campos de cuarks al color del campo gluónico. Por otro lado, el tercer término de la ec. (2.15) correspondiente al término cinético de los cuarks no cambia sabor ni color, sin embargo, como se mostrará en la sección 3.1 mezcla momentos angulares orbitales diferentes.

Este procedimiento de cuantización canónica postula las siguientes relaciones de conmutación y anticonmutación para los campos de gluones y de cuarks:

$$\begin{aligned} [\mathbf{V}_i^a(\mathbf{r}, t), \mathbf{\Pi}_j^b(\mathbf{r}', t)] &= i\delta_{ij}\delta^{ab}\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \{\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t)_{cf}, \boldsymbol{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)_{c'f'}\} &= \delta_{cc'}\delta_{ff'}\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (2.17)$$

y los posibles conmutadores y anticonmutadores restantes son iguales a cero.

Usando la siguiente notación corta para el campo del gluón y su momento conjugado, $\mathbf{V}_i = T^a \mathbf{V}_i^a$ y $\mathbf{\Pi}_i = T^a \mathbf{\Pi}_i^a$ respectivamente, es fácil mostrar que la densidad Hamiltoniana y las relaciones de conmutación permanecen invariantes bajo una transformación $SU(3)$ independiente del tiempo [23, 24], de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i &\rightarrow u \mathbf{V}_i u^\dagger - \frac{i}{g} (\nabla_i u) u^\dagger \\ \mathbf{\Pi}_i &\rightarrow u \mathbf{\Pi}_i u^\dagger \\ \boldsymbol{\psi} &\rightarrow u \boldsymbol{\psi}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde $u = u(x) = e^{-i\alpha^a(x)T^a}$ puede ser cualquier matriz unitaria de 3×3 con $\det u = 1$. El grupo invariante $\{u(x)\}$ se genera por los operadores \mathcal{G}^a , los cuales están dados por

$$\mathcal{G}^a \equiv J^a + \boldsymbol{\psi}^\dagger T^a \boldsymbol{\psi} \quad (2.19)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^a &\equiv \frac{1}{g} D_i^{ab} \mathbf{\Pi}_i^b \\ D_i^{ab} &= \delta^{ab} \nabla_i - g f^{abd} \mathbf{V}_i^d \end{aligned} \quad (2.20)$$

y satisfacen la siguiente álgebra

$$[\mathcal{G}^a(\mathbf{r}, t), \mathcal{G}^b(\mathbf{r}', t)] = if^{abd}\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathcal{G}^d(\mathbf{r}, t). \quad (2.21)$$

Estos generadores son cantidades que se conservan, esto es

$$\dot{\mathcal{G}}^a(\mathbf{r}, t) = i[H, \mathcal{G}^a(\mathbf{r}, t)] = 0 \quad (2.22)$$

lo cual se sigue de las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [\mathcal{G}^a(\mathbf{r}, t), \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}', t)] &= -\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')T^a\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t), \\ [\mathcal{G}^a(\mathbf{r}, t), \boldsymbol{\Pi}_i^b(\mathbf{r}', t)] &= if^{abd}\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\boldsymbol{\Pi}_i^d(\mathbf{r}, t), \\ [\mathcal{G}^a(\mathbf{r}, t), \mathbf{V}_i^b(\mathbf{r}', t)] &= if^{abd}\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{V}_i^d(\mathbf{r}, t) - \frac{i}{g}\delta^{ab}\nabla_i\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Se puede mostrar de las ecuaciones de movimiento (2.14), que considerar $\nu = 0$, es equivalente a $g\mathcal{G}^a = 0$. Por tanto, para no violar esta ecuación de movimiento se necesita imponer en todos los vectores de estado la condición

$$\mathcal{G}^a|.\rangle = 0. \quad (2.24)$$

Tomando en cuenta la relación $\boldsymbol{\Pi}_i^a = -\mathbf{E}_i^a$, la densidad de carga de color de los gluones está dada por $\rho_g^a = f^{abd}\mathbf{V}^b \cdot \boldsymbol{\Pi}^d$ y la densidad de carga de color de los cuarks está dada por $\rho_q^a = \boldsymbol{\psi}_{cf}T_{cc'}^a\boldsymbol{\psi}_{c'f}$, con lo cual la ec. (2.24) expresa la ley de Gauss en la Cromodinámica Cuántica.

2.2.2. Norma de Coulomb, $\nabla_i\mathbf{A}_i^a(\mathbf{r}) = 0$

El Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica en la norma de Coulomb, se obtiene de transformar el Hamiltoniano canónico en la norma $\mathbf{V}_0^a = 0$ a la norma de Coulomb, lo cual se logra al hacer una transformación del tipo (2.18), esto es,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i &= u\mathbf{A}_i u^\dagger - \frac{i}{g}(\nabla_i u)u^\dagger, \\ \mathbf{A}_0 &= -\frac{i}{g}u^\dagger u, \end{aligned} \quad (2.25)$$

teniendo así un campo de norma $\mathbf{A}_\mu = T^a \mathbf{A}_\mu^a$, que cumple con la condición $\nabla_i \mathbf{A}_i = 0$. Para un grupo SU(3), hay ocho generadores T^a , por tanto, la matriz unitaria $u(x)$ depende de los ocho parámetros del grupo $\alpha^a(x)$, por lo que, en cualquier punto fijo del espacio hay 24 campos \mathbf{V}_i^a , donde $i = 1, 2, 3$ y $a = 1, \dots, 8$. En la norma de Coulomb se tienen ocho restricciones dadas por $\nabla_i \mathbf{A}_i^a = 0$, por tanto, hay 16 campos \mathbf{A}_i^a independientes. En este sentido, la transformación (2.25) es una transformación que relaciona 24 campos \mathbf{V}_i^a con 16 campos \mathbf{A}_i^a y 8 parámetros $\alpha^a(x)$. Finalmente, la dependencia en estos parámetros del grupo $\alpha^a(x)$, será eliminada mediante la imposición de la ley de Gauss a nivel de operadores.

Con lo anterior el campo cromo-eléctrico adquiere la siguiente estructura, [13];

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_i^a = -\dot{\mathbf{A}}_i^a - \nabla_i \mathbf{A}_0^a + g f^{abd} \mathbf{A}_0^b \mathbf{A}_i^d \quad (2.26)$$

el cual satisface la ley de Gauss ec. (2.27), que es una condición que se debe imponer al trabajar en la norma de Coulomb de forma equivalente a $g\mathcal{G}^a = 0$ en la norma axial temporal $\mathbf{V}_0^a = 0$. La ley de Gauss se escribe de la siguiente forma:

$$\nabla_i \boldsymbol{\mathcal{E}}_i^a + g f^{abd} \mathbf{A}_i^b \boldsymbol{\mathcal{E}}_i^d = g \rho_q^a \quad (2.27)$$

o equivalentemente

$$\mathcal{D}_i^{ab} \boldsymbol{\mathcal{E}}_i^b = g \rho_q^a \quad (2.28)$$

con $\mathcal{D}_i^{ab} = \delta^{ab} \nabla_i - g f^{abd} \mathbf{A}_i^d$ la derivada covariante, la cual ahora depende del campo de norma transformado, \mathbf{A}_i^d .

Si se divide el campo cromo-eléctrico en su componente transversal y longitudinal de la siguiente forma: $\boldsymbol{\mathcal{E}}_i^a = \boldsymbol{\mathcal{E}}_i^{tr,a} - \nabla_i \phi^a$ y se introduce en la ec. (2.28), se tiene

$$-(\mathcal{D}_i^{ab} \nabla_i) \phi^b = g \rho^a \quad (2.29)$$

con

$$\rho^a = \rho_q^a + \rho_g^a = \boldsymbol{\psi}^\dagger_{cf} T_{cc'}^a \boldsymbol{\psi}_{c'f} + g f^{abd} \mathbf{A}_i^d \boldsymbol{\mathcal{E}}_i^{tr,b}. \quad (2.30)$$

Al considerar la divergencia del campo cromo-electrico, ec. (2.26) y la descomposición de éste en sus componentes transversal y longitudinal, se obtiene la relación:

$$\nabla_i \mathcal{E}_i^a = -\nabla_i \mathcal{D}_i^{ab} \mathbf{A}_0^b = -\nabla^2 \phi^a \quad (2.31)$$

por tanto, se puede obtener la componente temporal del campo de norma así como el campo escalar que determina la componente longitudinal del campo cromo-eléctrico de las ecs. (2.29), (2.31), esto es

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0^b &= \left(\frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} (-\nabla^2) \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} \right)_{bb'} g \rho^{b'}, \\ \phi^a &= - \left(\frac{g}{\nabla \cdot \mathcal{D}} \right)_{aa'} \rho^{a'}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

El momento conjugado del campo de norma transverso viene dado por

$$\Pi_i^{tr,a} = -\mathcal{E}_i^{tr,a} = \dot{\mathbf{A}}_i^a + g(\delta_{ij} - \nabla^{-2} \nabla_i \nabla_j) f^{abd} \mathbf{A}_0^b \mathbf{A}_j^d, \quad (2.33)$$

donde es fácil justificar que la estructura del campo cromo-eléctrico transversal es la correcta mediante $\nabla_i \mathcal{E}_i^{tr,a} = 0$ y que $\mathcal{E}_i^a - \mathcal{E}_i^{tr,a}$ se puede escribir como el gradiente de un término escalar.

Finalmente, se puede escribir el Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica en la norma de Coulomb simplemente al aplicar una transformación SU(3), la cual relacione los diferentes campos en la norma axial temporal con los campos en la norma de Coulomb y sustituir el campo cromo-eléctrico en sus componentes transversal y longitudinal, esto es, $\Pi_i^a = -\mathcal{E}_i^a = -\mathcal{E}_i^{tr,a} + \nabla_i \phi^a$. El Hamiltoniano resultante tiene la siguiente estructura

$$H = \int \left\{ \frac{1}{2} [\mathcal{E}_i^{tr,a} \mathcal{E}_i^{tr,a} + (\nabla_i \phi^a)^2 + \mathcal{B}_i^a \mathcal{B}_i^a] - \bar{\psi}_{cf} (-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m) \psi_{cf} - g \bar{\psi}_{cf} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}^a T_{cc'}^a \psi_{c'f} \right\} d\mathbf{r}. \quad (2.34)$$

Usando $\Pi_i^{tr,a} = -\mathcal{E}_i^{tr,a}$ y la ecuación (2.32), el Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica se escribe como

$$\begin{aligned} H &= \int \left\{ \frac{1}{2} [\Pi_i^{tr,a} \Pi_i^{tr,a} + \mathcal{B}_i^a \mathcal{B}_i^a] - \bar{\psi}_{cf} (-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m) \psi_{cf} - g \bar{\psi}_{cf} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}^a T_{cc'}^a \psi_{c'f} \right\} d\mathbf{r} \\ &\quad + \frac{1}{2} g^2 \int \rho^a(\mathbf{r}) \langle a, \mathbf{r} | \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} (-\nabla^2) \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} | a', \mathbf{r}' \rangle \rho^{a'}(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde se ha usado la notación matricial para el integrando del último término del Hamiltoniano de la CDC, ec. (2.35).

Para considerar el caso cuántico hay que considerar las reglas de anticonmutación entre los campos fermiónicos;

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t)_{cf}, \boldsymbol{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t)_{c'f'}\} &= \delta_{cc'}\delta_{ff'}\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \{\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t)_{cf}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}', t)_{c'f'}\} &= \{\boldsymbol{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)_{cf}, \boldsymbol{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t)_{c'f'}\} = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

mientras que debido a la transversalidad del campo de norma, se tienen las reglas de conmutación siguientes

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_i^a(\mathbf{r}, t), \boldsymbol{\Pi}_j^{tr\ b}(\mathbf{r}', t)] &= i\delta^{ab}(\delta_{ij} - \nabla^{-2}\nabla_i\nabla_j)\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ [\mathbf{A}_i^a(\mathbf{r}, t), \mathbf{A}_j^b(\mathbf{r}', t)] &= [\boldsymbol{\Pi}_i^{tr\ a}(\mathbf{r}, t), \boldsymbol{\Pi}_j^{tr\ b}(\mathbf{r}', t)] = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Por otro lado, al haber considerado una transformación de norma local es necesario incluir un factor que indique cómo cambian las nuevas variables. Este factor es el Jacobiano, el cual en las teorías del campo no-Abelianas se le conoce como determinante de Faddeev-Popov [23, 24, 26], el cual viene dado por $\mathcal{J} = \det(\nabla \cdot \mathcal{D})$ y donde $\nabla \cdot \mathcal{D}$ se conoce como el operador de Faddeev-Popov, al cual en el presente trabajo se le da el carácter de una funcional. Por tanto, el Hamiltoniano cuántico de la CDC en la Norma de Coulomb está dado por

$$\begin{aligned} H &= \int \left\{ \frac{1}{2} [\mathcal{J}^{-1}\boldsymbol{\Pi}_i^{tr\ a}\mathcal{J}\boldsymbol{\Pi}_i^{tr\ a} + \mathcal{B}_i^a\mathcal{B}_i^a] - \bar{\boldsymbol{\psi}}_{cf}(-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m)\boldsymbol{\psi}_{cf} - g\bar{\boldsymbol{\psi}}_{cf}\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}^a T_{cc'}^a \boldsymbol{\psi}_{c'f} \right\} d\mathbf{r} \\ &\quad + \frac{1}{2}g^2 \int \mathcal{J}^{-1}\rho^a(\mathbf{r})\langle a, \mathbf{r} | \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}}(-\nabla^2)\frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}}|a', \mathbf{r}'\rangle \mathcal{J}\rho^{a'}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}d\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Antes de discutir el Hamiltoniano motivado de la Cromodinámica Cuántica en la Norma de Coulomb que se utiliza en este trabajo, se discute la estructura del Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica en la norma de Coulomb, ec. (2.38).

En primer lugar, de manera muy semejante a la Electrodinámica Cuántica, se tiene la energía del campo cromo-electromagnético, el cual solo involucra al campo de norma interactuando mediante el color. El segundo término de la ec. (2.38), corresponde al término cinético

y de masa de cuarks, donde el primero de éstos, ya no tiene una estructura covariante. Éstos términos no mezclan color ni sabor pero pueden mezclar espín. El tercer término, es el término de interacción entre cuarks y gluones, el cual es el resultado de pedir que la CDC sea una teoría invariante de norma local. Como principal característica de éste término, está la mezcla de color, la cual complica cualquier búsqueda de posibles soluciones analíticas, semi-analíticas y numéricas de este Hamiltoniano. Por último, se tiene lo que se denomina el término de Coulomb en la Cromodinámica Cuántica. Al igual que en la Electrodinámica Cuántica, puede verse como la interacción entre dos densidades de carga (en este caso de color). Sin embargo la interacción no luce sencilla de manipular y no existe una forma estandar para trabajar el operador que aparece entre las densidades de carga.

Si se desea buscar posibles simplificaciones del Hamiltoniano, ec. (2.38), como posibles soluciones analíticas o bien semi-analíticas, es necesario estudiar cada uno de sus términos y ver bajo qué suposiciones (justificables) son posibles dichas simplificaciones.

2.3. Hamiltoniano Motivado de la CDC en la Norma de Coulomb

En esta sección se presenta el Hamiltoniano motivado de la CDC en la norma de Coulomb así como las posibles conexiones con el Hamiltoniano deducido en la sección anterior, ec. (2.38).

El Hamiltoniano motivado de la CDC que se va a utilizar en este trabajo se ha tomado del trabajo de A. P. Szczepaniak and E. Swanson [13]. Este Hamiltoniano viene dado por:

$$\begin{aligned}
 H &= H_0 + H_1, \\
 H_0 &= \int \left\{ \frac{1}{2} [\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) - \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r})] + \psi^\dagger(\mathbf{r}) [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla] \psi(\mathbf{r}) + \psi^\dagger(\mathbf{r}) \beta m \psi(\mathbf{r}) \right\} d\mathbf{r} \\
 &\quad + \frac{1}{2} g^2 \int \rho_a(\mathbf{r}) K^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho^a(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \\
 H_1 &= \int \frac{1}{2} [\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r})] d\mathbf{r} - g \int \psi^\dagger(\mathbf{r}) \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + V_A + V_B
 \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}g^2 \int \left\{ \rho_a(\mathbf{r}) \langle a, \mathbf{r} | \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} (-\nabla^2) \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} | a' \mathbf{r}' \rangle \rho^{a'}(\mathbf{r}') - \rho_a(\mathbf{r}) K^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho^a(\mathbf{r}') \right\} d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \quad (2.39)$$

En primera instancia, parece simplemente una reescritura del Hamiltoniano de la CDC, sin embargo, A. P. Szczepaniak y E. Swanson, [13], desarrollaron un método para estudiar los comportamientos del Hamiltoniano de la CDC en la norma de Coulomb a bajas energías. Entre sus resultados más importantes se encuentra el hecho de que el operador de Faddeev-Popov definido en la sección anterior, se comporta de forma dominante a energías (momentos) bajas, lo cual repercute de forma inmediata en el potencial de Coulomb, ec. (2.38), generando así un posible mecanismo de confinamiento.

El Hamiltoniano motivado de la CDC en la norma de Coulomb que se toma como punto de partida, consiste en tomar H_0 . La idea es la siguiente: se considera que H_0 genera los estados ligados hadrónicos; H_1 introduce las correcciones a estos estados a través del intercambio de gluones. La expansión del determinante de Faddeev-Popov ($\mathcal{J} = \det(\nabla \cdot \mathcal{D})$) en potencias del campo de norma, genera los términos denotados por V_A y V_B en la ec. (2.39), los cuales corresponden a todos los órdenes en la expansión mencionada menos el orden cero para el término cinético de gluones y el Hamiltoniano de Coulomb. El orden cero para ambos términos ha sido incluido en H_0 . Es bueno mencionar que H_0 sigue siendo una teoría de campo y por tanto, aún es difícil de resolver. Sin embargo, existen algunas ventajas, como lo es que $H_0 + H_1$ es la CDC, además, H_0 es relativista e incorpora grados de libertad gluónicos, lo cual permite estudiar estados de gluones y cuarks-gluones en forma conjunta.

Otra conclusión importante del trabajo realizado por A. P. Szczepaniak y E. Swanson es el hecho que el potencial de confinamiento entre fuentes de color se comporta como un operador de Casimir. Se ha mostrado que el término dominante para el potencial de confinamiento viene dado por la estructura de color,

$$K_{ab}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta_{ab} K^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g^2 \langle \Psi | [(\nabla \cdot \mathcal{D})^{-1} (-\nabla^2) (\nabla \cdot \mathcal{D})^{-1}]_{\mathbf{r},a;\mathbf{r}',b} | \Psi \rangle, \quad (2.40)$$

la cual se ha hecho explícita en el H_0 de la ec. (2.39), donde la idea es reemplazar el núcleo de Coulomb por su valor de expectación en el vacío. De esta forma, surge la posibilidad

de diagonalizar el H_0 de forma no-perturbativa para obtener una base de estados ligados y singuletes de color. Una vez logrado lo anterior, se podría aplicar la teoría de perturbaciones sistemáticamente para incluir los efectos del H_1 .

El principal objetivo de este trabajo es estudiar el H_0 primeramente en el sector de cuarks y posteriormente en el sector de gluones en busca de posibles soluciones analíticas, semi-analíticas o bien numéricas no muy elaboradas. En caso de posibles soluciones analíticas, la idea es conocer bajo qué restricciones es factible encontrarlas, siendo así posible estudiar qué sucede con ellas cuando dichas restricciones se liberan paulatinamente. En el caso de soluciones semi-analíticas, implica poder llegar a resolver el problema hasta una sencilla diagonalización y el uso de técnicas numéricas. Por último, el caso de soluciones numéricas se desea evitar, debido principalmente a que existen otras técnicas numéricas para calcular los estados hadrónicos, como es *Lattice Gauge Calculations*, [31–33]. Por tanto, el tener una solución analítica que se pueda comparar con resultados experimentales y con otros modelos sería muy bueno, por un lado para un fácil entendimiento de la CDC a bajas energías y por otro lado, como un posible punto de partida para la conexión entre modelos fenomenológicos y la CDC. .

Por último, en la siguiente sección se discuten las consideraciones para hacer todas las manipulaciones necesarias en este modelo de la CDC a bajas energías y como se verán reflejadas dichas consideraciones en el Hamiltoniano motivado de la CDC en la norma de Coulomb.

2.4. Consideraciones Generales del Modelo de la CDC a Bajas Energías

Algunas de las consideraciones de este modelo no son evidentes en la formulación hecha en la sección 2.2, ya que se consideró indistintamente poner índices arriba o abajo en los espacios de color y sabor. En este modelo se toman ciertas consideraciones generales, como son índices esféricos para espín y sabor, mientras que para los índices de color se toman las convenciones

de Draayer y Escher [34]. En la sección anterior se hizo la primera consideración aunque no se mencionó; la cual consiste en el producto punto entre los campos cromo-electromagnéticos, esto es,

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) = \sum_a \sum_{\mu} (-1)^{\chi_a} (-1)^{\mu} \mathbf{\Pi}_{a,\mu}(\mathbf{r}) \mathbf{\Pi}_{\bar{a},-\mu}(\mathbf{r}). \quad (2.41)$$

En esta notación hay que diferenciar de cómo subir y bajar índices en los tensores esféricos, por ejemplo, $\mathbf{\Pi}^{\mu}(\mathbf{r}) = (-1)^{1-\mu} \mathbf{\Pi}_{-\mu}(\mathbf{r})$, donde $\mu = -1, 0, 1$, [35]. La fase en el espacio de color que se introduce: $(-1)^{\chi_a}$, dependerá si se trabaja en SU(2) (no físico), [18] o SU(3) de color, [21]. Esta convención se ha utilizado en el Hamiltoniano motivado de la CDC en la norma de Coulomb, ec. (2.39), los cual pueden verse en los índices de color del término Coulombiano.

Para los campos fermiónicos, se tienen en general tres índices (subíndices o superíndices) que etiquetan a los operadores de creación o aniquilación, uno para el espín total, uno para el color y uno para el sabor. La fase para subir o bajar índices de espín viene dada por $(-1)^{j-\lambda}$, donde j corresponde al espín total de la partícula y λ es su número magnético. Para el caso del color, si se está trabajando con solo dos grados de libertad, esto es, trabajar en un grupo de color SU(2), la fase viene dada por $(-1)^{\frac{1}{2}-c}$ donde c es número magnético del espín de color, mientras que para el caso de tres grados de libertad en color para cada cuark se tiene un grupo SU(3) y la convención que se utiliza es la de Draayer y Escher, $(-1)^{\chi_c}$, [34]. Finalmente, para el caso del sabor se consideran solo los cuarks más ligeros u y d , cuyas masas prácticamente están degeneradas; por tanto se pueden describir por un grupo SU(2) de sabor y la fase está dada por $(-1)^{\frac{1}{2}-f}$, donde f es la proyección de sabor.

En el caso de los gluones también se trabajan los índices en componentes esféricos. La forma de como transformen los operadores bosónicos que definen la creación o aniquilación de un gluón depende de la base que se elija para trabajar. En el capítulo 6, se discute la base a utilizar así como la transformación de los operadores bosónicos.

Además de las convenciones para los índices de los operadores fermiónicos y bosónicos, se hacen otras consideraciones. La primera de ellas consiste en tomar un modelo para niveles

orbitales de cuarks (con posible inclusión de gluones) correspondientes a bajas energías, por tanto, se toman únicamente los modos de energía más bajos en el sector de cuarks. En este modelo estos modos más bajos están descritos por N_i y N para el caso de cuarks y gluones respectivamente. De igual forma el modelo puede restringirse a los momentos angulares l_i y L más bajos para cuarks y gluones respectivamente. El espín total de cada partícula viene dado por el acoplamiento del momento angular con el espín intrínseco de cada partícula, para el caso de los cuarks, tienen espín intrínseco $\frac{1}{2}$ y los gluones 1. En cada caso el espín total vendrá descrito por j_i y J respectivamente.

Cada una de las consideraciones mencionadas anteriormente se pueden suavizar de alguna forma mientras que una consideración general que no se puede suavizar es el hecho de que tanto cuarks como gluones se encuentran confinados en un espacio finito. Este espacio finito, se considera una esfera o algún tipo de bolsa que contenga a dichas partículas. Esta restricción cuantiza de cierta forma las energías propias del sistema, aunque determinarlas puede no ser trivial.

La forma de hacer la cuantización se discutirá en su debido momento así como el álgebra de los operadores que se utilizan en este trabajo. Como primer análisis del Hamiltoniano motivado de la CDC en la norma de Coulomb se trabaja el sector de cuarks y posteriormente el sector de gluones. Para el caso de cuarks el potencial de interacción $V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ se considera algún potencial que solo dependa de la distancia entre las densidades de carga. Posteriormente, para el caso puramente de cuarks se considera $V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ un parámetro V_0 y se estudia la estructura del Hamiltoniano de Coulomb. Finalmente, dada la estructura del Hamiltoniano de Coulomb bajo la suposición anterior, la primera etapa para introducir gluones al modelo es a través de la interacción entre densidades de carga de color que contenga tanto cuarks como gluones. Posteriormente, se discutirán otras posibilidades de incluir gluones al modelo.

Capítulo 3

Modelo de Cuarks para los Niveles de Menor Energía

Como se menciona en los capítulos previos, se trata un modelo motivado de la CDC usando ciertas aproximaciones. Dichas aproximaciones se irán relajando paso a paso con la finalidad de mostrar la estructura de la CDC bajo estas restricciones. Primeramente, se considera el sector de cuarks en el Hamiltoniano de la CDC, esto es, no se consideran por el momento gluones dinámicos. Lo anterior se traduce en considerar, $\mathbf{H}_{CDC} = \mathbf{K}_q + \mathbf{H}_{m_q} + \mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q}$, donde \mathbf{K}_q es el término cinético de cuarks, \mathbf{H}_{m_q} es el término de masa de cuarks y $\mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q}$ es el Hamiltoniano de Coulomb cuando únicamente se considera la interacción entre densidades de carga de color de cuarks.

En este capítulo, se describe la deducción del término cinético de cuarks, posteriormente se indaga la estructura de éste y la interpretación física cuando se considera el límite quiral ($m_0 = 0$) y que el Hamiltoniano de Coulomb $\mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q}$ puede escribirse como un operador de Casimir del grupo de color, cuya acción sea la de separar estados de color de aquellos estados sin color (ver capítulo 5). Bajo estas consideraciones, se muestran posibles soluciones analíticas para los casos correspondientes a los niveles orbitales más bajos. En el siguiente capítulo se estudia el caso no quiral ($m_0 \neq 0$) cuando se haga la generalización a un número arbitrario de niveles orbitales de espín total j bien definido, ya que si $m_0 \neq 0$, no es posible

obtener las soluciones analíticas que se muestran en este capítulo.

3.1. Descripción del Término Cinético de Cuarks

El término cinético de cuarks viene dado por la expresión:

$$K = \int d\mathbf{x} \psi^\dagger(\mathbf{x}) [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla] \psi(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

donde el campo fermiónico es un espinor de Dirac, el cual se expresa de la siguiente forma: $\psi^\dagger(\mathbf{x}) = (\psi_1^\dagger(\mathbf{x}, \sigma_1, c_1, f_1), \psi_2^\dagger(\mathbf{x}, \sigma_2, c_2, f_2))$ y $\boldsymbol{\alpha}$, son las matrices de Dirac. Con lo anterior, el término cinético puede escribirse en términos de los componentes del campo fermiónico

$$K = -i \int d\mathbf{x} \{ \psi_1^\dagger(\mathbf{x}, \sigma', c', f') \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \psi_2(\mathbf{x}, \sigma, c, f) + \psi_2^\dagger(\mathbf{x}, \sigma', c', f') \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \psi_1(\mathbf{x}, \sigma, c, f) \} \quad (3.2)$$

donde los componentes del campo fermiónico se escriben de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \psi_1^\dagger(\mathbf{x}, \sigma, c, f) &= \sum_{Nlm\sigma cf} \mathbf{b}_{\frac{1}{2}, Nlm, \sigma cf}^\dagger R_{Nl}^*(r) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) \chi_\sigma^\dagger \\ \psi_2^\dagger(\mathbf{x}, \sigma, c, f) &= \sum_{Nlm\sigma cf} \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}, Nlm, \sigma cf}^\dagger R_{Nl}^*(r) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) \chi_\sigma^\dagger \\ \psi_1(\mathbf{x}, \sigma, c, f) &= \sum_{Nlm\sigma cf} \mathbf{b}_{\frac{1}{2}, Nlm, \sigma cf} R_{Nl}(r) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_\sigma \\ \psi_2(\mathbf{x}, \sigma, c, f) &= \sum_{Nlm\sigma cf} \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}, Nlm, \sigma cf} R_{Nl}(r) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_\sigma. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Una explicación detallada de los operadores fermiónicos, así como de los operadores de creación y aniquilación de partícula se da en la sección 3.1.1, por lo que simplemente anticipamos el resultado que se obtiene al hacer el álgebra correspondiente. La deducción del término cinético de cuarks efectivo se muestra en el Apéndice A. Finalmente, el término cinético de cuarks que se estudia en este trabajo y al cual se le dedican varios apartados debido a su rica estructura, es el siguiente:

$$K = \sum_{N'Nj\lambda cf} k_{NN'}^j \left[\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N', j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N', j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} \right]$$

$$+ \sum_{N'Nj\lambda cf} (k_{NN'}^j)^* \left[\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right] \quad (3.4)$$

donde se puede observar que la estructura del término cinético de cuarks está rota en bloques de espín total, j . Además de que la intensidad de éste, viene dada por los coeficientes $k_{NN'}^j$, los cuales conectan únicamente el orbital $j - \frac{1}{2}$ con el orbital $j + \frac{1}{2}$ y números cuánticos principales N' con N respectivamente. Las posibles conexiones quedan determinadas por estas intensidades, las cuales se muestran en la siguiente sección.

Se puede observar que la aplicación del término cinético en algún estado de la representación de Dirac tiene las siguientes implicaciones: Por un lado, la aniquilación de una partícula de pseudo-espín negativo (energía negativa) y la creación de una partícula con pseudo-espín positivo (energía positiva), mientras que el segundo término de la ecuación (3.4) hace la operación inversa. Por tanto, si se parte de un estado en la representación de Dirac donde todos los estados de energía negativa estén llenos, (vacío perturbativo), esta última aplicación dará cero.

3.1.1. Descripción de los Campos y Operadores Fermiónicos

Para la expansión de los campos fermiónicos ec. (3.3), se ha elegido una base cuya parte angular corresponde a la solución de cualquier problema con simetría esférica, esto es, las funciones $Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ son los armónicos esféricos. Para la solución a la parte radial, $R_{Nl}(r)$, simplemente se pide que sea una base completa. Los coeficientes de esta expansión, son los operadores de creación y aniquilación de cuarks. Los subíndices y superíndices en orden de aparición, indican: $\pm\frac{1}{2} = \alpha$ el pseudo-espín, esto es, al trabajar en la representación de Dirac, el mar de cuarks correspondiente a estados con $E < 0$ se representa con $\alpha = -\frac{1}{2}$, mientras que los cuarks con $E > 0$ fuera del mar de Dirac se representa con $\alpha = +\frac{1}{2}$, figura 3.1. El siguiente índice $N(N')$ corresponde al número principal o número orbital, l es el momento angular de la partícula (cuark), m su proyección de momento angular. Finalmente, $\sigma = \pm\frac{1}{2}$, $c = \{Y_c, I_c, I_{Z_c}\}$ y $f = \pm\frac{1}{2}$ corresponden a los números magnéticos de espín- $\frac{1}{2}$, triplete de color-(1, 0) y espín

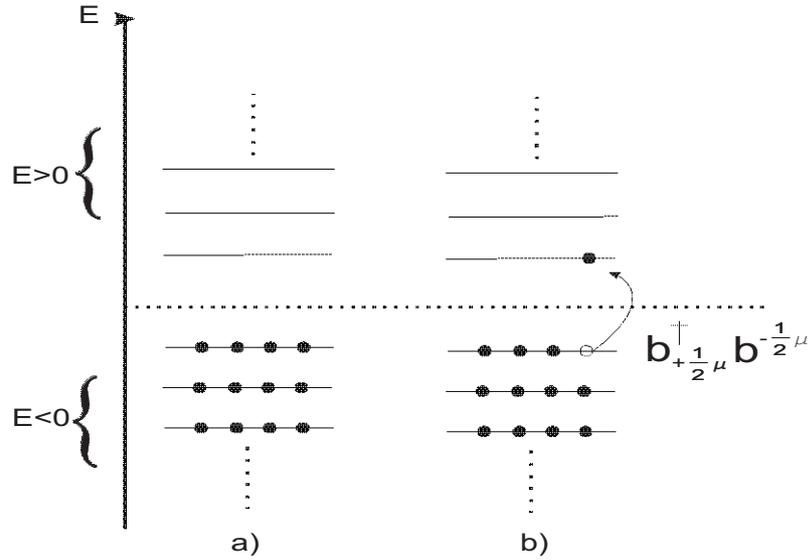


Figura 3.1: a) El mar de Dirac, esto es, todos los estados de energía negativa llenos, b) Aniquilación de un cuark de $E < 0$ y la creación de un cuark con $E > 0$, lo cual puede interpretarse como la creación de un cuark-anticuark.

de sabor- $\frac{1}{2}$ respectivamente. Los números cuánticos $\{Y_c, I_c, I_{Z_c}\}$ representan la hipercarga, isospín y tercera componente de isospín de color y donde se utilizará $\bar{c} = \{-Y_c, I_c, -I_{Z_c}\}$ para las componentes magnéticas conjugadas del color.

Álgebra de los Operadores Fermiónicos y su Representación Acoplada

Los operadores fermiónicos satisfacen las reglas de anticonmutación siguientes:

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{b}^{\alpha, Nlm, \sigma cf}, \mathbf{b}^{\dagger}_{\alpha', N'l'm', \sigma' c' f'}\} &= \delta_{\alpha'}^{\alpha} \delta_{N'}^N \delta_{l'}^l \delta_{m'}^m \delta_{\sigma'}^{\sigma} \delta_{c'}^c \delta_{f'}^f, \\
 \{\mathbf{b}^{\alpha, Nlm, \sigma cf}, \mathbf{b}^{\alpha', N'l'm', \sigma' c' f'}\} &= 0, \\
 \{\mathbf{b}^{\dagger}_{\alpha, Nlm, \sigma cf}, \mathbf{b}^{\dagger}_{\alpha', N'l'm', \sigma' c' f'}\} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Si se desea escribir un operador con espín, color y sabor bien definidos, es necesario acoplar dos, tres, ..., etc operadores. Por tal motivo, es necesario saber como subir y bajar los índices de los operadores fermiónicos. Como se desea trabajar con un espín bien definido, lo primero

es escribir los operadores fermiónicos en la representación acoplada, la cual viene dada por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2},Nlm,\sigma cf}^\dagger &= \sum_{j\lambda} \langle lm, \frac{1}{2}\sigma | j\lambda \rangle \mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2},(N,l,\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger, \\
 \mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2},Nlm,\sigma cf} &= \sum_{j\lambda} \langle lm, \frac{1}{2}\sigma | j\lambda \rangle \mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2},(N,l,\frac{1}{2})j\lambda cf}.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

La convención de fases para subir o bajar índices se ha tomado de Draayer y Escher, [34], la cual viene dada por: $\mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2},(N,l,\frac{1}{2})j\lambda cf} = (-1)^{\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}}(-1)^{j-\lambda}(-1)^{\lambda_c}(-1)^{\frac{1}{2}-f}\mathbf{b}_{\mp\frac{1}{2},(N,l,\frac{1}{2})j-\lambda\bar{c}-f}$, donde $(-1)^{\lambda_c} = (-1)^{\frac{1}{3}(\lambda_c-\mu_c)+\frac{Y_c}{2}-I_{Z_c}}$ y $(\lambda_c, \mu_c) = (1, 0)$ es la representación de cuarks en SU(3), la cual es de dimensión tres, que corresponde a los tres posibles colores del cuark.

Finalmente, para escribir operadores con espín, color y sabor bien definido es necesario colocar todos los índices de los operadores fermiónicos abajo (o todos arriba) y acoplar mediante coeficientes Clebsch-Gordan, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \left[\mathbf{b}_{+\frac{1}{2},(N,l,\frac{1}{2})}^\dagger \otimes \mathbf{b}_{+\frac{1}{2},(N',l',\frac{1}{2})} \right]_{mcf}^{J(P,Q)F} &= \sum_{\lambda_1\lambda_2c_1c_2f_1f_2} \langle j_1\lambda_1, j_2\lambda_2 | Jm \rangle \langle (p_1, q_1)c_1, (p_2, q_2)c_2 | (P, Q)c \rangle \\
 &\quad \langle \frac{1}{2}f_1, \frac{1}{2}f_2 | Ff \rangle \mathbf{b}_{+\frac{1}{2},(N,l,\frac{1}{2})j\lambda_1c_1f_1}^\dagger \mathbf{b}_{+\frac{1}{2},(N',l',\frac{1}{2})j_2\lambda_2c_2f_2}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

El término cinético de cuarks, ec. (3.4), puede mostrarse facilmente que se comporta como un escalar en espín, color y sabor, sin embargo, es un operador que genera pseudo-espín. Como se mostrará en el capítulo 5; el Hamiltoniano de Coulomb se escribe en términos de generadores de color, razón por la cual el término cinético de cuarks y el Hamiltoniano de Coulomb conmutan y por tanto, se pueden diagonalizar de forma simultánea. Esto último permite encontrar soluciones analíticas para ciertas configuraciones.

3.1.2. Término Cinético de Cuarks para el Orbital S más Bajo

Antes de empezar a estudiar más a detalle la estructura del término cinético de cuarks para dos posibles configuraciones, se presenta un resumen de los resultados obtenidos para el

caso más sencillo de este modelo, [18]. En dicho trabajo se consideró un único orbital para los cuarks, el nivel-s más bajo. Se restringió a un grupo SU(2) de color (no físico) y sabor. Estas dos restricciones, tienen su justificación en el sentido de que la extensión a SU(3) de color no es difícil, al ser ambos grupos no-Abelianos. La consideración de trabajar la CDC a bajas energías es la justificación de trabajar un grupo SU(2) para describir el sabor de los cuarks, con lo cual se tienen dos grados de libertad correspondientes a los cuarks u y d . De esta forma, este primer modelo, depende solo de un parámetro relacionado con las energías de excitación de color y por tanto irrelevante a bajas energías.

El Hamiltoniano encontrado en [18], tiene la siguiente estructura

$$\mathbf{H} = \left(\mathcal{E} + m_0 - \frac{3g}{4\mathcal{V}} \right) (\hat{n}_q + \hat{n}_{\bar{q}}) + \frac{g}{\mathcal{V}} \mathbf{S}_c^2 \quad (3.8)$$

y los valores propios de este Hamiltoniano vienen dados por

$$E = \left(\mathcal{E} + m_0 - \frac{3g}{4\mathcal{V}} \right) (n_q + n_{\bar{q}}) + \frac{g}{\mathcal{V}} S_c(S_c + 1). \quad (3.9)$$

Para los estados físicos con color total cero, $S_c = 0$, se encontró $E = m_0(n_q + n_{\bar{q}})$ y el espectro es degenerado con respecto al espín y al sabor. Las excitaciones de color están separadas por una cantidad de energía que depende de la aproximación de contacto escogida para la interacción de cuarks. En la CDC se espera que esta separación sea infinita ya que el potencial entre los cuarks crece a razón de la separación entre ellos. Finalmente, las soluciones son sencillas y degeneradas para todos los estados con el mismo color.

En las siguientes secciones se estudia la estructura del término cinético, cuando se restringe uno a considerar un subespacio de Hilbert para dos y tres niveles orbitales. El caso de dos niveles orbitales, corresponde a considerar el nivel orbital más bajo s y el nivel orbital más bajo p , ambos con espín total $j = \frac{1}{2}$. El caso de tres niveles, corresponde a considerar, los dos niveles orbitales- s más bajos y el nivel orbital- p más bajo, todos ellos dentro del bloque con espín total, $j = \frac{1}{2}$. Dada la estructura del término cinético ec. (3.4), rota en bloques de

espín total- j , se tiene que las soluciones analíticas que se encuentran para el bloaue $j = \frac{1}{2}$ son válidas para cada bloque de espín total- j .

3.2. Estructuras SU(2) del Término Cinético de Cuarks

La expresión más general para el término cinético de cuarks (3.4), indica que los índices principales N y N' pueden tomar cualquier valor lo cual se traduce en un número infinito de conexiones. Para tratar este problema y al mismo tiempo imponer a mano el confinamiento de los cuarks, se usa la base del oscilador armónico en tres dimensiones, [36, 37]: $R_{Nl}(r) = N_{Nl} \exp(-\frac{\gamma r^2}{2}) r^l L_{\frac{N-l}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(\gamma r^2)$, donde l es el número cuántico del momento angular, $N = 2n + l$ es el número de cuantos de excitación con $n = 0, 1, 2, \dots$ y γ es un parámetro con unidades de energía al cuadrado. A continuación se describe la física y la estructura matemática del término cinético de cuarks cuando se restringe a la base del oscilador armónico en tres dimensiones.

Las intensidades de interacción para el término cinético de cuarks viene dadas por:

$$k_{NN'}^j = i \int r^2 dr \left[R_{N(j+\frac{1}{2})}^*(r) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-\frac{1}{2}}{r} \right) R_{N'(j-\frac{1}{2})}(r) \right], \quad (3.10)$$

siguiendo la notación establecida en la sección anterior, el resultado que se obtiene es el siguiente (para mayor detalle se sugiere ver el Apéndice A y el Apéndice B).

$$k_{NN'}^j = -i\sqrt{\gamma} \sqrt{\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N',N+1} - i\sqrt{\gamma} \sqrt{\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N',N-1} \quad (3.11)$$

con lo cual, la ecuación (3.4) tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_{j\lambda cf} \sum_{N=j+\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{N'=N-1}^{N+1} \left[-i\sqrt{\gamma} \sqrt{\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N',N+1} - i\sqrt{\gamma} \sqrt{\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N',N-1} \right] \\ &\quad \left(\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right) \\ &+ \sum_{j\lambda cf} \sum_{N=j+\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{N'=N-1}^{N+1} \left[i\sqrt{\gamma} \sqrt{\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N',N+1} + i\sqrt{\gamma} \sqrt{\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N',N-1} \right] \\ &\quad \left(\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde $\Delta N = 2$, debido a que se está trabajando en la base del oscilador armónico en tres dimensiones. En este momento, se puede identificar el término cinético de cuarks como la suma de un operador de ascenso K_+ , más un operador de descenso K_- , los cuales están dados por

$$\begin{aligned}
 \widetilde{K}_+ &= (-i\sqrt{\gamma}) \sum_{j\lambda cf} \sum_{N=j+\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{N'=N-1}^{N+1} \left[\sqrt{\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N',N+1} + \sqrt{\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N',N-1} \right] \\
 &\quad \left(b_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger b^{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} - b_{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger b^{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right) \\
 \widetilde{K}_- &= (-i\sqrt{\gamma}) \sum_{j\lambda cf} \sum_{N=j+\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{N'=N-1}^{N+1} \left[\sqrt{\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N',N+1} + \sqrt{\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N',N-1} \right] \\
 &\quad \left(b_{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger b^{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} - b_{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger b^{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right). \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

donde se ha puesto un gorro sobre los operadores de ascenso y descenso únicamente para diferenciar entre los operadores que satisfacen el álgebra SU(2) de pseudo-espín, la cual se muestra en las secciones 3.2.1 y 3.2.2. Esta álgebra es muy útil para la solución del término cinético de cuarks, pues aunque se ha encontrado una estructura de operadores de ascenso y descenso, aún son desconocidas las energías propias de este sistema.

Se ha dividido el análisis del término cinético de cuarks en dos secciones para explotar lo más posible la estructura de operadores de ascenso y descenso. Como se muestra en las siguientes secciones, estos operadores forman un álgebra característica del grupo SU(2), por lo que las soluciones que de él se obtienen se denotan como soluciones tipo SU(2).

3.2.1. Álgebra de los Operadores de Ascenso y Descenso, 2 Niveles

En esta sección se muestra lo importante de haber encontrado la estructura de operadores de ascenso y descenso, ec. (3.13). Cabe recalcar que hasta ahora solo se ha considerado el término cinético de cuarks, aún así la estructura matemática de operadores de ascenso y descenso es bastante alentadora en la búsqueda de una solución analítica en el contexto de una aproximación a la CDC a bajas energías. Al igual que en las secciones anteriores se sugiere ver el Apéndice A, para mayor detalle de los resultados que aquí se presentan.

Para el caso donde el espacio de Hilbert se restringe únicamente a dos estados de energía positiva, esto es, un total de cuatro estados, con el mismo espín total- j , se escoge, sin pérdida de generalidad, la conexión $N' = N - 1$. Bajo esta consideración el término cinético de cuarks para dos niveles tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= \sum_j \widetilde{\mathbf{K}}_+^{jN} + \widetilde{\mathbf{K}}_-^{jN} \\
 &= \sqrt{\gamma} \sum_{j\lambda cf} \left(\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N-1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N-1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right] \\
 &+ \sqrt{\gamma} \sum_{j\lambda cf} \left(\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N-1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N-1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{+\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right]
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

en donde se ha hecho la siguiente redefinición de los operadores simplemente para no estar cargando el número complejo i ,

$$\begin{aligned}
 (-i)\mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger &\rightarrow \mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \\
 (i)\mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} &\rightarrow \mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Finalmente, el álgebra que satisfacen los operadores de ascenso y descenso es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 [\widetilde{\mathbf{K}}_+^{jN}, \widetilde{\mathbf{K}}_-^{jN}] &= \gamma \left(\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2} \right) \left\{ N_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j} + N_{\frac{1}{2}(N-1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j} \right. \\
 &\quad \left. - N_{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j} - N_{-\frac{1}{2}(N-1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j} \right\} \\
 &= 2\widetilde{\mathbf{K}}_0^{jN}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

y

$$[\widetilde{\mathbf{K}}_0^{jN}, \widetilde{\mathbf{K}}_\pm^{jN}] = \pm \gamma \left(\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2} \right) \widetilde{\mathbf{K}}_\pm^{jN}. \tag{3.17}$$

Con la finalidad de escribir el término cinético de cuarks en función de operadores que satisfagan el álgebra SU(2) de pseudo-espín se escriben los operadores de ascenso y descenso de la siguiente forma [20]:

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{\pm}^{jN} = \sqrt{\frac{\gamma(N+j+\frac{3}{2})}{2}} \mathbf{K}_{\pm}^{jN} \equiv A_{jN} \mathbf{K}_{\pm}^{jN} \quad (3.18)$$

por lo tanto, el término cinético de cuarks se escribe como

$$\mathbf{K} = \sum_j A_{jN} (\mathbf{K}_+^{jN} + \mathbf{K}_-^{jN}) = 2 \sum_j A_{jN} \mathbf{K}_x^{jN} . \quad (3.19)$$

Por el momento, el Hamiltoniano de la CDC, se está escribiendo como $\mathbf{H} = \mathbf{K}_q + \mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q}$, donde $\mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q}$ se escribe como un operador de Casimir, el cual separa estados con color de estados sin color-(estados físicos) (ver capítulo 5). Por tal motivo, las energías propias de este Hamiltoniano vienen dadas por las soluciones a la energía cinética de cuarks, la cual se puede diagonalizar en cada bloque de espín total- j mediante una rotación que deje \mathbf{K}_x^j diagonal. Siendo \mathbf{K}_x^j diagonal, su valor propio viene dado por M_J , la proyección de pseudo-espín.

$$E = \sum_j E^{jN} = 2 \sum_j A_{jN} M_J \quad (3.20)$$

En este resultado se puede observar la importancia de tener el término cinético roto en bloques de espín total- j , pues la solución analítica es aplicable a cualquier bloque de espín total- j . La base en donde \mathbf{K}_x es diagonal (nueva), se puede escribir como una combinación lineal de estados de pseudo-espín de la base original. Por tal razón, los estados de la base diagonal pueden corresponder a estados de la base original que contengan tanto partículas en estados de energía positiva como negativa.

La proyección de pseudo-espín total M_J , se obtiene simplemente de contar partículas en la nueva base donde se ha diagonalizado \mathbf{K}_x , esto es, una partícula que ocupe un estado de energía negativa contribuye con proyección de pseudo-espín, $m_J = -\frac{1}{2}$ y una partícula que ocupe un estado de energía positiva contribuye con proyección de pseudo-espín $m_J = +\frac{1}{2}$. La figura 3.2, muestra gráficamente la acción del término cinético cuando se restringe el sistema a solo dos estados orbitales.

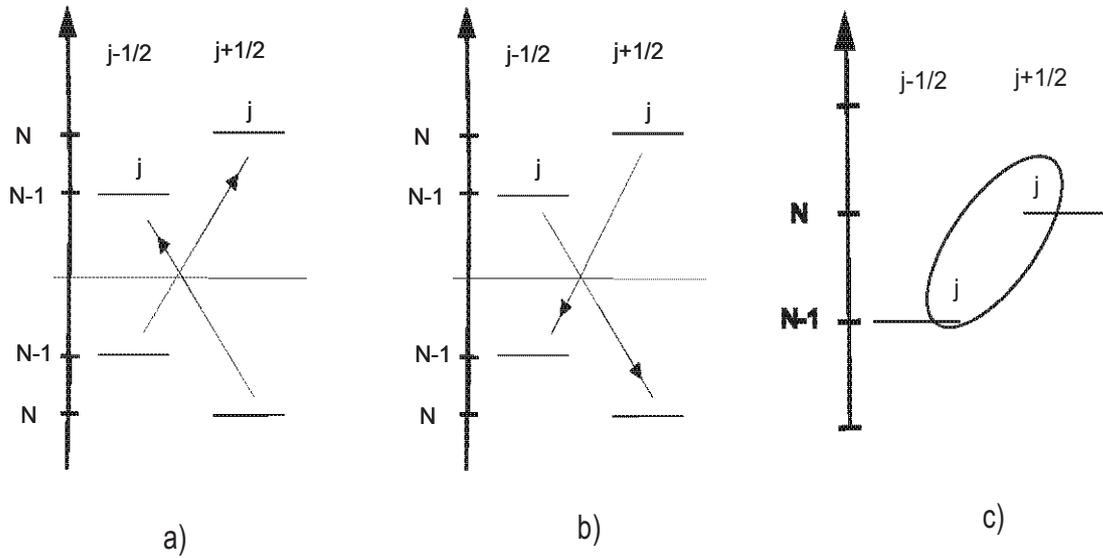


Figura 3.2: a) Acción del operador K_+ para dos niveles, b) Acción del operador K_- para dos niveles y c) La representación gráfica compacta para describir la acción $K_+ + K_-$ de cualesquiera dos niveles .

Es fácil calcular ahora el estado de menor energía en la nueva base, bajo la restricción de considerar únicamente dos estados orbitales. A este estado se le denota por el vacío perturbativo, ($|\emptyset\rangle$). El vacío perturbativo equivale a considerar que todos los niveles con energía negativa estén ocupados, sin violar el principio de exclusión de Pauli. Para el caso de los estados- s y $-p$ más bajos en el bloque de espín total- j , $N = 1$, color descrito por un grupo $SU(3)$ ($SU(2)$ caso no físico) y espín de sabor- $\frac{1}{2}$, cada estado puede tener 12(8) partículas. Con lo anterior, el vacío perturbativo para el caso de dos niveles contiene 24(16) partículas lo que da una proyección de pseudo-espín $M_J = -12(-8)$. De igual forma se pueden calcular las energías de excitación, que corresponden a la descripción de mesones o bariones en este modelo.

Este modelo en su primera etapa descrito en la sección 3.1.2, se restringía a considerar dos grados de libertad para espín, sabor y color. Por un lado, la restricción de considerar únicamente dos sabores está fundamentada en considerar bajas energías y por tanto los cuarks u y d son más que suficiente. Sin embargo, la restricción de considerar dos grados de libertad para el color implicaba proyectar la Cromodinámica Cuántica a un subespacio no real, pero matemáticamente fácil de trabajar. En este

sentido, considerar dos o tres grados de libertad para el color implica pasar de un modelo no físico a un modelo que toma propiedades de la Cromodinámica Cuántica real.

Grados de libertad	Vacio(GeV)	Excitación $q\bar{q}$ (GeV)	Excitación (GeV)
$8 - SU_C(2)$	-4.422	0.553	0.553 (qq)
$12 - SU_C(3)$	-6.633	0.553	0.829 (qqq)

Cuadro 3.1: Energías del vacío, de excitación más bajas para un mesón y un barión.

El cuadro (3.1), muestra la energía del vacío perturbativo así como la energía de excitación correspondiente a un par partícula-agujero y tres partículas, para los estados s y p más bajos, $j = \frac{1}{2}$ y $N = 1$. En este caso la proyección de pseudo-espín para el vacío perturbativo considerando 12(8) grados de libertad es -12(-8).

El primer estado excitado con color cero es aquel que contiene una partícula en un estado de energía positiva (q) y la ausencia de una partícula de energía negativa (\bar{q}) en la nueva base, la cual se representa por un par $q\bar{q}$, esto corresponde a la posible descripción de un mesón. Esta configuración tiene una proyección de pseudo-espín igual a -11(-7), lo cual da por resultado la energía de excitación $q\bar{q}$. La energía de excitación $qqq(qq)$ corresponde a tener una proyección de pseudo-espín igual a $-\frac{21}{2}(-7)$, lo cual da la energía de escitación de un barión. Para el cálculo anterior se consideró el factor $\sqrt{\gamma} = 0,22566GeV$, lo cual corresponde a un radio de $0,9fm$, un valor cercano al radio del protón.

3.2.2. Álgebra de los Operadores de Accenso y Descenso, 3 Niveles

En esta sección, al igual que en la sección anterior, se busca explotar la estructura del término cinético de cuarks pero ahora liberando la restricción en el subespacio de Hilbert a cualesquiera tres estados, con espín total- j . Como se muestra, el caso de tres niveles también tiene solución analítica semejante a la encontrada en la sección anterior. En este caso el álgebra es más elaborada que en el caso anterior por lo que se recomienda ver el Apéndice-C, el cual muestra ésta en detalle. Los resultados de hacer esta álgebra y la interpretación física para el caso de los tres niveles más bajos en el oscilador armónico se presentan a continuación.

El término cinético de cuarks para cualesquiera tres niveles de espín total- j , viene dado por

$$\mathbf{K} = \sum_j \left(\widetilde{\mathbf{K}}_+^{jN} + \widetilde{\mathbf{K}}_-^{jN} \right) \quad (3.21)$$

donde usando la redefinición de la ec. (3.15), los operadores de ascenso y descenso están dados por

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{K}}_+^{jN} &= \sqrt{\gamma} \sum_{\lambda cf} \left[\left(\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N+1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N+1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N-1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N-1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right) \right] \\ \widetilde{\mathbf{K}}_-^{jN} &= \sqrt{\gamma} \sum_{\lambda cf} \left[\left(\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N+1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N+1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N-1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N-1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Obviamente estos operadores generan un álgebra más elaborada que el caso de dos niveles, sin embargo, en esta sección únicamente se presentan los resultados, ver Apéndice C.

El álgebra encontrada nuevamente corresponde a un grupo SU(2) con la correspondiente redefinición de los operadores de ascenso, descenso y \mathbf{K}_0^{jN} (el operador \mathbf{K}_0^{jN} se ha definido en el Apéndice C), esto es,

$$\widetilde{\mathbf{K}}_\pm^{jN} = \sqrt{\frac{\gamma(2N+3)}{2}} \mathbf{K}_\pm^{jN} \quad (3.23)$$

donde

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_+^{jN}, \mathbf{K}_-^{jN}] &= 2\mathbf{K}_0^{jN} \\ [\mathbf{K}_0^{jN}, \mathbf{K}_\pm^{jN}] &= \pm \mathbf{K}_\pm^{jN}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

El término cinético de cuarks para cualesquiera tres niveles y espín total- j , se escribe de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= \sum_j \left(\widetilde{\mathbf{K}}_+^{jN} + \widetilde{\mathbf{K}}_-^{jN} \right) \\
 &= \sum_j \sqrt{\frac{\gamma(2N+3)}{2}} \left(\mathbf{K}_+^{jN} + \mathbf{K}_-^{jN} \right) \\
 &= 2 \sum_j \sqrt{\frac{\gamma(2N+3)}{2}} \mathbf{K}_x^{jN}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Por tanto, hasta este momento los únicos términos de la CDC que se ha considerado son $\mathbf{H} = \mathbf{K} + \mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q}$, (ver discusión de la sección anterior). Los eigenvalores de este Hamiltoniano son proporcionales a las proyecciones de pseudo-espín en la dirección del eje-x, una vez hecha la rotación que deje \mathbf{K}_x diagonal. Por tanto,

$$E = \sum_j E^{jN} = \sum_j 2 \sqrt{\frac{\gamma(2N+3)}{2}} M_J \tag{3.26}$$

donde al igual que en la sección anterior la proyección de pseudo-espín total se obtiene de sumar la proyección de pseudo-espín correspondiente a partículas ocupando estados de energía negativa más la proyección de pseudo-espín correspondiente a partículas ocupando estados de energía positiva.

La figura 3.3, muestra la acción del término cinético cuando se restringe el espacio de Hilbert a solamente tres niveles orbitales. Al igual que en el caso de dos niveles se muestra la representación gráfica compacta para describir ésta acción. Esta representación compacta será muy útil cuando se haga la generalización a cualquier número arbitrario de niveles orbitales.

Grados de libertad	Vacio(GeV)	Excitación $q\bar{q}$ (GeV)	Excitación qqq (GeV)
12 – $SU_C(3)$	-12.844	0.713	1.070

Cuadro 3.2: Energías del vacío y de excitación más bajas para un mesón y un barión, para el caso de tres niveles orbitales.

Siguiendo el mismo procedimiento descrito en la sección anterior para la obtención de la proyección de pseudo-espín y utilizando el mismo valor para el factor $\sqrt{\gamma}$, se pueden calcular las energías

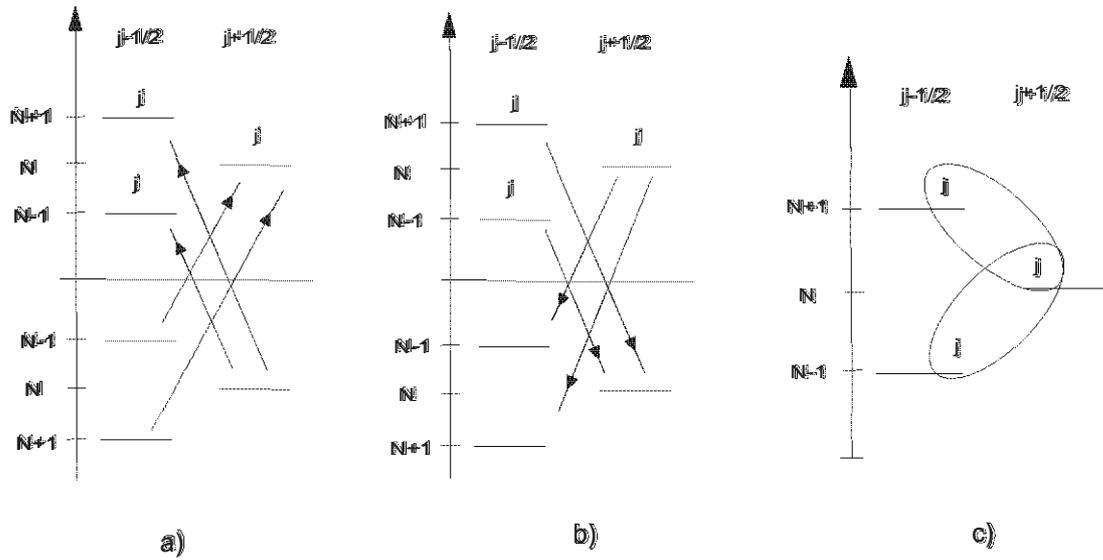


Figura 3.3: a) Acción del operador K_+ para tres niveles, b) Acción del operador K_- para tres niveles y c) La representación gráfica compacta para describir la acción $K_+ + K_-$ de cualesquiera tres niveles .

de excitación correspondientes a mesones y bariones. Claramente este cálculo para los 2-estados- s y el estado- p más bajos ($j = \frac{1}{2}$ y $N = 1$), no pretende representar un espectro hadrónico, pues el valor de $\sqrt{\gamma}$ cambia de hadrón a hadrón. Si se desea ajustar las energías promedio que da la solución analítica a energías del espectro hadrónico, es necesario variar $\sqrt{\gamma}$.

Se puede pensar que incluir más niveles orbitales disminuya el valor de las energías propias del sistema, pero los resultados de la tabla 3.2 muestran lo contrario. La razón es la siguiente: la energía que se reporta para la excitación $\bar{q}q$, es una energía promedio entre los tres niveles orbitales que se han considerado. Esto es una propiedad de la solución $SU(2)$ encontrada, ec. (3.26). Obviamente esta energía promedio es mayor que la energía promedio obtenida para el caso de dos niveles orbitales, generando así energías de excitación mayores, tanto para la descripción de mesones como para la de bariones.

Aunque únicamente se ha considerado el término cinético de cuarks, se han obtenido dos soluciones analíticas no obvias para la Cromodinámica Cuántica a bajas energías. En base a estos hallazgos, se pensó que el modelo podría extenderse a considerar un mayor número de niveles orbitales. Sin

embargo, esto no fue posible al romperse la estructura $SU(2)$ para el caso inmediato, esto es, cuatro niveles orbitales y así sucesivamente. En la siguiente sección se discute brevemente el rompimiento de las estructuras $SU(2)$ y como afecta esto el poder obtener una solución analítica para un mayor número de niveles orbitales.

3.3. Rompimiento del Álgebra $SU(2)$

Las soluciones analíticas encontradas en las secciones anteriores dan pie a seguir la búsqueda de más soluciones analíticas para un mayor número de niveles. Sin embargo, el caso inmediato en la búsqueda de estas soluciones es el caso de cuatro niveles orbitales, el cual de igual forma que el hallazgo de las soluciones analíticas anteriores no era obvio, lo es el hecho de que para la extensión inmediata se rompe la estructura $SU(2)$ de los operadores de ascenso y descenso para cuatro niveles. No es de relevancia en este trabajo mostrar este hecho, pero es fácil argumentar el por qué de este rompimiento de la simetría $SU(2)$.

El álgebra $SU(2)$ se rompe para el caso de cuatro, cinco, seis, número de niveles. Esto se debe a que al considerar más y más niveles el respectivo operador \mathbf{K}_0 genera transiciones cada vez más distanciadas entre los diferentes niveles de energía. Lo anterior se traduce en excitaciones que no aparecen en los respectivos operadores \mathbf{K}_\pm , pues éstos solo hacen transiciones a estados subsecuentes. Por tanto, no es posible recuperar a través del conmutador $[\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_\pm]$ nuevamente los operadores \mathbf{K}_\pm .

Un hecho que también influye en la ruptura de esta simetría $SU(2)$ para un número mayor de niveles, es la estructura de la solución. Imagínese que es posible resolver el caso para cuatro niveles mediante una solución $SU(2)$ (semejante a la obtenida para dos y tres niveles orbitales), la energía propia más baja del sistema es una energía promedio para el sistema de cuatro niveles y así sucesivamente para 5, 6, ..., niveles. Dicho valor de energía crecería, discrepando cada vez más del valor real o esperado para la energía más baja del sistema. Para el caso de las siguientes excitaciones ($q\bar{q}q\bar{q}$, $q\bar{q}q\bar{q}q\bar{q}$, etc), se tendría que las energías promedio resultantes para un sistema de cuatro niveles orbitales son cada vez menos predictivas en el sentido que son simplemente multiples de una energía promedio cada vez mayor.

La discusión anterior se aplica para cualquier columna de espín total j . En este sentido, ya no es

posible definir un operador \mathbf{K}_x , el cual permita resolver de forma analítica un sistema con un mayor número de niveles y consecuentemente un mayor número de cuarks.

El término de masa que hasta este momento no ha sido incluido, rompe la estructura SU(2) para las soluciones de dos y tres niveles encontradas previamente, además de que no permite resolver el término cinético de cuarks más el término de masa de forma simultánea, pues no conmutan.

Si se desea obtener las energías correspondientes, cuando se considera un número mayor de niveles con y sin el término de masa, se tiene que desarrollar un programa que sea capaz de diagonalizar dichos sistemas. El problema con el que se tiene que trabajar en dicho caso, es la dimensión del espacio. Por experiencia con el caso de dos niveles orbitales, se sabe que la dimensión del espacio es de alrededor de 80000 estados. La dimensión de este espacio se obtiene al considerar todas las posibles combinaciones de espín, color y sabor correspondientes al número de ocupación de un estado con $E < 0$. Una vez hecho esto se duplica el espacio para considerar su correspondiente estado de energía $E > 0$. Se construyen todos los posibles acoplamientos en los espacios de espín, color y sabor entre estos dos estados. La dimensión para este espacio se duplica para tener así los dos estados de energías $E < 0$ y $E > 0$. Finalmente, se construyen todos los posibles estados correspondientes a las posibles configuraciones de ocupación con un número de partículas fijo (16 partículas en total, esto fue considerando SU(2) de color) con acoplamiento de color total cero.

Las matrices correspondientes para \mathbf{K}_{\pm} en los espacios descritos arriba, son del orden de 10^9 . Por tanto, tratar de diagonalizar el término cinético de cuarks para un sistema con un número mayor de niveles orbitales sería una tarea muy laboriosa y con una ganancia muy pequeña. En este contexto, la importancia de obtener soluciones analíticas que permitan hacer una posible extensión o generalización del problema de forma sencilla, es más que relevante.

Para poder hacer la extensión de este modelo se diseñó un método alternativo para poder resolver el problema de incluir un número mayor de niveles orbitales y al mismo tiempo incluir el término de masa, esto con la finalidad de ir considerando más términos del Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica e ir liberando las restricciones del modelo.

Capítulo 4

Modelo de Cuarks para un Número Arbitrario de Niveles

En este capítulo se presenta el método desarrollado para resolver el problema que se planteó y discutió al final del capítulo anterior cuando se introdujo un número mayor de niveles al modelo. A este método así como la solución que genera, se les ha denominado $\alpha\beta - BCS$ pues es una combinación de dos transformaciones consecutivas. La primera transformación está determinada en su totalidad por dos matrices α y β , mientras que la última transformación se conoce como BCS en la literatura [38–40].

La solución $\alpha\beta - BCS$ es capaz de resolver el término cinético de cuarks de forma analítica y también es capaz de resolver la combinación término cinético más término de masa de cuarks de forma simultánea y analítica para un número arbitrario de niveles orbitales con espín total- j bien definido. Por dichas razones, se presenta detalladamente la deducción de este método no antes presentado en la literatura. Hay que recordar que el Hamiltoniano de Coulomb para el caso de cuarks, conmuta con el término cinético y de masa de cuarks, por lo que se pueden diagonalizar simultáneamente. Además, el Hamiltoniano de Coulomb se comporta como un operador de Casimir de $SU(3)$, cuyo valor propio se conoce.

El presente capítulo está organizado de la siguiente forma: primero, se procede a mostrar la deducción del término de masa efectivo que se utiliza en este modelo. Posteriormente, se presenta la transformación $\alpha\beta$ así como la aplicación de ésta a los términos cinético y de masa efectivos de

cuarks. Después, se presenta la transformación BCS, su aplicación a los términos cinético y de masa efectivos (resultantes de la transformación $\alpha\beta$). Por último, se muestran dos casos prueba para el método $\alpha\beta - BCS$, estos casos corresponden a considerar dos y cuatro niveles orbitales. El primer caso se puede comparar con la solución $SU(2)$ -analítica encontrada en el capítulo anterior. El caso de cuatro niveles orbitales es un resultado completamente nuevo para este modelo y constituye el primer paso para poder resolver un número mayor de niveles orbitales.

4.1. Término de Masa de Cuarks

En esta sección se presenta el término de masa de cuarks. Las consecuencias de incluir este término para el caso de dos y tres niveles orbitales se discutieron en el capítulo 3. Básicamente, el incluir el término de masa, no permite obtener soluciones analíticas para los casos de dos y tres niveles orbitales. Sin embargo, el incluir el término de masa en el método $\alpha\beta - BCS$, no es problema, por tanto, se puede o no incluir el término de masa. Si se incluye el término de masa en el modelo, se rompe la simetría quiral de los campos fermiónicos. Por otro lado, si el término de masa de cuarks no se incluye, los cuarks adquieren una masa efectiva por el hecho de estar confinados en un volumen finito rompiéndose así la simetría quiral de forma dinámica.

El término de masa de cuarks viene dado por

$$\mathbf{H}_{m_q} = \int d\mathbf{x} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \beta m_0 \psi(\mathbf{x}). \quad (4.1)$$

Usando la expansión de los campos fermiónicos ec. (3.3), el término de masa de cuarks tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{x} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \beta m_0 \psi(\mathbf{x}) &= \int d\mathbf{x} \left(\psi_1^\dagger(\mathbf{x}), \psi_2^\dagger(\mathbf{x}) \right) \begin{pmatrix} m_0 \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -m_0 \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{x}) \\ \psi_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\ &= m_0 \int d\mathbf{x} \left(\psi_1^\dagger(\mathbf{x}) \psi_1(\mathbf{x}) - \psi_2^\dagger(\mathbf{x}) \psi_2(\mathbf{x}) \right) \\ &= m_0 \int r^2 dr d\hat{\mathbf{r}} \sum_{N_1 N_3 l_1 l_3 m_1 m_3 j_1 j_3 \lambda_1 \lambda_3 \sigma_1 \sigma_3 c f} \langle l_1 m_1, \frac{1}{2} \sigma_1 | j_1 \lambda_1 \rangle \langle l_3 m_3, \frac{1}{2} \sigma_3 | j_3 \lambda_3 \rangle \\ &\quad R_{N_1 l_1}^*(r) R_{N_3 l_3}(r) Y_{l_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{l_3 m_3}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_{\sigma_1}^* \chi_{\sigma_3} \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N_1, l_1, \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c f}^\dagger \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N_3, l_3, \frac{1}{2}) j_3 \lambda_3 c f} \\ &- \int r^2 dr d\hat{\mathbf{r}} \sum_{N_2 N_4 l_2 l_4 m_2 m_4 j_2 j_4 \lambda_2 \lambda_4 \sigma_2 \sigma_4 c f} \langle l_2 m_2, \frac{1}{2} \sigma_2 | j_2 \lambda_2 \rangle \langle l_4 m_4, \frac{1}{2} \sigma_4 | j_4 \lambda_4 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & R_{N_2 l_2}^*(r) R_{N_4 l_4}(r) Y_{l_2 m_2}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{l_4 m_4}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_{\sigma_2}^* \chi_{\sigma_4} \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N_2, l_2, \frac{1}{2}) j_2 \lambda_2 c f}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N_4, l_4, \frac{1}{2}) j_4 \lambda_4 c f} \\
 &= m_0 \sum_{N l j \lambda c f} \left\{ \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N, l, \frac{1}{2}) j \lambda c f}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N, l, \frac{1}{2}) j \lambda c f} - \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N, l, \frac{1}{2}) j \lambda c f}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N, l, \frac{1}{2}) j \lambda c f} \right\}. \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

La ecuación (4.2), tiene las siguientes propiedades: primero se trata de la diferencia entre operadores número de estados con energía positiva y estados con energía negativa, segundo se tiene la suma sobre los índices $N = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ y $l = |j - \frac{1}{2}|, j + \frac{1}{2}$. Por tanto, es posible reescribir el término de masa de cuarks haciendo la separación $N' = 0, 2, 4, \dots$ para $l = j - \frac{1}{2}$ y $N = 1, 3, 5, \dots$ para $l = j + \frac{1}{2}$ como en el caso del término cinético de cuarks. Finalmente, el término de masa se escribe de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 & \int d\mathbf{x} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \beta m_0 \psi(\mathbf{x}) \\
 &= m_0 \sum_j \sum_{\lambda c f} \sum_{N'=j-\frac{1}{2}}^{\infty} \left(\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N', j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) j \lambda c f}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N', j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) j \lambda c f} - \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N', j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) j \lambda c f}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N', j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) j \lambda c f} \right) \\
 &+ m_0 \sum_j \sum_{\lambda c f} \sum_{N=j+\frac{1}{2}}^{\infty} \left(\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) j \lambda c f}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) j \lambda c f} - \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) j \lambda c f}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) j \lambda c f} \right) \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

donde tanto $\Delta N = 2$ como $\Delta N' = 2$. Por tanto, para determinar el término de masa de cuarks, simplemente hay que conocer el número de partículas en los estados de energía positiva (pseudospín= $\frac{1}{2}$) y de partículas en los estados de energía negativa (pseudospín= $-\frac{1}{2}$).

En las secciones 4.2 y 4.3, se trata el término cinético y de masa de cuarks efectivos, ecs. (3.4, 4.3), bajo las transformaciones $\alpha\beta$ y *BCS* respectivamente.

4.2. Transformación $\alpha\beta$

En esta sección se desarrolla la transformación denominada $\alpha\beta$. Se le ha denominado así porque se necesitan conocer todos los elementos de las dos matrices, para las cuales se ha escogido usar las letras griegas α y β . Básicamente esta transformación cambia los números principales N y N' a dos nuevos números principales k y q respectivamente. Los nuevos números principales dan pasos de uno en uno $k, q = 1, 2, 3, \dots$, a diferencia de N y N' que daban pasos de dos en dos, figura 4.1.

Sin embargo, no modifican el momento angular ($l = j - \frac{1}{2}, l = j + \frac{1}{2}$), el espín total- j ni los números magnéticos (λcf) de cada estado .

La transformación $\alpha\beta$, está dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2}(N, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger &= \sum_k (\alpha_{Nk}^j)^* \widehat{\mathbf{b}}_{\pm\frac{1}{2}(k, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \\ \mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2}(N', j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger &= \sum_q (\beta_{N'q}^j)^* \widehat{\mathbf{b}}_{\pm\frac{1}{2}(q, j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \end{aligned} \quad (4.4)$$

y de forma semejante para los operadores de aniquilación. Los nuevos operadores fermiónicos también deben satisfacer las reglas de anticonmutación, las cuales imponen las condiciones de unitariedad en las matrices α_{Nk}^j y $\beta_{N'q}^j$. Para los operadores que satisfacen $l = j + \frac{1}{2}$, se tiene

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2}(N_1, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}, \mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2}(N_2, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \right\} &= \delta_{N_2}^{N_1} \\ \implies \sum_{k_1} (\alpha_{N_1 k_1}^j)^* \alpha_{N_2 k_1}^j &= \delta_{N_2}^{N_1}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

y para los operadores que satisfacen que $l = j - \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2}(N'_1, j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}, \mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2}(N'_2, j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \right\} &= \delta_{N'_2}^{N'_1} \\ \implies \sum_{q_1} (\beta_{N'_1 q_1}^j)^* \beta_{N'_2 q_1}^j &= \delta_{N'_2}^{N'_1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Se puede mostrar facilmente que el número de condiciones de unitariedad (para α 's + β 's) es igual a $n_j(n_j + 1)$, donde n_j es el número de niveles que se toman para los orbitales $l = j - \frac{1}{2}$ y $l = j + \frac{1}{2}$. Lo anterior implica que el número de niveles que se considera (sin perder el contexto de arbitrario) siempre es par $2n_j$. Si se quiere considerar, cualesquiera cinco niveles (p. ej. 3 niveles- s y 2 niveles- p) la transformación $\alpha\beta$ deja como estado independiente el quinto nivel y no es hasta que se considera el caso de seis niveles que el quinto nivel se toma en cuenta.

La estructura de las matrices α_{Nk}^j y $\beta_{N'q}^j$, así como el número de variables por determinar ($2n_j^2$) se muestran en la figura 4.2. La dimension de las columnas y los renglones de dichas matrices es igual a n_j . Por ejemplo, si se desea conocer la energía de los primeros diez estados, todos ellos con espín total j , se tiene que $n_j = 5$, esto es, cinco estados correspondientes al orbital $l = j - \frac{1}{2}$ y cinco al orbital $l = j + \frac{1}{2}$; siendo el número de variables por determinar en este ejemplo igual a 50, para lo cual se necesitan 50 ecuaciones o condiciones para determinar todas ellas. Las condiciones de

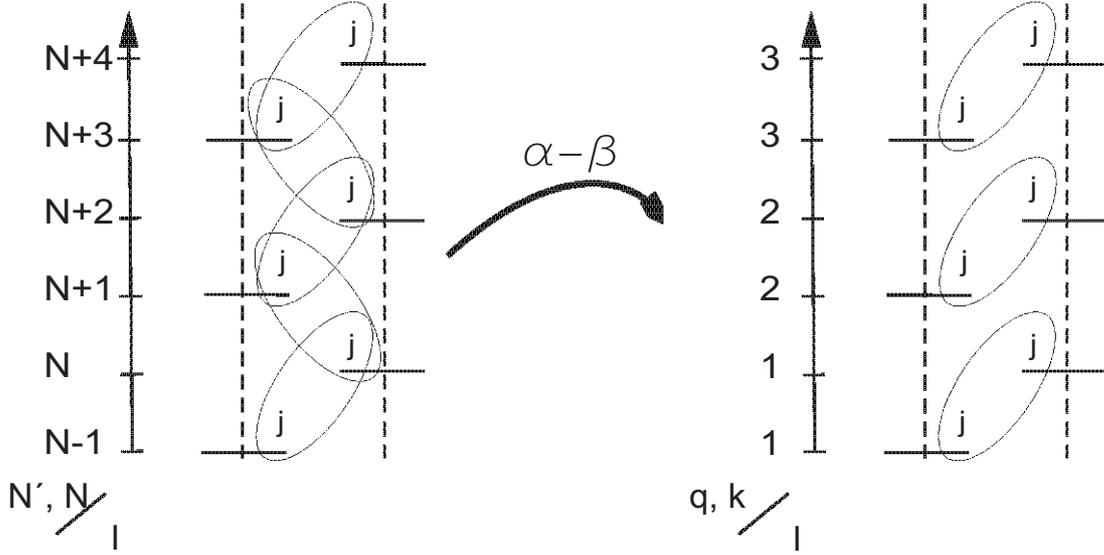


Figura 4.1: Cambio de números principales mediante la transformación $\alpha\beta$.

ortogonalidad imponen 30 condiciones para el caso de diez niveles. El número de condiciones faltante se obtiene de pedir que el término cinético de cuarks efectivo bajo la transformación $\alpha\beta$, únicamente conecte estados con $k = q$ en el espacio de los nuevos operadores fermiónicos, lo cual se ilustra en la figura 4.1 y se hace explícito en la siguiente sección, ec. (4.9). La transformación $\alpha\beta$, se puede aplicar tanto al término cinético de cuarks efectivo ec. (3.4), como al término de masa de cuarks efectivo ec. (4.3). En ambos casos se aplica previamente la redefinición de los operadores fermiónicos ec. (3.15) simplemente para evitar trabajar con una fase todas las ecuaciones que aparezcan.

4.2.1. Transformación- $\alpha\beta$ aplicada al Término Cinético de Cuarks Efectivo

El término cinético de cuarks efectivo, ec. (3.4) se escribe de la siguiente forma, una vez usada la redefinición de los operadores fermiónicos:

$$\begin{aligned}
 K &= \sum_{N'Nj\lambda cf} \left| k_{NN'}^j \right| \left[\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right] \\
 &+ \sum_{N'Nj\lambda cf} \left| k_{NN'}^j \right| \left[\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{Nk}^j &= \begin{pmatrix} N \setminus k & \dots & n_j \\ \vdots & & \vdots \\ n & & \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow n_j^2 \text{ variables} \\
 \beta_{N'q}^j &= \begin{pmatrix} N' \setminus q & \dots & n_j \\ \vdots & & \vdots \\ n-1 & & \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow n_j^2 \text{ variables}
 \end{aligned}$$

Figura 4.2: Estructura y número de variables de las matrices α y β . Ver discusión siguiente a la ec. (4.6)

Aplicando la transformación $\alpha\beta$, ec. (4.4) al término cinético de cuarks se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
 K^j &= \sum_{kq} \sum_{\lambda cf} \tilde{k}_{kq}^j \left(\hat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}(k,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \hat{\mathbf{b}}^{-\frac{1}{2}(q,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \hat{\mathbf{b}}_{-\frac{1}{2}(k,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \hat{\mathbf{b}}^{\frac{1}{2}(q,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right) \\
 &+ \sum_{kq} \sum_{\lambda cf} \tilde{k}_{kq}^j \left(\hat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}(q,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \hat{\mathbf{b}}^{-\frac{1}{2}(k,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \hat{\mathbf{b}}_{-\frac{1}{2}(q,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \hat{\mathbf{b}}^{\frac{1}{2}(k,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right),
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde los nuevos factores de interacción \tilde{k}_{kq}^j , están dados por

$$\tilde{k}_{kq}^j = \sum_{N=j+\frac{1}{2}}^{\Delta N=2, n \min(n, N+1)} \sum_{N'=N-1} |k_{NN'}^j| (\alpha_{Nk}^j)^* \beta_{N'q}^j. \tag{4.8}$$

Se ha introducido un corte arbitrario (n) en el número de niveles que se consideran. Este corte está relacionado con la dimensión de los nuevos números principales mediante la relación $n_j = \frac{1}{2}(n - (j + \frac{1}{2})) + 1$. La dimensión de los nuevos números principales está determinada por este corte, lo cual se ejemplifica para el caso de cuatro niveles con espín total $j = \frac{1}{2}$ en la figura 4.3. En este caso para $n = 3$ se tiene $n_{j=\frac{1}{2}} = 2$, esto es, las matrices $\alpha_{Nk}^{j=\frac{1}{2}}$ y $\beta_{N'q}^{j=\frac{1}{2}}$ son matrices de 2×2 . Si

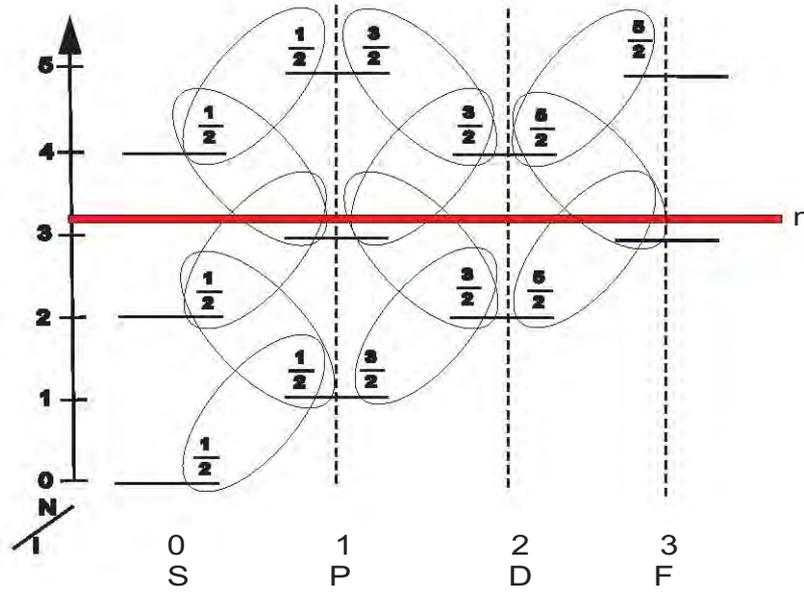


Figura 4.3: Corte arbitrario en el número de niveles. Mediante n se determina la dimensión de los números principales n_j

uno desea conocer la energía de los dos estados con espín total $j = \frac{3}{2}$, considerados bajo el corte $n=3$, hay que tener cuidado pues aunque el estado P con número principal $N = 3$ y espín total $j = \frac{3}{2}$ está dentro del corte, solo se puede considerar un número par de estados con espín total j bien definido. Por tanto, el corte real para los estados con espín total $j = \frac{3}{2}$ es $n = 2$, lo que implica que $n_{j=\frac{3}{2}} = 1$ y que la dimensión de las matrices $\alpha_{N,k}^{j=\frac{3}{2}}$ y $\beta_{N',q}^{j=\frac{3}{2}}$ es 1×1 . El mismo criterio se debe aplicar si el corte n se lleva a cabo en niveles con números principales mayores.

Hasta este momento no se ha resuelto el problema de introducir un número mayor a tres niveles. En principio los nuevos factores de interacción, \tilde{k}_{kq}^j , pueden conectar cualquier nivel con número principal k , con cualquier nivel con número principal q . Para resolver el problema de introducir más niveles y conocer el comportamiento de los niveles de menor energía en los que este modelo está enfocado, se consideran únicamente diferentes de cero los elementos de la matriz \tilde{k}_{kq}^j diagonales, esto es

$$\tilde{k}_{kq}^j = 0, \quad k \neq q \Rightarrow n_j(n_j - 1) \text{ condiciones} \quad . \quad (4.9)$$

La matriz \tilde{k}_{kq}^j , es una matriz de $n_j \times n_j$ donde los únicos elementos diferentes de cero son los de

la diagonal (n_j elementos), por tanto, la ec. 4.9 implica $n_j(n_j - 1)$ condiciones, las cuales hay que añadir a las condiciones de ortogonalidad de las matrices α_{Nk}^j y $\beta_{N'q}^j$.

Finalmente, se tienen $n_j(n_j + 1) + n_j(n_j - 1) = 2n_j^2$ condiciones para determinar las n_j^2 α 's y las n_j^2 β 's. Las ecuaciones (4.5, 4.6, 4.9), son ecuaciones cuadráticas y bilineales [41], lo cual puede dificultar su solución cuando se consideren muchos niveles. En este capítulo se muestra el método para resolver de forma analítica la inclusión de un número arbitrario de niveles en el modelo y dos casos prueba de este método. Un análisis más detallado de los alcances de estas soluciones se muestran en el capítulo 8, donde básicamente se extiende el modelo a un número mayor de niveles orbitales y se hace la comparación entre el modelo puramente de cuarks y un modelo de cuarks que incluye gluones dinámicos bajo ciertas restricciones.

4.2.2. Transformación- $\alpha\beta$ aplicada al Término de Masa de Cuarks Efectivo

Al aplicar la transformación- $\alpha\beta$ al término de masa de cuarks efectivo, ec. (4.3), se generan nuevas masas, las cuales dependen de los elementos de matriz de α_{Nk}^j y $\beta_{N'q}^j$ los cuales se obtienen de resolver las $2n_j^2$ condiciones mencionadas en la sección anterior.

Aplicando la transformación- $\alpha\beta$ al término de masa efectivo se tiene:

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{x} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \beta m_0 \psi(\mathbf{x}) = \\ & = \sum_j \sum_{\lambda cf} \sum_q \left\{ m_{0,q,j-\frac{1}{2}} \left(\widehat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}(q,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \widehat{\mathbf{b}}^{\frac{1}{2}(q,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} - \widehat{\mathbf{b}}_{-\frac{1}{2}(q,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \widehat{\mathbf{b}}^{-\frac{1}{2}(q,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right) \right\} \\ & + \sum_j \sum_{\lambda cf} \sum_k \left\{ m_{0,k,j+\frac{1}{2}} \left(\widehat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}(k,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \widehat{\mathbf{b}}^{\frac{1}{2}(k,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} - \widehat{\mathbf{b}}_{-\frac{1}{2}(k,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \widehat{\mathbf{b}}^{-\frac{1}{2}(k,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Debido al método descrito en la sección anterior, las únicas contribuciones posibles corresponden a $k = q$, por tanto, las nuevas masas vienen dadas por las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} m_{0,k,j-\frac{1}{2}} &= \sum_{N'=j-\frac{1}{2}}^{n-1} m_0 |\beta_{jN'k}|^2 \\ m_{0,k,j+\frac{1}{2}} &= \sum_{N=j+\frac{1}{2}}^n m_0 |\alpha_{jNk}|^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Lo que se ha logrado hasta este momento es transformar el sistema original a un sistema donde los nuevos factores de interacción únicamente conectan estados con los mismos nuevos números principales, sin embargo el nuevo sistema sigue conectando estados con momento angular $l = j - \frac{1}{2}$ con estados con momento angular $l = j + \frac{1}{2}$ y además, sigue moviendo partículas de energía negativa a estados con energía positiva, lo cual no permite obtener de forma analítica las energías de los estados posibles del sistema a considerar. Para conseguir una solución analítica del sistema lo que procede es hacer es una transformación BCS, la cual se muestra y discute en la siguiente sección.

4.3. Transformación-BCS para el Hamiltoniano de Cuarks

En esta sección se toman los términos cinético y de masa de cuarks efectivos una vez que se les ha aplicado la transformación- $\alpha\beta$. A estos términos se les aplica una transformación-BCS con la finalidad de diagonalizar ambos términos. Para lo anterior, se sigue el método-BCS encontrado en la literatura [38–40], el cual consiste en generar un estado-BCS en términos de dos parámetros que den las probabilidades de tener estados ocupados dados por pares (E, -E) y los demás estados sin pares. El método-BCS da la forma de determinar dichos parámetros y su correspondiente comportamiento.

El método-BCS puede formularse en una manera más elegante mediante una transformación de los operadores que generan el espacio de Fock, dicha transformación se conoce como transformación de Bogoliubov. Esta transformación define nuevos operadores de cuasipartículas, para los cuales el estado-BCS más bajo corresponde al estado del vacío. Finalmente, se expresa el Hamiltoniano (en nuestro caso el Hamiltoniano de cuarks) en los nuevos operadores. Como resultado de esta transformación y dependiendo del tipo de Hamiltoniano que tiene, se puede dividir el Hamiltoniano de la siguiente forma: $H = U + H_{11} + H_{20} + H_{40} + H_{31} + \dots$, donde U determina la energía del estado base BCS, H_{11} involucra la dependencia de energía de excitaciones de cuasipartícula y cuasiagujero, H_{20} es un término que no conserva número de partículas y por tanto implica que el estado-BCS no es el estado base real. Los demás términos involucran ordenes mayores de los nuevos operadores de creación y aniquilación, los cuales por el momento se ignoran. La condición de que H_{20} se anule determina lo que se conoce como la ecuación de brecha (gap equation), la cual es una condición para determinar los parámetros de la transformación de Bogoliubov.

En este capítulo se le ha denotado transformación-BCS, aunque formalmente debe denotarse

transformación de Bogoliubov. Sin embargo se está siguiendo el método-BCS y es por eso que se le ha denotado transformación-BCS. La transformación-BCS que se aplica en este modelo se puede considerar como una generalización de la transformación de Bogoliubov encontrada en la literatura, pues se hace una transformación de éste tipo para cada operador que aparece en este modelo, esto es, la transformación que se define, ec. (4.12), depende del nuevo número principal y del espín total- j con que se esté trabajando. La transformación-BCS que se usa es la siguiente

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}(k,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} &= c_{j-\frac{1}{2},k} \mathbf{b}_{j+\frac{1}{2}}^{(k,j)\lambda cf} - s_{j-\frac{1}{2},k} \mathbf{d}_{j-\frac{1}{2}}^{\dagger(k,j)\lambda cf} \\
 \widehat{\mathbf{b}}_{-\frac{1}{2}(k,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} &= s_{j+\frac{1}{2},k} \mathbf{b}_{j-\frac{1}{2}}^{(k,j)\lambda cf} + c_{j+\frac{1}{2},k} \mathbf{d}_{j+\frac{1}{2}}^{\dagger(k,j)\lambda cf} \\
 \widehat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}(k,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} &= c_{j-\frac{1}{2},k} \mathbf{b}_{j+\frac{1}{2}}^{\dagger(k,j)\lambda cf} - s_{j-\frac{1}{2},k} \mathbf{d}_{j-\frac{1}{2}}^{\dagger(k,j)\lambda cf} \\
 \widehat{\mathbf{b}}_{-\frac{1}{2}(k,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} &= s_{j+\frac{1}{2},k} \mathbf{b}_{j-\frac{1}{2}}^{\dagger(k,j)\lambda cf} + c_{j+\frac{1}{2},k} \mathbf{d}_{j+\frac{1}{2}}^{\dagger(k,j)\lambda cf} \\
 \widehat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}(k,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} &= c_{j+\frac{1}{2},k} \mathbf{b}_{j-\frac{1}{2}}^{(k,j)\lambda cf} - s_{j+\frac{1}{2},k} \mathbf{d}_{j+\frac{1}{2}}^{\dagger(k,j)\lambda cf} \\
 \widehat{\mathbf{b}}_{-\frac{1}{2}(k,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} &= s_{j-\frac{1}{2},k} \mathbf{b}_{j+\frac{1}{2}}^{(k,j)\lambda cf} + c_{j-\frac{1}{2},k} \mathbf{d}_{j-\frac{1}{2}}^{\dagger(k,j)\lambda cf} \\
 \widehat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}(k,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} &= c_{j+\frac{1}{2},k} \mathbf{b}_{j-\frac{1}{2}}^{\dagger(k,j)\lambda cf} - s_{j+\frac{1}{2},k} \mathbf{d}_{j+\frac{1}{2}}^{\dagger(k,j)\lambda cf} \\
 \widehat{\mathbf{b}}_{-\frac{1}{2}(k,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} &= s_{j-\frac{1}{2},k} \mathbf{b}_{j+\frac{1}{2}}^{\dagger(k,j)\lambda cf} + c_{j-\frac{1}{2},k} \mathbf{d}_{j-\frac{1}{2}}^{\dagger(k,j)\lambda cf}.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

donde $c \equiv \cos(\theta)$, $s \equiv \sin(\theta)$ y θ es el ángulo de Bogoliubov. Por tanto, aplicando la transformación- $\alpha\beta$, seguido de la transformación-BCS a los términos cinético y de masa efectivos, se obtiene el siguiente Hamiltoniano de cuarks, $\mathbf{H}_q = \mathbf{K}_q + \mathbf{H}_{m_q}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_q &= \int d\mathbf{x} \psi^{\dagger}(\mathbf{x})(-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m_0)\psi(\mathbf{x}) \\
 &= \sum_{j\lambda cf} \sum_k \left\{ \left[2\tilde{k}_{kk} s_{j+\frac{1}{2},k} c_{j+\frac{1}{2},k} + m_{0,k,j-\frac{1}{2}} c_{j+\frac{1}{2},k}^2 - m_{0,k,j+\frac{1}{2}} s_{j+\frac{1}{2},k}^2 \right] \mathbf{b}_{j-\frac{1}{2}}^{\dagger(kj)\lambda cf} \mathbf{b}_{j-\frac{1}{2}}^{(kj)\lambda cf} \right. \\
 &\quad + \left[2\tilde{k}_{kk} s_{j-\frac{1}{2},k} c_{j-\frac{1}{2},k} + m_{0,k,j-\frac{1}{2}} c_{j-\frac{1}{2},k}^2 - m_{0,k,j+\frac{1}{2}} s_{j-\frac{1}{2},k}^2 \right] \mathbf{d}_{j-\frac{1}{2}}^{\dagger(kj)\lambda cf} \mathbf{d}_{j-\frac{1}{2}}^{\dagger(kj)\lambda cf} \\
 &\quad + \left[2\tilde{k}_{kk} s_{j-\frac{1}{2},k} c_{j-\frac{1}{2},k} + m_{0,k,j+\frac{1}{2}} c_{j-\frac{1}{2},k}^2 - m_{0,k,j-\frac{1}{2}} s_{j-\frac{1}{2},k}^2 \right] \mathbf{b}_{j+\frac{1}{2}}^{\dagger(kj)\lambda cf} \mathbf{b}_{j+\frac{1}{2}}^{(kj)\lambda cf} \\
 &\quad + \left[2\tilde{k}_{kk} s_{j+\frac{1}{2},k} c_{j+\frac{1}{2},k} + m_{0,k,j+\frac{1}{2}} c_{j+\frac{1}{2},k}^2 - m_{0,k,j-\frac{1}{2}} s_{j+\frac{1}{2},k}^2 \right] \mathbf{d}_{j+\frac{1}{2}}^{\dagger(kj)\lambda cf} \mathbf{d}_{j+\frac{1}{2}}^{\dagger(kj)\lambda cf} \\
 &\quad - (2 \cdot 2 \cdot 3) \left[m_{0,k,j-\frac{1}{2}} (c_{j-\frac{1}{2},k}^2 - s_{j+\frac{1}{2},k}^2) + m_{0,k,j+\frac{1}{2}} (c_{j+\frac{1}{2},k}^2 - s_{j-\frac{1}{2},k}^2) \right. \\
 &\quad \left. + 2\tilde{k}_{kk} \left(s_{j-\frac{1}{2},k} c_{j-\frac{1}{2},k} + s_{j+\frac{1}{2},k} c_{j+\frac{1}{2},k} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\tilde{k}_{kk}(c_{j+\frac{1}{2},k}^2 - s_{j+\frac{1}{2},k}^2) - (m_{0,k,j-\frac{1}{2}} + m_{0,k,j+\frac{1}{2}})s_{j+\frac{1}{2},k}c_{j+\frac{1}{2},k} \right] \\
 & \left[\mathbf{b}_{j-\frac{1}{2}(kj)\lambda cf}^\dagger \mathbf{d}_{j+\frac{1}{2}}^{\dagger(kj)\lambda cf} + \mathbf{d}_{j+\frac{1}{2}(kj)\lambda cf} \mathbf{b}_{j-\frac{1}{2}}^{(kj)\lambda cf} \right] \\
 & + \left[\tilde{k}_{kk}(c_{j-\frac{1}{2},k}^2 - s_{j-\frac{1}{2},k}^2) - (m_{0,k,j-\frac{1}{2}} + m_{0,k,j+\frac{1}{2}})s_{j-\frac{1}{2},k}c_{j-\frac{1}{2},k} \right] \\
 & \left[\mathbf{b}_{j+\frac{1}{2}(kj)\lambda cf}^\dagger \mathbf{d}_{j-\frac{1}{2}}^{\dagger(kj)\lambda cf} + \mathbf{d}_{j-\frac{1}{2}(kj)\lambda cf} \mathbf{b}_{j+\frac{1}{2}}^{(kj)\lambda cf} \right] \Big\}. \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

El Hamiltoniano de cuarks efectivo y diagonal deseado se obtiene de requerir que los términos cuadráticos en los operadores de creación y aniquilación de la ecuación (4.13) se anulen, lo cual conduce a la ecuación de brecha (gap), ec. (4.14). La ecuación de brecha a su vez determina el o los ángulos de Bogoliubov, (uno por cada par de niveles orbitales que se desee resolver, dentro de un mismo bloque de espín total j),

$$\begin{aligned}
 & \left[\tilde{k}_{kk}(c_{j-\frac{1}{2},k}^2 - s_{j-\frac{1}{2},k}^2) - (m_{0,k,j-\frac{1}{2}} + m_{0,k,j+\frac{1}{2}})s_{j-\frac{1}{2},k}c_{j-\frac{1}{2},k} \right] = 0 \\
 & \left[\tilde{k}_{kk}(c_{j+\frac{1}{2},k}^2 - s_{j+\frac{1}{2},k}^2) - (m_{0,k,j-\frac{1}{2}} + m_{0,k,j+\frac{1}{2}})s_{j+\frac{1}{2},k}c_{j+\frac{1}{2},k} \right] = 0. \tag{4.14}
 \end{aligned}$$

El Hamiltoniano de cuarks efectivo y diagonal está dado por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_q^{BCS} & = \int d\mathbf{x} \psi^\dagger(\mathbf{x})(-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m_0)\psi(\mathbf{x}) \\
 & = \sum_{j\lambda cf} \sum_k \left\{ \left[2\tilde{k}_{kk}s_{j+\frac{1}{2},k}c_{j+\frac{1}{2},k} + m_{0,k,j-\frac{1}{2}}c_{j+\frac{1}{2},k}^2 - m_{0,k,j+\frac{1}{2}}s_{j+\frac{1}{2},k}^2 \right] \mathbf{b}_{j-\frac{1}{2}(kj)\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}_{j-\frac{1}{2}}^{(kj)\lambda cf} \right. \\
 & + \left[2\tilde{k}_{kk}s_{j-\frac{1}{2},k}c_{j-\frac{1}{2},k} + m_{0,k,j-\frac{1}{2}}c_{j-\frac{1}{2},k}^2 - m_{0,k,j+\frac{1}{2}}s_{j-\frac{1}{2},k}^2 \right] \mathbf{d}_{j-\frac{1}{2}}^{\dagger(kj)\lambda cf} \mathbf{d}_{j-\frac{1}{2}(kj)\lambda cf} \\
 & + \left[2\tilde{k}_{kk}s_{j-\frac{1}{2},k}c_{j-\frac{1}{2},k} + m_{0,k,j+\frac{1}{2}}c_{j-\frac{1}{2},k}^2 - m_{0,k,j-\frac{1}{2}}s_{j-\frac{1}{2},k}^2 \right] \mathbf{b}_{j+\frac{1}{2}(kj)\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}_{j+\frac{1}{2}}^{(kj)\lambda cf} \\
 & + \left[2\tilde{k}_{kk}s_{j+\frac{1}{2},k}c_{j+\frac{1}{2},k} + m_{0,k,j+\frac{1}{2}}c_{j+\frac{1}{2},k}^2 - m_{0,k,j-\frac{1}{2}}s_{j+\frac{1}{2},k}^2 \right] \mathbf{d}_{j+\frac{1}{2}}^{\dagger(kj)\lambda cf} \mathbf{d}_{j+\frac{1}{2}(kj)\lambda cf} \\
 & - 12 \left[m_{0,k,j-\frac{1}{2}}(c_{j-\frac{1}{2},k}^2 - s_{j+\frac{1}{2},k}^2) + m_{0,k,j+\frac{1}{2}}(c_{j+\frac{1}{2},k}^2 - s_{j-\frac{1}{2},k}^2) \right. \\
 & \left. \left. + 2\tilde{k}_{kk} \left(s_{j-\frac{1}{2},k}c_{j-\frac{1}{2},k} + s_{j+\frac{1}{2},k}c_{j+\frac{1}{2},k} \right) \right] \right\}. \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

Este Hamiltoniano efectivo ya tiene una estructura diagonal, donde los coeficientes que acompañan a los operadores número corresponden a las energías propias del sistema que se este considerando.

Para estas energías se usará la siguiente notación corta de aquí en adelante

$$\epsilon_{bkj-\frac{1}{2}} = 2\tilde{k}_{kk}s_{j+\frac{1}{2},k}c_{j+\frac{1}{2},k} + m_{0,k,j-\frac{1}{2}}c_{j+\frac{1}{2},k}^2 - m_{0,k,j+\frac{1}{2}}s_{j+\frac{1}{2},k}^2 \tag{4.16}$$

$$\epsilon_{dkj-\frac{1}{2}} = 2\tilde{k}_{kk}s_{j-\frac{1}{2},k}c_{j-\frac{1}{2},k} + m_{0,k,j-\frac{1}{2}}c_{j-\frac{1}{2},k}^2 - m_{0,k,j+\frac{1}{2}}s_{j-\frac{1}{2},k}^2 \tag{4.17}$$

$$\epsilon_{bkj+\frac{1}{2}} = 2\tilde{k}_{kk}s_{j-\frac{1}{2},k}c_{j-\frac{1}{2},k} + m_{0,k,j+\frac{1}{2}}c_{j-\frac{1}{2},k}^2 - m_{0,k,j-\frac{1}{2}}s_{j-\frac{1}{2},k}^2 \quad (4.18)$$

$$\epsilon_{dkj+\frac{1}{2}} = 2\tilde{k}_{kk}s_{j+\frac{1}{2},k}c_{j+\frac{1}{2},k} + m_{0,k,j+\frac{1}{2}}c_{j+\frac{1}{2},k}^2 - m_{0,k,j-\frac{1}{2}}s_{j+\frac{1}{2},k}^2, \quad (4.19)$$

con lo cual el Hamiltoniano efectivo de cuarks y diagonal, [21], se escribe de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_q^{BCS} = \sum_{jk} \left\{ \epsilon_{bkj+\frac{1}{2}} \mathbf{b}_{j+\frac{1}{2},k}^\dagger \mathbf{b}_{j+\frac{1}{2},k} + \epsilon_{dkj+\frac{1}{2}} \mathbf{d}_{j+\frac{1}{2},k}^\dagger \mathbf{d}_{j+\frac{1}{2},k} \right. \\ \left. + \epsilon_{bkj-\frac{1}{2}} \mathbf{b}_{j-\frac{1}{2},k}^\dagger \mathbf{b}_{j-\frac{1}{2},k} + \epsilon_{dkj-\frac{1}{2}} \mathbf{d}_{j-\frac{1}{2},k}^\dagger \mathbf{d}_{j-\frac{1}{2},k} \right\}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

en donde se ha omitido la suma sobre los números cuánticos magnéticos y la constante de la energía correspondiente al vacío perturbativo, $\epsilon_{0,kk}$.

La importancia de este resultado se hará más evidente cuando se deduzca el Hamiltoniano de Coulomb efectivo con el que se trabaja en este modelo, capítulo 5. En ese momento se puede afirmar que se ha resuelto de forma analítica un Hamiltoniano efectivo (motivado de la Cromodinámica Cuántica) para cuarks confinados en una bolsa, para cualquier número arbitrario de niveles orbitales y cualquier espín total- j . A diferencia de [18] y [20], se han liberado las restricciones del número de estados accesibles para los cuarks y se ha extendido el modelo a un grupo SU(3) de color.

Por último, en este capítulo se muestran los casos prueba correspondientes a dos y cuatro niveles orbitales. El caso de dos niveles se puede comparar con la solución SU(2) encontrada en el capítulo anterior. Por razones de como se ha construido el método $\alpha\beta - BCS$, no es posible comparar este método con la solución SU(2) para tres niveles encontrada de igual forma en el capítulo anterior. Por tanto, el caso de cuatro niveles será el primer gran avance que surja de haber desarrollado este método de solución. A diferencia de la solución SU(2)-analítica, el método $\alpha\beta - BCS$, hace un promedio entre los estados con el mismo nuevo número principal k , esto es, ahora las energías propias del sistema son promedios únicamente entre dos estados para todo número principal k . Es de esperar que para el caso prueba de dos niveles orbitales y considerando cuarks sin masa, se obtenga la misma energía propia obtenida con la solución SU(2)-analítica.

4.4. Casos Prueba para el Método $\alpha\beta - BCS$

En esta sección se muestra cómo aplicar el método descrito anteriormente para el caso de dos y cuatro niveles. Para estos dos cálculos se toman los niveles de menor energía, esto es, los estados

con momento angular $l = 0$ y $l = 1$ correspondientes a estados s y p respectivamente, ambos acoplados a espín total $j = \frac{1}{2}$. El caso de dos niveles es trivial en el sentido de que las matrices α y β son simplemente una constante, sin embargo, es una buena forma de comparar con la solución SU(2)-analítica encontrada en el capítulo anterior. Por otro lado, para el caso de cuatro niveles se tiene que las matrices α y β son matrices de 2x2, generando así ocho incógnitas por determinar. Para determinar estas incógnitas se tiene que resolver un sistema de ocho ecuaciones cuadráticas y bilineales, lo cual se hace de forma numérica.

4.4.1. Solución- $\alpha\beta - BCS$ para el Caso de Dos Niveles Orbitales

El caso de dos niveles ($n_{\frac{1}{2}} = 1$) con y sin masa, es el más sencillo que se puede resolver mediante el método $\alpha\beta - BCS$. El número de incógnitas que se tienen que determinar es dos; una para la matriz α y otra para la matriz β . Debido a que se está trabajando en la descripción de Dirac, en realidad el sistema que se está resolviendo es un sistema de cuatro niveles, dos de energía negativa y dos de energía positiva.

Se considera el primer estado s ($N' = 0$) y el primer estado p ($N = 1$). Por tanto, de acuerdo al método $\alpha\beta - BCS$, se tiene que para el caso de dos niveles se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones para poder determinar las incógnitas $\alpha_{1,1}^{\frac{1}{2}}$ y $\beta_{0,1}^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} |\alpha_{1,1}^{\frac{1}{2}}|^2 &= 1 \\ |\beta_{0,1}^{\frac{1}{2}}|^2 &= 1 \\ \tilde{k}_{kq}^{\frac{1}{2}} &= 0, \quad k \neq q \end{aligned} \tag{4.21}$$

al ser la dimensión de k y de q igual a uno, la matriz $\tilde{k}_{kq}^{\frac{1}{2}} = \tilde{k}_{11}^{\frac{1}{2}}$, esto es, solo existe un elemento que según el método $\alpha\beta - BCS$ debe ser distinto de cero. El nuevo factor de interacción $\tilde{k}_{11}^{\frac{1}{2}}$ viene dado por

$$\tilde{k}_{11} = \sqrt{\gamma} \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2}} \alpha_{11} \beta_{01} \tag{4.22}$$

donde se omite el índice de espín total j por estar fijo en este cálculo. Las posibles soluciones de $(\alpha_{11}, \beta_{01})$ son $(\pm 1, \pm 1)$ y $(\mp 1, \pm 1)$; sin embargo, el segundo conjunto corresponde a soluciones no físicas ya que se tendrían energías menores a la del vacío perturbativo, por tanto, se tiene que $\tilde{k}_{11} = \sqrt{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Como se desea hacer la comparación con las energías obtenidas para la solución SU(2)-analítica y la solución- $\alpha\beta$ -BCS, se consideran los casos sin masa y con masa por separado. El único parámetro que se está considerando hasta el momento es $\sqrt{\gamma}$. Para los ejemplos de dos y cuatro niveles, se considera el mismo $\sqrt{\gamma}$ usado en la solución SU(2), esto es, $\sqrt{\gamma} = 0,22566\text{GeV}$, simplemente para hacer la comparación. Posteriormente, el parámetro $\sqrt{\gamma}$, se determinará mediante un ajuste con el espectro de masas hadrónico, ya que este factor cambia según el mesón o barión que se este considerando.

Caso de Dos Niveles Orbitales para Cuarks sin Masa

La determinación de las matrices α y β , no depende de la masa de los cuarks, por tanto, lo que falta por determinar es el ángulo de Bogoliubov mediante resolver las ecuaciones de brecha; las cuales están dadas por

$$\begin{aligned}\tilde{k}_{11}(\cos^2(\theta_{S,1}) - \text{sen}^2(\theta_{S,1})) &= 0 \\ \tilde{k}_{11}(\cos^2(\theta_{P,1}) - \text{sen}^2(\theta_{P,1})) &= 0.\end{aligned}\tag{4.23}$$

En la tabla 4.1, se muestra el ángulo de Bogoliubov así como las energías propias del sistema y la energía del vacío perturbativo. En este caso se están considerando tres grados de libertad para color, dos de sabor y dos de espín, obteniéndose que: la solución SU(2)-analítica y la solución $\alpha\beta$ -BCS son idénticas para el caso de dos niveles sin masa, (ver tabla 3.1) La descripción de

Sol	$\theta_{S1} = \theta_{P1}$ (rad)	$\epsilon_{S,11}$ (GeV)	$\epsilon_{P,11}$ (GeV)	$\epsilon_{0,11}$ (GeV)
1	0.7853	0.2763	0.2763	6.633

Cuadro 4.1: **Solución- $\alpha\beta$ -BCS, caso dos niveles orbitales para cuarks sin masa.**

mesones ($q\bar{q}$) y bariones (qqq) en este modelo de dos niveles genera las energías descritas en la sección (3.2.1). Como se puede observar en la tabla (4.1), la energía del primer nivel s y el primer nivel p , están degeneradas a un valor promedio, esta degeneración se puede romper de varias formas, una de ellas es introducir una interacción de forma fenomenológica (no deseada) que dependa del momento angular de la partícula, por ejemplo, interacción espín-orbita. Otra posibilidad es buscar

esta interacción en el Hamiltoniano de la CDC que se está trabajando, donde guiados por modelos de física nuclear [42], los cuales mediante considerar varios tipos de interacciones de forma natural generan la interacción espín-orbita, sin embargo, es necesario introducir otros campos para producir los términos de interacción. Otra posibilidad es introducir gluones al modelo, pues la interacción entre cuarks y gluones es a través del color pero acoplando diferentes momentos angulares en el término de interacción, $(\psi^\dagger(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}))$.

La energía de excitación obtenida mediante la solución- $\alpha\beta - BCS$ para el caso de dos niveles predice una masa de $0,553GeV$ para un mesón y de $0,829GeV$ para un barión. Estos resultados son comparables con resultados del modelo MIT de la bolsa [4]. Claramente, estos resultados pueden mejorarse ajustando el parámetro $\sqrt{\gamma}$ de confinamiento a un valor entre $0,39447GeV$ y $0,19723GeV$ para mesones, mientras que para el caso de bariones a un valor entre $0,19723GeV$ y $0,16436GeV$.

Caso: Dos Niveles Orbitales para Cuarks con Masa

Al igual que para el caso de dos niveles orbitales para cuarks sin masa, lo que falta por determinar es el ángulo de Bogoliubov. Las ecuaciones de brecha que hay que resolver para determinar este ángulo de Bogoliubov ahora están dadas por:

$$\begin{aligned} \left[\tilde{k}_{11}(c_{S,1}^2 - s_{S,1}^2) - (m_{0,1,S} + m_{0,1,P})s_{S,1}c_{S,1} \right] &= 0 \\ \left[\tilde{k}_{11}(c_{P,1}^2 - s_{P,1}^2) - (m_{0,1,S} + m_{0,1,P})s_{P,1}c_{P,1} \right] &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde $c_{S,1} = \cos(\theta_{S,1})$, $s_{S,1} = \sin(\theta_{S,1})$ y de forma semejante para $c_{P,1}$ y $s_{P,1}$. Para el valor de m_0 se toma un promedio entre la masa desnuda del cuark u y la del cuark d , [7]. Los valores para el ángulo de Bogoliubov así como los valores de las energías propias del sistema de dos niveles para cuarks con masa se muestran en el cuadro 4.2. Como se puede observar de las Tablas 4.1 y 4.2, incluir el término de masa de cuarks no modifica de forma considerable los valores para las energías propias

Sol	$\theta_{S1} = \theta_{P1}$ (rad)	$\epsilon_{S,11}$ (GeV)	$\epsilon_{P,11}$ (GeV)	$\epsilon_{0,11}$ (GeV)
1	0.7709	0.2765	0.2765	6.636

Cuadro 4.2: Solución- $\alpha\beta - BCS$, caso dos niveles orbitales para cuarks con masa.

Sol	α_{11}	α_{12}	α_{32}	β_{01}	β_{02}	β_{22}	\tilde{k}_{11}	\tilde{k}_{22}
1	-0.707107	0.707107	0.707107	-0.903453	0.428687	0.903453	0.18906	0.39853

Cuadro 4.3: Soluciones α 's, β 's, para el sistema de cuatro niveles. Los factores de interacción \tilde{k}_{kk} están dados en GeV.

(por ejemplo, si se considera una masa de cuarks $m_0 = 0,300GeV$, se tienen las siguientes energías $\epsilon_{11,S} = \epsilon_{11,P} = 0,2849GeV$). Sin embargo, incluir el término de masa es una extensión del modelo, la cual se ha mostrado puede resolverse de forma semi-analítica.

4.4.2. Solución- $\alpha\beta - BCS$ para el Caso de Cuatro Niveles Orbitales

El caso prueba para cuatro niveles orbitales (dos estados s y dos estados p) es el primer resultado nuevo con respecto a [18], [20] y la soluciones-SU(2) analítica, ec. (3.26). El caso de cuatro niveles orbitales requiere resolver un sistema de ocho ecuaciones cuadráticas y bilineales, para lo cual se elaboró un programa en Mathematica-6.0, [43], el cual mediante el comando *FindRoot* es capaz de encontrar las soluciones a las ecuaciones bilineales deseadas al menos para 4 niveles orbitales. En el capítulo 8, se discute hasta que número de niveles orbitales es posible encontrar soluciones mediante este comando.

Lo que se puede esperar al incluir más niveles orbitales, es que la energía de los estados más bajos disminuya respecto al caso de dos niveles. La pregunta es cuánto?. Para cuatro niveles orbitales (manteniendo el mismo $\sqrt{\gamma}$ para comparar con el caso de dos niveles orbitales), la disminución se muestra en la tabla 4.4, pero el análisis correspondiente para un número mayor de niveles se hace en el capítulo 8.

El sistema de ecuaciones cuadráticas y bilineales que se tiene que resolver para el caso de cuatro niveles es el siguiente (se ha omitido el índice del espín total $j = \frac{1}{2}$, pues permanece fijo en este cálculo)

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 = 1$$

$$\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 = 1$$

$$\begin{aligned}
 \beta_{01}^2 + \beta_{02}^2 &= 1 \\
 \beta_{21}^2 + \beta_{22}^2 &= 1 \\
 \alpha_{11}\alpha_{31} + \alpha_{12}\alpha_{32} &= 0 \\
 \beta_{01}\beta_{21} + \beta_{02}\beta_{22} &= 0 \\
 |k_{10}|\alpha_{11}\beta_{02} + |k_{12}|\alpha_{11}\beta_{22} + |k_{32}|\alpha_{31}\beta_{22} &= 0 \\
 |k_{10}|\alpha_{12}\beta_{01} + |k_{12}|\alpha_{12}\beta_{21} + |k_{32}|\alpha_{32}\beta_{21} &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

La estructura de estas ecuaciones es bastante más complicada que para el caso de dos niveles. Las soluciones para los α 's y β 's en el caso de cuatro niveles dan más información sobre este método de solución, existen las soluciones que generan las siguientes posibilidades $\tilde{k}_{11} < \tilde{k}_{22}$ y $\tilde{k}_{22} < \tilde{k}_{11}$. Aún así la solución es única pues solo se tiene que identificar el valor mínimo y de ahí en adelante en orden creciente. La Tabla 4.3, muestra el conjunto solución de α 's y β 's para el caso de cuatro niveles, así como los valores de \tilde{k}_{kk}

Siguiendo el método $\alpha\beta - BCS$ descrito, el siguiente paso es resolver la ecuaciones de brecha (4.26) para determinar los dos ángulos de Bogoliubov.

$$\begin{aligned}
 \left[\tilde{k}_{11}(c_{S,1}^2 - s_{S,1}^2) - (m_{0,1,S} + m_{0,1,P})s_{S,1}c_{S,1} \right] &= 0 \\
 \left[\tilde{k}_{11}(c_{P,1}^2 - s_{P,1}^2) - (m_{0,1,S} + m_{0,1,P})s_{P,1}c_{P,1} \right] &= 0 \\
 \left[\tilde{k}_{22}(c_{S,2}^2 - s_{S,2}^2) - (m_{0,2,S} + m_{0,2,P})s_{S,2}c_{S,2} \right] &= 0 \\
 \left[\tilde{k}_{22}(c_{P,2}^2 - s_{P,2}^2) - (m_{0,2,S} + m_{0,2,P})s_{P,2}c_{P,2} \right] &= 0
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

donde se puede observar que $\theta_{S,k} = \theta_{P,k} = \theta_k$ y $k = 1, 2$. Los valores de los ángulos de Bogoliubov así como las energías propias para el sistema de cuatro niveles orbitales se muestran en la Tabla 4.4. Nuevamente, la masa desnuda de los cuarks que se ha considerado es $m_0 = 0,008GeV$. Como se esperaba, los valores para las energías de excitación más bajas disminuyeron, así como la energía esperada para un mesón y la de un barión. Mediante los resultados de la Tabla 4.4, se tiene que la energía de un mesón es de $0.378GeV$ comparable con las escalas mesónicas y la de un barión es de $0.567GeV$, la cual es aproximadamente un factor de dos menor que las escalas reportadas. Sin embargo el parámetro $\sqrt{\gamma} = 0,22566GeV$ se ha fijado simplemente para hacer el cálculo de prueba y poder comparar con el caso de dos niveles orbitales. Este parámetro se debe ajustar si se desean

Sol	θ_1	θ_2	$\epsilon_{S,11}$	$\epsilon_{P,11}$	$\epsilon_{0,11}$	$\epsilon_{S,22}$	$\epsilon_{P,22}$	$\epsilon_{0,22}$
1	0.76425	0.77536	0.18923	0.18923	4.54168	0.39853	0.39853	9.56492

Cuadro 4.4: **Solución- $\alpha\beta - BCS$, caso cuatro niveles orbitales. Los ángulos θ_1 y θ_2 están dados en radianes mientras que las energías están dadas en GeV.**

reproducir los valores promedio del espectro hadrónico. Nuevamente, las energías de los primeros estados y de los dos segundos estados s , p están degenerados para este modelo. La razón de esto se ha discutido anteriormente así como las posibilidades para romper esta degeneración.

Finalmente, se ha desarrollado un método capaz de trabajar la Cromodinámica Cuántica (CDC) a bajas energías de forma semi-analítica. Se verificó la solución $SU(2)$ -analítica, para el caso: de dos niveles orbitales para cuarks sin masa a través de la solución- $\alpha\beta - BCS$. Además se mostró que para el caso: de dos niveles orbitales para cuarks con masa, el resultado no difiere de forma significativa aún cuando la masa desnuda de los cuarks se aumente en un factor de 40 veces. Por último se mostró como resolver el caso de cuatro niveles y los resultados que se obtienen de aplicar el método $\alpha\beta - BCS$. En el capítulo 8, se hace un análisis más detallado de la solución- $\alpha\beta - BCS$ y como se modifica ésta al incluir gluones al modelo.

Capítulo 5

Hamiltoniano de Coulomb

En este capítulo se trabajará la estructura del Hamiltoniano de Coulomb, nuevamente guiados por el Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica en la norma de Coulomb, [23, 24]. El Hamiltoniano de Coulomb puede considerarse como la interacción entre dos densidades de carga a través de un operador, al cual llamaremos el potencial de interacción. Este potencial de interacción es más complicado que en el caso de la Electrodinámica cuando se trabaja en la norma de Coulomb. En la actualidad no hay un método estandar para trabajar el potencial de interacción Coulombiano de la CDC. Sin embargo, se ha invertido más esfuerzo en tratar de estudiar el potencial de interacción en el sector gluónico [13, 15, 44, 45], bajo ciertas aproximaciones. De igual forma en este modelo, se hace una aproximación al potencial de interacción y se discuten posibles extensiones del Hamiltoniano de Coulomb.

El presente capítulo está organizado de la siguiente manera: En la sección 5.1, se justifica la aproximación al potencial de interacción, mediante una interacción promedio. En la sección 5.2, se trabajará el Hamiltoniano de Coulomb cuando únicamente se consideran cuarks y donde se modela el potencial de interacción por una interacción de promedio. En la sección 5.3, se trabajará el Hamiltoniano de Coulomb, donde el potencial de interacción se sigue modelando por una interacción promedio, pero ahora las densidades de carga interactuantes corresponden a la suma de la densidad de carga de los cuarks más la de los gluones. En la sección 5.4, se discuten las consecuencias de considerar un potencial de interacción más complicado.

5.1. Aproximación del Potencial de Interacción

El Hamiltoniano de Coulomb obtenido de trabajar la Cromodinámica Cuántica en la norma de Coulomb y considerar solo la interacción entre densidades de carga de color de cuarks, está dado por:

$$\mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \psi^\dagger(\mathbf{r}) T_a \psi(\mathbf{r}) \langle a, \mathbf{r} | \frac{g}{\nabla \cdot \mathcal{D}} (-\nabla^2) \frac{g}{\nabla \cdot \mathcal{D}} | a', \mathbf{r}' \rangle \psi^\dagger(\mathbf{r}') T^{a'} \psi(\mathbf{r}'), \quad (5.1)$$

donde $\frac{g}{\nabla \cdot \mathcal{D}} (-\nabla^2) \frac{g}{\nabla \cdot \mathcal{D}}$, contiene a los gluones a través de la derivada covariante $\mathcal{D}_{ab} = \delta_{ab} \nabla + ig \mathbf{A}_C T_{ab}^C$ y el operador $\nabla \cdot \mathcal{D}$, se conoce como el operador de Faddeev-Popov. Se puede ver claramente que el orden más bajo en la constante de interacción fuerte (g) que considera el Hamiltoniano de Coulomb es de orden g^2 .

El potencial de interacción que aparece entre las dos densidades de carga es bastante complicado. Se han hecho esfuerzos para tratar de entender este potencial de interacción [13], mostrando que este potencial de interacción podría explicar el fenómeno de confinamiento. Dicho trabajo es bastante elaborado y no muy ilustrativo de como trabajar. Por otro lado, una posibilidad es considerar que el potencial de interacción entre las densidades de carga es estático y que únicamente depende de las posiciones de cada una de las densidades de carga interactuantes. En la literatura es muy conocido el potencial de interacción $-\frac{a}{r} + br$, el cual es un potencial de interacción estático y confinante [29, 46]. En [29], este potencial se considera fenomenológicamente satisfactorio para describir la interacción en diferentes intervalos de interacción entre cuarks. Por otro lado, se han hecho estudios matemáticos en busca de soluciones analíticas para la ecuación de Schrodinger [46], cuando se considera este potencial, sin embargo, los únicos resultados son numéricos.

Cálculos de redes (lattice QCD) han tratado de describir el comportamiento de la constante de interacción fuerte a diferentes separaciones entre cuarks [47]. En esta búsqueda se introduce una dependencia en la constante de interacción fuerte con el volumen, para lo cual es necesario fijar una escala (longitud de red). Esta escala está directamente relacionada con el coeficiente de la parte lineal de un potencial tipo $-\frac{a}{r} + br$, con lo cual es posible medir la constante de interacción fuerte mediante una cantidad física como la fuerza entre cuarks. En la literatura se encuentran diferentes escalas [48], por ejemplo regiones de separación entre $0,1fm < r < 1fm$, relevantes para estados de charmonium ($c\bar{c}$) y bottomonium ($b\bar{b}$).

Si se considera este potencial de interacción y solo se está interesado en un cierto intervalo para r , donde se lleve a cabo la interacción entre los cuarks, se puede hacer un promedio entre todas las posibles bolsas que estén en este intervalo de confinamiento. Este valor promedio se considera un valor fijo V_0 , el cual modela una interacción, como se muestra en la figura 5.1.

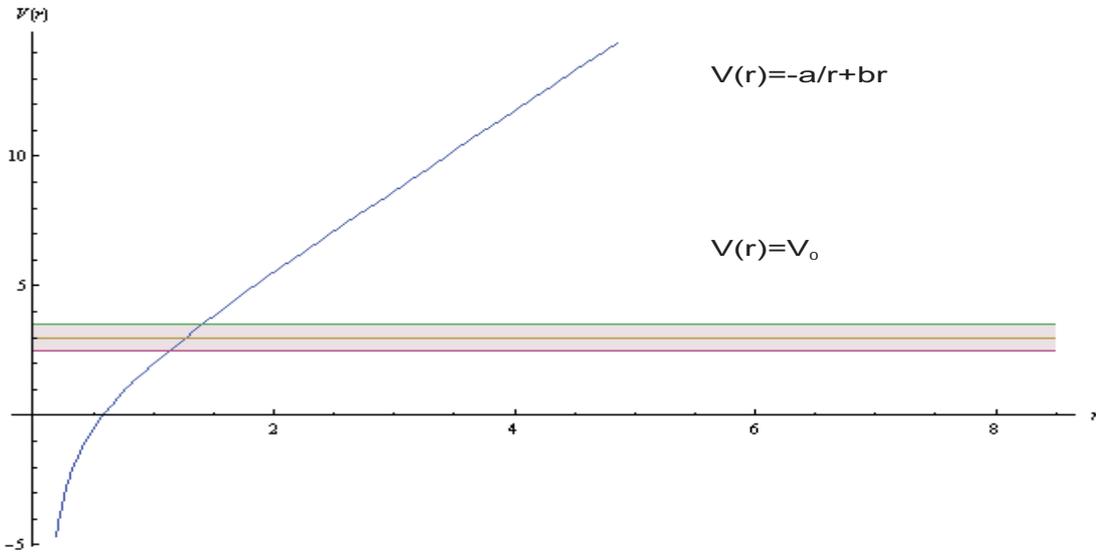


Figura 5.1: Aproximación del potencial de interacción mediante una constante.

Cómo determinar V_0 , debe corresponder a la bolsa que se esté utilizando, pues explícitamente este potencial depende de la separación entre cuarks. Si se considera el radio de la bolsa se puede tener una escala para V_0 . En el capítulo 8, es necesario asignar un valor a V_0 cuando se calcula la corrección a las energías $\alpha\beta - BCS$ debidas a la inclusión de gluones en el modelo.

Por tanto, con la aproximación de un potencial de interacción constante V_0 , el Hamiltoniano de Coulomb para cuarks se escribe de la siguiente forma:

$$\mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q} = \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \rho_a^q(\mathbf{r})V_0\rho_a^q(\mathbf{r}'), \tag{5.2}$$

esto es, la interacción entre dos densidades de carga de cuarks a través de una interacción promedio.

El factor V_0 se puede considerar un parámetro, el cual puede relacionarse con g^2 en este modelo. Por otro lado, más adelante se muestra que esta constante simplemente tiene un valor que separe los estados con color de aquellos estados sin color por lo que la figura 5.1 simplemente es una ilustración,

esto es, no se ajusta con respecto a los valores experimentales y por tanto, no se le considera del todo un parámetro en este modelo.

La contribución dinámica de los gluones se ha modelado mediante la aproximación de interacción promedio. Recuperar los gluones de forma dinámica no es una tarea fácil con respecto al potencial de interacción. Sin embargo, introducir al modelo los gluones de forma dinámica se hace en los siguientes capítulos de este trabajo. Por tanto, por razones de descripción la aproximación hecha en el potencial de interacción se mantiene y únicamente se discute en la sección 5.4 las posibles extensiones al Hamiltoniano de Coulomb y las técnicas para atacar el problema.

5.2. Hamiltoniano de Coulomb Efectivo para Cuarks

La deducción completa del Hamiltoniano de Coulomb efectivo (guiado por el Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica en la Norma de Coulomb) para cuarks se muestra en el apéndice D. En esta sección únicamente se describe la estructura de éste y las implicaciones que se obtienen de la expresión final.

El Hamiltoniano de Coulomb para cuarks, en donde, modelando el potencial de interacción por un potencial $V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ que depende únicamente de la distancia entre las dos densidades de carga, viene dado por

$$\mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q} = \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \rho_a^q(\mathbf{r})V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)\rho^{q a}(\mathbf{r}'). \quad (5.3)$$

Siguiendo los mismos procedimientos usados anteriormente para la deducción del Hamiltoniano de cuarks efectivo, se deduce el Hamiltoniano de Coulomb efectivo; esta deducción se ha hecho para un potencial estático arbitrario que depende solamente de la separación de las densidades de carga, $V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ (este podría ser el punto de partida para considerar extensiones del modelo en la parte Coulombiana, al considerar diferentes potenciales de interacción, sin embargo, en el presente trabajo solo se discute la aproximación de potencial de interacción constante). Finalmente el Hamiltoniano de Coulomb efectivo para cuarks está dado por

$$\mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q} = \sum_{N_i, j_i, \lambda_i, l_i, c_i, \alpha, f, \alpha', f', L, M, C} (-1)^M (-1)^{\chi_C} \left[\mathbf{b}_{\alpha(N_1, l_1, \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c_1}^\dagger \mathbf{b}_{(N_2, l_2, \frac{1}{2}) j_2 - \lambda_2 \bar{c}_2}^{\alpha, f} \langle j_1 \lambda_1, j_2 - \lambda_2 | L - M \rangle \langle (1, 0) c_1, (0, 1) \bar{c}_2 | (1, 1) C \rangle \right]$$

$$\frac{\left[\mathbf{b}_{\alpha', (N_3, l_3, \frac{1}{2}) j_3 \lambda_3 c_3 f'}^\dagger \mathbf{b}_{(N_4, l_4, \frac{1}{2}) j_4 - \lambda_4 \bar{c}_4}^{\alpha', f'} \langle j_3 \lambda_3, j_4 - \lambda_4 | LM \rangle \langle (1, 0) c_3, (0, 1) \bar{c}_4 | (1, 1) \bar{C} \rangle \right]}{\sqrt{(2j_1 + 1)(2j_3 + 1)} V(N_i, l_i, j_i, L)} \quad (5.4)$$

y donde se ha renombrado $a \rightarrow C$: Los factores $V(N_i, l_i, j_i, L)$ son las intensidades de cada componente de la interacción, que están dados por

$$\begin{aligned} V(N_i, l_i, j_i, L) &= \frac{3}{2} \frac{1}{(2L + 1)} (-1)^{j_2 + \frac{1}{2} + j_4 + \frac{1}{2}} \\ &\times \int r^2 dr r'^2 dr' R_{N_1 l_1}^*(r) R_{N_2 l_2}(r) R_{N_3 l_3}^*(r') R_{N_4 l_4}(r') \int_{-1}^1 d(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') P_L(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') V(r, r', \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \\ &\times \frac{\prod_{i=1}^4 \sqrt{(2l_i + 1)(2j_i + 1)} \langle l_1 0, l_2 0 | L 0 \rangle \langle l_3 0, l_4 0 | L 0 \rangle}{\sqrt{(2j_1 + 1)(2j_3 + 1)}} \begin{Bmatrix} j_1 & l_1 & \frac{1}{2} \\ l_2 & j_2 & L \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_3 & l_3 & \frac{1}{2} \\ l_4 & j_4 & L \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

El siguiente paso es usar la aproximación descrita en la sección anterior para el potencial de interacción, esto es, considerar una interacción promedio, $V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = V(r, r', \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') = V_0$, con lo cual se tiene que el único valor posible para L , es $L = 0$. De aquí en adelante se usará la notación $H_{Coulomb}^{q-q}(V_0)$, para el Hamiltoniano de Coulomb efectivo de cuarks cuando se haya usado la aproximación del potencial de interacción por una constante V_0 , por tanto

$$\int_{-1}^1 d(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') P_L(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') V(r, r', \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') = 2V_0 \delta_{L0} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} &\int r^2 r'^2 dr dr' R_{N_1 l_1}^*(r) R_{N_2 l_2}(r) R_{N_3 l_3}^*(r') R_{N_4 l_4}(r') = \\ &= \int r^2 dr R_{N_1 l_1}^*(r) R_{N_2 l_2}(r) \int r'^2 dr' R_{N_3 l_3}^*(r') R_{N_4 l_4}(r') = \\ &= \delta_{N_1 N_2} \delta_{N_3 N_4} \delta_{l_1 l_2} \delta_{l_3 l_4} \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\langle l_1 0, l_2 0 | L 0 \rangle = \frac{(-1)^{l_1}}{\sqrt{2l_1 + 1}} \quad (5.8)$$

$$\langle l_3 0, l_4 0 | L 0 \rangle = \frac{(-1)^{l_3}}{\sqrt{2l_3 + 1}} \quad (5.9)$$

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & 0 \\ l_1 & l_2 & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} = \frac{(-1)^{j_1 + l_1 + \frac{1}{2}}}{\sqrt{(2j_1 + 1)(2l_1 + 1)}} \delta_{j_1 j_2} \quad (5.10)$$

$$\begin{Bmatrix} j_3 & j_4 & 0 \\ l_3 & l_4 & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} = \frac{(-1)^{j_3 + l_3 + \frac{1}{2}}}{\sqrt{(2j_3 + 1)(2l_3 + 1)}} \delta_{j_3 j_4} \quad (5.11)$$

con lo cual las intensidades $V(N_i, l_i, j_i, L)$ están dadas por

$$V(N_i, l_i, j_i, L) = \frac{3}{2}(2V_0)\delta_{L0}\delta_{l_1l_2}\delta_{l_3l_4}\delta_{j_1j_2}\delta_{j_3j_4}\delta_{N_1N_2}\delta_{N_3N_4}. \quad (5.12)$$

Con estas simplificaciones el Hamiltoniano de Coulomb efectivo para cuarks, ec. (5.4) tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q}(V_0) = & \sum_{N_i, j_i, l_i, c_k, \lambda_k, \alpha, f, \alpha', f', C} (-1)^{\lambda C} (-1)^{\frac{1}{2}-\alpha+\frac{1}{2}-\alpha'+\frac{1}{2}-f+\frac{1}{2}-f'} \sqrt{(2j_1+1)(2j_3+1)} \\ & \times \langle j_1 \lambda_1, j_1 - \lambda_2 | 00 \rangle \langle (1, 0) c_1, (0, 1) \bar{c}_2 | (1, 1) C \rangle \langle j_3 \lambda_3, j_3 - \lambda_4 | 00 \rangle \langle (1, 0) c_3, (0, 1) \bar{c}_4 | (1, 1) \bar{C} \rangle \\ & \times \left[\mathbf{b}_{\alpha(N_1, l_1, \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c_1 f}^\dagger \mathbf{b}_{-\alpha(N_1, l_1, \frac{1}{2}) j_1 - \lambda_2 \bar{c}_2 - f} \mathbf{b}_{\alpha'(N_3, l_3, \frac{1}{2}) j_3 \lambda_3 c_3 f'}^\dagger \mathbf{b}_{-\alpha'(N_3, l_3, \frac{1}{2}) j_3 - \lambda_4 \bar{c}_4 - f'} \right] \left(\frac{3}{2} 2V_0 \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde (i=1, 3) y (k=1, 2, 3, 4). Aunque no es obvia a simple vista, la expresión (5.13) se puede escribir como el operador de Casimir de color de SU(3). Por tal razón, se hace un breve paréntesis para mostrar la relación entre el operador de Casimir y $\mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q}(V_0)$.

5.2.1. Operador de Casimir vs $\mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q}(V_0)$

Para hacer la relación del $\mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q}(V_0)$ con el operador Casimir de SU(3), se define primero el operador de Casimir, los generadores y el operador número del grupo SU(3), los cuales están dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_2(SU(3)) &= \frac{3}{2} \sum_{c_1 c_2} \mathbf{C}_{c_1}^{c_2} \mathbf{C}_{c_2}^{c_1} \\ \mathbf{C}_{c_1}^{c_2} &= \left(\mathbf{b}_{c_1}^\dagger \cdot \mathbf{b}^{c_2} \right) - \frac{\delta_{c_1 c_2}}{3} \mathbf{N} \\ \left(\mathbf{b}_{c_1}^\dagger \cdot \mathbf{b}^{c_2} \right) &= \sum_{\alpha N l j \lambda f} \mathbf{b}_{\alpha(Nl, \frac{1}{2}) j \lambda c_1 f}^\dagger \mathbf{b}^{\alpha(Nl, \frac{1}{2}) j \lambda c_2 f} \\ \mathbf{N} &= \sum_{\alpha N l j \lambda c f} \mathbf{b}_{\alpha(Nl, \frac{1}{2}) j \lambda c f}^\dagger \mathbf{b}^{\alpha(Nl, \frac{1}{2}) j \lambda c f}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde $\mathbf{C}_{c_1}^{c_2}$ es el generador de color del grupo SU(3) en la representación desacoplada.

Para hacer la conexión entre el Hamiltoniano de Coulomb de cuarks efectivo que se ha obtenido en la ecuación (5.13) y el operador de Casimir de SU(3), es necesario hacer varios desarrollos. El

primero de ellos es considerar la representación acoplada del generador, la cual se escribe de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_C^{(1,1)} &= \sum_{c_1 c_2} \langle (1,0)c_1, (0,1)\bar{c}_2 | (1,1)C \rangle \mathbf{C}_{c_1 \bar{c}_2} \\ &= \sum_{c_1 c_2} \langle (1,0)c_1, (0,1)\bar{c}_2 | (1,1)C \rangle \left\{ (\mathbf{b}_{c_1}^\dagger \cdot \mathbf{b}_{\bar{c}_2}) - \frac{\delta_{c_1 c_2} (-1)^{\chi_{c_2}}}{3} \mathbf{N} \right\}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

El segundo término del operador de Casimir en la representación acoplada es igual a cero, esto es,

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{3} \sum_{c_1 c_2} (-1)^{\chi_{c_2}} \delta_{c_1 c_2} \langle (1,0)c_1; (0,1)\bar{c}_2 | (1,1)C \rangle \mathbf{N} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{c_1 c_2} \langle (1,0)c_1; (0,1)\bar{c}_2 | (0,0)0 \rangle \langle (1,0)c_1; (0,1)\bar{c}_2 | (1,1)C \rangle \mathbf{N} = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

A continuación se muestra como escribir el operador de Casimir de $SU(3)$ en la representación acoplada, para después relacionarlo con el Hamiltoniano de Coulomb de cuarks efectivo. Considerese el operador

$$\begin{aligned} &\sum_C (-1)^{\chi_C} \mathbf{C}_C^{(1,1)} \mathbf{C}_{\bar{C}}^{(1,1)} \\ &= \sum_C (-1)^{\chi_C} \sum_{c_1 c_2} \sum_{c_3 c_4} \langle (1,0)c_1, (0,1)\bar{c}_2 | (1,1)C \rangle \langle (1,0)c_3, (0,1)\bar{c}_4 | (1,1)\bar{C} \rangle \mathbf{C}_{c_1 \bar{c}_2} \mathbf{C}_{c_3 \bar{c}_4}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde $(-1)^{\chi_C} = (-1)^{\chi_{c_1}} (-1)^{\chi_{c_2}}$ y $\langle (1,0)c_3, (0,1)\bar{c}_4 | (1,1)\bar{C} \rangle = \langle (1,0)c_4, (0,1)\bar{c}_3 | (1,1)C \rangle$. Para mostrar la conexión con el operador de Casimir de $SU(3)$ se usa la regla de ortogonalidad de los coeficientes de Clebsch-Gordon de $SU(3)$ [34], esto es,

$$\begin{aligned} &\sum_{(\lambda, \mu)C} \langle (1,0)c_1; (0,1)\bar{c}_2 | (\lambda, \mu)C \rangle \langle (1,0)c_4; (0,1)\bar{c}_3 | (\lambda, \mu)C \rangle \\ &= \sum_C \langle (1,0)c_1; (0,1)\bar{c}_2 | (1,1)C \rangle \langle (1,0)c_4; (0,1)\bar{c}_3 | (1,1)C \rangle \\ &+ \langle (1,0)c_1; (0,1)\bar{c}_2 | (0,0)0 \rangle \langle (1,0)c_4; (0,1)\bar{c}_3 | (0,0)0 \rangle \\ &= \delta_{c_1 c_4} \delta_{c_2, c_3}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Por tanto, la relación necesaria para hacer la conexión con el operador de Casimir de SU(3) es la siguiente

$$\sum_C \langle (1, 0)_{c_1}; (0, 1)_{\bar{c}_2} | (1, 1)C \rangle \langle (1, 0)_{c_4}; (0, 1)_{\bar{c}_3} | (1, 1)C \rangle = \delta_{c_1 c_4} \delta_{c_2 c_3} - \frac{(-1)^{\chi_{c_1}} (-1)^{\chi_{c_4}}}{3} \delta_{c_1 c_2} \delta_{c_3 c_4} \quad (5.19)$$

con lo cual,

$$\begin{aligned} \sum_C (-1)^{\chi_C} \mathbf{C}_C^{(1,1)} \mathbf{C}_{\bar{C}}^{(1,1)} &= \sum_{c_1 c_2} \mathbf{C}_{c_1}^{c_2} \mathbf{C}_{c_2}^{c_1} - \frac{1}{3} \sum_{c_1 c_3} \mathbf{C}_{c_1}^{c_3} \mathbf{C}_{c_3}^{c_1} \\ &= \frac{2}{3} \mathbf{C}_2(SU(3)) \end{aligned} \quad (5.20)$$

donde se uso que los generadores del grupo SU(3) tienen traza cero.

Por otro lado, escribiendo de forma explicita el producto

$$\begin{aligned} &\sum_C (-1)^{\chi_C} \mathbf{C}_C^{(1,1)} \mathbf{C}_{\bar{C}}^{(1,1)} \\ &= \sum_C \sum_{c_1 c_2 c_3 c_4} (-1)^{\chi_C} \langle (1, 0)_{c_1}, (0, 1)_{\bar{c}_2} | (1, 1)C \rangle \langle \mathbf{b}_{c_1}^\dagger \cdot \mathbf{b}_{\bar{c}_2} \rangle \langle (1, 0)_{c_3}, (0, 1)_{\bar{c}_4} | (1, 1)\bar{C} \rangle \langle \mathbf{b}_{c_3}^\dagger \cdot \mathbf{b}_{\bar{c}_4} \rangle \\ &= \sum_C \sum_{c_1 c_2 c_3 c_4} \sum_{\alpha N_1 l_1 j_1 \lambda_1 f} \sum_{\alpha' N_3 l_3 j_3 \lambda_3 f'} (-1)^{\chi_C} \langle (1, 0)_{c_1}, (0, 1)_{\bar{c}_2} | (1, 1)C \rangle \langle (1, 0)_{c_3}, (0, 1)_{\bar{c}_4} | (1, 1)\bar{C} \rangle \\ &\quad (-1)^{\chi_{c_2}} (-1)^{\chi_{c_4}} \mathbf{b}_{\alpha(N_1, l_1, \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c_1 f}^\dagger \mathbf{b}^{\alpha(N_1, l_1, \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c_2 f} \mathbf{b}_{\alpha'(N_3, l_3, \frac{1}{2}) j_3 \lambda_3 c_3 f'}^\dagger \mathbf{b}^{\alpha'(N_3, l_3, \frac{1}{2}) j_3 \lambda_3 c_4 f'} \\ &= \sum_C \sum_{c_1 c_2 c_3 c_4} \sum_{\alpha N_1 l_1 j_1 \lambda_1 f} \sum_{\alpha' N_3 l_3 j_3 \lambda_3 f'} (-1)^{\chi_C} \langle (1, 0)_{c_1}, (0, 1)_{\bar{c}_2} | (1, 1)C \rangle \langle (1, 0)_{c_3}, (0, 1)_{\bar{c}_4} | (1, 1)\bar{C} \rangle \\ &\quad (-1)^{\frac{1}{2}-\alpha} (-1)^{j_1-\lambda_1} (-1)^{\frac{1}{2}-f} (-1)^{\frac{1}{2}-\alpha'} (-1)^{j_3-\lambda_3} (-1)^{\frac{1}{2}-f'} \\ &\quad \mathbf{b}_{\alpha(N_1, l_1, \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c_1 f}^\dagger \mathbf{b}_{-\alpha(N_1, l_1, \frac{1}{2}) j_1-\lambda_1 \bar{c}_2-f} \mathbf{b}_{\alpha'(N_3, l_3, \frac{1}{2}) j_3 \lambda_3 c_3 f'}^\dagger \mathbf{b}_{-\alpha'(N_3, l_3, \frac{1}{2}) j_3-\lambda_3 \bar{c}_4-f'} \\ &= \sum_C \sum_{c_1 c_2 c_3 c_4} \sum_{\alpha N_1 l_1 j_1 \lambda_1 f} \sum_{\alpha' N_3 l_3 j_3 \lambda_3 f'} (-1)^{\chi_C} \langle (1, 0)_{c_1}, (0, 1)_{\bar{c}_2} | (1, 1)C \rangle \langle (1, 0)_{c_3}, (0, 1)_{\bar{c}_4} | (1, 1)\bar{C} \rangle \\ &\quad (-1)^{\frac{1}{2}-\alpha} (-1)^{\frac{1}{2}-f} (-1)^{\frac{1}{2}-\alpha'} (-1)^{\frac{1}{2}-f'} \sqrt{2j_1+1} \sqrt{2j_3+1} \langle j_1 \lambda_1, j_1-\lambda_1 | 00 \rangle \langle j_3 \lambda_3, j_3-\lambda_3 | 00 \rangle \\ &\quad \mathbf{b}_{\alpha(N_1, l_1, \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c_1 f}^\dagger \mathbf{b}_{-\alpha(N_1, l_1, \frac{1}{2}) j_1-\lambda_1 \bar{c}_2-f} \mathbf{b}_{\alpha'(N_3, l_3, \frac{1}{2}) j_3 \lambda_3 c_3 f'}^\dagger \mathbf{b}_{-\alpha'(N_3, l_3, \frac{1}{2}) j_3-\lambda_3 \bar{c}_4-f'} \quad \cdot \end{aligned} \quad (5.21)$$

Por tanto, de las ecuaciones (5.13), (5.20) y (5.21) se puede ver que

$$\mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q}(V_0) = \frac{3}{2}(2V_0) \sum_C (-1)^{\chi_C} \mathbf{C}_C^{(1,1)} \mathbf{C}_{\bar{C}}^{(1,1)} = (2V_0) \mathbf{C}_2(SU(3)) \quad (5.22)$$

El desarrollo matemático puede ser muy tedioso, pero la estructura del resultado es muy importante, pues se conoce el valor propio del operador de Casimir de $SU(3)$ [34], el cual viene dado por

$$(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3\lambda + 3\mu) \quad (5.23)$$

lo que implica que la energía correspondiente al Hamiltoniano de Coulomb efectivo viene dada por

$$E_{Coulomb}^{q-q}(V_0) = (2V_0) (\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3\lambda + 3\mu). \quad (5.24)$$

Por tanto, los estados con representación $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ correspondientes a estados sin color (estados físicos) no contribuyen a la energía del sistema de cuarks. Por otro lado, los estados con representación $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tienen una energía determinada en principio por el valor de V_0 ; estos estados con color simplemente corresponden a una energía alta, por tanto, la acción del Hamiltoniano de Coulomb efectivo es la de separar estados con color de estados sin color. Existen otros modelos de cuarks no relativistas, [49], que de forma fenomenológica introducen los operadores de Casimir de primer y segundo orden de $SU(3)$ que puedan conducir a la solución del problema de confinamiento. Como resultado de estas suposiciones se genera la separación de estados sin color, de estados con color de la misma forma que lo hace la ec. (5.22).

Recapitulando, en los capítulos 3 y 4, se obtuvieron soluciones analíticas para diferentes sistemas de cuarks. En dichos capítulos, los Hamiltonianos efectivos encontrados conmutan con el Hamiltoniano de Coulomb de cuarks efectivo, ec. (5.13), esto es, se pueden resolver de forma simultánea. El principal resultado que se puede mencionar es que las energías de excitación que tienen que ver directamente con el espectro de hadrones son las energías que se obtienen del Hamiltoniano de Cuarks, \mathbf{H}_q ; ya que el Hamiltoniano de Coulomb, $\mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q}(V_0)$, simplemente separa estados con color de estados sin color y donde los estados sin color (físicos) están degenerados en espín y sabor a las energías que se obtienen del Hamiltoniano de Cuarks.

5.3. Hamiltoniano de Coulomb Efectivo para Cuarks y Gluones

En esta sección se introducen los gluones de forma dinámica por primera vez en este modelo. La forma de introducir gluones debe hacerse con cuidado, pues la Cromodinámica Cuántica no es una teoría sencilla. La primera forma en que se incorporan los gluones de forma dinámica al modelo es a través de la densidad de carga gluónica $\rho_a^g(\mathbf{r}) = \sum_{bc} f_{abc} \mathbf{A}_b(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{\Pi}_c(\mathbf{r})$, ec. (2.30), donde $\mathbf{A}_b(\mathbf{r})$ es el campo gluónico que satisface la norma de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A}_b(\mathbf{r}) = 0$) y $\mathbf{\Pi}_c(\mathbf{r})$, es el momento conjugado de $\mathbf{A}_b(\mathbf{r})$. Los factores f_{abc} son las constantes de estructura del grupo de color SU(3) [50].

En esta sección se desea mostrar que efectos produce el hecho de incluir la densidad de carga de color de gluones en el Hamiltoniano de Coulomb, ec. (5.22). Para este propósito, se muestra que la densidad de carga de color total, esto es, la densidad de carga de color de cuarks más la densidad de carga de color de gluones satisface el álgebra de generadores del grupo SU(3). Este resultado es muy útil ya que al igual que en la sección anterior el potencial de interacción entre las densidades de carga (totales) se modela por una interacción promedio V_0 . De esta forma, el Hamiltoniano de Coulomb puede escribirse como el producto de dos generadores del grupo de SU(3) lo cual corresponde al operador de Casimir de dicho grupo, cuyo valor propio se conoce y su función es la de separar estados de color de aquellos sin color.

El álgebra de los generadores de SU(3), [23], [51], requiere satisfacer la siguiente regla de conmutación:

$$[\mathcal{G}_a(\mathbf{r}), \mathcal{G}_b(\mathbf{r}')] = if_{abc} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathcal{G}_c(\mathbf{r}) \quad (5.25)$$

donde $\mathcal{G}_a(\mathbf{r})$, es el generador de grupo SU(3). Lo que se desea demostrar es que la densidad de carga de color total se comporta como el generador del grupo, esto es,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_a(\mathbf{r}) &\equiv \rho_a(\mathbf{r}) \\ &= \rho_a^g(\mathbf{r}) + \rho_a^q(\mathbf{r}) \\ &= f_{abc} \mathbf{A}_b(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{\Pi}_c(\mathbf{r}) + \psi^\dagger(\mathbf{r}) T_a \psi(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Por tanto, el Hamiltoniano de Coulomb efectivo para el caso de cuarks y gluones en la aproximación de interacción promedio, $\mathbf{H}_{Coulomb}^{qq-qq}(V_0)$, está dado por

$$\mathbf{H}_{Coulomb}^{qq-qq}(V_0) = \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \mathcal{G}_a(\mathbf{r})V_0\mathcal{G}_a(\mathbf{r}'), \quad (5.27)$$

donde hay que señalar que para esta demostración no se está haciendo distinción entre índices covariantes y contravariantes, por lo que se trabaja en componentes cartesianos. Si se desea hacer la demostración en componentes esféricos, es necesario cambiar todas las constantes de estructura por coeficientes Clebsch-Gordan de SU(3), [34], cuya manipulación es más elaborada que si se trabaja con las constantes de estructura f_{abc} .

La demostración completa se muestra en el Apéndice D.2.1, por lo que en esta sección solamente se muestran los resultados más importantes y sus implicaciones. El conmutador entre las densidades de carga total viene dado por.

$$[\rho_a(\mathbf{r}), \rho_{a'}(\mathbf{r}')] = [f_{abc}A_{i,b}(\mathbf{r})\Pi_{i,c}(\mathbf{r}), f_{a'de}A_{j,d}(\mathbf{r}')\Pi_{j,e}(\mathbf{r}')] + [\psi^\dagger(\mathbf{r})T_a\psi(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')T_{a'}\psi(\mathbf{r}')] \quad (5.28)$$

donde

$$\begin{aligned} [f_{abc}A_{i,b}(\mathbf{r})\Pi_{i,c}(\mathbf{r}), f_{a'de}A_{j,d}(\mathbf{r}')\Pi_{j,e}(\mathbf{r}')] &= if_{aa'a''}f_{a''dc}\mathbf{A}_d(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{\Pi}_c(\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= if_{aa'a''}\rho_{a''}^g(\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Para este resultado se ha hecho uso de las reglas de conmutación entre los campos transversales $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ y su momento conjugado $\mathbf{\Pi}(\mathbf{r})$. Para las constantes de estructura se ha usado la propiedad de antisimetría y de la identidad de Jacobi, [52]; usando además, la convención de Einstein para los índices repetidos.

El conmutador para las densidades de carga de color de cuarks viene dado por

$$\begin{aligned} [\psi^\dagger(\mathbf{r})T_a\psi(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')T_{a'}\psi(\mathbf{r}')] &= if_{aa'a''}\psi^\dagger(\mathbf{r})T_{a''}\psi(\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= if_{aa'a''}\rho_{a''}^q(\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (5.30)$$

donde se ha usado las reglas de conmutación para campos fermiónicos y el álgebra de los generadores T_a .

La densidad de carga de color total, satisface el álgebra de generadores del grupo SU(3) y por tanto, es el generador del grupo de color.

$$[\rho_a(\mathbf{r}), \rho_{a'}(\mathbf{r}')] = if_{aa'a''}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho_{a''}(\mathbf{r}) \quad (5.31)$$

Ahora, el Hamiltoniano de Coulomb considerado en este trabajo puede escribirse como el cuadrado del generador de color total (cuarks más gluones), esto es, como un operador de Casimir del grupo de color total SU(3). Para mayor detalle de la deducción del álgebra de generadores de SU(3) se recomienda ver el Apéndice D.2.1. Finalmente,

$$H_{Coulomb}^{gg-qq}(V_0) = \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \rho_a(\mathbf{r})V_0\rho^a(\mathbf{r}') = (2V_0)\mathcal{C}_T(SU(3)) \quad (5.32)$$

El resultado obtenido para el Hamiltoniano de Coulomb efectivo para cuarks y gluones bajo la aproximación de interacción constante, ec. (5.32), permite determinar de forma inmediata el valor propio de un estado con representación de color total (λ_T, μ_T) para cuarks y gluones. La energía correspondiente al Hamiltoniano de Coulomb de cuarks y gluones, viene dada por

$$E_{Coulomb}^{gg-qq} = (2V_0) (\lambda_T^2 + \lambda_T\mu_T + \mu_T^2 + 3\lambda_T + 3\mu_T), \quad (5.33)$$

con lo que la acción de éste, es la de separar estados (de cuarks y gluones) con color de aquellos sin color al igual que se había observado en el caso del modelo puramente de cuarks.

5.4. Posibles Extensiones del Hamiltoniano de Coulomb

Se ha discutido en las secciones anteriores la estructura del Hamiltoniano de Coulomb, cuando se aproxima el potencial de interacción por una interacción promedio, tanto para el caso de la interacción entre densidades de carga de color puramente de cuarks, así como para el caso de la interacción entre densidades de carga de color total (cuarks más gluones). Con estos dos resultados se procede en los capítulos siguientes a hacer un análisis del espectro de hadrones que puede generar el modelo.

Por otro lado, surge la pregunta de qué pasa si el potencial de interacción no se considera una interacción promedio. Para esta pregunta no existe una respuesta concreta por lo complicado que puede volverse la interacción, ec. (5.1). Un camino a seguir es hacer una expansión del núcleo de la integral de la ec. (5.1) en potencias del campo gluónico, manteniendo la consideración general de un volumen finito para considerar el confinamiento. Este camino claramente dificulta la búsqueda de posibles soluciones analíticas para la Cromodinámica Cuántica a bajas energías. Sin embargo, es una aproximación que toma en cuenta los gluones de forma dinámica en el potencial de interacción.

Aunque se gana en la parte física al incluir de forma dinámica los gluones en el potencial de interacción, se tiene la desventaja de que la expansión tendrá potencias tanto de g como del campo gluónico, donde por un lado la constante de interacción fuerte en el caso no perturbativo es mayor que uno y que no se tiene en este modelo una forma de trabajar potencias del campo gluónico mayores a dos. Estos inconvenientes, no surgen al considerar una interacción promedio V_0 , pues la constante de interacción fuerte se absorbe en el factor V_0 , el cual simplemente indica la energía a la cual se manda a los estados con color, esto es, estados no físicos y por tanto, no hay que preocuparse de la convergencia.

Otra posibilidad es considerar un potencial confinante en todo el espacio. Un ejemplo de éste es el ya antes mencionado $-\frac{a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + b|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, el cual es un potencial atractivo para todo r , sin embargo, para modelar el confinamiento, esto es, considerar que cuanto más se quiera separar a los cuarks, la energía sea tan grande que es posible generar otro hadrón. Por tanto, el intervalo en que se debe trabajar este tipo de potencial confinante es reducido, cuando se este describiendo estados ligados.

En el caso que se ha considerado una interacción promedio V_0 , este es un valor que gracias a la estructura final que se obtiene del Hamiltoniano de Coulomb, no es necesariamente un parámetro que se tenga que ajustar. Por lo que una desventaja de considerar este tipo de potenciales confinantes es el hecho del número de parámetros que se deben introducir.

Capítulo 6

Modelo de Gluones para la Cromodinámica Cuántica

Aunque aún pueden hacerse varias cosas en el sector de cuarks como: extender el número de niveles orbitales, estudiar el comportamiento de los estados de energía más bajos al incluir más niveles orbitales, calcular niveles de energía para momentos angulares mayores (espín total- j mayor), posibles rompimientos de la degeneración de las soluciones- $\alpha\beta - BCS$, entre otros. Algunas de estas posibilidades se han abordado y se mostrarán en el capítulo 8, sin embargo, en este capítulo se ha decidido estudiar el sector gluónico con un enfoque semejante al utilizado para cuarks.

En este capítulo se introducen los gluones a este modelo de la Cromodinámica Cuántica a bajas energías. Para hacer una descripción del Hamiltoniano de Gluones de la Cromodinámica Cuántica en este modelo, es necesario; primero fijar una norma, para lo cual se ha elegido trabajar en la norma de Coulomb y segundo escoger una base completa en la cual se haga la expansión del campo gluónico. Se podría trabajar en la misma base de oscilador armónico utilizada para la descripción de cuarks. Sin embargo, el primer paso en este modelo es tomar el Hamiltoniano de gluones a orden cero en la constante de interacción fuerte de la referencia [13], por lo que es conveniente utilizar como base las soluciones al problema de la caja esférica. En este sentido se hace una breve introducción al problema cuántico de la caja esférica.

Antes de mostrar la expansión de los campos gluónicos en la base de caja esférica, se hace una pequeña discusión sobre la implicación de considerar el problema de la caja esférica para cuarks.

Para el caso de cuarks analizado en los capítulos 3 y 4, se hizo la expansión de los campos fermiónicos en la base del oscilador armónico isotrópico en tres dimensiones. La razón de esto fue que el término cinético de cuarks tiene soluciones analíticas en el caso (sin masa) de dos y tres niveles y que debido al número finito de posibles conexiones entre los estados, se pudo resolver de forma analítica el caso de un número arbitrario de niveles orbitales. Al respecto, se investigó la estructura del término cinético de cuarks en la base que es solución al problema de la caja esférica; encontrándose que existen muchas más conexiones que en el caso del oscilador armónico, pero, las conexiones dominantes corresponden a las mismas del oscilador armónico y las demás conexiones son del orden del 10% o menos de las contribuciones dominantes. Por tales razones, resolver el término cinético de cuarks en la base de la caja esférica habría sido algo aproximado y no analítico.

Se ha decidido trabajar en la base de la caja esférica la parte gluónica, por dos razones. La primera es que la descripción de los gluones y los estados gluónicos conllevan en general a elegir un parámetro diferente de confinamiento. La segunda razón, es que una vez deducido el Hamiltoniano de gluones efectivo en la base del oscilador armónico habría que hacer una diagonalización de éste, ya sea numérica o bien tipo BCS, mientras que en la base de la caja esférica, la estructura del término cinético de gluones considerado en este modelo tiene una estructura diagonal como se muestra en la sección 6.3.

6.1. Caso Cuántico de una Caja Esférica

El problema de la caja esférica [53] descrito por la mecánica cuántica, corresponde a considerar una caja de radio R_e , de paredes rígidas e infinitas. Dada la simetría esférica del problema, el uso de coordenadas esféricas para la solución de la ecuación de Schrodinger es la ideal. El problema físico se puede plantear de forma única mediante la ecuación de Schrodinger y las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned}
 \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(r, \hat{\mathbf{r}}) &= E \psi(r, \hat{\mathbf{r}}) \\
 \psi(r \leq R_e) &: \textit{ finita} \\
 \psi(R_e) &= 0 \quad .
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

La solución de esta ecuación a través del método de separación de variables, lleva a escribir la función de onda como el producto de una función radial y una función angular, $\psi(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$,

donde la solución angular corresponde a los armónicos esféricos, ya que es la solución a la parte angular de cualquier problema con simetría esférica y donde el potencial no dependa de las coordenadas angulares. En este caso el término del potencial se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} V(r < R_e) &= 0 \\ V(r > R_e) &= \infty. \end{aligned} \quad (6.2)$$

La ecuación radial resultante de la separación de variables viene dada por:

$$\frac{d^2}{dr^2} R_{Nl}(r) + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} R_{Nl}(r) + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{Nl}(r) = 0, \quad (6.3)$$

la cual corresponde a la parte radial de la ecuación de Helmholtz, $(\nabla^2 + k^2)u(\mathbf{r}) = 0$, identificando $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, cuya solución más general puede escribirse como una combinación lineal de funciones Bessel esféricas

$$u(r) = A j_l(kr) + B n_l(kr). \quad (6.4)$$

Por tanto, la solución a la ecuación de Schrodinger correspondiente al problema de la caja esférica se escribe de la siguiente forma

$$\psi(r, \theta, \phi) = N j_l(k_{Nl}r) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (6.5)$$

la cual, es solución de la ecuación de Helmholtz imponiendo que la solución sea finita en cero. Estas soluciones serán referidas más adelante como las soluciones a la ecuación de Helmholtz.

6.2. Operadores Bosónicos y Números Cuánticos

La inclusión de gluones de forma dinámica se realizó de cierta forma en la densidad de carga de gluones, sin embargo, no hubo en ese momento la necesidad de introducir la cuantización del campo gluónico $\mathbf{A}^C(\mathbf{r})$, ni de su momento conjugado $\mathbf{\Pi}_C(\mathbf{r})$. Estos campos son campos bosónicos que al trabajar en la norma de Coulomb contienen solo componentes transversales. Su cuantización involucra la expansión en una base completa y cuyos coeficientes de expansión son los operadores de creación $\beta_{(N,L,1)JMC}^\dagger$ y de aniquilación $\beta^{\Xi:(N,L,1)JMC}$ bosónicos. Estos operadores bosónicos satisfacen las siguientes reglas de conmutación:

$$\begin{aligned}
 \left[\beta^{\Xi';(N',L',1)J'M'C'}, \beta_{(N,L,1)JMC}^{\dagger \Xi} \right] &= \delta_{\Xi'\Xi} \delta_{N'N} \delta_L^{L'} \delta_J^{J'} \delta_M^{M'} \delta_C^{C'} \\
 \left[\beta^{\Xi';(N',L',1)J'M'C'}, \beta^{\Xi;(N,L,1)JMC} \right] &= 0 \\
 \left[\beta_{(N',L',1)J'M'C'}^{\dagger \Xi'}, \beta_{(N,L,1)JMC}^{\dagger \Xi} \right] &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Los índices en los operadores bosónicos indican: Ξ , el componente eléctrico (e) o magnético (m) de los campos gluónicos. La notación $(N, L, 1)JMC$, es la notación acoplada al igual que en el caso de cuarks. Esta notación indica: N es el número principal, el cual al estar trabajando en la base de la caja esférica corresponde al orden de las raíces de las funciones Bessel, L es el momento angular del gluón, el cual está descrito por un campo bosónico de espín 1, es por esto que se usa la notación $(N, L, 1)$ para describir la creación o aniquilación de una partícula bosónica. Por otro lado, al utilizar la representación acoplada de los operadores bosónicos, se tiene que el acoplamiento entre el momento angular y el momento angular intrínseco (espín) del gluón da el momento angular total J , así como su componente magnético M . Por último se tiene el índice de color C , el cual es una abreviación para un índice de $SU(3)$ en el espacio de color, para el cual se tiene $C = \{Y_C, I_C, I_{Z_C}\}$, donde Y_C es la hipercarga de color, I_C en isoespín de color e I_{Z_C} es la componente Z del isoespín de color. El gluón pertenece a la representación octete de $SU(3)$, por lo que su representación es $(\lambda, \mu) = (1, 1)$. Por último, el cómo subir o bajar índices en los operadores bosónicos se define en la siguiente sección ya que los operadores deben transformar de la misma forma que lo hace el estado perteneciente al espacio de Hilbert, por tal motivo, una vez que se defina la base solución del problema de caja esférica y sus propiedades de transformación bajo conjugación, se pueden definir las propiedades de transformación de los operadores bosónicos.

6.3. Gluones en una Caja Esférica

El Hamiltoniano de gluones a orden cero motivado de la Cromodinámica Cuántica, [13], consta de dos términos, ambos modelan la parte dinámica de gluones. El primero de ellos corresponde a la energía del campo gluónico conjugado $\mathbf{\Pi}^C(\mathbf{x})$ y el segundo corresponde al término dinámico de gluones correspondiente a dos campos gluónicos.

Se utiliza para la parte gluónica del modelo la siguiente notación: letras mayúsculas para los números cuánticos que describen al campo gluónico, así como al campo conjugado gluónico. Los componentes del campo gluónico en la norma de Coulomb (norma transversal), esto es, la componente eléctrica del campo de norma, $(\mathbf{A}^C, \mathbf{e}(\mathbf{r}))$ y la componente magnética campo de norma, $(\mathbf{A}^C, \mathbf{m}(\mathbf{r}))$ vienen descritos por el índice $\Xi = \mathbf{e}, \mathbf{m}$.

El Hamiltoniano de gluones que se trabaja en este modelo está dado por, [13]:

$$\mathbf{H}_{gluon} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \mathbf{\Pi}^2(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (6.7)$$

donde el producto punto de la ec. (6.7), se refiere al producto punto vectorial y al producto punto en el espacio de color. Por tanto, se tiene que: $\mathbf{\Pi}(\mathbf{r})^2 = \sum_C (-1)^{\chi_C} \mathbf{\Pi}_C(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{\Pi}_{\bar{C}}(\mathbf{r})$, y $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_C \mathbf{A}^C(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{A}_C(\mathbf{r})$ donde, el producto punto dentro de las sumas se refiere al producto punto en los componentes espaciales y $\bar{C} = \{-Y_C, I_C, -I_{Z_C}\}$.

La expansión del campo gluónico en una caja esférica considerando la norma de Coulomb es similar a la hecha por R. Buser [19], pero eliminando el campo longitudinal, esto es, considerar únicamente las componentes transversales del campo gluónico y su conjugado:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^C(\mathbf{r}) &= \sum_{\Xi N L J M} \frac{1}{\sqrt{2\Omega_{(N,L,1)J}^{\Xi}}} \mathbf{f}_{(N,L,1)JM}^{\Xi}(\mathbf{r}) \left(\beta_{\Xi;(N,L,1)JMC}^{\dagger} + \beta_{\Xi;(N,L,1)JMC}^{\Xi} \right) \\ \mathbf{\Pi}_C(\mathbf{r}) &= \sum_{\Xi N L J M} i \sqrt{\frac{\Omega_{(N,L,1)J}^{\Xi}}{2}} \mathbf{f}_{(N,L,1)JM}^{*\Xi}(\mathbf{r}) \left(\beta_{(N,L,1)JMC}^{\dagger \Xi} - \beta_{(N,L,1)JMC}^{\Xi} \right). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Debido que el índice Ξ no corresponde a los números magnéticos de algún espín, no tiene porque definirse una convención para transformar de índices contravariantes a covariantes. Lo mismo pasa para el número principal N , sin embargo, para los demás índices L, J, M, C , se debe definir como pasar de índices contravariantes a covariantes. La convención para los índices de espín y momento angular, vienen definidos por las funciones base, para las cuales se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\Xi;(N,L,1)JM}(\mathbf{r}) &= \frac{N_{\Xi;(N,L,1)J}}{R_e^{\frac{3}{2}}} \frac{\alpha_{JL}^{\Xi}}{\sqrt{2J+1}} j_L(\Omega_{(N,L,1)J}^{\Xi} r) \mathbf{T}_{JLM}(\hat{\mathbf{r}}) \\ \mathbf{f}_{(N,L,1)JM}^{*\Xi}(\mathbf{x}) &= (-1)^{J+L+1+M} \mathbf{f}_{(N,L,1)J-M}^{\Xi}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (6.9)$$

donde las funciones $\mathbf{T}_{JLM}(\hat{\mathbf{r}})$ son los armónicos esféricos vectoriales, los cuales están definidos de la siguiente forma:

$$\mathbf{T}_{JLM}(\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{m\mu} \langle Lm, 1\mu | JM \rangle Y_{LM}(\hat{\mathbf{r}}) \boldsymbol{\xi}_\mu . \quad (6.10)$$

Esto define la transformación de los operadores bosónicos:

$$\boldsymbol{\beta}^{\dagger \Xi; (N,L,1)JMC} = (-1)^{J+L+M+1} (-1)^{\chi_C} \boldsymbol{\beta}_{(N,L,1)J-M\bar{C}}^{\dagger \Xi} \quad (6.11)$$

y de forma semejante para los operadores de aniquilación. Se tomó la convención de Draayer [34] para subir o bajar los índices de color.

Los factores que aparecen en la ecuación (6.9), están definidos de la siguiente forma: $\Omega_{NJM}^{\Xi} = \frac{\mathcal{L}_{NJM}^{\Xi}}{R_c}$ donde \mathcal{L}_{NJM}^{Ξ} son las raíces de las funciones Bessel esféricas y Ω_{NJM}^{Ξ} las energías de la ecuación de Helmholtz. Para garantizar la ortogonalidad de los componentes eléctricos y magnéticos del campo gluónico se tiene: α_{JL}^{Ξ} diferentes de cero son $\alpha_{J,J}^m = \sqrt{2J+1}$, $\alpha_{J,J+1}^e = -\sqrt{J}$ y $\alpha_{J,J-1}^e = \sqrt{J+1}$, para los componentes magnéticos y eléctricos respectivamente.

El campo gluónico, así como su momento conjugado satisfacen la norma de Coulomb, por lo que la regla de conmutación que satisfacen está dada por [13, 23, 54]:

$$[A_\mu^C(\mathbf{r}), \Pi_\nu C'(\mathbf{r}')] = i\delta_{C'}^C \delta_\perp^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (6.12)$$

donde μ y ν indican el componente de la base. La delta transversal de la ec. (6.12) se define como $\delta_\perp^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu}{\nabla^2} \right) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, la cual garantiza que $[\nabla_\mu A_\mu^C(\mathbf{r}), \Pi_\nu C'(\mathbf{r}')] = 0$ y que $[A_\mu^C(\mathbf{r}), \nabla_\nu \Pi_\nu C'(\mathbf{r}')] = 0$, para mayor detalle se sugiere ver el Apéndice E.

La deducción del Hamiltoniano de gluones se muestra en el Apéndice F. Finalmente, usando las expansiones del campo gluónico y el campo conjugado, ecs. (6.8) el Hamiltoniano de gluones a orden cero en la constante de interacción, \mathbf{H}_{gluon} tiene una expresión diagonal dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{gluon} &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \Pi^2(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{\Xi NLJMC} \Omega_{(N,L,1)J}^{\Xi} \left\{ \boldsymbol{\beta}_{(N,L,1)JMC}^{\dagger \Xi} \boldsymbol{\beta}^{\Xi; (N,L,1)JMC} + \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Una vez que el Hamiltoniano de gluones esté actuando en los estados del espacio de Hilbert, la energía correspondiente vendrá dada por las contribuciones eléctrica y magnética de los gluones presentes en dicho estado. Al tratarse de partículas bosónicas, el número de ocupación n_g puede ir de cero a infinito, dando como resultado los cuantos de energía $\sim n_g \Omega_{NJM}^{\Xi}$, por lo que, basta con conocer el número de ocupación n_g y las energías, $\Omega_{(N,L,1)J}^{\Xi}$.

6.4. Estados de Gluones, Glueballs

En el Hamiltoniano de gluones efectivo, falta por ajustar un parámetro, el cual corresponde al radio de la caja esférica, R_e . Para determinar este parámetro, se ajusta el espectro del Hamiltoniano de gluones efectivo, ec. (6.13), a la energía del estado de menor energía reportado en la literatura. Este valor puede variar de método a método [6, 13, 17, 55], sin embargo, el valor reportado se encuentra en el intervalo de $600 - 800 MeV$, para la energía de un gluón. El valor de un par de gluones acoplados a color cero (glueball) corresponde a $1200 - 1600 MeV$.

En los siguientes cálculos se omitirá la constante de energía, pues simplemente desplaza el espectro un valor constante. El estado de menor energía viene dado por el estado con momento angular $L = 0$, lo cual corresponde a la función Bessel esférica $j_0(\Omega_{(1,0,1)1}^e r)$, esto es, la componente eléctrica del campo gluónico. Por tanto, para hacer un primer ajuste a la energía de un gluón a $800 MeV$ se tiene el siguiente ajuste para el radio de la caja:

$$\begin{aligned} \Omega_{(1,0,1)1}^e &= \frac{3,14159}{R_e} = 0,8 GeV \\ \Rightarrow R_e &= 3,9269 GeV^{-1} = 0,775 fm \quad . \end{aligned} \quad (6.14)$$

Sin embargo, se reportan valores entre $600 - 800 MeV$, lo cual implica que el radio de la caja puede variar entre $0,77 - 1,03 fm$. En [56], reportan una masa del gluón del orden de $300 MeV$ al estudiar procesos de interacción entre cuarks charm($1.5 GeV$) y bottom($4.5 GeV$), que al introducir en la ec. (6.14) se tiene un radio del orden de $2 fm$. Un radio de $2 fm$ para el actual modelo de cuarks indica que los estados ligados (mesones/bariones) tienen energías muy pequeñas.

El siguiente estado más bajo posible, corresponde al estado magnético, ($L = 1, J = 1$). Se necesita conocer el primer cero de la función Bessel esférica $j_1(\Omega_{(1,1,1)1}^m r)$ para determinar la masa constituyente del componente magnético. Por tanto, el primer cero de la función Bessel $j_1(\Omega_{(1,1,1)1}^m r)$

es en $\mathcal{L}_{(1,1,1)1}^{\mathbf{m}} = 4,49341$, lo que implica una masa constitutiva del componente magnético es igual a $1,14\text{GeV}$, la cual es aproximadamente 300MeV mayor que el componente eléctrico.

Para deteminar las energías de un estado que contenga dos gluones (glueball), se tienen diferentes posibilidades de acoplamientos. Por ejemplo, el espacio de Fock bosónico para dos gluones se puede escribir como:

$$\beta_{(N_1, L_1, 1)J_1 M_1 C_1}^{\dagger \Xi_1} \beta_{(N_2, L_2, 1)J_2 M_2 C_2}^{\dagger \Xi_2} |\emptyset\rangle \quad (6.15)$$

$$\left[\beta_{(N_1, L_1, 1)J_1}^{\dagger \Xi_1} \otimes \beta_{(N_2, L_2, 1)J_2}^{\dagger \Xi_2} \right]_{M, C}^{J, (\lambda, \mu)} |\emptyset\rangle = \sum_{M_i C_i} \langle J_1 M_1, J_2 M_2 | JM \rangle \langle (\lambda_1, \mu_1) C_1, (\lambda_2, \mu_2) C_2 | (\lambda, \mu) C \rangle \beta_{(N_1, L_1, 1)J_1 M_1 C_1}^{\dagger \Xi_1} \beta_{(N_2, L_2, 1)J_2 M_2 C_2}^{\dagger \Xi_2} |\emptyset\rangle \quad (6.16)$$

donde $i=1,2$. La primera representación ec. (6.15), corresponde a una partícula bosónica en el estado $(N_1, L_1, 1)J_1 M_1 C_1$ y otra en el estado $(N_2, L_2, 1)J_2 M_2 C_2$ sin acoplamientos, esto es, son estados sin espín y color total bien definido. En este caso, puede haber problemas debido a que se podría tener estados sin color y estados con color completamente mezclados, lo cual es un problema si se restringe a un espacio de Hilbert con estados puramente físicos (color total cero). Por otro lado, la segunda representación ec. (6.16), muestra explícitamente todos los posibles acoplamientos tanto en espín como color de tal forma que los estados tienen espín y color total bien definido. En este caso es fácil restringirse al espacio de Hilbert con estados puramente físicos, al pedir que solo existan las representaciones $(\lambda, \mu) = (0, 0)$, lo que implica que $(\lambda_2, \mu_2) = (\mu_1, \lambda_1)$ y que $C_2 = \bar{C}_1$.

Es posible generar estados de glueballs escalares y vectoriales dependiendo del espín total que se considere. También es posible mediante este modelo generar estados con un número mayor de glueballs. Sin embargo, hasta este momento no se han considerado interacciones entre cuarks y gluones, por lo que por un lado se puede generar un espectro para cualquier número de cuarks y gluones independientes. En el capítulo 8, se muestran posibles espectros que incluyen algunas posibles interacciones entre cuarks y gluones en este modelo.

En el siguiente capítulo, se deduce el Hamiltoniano de interacción efectivo que considera interacción entre cuarks y gluones. También se ejemplifican algunas posibilidades de como tratar éste, buscando primero una corrección a la solución- $\alpha\beta - BCS$ encontrada en el capítulo 4.

Capítulo 7

Interacción Cuark-Gluón-Cuark

En los capítulos previos no se trabajó una interacción entre cuarks, anticuarks y gluones a través del espín o el color. Aunque en el capítulo 5, se tenía la interacción entre densidades de carga de color de cuarks y gluones, la estructura final correspondiente a un operador de Casimir de $SU(3)$ no dió más información de como interactúan los cuarks y gluones mediante el color. En este trabajo se ha hecho una separación del H_{CDC} en varios Hamiltonianos, en este capítulo se introduce el Hamiltoniano de interacción H_{int} , con la finalidad de que mediante este modelo (de juguete) se puedan describir de forma cualitativa y de ser posible cuantitativa la interacción entre cuarks y gluones en el regimen no perturbativo de la CDC.

Primeramente en este capítulo, en la sección 7.1 se presenta la estructura del Hamiltoniano de interacción entre cuarks y gluones. Se presentan algunos de los pasos a seguir para la deducción del Hamiltoniano de interacción efectivo que se va a trabajar y la expresión final (la deducción completa se muestra en el Apéndice G). Finalmente, en esta sección se analiza y discute la estructura del Hamiltoniano efectivo de interacción, así como la estrategia a seguir en la búsqueda de posibles soluciones al Hamiltoniano efectivo de interacción que den como consecuencia correcciones a las energías hadrónicas dadas por las soluciones- $\alpha\beta - BCS$. El nivel de esta búsqueda es de tipo "prueba", no fundamental, aunque la búsqueda actual puede ser el primer escalón en este modelo para caminos de solución futuros, indicando hacia donde avanzar, así como bosquejar los pros y contras de las aproximaciones hechas. Detalles y conclusiones de estos métodos se presentarán en trabajos subsecuentes.

El Hamiltoniano de interacción efectivo deducido en la sección 7.1 es general y complicado de resolver de forma exacta. Por tanto, en la sección 7.2, se describen propiedades de un primer estado de prueba, que ayude a calcular correcciones a las energías- $\alpha\beta - BCS$.

En la sección 7.3, se aplican las aproximaciones consideradas en las secciones previas para trabajar el Hamiltoniano de interacción, en busca de estructuras analíticas o semi-analíticas. Una aproximación es, por ejemplo, considerar solo los dos niveles orbitales más bajos en el sector de cuarks así como un nivel de gluones y solo ciertos componentes del gluón. En este sentido se puede pensar que se está trabajando en un sistema intrínseco (para el espacio de color del gluón), donde una componente del gluón es preferente. La ventaja de usar esta aproximación, es que si la componente del gluón preferente es alguna de las componentes $\{Y_C = 0, I_C, I_{Z_C} = 0\}$ la corrección a las soluciones- $\alpha\beta - BCS$ es fácil de calcular. Esto puede dar una idea de las posibles correcciones a las energías hadrónicas encontradas en el capítulo 4.

7.1. Hamiltoniano de Interacción Efectivo

El Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica en la norma de Coulomb que se ha estado trabajando, está dividido en dos partes. La primera de ellas se puede denotar por H_0 , en el sentido de que es a orden cero en la constante de interacción fuerte. La segunda parte, son todos los términos que involucran cualquier potencia de la constante de interacción fuerte. En este capítulo, se trata lo que se ha denominado como Hamiltoniano de interacción, (\mathbf{H}_{int}), pues considera la interacción de los cuarks y anti-cuarks con el campo gluónico y corresponde a la potencia más baja en la constante de interacción fuerte.

El término de interacción entre cuarks y gluones viene dado por:

$$\mathbf{H}_{int} = -g \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}). \quad (7.1)$$

La deducción del Hamiltoniano de interacción se muestra en el Apéndice G. El resultado final de esta deducción, ec. (G.13), es general. Aquí únicamente se presentan ciertos pasos que se considera necesitan explicarse.

A continuación se describen ciertas características que surgen de este Hamiltoniano de interacción, ec. (7.1): La primera de ellas, es la acción del factor $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$, que por un lado actúa vectorialmente sobre el campo gluónico $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ y por otro lado actúa de forma matricial sobre los espinores de los campos fermiónicos. La segunda característica importante de este Hamiltoniano es el espacio de Hilbert para los estados de color, pues este término también mezcla color entre las representaciones $(\lambda, \mu) = (1, 0)$, $(\lambda, \mu) = (0, 1)$ de cuarks y anti-cuarks respectivamente y la representación $(\lambda, \mu) = (1, 1)$ del gluón. Por estas razones se denota el término $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left[\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})_c^{c'} \right]_{\sigma', \sigma}$, donde c y c' son la abreviatura de los números cuánticos (Y_C, I_C, I_{Z_C}) con Y_C la hipercarga de color, I_C el isospín de color e I_{Z_C} su tercera componente de isospín de color. Así mismo σ y σ' denotan las componentes magnéticas de los espinores $\chi_{\sigma'}^\dagger$ y χ_σ de los campos $\psi^\dagger(\mathbf{r}, \sigma', c', f)$ y $\psi(\mathbf{r}, \sigma, c, f)$ respectivamente .

Tomando la expresión para los campos fermiónicos, ec. (3.3) y la expansión del campo gluónico $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, ecuaciones (6.8) y (6.9), el Hamiltoniano de interacción se escribe de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_{int} &= -g \int d\mathbf{x} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \\
 &= -g \int \psi_1^\dagger(\mathbf{r}, \sigma_3, c_3, f) \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})_{c_2}^{c_3} \right]_{\sigma_3 \sigma_2} \psi_2(\mathbf{r}, \sigma_2, c_2, f) \\
 &= -g \int \psi_2^\dagger(\mathbf{r}, \sigma_4, c_4, f) \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})_{c_1}^{c_4} \right]_{\sigma_4 \sigma_1} \psi_1(\mathbf{r}, \sigma_1, c_1, f)
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

donde el término $\left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})_c^{c'} \right]_{\sigma' \sigma}$ se escribe explícitamente como [57]:

$$\begin{aligned}
 \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})_c^{c'} \right]_{\sigma' \sigma} &= \chi_{\sigma'}^\dagger \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})_c^{c'} \right] \chi_\sigma \\
 &= \sum_{\mu} (-1)^\mu \chi_{\sigma'}^\dagger \sigma_\mu \chi_\sigma [A_{-\mu}(\mathbf{r})]_c^{c'} \\
 &= 2 \sum_{\mu} (-1)^\mu \chi_{\sigma'}^\dagger S_\mu \chi_\sigma [A_{-\mu}(\mathbf{r})]_c^{c'} \\
 &= 2 \sqrt{\frac{3}{4}} \sum_{\mu} (-1)^\mu \langle \frac{1}{2} \sigma, 1\mu | \frac{1}{2} \sigma' \rangle [A_{-\mu}(\mathbf{r})]_c^{c'} .
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Para llegar a la última expresión se ha hecho uso explícito de la acción del operador de espín sobre los espinores, la cual se escribe como: $\mathbf{S}_\mu \chi_{\frac{1}{2}m} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \langle 1\mu, \frac{1}{2}m | \frac{1}{2}m' \rangle \chi_{\frac{1}{2}m'}$ y por último propiedades de simetría de los coeficientes Clebsch Gordan.

El elemento de matriz en el espacio de color del componente $(-\mu)$ del campo gluónico está dado por

$$[A(\mathbf{r})_{-\mu}]_c^{c'} = \sum_{\Xi NLJMC} \frac{1}{\sqrt{2\Omega_{(N,L,1)J}^{\Xi}}} \frac{N_{(N,L,1)J}^{\Xi}}{R_e^{\frac{3}{2}}} \frac{\alpha_{JL}^{\Xi}}{\sqrt{2J+1}} j_L(\Omega_{(N,L,1)J}^{\Xi} r) [\mathbf{T}_{JLM}(\hat{\mathbf{r}})]_{-\mu} [T_C]_c^{c'} \left(\boldsymbol{\beta}^{\dagger \Xi; (N,L,1)JMC} + \boldsymbol{\beta}^{\Xi; (N,L,1)JMC} \right). \quad (7.4)$$

esto es, se necesita conocer el elemento de matriz del generador del grupo de color SU(3) [21] y el componente $(-\mu)$ del armónico esférico vectorial [57], los cuales están dados por las ecuaciones (7.5), (7.6) respectivamente:

$$[T_C]_{c_2}^{c_1} = \langle (10)c_2, (11)C | (10)c_1 \rangle \langle (10) || T^{(11)} || (10) \rangle = \sqrt{3}(-1)^{\chi_{c_2}} \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)C \rangle \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{JLM}(\hat{\mathbf{r}}) &= \sum_{m\mu} \langle Lm, 1\mu | JM \rangle Y_{Lm}(\hat{\mathbf{r}}) \boldsymbol{\xi}_{\mu} \\ [\mathbf{T}_{JLM}(\hat{\mathbf{r}})]_{-\mu} &= \sum_m (-1)^{-\mu} \langle Lm, 1\mu | JM \rangle Y_{Lm}(\hat{\mathbf{r}}). \end{aligned} \quad (7.6)$$

donde en la ecuación (7.5) se ha cambiado $c' \rightarrow c_1$ y $c \rightarrow c_2$ por conveniencia.

Finalmente, el Hamiltoniano de interacción efectivo se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{int} &= -g \int d\mathbf{r} \psi^{\dagger}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \\ &= g \sum_{\alpha N_i l_i m_i j_i \lambda_i \sigma_i c_i f} \sum_{\Xi NLJMC} \int r^2 dr R_{N_1 l_1}^*(r) j_L(\Omega_{(N,L,1)J}^{\Xi} r) R_{N_2 l_2}(r) \frac{\alpha_{LJ}^{\Xi}}{\sqrt{\Omega_{(N,L,1)J}^{\Xi}}} \frac{N_{(N,L,1)J}^{\Xi}}{R_e^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad \times (-1)^{\chi_{c_2}} (-1)^{j_2 - \lambda_2 + l_2 + 1} \frac{3}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{(2l_2 + 1)(2j_2 + 1)(2j_1 + 1)(2l_1 + 1)}{2J + 1}} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & l_2 & j_2 \\ \frac{1}{2} & l_1 & j_1 \\ 1 & L & J \end{Bmatrix} \\ &\quad \times \langle l_2 0, l_1 0 | L 0 \rangle \langle j_1 \lambda_1, j_2 - \lambda_2 | JM \rangle \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)C \rangle_1 \\ &\quad \times \mathbf{b}_{\alpha(N_1, l_1, \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c_1 f}^{\dagger} \left(\boldsymbol{\beta}^{\dagger \Xi; (N,L,1)JMC} + \boldsymbol{\beta}^{\Xi; (N,L,1)JMC} \right) \mathbf{b}^{-\alpha(N_2, l_2, \frac{1}{2}) j_2 \lambda_2 c_2 f}, \end{aligned} \quad (7.7)$$

para lo cual se han hecho uso de relaciones para la integral de tres armónicos esféricos [35, 58] y la suma de cuatro coeficientes Clebsch Gordan, [57]

Hay que tener cuidado con la notación utilizada, pues el vector α corresponde a las matrices de Pauli, α_{LJ}^{Ξ} son los coeficientes del campo gluónico que satisfacen la ortogonalidad del componente magnético con el componente eléctrico [19] y finalmente el subíndice (superíndice), α , que aparece en el operador de creación (aniquilación) fermiónico corresponde al pseudo-espín de la partícula, por lo que la suma $\sum_{\alpha=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$ solo corre sobre el subíndice (superíndice) de los operadores fermiónicos.

El Hamiltoniano efectivo de interacción, ec. (7.7), a diferencia del sector puramente de cuarks y el sector puramente de gluones tiene una estructura nueva para este modelo. Como se mostró en los capítulos 3 y 4, correspondientes al sector de cuarks, \mathbf{H}_q , se encontró una estructura rota en bloques de espín total (j), por lo que se pudo desarrollar un método capaz de diagonalizar el sector de cuarks en cada uno de éstos bloques. Esto fue posible gracias a que la parte tanto del término cinético como del término de masa de cuarks están acoplados a espín, color y sabor total cero, por lo que dichos términos actúan únicamente en el espacio del pseudo-espín. Así mismo, en el capítulo 6 para el Hamiltoniano de gluones se encontró un resultado analítico donde nuevamente la parte de espín y color total están acoplados a cero. Debido a esto, el cálculo de las energías para estados que solo contienen gluones (glueballs) fue inmediato.

El Hamiltoniano de interacción efectivo, ec. (7.7), no tiene ninguna de las propiedades mencionadas en el párrafo anterior, tanto en la parte de cuarks como en la parte de gluones. La parte de cuarks en \mathbf{H}_{int} , puede conectar estados con diferente espín total j_i siempre y cuando el espín total de cuarks sea igual al espín total del gluón. Para el color en la parte de cuarks de \mathbf{H}_{int} , se tiene el acoplamiento a color octete del gluón a través de $[T_C]_{c_2}^{c_1} = \sqrt{3}(-1)^{x_{c_2}} \langle (1, 0), c_1; (0, 1) \bar{c}_2 | (1, 1) C \rangle$, por lo que, el espacio de estados de cuarks es más extenso al considerado en \mathbf{H}_q . Por otro lado, la parte de gluones en \mathbf{H}_{int} no puede acoplarse por sí sola a espín y color cero. No obstante, la parte de cuarks se acopla con la parte de gluones a espín y color total cero para hacer el \mathbf{H}_{int} un escalar.

Método y Aproximaciones

En este momento, al no contar con un método general para trabajar el \mathbf{H}_{int} a bajas energías, se debe pensar en hacer ciertas aproximaciones. La primera de ellas consiste en considerar al operador del gluón como un valor esperado. Dicho valor esperado debe corresponder con el valor mínimo alrededor del cual se pueda hacer una expansión, esto es, considerar al operador bosónico de la

siguiente forma:

$$\beta_{(N,L,1)JMC}^{\dagger \Xi} = a_{(N,L,1)JMC}^{\Xi} + \delta\beta_{(N,L,1)JMC}^{\dagger \Xi} \quad , \quad (7.8)$$

donde $a_{(N,L,1)JMC}^{\Xi}$ es el valor de expectación que minimiza la energía y alrededor del cual se hace la expansión, mientras que $\delta\beta_{(N,L,1)JMC}^{\dagger \Xi}$ son los operadores bosónicos que generan la expansión, los cuales satisfacen la misma regla de conmutación que los operadores originales. Con esta aproximación y la aproximación de que la parte de cuarks únicamente conecte estados con el mismo espín total, $j_i = j$, se puede utilizar el método- $\alpha\beta - BCS$ descrito en el capítulo 4, el cual se utilizó para resolver el Hamiltoniano de cuarks $\mathbf{H}_q + \mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q}(V_0)$.

Antes de seguir adelante en como trabajar el término de interacción, es necesario mencionar que para el caso fermiónico ($b_{\pm\frac{1}{2},(N_i,l_i,\frac{1}{2})j_i\lambda_i c_i f_i}^{\dagger} = q_{\pm\frac{1}{2},(N_i,l_i,\frac{1}{2})j_i\lambda_i c_i f_i} + \delta b_{\pm\frac{1}{2},(N_i,l_i,\frac{1}{2})j_i\lambda_i c_i f_i}^{\dagger}$), hay que tener más cuidado pues las variables alrededor de las cuales se hace la expansión de los operadores fermiónicos son variables de Grassmann [59], las cuales cumplen la propiedad de anticonmutar, de tal forma que la regla de anticonmutación de los operadores fermiónicos originales se siga manteniendo.

Como primera aproximación se supone que existe un estado de prueba para los operadores fermiónicos que satisface:

$$\mathbf{b}_{\mu}|\underline{q}\rangle = q_{\mu}|\underline{q}\rangle \quad (7.9)$$

donde μ es una notación corta para todos los índices de operadores fermiónicos. Para mejorar esta aproximación es necesario hacer un formalismo en donde q_{μ} sea una variable de Grassmann [59] y definir valores de expectación de los operadores fermiónicos en un estado (coherente) que dependa de las variables de Grassmann. En este trabajo no se desarrolla este formalismo pero para trabajos subsecuentes será necesario.

Tomar las consideraciones descritas en los párrafos anteriores tienen las siguientes implicaciones: Primero, el operador bosónico es un número que depende de los números cuánticos del gluón, esto significa que tiene la información del espín total y de los momentos magnéticos tanto de espín como de color del gluón. Segundo, a pesar de considerar el mismo espín total para los operadores de cuarks y anti-cuarks, la parte de espín y de color no son necesariamente diagonales, esto es, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $c_1 \neq c_2$ respectivamente. En este sentido la transformación- $\alpha\beta - BCS$ ec. (4.12) solamente funciona para el caso donde $\lambda_1 = \lambda_2$ y $c_1 = c_2$. Ésto, implica considerar para el número magnético de espín del gluón $M = 0$ y en el octete de color la componente $C = \{Y_C, I_C, I_{Z_C}\} = \{0, I_C, 0\}$.

Se puede definir una nueva transformación- $\alpha\beta - BCS'$ donde en la parte de la transformación- BCS' se mezclen índices de color por lo que la ecuación de brecha (gap) que se resolvió para el sector de cuarks tiene un índice adicional referente al color. Debido a que la actual búsqueda no se está realizando a un nivel fundamental, se utiliza un sistema intrínseco en el espacio de color del gluón donde la componente principal es del tipo $\{0, I_C, 0\}$.

En las siguientes secciones se presenta el caso correspondiente a los dos estados de cuarks más bajos, esto es, el primer estado s y el primer estado p , mientras que para la parte gluónica se considera el estado de glueballs más bajo, el cual corresponde a un gluón con momento angular $L = 0$ y espín total $J = 1$.

7.2. Estado Prueba y sus Propiedades

Antes de empezar a hacer un análisis del Hamiltoniano de interacción bajo las aproximaciones mencionadas en la sección anterior, es necesario hacer un breve resumen de las propiedades del estado prueba que se va utilizar. El estado prueba que se va utilizar está dado por:

$$|\underline{q}, \underline{a}\rangle = \mathcal{N} e^{a_\nu \beta_\nu^\dagger} |\underline{q}\rangle, \quad (7.10)$$

donde la parte bosónica del estado prueba corresponde a un estado coherente [59, 60] y la parte fermiónica simplemente satisface la ec. (7.9).

Es mediante el uso de estados coherentes que se busca el o los valores de expectación de los operadores bosónicos que minimicen el Hamiltoniano alrededor del nuevo mínimo determinado por los valores $q_{\pm\frac{1}{2}, (N_i, l_i, \frac{1}{2}) j_i \lambda_i c_i f_i}$ y $a_{(N, L, 1) J M C}^\Xi$. La minimización se lleva a cabo para el sector de cuarks y gluones que se introdujeron previamente a este capítulo más el Hamiltoniano de interacción, \mathbf{H}_{int} .

Estado Coherente y Factor de Normalización

Primeramente se define el estado coherente que se va utilizar y con el cual se obtienen todas las relaciones que se definen más adelante. La deducción de estas relaciones se muestra en el Apéndice H. El estado coherente está dado por:

$$|\underline{q}, \underline{a}\rangle = \mathcal{N} e^{a_\nu \beta_\nu^\dagger} |\underline{q}\rangle, \quad (7.11)$$

dado que los operadores fermiónicos y bosónicos conmutan, es posible determinar la constante de normalización considerando solo la parte bosónica. La constante de normalización para el caso de bosones (gluones) es igual a $\mathcal{N}_{gluon} = e^{-\frac{1}{2}\sum_{\nu}|a_{\nu}|^2}$.

Elementos de Matriz para Operadores Fermiónicos y Bosónicos

Los elementos de matriz para los operadores fermiónicos ec. (7.12) y bosónicos ec. (7.13) están dados por

$$\begin{aligned}\langle \underline{qa} | \mathbf{b}_{\mu}^{\dagger} | \underline{qa} \rangle &= q_{\mu} \\ \langle \underline{qa} | \mathbf{b}^{\mu} | \underline{qa} \rangle &= q_{\mu}\end{aligned}\tag{7.12}$$

$$\begin{aligned}\langle \underline{qa} | \boldsymbol{\beta}_{\nu}^{\dagger; \Xi} | \underline{qa} \rangle &= a_{\nu}^{\Xi} \\ \langle \underline{qa} | \boldsymbol{\beta}^{\Xi; \nu} | \underline{qa} \rangle &= a_{\nu}^{\Xi},\end{aligned}\tag{7.13}$$

donde se han considerado reales los valores de expectación como primer caso. En la parte fermiónica se puede hacer un análisis de minimización con valores de expectación correspondientes a variables de Grassmann ($q_1 q_2 = -q_2 q_1$, $q_i^2 = 0$). Al considerar reales los valores de expectación de los operadores fermiónicos no se cumple la regla de anticonmutación pero si la regla de conmutación para los operadores bosónicos, esto es:

$$\begin{aligned}\{\mathbf{b}^{\mu'}, \mathbf{b}_{\mu}^{\dagger}\} &= \{q_{\mu'}, q_{\mu}\} + \{\delta \mathbf{b}^{\mu'}, \delta \mathbf{b}_{\mu}^{\dagger}\} \neq \delta_{\mu}^{\mu'}, \\ [\boldsymbol{\beta}^{\nu'}, \boldsymbol{\beta}_{\nu}^{\dagger}] &= [\delta \boldsymbol{\beta}^{\nu'}, \delta \boldsymbol{\beta}_{\nu}^{\dagger}] = \delta_{\nu}^{\nu'},\end{aligned}\tag{7.14}$$

por lo que $\mathbf{b}_{\mu}^{\dagger} \rightarrow q_{\mu} + \delta \mathbf{b}_{\mu}^{\dagger}$.

Antes de sustituir $\mathbf{b}_{\mu}^{\dagger}(\mathbf{b}^{\nu})$ por $q_{\mu}(q_{\nu})$, el Hamiltoniano tanto en el sector de cuarks como en el sector de gluones, se escribe en orden normal, por lo que a nivel de operadores no hay ningún problema con la regla de anticonmutación pues no es hasta entonces que se usa $\mathbf{b}_{\mu}^{\dagger} \rightarrow q_{\mu} + \delta \mathbf{b}_{\mu}^{\dagger}$.

La estrategia y el programa de minimización del Hamiltoniano al utilizar estados coherentes, se discute y muestra en los Apéndices H y Apéndice I respectivamente.

7.3. Hamiltoniano de Interacción para los Estados de Menor Energía

En esta sección se muestran las implicaciones de considerar únicamente los estados de menor energía para cuarks y gluones. Sin embargo, para poder aplicar la transformación BCS, ec. (4.12), se necesita considerar que el campo gluónico tiene una componente preferente o dominante, lo cual se puede considerar como trabajar un sistema de referencia intrínseco en el espacio de color.

Sistema Intrínseco ($\{0, 1, I_{Z_C}\}$, $M=-1,0,1$) del Gluón

En un primer intento se consideran los componentes del gluón con $Y_C = 0$, para lo cual se tienen: 2 posibilidades con $\{0, 0, 0\}$ y tres posibilidades para $\{0, 1, I_{Z_C}\}$. Decidir qué componente se tome es considerar un sistema intrínseco u otro. Si se considera la componente $\{0, 0, 0\}$ los cálculos se simplifican ya que los acoplamiento en el Hamiltoniano de Coulomb en la parte gluónica son cero ec. (H.21) y por tanto, la minimización solo involucra los gluones a través de \mathbf{H}_{gluon} y \mathbf{H}_{int} .

En la tabla 7.1 se dan los números cuánticos que permanecieran fijos tanto para cuarks como para gluones, dicha condición se mantiene a lo largo de este capítulo.

Núm Cuánticos	Cuarks	Gluones
Núm. Principal	$N_1, N_2 = 0, 1$	$N = 1$
Mom. Angular	$l_1, l_2 = 0, 1$	$L = 0$
Espín Total	$j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$	$J = 1$

Cuadro 7.1: Números cuánticos para cuarks y gluones correspondientes a las energías más bajas.

Para la componente $\{0, 1, I_{Z_C}\}$, se hizo la minimización correspondiente, esperando que dentro de las nueve posibilidades de $a_{(1,0,1)1MC}^{\Xi}$ (3 de I_{Z_C} y 3 de las componentes magnéticas del espín $J=1$), la componente ($\{0, 1, 0\}$, $M=0$) fuera dominante. Esto último no necesariamente es cierto como se muestra en la tabla 7.2, la cual corresponde a los valores de expectación de los operadores bosónicos.

(V_0, g)	$2\Delta E_{\alpha\beta-BCS}$	$a_{-1,-1}^e$	$a_{-1,0}^e$	$a_{-1,1}^e$	$a_{0,-1}^e$	$a_{0,0}^e$	$a_{0,1}^e$	$a_{1,-1}^e$	$a_{1,0}^e$	$a_{1,1}^e$
(0.31,3)	-0.178	-1.03	1.19	-0.74	1.46	-2.37	1.46	-0.74	1.19	-1.03
(0.32,5)	-0.311	1.13	1.24	-1.59	0.50	-2.49	0.50	-1.59	1.24	1.13
(0.27,7)	-0.252	0.36	0.47	-1.89	0.86	-1.44	0.86	-1.89	0.47	0.36

Cuadro 7.2: Corrección a las energías- $\alpha\beta - BCS$ (GeV), valores de expectación para los operadores bosónicos con $(\{Y_C, I_C, I_{Z_C}\} = \{0, 1, I_{Z_C}\}$ y $M = -1, 0, 1$), como función de la constante de interacción fuerte g y el valor V_0 . Para determinar $V_0(GeV)$ y g se usó el método de minimización-2 que se describe en el capítulo 8.

Para el cálculo de estos valores de expectación, se ha utilizado el método de minimización-2, el cual se describe en el capítulo 8. En dicho método se delimita el valor de V_0 usando potenciales de interacción entre cuarks dados por cálculos de redes (lattice gauge theory) [61, 62] y se utiliza $g = 3, 5, 7$ que son valores dentro de intervalos reportados [63].

Por tanto, haber escogido un sistema intrínseco del gluón con nueve componentes tuvo sus ventajas y desventajas. Por ejemplo, una ventaja fue estudiar un sistema con nueve de veinticuatro posibles componentes, diseñar un programa que calcule estas nueve componentes y bajo la consideración que la componente del gluón $(\{0, 1, 0\}, M = 0)$ fuera la dominante se encontró que la corrección a la energías- $\alpha\beta - BCS$ es del orden de $0,090GeV$ a $0,155GeV$. Una desventaja es que controlar las correcciones para valores de $V_0 > 0,3GeV$ se vuelve bastante complicado para al menos uno de los métodos que se describen en el capítulo 8.

Sistema intrínseco $(\{0, 1, 0\}, M = 0)$ del Gluón

Considerando únicamente la componente $\{0, 1, 0\}$ y $M = 0$ del gluón en el espacio de color y espín respectivamente, esto es, elegir un sistema intrínseco del gluón muy particular, de tal forma que solo se tiene un valor de expectación resulta mejor en varios aspectos que se describen a continuación.

La estructura del \mathbf{H}_{int} considera ahora únicamente operadores fermiónicos, para los cuales ya se tiene una base preferente (base- $\alpha\beta - BCS$) y sobre élla se buscan las posibles correcciones a las energías hadrónicas de este modelo (se usa el término correcciones para referirse a las correcciones

a las energías- $\alpha\beta$ - BCS).

La minimización hecha mediante el programa mostrado en la sección (I.2.2) también sirve para poder asociar un valor a la constante de interacción fuerte g , el cual se considera un parámetro en el modelo. En el capítulo 8, se discuten dos posibilidades (métodos de minimización) para asociar un valor a la constante de interacción fuerte g .

Al considerar los estados más bajos, el Hamiltoniano de interacción adquiere la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_{int} = & g \sum_{N_1 l_1 \lambda_1 c_1} \sum_{N_2 l_2 \lambda_2 c_2} \sum_{\alpha f} \int r^2 dr R_{N_1 l_1}^*(r) j_0(\Omega_{(1,0,1)1}^e r) R_{N_2 l_2}(r) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_{(1,0,1)1}^e}} \frac{N_{(1,0,1)1}^e}{R_e^{\frac{3}{2}}} \\
 & \times (-1)^{\chi_{c_2}} (-1)^{\frac{1}{2} - \lambda_2 + l_2 + 1} \frac{3}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{(2l_2 + 1)(4)(2l_1 + 1)}{3}} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & l_2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & l_1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \\
 & \times \langle l_2 0, l_1 0 | 00 \rangle \langle \frac{1}{2} \lambda_1, \frac{1}{2} - \lambda_2 | 10 \rangle \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)\{0, 1, 0\} \rangle \\
 & \times \mathbf{b}_{\alpha(N_1, l_1, \frac{1}{2}) \frac{1}{2} \lambda_1 c_1 f}^\dagger \left(\beta^\dagger e^{i(1,0,1)10\{0,1,0\}} + \beta e^{i(1,0,1)10\{0,1,0\}} \right) \mathbf{b}^{-\alpha(N_2, l_2, \frac{1}{2}) \frac{1}{2} \lambda_2 c_2 f}, \quad (7.15)
 \end{aligned}$$

donde se ha utilizado que $\Xi = e$ ya que $J \neq L$, $\alpha_{JL}^{\Xi} = \alpha_{10}^e = \sqrt{2}$.

Es inmediato notar ciertas características de esta expresión. La primera de ellas es que al considerar $M = 0$ se tiene que $\lambda_1 = \lambda_2$. La segunda es que al tener $Y_C = 0$ implica que $Y_1 = -Y_2$ mientras que al tener $I_{Z_C} = 0$ se tiene automáticamente que $I_{Z_1} = -I_{Z_2}$. Esto es muy importante al calcular el coeficiente de Clebsch-Gordan de SU(3), $\langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)C \rangle_1$, el cual se calcula usando la siguiente relación, [34]:

$$\begin{aligned}
 & \langle (p_1, q_1)\{Y_1, I_1, I_{Z_1}\}; (p_2, q_2)\{\overline{Y_2}, I_2, I_{Z_2}\} | (p, q)\{Y, I, I_Z\} \rangle_{\rho=1} \\
 & = \langle (p_1, q_1)\{Y_1, I_1\}; (p_2, q_2)\{\overline{Y_2}, I_2\} | (p, q)\{Y, I\} \rangle_{\rho=1} \langle I_1 I_{Z_1}, I_2, \overline{I_{Z_2}} | I, I_Z \rangle
 \end{aligned} \quad (7.16)$$

donde se ha usado (p, q) en las representaciones de SU(3) en lugar de (λ, μ) para evitar confusión con el número magnético de espín. El primer elemento del lado derecho de la ec. (7.16), se conoce como coeficiente reducido de Wigner y el segundo elemento como la parte geométrica, la cual corresponde a un coeficiente de Clebsch-Gordan de SU(2). Para la evaluación del coeficiente reducido de Wigner se utilizan las rutinas conocidas, [64, 65].

7.4. Diagonalización del Hamiltoniano de Interacción para los Estados de Menor Energía

El Hamiltoniano de interacción para los estados más bajos debe satisfacer que al mismo tiempo el coeficiente de Clebsch-Gordan $\langle l_2 0, l_1 0 | 0 0 \rangle$ y el coeficiente 9-J de la ecuación (7.15), sean diferentes de cero. Las posibles combinaciones que cumplen ésto y al mismo tiempo satisfacen las condiciones de la tabla 7.1, son las siguientes: $(l_1 = l_2 = 0)$ y $(l_1 = l_2 = 1)$. El problema con éstas combinaciones es que la transformación-BCS, ec. (4.12), no diagonaliza el Hamiltoniano de interacción aún cuando se toma los operadores β_ν^\dagger y β^ν como números, por tal motivo se buscó la posibilidad de aplicar una nueva transformación ortogonal que diagonalizará simultáneamente \mathbf{K}_q , \mathbf{H}_{m_q} y \mathbf{H}_{int} .

7.4.1. Diagonalización del Hamiltoniano de Interacción para Conexiones $s - s$ y $p - p$ en un Sistema Intrínseco de Color

En esta sección se muestra el efecto de aplicar la transformación BCS, ec. (4.12) al Hamiltoniano de interacción para las conexiones $s - s$ y $p - p$ en el sistema intrínseco de color correspondiente a la componente $(\{Y_C, I_C, I_{Z_C}\} = \{0, 1, 0\}, M = 0)$. Posteriormente, se aplican sucesivamente dos transformaciones ortogonales (TO1 y TO2) para la diagonalización final. Es fácil mostrar que estas dos nuevas transformaciones no afectan el sector de cuarks, por lo que la energía correspondiente al Hamiltoniano de interacción hace una corrección al sector de cuarks debido a la interacción entre cuarks y gluones.

Considerando la tabla 7.1, y la ecuación (7.15) se puede construir el programa mostrado en la sección I.2.2, donde todos los factores numéricos que aparecen en el Hamiltoniano de interacción se han calculado numericamente.

El Hamiltoniano de interacción adquiere la siguiente estructura una vez que se sustituye el operador bosónico por su valor de expectación y se aplica la transformación- $\alpha\beta - BCS$ de la ec. (4.12) para el sector de cuarks:

$$\begin{aligned} H_{int}^{s-s, p-p}(\alpha\beta - BCS) &= \\ &= -2g \sum_{\lambda c = \{0, 1, I_{Z_c}\} f} a_{(1,0,1)10\{0,1,0\}}^e (-1)^{\frac{1}{2}-\lambda} (-1)^{\frac{1}{2}-I_{Z_c}} \langle \frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2} - \lambda | 10 \rangle \langle \frac{1}{2}I_{Z_c}, \frac{1}{2} - I_{Z_c} | 10 \rangle \end{aligned}$$

$(V_0 GeV, g)$	$2\Delta E_{\alpha\beta-BCS} GeV$	$a_{0,0}^e$
(0.61,3)	0.074	0.993
(1.05,3)	-0.331	-4.416
(0.60,5)	-0.023	-0.185
(0.63,5)	0.344	2.757
(0.74,5)	0.022	0.183
(0.60,7)	-0.048	0.279
(0.62,7)	0.345	1.974
(0.74,7)	0.086	0.495

Cuadro 7.3: Corrección a las energías- $\alpha\beta - BCS$ (GeV) y valores del expectación del operador bosónico con $(\{Y_C, I_C, I_{Z_C}\} = \{0, 1, 0\}$ y $M = 0$), como función del valor V_0 . Para determinar $V_0(GeV)$ se utilizó el método de minimización-2 que se describe en el capítulo 8.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ [(0,0545239)s_s c_p - (0,004131)s_p c_s] \left(\mathbf{b}_{p,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}_s^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} + \mathbf{b}_{s,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}_p^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} \right) \right. \\
 & + [(0,0545239)s_p c_s - (0,004131)s_s c_p] \left(\mathbf{d}_{p,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \mathbf{d}_s^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} + \mathbf{d}_{s,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \mathbf{d}_p^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} \right) \\
 & - [(0,0545239)s_s s_p + (0,004131)c_s c_p] \left(\mathbf{b}_{p,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \mathbf{d}_p^{\dagger,(1,\frac{1}{2})\lambda cf} + \mathbf{d}_{p,(1,\frac{1}{2})\lambda cf} \mathbf{b}_p^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} \right) \\
 & \left. + [(0,0545239)c_s c_p + (0,004131)s_s s_p] \left(\mathbf{b}_{s,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \mathbf{d}_s^{\dagger,(1,\frac{1}{2})\lambda cf} + \mathbf{d}_{s,(1,\frac{1}{2})\lambda cf} \mathbf{b}_s^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} \right) \right\} \quad (7.17)
 \end{aligned}$$

donde los valores para $a_{(1,0,1)10\{0,1,0\}}^e$ y g se muestran en la tabla 7.3. Los factores $s_s = s_p = \text{sen}\theta$, $c_s = c_p = \text{cos}\theta$ vienen de la transformación-BCS, donde $\theta = 0,775464\text{rad}$. El valor del ángulo de Bogoliubov θ , se ha determinado al resolver la ecuación del gap para el sector de cuarks considerando solo el nivel s y p más bajos, con lo cual el Hamiltoniano de interacción para las conexiones $s - s$ y $p - p$ de los estados más bajos tiene la siguiente estructura

$$H_{int}(\alpha\beta - BCS) =$$

$$\begin{aligned}
 &= -(2)(g)(a_{(1,0,1)10\{0,1,0\}}^e) \sum_{\lambda c=\{0,1,I_{Z_c}\}f} (-1)^{\frac{1}{2}-\lambda} (-1)^{\frac{1}{2}-I_{Z_c}} \langle \frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2} - \lambda | 10 \rangle \langle \frac{1}{2}I_{Z_c}, \frac{1}{2} - I_{Z_c} | 10 \rangle \\
 &\left\{ (0,02518) \left(\mathbf{b}_{p,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}_s^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} + \mathbf{b}_{s,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}_p^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} + \mathbf{d}_{p,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \mathbf{d}_s^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} + \mathbf{d}_{s,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \mathbf{d}_p^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} \right) \right. \\
 &- (0,02882) \left(\mathbf{b}_{p,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \mathbf{d}_p^{\dagger,(1,\frac{1}{2})\lambda cf} + \mathbf{d}_{p,(1,\frac{1}{2})\lambda cf} \mathbf{b}_p^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} \right) \\
 &\left. + (0,02982) \left(\mathbf{b}_{s,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \mathbf{d}_s^{\dagger,(1,\frac{1}{2})\lambda cf} + \mathbf{d}_{s,(1,\frac{1}{2})\lambda cf} \mathbf{b}_s^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} \right) \right\} \quad (7.18)
 \end{aligned}$$

Es claro de la ec. (7.18), que la transformación BCS ec. (4.12) no fue exitosa en la diagonalización. Por tanto, se procede hacer una transformación ortogonal (TO1) para los operadores fermiónicos que generan la base BCS, esto es:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \mathbf{b}_s^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} \\ \mathbf{d}_p^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_2 & -u_2 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} \\ \mathbf{d}_2^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} \mathbf{b}_p^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} \\ \mathbf{d}_s^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_1 & -u_1 \\ u_1 & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_2^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} \\ \mathbf{d}_1^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} \end{pmatrix} \quad (7.19)
 \end{aligned}$$

donde, de forma inmediata se obtienen los operadores de creación. La condición para que esta transformación sea ortogonal es que $u_1^2 + v_1^2 = 1$ y $u_2^2 + v_2^2 = 1$, por lo que se escribe $u_1 = \text{sen}\phi_1$, $v_1 = \text{cos}\phi_1$, $u_2 = \text{sen}\phi_2$ y $v_2 = \text{cos}\phi_2$.

Introduciendo la transformación de la ec. (7.19) en el Hamiltoniano de interacción dado en la ec. (7.18) y pidiendo que los términos correspondientes a dos operadores de creación o dos operadores de aniquilación sean cero, se tienen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
 0,02882u_2v_1 + 0,02982u_1v_2 &= 0, \\
 -0,02882v_1v_2 + 0,02982u_1u_2 &= 0, \\
 0,02882u_1u_2 - 0,02982v_1v_2 &= 0, \\
 0,02882u_1v_2 + 0,02982u_2v_1 &= 0; \quad (7.20)
 \end{aligned}$$

que al resolver para u_1, u_2, v_1 y v_2 se tiene: $(0,02882)^2 - (0,02982)^2 = 0$. Si se desea seguir por este camino, se tienen dos posibilidades, la primera es decir que se está cometiendo un error de orden $5,8 \times 10^{-5}$, el cual disminuye conforme la masa de los cuarks $m_0 \rightarrow 0$; y la otra posibilidad es considerar desde el principio $m_0 = 0$. Sin embargo, las condiciones de la ec. (7.20) no determinan

los valores de u_1 , u_2 , v_1 , v_2 y la estructura del Hamiltoniano de interacción es la siguiente (con un error de $5,8 \times 10^{-5}$):

$$\begin{aligned}
 H_{int}(\alpha\beta - BCS - TO1) = & \\
 = -(2)(g)(a_{(1,0,1)10\{0,1,0\}}^e) & \sum_{\lambda c = \{Y_c, I_c, I_{Z_c}\}f} (-1)^{\frac{1}{2}-\lambda} (-1)^{\frac{1}{2}-I_{Z_c}} \langle \frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2} - \lambda | 10 \rangle \langle \frac{1}{2}I_{Z_c}, \frac{1}{2} - I_{Z_c} | 10 \rangle \\
 \left\{ (0,02518) \left((v_1v_2 + u_1u_2) \right. \right. & \left. \left. (\mathbf{b}_{2,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}_1^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} + \mathbf{b}_{1,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}_2^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf}) \right. \right. \\
 + (v_1v_2 + u_1u_2) (\mathbf{d}_{2,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger & \mathbf{d}_1^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} + \mathbf{d}_{1,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \mathbf{d}_2^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf}) \\
 + (u_1v_2 - u_2v_1) (\mathbf{b}_{2,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger & \mathbf{d}_2^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} + \mathbf{d}_{2,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}_2^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf}) \\
 \left. \left. + (u_2v_1 - u_1v_2) (\mathbf{b}_{1,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger & \mathbf{d}_1^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} + \mathbf{d}_{1,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}_1^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf}) \right) \right\} . \quad (7.21)
 \end{aligned}$$

Debido a la libertad que aún se tiene para determinar u_1 , u_2 , v_1 y v_2 se puede elegir qué términos se desean trabajar para una posible diagonalización. Dada la estructura de la ec. (7.21), es posible definir el ángulo de la transformación-TO1 ec. (7.19), mediante la elección $(v_1v_2 + u_1u_2) = 0$ o $(u_2v_1 - u_1v_2) = 0$. Se decidió considerar $(u_2v_1 - u_1v_2) = 0$, la cual quita términos de la forma $\mathbf{b}^\dagger \mathbf{d}$, $\mathbf{d}^\dagger \mathbf{b}$; con lo cual se tiene:

$$\begin{aligned}
 u_1v_2 - u_2v_1 &= 0 \\
 \Rightarrow \text{sen}\phi_1 \text{cos}\phi_2 - \text{sen}\phi_2 \text{cos}\phi_1 &= 0 \\
 \Rightarrow \text{sen}(\phi_1 - \phi_2) &= 0 \quad , \quad (7.22)
 \end{aligned}$$

donde en general: $\phi_1 = n\pi + \phi_2$, por tanto

$$v_1v_2 + u_1u_2 = (-1)^n . \quad (7.23)$$

Sin pérdida de generalidad, se puede tomar $n = 0$ y el Hamiltoniano de interacción para las conexiones $s - s$ y $p - p$ adquiere la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}
 H_{int}(\alpha\beta - BCS - TO1) = & \\
 = 2\Delta E_{\alpha\beta - BCS} & \sum_{\lambda c = \{Y_c, I_c, I_{Z_c}\}f} (-1)^{\frac{1}{2}-\lambda} (-1)^{\frac{1}{2}-I_{Z_c}} \langle \frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2} - \lambda | 10 \rangle \langle \frac{1}{2}I_{Z_c}, \frac{1}{2} - I_{Z_c} | 10 \rangle \\
 \left[\mathbf{b}_{1,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}_2^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} + \mathbf{b}_{2,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger & \mathbf{b}_1^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} + \mathbf{d}_{1,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \mathbf{d}_2^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} + \mathbf{d}_{2,(1,\frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \mathbf{d}_1^{(1,\frac{1}{2})\lambda cf} \right] , \quad (7.24)
 \end{aligned}$$

el cual aniquila una partícula de energía positiva (negativa) y crea una partícula también de energía positiva (negativa), esto es, se tienen dos sistemas independientes.

La nueva transformación ec. (7.19) debe aplicarse a los términos cinético y de masa de cuarks de la base- $\alpha\beta - BCS$, lo cual es fácil mostrar que no altera la estructura de operadores número, ni el coeficiente que determina la energía de excitación de una partícula. En este sentido, el Hamiltoniano de interacción modifica las energías encontradas mediante el método $\alpha\beta - BCS$ haciendo una corrección a éstas.

Los términos que aparecen en el Hamiltoniano de interacción $\mathbf{H}_{int}(\alpha\beta - BCS - TO1)$, aún no son diagonales por lo que debe hacerse una diagonalización mediante una segunda transformación ortogonal (TO2) o una diagonalización numérica. Se muestra a continuación que un simple cambio de base (una rotación), puede diagonalizar el Hamiltoniano de interacción de la ec. (7.24). Esta segunda transformación (TO2) para el Hamiltoniano de interacción es la siguiente

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^{(1, \frac{1}{2})\lambda cf} \\ \mathbf{b}_2^{(1, \frac{1}{2})\lambda cf} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_1 & -\text{sen}\vartheta_1 \\ \text{sen}\vartheta_1 & \cos\vartheta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{b}}_1^{(1, \frac{1}{2})\lambda cf} \\ \underline{\mathbf{b}}_2^{(1, \frac{1}{2})\lambda cf} \end{pmatrix}, \quad (7.25)$$

de forma semejante para los operadores $\mathbf{d}_1^{(1, \frac{1}{2})\lambda cf}$, $\mathbf{d}_2^{(1, \frac{1}{2})\lambda cf}$ y los operadores de creación se obtienen de forma inmediata. Es fácil mostrar que para hacer la diagonalización es necesario que $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{\pi}{4}$. Nuevamente, la transformación TO2 deja invariantes los términos cinéticos y de masa de cuarks. Finalmente el Hamiltoniano de interacción para las conexiones más bajas $s - s$ y $p - p$ adquiere la forma diagonal siguiente

$$\begin{aligned} H_{int}^{s-s, p-p}(\alpha\beta - BCS + TO1 + TO2) &= \\ &= 2\Delta E_{\alpha\beta - BCS} \sum_{\lambda cf} (-1)^{\frac{1}{2}-\lambda} (-1)^{\frac{1}{2}-I_Z} \langle \frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2} - \lambda | 10 \rangle \langle \frac{1}{2}I_Z, \frac{1}{2} - I_Z | 10 \rangle \\ &\left[\underline{\mathbf{b}}_{1, (1, \frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \underline{\mathbf{b}}_1^{(1, \frac{1}{2})\lambda cf} - \underline{\mathbf{b}}_{2, (1, \frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \underline{\mathbf{b}}_2^{(1, \frac{1}{2})\lambda cf} + \underline{\mathbf{d}}_{1, (1, \frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \underline{\mathbf{d}}_1^{(1, \frac{1}{2})\lambda cf} - \underline{\mathbf{d}}_{2, (1, \frac{1}{2})\lambda cf}^\dagger \underline{\mathbf{d}}_2^{(1, \frac{1}{2})\lambda cf} \right] \end{aligned} \quad (7.26)$$

La corrección que genera el Hamiltoniano de interacción es simplemente para dos componentes de color en cuarks, esto es, en el espacio de color los cuarks forman un triplete descrito por la hipercarga, isoespín, y la componente tres de isoespín: $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ $\{-\frac{2}{3}, 0, 0\}$ $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$. Debido a que solo se restringió el cálculo a un componentes del gluón, no existe corrección por el Hamiltoniano

de interacción $\mathbf{H}_{int}(\alpha\beta - BCS - TO1)$ al componente $\{-\frac{2}{3}, 0, 0\}$ de color y por tanto la energía de este componente será la misma que la que se obtenga del método $\alpha\beta - BCS$ en el sector de cuarks. Por último, los dos coeficientes de Clebsch-Gordan que aparecen en la ec. (7.26) dan un factor de $\frac{1}{2}$, con lo cual, la corrección generada a las energías obtenidas por el método $\alpha\beta - BCS$ se muestra en la tabla 7.3. Como este cálculo se realizó para $\frac{1}{\sqrt{\gamma}} = R_e = 0,6fm$ la energía para una partícula obtenida por el método $\alpha\beta - BCS$ es de $0,4026GeV$, la cual se puede disminuir haciendo R_e más grande.

El método utilizado en esta sección puede no ser el mejor, pero permite asociar un valor de expectación al operador bosónico, un valor a g y con los cuales se puede obtener una escala para las correcciones debidas a el \mathbf{H}_{int} cuando se consideran solo algunos componentes del gluón.

Finalmente, de haber hecho este análisis se obtienen varias conclusiones: la primera de ellas se refiere a cómo asignar un valor a la constante de interacción fuerte mediante el método de minimización-2 (ver capítulo 8), en donde se considera un valor promedio para $\langle g \rangle$, lo cual implica correcciones que generan energías hadrónicas dentro de intervalos reportados [4, 9, 10]. La segunda conclusión, es que mediante este método V_0 (el valor promedio de las interacciones entre cuarks), puede ajustarse y monitorearse al mismo tiempo que la magnitud de las correcciones a las energías hadrónicas. Por último, como tercera conclusión vale la pena mencionar que este método se puede extender de forma directa a considerar un número mayor de niveles orbitales para cuarks. Sin embargo, la extensión a un número mayor de niveles orbitales para gluones es más complicada.

En el capítulo siguiente se muestran los alcances de este modelo (de juguete), así como el efecto de estas correcciones no fundamentales sino de **prueba** a las energías hadrónicas. Con las expresiones efectivas para el Hamiltoniano motivado de la CDC ($\mathbf{H}_{CDC} = \mathbf{K}_q + \mathbf{H}_{m_q} + \mathbf{H}_{Coulomb}^{qq} + \mathbf{H}_{gluon} + \mathbf{H}_{int}$) y las energías hadrónicas es posible dar algunas explicaciones a los procesos de interacción que ocurren entre cuark-cuark, cuark-gluón-cuark y gluón-gluón dentro de un hadrón.

Capítulo 8

Extensión del Modelo de Cuarks y Gluones

El objetivo de este capítulo es juntar y analizar los resultados obtenidos en los capítulos anteriores; primeramente en la sección 8.1, para el caso de cuarks sin gluones, se extiende el modelo a un número mayor de niveles orbitales. Con ésto, se analiza el poder de solución de las ecuaciones cuadráticas y bilineales, y el comportamiento de las energías propias como función del número de niveles orbitales. Esto último puede generar un nuevo tema de estudio, el cual involucra qué tantos niveles orbitales es necesario incluir para distintos radios de bolsa y así ajustar de mejor forma las energías hadrónicas, esto es, $E_{hadronica}(\#orbitales, R_{bolsa})$. Este estudio no se incluye en el actual trabajo, pero es una aplicación del modelo que puede ir más allá de un modelo del MIT, en donde el número de niveles considerados no va más allá de uno o dos niveles excitados.

En los capítulos previos 3, 4, 5 y 6, se han considerado cuarks y gluones por separado, mostrando posibles soluciones analíticas y semi-analíticas en ambos casos. En los capítulos 5 y 7, se consideraron algunos términos del Hamiltoniano de la CDC que involucran interacción entre cuarks y gluones de forma dinámica. Por un lado, en el capítulo 5, se mostró que el Hamiltoniano de Coulomb bajo la aproximación de un potencial de interacción constante, V_0 , se comporta como un operador de Casimir de $SU(3)$ separando así los estados de color de aquellos sin color. Por otro lado, en el capítulo 7, se dedujo el Hamiltoniano de interacción entre cuarks y gluones, debido a su complejidad y con el fin de poder mostrar un posible método para tratar este término de interacción, se utilizaron estados

coherentes con lo cual se pudo hacer la sustitución del operador bosónico como un número. Con el resultado de esta búsqueda (de prueba), se pudieron estimar correcciones a las energías encontradas mediante el método- $\alpha\beta - BCS$ descrito en el capítulo 4, para el caso de los niveles orbitales s y p más bajos.

En la sección 8.2, se profundiza en la parte del método discutido en el capítulo 7, para la determinación de correcciones a las energías- $\alpha\beta - BCS$. Se discuten dos posibles métodos para hacer la minimización y se elige el que mejor resultados genera. En la sección 8.2.3, se analizan los espectros hadrónicos que se obtienen de este modelo. En la sección 8.3, se discuten objetivos de estudio a futuro.

8.1. Soluciones del Método $\alpha\beta - BCS$ y su Comportamiento para más Niveles

La solución $\alpha\beta - BCS$ se puede extender a un número mayor de niveles, simplemente el sistema de ecuaciones cuadráticas y bilineales son más complicadas. El caso de cuatro niveles para la solución $\alpha\beta - BCS$, [21], fijó el ancho del oscilador armónico a un valor de $0,6fm$, con lo cual, se ajustó la escala de mesones y bariones a $0,630GeV$ y $0,945GeV$ respectivamente. De haber ajustado el ancho del oscilador para obtener la escala de mesones y bariones en el caso de 6 niveles, éste hubiera sido distinto. Por tanto, al incluir un número mayor de niveles se mantiene fijo este valor y se estudia el comportamiento de las energías propias conforme se varíe el número de niveles considerados.

En esta sección se presentan las soluciones numéricas a las ecuaciones cuadráticas y bilineales para los casos de 2 a 22 niveles. Para este último caso las matrices $\alpha_{Nk}^{\frac{1}{2}}$ y $\beta_{N'q}^{\frac{1}{2}}$ son de dimensión 11×11 cada una, lo que da un total de 242 incógnitas por resolver. Abajo se muestran las matrices α_{Nk}^j y $\beta_{N'q}^j$ para los casos de 6, 10, 16 y 20 niveles orbitales, mostrando así que entre las soluciones para un caso y otro no existen relaciones que pudieran indicar una extrapolación. Debido a la complejidad de las ecuaciones cuadráticas y bilineales es necesario utilizar métodos computacionales.

6 NIVELES

$$\alpha_{Nk}^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0,533 & -0,802 & -0,268 \\ -0,618 & -0,152 & -0,770 \\ 0,577 & 0,577 & -0,577 \end{pmatrix}, \quad \beta_{N'q}^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0,800 & 0,587 & 0,124 \\ -0,544 & 0,623 & 0,561 \\ 0,251 & -0,516 & 0,818 \end{pmatrix}$$

(8.1)

10 NIVELES

$$\alpha_{\frac{1}{2}Nk} = \begin{pmatrix} -0,346 & -0,549 & -0,019 & 0,176 & 0,739 \\ 0,453 & -0,557 & -0,137 & 0,587 & -0,345 \\ -0,490 & 0,411 & -0,452 & 0,614 & -0,083 \\ 0,483 & 0,133 & -0,758 & -0,214 & 0,356 \\ -0,447 & -0,447 & -0,447 & -0,447 & -0,447 \end{pmatrix}, \quad \beta_{\frac{1}{2}N'q} = \begin{pmatrix} 0,646 & 0,332 & -0,006 & 0,077 & -0,682 \\ -0,564 & 0,706 & -0,064 & 0,397 & -0,144 \\ 0,420 & 0,009 & -0,283 & 0,711 & 0,486 \\ -0,267 & -0,491 & -0,652 & 0,219 & -0,461 \\ 0,125 & 0,386 & -0,699 & -0,530 & 0,252 \end{pmatrix}$$

(8.2)

16 NIVELES

$$\alpha_{\frac{1}{2}Nk} = \begin{pmatrix} -0,645 & -0,161 & -0,580 & 0,412 & 0,219 & -0,004 & -0,0001 & -0,037 \\ -0,041 & -0,520 & 0,499 & 0,580 & -0,308 & -0,039 & -0,002 & -0,210 \\ 0,415 & -0,514 & -0,287 & -0,197 & 0,359 & -0,178 & -0,019 & -0,528 \\ -0,411 & 0,220 & 0,059 & -0,322 & -0,387 & -0,457 & -0,087 & -0,555 \\ 0,191 & 0,361 & 0,131 & 0,414 & 0,396 & -0,639 & -0,269 & 0,068 \\ 0,072 & -0,364 & -0,265 & -0,154 & -0,391 & -0,297 & -0,553 & 0,467 \\ -0,270 & -0,041 & 0,337 & -0,173 & 0,376 & 0,366 & -0,698 & -0,133 \\ 0,353 & 0,353 & -0,353 & 0,353 & -0,353 & 0,353 & -0,353 & -0,353 \end{pmatrix},$$

$$\beta_{\frac{1}{2}N'q} = \begin{pmatrix} -0,490 & 0,071 & 0,666 & 0,232 & -0,506 & 0,001 & 0,000 & 0,013 \\ -0,440 & 0,356 & -0,195 & 0,611 & 0,503 & 0,016 & 0,000 & 0,109 \\ 0,445 & 0,616 & -0,158 & 0,207 & -0,446 & 0,096 & 0,008 & 0,380 \\ -0,094 & 0,153 & 0,348 & -0,471 & 0,372 & 0,314 & 0,044 & 0,619 \\ -0,231 & -0,466 & -0,400 & 0,150 & -0,291 & 0,594 & 0,165 & 0,281 \\ 0,380 & 0,044 & 0,357 & 0,245 & 0,211 & 0,538 & 0,413 & -0,398 \\ -0,348 & 0,364 & -0,256 & -0,391 & -0,135 & -0,067 & 0,670 & -0,230 \\ 0,195 & -0,334 & 0,129 & 0,263 & 0,064 & -0,492 & 0,590 & 0,409 \end{pmatrix}$$

(8.3)

20 NIVELES

$$\alpha_{\frac{1}{2}Nk} = \begin{pmatrix} -0,094 & -0,000 & -0,261 & -0,495 & 0,497 & -0,022 & 0,000 & -0,174 & -0,631 & -0,003 \\ -0,380 & -0,003 & -0,582 & -0,402 & -0,495 & -0,142 & 0,000 & 0,250 & 0,160 & -0,030 \\ -0,573 & -0,023 & -0,178 & 0,405 & 0,372 & -0,415 & 0,001 & -0,299 & 0,232 & -0,142 \\ -0,097 & -0,100 & 0,442 & -0,010 & -0,208 & -0,572 & 0,008 & 0,331 & -0,393 & -0,385 \\ 0,440 & -0,287 & -0,094 & -0,307 & 0,044 & -0,160 & 0,039 & -0,349 & 0,354 & -0,585 \\ -0,045 & -0,536 & -0,289 & 0,370 & 0,096 & 0,415 & 0,132 & 0,356 & -0,199 & -0,349 \\ -0,350 & -0,578 & 0,360 & -0,220 & -0,203 & 0,134 & 0,328 & -0,355 & 0,007 & 0,263 \\ 0,294 & -0,155 & -0,143 & -0,016 & 0,275 & -0,397 & 0,579 & 0,347 & 0,161 & 0,389 \\ 0,052 & 0,399 & -0,145 & 0,218 & -0,311 & 0,064 & 0,660 & -0,334 & -0,273 & -0,211 \\ -0,316 & 0,316 & 0,316 & -0,316 & 0,316 & 0,316 & 0,316 & 0,316 & 0,316 & -0,316 \end{pmatrix},$$

$$\beta_{\frac{1}{2}N'q} = \begin{pmatrix} -0,038 & -0,000 & 0,130 & -0,312 & -0,633 & 0,007 & 0,000 & 0,444 & -0,533 & 0,000 \\ -0,233 & -0,001 & 0,481 & -0,581 & 0,297 & 0,070 & 0,000 & -0,461 & -0,261 & 0,012 \\ -0,540 & -0,010 & 0,471 & 0,097 & 0,004 & 0,276 & 0,000 & 0,431 & 0,456 & 0,075 \\ -0,402 & -0,052 & -0,256 & 0,349 & -0,211 & 0,547 & 0,003 & -0,382 & -0,298 & 0,258 \\ 0,281 & -0,182 & -0,270 & -0,380 & 0,324 & 0,430 & 0,019 & 0,326 & 0,031 & 0,519 \\ 0,292 & -0,420 & 0,387 & 0,132 & -0,359 & -0,198 & 0,076 & -0,267 & 0,197 & 0,533 \\ -0,359 & -0,607 & -0,112 & 0,156 & 0,336 & -0,392 & 0,220 & 0,208 & -0,323 & 0,032 \\ -0,023 & -0,416 & -0,217 & -0,323 & -0,273 & 0,226 & 0,461 & -0,151 & 0,338 & -0,444 \\ 0,334 & 0,165 & 0,349 & 0,322 & 0,188 & 0,261 & 0,662 & 0,097 & -0,266 & -0,109 \\ -0,290 & 0,465 & -0,239 & -0,189 & -0,093 & -0,344 & 0,541 & -0,046 & 0,141 & 0,402 \end{pmatrix}$$

(8.4)

Estos resultados se han obtenido manteniendo el espín total fijo $j = \frac{1}{2}$. Se pueden realizar los cálculos semejantes para espines totales j mayores, $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$, etc. De esta forma se tendrían las escalas de energía para estados con momento angular orbital mayor. Simplemente como dato computacional,

los tiempos que lleva realizar estos cálculos van desde 0,016seg para el caso de dos niveles hasta 1835,35seg en el caso de 22 niveles. Estos tiempos pueden variar ya que al no haber un patron sobre el cual se empiece a buscar las soluciones de las ecuaciones cuadráticas y bilineales, los valores iniciales de búsqueda se escogen aleatoriamente y esto hace que el tiempo de cálculo varíe.

Una vez que se conocen las soluciones para las ecuaciones cuadráticas y bilineales, se pueden calcular los coeficientes \tilde{k}_{kk}^j , ec. (4.9), las nuevas masas, ec. (4.11) y por último resolver las ecuaciones de brecha (gap equations) para cada nivel $k = q$, esto es, se obtienen los angulos de Bogoliubov para cada nivel k . Todo este cálculo se ha automatizado en el programa "soluciones- $\alpha\beta - BCS.nb$ ", Apéndice I.

8.1.1. Energías Propias para Sistemas de Cuarqs de 2 a 22 Niveles

El programa "soluciones- $\alpha\beta - BCS.nb$ " mediante el archivo de salida *solucasu* da todos los coeficientes \tilde{k}_{kk}^j para los casos de 2,4, ... niveles. Con ellos y con las nuevas masas, cuyo cálculo es inmediato, es posible resolver las ecuaciones de brecha mediante el complemento que aparece al final del programa "soluciones-alfa-beta-BCS.nb". En el Apéndice I se dan ciertas características de dicho programa. El modo de uso es bastante sencillo, simplemente hay que saber cuantos niveles se desean conocer. Existe un pequeño inconveniente debido a la complejidad de las ecuaciones cuadráticas y bilineales, el cual involucra el poco conocimiento del punto inicial de búsqueda por lo que se hace de forma aleatoria. El programa funciona muy bien hasta 22 niveles tomando un tiempo de 25 a 35 minutos.

Para la inclusión de un número mayor de niveles, deben hacerse pruebas de este programa o elegir otro lenguaje de programación, ya que para cálculos correspondientes a un número mayor a 22 de niveles orbitales, los tiempos de cálculo se incrementan considerablemente. Para los fines de este trabajo es más que suficiente el cálculo de 22 niveles debido que no hay literatura con la cual se puedan comparar los estados excitados predichos por este modelo de cuarqs.

En la tabla 8.1, se muestran las energías de una partícula correspondientes a los caso de 2 a 22 niveles. Estos cálculos involucran los 11 niveles orbitales s y p más bajos y espín total $j = \frac{1}{2}$ (hay que recordar que se está trabajando en la representación de Dirac por lo que en realidad se están determinando las energías propias de un sistema de 44 niveles orbitales). El cálculo correspondiente a

Niveles	$\epsilon_{s,p 1}$	$\epsilon_{s,p 2}$	$\epsilon_{s,p 3}$	$\epsilon_{s,p 4}$	$\epsilon_{s,p 5}$	$\epsilon_{s,p 6}$	$\epsilon_{s,p 7}$	$\epsilon_{s,p 8}$	$\epsilon_{s,p 9}$	$\epsilon_{s,p 10}$	$\epsilon_{s,p 11}$
2	0.402	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
4	0.315	0.664	–	–	–	–	–	–	–	–	–
6	0.268	0.550	0.871	–	–	–	–	–	–	–	–
8	0.237	0.482	0.745	1.048	–	–	–	–	–	–	–
10	0.216	0.436	0.665	0.914	1.205	–	–	–	–	–	–
12	0.199	0.401	0.609	0.828	1.067	1.348	–	–	–	–	–
14	0.185	0.373	0.565	0.764	0.975	1.206	1.479	–	–	–	–
16	0.174	0.350	0.530	0.714	0.906	1.110	1.335	1.601	–	–	–
18	0.165	0.332	0.501	0.673	0.851	1.038	1.236	1.455	1.715	–	–
20	0.157	0.316	0.476	0.639	0.806	0.979	1.160	1.354	1.569	1.824	–
22	0.150	0.302	0.455	0.610	0.768	0.930	1.099	1.276	1.466	1.676	1.927

Cuadro 8.1: Energías de una partícula $\epsilon_{j \pm \frac{1}{2}, kk}$ [GeV], para los casos de 2 a 22 niveles

los niveles orbitales p y d correspondientes a espín total $j = \frac{3}{2}$, pueden realizarse de forma semejante.

Las energías más bajas para los casos de 2 y 22 niveles orbitales que se pueden reportar para el caso de mesones(bariones), corresponden a $804MeV(1206MeV)$ y $300MeV(450MeV)$. Es claro que estas escalas difieren con valores reportados [4, 9, 10]. La razón es que el caso de cuatro niveles orbitales ajustó el parámetro de este modelo de cuarks $\sqrt{\gamma}$ dando así la escala de mesones y bariones. El comportamiento para las energías de excitación de una partícula, para los casos de 2 a 22 niveles orbitales, se muestran en la figura 8.1. Por tanto, la inclusión de un mayor número de niveles orbitales para este modelo de cuarks (sin gluones dinámicos) genera el comportamiento de la escala mesónica y bariónica como función del número de niveles orbitales considerados, semejante al de una partícula. En la figura 8.2, se muestran las energías para los hadrones más ligeros que este modelo puede reportar para las soluciones: analítica-SU(2) (2 y 3 niveles) y $\alpha\beta - BCS$ (4 y 22 niveles), [20–22], en comparación con las energías reportadas por experimento y el modelo de la bolsa del MIT [4–6]

Con los resultados anteriores, la estructura del Hamiltoniano en la base BCS se puede escribir de forma sencilla. Cada vez que se incluyan más y más niveles orbitales, el mar de cuarks y anticuarks

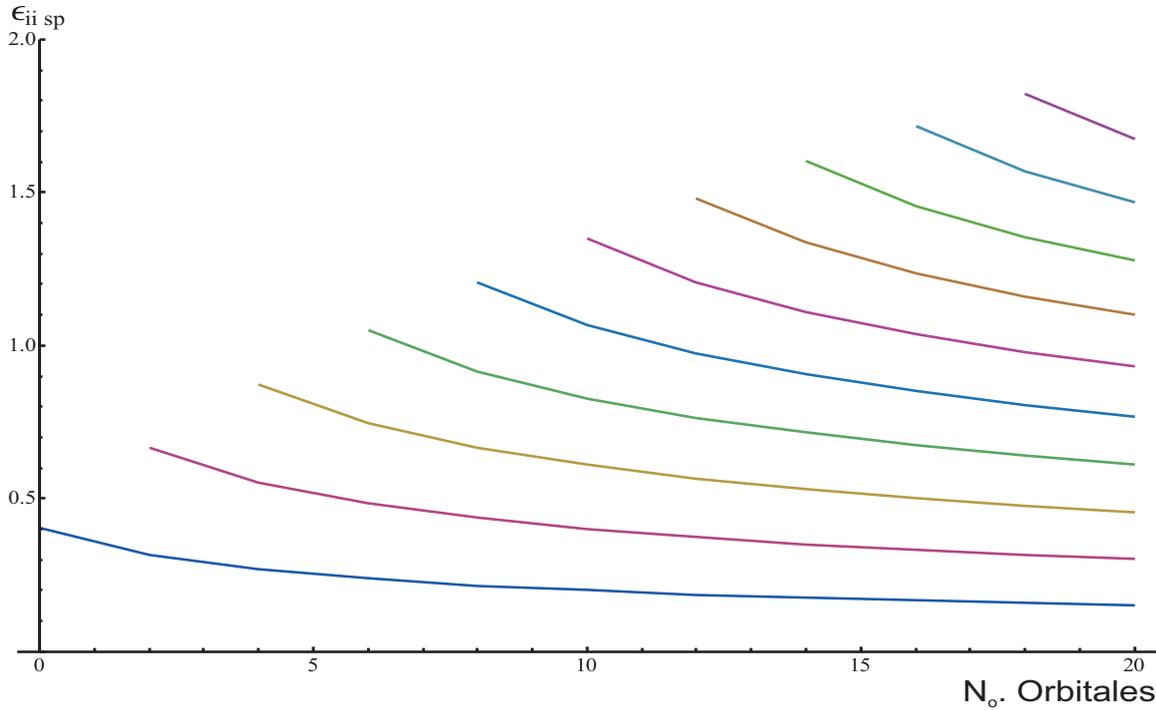


Figura 8.1: Comportamiento de los niveles de energía (GeV) como función del número de niveles considerados.

se vuelve más complicado. Se puede observar que los niveles de energía con el mismo nuevo número principal k están degenerados como se muestra en la tabla 8.1. Esta degeneración puede romperse introduciendo gluones de forma dinámica al modelo (como en el caso del \mathbf{H}_{int}), ya que estos mezclan componentes de espín y color de los cuarks, ec. (7.7). En este mismo sentido se busca algún tipo de interacción espín-orbita que rompa de forma automática la degeneración de los estados s y p , justificada en [42] y la cual daría correcciones al espectro hadrónico.

Considerando únicamente cuarks y un radio de bolsa fijo ($0,6fm$), se tiene la escala hadrónica mostrada en la figura 8.2; en donde, comparando con el espectro del MIT y experimental [6], se puede hacer una estimación de cuantos niveles orbitales son necesarios o suficientes para que las correcciones debidas a interacción con gluones ajusten de mejor manera a los valores experimentales (a bajas energías). Por tanto, considerar de 2 a 10 niveles en este modelo es suficiente para correcciones a escalas mesónicas y bariónicas, cuando se considera: $\sqrt{\gamma} = 0,6fm^{-1}$.

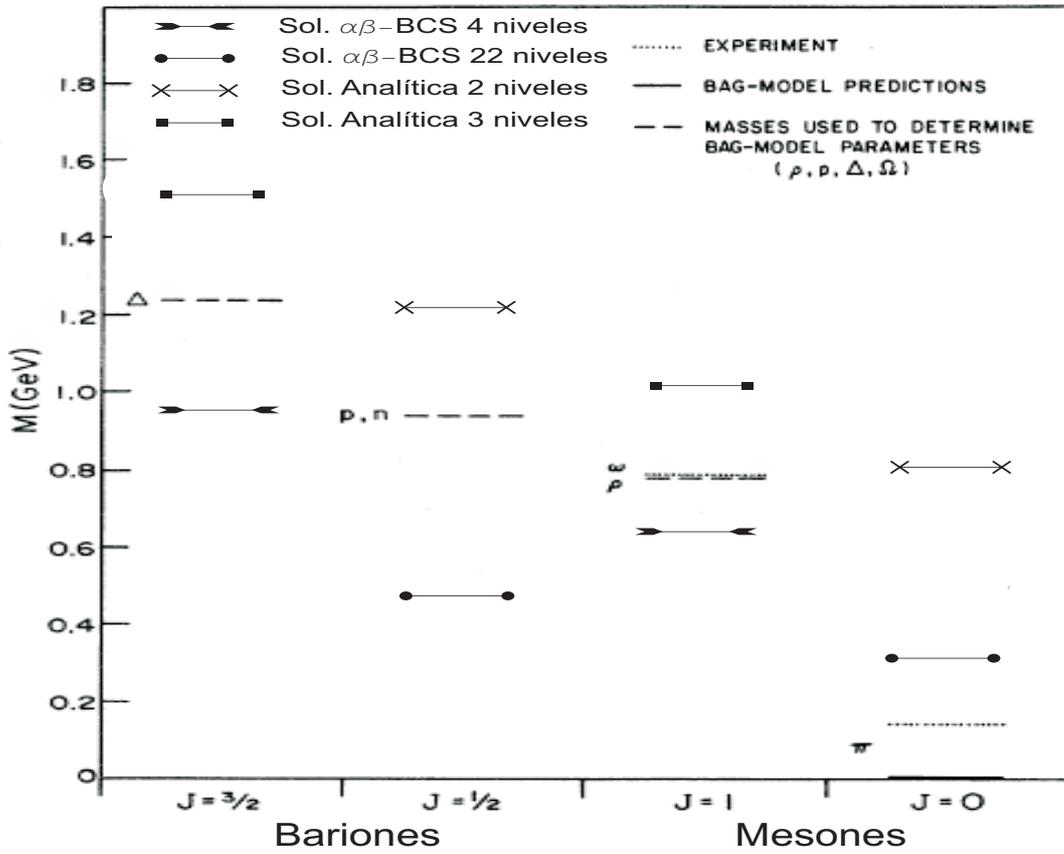


Figura 8.2: Espectro hadrónico para los cuarks más ligeros

8.2. Valor de expectación de los Operadores Bosónicos

En esta sección, se desea mostrar más en detalle el proceso (prueba) realizado para considerar el término de interacción entre cuarks y gluones. Como se mencionó en el capítulo. 7, para hacer una corrección a las soluciones- $\alpha\beta - BCS$ encontradas en el cap. 4 es necesario hacer una aproximación, la cual requiere considerar que solo ciertos componentes gluónicos ($Y_C = 0, I_C = 1, I_{Z_C}$) contribuyen en la interacción entre los cuarks y gluones. Ésto también podría verse como trabajar a los gluones en un sistema intrínseco. En el caso donde $I_{Z_C} = -1, 0, 1$ se esperaba que la componente con $I_{Z_C} = 0$ fuera dominante y así tener un criterio para elegir un componente que al mismo tiempo permita encontrar soluciones analíticas, sin embargo, mediante el estudio de estados coherentes se

observó que los demás componentes tienen valores de expectación en el estado de mínima energía distintos de cero y comparables, aunque, el valor de expectación del operador número $\beta_\nu^\dagger \beta^\nu$ para el componente $(\{0, 1, 0\}, M = 0)$ es considerablemente mayor que los componentes $\{0, 1, I_{Z_C} \neq 0\}, M$.

Por tal razón, el cálculo que se muestra a continuación simplemente es para ejemplificar y jugar con el comportamiento de la solución- $\alpha\beta$ -BCS al considerar que sobre los operadores bosónicos se puede realizar un desplazamiento. De esta forma se genera la expansión del Hamiltoniano en operadores de cuarks y gluones alrededor de otro mínimo de energía, siendo el primer término una constante y el siguiente término la solución- $\alpha\beta$ -BCS más la contribución a esta solución debida al Hamiltoniano de interacción cuark-gluón-cuark, más términos que contienen operadores tanto de cuarks como de gluones.

Para este proceso del cálculo de las correcciones a las energías- $\alpha\beta$ -BCS se consideraron dos métodos, los cuales se describen a continuación.

8.2.1. Método de minimización-1

En este método de minimización, se considera que lo único que se conoce del valor V_0 es que debe ser proporcional a $\frac{q \times g^2}{2}$, en donde $[q] = GeV$ y el Hamiltoniano se minimiza respecto a las variables $a_{(1,0,1)1M\{0,1,I_{Z_C}\}}^e$ y $q_{\pm \frac{1}{2}(N_i, l_i, \frac{1}{2}) \frac{1}{2} \lambda_i c_i f}$. Por simplicidad, en este método se considera $q = 1GeV$. Los efectos de estas consideraciones fueron: La dificultad de controlar la magnitud de las correcciones conforme variaba g , esto es, para valores de $g \in (1, 2)$ las correcciones son físicamente razonables, sin embargo, para $g \in (2, 9)$ (figura 8.3), la magnitud de las correcciones es muy grande, así como el valor mínimo de la energía y el número de gluones que se puede encontrar en el estado de mínima energía.

Este método se utilizó posteriormente, para el caso de un solo componente gluónico, generando mejores resultados que para el caso de nueve componentes; así como un intervalo de variación de g mayor y más adecuado para el caso no perturbativo, mejores valores para las correcciones a las energías hadrónicas y para el número de gluones esperados en el estado de mínima energía. Sin embargo, el método de minimización que se presenta en la siguiente sección, genera resultados con mejor interpretación física y la posibilidad de considerar casos altamente no perturbativos en una bolsa rígida.

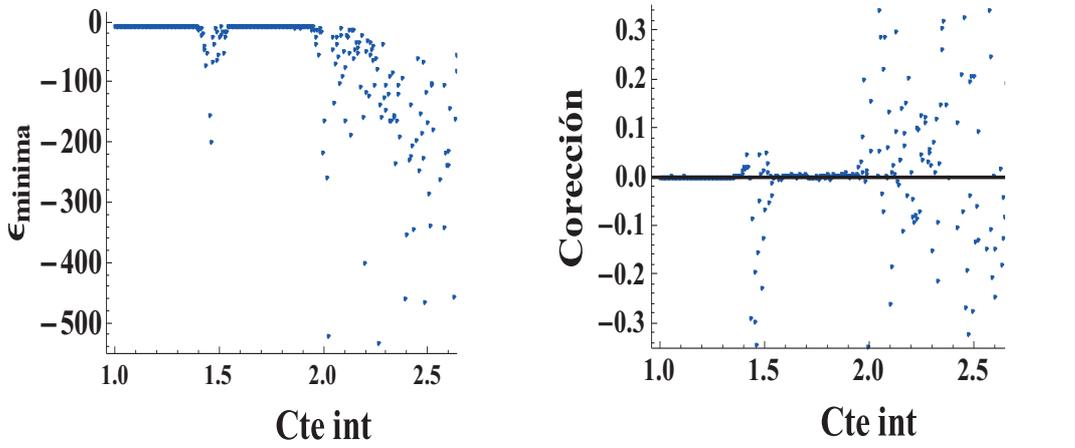


Figura 8.3: Energías de minimización y correcciones para un componente gluónico mediante el método de minimización-1

8.2.2. Método de minimización-2

Dadas las complicaciones que el método anterior presenta incluso en el caso de un solo componente, se decidió buscar en la literatura una forma de asignar a V_0 un intervalo en donde se pudieran tener estados ligados. En publicaciones recientes [61,62] y no tan recientes [47,48], se ha estudiado el potencial de interacción entre cuarks, $V(r) = -\frac{a}{r} + \sigma r$, el cual se discutió podría ser una extensión al potencial de interacción (ver capítulo 5) en el Hamiltoniano de Coulomb. En dichos trabajos se menciona bajo que condiciones se pueden tener diferentes potenciales de interacción, sin embargo, en este método de minimización-2, se utilizan los potenciales referidos en [62] usando $r = 0,6 fm$, lo cual genera un intervalo de variación de $V_0 \in (0,2 GeV, 0,8 GeV)$.

Teniendo estos valores de variación para V_0 , se consideraron ciertos valores de $g = 3, 5, 7$ para estudiar la minimización del Hamiltoniano y poder asignar un valor esperado al operador bosónico que permitiera hacer una estimación a la corrección de las energías- $\alpha\beta - BCS$ bajo las suposiciones hechas en esta búsqueda (de prueba).

En la figura 8.4, se muestran tres diagramas (E_{min} vs V_0 , Corrección vs V_0 : a) para $g=3$, b) $g=5$ y c) $g=7$), que dan los comportamientos de la energía del estado de mínima energía y las correcciones al usar el método de minimización-2. Al igual que en el caso del método de minimización-1, después de cierto valor de V_0 , las correcciones empiezan a perder significado físico.

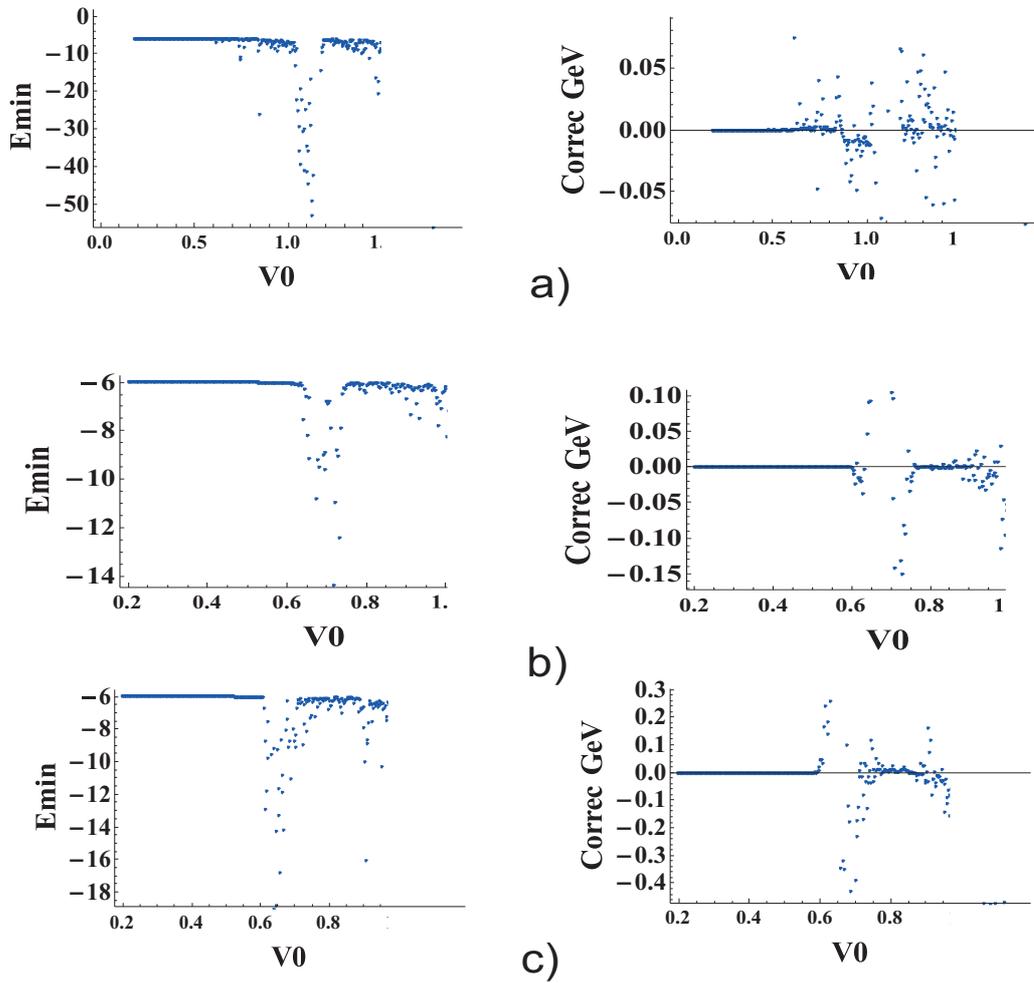


Figura 8.4: Energías de minimización y correcciones para un componente gluónico mediante el método de minimización-2, para a) $g=3$, b) $g=5$ y c) $g=7$.

Los valores representativos de estas minimizaciones se mostraron en las tablas 7.2 y 7.3 para el método de minimización-1 y método de minimización-2 respectivamente. Con estas correcciones se tiene que el Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica que se está considerando tiene la siguiente estructura para el caso en que se consideran los dos niveles más bajos de cuarks y el nivel más bajo de gluones:

$$\mathbf{H}_{CDC}(\alpha\beta - BCS - TO1 - TO2) = \mathbf{K}_q + \mathbf{H}_{m_q} + \mathbf{H}_{Coulomb}^{qg-qg}(V_0) + \mathbf{H}_{gluon} + \mathbf{H}_{int}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mu} \left\{ (0,4026\text{GeV}) \left[\underline{\mathbf{b}}_{1\mu}^{\dagger} \underline{\mathbf{b}}_1^{\mu} + \underline{\mathbf{b}}_{2\mu}^{\dagger} \underline{\mathbf{b}}_2^{\mu} + \underline{\mathbf{d}}_{1\mu}^{\dagger} \underline{\mathbf{d}}_1^{\mu} + \underline{\mathbf{d}}_{2\mu}^{\dagger} \underline{\mathbf{d}}_2^{\mu} \right] \right. \\
&\quad \left. - 2\Delta E_{\alpha\beta-BCS} (-1)^{\frac{1}{2}-\mu} \left\langle \frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2} - \mu \mid 10 \right\rangle \left[\underline{\mathbf{b}}_{1\mu}^{\dagger} \underline{\mathbf{b}}_1^{\mu} + \underline{\mathbf{b}}_{2\mu}^{\dagger} \underline{\mathbf{b}}_2^{\mu} + \underline{\mathbf{d}}_{1\mu}^{\dagger} \underline{\mathbf{d}}_1^{\mu} + \underline{\mathbf{d}}_{2\mu}^{\dagger} \underline{\mathbf{d}}_2^{\mu} \right] \right\} \\
&\quad + \mathcal{C}_2(SU(3)) + cte \quad , \tag{8.5}
\end{aligned}$$

donde puede observarse que se rompe la degeneración en los momentos magnéticos de espín y color debido a las coeficientes de Clebsch-Gordan que aparecen en el Hamiltoniano de interacción.

En la sección siguiente, se muestra como se comporta la solución analítica que se ha encontrado al considerar solo el componente $(\{0, 1, 0\}, M = 0)$ del gluón.

8.2.3. Espectros Hadrónicos Generados al Considerar un Componente Gluónico

Tomando los valores para las correcciones de la tabla 7.3, pueden esquematizarse los espectros hadrónicos que se obtienen si solo se considera un componente gluónico, recordando que el nivel de búsqueda de estas correcciones es de tipo prueba y que para futuros resultados es necesario restaurar la simetría de color en gluones (ésto se considera como tema de investigación futuro, sección 8.3).

La figura 8.5, muestra los anchos de corrección para las energías hadrónicas. Hay que aclarar que la figura 8.5, contiene un conjunto de espectros en el sentido de que, para distintos valores de (g, V_0) se tienen diferentes correcciones a las energías- $\alpha\beta-BCS$. Es por esto que, se han puesto correcciones continuas en lugar de simplemente marcar un conjunto finito de energías, ya corregidas. Por tanto, el espectro de la figura 8.5, ejemplifica las correcciones a las energías- $\alpha\beta-BCS$ al considerar un componente del gluón interactuando con los cuark mediante el espín y el color.

Una determinación más precisa del valor V_0 , será importante para el cálculo de correcciones futuras, si se sigue el camino que se tomó (el uso de estados coherentes y la expansión alrededor de un nuevo mínimo), para la búsqueda de las correcciones. En dichas correcciones futuras, se debe tratar el problema de pasar el nivel de búsqueda de un caracter de prueba a uno fundamental. Para esto, se puede optar por una línea de investigación, en la cual se consideren rotaciones en el espacio del campo gluónico, semejantes a las descritas en [44]. Por tanto, la extensión del modelo que involucra el introducir gluones, se han mostrado en el $\mathbf{H}_{Coulomb}(V_0)$ y su comportamiento como un operador de Casimir, en el \mathbf{H}_{gluon} se fijó la escala del glueball (dos gluones) así como estados

mente, así como el encontrar soluciones analíticas para sistemas más complicados al caso inicial [18]. Ahora bien, la inclusión de gluones en este modelo puede dificultar bastante el álgebra y los cálculos. Estas dos complicaciones se hicieron evidentes al considerar \mathbf{H}_{int} , aún así el actual trabajo tenía como objetivo no hacer un modelo tan complicado cuyo esfuerzo se enfocara en elaborados cálculos numéricos como lo son los cálculos de redes, los cuales en la actualidad, son los mejores procedimientos que existen para cálculos no perturbativos en la CDC. Sin embargo, dentro de la complejidad de la CDC se cree que puede haber un resquicio (el qué tan grande es, es tema de investigación) donde puedan encontrarse soluciones analíticas o semi-analíticas. Es en esta dirección que se pueden considerar como futuros temas de investigación los que a continuación se discuten:

a) La restauración de la simetría de color en el sector de gluones, que en el actual modelo se ha roto, es fundamental para generar un mecanismo mucho más físico.

b) A nivel del sector puramente de cuarks, la extensión del potencial de interacción es el principal tema a tratar. Pueden considerarse potenciales de interacción estáticos y que describan de mejor forma la interacción entre cuarks, lo cual implica saber cómo restringir estos potenciales de interacción para describir estados ligados.

En el caso que se consideren gluones, el trabajo puede complicarse mucho más, pues el núcleo (kernel) del Hamiltoniano de Coulomb contiene gluones de forma dinámica y como tratar estos términos [13], es bastante complicado; más aún, sin perder el enfoque de encontrar posibles soluciones analíticas o semi-analíticas es necesario investigar nuevos mecanismos para trabajar el Hamiltoniano de Coulomb.

c) El actual modelo partió de considerar un Hamiltoniano motivado de la CDC en la norma de Coulomb. Sin embargo, para tener un modelo cada vez más cercano a la CDC real es necesario introducir los demás términos del Hamiltoniano de la ec. (2.39), el cual a través del Hamiltoniano de Coulomb, involucra las interacciones de un número arbitrario de gluones (este puede ser una de las extensiones del modelo más complicadas). También, el campo cromo-magnético involucra la interacción de dos, tres y cuatro gluones mediante el color. En la literatura [38–40], existen técnicas para trabajar algunos de estos términos, lo cual dará una mejor descripción del espectro gluónico que el obtenido en actual trabajo.

d) La extensión que posiblemente sea el obstáculo más grande para este modelo, es hacer tender el volumen a infinito. Hacer tender el volumen a infinito pretende por un lado relacionar el modelo

con el mundo real, donde el volumen que los sistemas hadrónicos pueden ocupar no está restringido y a pesar de eso se mantienen unidos en paquetes muy pequeños, esto es, el estudio de los mecanismos de confinamiento es otro tema posible. El estudio de rompimiento de la simetría quiral es otro tema de investigación, que requiere la extensión a un volumen infinito.

Capítulo 9

Resumen y Conclusiones

En este capítulo, se presentan las conclusiones que el modelo generó durante su desarrollo y en los puntos que sea necesario abundar, sobre las implicaciones de estas conclusiones, se da un breve comentario. Para dar un mejor contexto a las conclusiones que aquí se presentan, se enfatiza el objetivo del presente trabajo: El presente trabajo tiene como primer objetivo, construir un modelo que estudie de forma aproximada la CDC a bajas energías. Este estudio se enfoca en la búsqueda de posibles soluciones analíticas, semi-analíticas y con relevancia física, esto es, que dichas soluciones sean comparables con resultados de otros modelos y con resultados experimentales. Por último, mediante diferentes extensiones del modelo, este se aproxime cada vez más a la CDC real.

El modelo desarrollado consistió en considerar un Hamiltoniano motivado de la CDC al trabajar en la norma de Coulomb, por lo que el modelo parte de primeros principios al incluir grados de libertad dinámicos, así como grados de libertad intrínsecos, esto es, se consideró el espín, el color y en el caso de los cuarks, el sabor de las partículas. Las consideraciones generales del modelo fueron las siguientes: se consideró un volumen finito, un potencial de interacción promedio, V_0 , para describir la interacción entre cuarks. A continuación se presentan las conclusiones del modelo bajo dichas consideraciones.

1.- La primera versión de este modelo [18], consideró únicamente cuarks sin masa, restringidos a ocupar un nivel orbital s y un grupo $SU(2)$ para describir el color y el sabor; el resultado de este modelo fue una solución analítica. Para el presente trabajo, se dedujo de forma general la expresión efectiva para los términos cinético y Coulombiano (las conclusiones para este último se describen

en los puntos 7 y 8). El presente trabajo, consideró primeramente el caso inmediato a [18], esto es, un sistema de cuarks sin masa, para dos niveles orbitales (un nivel s y un nivel p) y nuevamente un grupo $SU(2)$ para describir el color y sabor de los cuarks. El primer intento por resolver este sistema y encontrar sus valores propios, consistió en construir todos los estados posibles para este sistema, así como los elementos de matriz. Sin embargo, la dimensión de la matriz fue del orden de 80000×80000 , por lo que, la diagonalización del Hamiltoniano lucía muy complicada, incluso para este primer modelo, por lo que pensar en las extensiones siguientes era aún más complicado. En este trabajo, no se concluyó el cálculo numérico correspondiente, pero ayudó a entender la importancia de obtener una solución analítica, pues las extensiones del modelo realizadas paso a paso (las cuales se mencionan en los siguientes puntos), pudieron hacerse sin complicar demasiado la búsqueda de su solución.

2.- La búsqueda de soluciones analíticas, bajo las consideraciones generales y tomar solo el sector de cuarks sin masa, tuvo éxito para los casos de dos y tres niveles orbitales. A dichas soluciones se les denominó: soluciones $SU(2)$, por el tipo de álgebra encontrada. Estas soluciones analíticas, consideraran un grupo $SU(2)$ o $SU(3)$ para describir el color y donde se utilizó un radio de bolsa equivalente al de un protón para fijar la escala mesónica y bariónica. Por tanto, se concluye de este punto que: es posible encontrar soluciones analíticas dentro del contexto de una aproximación a la CDC, estas soluciones pueden compararse con energías reportadas en la literatura de forma satisfactoria y además permiten extensiones de este modelo, que indiquen cómo se modifican la soluciones al considerar un modelo cada vez más cercano a la CDC real.

3.- Para la extensión inmediata del modelo, esto es, cuatro niveles orbitales, se buscó una solución $SU(2)$ semejante a la encontrada previamente. Sin embargo, esto no fue posible, concluyendo por un lado que: la solución analítica $SU(2)$ se rompe para el caso de más de tres niveles orbitales y por otro lado, la necesidad de usar otros caminos para resolver sistemas de cuarks sin masa y de ser posible con masa.

4.- Se investigó con éxito, un camino alternativo para resolver sistemas de cuarks con un número mayor de niveles orbitales. Para esto se desarrolló un método denominado, $\alpha\beta - BCS$, el cual es la combinación de dos transformaciones ortogonales sucesivas. El resultado de este desarrollo, es un método que es capaz de considerar un sistema de cuarks con o sin masa, un número arbitrario de niveles orbitales y de resolver de forma semi-analítica el Hamiltoniano en el sector de cuarks.

Para obtener los valores propios de estos sistemas, es necesario resolver un sistema de ecuaciones cuadráticas y bilineales con $2n_j^2$ variables por resolver (n_j es la mitad del número de niveles orbitales considerados) y donde se usaron métodos computacionales para resolver dichos sistemas de ecuaciones. Del desarrollo de este nuevo método, se concluye que: es posible, usando las transformaciones y las condiciones adecuadas, encontrar una solución analítica que diagonalice el sector de cuarks del Hamiltoniano motivado de la CDC, para un número arbitrario de niveles, siendo solamente necesario fijar un parámetro.

5.- Para probar el método de solución, $\alpha\beta - BCS$, se consideraron, los casos de dos y cuatro niveles orbitales. El caso de dos niveles orbitales (dos ecuaciones y dos variables por determinar), se comparó con la solución analítica $SU(2)$, coincidiendo de forma exacta, cuando se usa el mismo radio de bolsa y generando así escalas mesónicas y bariónicas reportadas por otros modelos. Por otro lado, el caso de cuatro niveles orbitales (ocho ecuaciones cuadráticas y bilineales por resolver), es el primer caso donde se rompe la solución $SU(2)$ y por tanto, no es posible comparar con la solución analítica $SU(2)$, sin embargo, las escalas mesónicas obtenidas mediante el método de solución $\alpha\beta - BCS$, para el caso de cuatro niveles orbitales coinciden con valores reportados en la literatura, no así las escalas bariónicas, cuando se usa como radio de bolsa el radio del protón.

6.- Dadas las conclusiones del punto anterior para el caso de cuatro niveles orbitales, se ajustó nuevamente el radio de bolsa para el caso de cuatro niveles orbitales, de forma tal que las escalas mesónicas y bariónicas correspondieran a $\approx 300MeV$ y $\approx 900MeV$ respectivamente. Este ajuste generó un radio de bolsa de $0,6fm$, el cual se mantuvo para todas las extensiones siguientes del modelo. Concluyendo así que dependiendo del número de niveles orbitales que se desee considerar es necesario un ajuste en el radio de bolsa. Para este trabajo se decidió fijar las escalas hadrónicas para el caso de cuatro niveles y estudiar el comportamiento de los niveles de energía para un radio fijo. No se hizo un estudio del comportamiento de los niveles de energía como función del radio de bolsa, por lo que la inclusión de un número mayor de niveles (punto 11), tuvo discrepancias con los valores reportados en la literatura, para un número mayor a diez niveles orbitales. Esta característica se puede mejorar haciendo un ajuste de los niveles de energía (dados por la solución- $\alpha\beta - BCS$), como función del radio de bolsa, semejante al realizado por el modelo del MIT.

7.- Para las soluciones analíticas- $SU(2)$ y las soluciones semi-analíticas- $\alpha\beta - BCS$, se ha considerado el término Coulombiano del Hamiltoniano de la CDC en el sector de cuarks. Sin embargo, al

dependen el término Coulombiano de los generadores de color, este conmuta con el término cinético de cuarks y por tanto, se pudieron resolver de forma simultánea. Para el término Colombiano, también se encontró una solución analítica, ya que para este, se mostró que corresponde a un operador de Casimir del grupo SU(3) de color, donde el valor propio del operador de Casimir se conoce. De lo anterior se concluye que la función del término Coulombiano bajo las consideraciones generales, es la de separar estados de color de estados sin color.

En este modelo, no se consideró otro tipo de potencial de interacción, sin embargo, como primer estudio de un potencial de interacción no constante, puede tomarse $V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -\frac{a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + b|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. En donde puede estudiarse para qué valores de a y b , se recupera la estructura de operador de Casimir, con lo que la acción de separar estados de color, de estados sin color se obtiene nuevamente. Por otro lado, se puede estudiar con qué condiciones para a y b se tienen estados ligados. Por el momento, el modelo no puede concluir nada referente al uso de otros potenciales de interacción, ya sean estáticos o dinámicos, pero se han planteado como temas de investigación a futuro.

Sin relajar las consideraciones generales, se incluyó en este modelo los gluones, para lo cual se tienen las siguientes conclusiones:

8.- Se introdujo la densidad de carga de color de gluones en el término Coulombiano de la CDC, en donde este se convirtió en la interacción de dos densidades de carga total (cuarks más gluones) mediante un potencial de interacción promedio, V_0 . Se mostró que nuevamente el término Coulombiano es proporcional a un operador de Casimir del grupo de color y donde se conoce su valor propio. Con lo anterior se tiene una conclusión semejante a la obtenida para el sector puramente de cuarks, la cual es que, el término Coulombiano tiene la función de separar estados de color de estados sin color y donde ahora los estados pueden contener o no gluones.

9.- El siguiente paso en la inclusión de gluones al modelo, correspondió al término cinético de gluones, \mathbf{H}_{gluon} , para el cual se dedujo su expresión efectiva. Se encontró que el término cinético de gluones considerado en \mathbf{H}_0 de [13], tiene una solución analítica. Las conclusiones inmediatas de esta solución fueron: la obtención del estado de menor energía, para el cual se ajustó el radio de bolsa de forma tal que, la energía más baja correspondiera a la energía del glueball (dos gluones $\approx 1600 MeV$), reportada en la literatura. Este ajuste generó un radio de bolsa de $\approx 0,75 fm$, dicho valor es mayor al radio de bolsa obtenido para el sector de cuarks ($0,6 fm$), sin embargo, al considerar un valor promedio entre estos dos valores, se ajustan muy bien tanto las escalas mesónicas, bariónicas y del

glueball. Una segunda conclusión, es que el espectro generado por la solución analítica es del tipo oscilador armónico, el cual difiere de valores reportados, sin embargo, faltan considerar interacciones entre gluones correspondientes al \mathbf{H}_1 de [13], las cuales consideran interacciones de un número arbitrario de gluones. Estas interacciones generarán correcciones tanto a la energía del glueball, como a las energías de los estados excitados. El estudio de estas correcciones se ha planteado como tema de investigación a futuro.

10.- Una vez fijadas las escalas para estados puramente de cuarks (mesones y bariones) y puramente de gluones (glueball), se procedió a introducir el término de interacción entre cuarks y gluones, \mathbf{H}_{int} del \mathbf{H}_1 dado en [13]. Para este término se dedujo la expresión efectiva a analizar, se discutieron propiedades y características de éste, que no había aparecido previamente en el modelo y que dificultaban la búsqueda de posibles soluciones analíticas al hacer esta extensión del modelo.

Para hacer los cálculos de las correcciones a las escalas hadrónicas obtenidas, mediante el \mathbf{H}_{int} , se tomaron ciertos componentes del campo gluónico, con lo que, se rompió la simetría de color en el sector gluónico. Por tanto, esta primera búsqueda para las correcciones a las escalas hadrónicas, tiene un carácter de prueba y no fundamental, sin embargo, sirvió para familiarizarse con muchos de los aspectos por considerar gluones en el modelo y así facilitar cálculos futuros, en donde se restaure la simetría de color.

Las conclusiones que se obtuvieron de haber hecho esta búsqueda de prueba, para los dos estados de cuarks de menor energía y el estado gluónico más bajo, son las siguientes:

10a) Para el caso en donde se consideraron nueve componentes para el campo gluónico, esto es, $\{Y_C = 0, I_C = 1, I_{Z_C} = -1, 0, 1\}$ y $M = -1, 0, 1$, se utilizaron dos métodos de minimización: para el método de minimización-1 ($V_0 = \frac{q*g^2}{2}$, $q = 1$ y g =variable), se tuvieron muchas complicaciones para asociar una corrección a las energías- $\alpha\beta - BCS$, debido a que de forma muy rápida (al variar g), dichas correcciones perdían significado físico. Por tanto, concluir alguna corrección para el caso de nueve componentes del campo gluónico y usando el método de minimización-1, es difícil, más no imposible. Para el método de minimización-2 ($V_0 = \frac{q*g^2}{2}$, $g = 3, 5, 7$ y q =variable), se tuvieron mejores resultados, siendo posible determinar una escala para V_0 , g y lo más importante; correcciones a las escalas hadrónicas dentro de intervalos reportados en la literatura.

Por otro lado, al no tener una conclusión contundente del método de minimización-1 para el caso de nueve componentes, se pensó que al utilizar el método de minimización-2, además de poder

determinar una corrección a las escalas hadrónicas, uno de los componentes del campo gluónico, sería dominante en el número de gluones correspondiente a dicho componente en el estado de menor energía, lo cual no necesariamente fue cierto, sin embargo, el componente $\{Y_C = 0, I_C = 1, I_{Z_C} = 0\}$ y $M = 0$ tuvo valores de expectación altos y en algunos casos considerablemente mayores. Por tanto, las conclusiones que se obtuvieron de aplicar el método de minimización-2 para el caso de nueve componentes son: una corrección a las escalas hadrónicas- $\alpha\beta - BCS$, al utilizar valores de V_0 correspondientes a potenciales de interacción entre cuarks reportados en la literatura, además de, obtener el número de gluones para cada componente en el estado de menor energía del sistema.

10b) La siguiente consideración fue, investigar el comportamiento de las correcciones a las escalas hadrónicas- $\alpha\beta - BCS$, al considerar que solo la componente $\{Y_C = 0, I_C = 1, I_{Z_C} = 0\}$ y $M = 0$ del campo gluónico interviene en la interacción entre cuarks y gluones. Nuevamente, se investigaron las implicaciones de utilizar los métodos de minimización-1 y 2.

Para el método de minimización-1, las conclusiones inmediatas de este estudio fueron: primero, el intervalo de variación para la constante de interacción fuerte, resultó ser un poco más extenso que en el caso de nueve componentes; segundo, las correcciones a las energías- $\alpha\beta - BCS$, determinadas en dicho intervalo de variación de la constante de interacción fuerte, resultaron físicas y tercero, se pudo determinar que el número de gluones en el mínimo de energía está entre 0 y 5.

Para el método de minimización-2 y una sola componente, las conclusiones inmediatas fueron aún mejores que para el método de minimización-1 y 2, aplicados al caso de nueve componentes y que el método de minimización-1 para el caso de una sola componente gluónico. Las tres conclusiones mencionadas en el párrafo anterior se volvieron a manifestar, pero ahora el intervalo de variación referente a V_0 , permitió considerar valores de la constante de interacción fuerte, mayores y las escalas de variación siguieron un comportamiento semejante para cada valor de g considerado. El comportamiento observado para este método de minimización-2 y un solo componente gluónico, permitió determinar un mínimo de energía global; para valores de (g, V_0) reportados en la literatura y fuera de este mínimo de energía global, la energía mínima correspondió a una energía muy cercana a la energía mínima obtenida del método- $\alpha\beta - BCS$. Por tanto, este método de minimización, permite asignar diferentes escalas a las correcciones a las energías- $\alpha\beta - BCS$ de una partícula, en función de los valores de (g, V_0) , dichas correcciones van desde $\approx 0,001 GeV$ a $\approx 0,180 GeV$.

10c) Los métodos de minimización-1 y 2 tienen la limitación de no poder determinar una correc-

ción física a las energías hadrónicas- $\alpha\beta - BCS$ (tanto para el caso de nueve componentes gluónicos, como para el caso de un solo componente gluónico), para valores de g y V_0 mayores a 9 y 2GeV respectivamente, tomando fijo el radio de bolsa a $0,6fm$.

11) La extensión del modelo a un número mayor (a cuatro) de niveles orbitales en el sector de cuarks y un radio de bolsa de $0,6fm$, generó las siguientes conclusiones:

11a) Mediante el uso del método- $\alpha\beta - BCS$ para 2,...,22 niveles orbitales, se estudió el comportamiento de la energía más baja de una partícula. De este estudio, se concluyó que la energía más baja tiende a un valor finito, distinto cero. De esta manera, la escala mesónica necesita correcciones pequeñas para, por ejemplo, describir al pión.

11b) Se concluyó que las escalas mesónicas vectoriales, se mantienen dentro de intervalos reportados para los casos de 2-10 niveles orbitales y de 12-22 para mesones escalares. Por otro lado, las escalas bariónicas se comportan dentro de intervalos reportados, solamente para los casos de 2-10 niveles orbitales. Conforme se incrementó el número de niveles orbitales (mayor a 10), las discrepancias en las escalas bariónicas aumentaban. Por tanto, para un radio de bolsa de $0,6fm$, las escalas hadrónicas se encuentran dentro de los intervalos reportados, para los casos de 2-10 niveles orbitales.

11c) En este trabajo se presentaron las energías propias para los casos de 2-22 niveles orbitales, teniéndose así, múltiples energías de excitación, sin embargo, en la literatura existen solo ciertos estados excitados reportados, por ejemplo, para el neutrón $N(940)$, las resonancias más bajas conocidas son: $N(1440)$ y $N(1535)$. Por tales motivos, no es posible tener una conclusión sobre las energías de excitación más altas de este modelo. Por otro lado, el modelo tiene una alta degeneración y tratar de describir algunos de estos estados excitados, es algo aventurado, pero lo que sí puede concluirse en este modelo, son las escalas de excitación más bajas, las cuales, por ejemplo, para el caso del protón o neutrón ($945MeV$) y considerando *cuatro niveles orbitales* se tienen; $1294MeV$ y $1643MeV$ como escalas de excitación más bajas. Por tanto, el modelo también determina las escalas de excitación dentro de intervalos reportados y de forma semi-analítica, requiriendo así, correcciones futuras para dichas escalas.

El modelo aún tiene muchos aspectos por trabajar pero la estructura y las ideas básicas están establecidas. La continuación de este trabajo puede servir para estudiantes de licenciatura, maestría y doctorado, dependiendo de los aspectos que se quieran tratar. El autor espera poder colaborar con dichos estudiantes, en las diferentes extensiones del modelo.

Apéndice A

Deducción del Término Cinético de Cuarks

En este Apéndice se hace la deducción del término cinético de cuarks discutido en los capítulos 3 y 4. El término cinético de cuarks viene dado por:

$$\mathbf{K}_q = \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla] \psi(\mathbf{r}) \quad (\text{A.1})$$

donde el campo fermiónico es un espinor de Dirac. Sus dos primeras componentes, $\psi_1^\dagger(\mathbf{r}, \sigma, c, f)$, describen partículas de pseudo-espín positivo, esto es, estados de energía positiva mientras que, las dos últimas componentes, $\psi_2^\dagger(\mathbf{r}, \sigma, c, f)$, describen partículas de pseudo-espín negativo o estados de energía negativa. Por tanto, el campo fermiónico está dado por: $\boldsymbol{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) = (\psi_1^\dagger(\mathbf{r}, \sigma_1, c_1, f_1), \psi_2^\dagger(\mathbf{r}, \sigma_2, c_2, f_2))$ y $\boldsymbol{\alpha}$, son las matrices de Pauli. Con lo anterior, el término cinético se puede escribir en función de los componentes del campo fermiónico de la siguiente forma:

$$\mathbf{K} = -i \int d\mathbf{r} \{ \psi_1^\dagger(\mathbf{r}, \sigma', c', f') \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \psi_2(\mathbf{r}, \sigma, c, f) + \psi_2^\dagger(\mathbf{r}, \sigma', c', f') \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \psi_1(\mathbf{r}, \sigma, c, f) \} \quad (\text{A.2})$$

donde cada uno de los componentes del campo fermiónico tienen la siguiente estructura

$$\begin{aligned} \psi_1^\dagger(\mathbf{r}, \sigma, c, f) &= \sum_{Nlm\sigma cf} \mathbf{b}_{\frac{1}{2}, Nlm, \sigma cf}^\dagger R_{Nl}^*(r) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) \chi_\sigma^\dagger \\ \psi_2^\dagger(\mathbf{r}, \sigma, c, f) &= \sum_{Nlm\sigma cf} \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}, Nlm, \sigma cf}^\dagger R_{Nl}^*(r) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) \chi_\sigma^\dagger \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_1(\mathbf{r}, \sigma, c, f) &= \sum_{Nlm\sigma cf} \mathbf{b}_{\frac{1}{2}, Nlm, \sigma cf}^{\dagger} R_{Nl}(r) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_{\sigma} \\
 \psi_2(\mathbf{r}, \sigma, c, f) &= \sum_{Nlm\sigma cf} \mathbf{b}_{\frac{1}{2}, Nlm, \sigma cf} R_{Nl}(r) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_{\sigma}.
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

El siguiente paso en la deducción del término cinético de cuarks en la base escogida, es considerar el producto escalar $[\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla]_{\sigma', \sigma}$ en componentes esféricas, para lo cual hay que notar que el gradiente por un lado actúa en la base de las funciones espaciales y por otro lado las matrices de Dirac actúan sobre los espinores, (χ_{σ}) . Por tanto, se hace uso de las siguientes relaciones conocidas [54, 57]:

$$\begin{aligned}
 [\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla]_{\sigma', \sigma} &= [2\mathbf{S} \cdot \nabla]_{\sigma', \sigma} = 2\chi_{\sigma'}^{\dagger} \mathbf{S} \cdot \nabla \chi_{\sigma} \\
 &= \sum_{\mu} (-1)^{1+\mu} \frac{\sqrt{3}}{2} \langle 1 - \mu, \frac{1}{2}\sigma | \frac{1}{2}\sigma' \rangle \nabla_{\mu} \\
 &= \sum_{\mu} (-1)^{1+\mu+\frac{1}{2}+\sigma} \sqrt{2} \langle \frac{1}{2}\sigma', \frac{1}{2} - \sigma | 1 - \mu \rangle \nabla_{\mu} \\
 \langle l'm' | \nabla_{\mu} | lm \rangle &= \left(\frac{l+1}{2l+3} \right)^{\frac{1}{2}} \langle lm, 1\mu | l', m' \rangle \left(\frac{d}{dr} - \frac{l}{r} \right) \delta_{l', l+1} \\
 &\quad - \left(\frac{l}{2l-1} \right)^{\frac{1}{2}} \langle lm, 1\mu | l', m' \rangle \left(\frac{d}{dr} + \frac{l+1}{r} \right) \delta_{l', l-1}.
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Al considerar las relaciones (A.4) el término cinético se puede reescribir como la suma de cuatro términos $K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$, donde podemos asociar $K_{12} = K_1 + K_2$ ya que el álgebra necesaria para estos dos términos es la misma que se requiere para $K_{34} = K_3 + K_4$. Por tanto, el término cinético (A.2) se escribe como la suma $K = K_{12} + K_{34}$. A continuación se desarrolla K_{12} mientras que K_{34} se obtiene simplemente cambiando los índices de pseudo-espín en los operadores de creación y aniquilación.

Término K_{12}

Para el desarrollo del término K_{12} se usa la representación acoplada para los operadores de creación y aniquilación la cual viene dada por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2}, Nlm, \sigma cf}^{\dagger} &= \sum_{j\lambda} \langle lm, \frac{1}{2}\sigma | j\lambda \rangle \mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2}(N, l, \frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} \\
 \mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2}, Nlm, \sigma cf} &= \sum_{j\lambda} \langle lm, \frac{1}{2}\sigma | j\lambda \rangle \mathbf{b}^{\pm\frac{1}{2}(N, l, \frac{1}{2})j\lambda cf}
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

con lo cual se tiene la siguiente expresión para el término K_{12}

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{12} &= -i \sum_{N'N'l'j'\lambda'\lambda m'm\sigma'\sigma\mu c f} \sum \sqrt{2} \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N'l', \frac{1}{2})j'\lambda'cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N,l, \frac{1}{2})j\lambda cf} \\
 &(-1)^{1+\mu} (-1)^{\frac{1}{2}+\sigma} \langle l'm', \frac{1}{2}\sigma' | j'\lambda' \rangle \langle lm, \frac{1}{2}\sigma | j\lambda \rangle \langle \frac{1}{2}\sigma', \frac{1}{2} - \sigma | 1 - \mu \rangle \\
 &\int r^2 dr R_{N'l'}^*(r) \left[\left(\frac{l+1}{2l+3} \right)^{\frac{1}{2}} \langle lm, 1\mu | l'm' \rangle \left(\frac{d}{dr} - \frac{l}{r} \right) \delta_{l', l+1} \right. \\
 &\left. - \left(\frac{l}{2l-1} \right)^{\frac{1}{2}} \langle lm, 1\mu | l'm' \rangle \left(\frac{d}{dr} - \frac{l+1}{r} \right) \delta_{l', l-1} \right] R_{Nl}(r) \quad (\text{A.6})
 \end{aligned}$$

con la finalidad de reducir este resultado lo más posible se usa la siguiente relación para la suma del producto de cuatro coeficientes Clebsch-Gordan [58], la cual se aplica para los términos K_1 y K_2 simplemente usando $l' = l + 1$ y $l' = l - 1$ respectivamente:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\kappa\psi\rho\sigma\tau} (-1)^{p-\psi+q-\kappa+r-\rho+s-\sigma+t-\tau} \begin{pmatrix} p & a & q \\ \psi & -\alpha & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & r & t \\ -\kappa & \rho & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & a' & s \\ -\rho & \alpha' & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & p & t \\ -\sigma & -\psi & -\tau \end{pmatrix} \\
 &= \frac{(-1)^{a-\alpha}}{\widehat{\Gamma}_a^2} \left\{ \begin{matrix} q & p & a \\ s & r & t \end{matrix} \right\} \delta_{aa'} \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (\text{A.7})
 \end{aligned}$$

por tanto, para la ecuación (A.6) se tiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned}
 &\sum_{mm'\sigma\sigma'\mu} \langle lm, 1\mu | l'm' \rangle \langle l'm', \frac{1}{2}\sigma' | j'\lambda' \rangle \langle lm, \frac{1}{2}\sigma | j\lambda \rangle \langle \frac{1}{2}\sigma', \frac{1}{2} - \sigma | 1 - \mu \rangle (-1)^{1+\mu+\frac{1}{2}+\sigma} \\
 &= (-1)^{j'+l+\frac{1}{2}} \sqrt{3} \sqrt{2l'+1} \left\{ \begin{matrix} l' & \frac{1}{2} & j \\ \frac{1}{2} & l & 1 \end{matrix} \right\} \delta_{j'j} \delta_{\lambda'\lambda}. \quad (\text{A.8})
 \end{aligned}$$

Por último, se usa una relación para el coeficiente 6-J, útil debida la estructura que se tiene tanto para el caso donde, $l' = l + 1$, como para el caso donde $l' = l - 1$:

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & b & b+1 \\ d & c & c \end{matrix} \right\} = (-1)^{1+b+c+d} \sqrt{\frac{(1+b+c-d)(1+b-c+d)(-b+c+d)(2+b+c+d)}{(1+2b)(2+2b)(3+2b)c(1+2c)(2+2c)}}. \quad (\text{A.9})$$

Los coeficientes 6-J que se obtienen para K_1 y K_2 respectivamente son los siguientes

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{ccc} l+1 & \frac{1}{2} & j \\ \frac{1}{2} & l & 1 \end{array} \right\} &\Rightarrow j = l + \frac{1}{2} \\ \left\{ \begin{array}{ccc} l-1 & \frac{1}{2} & j \\ \frac{1}{2} & l & 1 \end{array} \right\} &\Rightarrow j = l - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

con esto se tiene que los factores de la intensidad vienen dados por

$$\begin{aligned} \int r^2 dr R_{N'l}^*(r) \left(\frac{d}{dr} - \frac{l}{r} \right) R_{N'l}(r) &= \int r^2 dr R_{N'j+\frac{1}{2}}^*(r) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-\frac{1}{2}}{r} \right) R_{N'j-\frac{1}{2}}(r) \\ \int r^2 dr R_{N'l}^*(r) \left(\frac{d}{dr} + \frac{l+1}{r} \right) R_{N'l}(r) &= - \int r^2 dr R_{N'j+\frac{1}{2}}(r) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-\frac{1}{2}}{r} \right) R_{N'j-\frac{1}{2}}^*(r) \end{aligned}$$

Finalmente, el término K_{12} se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} K_{12} &= i \sum_{N'Nj\lambda cf} \int r^2 dr R_{N'j+\frac{1}{2}}^*(r) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-\frac{1}{2}}{r} \right) R_{N'j-\frac{1}{2}}(r) \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N',j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \\ &\quad - i \sum_{N'Nj\lambda cf} \int r^2 dr R_{N'j+\frac{1}{2}}(r) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-\frac{1}{2}}{r} \right) R_{N'j-\frac{1}{2}}^*(r) \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N',j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \end{aligned}$$

para el cual se usa una notación corta dada por

$$\begin{aligned} K_{12} &= \sum_{N'Nj\lambda cf} k_{NN'}^j \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N',j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \\ &\quad + \sum_{N'Nj\lambda cf} \left(k_{NN'}^j \right)^* \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N',j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

y donde los factores de intensidad dependen de la base que se utilice en la expansión de los campos fermiónicos, esto es,

$$k_{NN'}^j = i \int r^2 dr \left[R_{N(j+\frac{1}{2})}^*(r) \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-\frac{1}{2}}{r} \right) R_{N'(j-\frac{1}{2})}(r) \right]. \quad (\text{A.12})$$

Término K_{34}

La metodología a seguir para a obtención del término K_{34} es la misma. Lo único que se tiene que hacer es cambiar los índices de pseudo-espín en los operadores de creación y aniquilación de la siguiente forma: $\frac{1}{2} \leftrightarrow -\frac{1}{2}$ y viceversa. De esta forma, el término K_{34} tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned}
 K_{34} &= \sum_{N'Nj\lambda cf} k_{NN'}^j \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \\
 &+ \sum_{N'Nj\lambda cf} \left(k_{NN'}^j\right)^* \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}. \tag{A.13}
 \end{aligned}$$

Finalmente, el término cinético de cuarks se escribe de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 K &= \sum_{N'Nj\lambda cf} k_{NN'}^j \left[\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right] \\
 &+ \sum_{N'Nj\lambda cf} \left(k_{NN'}^j\right)^* \left[\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right]. \tag{A.14}
 \end{aligned}$$

Apéndice B

Factores de Interacción y Conexiones para el Término Cinético de Cuarks

Para hacer el cálculo de los factores de interacción, es necesario escoger la base de expansión del campo fermiónico. En este trabajo se usa la base del oscilador armónico en tres dimensiones, donde la parte angular viene dada por los armónicos esféricos, $Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ y la parte radial está dada por: $R_{n'l}(r) = N_{n'l} \exp(-\frac{\gamma r^2}{2}) r^l L_{n'}^{l+\frac{1}{2}}(\gamma r^2)$, [36, 37]. Esta es la notación estandar para el oscilador armónico en tres dimensiones. Al final de este Apéndice se retoma la notación N, j en lugar de n, l mediante las relaciones: $l = j - \frac{1}{2}$, $l' = j + \frac{1}{2}$, $N = 2n + l'$ y $N' = 2n' + l$.

Los factores de interacción del término cinético de cuarks, $k_{NN'}^j \rightarrow k_{nn'}^l$, vienen dados por

$$k_{nn'}^l = i \int r^2 dr \left[R_{n'l}^*(r) \left(\frac{d}{dr} - \frac{l}{r} \right) R_{n'l}(r) \right]. \quad (\text{B.1})$$

El resultado de aplicar el operador $\left(\frac{d}{dr} - \frac{l}{r} \right)$ sobre la función radial es el siguiente

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{l}{r} \right) R_{n'l}(r) = N_{n'l} \left\{ r^l \exp(-\frac{\gamma r^2}{2}) \frac{d}{dr} L_{n'}^{l+\frac{1}{2}}(\gamma r^2) - \gamma r^{l+1} \exp(-\frac{\gamma r^2}{2}) L_{n'}^{l+\frac{1}{2}}(\gamma r^2) \right\}. \quad (\text{B.2})$$

Mediante el uso de relaciones de los polinomios de Laguerre [66],

$$\begin{aligned} L_n^\alpha(x) &= L_n^{\alpha+1}(x) - L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ \frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) &= -L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

la ecuación (B.2), puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dr} - \frac{l}{r} \right) R_{n'l}(r) &= N_{n'l} \left\{ -2\gamma r^{l+1} \exp\left(-\frac{\gamma r^2}{2}\right) L_{n'-1}^{l+1+\frac{1}{2}}(\gamma r^2) \right. \\
 &\quad - \gamma r^{l+1} \exp\left(-\frac{\gamma r^2}{2}\right) L_{n'}^{l+1+\frac{1}{2}}(\gamma r^2) \\
 &\quad \left. + \gamma r^{l+1} \exp\left(-\frac{\gamma r^2}{2}\right) L_{n'-1}^{l+1+\frac{1}{2}}(\gamma r^2) \right\} \\
 &= N_{n'l} \left\{ -\gamma \frac{R_{n'-1,l+1}(r)}{N_{n'-1,l+1}} - \gamma \frac{R_{n',l+1}(r)}{N_{n',l+1}} \right\}. \tag{B.4}
 \end{aligned}$$

Por tanto, los factores de interacción del término cinético de cuarks vienen dados por

$$k_{nn'}^l = -i\gamma \frac{N_{n',l}}{N_{n'-1,l+1}} \delta_{n,n'-1} \delta_{l',l+1} - i\gamma \frac{N_{n',l}}{N_{n',l+1}} \delta_{n,n'} \delta_{l',l+1}. \tag{B.5}$$

Ahora para retomar la notación j, N , hay que remplazar $n' = \frac{N'-l}{2}$ y $n = \frac{N-l'}{2}$, así para el primer y segundo término de la ecuación (B.5) se tiene respectivamente

$$\begin{aligned}
 n &= n' - 1 \Rightarrow N' = N + 1 \\
 n &= n' \Rightarrow N' = N - 1. \tag{B.6}
 \end{aligned}$$

El cociente entre las constantes de normalización usando la ec. (B.6), se escribe en la notación j, N de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \frac{N_{n',l}}{N_{n'-1,l+1}} \delta_{n,n'-1} \delta_{l',l+1} &= \left[\frac{2(n')!}{\Gamma(n'+l+\frac{3}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{3}{4}+\frac{l}{2}} \left[\frac{\Gamma(n'-1+l+1+\frac{3}{2})}{2(n'-1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\gamma^{\frac{3}{4}+\frac{l+1}{2}}} \delta_{n,n'-1} \delta_{l',l+1} \\
 &= \sqrt{\frac{n'}{\gamma}} \delta_{n,n'-1} \delta_{l',l+1} = \sqrt{\frac{N'-l}{2\gamma}} \delta_{n,n'-1} \delta_{l',l+1} \\
 &= \sqrt{\frac{N-l+1}{2\gamma}} \delta_{N',N+1} = \sqrt{\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2\gamma}} \delta_{N',N+1} \tag{B.7}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \frac{N_{n',l}}{N_{n',l+1}} \delta_{n,n'} \delta_{l',l+1} &= \left[\frac{2(n')!}{\Gamma(n'+l+\frac{3}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{3}{4}+\frac{l}{2}} \left[\frac{\Gamma(n'+l+1+\frac{3}{2})}{2(n')!} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\gamma^{\frac{3}{4}+\frac{l+1}{2}}} \delta_{n,n'} \delta_{l',l+1} \\
 &= \sqrt{\frac{n'+l+\frac{3}{2}}{\gamma}} \delta_{n,n'} \delta_{l',l+1} = \sqrt{\frac{N'-l+\frac{2l}{2}+\frac{3}{2}}{\gamma}} \delta_{n,n'} \delta_{l',l+1} \\
 &= \sqrt{\frac{N-1-l+2l+3}{2\gamma}} \delta_{N',N-1} = \sqrt{\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2\gamma}} \delta_{N',N-1}. \tag{B.8}
 \end{aligned}$$

El término cinético de cuarks en función de j , N y N' , se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} = & \sum_{j\lambda cf} \sum_{N=j+\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{N'=N-1}^{N+1} \left[-i\sqrt{\gamma} \sqrt{\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N',N+1} - i\sqrt{\gamma} \sqrt{\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N',N-1} \right] \\
 & \left(\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right) \\
 + & \sum_{j\lambda cf} \sum_{N=j+\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{N'=N-1}^{N+1} \left[i\sqrt{\gamma} \sqrt{\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N',N+1} + i\sqrt{\gamma} \sqrt{\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N',N-1} \right] \\
 & \left(\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right) \quad (\text{B.9})
 \end{aligned}$$

Finalmente, debido a la acción de los operadores que componen al término cinético de cuarks se les puede caracterizar como operadores de ascenso ($\widetilde{\mathbf{K}}_+$) y descenso ($\widetilde{\mathbf{K}}_-$).

$$\begin{aligned}
 \widetilde{\mathbf{K}}_+ = & (\sqrt{\gamma}) \sum_{j\lambda cf} \sum_{N=j+\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{N'=N-1}^{N+1} \left[\sqrt{\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N',N+1} + \sqrt{\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N',N-1} \right] \\
 & \left(\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right) \\
 \widetilde{\mathbf{K}}_- = & (\sqrt{\gamma}) \sum_{j\lambda cf} \sum_{N=j+\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{N'=N-1}^{N+1} \left[\sqrt{\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N',N+1} + \sqrt{\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N',N-1} \right] \\
 & \left(\mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right) \quad (\text{B.10})
 \end{aligned}$$

en donde se ha usado la siguiente redefinición de los operadores con momento angular $l = j + \frac{1}{2}$, únicamente para no estar cargando el factor ($\pm i$).

$$\begin{aligned}
 (-i) \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} & \rightarrow \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} \\
 (i) \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} & \rightarrow \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \quad . \quad (\text{B.11})
 \end{aligned}$$

Esta redefinición sigue satisfaciendo las reglas de anticonmutación de los operadores fermiónicos.

Apéndice C

Álgebra SU(2) para Tres Niveles

En este Apéndice se muestra el álgebra que satisfacen los operadores de ascenso y descenso cuando se restringe a los cuarks a ocupar solamente cualesquiera tres niveles orbitales, para un N y j , dados. Hay que recordar que al estar trabajando en la representación de Dirac, cada uno de estos niveles tiene su respectivo nivel de energía negativa (pseudo-espín $= -\frac{1}{2}$), por tanto, realmente se trabaja con seis niveles. Las posibles conexiones en esta columna vienen dadas por $(N-1, j-\frac{1}{2}) \longleftrightarrow (N, j+\frac{1}{2})$ y $(N, j+\frac{1}{2}) \longleftrightarrow (N+1, j-\frac{1}{2})$. Los operadores de ascenso $\widetilde{\mathbf{K}}_+^{jN}$ y descenso $\widetilde{\mathbf{K}}_-^{jN}$ para este sistema tienen la siguiente estructura

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{K}}_+^{jN} = \sqrt{\gamma} \sum_{\lambda cf} & \left[\left(\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N+1, j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} \right. \\ & + \left(\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N-1, j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} \\ & + \left(\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N+1, j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} \\ & \left. + \left(\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N-1, j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}_-^{jN} = \sqrt{\gamma} \sum_{\lambda cf} \left[\left(\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N+1, j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N-1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \\
 & + \left(\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N+1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \\
 & + \left(\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N-1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \Big]. \quad (C.2)
 \end{aligned}$$

Las relaciones de conmutación de estos operadores están dadas por:

$$\begin{aligned}
 [\widetilde{\mathbf{K}}_+^{jN}, \widetilde{\mathbf{K}}_-^{jN}] & = \gamma \left\{ \left(\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2} \right) \left[\mathbf{N}_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})} - \mathbf{N}_{-\frac{1}{2}(N+1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \right] \right. \\
 & - \left(\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{b}_{-\frac{1}{2},(N-1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}^\dagger \cdot \mathbf{b}^{-\frac{1}{2},(N+1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \\
 & - \left(\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{b}_{-\frac{1}{2},(N+1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}^\dagger \cdot \mathbf{b}^{-\frac{1}{2},(N-1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \\
 & + \left(\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2} \right) \left[\mathbf{N}_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})} - \mathbf{N}_{-\frac{1}{2}(N-1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \right] \\
 & + \left(\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2} \right) \left[\mathbf{N}_{\frac{1}{2}(N+1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} - \mathbf{N}_{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \right] \\
 & + \left(\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{b}_{\frac{1}{2},(N+1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}^\dagger \cdot \mathbf{b}^{\frac{1}{2},(N-1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \\
 & + \left(\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{b}_{\frac{1}{2},(N-1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}^\dagger \cdot \mathbf{b}^{\frac{1}{2},(N+1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \\
 & \left. + \left(\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2} \right) \left[\mathbf{N}_{\frac{1}{2}(N-1,j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} - \mathbf{N}_{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \right] \right\} \\
 & = 2\widetilde{\mathbf{K}}_0^{jN}. \quad (C.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\widetilde{\mathbf{K}}_0^{jN}, \widetilde{\mathbf{K}}_+^{jN}] &= \frac{\gamma}{2} \sqrt{\gamma} \sum_{\lambda cf} \\
 &\left\{ \left[2 \left(\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2} \right) + 2 \left(\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2} \right) \right] \left(\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{b}_{\frac{1}{2}, (N, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) j \lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}, (N+1, j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) j \lambda cf} \right. \\
 &+ \left[2 \left(\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2} \right) + 2 \left(\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2} \right) \right] \left(\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{b}_{\frac{1}{2}, (N, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) j \lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}, (N-1, j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) j \lambda cf} \\
 &+ \left[2 \left(\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2} \right) + 2 \left(\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2} \right) \right] \left(\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{b}_{\frac{1}{2}, (N+1, j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) j \lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}, (N, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) j \lambda cf} \\
 &\left. + \left[2 \left(\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2} \right) + 2 \left(\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2} \right) \right] \left(\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{b}_{\frac{1}{2}, (N-1, j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) j \lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}, (N, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) j \lambda cf} \right\} \\
 &= \frac{\gamma}{2} [2N+3] \widetilde{\mathbf{K}}_+^{jN} \tag{C.4}
 \end{aligned}$$

Para satisfacer el álgebra SU(2), es necesario redefinir los operadores de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_\pm^{jN} &= \alpha \widetilde{\mathbf{K}}_\pm^{jN} \\
 \mathbf{K}_0^{jN} &= \alpha^2 \widetilde{\mathbf{K}}_0^{jN} \tag{C.5}
 \end{aligned}$$

donde estos nuevos operadores satisfacen el álgebra siguiente

$$[\mathbf{K}_0^{jN}, \mathbf{K}_\pm^{jN}] = \pm \frac{\gamma}{2} (2N+3) \alpha^2 \mathbf{K}_\pm^{jN}. \tag{C.6}$$

Finalmente se escoge

$$\alpha^{-1} = \sqrt{\frac{\gamma}{2} (2N+3)} \tag{C.7}$$

para obtener la bien conocida álgebra SU(2).

Apéndice D

Deducción del Hamiltoniano de Coulomb Efectivo

Este Apéndice se divide en dos secciones: la sección D.1 muestra la deducción el Hamiltoniano de Coulomb efectivo de cuarks utilizado en este modelo. En la sección D.2, los gluones se consideran en el Hamiltoniano de Coulomb a través de la densidad de carga de gluones. Para considerar al mismo tiempo en el Hamiltoniano de Coulomb efectivo a los cuarks y los gluones simplemente se muestra que la densidad de carga total (cuarks más gluones) es un generador del grupo SU(3).

D.1. Deducción del Hamiltoniano Efectivo de Cuarks

El Hamiltoniano de Coulomb de cuarks, el cual corresponde a la interacción entre dos densidades de carga de cuarks mediante un potencial de interacción que únicamente depende de la distancia entre dichas densidades, viene dado por

$$\mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q} = \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \sum_a \psi^\dagger(\mathbf{r})T_a\psi(\mathbf{r})V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)\psi^\dagger(\mathbf{r}')T_a\psi(\mathbf{r}'), \quad (\text{D.1})$$

donde los campos fermiónicos espinoriales $\psi^\dagger(\mathbf{r})$ y $\psi(\mathbf{r})$ se escriben de la siguiente forma

$$\psi^\dagger(\mathbf{r}) = (\psi_1^\dagger(\mathbf{r}, \sigma_1, c_1, f_1), \psi_2^\dagger(\mathbf{r}, \sigma_2, c_2, f_2))$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\sum_{\mathbf{1}} \mathbf{b}_{\frac{1}{2}, N_1 l_1 m_1, \sigma_1 c_1 f_1}^\dagger R_{N_1 l_1}^*(r) Y_{l_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{r}}) \chi_{\sigma_1}^\dagger, \sum_{\mathbf{3}} \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}, N_3 l_3 m_3, \sigma_3 c_3 f_3}^\dagger R_{N_3 l_3}^*(r) Y_{l_3 m_3}^*(\hat{\mathbf{r}}) \chi_{\sigma_3}^\dagger \right) \\
 \psi(\mathbf{r}) &= \begin{pmatrix} \sum_{\mathbf{2}} \mathbf{b}_{\frac{1}{2}, N_2 l_2 m_2, \sigma_2 c_2 f_2} R_{N_2 l_2}(r) Y_{l_2 m_2}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_{\sigma_2} \\ \sum_{\mathbf{4}} \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}, N_4 l_4 m_4, \sigma_4 c_4 f_4} R_{N_4 l_4}^*(r) Y_{l_4 m_4}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_{\sigma_4} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.2})
 \end{aligned}$$

Se ha usado la notación corta $\mathbf{i} = N_i l_i m_i \sigma_i c_i f_i$, con $i = 1, 2, 3, 4$ en la suma de cada operador fermiónico. Además, el primer índice de los operadores de creación y aniquilación corresponde al pseudo-espín $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ e indica estados de energía positiva o negativa respectivamente, mientras que $\chi_{\sigma_i}^\dagger$ y χ_{σ_i} representan los espinores de Dirac.

Usando la representación acoplada para los operadores fermiónicos, el Hamiltoniano de Coulomb de cuarks, tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q} &= \sum_a \sum_{\alpha_i N_i, l_i m_i j_i \lambda_i \sigma_i c_i f_i} \int r^2 r'^2 dr dr' d\hat{\mathbf{r}} d\hat{\mathbf{r}}' V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \\
 &\left\{ \left[\mathbf{b}_{\alpha_1(N_1, l_1, \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c_1 f_1}^\dagger \langle l_1 m_1, \frac{1}{2} \sigma_1 | j_1 \lambda_1 \rangle R_{N_1 l_1}^*(r) Y_{l_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{r}}) (T_a)_{c_2}^{c_1} \right. \right. \\
 &\left. \mathbf{b}^{\alpha_2(N_2, l_2, \frac{1}{2}) j_2 \lambda_2 c_2 f_2} \langle l_2 m_2, \frac{1}{2} \sigma_2 | j_2 \lambda_2 \rangle R_{N_2 l_2}(r) Y_{l_2 m_2}(\hat{\mathbf{r}}) \delta_{f_1 f_2} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\sigma_1 \sigma_2} \right] \\
 &\times \left[\mathbf{b}_{\alpha_3(N_3, l_3, \frac{1}{2}) j_3 \lambda_3 c_3 f_3}^\dagger \langle l_3 m_3, \frac{1}{2} \sigma_3 | j_3 \lambda_3 \rangle R_{N_3 l_3}^*(r') Y_{l_3 m_3}^*(\hat{\mathbf{r}}') (T_a)_{c_4}^{c_3} \right. \\
 &\left. \left. \mathbf{b}^{\alpha_4(N_4, l_4, \frac{1}{2}) j_4 \lambda_4 c_4 f_4} \langle l_4 m_4, \frac{1}{2} \sigma_4 | j_4 \lambda_4 \rangle R_{N_4 l_4}(r') Y_{l_4 m_4}(\hat{\mathbf{r}}') \delta_{f_3 f_4} \delta_{\alpha_3 \alpha_4} \delta_{\sigma_3 \sigma_4} \right] \right\}. \quad (\text{D.3})
 \end{aligned}$$

La parte angular correspondiente a la doble integral está dada por la siguiente expresión:

$$\int \int d\hat{\mathbf{r}} d\hat{\mathbf{r}}' Y_{l_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{l_2 m_2}(\hat{\mathbf{r}}) V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) Y_{l_3 m_3}^*(\hat{\mathbf{r}}') Y_{l_4 m_4}(\hat{\mathbf{r}}') \quad (\text{D.4})$$

donde el potencial de interacción ($V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$), se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) &= \sum_{L'} A_{L'} P_{L'}(\cos\theta) \\
 \Rightarrow A_L &= \left(\frac{2L+1}{2} \right) \int_{-1}^1 d(\cos\theta) P_L(\cos\theta) V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \\
 P_L(\cos\theta) &= \left(\frac{4\pi}{2L+1} \right) \sum_M Y_{LM}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{LM}(\hat{\mathbf{r}}'). \quad (\text{D.5})
 \end{aligned}$$

La segunda expresión viene de la ortogonalidad de los polinomios de Legendre y la tercera es una relación útil para los polinomios de Legendre. La doble integral angular se puede separar en dos integrales angulares independientes

$$\begin{aligned}
 & \rightarrow \int \int d\hat{\mathbf{r}} d\hat{\mathbf{r}}' Y_{l_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{l_2 m_2}(\hat{\mathbf{r}}') V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) Y_{l_3 m_3}^*(\hat{\mathbf{r}}') Y_{l_4 m_4}(\hat{\mathbf{r}}) \\
 & = \sum_{LM} A_L \left(\frac{4\pi}{2L+1} \right) (-1)^{m_1+M+m_3} \left[\int d\hat{\mathbf{r}} Y_{l_1-m_1}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{l_2 m_2}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{L-M}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \\
 & \quad \times \left[\int d\hat{\mathbf{r}}' Y_{l_3-m_3}(\hat{\mathbf{r}}') Y_{l_4 m_4}(\hat{\mathbf{r}}') Y_{LM}(\hat{\mathbf{r}}') \right] \\
 & = \sum_{LM} A_L \left(\frac{4\pi}{2L+1} \right) (-1)^{m_1+M+m_3} \\
 & \quad \left[\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2L+1)}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(2l_3+1)(2l_4+1)(2L+1)}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L \\ -m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 & l_4 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 & l_4 & L \\ -m_3 & m_4 & M \end{pmatrix}. \quad (\text{D.6})
 \end{aligned}$$

Con lo anterior el Hamiltoniano de Coulomb adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 H_{Coulomb}^{q-q} & = \sum_a \sum_{\alpha_i N_i, l_i m_i j_i \lambda_i \sigma_i f f' c_i LM} \left[\mathbf{b}_{\alpha_1(N_1, l_1, \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c_1 f_1}^\dagger (T_a)_{c_2}^{c_1} \mathbf{b}^{\alpha_2(N_2, l_2, \frac{1}{2}) j_2 \lambda_2 c_2 f} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\sigma_1 \sigma_2} \right] \\
 & \quad \left[\mathbf{b}_{\alpha_3(N_3, l_3, \frac{1}{2}) j_3 \lambda_3 c_3 f'}^\dagger (T_a)_{c_4}^{c_3} \mathbf{b}^{\alpha_4(N_4, l_4, \frac{1}{2}) j_4 \lambda_4 c_4 f'} \delta_{\alpha_3 \alpha_4} \delta_{\sigma_3 \sigma_4} \right] \\
 & \quad \int r^2 r'^2 dr dr' R_{N_1 l_1}^*(r) R_{N_2 l_2}(r) R_{N_3 l_3}^*(r') R_{N_4 l_4}(r') \\
 & \quad \int_{-1}^1 d(\cos\theta) P_L(\cos\theta) V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \left(\frac{2L+1}{2} \right) \prod_{i=1}^4 \sqrt{(2l_i+1)(2j_i+1)} \frac{1}{\sqrt{2L+1}} \frac{1}{\sqrt{2L+1}} \\
 & \quad (-1)^{m_1+M+m_3+l_1-l_2+l_3-l_4+l_1-\frac{1}{2}-\lambda_1+l_2-\frac{1}{2}-\lambda_2+l_3-\frac{1}{2}-\lambda_3+l_4-\frac{1}{2}-\lambda_4} \langle l_1 0, l_2 0 | L 0 \rangle \langle l_3 0, l_4 0 | L 0 \rangle \\
 & \quad \begin{pmatrix} l_1 & \frac{1}{2} & j_1 \\ m_1 & \sigma_1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 & \frac{1}{2} & j_2 \\ m_2 & \sigma_2 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L \\ -m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} \\
 & \quad \begin{pmatrix} l_3 & \frac{1}{2} & j_3 \\ m_3 & \sigma_3 & -\lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_4 & \frac{1}{2} & j_4 \\ m_4 & \sigma_4 & -\lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 & l_4 & L \\ -m_3 & m_4 & M \end{pmatrix}. \quad (\text{D.7})
 \end{aligned}$$

Lo siguiente en esta deducción, es usar una relación muy útil en este tipo de técnicas, la cual consiste de la suma del producto de tres coeficientes 3-J y el hecho de que $\sigma_1 = \sigma_2$ y $\sigma_3 = \sigma_4$. Por tanto, se considera la suma del producto de los tres primeros coeficientes Clebsch-Gordon:

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \sum_{m_1 \sigma_1 m_2} (-1)^{-\sigma_1 - \frac{1}{2} - \sigma_3 - \frac{1}{2} + M - \lambda_2 - \frac{1}{2} - \lambda_4 - \frac{1}{2}} \\
 &\quad \begin{pmatrix} l_1 & \frac{1}{2} & j_1 \\ m_1 & \sigma_1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 & \frac{1}{2} & j_2 \\ m_2 & \sigma_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L \\ -m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{m_1 \sigma_1 m_2} \begin{pmatrix} j_1 & l_1 & \frac{1}{2} \\ -\lambda_1 & m_1 & \sigma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 & j_2 & \frac{1}{2} \\ -m_2 & \lambda_2 & -\sigma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 & l_1 & L \\ m_2 & -m_1 & -M \end{pmatrix} (-1)^{l_2 + l_1 + \frac{1}{2} + m_2 + m_1 - \sigma_1} \\
 &\quad (-1)^{-\sigma_1 - \frac{1}{2} - \sigma_3 - \frac{1}{2} + M - \lambda_2 - \frac{1}{2} - \lambda_4 - \frac{1}{2} - l_1 - l_2 - \frac{1}{2} - m_2 - m_1 + \sigma_1 + l_2 + l_1 + L} \\
 &= \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & L \\ -\lambda_1 & \lambda_2 & -M \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & L \\ l_2 & l_1 & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} (-1)^{L - \frac{1}{2} - \sigma_3 - \frac{1}{2} - \lambda_2 - \frac{1}{2} - \lambda_4 - 1}, \tag{D.8}
 \end{aligned}$$

así, tomando la fase obtenida de este resultado, junto con los últimos tres coeficientes 3-J de la ecuación (D.7), se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \sum_{m_3 \sigma_3 m_4} (-1)^{L - \frac{1}{2} - \sigma_3 - \frac{1}{2} - \lambda_2 - \frac{1}{2} - \lambda_4 - 1} \begin{pmatrix} l_3 & \frac{1}{2} & j_3 \\ m_3 & \sigma_3 & -\lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_4 & \frac{1}{2} & j_4 \\ m_4 & \sigma_3 & -\lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 & l_4 & L \\ -m_3 & m_4 & M \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{m_3 \sigma_3 m_4} \begin{pmatrix} j_3 & l_3 & \frac{1}{2} \\ -\lambda_3 & m_3 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_4 & j_4 & \frac{1}{2} \\ -m_4 & \lambda_4 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_4 & l_3 & L \\ m_4 & -m_3 & M \end{pmatrix} (-1)^{l_3 + \frac{1}{2} + l_4 + m_4 + m_3 - \sigma_3} \\
 &\quad (-1)^{L - \frac{1}{2} - \sigma_3 - \frac{1}{2} - \lambda_2 - \frac{1}{2} - \lambda_4 - 1 + l_4 + l_3 + L - l_3 - \frac{1}{2} - l_4 - m_4 - m_3 + \sigma_3} \\
 &= \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & L \\ -\lambda_3 & \lambda_4 & M \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_3 & j_4 & L \\ l_4 & l_3 & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} (-1)^M (-1)^{\frac{1}{2} + \lambda_2 + \frac{1}{2} + \lambda_4}. \tag{D.9}
 \end{aligned}$$

donde los coeficientes 3-J se escriben como

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & L \\ -\lambda_1 & \lambda_2 & -M \end{pmatrix} &= \frac{(-1)^{j_1 - j_2 - M + j_1 + j_2 + L}}{\sqrt{2L + 1}} \langle j_1 \lambda_1, j_2 - \lambda_2 | L - M \rangle \\
 \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & L \\ -\lambda_3 & \lambda_4 & M \end{pmatrix} &= \frac{(-1)^{j_3 - j_4 + M + j_3 + j_4 + L}}{\sqrt{2L + 1}} \langle j_3 \lambda_3, j_4 - \lambda_4 | LM \rangle. \tag{D.10}
 \end{aligned}$$

Una contribución adicional a la fase general viene de bajar los índices de espín y color de los operadores de aniquilación, dicha contribución es la siguiente

$$(-1)^{j_2 - \lambda_2 + \chi_{c_2}} (-1)^{j_4 - \lambda_4 + \chi_{c_4}} \quad (\text{D.11})$$

con esto la fase general está dada por

$$\begin{aligned} & (-1)^M (-1)^{\frac{1}{2} + \lambda_2 + \frac{1}{2} + \lambda_4} (-1)^{j_2 - \lambda_2 + \chi_{c_2}} (-1)^{j_4 - \lambda_4 + \chi_{c_4}} \\ & \times (-1)^{j_1 - j_2 - M + j_1 + j_2 + L} (-1)^{j_3 - j_4 + M + j_3 + j_4 + L} \\ & = (-1)^{\frac{1}{2} + j_2 + \frac{1}{2} + j_4} (-1)^M (-1)^{\chi_{c_2} + \chi_{c_4}} \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Finalmente, el producto de los elementos de matriz de los generadores de color de SU(3) se pueden escribir como

$$\begin{aligned} & (\mathbf{T}_C)_{c_2}^{c_1} (\mathbf{T}^C)_{c_4}^{c_3} = \\ & 3(-1)^{\chi_{c_2} + \chi_{c_4} + \chi_C} \langle (1, 0)_{c_1}, (0, 1)_{\bar{c}_2} | (1, 1)C \rangle_1 \\ & \langle (1, 0)_{c_3}, (0, 1)_{\bar{c}_4} | (1, 1)\bar{C} \rangle_1 \quad . \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

donde se ha cambiado la notación $T^a \rightarrow T^C$, simplemente por conveniencia. Finalmente se puede escribir la expresión del Hamiltoniano de Coulomb efectivo para cuarks

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q} &= \sum_{N_i, j_i, \lambda_i, l_i, c_i, \alpha, f, \alpha', f', L, M, C} (-1)^{M + \chi_C} (-1)^{\frac{1}{2} + j_2 + \frac{1}{2} + j_4} \frac{3}{2} \frac{1}{2L + 1} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) P_L(\cos\theta) V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \\ & \int r^2 r'^2 dr dr' R_{N_1 l_1}^*(r) R_{N_2 l_2}(r) R_{N_3 l_3}^*(r') R_{N_4 l_4}(r') \\ & \prod_{i=1}^4 \sqrt{(2l_i + 1)(2j_i + 1)} \langle l_1 0, l_2 0 | L 0 \rangle \langle l_3 0, l_4 0 | L 0 \rangle \begin{Bmatrix} j_1 & l_1 & \frac{1}{2} \\ l_2 & j_2 & L \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_3 & l_3 & \frac{1}{2} \\ l_4 & j_4 & L \end{Bmatrix} \\ & \left[b_{\alpha_1(N_1, l_1, \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c_1 f}^\dagger b_{(N_2, l_2, \frac{1}{2}) j_2 - \lambda_2 \bar{c}_2}^{\alpha_1, f} \langle j_1 \lambda_1, j_2 - \lambda_2 | L - M \rangle \langle (1, 0)_{c_1}, (0, 1)_{\bar{c}_2} | (1, 1)C \rangle \right] \\ & \left[b_{\alpha_3(N_3, l_3, \frac{1}{2}) j_3 \lambda_3 c_3 f'}^\dagger b_{(N_4, l_4, \frac{1}{2}) j_4 - \lambda_4 \bar{c}_4}^{\alpha_3, f'} \langle j_3 \lambda_3, j_4 - \lambda_4 | LM \rangle \langle (1, 0)_{c_3}, (0, 1)_{\bar{c}_4} | (1, 1)\bar{C} \rangle \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

D.2. Hamiltoniano de Coulomb de Cuarks y Gluones

Para considerar los gluones en el Hamiltoniano de Coulomb efectivo que se trabajo en la sección anterior, es necesario incluir la densidad de carga de gluones, la cual se escribe como $\mathbf{A}_b(\mathbf{r}) \times \mathbf{\Pi}_c(\mathbf{r})$.

Por tanto, el Hamiltoniano de Coulomb efectivo para cuarks y gluones, para el cual se considera que las densidades de carga de color interactúan a través de una interacción promedio V_0 , se escribe de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{Coulomb} &= V_0 \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \sum_a \rho_a(\mathbf{r})\rho^a(\mathbf{r}') = V_0 \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \sum_a (\rho_a^q(\mathbf{r}) + \rho_a^g(\mathbf{r})) (\rho^{q\ a}(\mathbf{r}') + \rho^{g\ a}(\mathbf{r}')) \\ &= V_0 \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \sum_a \left(\psi^\dagger(\mathbf{r})T_a\psi(\mathbf{r}) + (\mathbf{A}_b(\mathbf{r}) \times \mathbf{\Pi}_c(\mathbf{r}))_a \right) \left(\psi^\dagger(\mathbf{r}')T_a\psi(\mathbf{r}') + (\mathbf{A}_d(\mathbf{r}') \times \mathbf{\Pi}_e(\mathbf{r}'))_a \right). \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

En la sección anterior, se ha trabajado la interacción de las densidades de carga de color de cuarks y en el Capítulo 5, se ha mostrado que se puede escribir como el operador de Casimir del grupo SU(3), el cual se escribe como el cuadrado de los generadores del grupo SU(3). Sin embargo, en esta sección se utiliza otro camino para mostrar que la densidad de carga de color total (cuarks más gluones), satisface las reglas de conmutación de los generadores del grupo SU(3) y por tanto, su cuadrado corresponde al operador de Casimir de SU(3). Este operador de Casimir tiene un valor propio bien conocido y el cual depende de la representación (λ, μ) de SU(3) en la que se encuentre un sistema de cuarks y gluones.

D.2.1. Densidad de Carga como Generador de SU(3)

Para la siguiente demostración se consideran componentes cartesianos a diferencia de la sección anterior. La razón de esto es que puede mostrarse más claramente a través de las constantes de estructura (f_{abc}) de SU(3), que el álgebra satisfecha es un álgebra de generadores de SU(3), mientras que en componentes esféricas esto se debe mostrar mediante coeficientes Clebsch-Gordan.

El álgebra de generadores de SU(3) viene dada por

$$[\mathcal{G}_a(\mathbf{r}), \mathcal{G}_b(\mathbf{r}')] = if_{abc}\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathcal{G}_c(\mathbf{r}) \quad (\text{D.16})$$

donde \mathcal{G}_a es el generador. Lo que se desea demostrar es que la densidad de carga de color total se comporta como un generador, por lo que: $\mathcal{G}_a(\mathbf{r}) = \rho_a(\mathbf{r}) \equiv f_{abc}\mathbf{A}_b(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{\Pi}_c(\mathbf{r}) + \psi^\dagger(\mathbf{r})T_a\psi(\mathbf{r})$, es el

generador total de grupo SU(3). Por tanto, el conmutador entre las densidades de carga total viene dado por

$$[\rho_a(\mathbf{r}), \rho_{a'}(\mathbf{r}')] = \left[\psi^\dagger(\mathbf{r})T_a\psi(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')T_{a'}\psi(\mathbf{r}') \right] + [f_{abc}A_{i,b}(\mathbf{r})\Pi_{i,c}(\mathbf{r}), f_{a'de}A_{j,d}(\mathbf{r}')\Pi_{j,e}(\mathbf{r}')]. \quad (\text{D.17})$$

Trabajando por separado los conmutadores de las densidades de gluones y de cuarks, se tiene que el conmutador de las densidades de carga de color de gluones se escribe de la siguiente forma

$$\begin{aligned} [f_{abc}A_{i,b}(\mathbf{r})\Pi_{i,c}(\mathbf{r}), f_{a'de}A_{j,d}(\mathbf{r}')\Pi_{j,e}(\mathbf{r}')] &= f_{abc}f_{a'de} [A_{i,b}(\mathbf{r})\Pi_{i,c}(\mathbf{r}), A_{j,d}(\mathbf{r}')\Pi_{j,e}(\mathbf{r}')] \\ &= f_{abc}f_{a'de} ([A_{i,b}(\mathbf{r})\Pi_{i,c}(\mathbf{r}), A_{j,d}(\mathbf{r}')] \Pi_{j,e}(\mathbf{r}') + A_{j,d}(\mathbf{r}') [A_{i,b}(\mathbf{r})\Pi_{i,c}(\mathbf{r}), \Pi_{j,e}(\mathbf{r}')]) \\ &= f_{abc}f_{a'de} (A_{j,d}(\mathbf{r}') [A_{i,b}(\mathbf{r}), \Pi_{j,e}(\mathbf{r}')] \Pi_{i,c}(\mathbf{r}) + A_{i,b}(\mathbf{r}) [\Pi_{i,c}(\mathbf{r}), A_{j,d}(\mathbf{r}')] \Pi_{j,e}(\mathbf{r}')) \\ &= f_{abc}f_{a'de} \left(-iA_{i,b}(\mathbf{r}) \left\{ \delta_{ij}\delta_{cd} - \delta_{cd} \frac{\nabla_i \nabla_j}{\nabla^2} \right\} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Pi_{j,e}(\mathbf{r}') \right. \\ &\quad \left. + iA_{j,d}(\mathbf{r}') \left\{ \delta_{ij}\delta_{be} - \delta_{be} \frac{\nabla_i \nabla_j}{\nabla^2} \right\} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Pi_{i,c}(\mathbf{r}) \right) \\ &= if_{aa'a''}f_{a''dc}\mathbf{A}_d(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{\Pi}_c(\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= if_{aa'a''}\rho_{a''}^g(\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

donde para las constantes de estructura se ha hecho uso de la propiedad de antisimetría y de la identidad de Jacobi.

Debido que se está trabajando en la norma de Coulomb, se consideran solo los componentes transversales del campo gluónico, por lo que la regla de conmutación entre el campo gluónico y su momento conjugado viene dada por

$$\begin{aligned} [A_{i,c}(\mathbf{r}), \Pi_{j,d}(\mathbf{r}')] &= i\delta_{cd} \left(\delta_{ij} - \frac{\nabla_i \nabla_j}{\nabla^2} \right) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= i\delta_{cd}\delta_{\perp}^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

El conmutador para las densidades de carga de color de cuarks viene dado por

$$\left[\psi^\dagger(\mathbf{r})T_a\psi(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')T_{a'}\psi(\mathbf{r}') \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \psi^\dagger(\mathbf{r}')T_{a'} \left[\psi^\dagger(\mathbf{r})T_a\psi(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r}') \right] + \left[\psi^\dagger(\mathbf{r})T_a\psi(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')T_{a'} \right] \psi(\mathbf{r}') \\
 &= \psi^\dagger(\mathbf{r}')T_{a'} \left[\psi^\dagger(\mathbf{r})T_a, \psi(\mathbf{r}') \right] \psi(\mathbf{r}) + \psi^\dagger(\mathbf{r})T_a \left[\psi(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')T_{a'} \right] \psi(\mathbf{r}') \\
 &= \psi^\dagger(\mathbf{r}')T_{a'} \left[\psi^\dagger(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r}') \right] T_a\psi(\mathbf{r}) + \psi^\dagger(\mathbf{r})T_a \left[\psi(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}') \right] T_{a'}\psi(\mathbf{r}') \\
 &= \psi^\dagger(\mathbf{r})T_a \left(2\psi(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r}') - \left\{ \psi(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}') \right\} \right) T_{a'}\psi(\mathbf{r}') \\
 &\quad - \psi^\dagger(\mathbf{r}')T_{a'} \left(2\psi(\mathbf{r}')\psi^\dagger(\mathbf{r}) - \left\{ \psi(\mathbf{r}'), \psi^\dagger(\mathbf{r}) \right\} \right) T_a\psi(\mathbf{r}) \\
 &= 2 \left[\psi^\dagger(\mathbf{r})T_a\psi(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')T_{a'}\psi(\mathbf{r}') \right] - \psi^\dagger(\mathbf{r}) (T_aT_{a'} - T_{a'}T_a) \psi(\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (\text{D.20})
 \end{aligned}$$

Finalmente, usando el álgebra de los generadores T_a , esto es, $[T_a, T_{a'}] = if_{aa'a''}T_{a''}$ y la regla de anti-conmutación de campos fermiónicos $\{\psi(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')\} = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, se sigue que la densidad de carga de color total satisface el álgebra de generadores del grupo SU(3)

$$[\rho_a(\mathbf{r}), \rho_{a'}(\mathbf{r}')] = if_{aa'a''}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho_{a''}(\mathbf{r}). \quad (\text{D.21})$$

Apéndice E

Álgebra de los Operadores y Campos Bosónicos

Los operadores bosónicos están dados por $\beta_{(N,L,1)JMC}^{\dagger\Xi}$, y $\beta^{\Xi;(N,L,1)JMC}$ mientras que los campos bosónicos transversales están dados por $\mathbf{A}^C(\mathbf{r})$ y $\mathbf{\Pi}_C(\mathbf{r})$. En las siguientes secciones se muestran varias relaciones útiles para los operadores bosónicos, así como para los campos bosónicos.

E.1. Álgebra de los Operadores Bosónicos

Los operadores de creación y aniquilación bosónicos utilizados como los coeficientes de la expansión del campo gluónico satisfacen las reglas de conmutación siguientes:

$$\begin{aligned} \left[\beta^{\Xi';(N',L',1)J'M'C'}, \beta_{(N,L,1)JMC}^{\dagger\Xi} \right] &= \delta^{\Xi'\Xi} \delta_N^{N'} \delta_L^{L'} \delta_J^{J'} \delta_M^{M'} \delta_C^{C'} \\ \left[\beta^{\Xi';(N',L',1)J'M'C'}, \beta^{\Xi;(N,L,1)JMC} \right] &= 0 \\ \left[\beta_{(N',L',1)J'M'C'}^{\dagger\Xi'}, \beta_{(N,L,1)JMC}^{\dagger\Xi} \right] &= 0 \end{aligned} \tag{E.1}$$

donde los índices que etiquetan a los operadores bosónicos indican las siguientes propiedades: el número principal, N , el cual indica el orden de los ceros de las funciones Bessel. El momento angular orbital del gluón viene descrito por el número cuántico L . El espín total del gluón, esto es, el acoplamiento espín-orbita viene dado por el número cuántico, J , cabe recordar que el gluón es un

bosón de espín intrínseco igual a uno, por lo que $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{1}$ y M es el número magnético del espín total. Finalmente, C es una notación corta para describir los números cuánticos de color del gluón (Y_C, I_C, I_{z_C}) con Y_C la hipercarga de color, I_C el isospín de color e I_{z_C} la componente z del isospín de color.

Los operadores bosónicos transforman de la misma forma que lo hace la base completa de expansión que se utilice. Para el caso de la caja esférica se tiene la libertad de como transformar los índices de color, sin embargo, los índices de momento angular y espín total transforman de la siguiente forma al pasar de índices covariantes a contravariantes y viceversa.

$$\begin{aligned}\beta_{(N,L,1)JMC}^{\dagger \Xi} &= (-1)^{J+L+M+1} (-1)^{\chi_C} \beta^{\dagger \Xi; (N,L,1)J-M\bar{C}} \\ \beta^{\Xi; (N,L,1)JMC} &= (-1)^{J+L+M+1} (-1)^{\chi_C} \beta_{(N,L,1)J-M\bar{C}}^{\Xi}\end{aligned}\quad (\text{E.2})$$

donde $C = (Y_C, I_C, I_{z_C})$ y $\bar{C} = (-Y_C, I_C, -I_{z_C})$. En este trabajo se ha adoptado la conversión de Draayer [34] para las fases de color, esto es, $(-1)^{X_{iC}} = (-1)^{\frac{1}{3}(\lambda-\mu) + \frac{1}{2}(Y_C) - I_{z_C}}$, donde (λ, μ) es la representación del grupo de color $SU(3)$. El gluón corresponde a la representación $(1, 1)$, la cual se conoce como color octete del gluón.

E.2. Álgebra de los Campos Bosónicos

La cuantización del campo gluónico y su momento conjugado están dados por

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^C(\mathbf{r}) &= \sum_{\Xi NLJM} \frac{1}{\sqrt{2\Omega_{(N,L,1)J}^{\Xi}}} \mathbf{f}_{(N,L,1)JM}^{\Xi}(\mathbf{r}) \left(\beta_{(N,L,1)JMC}^{\dagger \Xi} + \beta^{\Xi; (N,L,1)JMC} \right) \\ \mathbf{\Pi}_C(\mathbf{r}) &= \sum_{\Xi NLJM} i \sqrt{\frac{\Omega_{(N,L,1)J}^{\Xi}}{2}} \mathbf{f}_{(N,L,1)JM}^{*\Xi}(\mathbf{r}) \left(\beta_{(N,L,1)JMC}^{\dagger \Xi} - \beta^{\Xi; (N,L,1)JMC} \right).\end{aligned}\quad (\text{E.3})$$

Dichos campos satisfacen la norma de Coulomb, por lo que se ha eliminado la componente longitudinal y únicamente se trabaja con las componentes transversales correspondientes a la componente eléctrica y magnética. Es por esta razón que la regla de conmutación de estos campos está dada en términos de la delta transversal

$$[A_\mu^C(\mathbf{r}), \Pi_\nu C'(\mathbf{r}')] = i\delta_{C'}^C \delta_\perp^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{E.4})$$

donde μ y ν indican las componentes de la base.

Demostración

Sustituyendo la expresión del campo gluónico y de su momento conjugado en la regla de conmutación se tiene

$$\begin{aligned} [A_\mu^C(\mathbf{r}), \Pi_\nu C'(\mathbf{r}')] &= \frac{i}{2} \sum_{\Xi NLJM} \sum_{\Xi' N' L' J' M'} \sqrt{\frac{\Omega_{(N', L', 1) J'}^{\Xi'}}{\Omega_{(N, L, 1) J}^{\Xi}}} \left[\mathbf{f}_{(N, L, 1) JM}^{\Xi}(\mathbf{r}) \right]_\mu \left[\mathbf{f}_{(N', L', 1) J' M'}^{* \Xi'}(\mathbf{r}') \right]_\nu \\ &\quad \left\{ - \left[\boldsymbol{\beta}^{\dagger \Xi; (N, L, 1) JMC}, \boldsymbol{\beta}_{(N', L', 1) J' M' C'}^{\Xi'} \right] + \left[\boldsymbol{\beta}^{\Xi; (N, L, 1) JMC}, \boldsymbol{\beta}_{(N', L', 1) J' M' C'}^{\dagger \Xi'} \right] \right\} \\ &= \frac{i}{2} \sum_{\Xi NLJM} \left[\mathbf{f}_{(N, L, 1) JM}^{\Xi}(\mathbf{r}) \right]_\mu \left[\mathbf{f}_{(N, L, 1) JM}^{* \Xi}(\mathbf{r}') \right]_\nu (2\delta_{C'}^C) \\ &= i\delta_{C'}^C \delta_\perp^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

donde se ha usado el hecho de que solo se está sumando sobre los componentes transversales y la completez de la base de expansión de los campos bosonicos. La delta transversal [23], se escribe como $\delta_\perp^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu}{\nabla^2} \right) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, la cual garantiza que $[\nabla_\mu A_\mu^C(\mathbf{r}), \Pi_\nu C'(\mathbf{r}')] = 0$ y que $[A_\mu^C(\mathbf{r}), \nabla_\nu \Pi_\nu C'(\mathbf{r}')] = 0$.

Apéndice F

Gluones en una Cavidad Esférica

En este Apéndice se trabaja el Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica en la norma de Coulomb y se restringe el problema a considerar una caja esférica. R. Busser et al. [19] han mostrado como trabajar los gluones confinados en una caja esférica bajo la norma de Feynman e imponiendo condiciones de frontera de acuerdo al modelo de bolsa M.I.T. El trabajar en la norma de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ implica considerar únicamente los campos transversales, de forma análoga al fotón en la electrodinámica cuántica y por tanto, la componente longitudinal del campo gluónico no es relevante en este caso.

La expansión del campo gluónico y del campo conjugado se lleva a cabo en la base que es solución de la caja esférica de radio R_e

$$\mathbf{A}^C(\mathbf{r}) = \sum_{\Xi N L J M} \frac{1}{\sqrt{2\Omega_{(N,L,2)J}^{\Xi}}} \mathbf{f}_{(N,L,1)JM}^{\Xi}(\mathbf{r}) \left(\beta^{\dagger \Xi; (N,L,1)JMC} + \beta^{\Xi; (N,L,1)JMC} \right) \quad (\text{F.1})$$

donde $\Xi = m, e$ son los componentes magnético y eléctrico. Las propiedades de la base $(\mathbf{f}_{(N,L,1)JM}^{\Xi}(\mathbf{r}))$ son bien conocidas [19, 54, 67] y se escriben a continuación

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{(N,L,1)JM}^{\Xi}(\mathbf{r}) &= \frac{N_{N,JM}^{\Xi}}{R_e^{\frac{3}{2}}} \frac{\alpha_{JL}^{\Xi}}{\sqrt{2J+1}} j_L(\Omega_{N,JM}^{\Xi} r) \mathbf{T}_{JLM}(\hat{\mathbf{r}}) \\ \mathbf{f}_{(N,L,1)JM}^{*\Xi}(\mathbf{r}) &= (-1)^{J+L+M+1} \mathbf{f}_{(N,L,1)J-M}^{\Xi}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [N_{NJM}^m]^{-2} &= \frac{1}{2} j_J^2 (\mathcal{L}_{NJM}^m) \left[1 - \frac{J(J+1)}{(\mathcal{L}_{NJM}^m)^2} \right] \\
 [N_{NJM}^e]^{-2} &= \frac{1}{2} j_{J+1}^2 (\mathcal{L}_{NJM}^e)
 \end{aligned} \tag{F.2}$$

con $\mathcal{L}_{NJM}^{\Xi} = \Omega_{NJM}^{\Xi} R_e$ las raíces de las funciones Bessel esféricas y Ω_{NJM}^{Ξ} las energías de la ecuación de Helmholtz. Al estar trabajando en la norma de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$, los coeficientes α_{JL}^{Ξ} diferentes de cero son $\alpha_{J,J}^m = \sqrt{2J+1}$, $\alpha_{J,J+1}^e = -\sqrt{J}$ y $\alpha_{J,J-1}^e = \sqrt{J+1}$, para los componentes magnéticos y eléctricos respectivamente.

Una vez especificadas las propiedades de la base en la cual se expanden los campos gluónicos, se procede a hacer el cálculo del Hamiltoniano de gluones, \mathbf{H}_{gluon} , descrito en la ec. (H.23). Usando la ecuación de Helmholtz se calcula el Laplaciano del campo gluónico y con éste el segundo término del \mathbf{H}_{gluon} :

$$-\frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \sum_C \mathbf{A}^C(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{A}_C(\mathbf{r}) \tag{F.3}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \mathbf{A}_C(\mathbf{r}) &= (-1)^{\chi_C} \nabla^2 \mathbf{A}^{\bar{C}}(\mathbf{r}) \\
 &= - \sum_{\Xi N L J M} \frac{(\Omega_{(N,L,1)J}^{\Xi})^2}{\sqrt{2\Omega_{(N,L,1)J}^{\Xi}}} \mathbf{f}_{(N,L,1)JM}^{\Xi}(\mathbf{r}) \left(\beta^{\dagger\Xi;(N,L,1)JM\bar{C}} + \beta^{\Xi;(N,L,1)JM\bar{C}} \right)
 \end{aligned} \tag{F.4}$$

donde se ha usado la ecuación de Helmholtz, $(\nabla^2 + k^2)u(\mathbf{r}) = 0$. Por tanto, el segundo término del Hamiltoniano de gluones trabajado en este modelo tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_C \sum_{\Xi, N, L, J, M} \sum_{\Xi', N', L', J', M'} (-1)^{\chi_C} \frac{(\Omega_{(N,L,1)J}^{\Xi})^2}{2\sqrt{\Omega_{(N,L,1)J}^{\Xi} \Omega_{(N',L',1)J'}^{\Xi'}}} \int d\mathbf{r} \mathbf{f}_{(N',L',1)J'M'}^{\Xi'}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_{(N,L,1)JM}^{\Xi}(\mathbf{r}) \\
 &\quad \left(\beta^{\dagger\Xi';(N',L',1)J'M'C} + \beta^{\Xi';(N',L',1)J'M'C} \right) \left(\beta^{\dagger\Xi;(N,L,1)JM\bar{C}} + \beta^{\Xi;(N,L,1)JM\bar{C}} \right).
 \end{aligned} \tag{F.5}$$

Para continuar se utilizan las siguientes relaciones:

$$\int d\mathbf{r} \mathbf{f}_{(N',L',1)J'M'}^{\Xi'}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_{(N,L,1)JM}^{\Xi}(\mathbf{r}) = (-1)^{J+L+M+1} \delta^{\Xi'\Xi} \delta_{N'N} \delta_{L'L} \delta_{J'J} \delta_{M'-M}$$

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\beta}^{\dagger \Xi; (N, L, 1) J - M \bar{C}} &= (-1)^{J+L+M+1} (-1)^{\chi_C} \boldsymbol{\beta}_{(N, L, 1) J M C}^{\dagger \Xi} \\
 \boldsymbol{\beta}^{\Xi; (N, L, 1) J - M \bar{C}} &= (-1)^{J+L+M+1} (-1)^{\chi_C} \boldsymbol{\beta}_{(N, L, 1) J M C}^{\Xi}
 \end{aligned} \tag{F.6}$$

Con lo anterior es fácil mostrar que el término

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\
 &= \frac{1}{4} \sum_C \sum_{\Xi, N, L, J, M} (\Omega_{(N, L, 1) J}^{\Xi}) \left(\boldsymbol{\beta}^{\dagger \Xi; (N, L, 1) J M C} \boldsymbol{\beta}_{(N, L, 1) J M C}^{\dagger \Xi} + \boldsymbol{\beta}_{(N, L, 1) J M C}^{\dagger \Xi} \boldsymbol{\beta}^{\Xi; (N, L, 1) J M C} \right. \\
 & \quad \left. + \boldsymbol{\beta}^{\Xi; (N, L, 1) J M C} \boldsymbol{\beta}_{(N, L, 1) J M C}^{\dagger \Xi} + \boldsymbol{\beta}^{\Xi; (N, L, 1) J M C} \boldsymbol{\beta}_{(N, L, 1) J M C}^{\Xi} \right)
 \end{aligned} \tag{F.7}$$

Finalmente, se puede seguir el mismo procedimiento para mostrar que el primer término del Hamiltoniano de gluones de la ec. (H.23) se puede escribir como.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \boldsymbol{\Pi}^2(\mathbf{r}) = \\
 &= -\frac{1}{4} \sum_C \sum_{\Xi, N, L, J, M} \Omega_{(N, L, 1) J}^{\Xi} \left(\boldsymbol{\beta}^{\dagger \Xi; (N, L, 1) J M C} \boldsymbol{\beta}_{(N, L, 1) J M C}^{\dagger \Xi} - \boldsymbol{\beta}_{(N, L, 1) J M C}^{\dagger \Xi} \boldsymbol{\beta}^{\Xi; (N, L, 1) J M C} \right. \\
 & \quad \left. - \boldsymbol{\beta}^{\Xi; (N, L, 1) J M C} \boldsymbol{\beta}_{(N, L, 1) J M C}^{\dagger \Xi} + \boldsymbol{\beta}^{\Xi; (N, L, 1) J M C} \boldsymbol{\beta}_{(N, L, 1) J M C}^{\Xi} \right)
 \end{aligned} \tag{F.8}$$

con lo cual, el Hamiltoniano de gluones, \mathbf{H}_{gluon} , está dado por la suma de las ecuaciones (F.7) y (F.8), esto es:

$$\mathbf{H}_{gluon} = \sum_{\Xi N L J M C} \Omega_{(N, L, 1) J}^{\Xi} \left(\boldsymbol{\beta}_{(N, L, 1) J M C}^{\dagger \Xi} \boldsymbol{\beta}^{\Xi; (N, L, 1) J M C} + \frac{1}{2} \right), \tag{F.9}$$

por tanto, se muestra de forma clara la estructura diagonal del Hamiltoniano de gluones.

Apéndice G

Deducción del Hamiltoniano de Interacción

La deducción del Hamiltoniano de interacción involucra las cuantizaciones de los campos fermiónicos $\psi^\dagger(\mathbf{r}, \sigma, c, f)$, $\psi(\mathbf{r}, \sigma, c, f)$ ec. (3.3), así como la cuantización del campo gluónico (6.8). Hay que recordar que se está trabajando en la norma de Coulomb y que la componente cero del campo gluónico no tiene cuantización ya que no existe momento conjugado de ella. Por estas razones el Hamiltoniano de interacción se escribe de la siguiente forma

$$\mathbf{H}_{int} = -g \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \quad (\text{G.1})$$

donde se usa la representación de Dirac para las matrices $\boldsymbol{\alpha}$. El producto punto $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$ se escribe de la siguiente forma

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{G.2})$$

con lo que el integrando del Hamiltoniano de interacción se escribe de forma explícita de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) &= \psi_1^\dagger(\mathbf{r}, \sigma', c', f) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \psi_2(\mathbf{r}, \sigma, c, f) \\ &+ \psi_2^\dagger(\mathbf{r}, \sigma', c', f) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \psi_1(\mathbf{r}, \sigma, c, f), \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

usando la convención utilizada para el campo gluónico, esto es:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_C \mathbf{A}^C(\mathbf{r}) T_C. \quad (\text{G.4})$$

El factor $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$ en el Hamiltoniano de interacción, es un operador que actúa en el espacio de espín y de color, por lo que, al estar entre dos campos fermiónicos se convierte en un elemento de matriz de dichos espacios. A continuación se muestra como calcular estos elementos de matriz tanto en el espacio de espín como en el de color:

$$\begin{aligned} \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})_c^{c'} \right]_{\sigma'\sigma} &= \left[2\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})_c^{c'} \right]_{\sigma'\sigma} = 2 \left[\chi_{\sigma'}^\dagger \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})_c^{c'} \chi_\sigma \right] \\ &= \sum_\mu \sqrt{3} (-1)^{1-\mu} \langle 1\mu, \frac{1}{2}\sigma | \frac{1}{2}\sigma' \rangle [A(\mathbf{r})_{-\mu}]_c^{c'} \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

donde el elemento de matriz del campo gluónico implica considerar el elemento de matriz de generador T_C y por otro lado la componente $(-\mu)$ del campo gluónico implica considerar el componente $(-\mu)$ del armónico esférico vectorial, [57]

$$\begin{aligned} [A(\mathbf{r})_{-\mu}]_c^{c'} &= \sum_{\Xi N L J M C} \frac{1}{\sqrt{2\Omega_{(N,L,1)J}^\Xi}} \frac{N_{(N,L,1)J}^\Xi}{R_c^{\frac{3}{2}}} \frac{\alpha_{JL}^\Xi}{\sqrt{2J+1}} j_L(\Omega_{(N,L,1)J}^\Xi r) \\ &\quad [\mathbf{T}_{JLM}(\hat{\mathbf{r}})]_{-\mu} [T_C]_c^{c'} \left(\boldsymbol{\beta}^{\dagger \Xi; (N,L,1)JMC} + \boldsymbol{\beta}^{\Xi; (N,L,1)JMC} \right). \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

con

$$[T_C]_c^{c'} = \langle (10)c_2, (11)C | (10)c_1 \rangle \langle (10) || T^{(11)} || (10) \rangle = \sqrt{3} (-1)^{\chi_{c_2}} \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)C \rangle \quad (\text{G.7})$$

Los armónicos esféricos vectoriales así como el componente $(-\mu)$, vienen dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{JLM}(\hat{\mathbf{r}}) &= \sum_{m\mu} \langle Lm, 1\mu | JM \rangle Y_{Lm}(\hat{\mathbf{r}}) \boldsymbol{\xi}_\mu \\ [\mathbf{T}_{JLM}(\hat{\mathbf{r}})]_{-\mu} &= \sum_m (-1)^{-\mu} \langle Lm, 1\mu | JM \rangle Y_{Lm}(\hat{\mathbf{r}}). \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

Lo siguiente es considerar el lado derecho de la ecuación (G.3) correspondiente al primer y segundo integrando. La deducción para ambos es idéntica únicamente cambiando los índices de pseudo-espín de los operadores fermiónicos de $\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$, para ello se introduce el índice de pseudo-espín $\alpha = \pm\frac{1}{2}$. Por tanto, el Hamiltoniano de interacción se escribe de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_{int} &= -g \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \\
 &= -g \sum_{Cf\alpha} \sum_{N_1 l_1 m_1 \sigma_1 c_1 j_1 \lambda_1} \sum_{N_2 l_2 m_2 \sigma_2 c_2 j_2 \lambda_2} \sum_{m\mu} \sum_{\Xi NLJM} \langle l_1 m_1, \frac{1}{2} \sigma_1 | j_1 \lambda_1 \rangle \langle l_2 m_2, \frac{1}{2} \sigma_2 | j_2 \lambda_2 \rangle \\
 &\quad \times \int r^2 dr R_{N_1 l_1}^*(r) j_L(\Omega_{(N,L,1)}^\Xi r) R_{N_2 l_2}(r) \int d\hat{\mathbf{r}} Y_{l_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{LM}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{l_2 m_2}(\hat{\mathbf{r}}) \\
 &\quad \times \sqrt{3} (-1)^{1-\mu} \langle 1\mu, \frac{1}{2} \sigma_2 | \frac{1}{2} \sigma_1 \rangle \frac{N_{(N,L,1)J}^\Xi}{\sqrt{2\Omega_{(N,L,1)J}^\Xi}} \frac{\alpha_{JL}^\Xi}{\text{sqr}t{2J+1}} (-1)^{-\mu} \langle Lm, 1\mu | JM \rangle \\
 &\quad \times \sqrt{3} (-1)^{\chi_{c_2}} \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)C \rangle \\
 &\quad \times \mathbf{b}_{\alpha(N_1, l_1, \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c_1 f}^\dagger \left(\boldsymbol{\beta}^{\dagger \Xi; (N, L, 1) JMC} + \boldsymbol{\beta}^{\Xi; (N, L, 1) JMC} \right) \mathbf{b}^{-\alpha(N_2, l_2, \frac{1}{2}) j_2 \lambda_2 c_2 f} \quad (\text{G.9})
 \end{aligned}$$

donde la numeración utilizada es simplemente para evitar confusión entre los índices de cuarks y gluones. Para simplificar el Hamiltoniano de interacción, es necesario notar que se tiene la integral sobre la parte angular del producto de tres armónicos esféricos, [58]. Dicha integral se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 &\int d\hat{\mathbf{r}} Y_{l_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{Lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{l_2 m_2}(\hat{\mathbf{r}}) = \\
 &= (-1)^{m_1 - m} \sqrt{\frac{(2l_2 + 1)(2l_1 + 1)}{4\pi}} (2L + 1) \langle l_2 0, l_1 0 | L 0 \rangle \langle l_2 m_2, l_1 - m_1 | L - m \rangle
 \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

Acontinuación, se juntan todas las fases y los coeficientes Clebsch-Gordan que aparecen en las ecuaciones (G.9) y (G.10), con la finalidad de usar la siguiente relación para la suma del producto de cuatro coeficientes Clebsch-Gordan

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\beta\gamma\epsilon\phi} \langle b\beta, c\gamma | a\alpha \rangle \langle e\epsilon, f\phi | d\delta \rangle \langle e\epsilon, b\beta | g\eta \rangle \langle f\phi, c\gamma | j\mu \rangle = \\
 &= \sqrt{(2a+1)(2d+1)(2g+1)(2j+1)} \sum_{K\kappa} \langle g\eta, j\mu | K\kappa \rangle \langle d\delta, a\alpha | K\kappa \rangle \left\{ \begin{array}{ccc} c & b & a \\ f & e & d \\ j & g & K \end{array} \right\} \quad (\text{G.11})
 \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m_1 \sigma_1 m_2 \sigma_2} (-1)^{m_2 + \frac{1}{2} + \sigma_2 + l_2 + l_1 - L} \langle l_1 m_1, \frac{1}{2} \sigma_1 | j_1 \lambda_1 \rangle (-1)^{l_2 + \frac{1}{2} - j_2} \langle l_2 - m_2, \frac{1}{2} - \sigma_2 | j_2 - \lambda_2 \rangle \\
 & \times \langle l_2 - m_2, l_1 m_1 | L m \rangle \langle \frac{1}{2} - \sigma_2, \frac{1}{2} \sigma_1 | j_1 \lambda_1 \rangle \\
 = & (-1)^{j_2 - \lambda_2 + l_2 + 1} \sqrt{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)(2L + 1)(3)} \sum_{K \kappa} \langle L m, 1 \mu | K \kappa \rangle \langle j_1 \lambda_1, j_2 \lambda_2 | K \kappa \rangle \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & l_2 & j_2 \\ \frac{1}{2} & l_1 & j_1 \\ 1 & L & K \end{array} \right\}.
 \end{aligned} \tag{G.12}$$

Finalmente, usando reglas de ortogonalidad de los coeficientes Clebsch-Gordan y las propiedades de los operadores bosónicos, se llega al resultado final para el Hamiltoniano de interacción:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_{int} &= -g \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \\
 &= g \sum_{\alpha N_i l_i m_i j_i \lambda_i \sigma_i c_i f} \sum_{\Xi N L J M C} \int r^2 dr R_{N_1 l_1}^*(r) j_L(\Omega_{(N, L, 1) J}^\Xi r) R_{N_2 l_2}(r) \frac{\alpha_{LJ}^{\Xi}}{\sqrt{\Omega_{(N, L, 1) J}^\Xi}} \frac{N_{(N, L, 1) J}^\Xi}{R_e^{\frac{3}{2}}} \\
 & \times (-1)^{\chi_{c_2}} (-1)^{j_2 - \lambda_2 + l_2 + 1} \frac{3}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{(2l_2 + 1)(2j_2 + 1)(2j_1 + 1)(2l_1 + 1)}{2J + 1}} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & l_2 & j_2 \\ \frac{1}{2} & l_1 & j_1 \\ 1 & L & J \end{array} \right\} \\
 & \times \langle l_2 0, l_1 0 | L 0 \rangle \langle j_1 \lambda_1, j_2 - \lambda_2 | J M \rangle \langle (10) c_1, (01) \bar{c}_2 | (11) C \rangle \\
 & \times \mathbf{b}_{\alpha(N_1, l_1, \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c_1 f}^\dagger \left(\boldsymbol{\beta}^\dagger \Xi; (N, L, 1) J M C + \boldsymbol{\beta}^\Xi; (N, L, 1) J M C \right) \mathbf{b}^{-\alpha(N_2, l_2, \frac{1}{2}) j_2 \lambda_2 c_2 f}
 \end{aligned} \tag{G.13}$$

donde $i=1,2$ para los índices de cuarks.

Apéndice H

Estados Coherentes para el Hamiltoniano Motivado de la CDC

En este apéndice se muestra el uso de estados coherentes como una técnica muy útil para el cálculo de valores de expectación y minimización de diversos operadores. En este sentido el presente modelo consta de dos tipos de operadores, fermiónicos y bosónicos, los cuales mediante el uso de estados coherentes son valores de expectación que conservan la información que el operador fermiónico(bosónico) tenía consigo. Por último, una vez que se expresa el Hamiltoniano motivado de la CDC en términos de estos valores de expectación, se procede a hacer la minimización con respecto a estos valores de expectación, encontrando así la energía de minimización del Hamiltoniano en la base de estados coherentes y el valor numérico para los valores de expectación.

H.1. Estados Coherentes

La idea es encontrar un estado en donde el Hamiltoniano motivado de la CDC, el cual depende de operadores de creación y aniquilación, tenga una representación en términos de los parámetros que definen dicho estado. Si se define un estado que depende de un conjunto de parámetros $\underline{\alpha}$, esto es $|\underline{\alpha}\rangle$; los elementos de matriz del Hamiltoniano son funciones de estos parámetro. Si se está interesado en encontrar el valor de expectación mínimo del Hamiltoniano, se debe hacer una minimización respecto a dichos parámetros. Por tanto, se puede definir un estado (coherente) donde los operadores de

creación y aniquilación pueden sustituirse por una constante y posteriormente hacer una expansión alrededor del mínimo, esto es

$$\begin{aligned}
 E_0 &= \langle \underline{q}, \underline{a} | \mathbf{H}(\mathbf{b}^\dagger, \mathbf{b}, \boldsymbol{\beta}^\dagger, \boldsymbol{\beta}) | \underline{q}, \underline{a} \rangle \\
 \frac{d E_0}{d q} &= 0 \Rightarrow q_0 \\
 \langle \underline{q}_0, \underline{a}_0 | \mathbf{b}^\dagger | \underline{q}_0, \underline{a}_0 \rangle &= q_0 \Rightarrow \mathbf{b}^\dagger \rightarrow q_0 + \delta \mathbf{b}^\dagger \\
 \langle \underline{q}_0, \underline{a}_0 | \mathbf{b} | \underline{q}_0, \underline{a}_0 \rangle &= q_0 \Rightarrow \mathbf{b} \rightarrow q_0 + \delta \mathbf{b}.
 \end{aligned} \tag{H.1}$$

Se propone el estado (coherente)

$$|\underline{q}, \underline{a}\rangle = \mathcal{N} e^{a_\lambda \boldsymbol{\beta}^\dagger_\lambda} | \underline{q} \rangle, \tag{H.2}$$

donde \mathbf{b}^\dagger y $\boldsymbol{\beta}^\dagger$ representan operadores de creación fermiónicos y bosónicos respectivamente. Debido a que estos operadores conmutan, se pueden calcular las constantes de normalización por separado.

H.1.1. Constante de Normalización Bosónica

La constante de normalización bosónica se obtiene de pedir

$$\mathcal{N} \mathcal{N}' \langle \emptyset | e^{a_\lambda^* \boldsymbol{\beta}^\lambda} e^{a_{\lambda'} \boldsymbol{\beta}^\dagger_{\lambda'}} | \emptyset \rangle = 1, \tag{H.3}$$

donde se ha omitido la suma sobre índice repetido. Por tanto, se usan las relaciones; $e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$, seguida de $e^{A'+B'} = e^{A'} e^{B'} e^{-\frac{1}{2}[A',B']}$, lo que implica

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N} \mathcal{N}' \langle \emptyset | e^{a_\lambda^* \boldsymbol{\beta}^\lambda + a_{\lambda'} \boldsymbol{\beta}^\dagger_{\lambda'}} e^{\frac{1}{2} a_\lambda^* a_{\lambda'} \delta_{\lambda\lambda'}} | \emptyset \rangle &= e^{\frac{1}{2} |a_\lambda|^2} \langle \emptyset | e^{a_{\lambda'} \boldsymbol{\beta}^\dagger_{\lambda'} + a_\lambda^* \boldsymbol{\beta}^\lambda} | \emptyset \rangle \\
 &= e^{\frac{1}{2} |a_\lambda|^2} \langle \emptyset | e^{a_{\lambda'} \boldsymbol{\beta}^\dagger_{\lambda'}} e^{a_\lambda^* \boldsymbol{\beta}^\lambda} e^{-\frac{1}{2} a_{\lambda'} a_\lambda^* [\boldsymbol{\beta}^\dagger_{\lambda'}, \boldsymbol{\beta}^\lambda]} | \emptyset \rangle \\
 &= e^{|a_\lambda|^2}
 \end{aligned} \tag{H.4}$$

en consecuencia $\mathcal{N}_{gluon} = e^{-\frac{1}{2} \sum_\lambda |a_\lambda|^2}$. Por otro lado, para la parte fermiónica del estado coherente se considera que $\langle \underline{q} | \underline{q} \rangle = 1$, esto es, simplemente se considera un estado de prueba que satisface las condiciones de la ec. (H.1).

H.1.2. Elementos de Matriz de Operadores Bosónicos

El elemento de matriz de un operador bosónico \mathbf{O}_B con respecto al estado coherente, ec. (H.2), tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned} \langle \underline{q}, \underline{a} | \mathbf{O}_B | \underline{q}, \underline{a} \rangle &= \langle \underline{q} | \underline{q} \rangle \langle \underline{a} | \mathbf{O}_B | \underline{a} \rangle = N_{gluon} \langle \emptyset | \left(e^{a_{\lambda}^* \beta^{\lambda}} \mathbf{O}_B e^{-a_{\lambda'} \beta^{\lambda'}} \right) e^{a_{\lambda'} \beta^{\lambda'}} | \underline{a} \rangle \\ &= N_{gluon} \langle \emptyset | \left(\mathbf{O}_B + \frac{1}{1!} [a_{\lambda}^* \beta^{\lambda}, \mathbf{O}_B] + \frac{1}{2!} [a_{\lambda}^* \beta^{\lambda}, [a_{\lambda'} \beta^{\lambda'}, \mathbf{O}_B]] + \dots \right) e^{a_{\lambda'} \beta^{\lambda'}} | \underline{a} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{H.5})$$

Como el Hamiltoniano depende solamente de los operadores fermiónicos y bosónicos, se está interesado en conocer los elementos de matriz de dichos operadores.

$$\mathbf{O}_B = \beta_{\mu}^{\dagger}$$

En este caso, el conmutador $[a_{\lambda}^* \beta^{\lambda}, \beta_{\mu}^{\dagger}] = a_{\mu}^*$, esto es, un número y por tanto todos los demás conmutadores son cero. Finalmente, se tiene

$$\langle \underline{a} | \beta_{\mu}^{\dagger} | \underline{a} \rangle = N_{gluon} \langle \emptyset | (\beta_{\mu}^{\dagger} + a_{\mu}^*) e^{a_{\lambda'} \beta^{\lambda'}} | \underline{a} \rangle = a_{\mu}^* \quad (\text{H.6})$$

por tanto, al trabajar con el estado coherente, ec. (H.2), simplemente se hace la sustitución $\beta_{\mu}^{\dagger} \rightarrow a_{\mu}^*$.

$$\mathbf{O}_B = \beta^{\mu}$$

Para calcular este elemento de matriz, se usa la relación $[\beta^{\mu}, F(\beta^{\dagger})] = \frac{\partial F}{\partial \beta^{\dagger}}$, por tanto,

$$\begin{aligned} \langle \underline{a} | \beta^{\mu} | \underline{a} \rangle &= N^2 \langle \emptyset | e^{a_{\lambda}^* \beta^{\lambda}} \beta^{\mu} e^{a_{\lambda'} \beta^{\lambda'}} | \emptyset \rangle \\ &= N^2 \langle \emptyset | e^{a_{\lambda}^* \beta^{\lambda}} \frac{\partial}{\partial \beta_{\mu}^{\dagger}} e^{a_{\lambda'} \beta^{\lambda'}} | \emptyset \rangle \\ &= a_{\mu}. \end{aligned} \quad (\text{H.7})$$

Finalmente, el elemento de matriz de un operador bosónico más general se escribe

$$\langle \underline{qa} | \beta_{\mu_1}^{\dagger} \dots \beta_{\mu_{n_1}}^{\dagger} \beta^{\nu_1} \dots \beta^{\nu_{n_2}} | \underline{qa} \rangle = a_{\mu_1}^* \dots a_{\mu_{n_1}}^* a^{\nu_1} \dots a^{\nu_{n_2}} \quad (\text{H.8})$$

H.1.3. Elementos de Matriz de Operadores Fermiónicos

El caso de elementos de matriz de operadores fermiónicos debe hacerse con mayor cuidado ya que las variables por las que sustituye un operador fermiónico al usar estados coherentes son variables de Grassmann. Hacer un análisis detallado de estados coherentes y propiedades de las variables de Grassmann estan fuera de contexto en este trabajo, por lo que simplemente usaremos las propiedades de los estados coherentes en el caso fermiónico. Por tanto,

$$\begin{aligned}\langle \underline{q}, \underline{a} | \mathbf{b}^\mu | \underline{q}, \underline{a} \rangle &= q_\mu \quad , \\ \langle \underline{q}, \underline{a} | \mathbf{b}_\mu^\dagger | \underline{q}, \underline{a} \rangle &= q_\mu^* \quad ,\end{aligned}\tag{H.9}$$

donde el elemento de matriz de un operador fermiónico más general está dado por:

$$\langle \underline{q}, \underline{a} | \mathbf{b}_{\mu_1}^\dagger \dots \mathbf{b}_{\mu_{n_1}}^\dagger \mathbf{b}^{\nu_1} \dots \mathbf{b}^{\nu_{n_2}} | \underline{q}, \underline{a} \rangle = q_{\mu_1}^* \dots q_{\mu_{n_1}}^* q_{\nu_1} \dots q_{\nu_{n_2}}\tag{H.10}$$

H.2. Estrategía de Minimización

Como se mencionó en la sección H.1, al trabajar el Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica con estados coherentes, básicamente se debe sustituir los operadores por variables. Estas variables se han denotado q_ν y a_μ para los operadores de cuarks y gluones respectivamente. Los índices ν y μ son una notación corta para referir a los números cuánticos que caracterizan a dichos operadores.

H.2.1. Consideraciones para el uso de Estados Coherentes

A diferencia del caso puramente de cuarks, el incluir gluones al modelo complica la posibilidad de obtener una solución analítica o semi-analítica. Con la finalidad de buscar dichas expresiones analíticas, es que se hacen varias aproximaciones, las cuales se mencionan a continuación así como el porque de cada una de ellas.

- 1) El sector de cuarks se va restringir a una columna de espín total fijo, para trabajar las energías más bajas se debe tomar el espín total $j = \frac{1}{2}$.
- 2) Se va a restringir a los cuarks a que solo puedan ocupar los dos niveles más bajos, esto es, el primer estado s y el primer estado p. Esta aproximación, restringe a un número finito de operadores

de creación y aniquilación de cuarks, los cuales serán remplazados por variables:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}}(0,0,\frac{1}{2})\frac{1}{2}\lambda cf &\rightarrow q_{1,\lambda cf} \\
 \mathbf{b}^{\dagger}_{-\frac{1}{2}}(0,0,\frac{1}{2})\frac{1}{2}\lambda cf &\rightarrow q_{1,\lambda cf}^* \\
 \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}}(1,1,\frac{1}{2})\frac{1}{2}\lambda cf &\rightarrow q_{2,\lambda cf} \\
 \mathbf{b}^{\dagger}_{-\frac{1}{2}}(1,1,\frac{1}{2})\frac{1}{2}\lambda cf &\rightarrow q_{2,\lambda cf}^* \\
 \mathbf{b}^{\frac{1}{2}}(0,0,\frac{1}{2})\frac{1}{2}\lambda cf &\rightarrow q_{3,\lambda cf} \\
 \mathbf{b}^{\dagger}_{\frac{1}{2}}(0,0,\frac{1}{2})\frac{1}{2}\lambda cf &\rightarrow q_{3,\lambda cf}^* \\
 \mathbf{b}^{\frac{1}{2}}(1,1,\frac{1}{2})\frac{1}{2}\lambda cf &\rightarrow q_{4,\lambda cf} \\
 \mathbf{b}^{\dagger}_{\frac{1}{2}}(1,1,\frac{1}{2})\frac{1}{2}\lambda cf &\rightarrow q_{4,\lambda cf}^*
 \end{aligned}
 \tag{H.11}$$

recordando que el primer índice en los operadores indica el pseudo-espín para el cual $(-\frac{1}{2})$ indica estados de energía negativa y $(+\frac{1}{2})$ estados de energía positiva.

3) Para el caso de gluones se restringe a un nivel de gluones. Para este nivel se considera el nivel más bajo, el cual corresponde a

$$\begin{aligned}
 \beta^{\dagger}_{(1,0,1)1MC}{}^e &\rightarrow a_{MC}^* \\
 \beta_{(1,0,1)1MC}{}^e &\rightarrow a_{MC}
 \end{aligned}
 \tag{H.12}$$

4) En el espacio de color de gluones se hace la aproximación $Y_C^{gluon} = 0$, la cual consiste en considerar ciertos componentes del gluón. Esto debido a que por un lado la dimensión del espacio de Hilbert puede ser muy grande y por otro lado, se tiene una solución semi-analítica para el sector de cuarks por lo que la primer búsqueda corresponde a una corrección semi-analítica a dichas soluciones. Esta restricción influye fuertemente en los términos del Hamiltoniano de Coulomb, ecs. (H.21), (H.22) así como el Hamiltoniano de interacción efectivo a través de los coeficientes de Clebsch-Gordan de SU(3). En el resto de los términos que constituyen el Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica efectivo, esta restricción no influye. Posteriormente, se investigará como relajar esta aproximación.

H.3. Hamiltoniano Efectivo con Estados Coherentes

Se presentan los diferentes términos que constituyen al Hamiltoniano motivado de la Cromodinámica Cuántica en la Norma de Coulomb. Se han considerado hasta el momento cuatro parámetros γ , R_e , V_0 y g , donde el primero de ellos corresponde al parámetro de confinamiento de cuarks, el cual tiene unidades de uno entre longitud al cuadrado. El segundo es el radio de la esfera donde se ha confinado a los gluones, sin embargo γ y R_e se pueden relacionar al hacer los cálculos numéricos, reduciendo así, el número de parámetros a tres. El tercer parámetro, V_0 , corresponde a la aproximación hecha entre la interacción de las densidades de carga de color en el Hamiltoniano de Coulomb. El cuarto parámetro es la constante de interacción fuerte g . En este caso se pueden relacionar estos dos parámetros, ya sea mediante el método de minimización 1 o el método de minimización 2 descritos en el capítulo 8. Mediante los métodos de minimización 1 y 2, se restringe el número de parámetros a dos, pues se hace $V_0(g)$ y se asigna un valor promedio a V_0 respectivamente.

A continuación se presenta el Hamiltoniano efectivo, motivado de la Cromodinámica Cuántica que se trabaja, con la finalidad de estimar el valor de expectación de los operadores bosónicos al usar estados coherentes.

H.3.1. Término Cinético de Cuarks

El término cinético de cuarks efectivo tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_q &= \sum_{N'Nj\lambda cf} k_{NN'}^j \left[\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right] \\
 &+ \sum_{N'Nj\lambda cf} (k_{NN'}^j)^* \left[\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2})j\lambda cf} \right].
 \end{aligned}
 \tag{H.13}$$

Al considerar las soluciones del oscilador armónico en tres dimensiones como base de expansión, el término cinético de cuarks efectivo toma la siguiente forma:

$$\mathbf{K}_q = \sqrt{\gamma} \sum_{j\lambda cf} \sum_N \sum_{N'=N-1}^{N+1} \left[\sqrt{\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N',N+1} + \sqrt{\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N',N-1} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N, j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N', j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N, j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N', j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} \right] \\
 + & \sqrt{\gamma} \sum_{j\lambda cf} \sum_N \sum_{N'=N-1}^{N+1} \left[\sqrt{\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N', N+1} + \sqrt{\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N', N-1} \right] \\
 & \left[\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N', j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N, j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} + \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N', j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N, j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} \right].
 \end{aligned} \tag{H.14}$$

donde $\sqrt{\gamma}$ es el factor de confinamiento de cuarks, esto es, el ancho del oscilador armónico.

H.3.2. Término de masa de Cuarks

El término de masa de cuarks efectivo es el siguiente

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_{m_q} &= \int d\mathbf{x} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \beta m_0 \psi(\mathbf{x}) \\
 &= m_0 \sum_j \sum_{\lambda cf} \sum_{N'=j-\frac{1}{2}}^{\infty} \left(\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N', j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N', j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} - \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N', j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N', j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} \right) \\
 + & m_0 \sum_j \sum_{\lambda cf} \sum_{N=j+\frac{1}{2}}^{\infty} \left(\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N, j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N, j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} - \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N, j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N, j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} \right)
 \end{aligned} \tag{H.15}$$

donde $\Delta N = \Delta N' = 2$ y se ha tomado $m_0 = 0,008 GeV$.

H.3.3. Hamiltoniano de Coulomb

El Hamiltoniano de Coulomb para el caso en que se incluye a los gluones, corresponde a la interacción entre dos densidades de carga de color total, esto es, la densidad de carga de color de cuarks (ρ_a^{quark}) más la densidad de carga de color de gluones (ρ_a^{gluon}). Se modela la interacción entre estas densidades de carga a través de una constante V_0 , por lo que el Hamiltoniano de Coulomb tiene la siguiente estructura:

$$\mathbf{H}_{Coulomb} = \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \sum_a (-1)^{\chi_a} \rho_a(\mathbf{x}) V_0 \rho_{\bar{a}}(\mathbf{y}) \tag{H.16}$$

donde $\rho_a(\mathbf{x}) = \rho_a^{quark}(\mathbf{x}) + \rho_a^{gluon}(\mathbf{x})$. Las densidades de carga de color de cuark y de gluones están dados en componentes esféricos por

$$\begin{aligned}\rho_a^{quark}(\mathbf{x}) &= \psi^\dagger(\mathbf{x})T_a\psi(\mathbf{x}); \\ \rho_a^{gluon}(\mathbf{x}) &= \sqrt{3}\sum_{bc}\langle(1,1)b,(1,1)c|(1,1)a\rangle\mathbf{A}_b(\mathbf{x})\cdot\mathbf{\Pi}_c(\mathbf{x}).\end{aligned}\quad (\text{H.17})$$

Se puede descomponer el Hamiltoniano de Coulomb en cuatro términos, esto es

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{Coulomb} &= V_0\sum_a(-1)^{\chi_a}\int d\mathbf{x}d\mathbf{y}\rho_a^{quark}(\mathbf{x})\rho_a^{quark}(\mathbf{y}) \\ &+ V_0\sum_a(-1)^{\chi_a}\int d\mathbf{x}d\mathbf{y}\rho_a^{quark}(\mathbf{x})\rho_a^{gluon}(\mathbf{y}) \\ &+ V_0\sum_a(-1)^{\chi_a}\int d\mathbf{x}d\mathbf{y}\rho_a^{gluon}(\mathbf{x})\rho_a^{quark}(\mathbf{y}) \\ &+ V_0\sum_a(-1)^{\chi_a}\int d\mathbf{x}d\mathbf{y}\rho_a^{gluon}(\mathbf{x})\rho_a^{gluon}(\mathbf{y}).\end{aligned}\quad (\text{H.18})$$

Finalmente, el Hamiltoniano de Coulomb efectivo tiene la siguiente estructura:

$$\mathbf{H}_{Coulomb} = \mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q} + 2\mathbf{H}_{Coulomb}^{q-g} + \mathbf{H}_{Coulomb}^{g-g} \quad (\text{H.19})$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q} &= 3V_0\sum_{\alpha N_1 l_1 j_1 \lambda_1 c_1 f}\sum_{\alpha' N_3 l_3 j_3 \lambda_3 c_3 f'} \\ &\left(\mathbf{b}_{\alpha(N_1, l_1 \frac{1}{2})j_1 \lambda_1 c_1 f}^\dagger \mathbf{b}^{\alpha(N_1, l_1 \frac{1}{2})j_1 \lambda_1 c_2 f} \mathbf{b}_{\alpha'(N_3, l_3 \frac{1}{2})j_3 \lambda_3 c_2 f'}^\dagger \mathbf{b}^{\alpha'(N_3, l_3 \frac{1}{2})j_3 \lambda_3 c_1 f'}\right) \\ &- V_0\sum_{\alpha N_1 l_1 j_1 \lambda_1 c_1 f}\sum_{\alpha' N_3 l_3 j_3 \lambda_3 c_3 f'} \\ &\left(\mathbf{b}_{\alpha(N_1, l_1 \frac{1}{2})j_1 \lambda_1 c_1 f}^\dagger \mathbf{b}^{\alpha(N_1, l_1 \frac{1}{2})j_1 \lambda_1 c_1 f} \mathbf{b}_{\alpha'(N_3, l_3 \frac{1}{2})j_3 \lambda_3 c_3 f'}^\dagger \mathbf{b}^{\alpha'(N_3, l_3 \frac{1}{2})j_3 \lambda_3 c_3 f'}\right)\end{aligned}\quad (\text{H.20})$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{Coulomb}^{q-g} &= 3V_0\sum_a\sum_{\alpha\lambda f}\sum_{N_1 l_1 j_1}\sum_{\Xi NLJM}\sum_{c_1 c_2}\sum_{bc}(-1)^{\chi_a}(-1)^{\chi_{c_2}}(-1)^{\chi_b} \\ &\langle(10)c_1, (01)\bar{c}_2|(11)a\rangle\langle(11)\bar{b}, (11)c|(11)\bar{a}\rangle \\ &\left(\mathbf{b}_{\alpha(N_1, l_1, \frac{1}{2})j_1 \lambda c_1 f}^\dagger \mathbf{b}^{\alpha(N_1, l_1, \frac{1}{2})j_1 \lambda c_2 f}\right)\left(\delta_c^b + 2\beta^{\dagger\Xi}_{(N, L, 1)JM c}\beta^{\Xi; (N, L, 1)JM b}\right)\end{aligned}\quad (\text{H.21})$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_{Coulomb}^{g-g} &= 3V_0 \sum_a \sum_{\Xi NLJM \Xi' N' L' J' M'} \sum_{bcde} (-1)^{\chi_a} (-1)^{\chi_b} (-1)^{\chi_d} \\
 &\quad \langle (11)\bar{b}, (11)c | (11)a \rangle \langle (11)\bar{d}, (11)e | (11)\bar{a} \rangle \\
 &\quad \left(\delta_c^b + 2\beta^{\dagger \Xi}_{(N,L,1)JMc} \beta^{\Xi; (N,L,1)JMb} \right) \left(\delta_e^d + 2\beta^{\dagger \Xi'}_{(N',L',1)J'M'e} \beta^{\Xi'; (N',L',1)J'M'd} \right)
 \end{aligned} \tag{H.22}$$

H.3.4. Término Cinético de Gluones

El término cinético de gluones consta de los siguientes dos términos:

$$\mathbf{H}_{gluon} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \Pi^2(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}). \tag{H.23}$$

con lo que el término cinético efectivo de gluones viene dado por

$$\mathbf{H}_{gluon} = \sum_{\Xi NLJMC} \Omega_{(N,L,1)J}^{\Xi} \left(\beta_{(N,L,1)JMC}^{\dagger \Xi} \beta^{\Xi; (N,L,1)JMC} + \frac{1}{2} \right) \tag{H.24}$$

H.3.5. Hamiltoniano de Interacción

El Hamiltoniano de Interacción viene dado por

$$\mathbf{H}_{int} = -g \int d\mathbf{x} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}). \tag{H.25}$$

y el Hamiltoniano de interacción efectivo se escribe como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_{int} &= -g \int d\mathbf{x} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \\
 &= g \sum_{\alpha} \sum_{N_1 j_1 \lambda_1 l_1 c_1} \sum_{N_2 j_2 \lambda_2 l_2 c_2 f} \sum_{\Xi NLJMC} \int r^2 dr R_{N_1 l_1}^*(r) j_L(\Omega_{(N,L,1)J}^{\Xi} r) R_{N_2 l_2}(r) \frac{\alpha_{LJ}^{\Xi}}{\sqrt{\Omega_{(N,L,1)J}^{\Xi}}} \frac{N_{(N,L,1)J}^{\Xi}}{R_e^{\frac{3}{2}}} \\
 &\quad \times \frac{3}{\sqrt{4\pi}} (-1)^{l_2+1+j_2-\lambda_2} (-1)^{\chi_{c_2}} \langle l_2 0, l_1 0 | L 0 \rangle \sqrt{\frac{(2l_2+1)(2j_2+1)(2j_1+1)(2l_1+1)}{2J+1}} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & l_2 & j_2 \\ \frac{1}{2} & l_1 & j_1 \\ 1 & L & J \end{array} \right\} \\
 &\quad \langle j_1 \lambda_1, j_2 - \lambda_2 | JM \rangle \langle (10)c_1, (01)c_2 | (11)C \rangle \\
 &\quad b_{\alpha(N_1, l_1, \frac{1}{2}) j_1 \lambda_1 c_1 f}^{\dagger} \left(\beta^{\dagger \Xi; (N,L,1)JMC} + \beta^{\Xi; (N,L,1)JMC} \right) b^{-\alpha(N_2, l_2, \frac{1}{2}) j_2 \lambda_2 c_2 f}
 \end{aligned} \tag{H.26}$$

Apéndice I

Programas Utilizados

I.1. Programas .FOR y .EXE Utilizados

Los programas que se mencionan en esta sección están escritos en lenguaje FORTRAN y son bibliotecas accesibles. A continuación, se menciona su función y el objetivo para el cual se utilizaron.

I.1.1. SU2-WIG.FOR (.EXE)

Este programa SU(2)-WIG.EXE, calcula los coeficientes Clebsch-Gordan de SU(2). La utilidad de este archivo en el actual trabajo aparece al ser necesario calcular diferentes coeficientes de acoplamiento. El archivo SU2-WIG.FOR, se utilizó en los primeros intentos por diagonalizar el término cinético de cuarks en donde se programó en lenguaje FORTRAN los elementos de matriz del término cinético de cuarks para dos niveles orbitales considerando un grupo SU(2) de color para cuarks, [68].

I.1.2. SU2-3J.FOR (.EXE)

Este programa SU2-3J.EXE, calcula los coeficientes-3J de SU(2). Se puede carecer de este archivo ya que se puede pasar de un coeficiente Clebsch-Gordan a un coeficiente 3J, sin embargo en algunos casos se utilizó. El archivo SU2-3J.FOR, también se utilizó en los primeros intentos por diagonalizar el término cinético de cuarks, [68].

I.1.3. SU2-6J.FOR (.EXE)

Este programa SU2-6J.EXE, calcula los coeficientes-6J de SU(2). La utilidad de este archivo aparece una vez que se tienen recoplamientos o bien productos de tres o cuatro coeficientes Clebsch-Gordan que se puedan reescribir como un coeficiente-6J. El archivo SU2-6J.FOR, también se utilizó en los primeros intentos por diagonalizar el término cinético de cuarks, [68].

I.1.4. SU2-9J.EXE

Este programa SU2-9J.EXE, calcula los coeficientes-9J de SU(2). La utilidad de este archivo aparece una vez que se tienen recoplamientos o bien productos de cuatro o seis coeficientes Clebsch-Gordan que se puedan reescribir como un coeficiente-9J. Específicamente, se utilizó este programa para calcular los posibles coeficientes-9J del término de interacción.

I.1.5. su3su2cg.exe

Este programa su3su2cg.exe, calcula los coeficientes Clebsch-Gordan reducidos de SU(3), dejando únicamente por calcular los coeficientes Clebsch-Gordan de SU(2) para la representación de iso-espín de color. Se utilizó este programa para calcular todos los coeficientes de SU(3) que aparecen tanto en el Hamiltoniano de Coulomb como en el Hamiltoniano de interacción. La necesidad de este programa fue inminente una vez que el modelo se extendió de un grupo SU(2) a un grupo SU(3) de color.

I.2. Programas de Mathematica

Se han escrito dos programas en *Mathematica*, el primero de ellos, *soluciones - $\alpha\beta$ - BCS.nb* resuelve el sistema de ecuaciones cuadráticas y bilineales necesarias para diagonalizar el sector de cuarks. El segundo de ellos, *PROGRAMA DE MINIMIZACIÓN DEL HAMILTONIANO EFECTIVO MOTIVADO DE LA CDC*, genera los valores de expectación de los operadores fermiónicos y bosónicos cuando se utilizan estados coherentes como estado de prueba. En las siguientes subsecciones se presentan dichos programas y se describen sus funciones.

I.2.1. Programa: Solución Ecuaciones Cuadráticas y Bilineales

PROGRAMA : soluciones - $\alpha\beta$ - BCS.nb

 Explicación :

Todos los comandos se pueden consultar en el Help de Mathematica. Es por eso que únicamente se indica el significado de los campos y funciones que se definen a través del programa.

1. - Nle : Este valor es corte en el número de niveles considerados, por ejemplo, el caso dos niveles correspondiente a un nivel s y un nivel p (4 niveles pues se trabaja en la descripción de Dirac), implica Nle = 2.
2. - El campo solucasu, almacena los coeficientes de interacción diagonales " $\bar{k}_{kk}=ksol$ " obtenidos al resolver las ecuaciones cuadráticas y bilineales.
3. - $j = \frac{1}{2}$, indica el espín total que se está considerando. Este valor depende de que columna de espín total se este trabajando en el sector de cuarks.
4. - k[nu_, nd_] : es una función que se evalúa en el programa una vez que se especifiquen los argumentos nd y nu.
 Esta función corresponde a las interacciones obtenidas al trabajar en la base de oscilador armónico " $k_{NN'}$ ".
5. - El campo inde, almacena todas la parejas de valores {iu, id} posibles, correspondientes a " N " y " N' " de la base original.
6. - El campo indedo, almacena todas las parejas de valores {iu, id} posibles, correspondientes a " k " y " q " de la base - $\alpha\beta$.
7. - El campo kas, almacena los coeficientes " $k_{NN'}$ " para cada Nle que se considera.
8. - La función kt[km], genera los " k_{kq} ".
9. - ortoga y ortogb impone las condiciones de ortogonalidad de las matrices " α " y " β "
10. - eqar junta las condiciones de ortogonalidad ortoga, ortogb de las matrices " α ", " β " con las condiciones " $\bar{k}_{kq}=0$ ", para formar el sistema de ecuaciones cuadráticas y bilineales.
11. - err = 1, es un discriminante y mientras éste se cumpla, solna va dar las soluciones a las ecuaciones cuadráticas y bilineales.
 Estas soluciones corresponden a encontrar los elementos de las matrices A[,] y B[,] alrededor de puntos aleatorios Ao[,] y Bo[,] (fian, contendra el listado de variables y el punto respectivo alrededor del cual se busca dicha solución) respectivamente.
12. - ksol, da los valores de " $\bar{k}_{kk} \neq 0$ ",
 el factor 0.3287 viene de considerar un radio de bolsa de 0.6 fm,
 el cual se puede cambiar si se considera una bolsa diferente.

COMPLEMENTO : Energías

 Explicación :

- El complemento " Energías ",
 calcula los ángulos de Bogoliubov teniendo todos los " $\bar{k}_{kk} = ksol$ " hasta el corte Nle.
 Estos ángulos se obtienen de resolver
 numericamente el gap y son almacenados en el campo ANGLETABLE.
 Posteriormente, se calculan las energías energiakk para 2, 4, 6, ..., Nle.
 Al resultar degeneradas las energías para los estados con $j - \frac{1}{2}$ y $j + \frac{1}{2}$,
 el caso de 2 niveles da 1 valor, 4 niveles da 2 valores, ..., Nle niveles da $\frac{Nle}{2}$ valores.
 Las energías son almacenadas en el campo Energia y el orden en el que
 el programa arroja los resultados es de tipo escalera como en la tabla 8.1.

```

Timing[Nle = 0;
solucasu = {};
Do[
  M = Nle / 2;
  j = 1 / 2;
  k[nu_, nd_] := KroneckerDelta[nd, nu + 1] Sqrt[(nu - j + 3 / 2) / 2] +
    Sqrt[(nu + j + 3 / 2) / 2] KroneckerDelta[nd, nu - 1];
  inde = {};
  Do[Do[AppendTo[inde, {iu, id}], {id, iu - 1, Min[iu + 1, 2 M - 1], 2}], {iu, 1, 2 M, 2}];
  indedo = {};
  Do[Do[AppendTo[indedo, {iu, id}], {id, iu, Min[iu + 1, M]}], {iu, 1, M}];
  kas = {};
  Do[AppendTo[kas, k[inde[[kk, 1]], inde[[kk, 2]]]], {kk, 1, Length[inde]};
  Do[
    kt[km] = Sum[kas[[kk]] A[indedo[[kk, 1]], km] B[indedo[[kk, 2]], km], {kk, Length[inde]},
      {km, 1, M}];
    ortoga = Flatten[Table[Table[Sum[A[ip, kk] A[jp, kk], {kk, 1, M}] =
      KroneckerDelta[jp, ip], {jp, ip, M}], {ip, 1, M}]];
    ortogb = Flatten[Table[Table[Sum[B[ip, kk] B[jp, kk], {kk, 1, M}] = KroneckerDelta[jp, ip],
      {jp, ip, M}], {ip, 1, M}]];
    eqar = Join[Flatten[Table[Table[Sum[kas[[kk]] A[indedo[[kk, 1]], jp] B[indedo[[kk, 2]], ip],
      {kk, Length[inde]}] = 0, {jp, ip + 1, M}], {ip, 1, M - 1}]],
      Flatten[Table[Table[Sum[kas[[kk]] A[indedo[[kk, 1]], ip] B[indedo[[kk, 2]], jp],
      {kk, Length[inde]}] = 0, {jp, ip + 1, M}], {ip, 1, M - 1}], ortoga, ortogb];
    err = 1;
    Quiet[While[err == 1,
      err = 0;
      Ao = RandomReal[{-1, 1}, {M, M}];
      Bo = RandomReal[{-1, 1}, {M, M}];
      fina = Join[Flatten[Table[Table[{A[jp, ip], Ao[[jp, ip]}], {jp, 1, M}], {ip, 1, M}], 1],
        Flatten[Table[Table[{B[jp, ip], Bo[[jp, ip]}], {jp, 1, M}], {ip, 1, M}], 1]];
      solna = Check[FindRoot[eqar, fina], err = 1]];
      ksol = Sort[Abs[Chop[.3287 Table[kt[kk], {kk, 1, M}] /. solna]];
      AppendTo[solucasu, ksol];, {Nle, 2, 16, 2}]]
(*COMPLEMENTO: Energías *)
Ks = Flatten[solucasu];
edos = Dimensions[{Ks}];
ANGLETABLE = {};
Quiet[
  Do[gap = NSolve[(Ks[[i]]) * (((Cos[x]) ^ 2) - ((Sin[x]) ^ 2)) - 2 * 0.008 * Sin[x] Cos[x] == 0, x];
    AppendTo[ANGLETABLE, {gap[[3, 1, 2]]}], {i, 1, edos[[2]], 1}]]
tetakk = Flatten[ANGLETABLE];
Energia = {};
Do[energiakk = (2 * (Ks[[w]]) * Sin[tetakk[[w]]) * Cos[tetakk[[w]]) +
  0.008 * (((Cos[tetakk[[w]]]) ^ 2) - ((Sin[tetakk[[w]]]) ^ 2));
  AppendTo[Energia, {energiakk}], {w, 1, edos[[2]], 1}];

```

I.2.2. Programa de Minimización del Hamiltoniano de la CDC

(*

PROGRAMA DE MINIMIZACIÓN DEL HAMILTONIANO EFECTIVO Y MOTIVADO DE LA CDC

 EXPLICACIÓN DEL PROGRAMA:

En este programa se hace la minimización variando la constante de interacción fuerte, g.

Se ha hecho la consideración de que $V_0 = \frac{g^2}{h}$, $h=2$.

Los campos Qa, Qb describen las variables correspondientes a estados s y p de energía negativa respectivamente.

Los campos Qc, Qc describen las variables correspondientes a estados s y p de energía positiva respectivamente.

El campo Gluon representa el componente gluónico que se está considerando

El campo Valores guardara para cada valor de g considerado por el programa los valores de espectación tanto de los operadores fermiónicos como bosónico.

El campo Lista guarda los cvalores de la energía de minimización, el valor de espectación del gluon en el mínimo correspondiente,

la corrección a las energías- $\alpha\beta$ -BCS dadas por este método, y por último el valor de g correspondiente de cada minimización realizada.

Los valores obtenidos de la minimización, esto es, la energía minima y los valores de espectación fermiónicos y bosónicos estan contenidos en E0.

El valor asignado a k=1, este simplemente es un factor con el que se podríia controlar de mejor forma al programa.

*)

```
Qa = Array[aa### &, {2, 3, 2}]
{{{aa1,1,1, aa1,1,2}, {aa1,2,1, aa1,2,2}, {aa1,3,1, aa1,3,2}},
 {{aa2,1,1, aa2,1,2}, {aa2,2,1, aa2,2,2}, {aa2,3,1, aa2,3,2}}}
Qb = Array[bb### &, {2, 3, 2}]
{{{bb1,1,1, bb1,1,2}, {bb1,2,1, bb1,2,2}, {bb1,3,1, bb1,3,2}},
 {{bb2,1,1, bb2,1,2}, {bb2,2,1, bb2,2,2}, {bb2,3,1, bb2,3,2}}}
Qc = Array[cc### &, {2, 3, 2}]
{{{cc1,1,1, cc1,1,2}, {cc1,2,1, cc1,2,2}, {cc1,3,1, cc1,3,2}},
 {{cc2,1,1, cc2,1,2}, {cc2,2,1, cc2,2,2}, {cc2,3,1, cc2,3,2}}}
Qd = Array[dd### &, {2, 3, 2}]
{{{dd1,1,1, dd1,1,2}, {dd1,2,1, dd1,2,2}, {dd1,3,1, dd1,3,2}},
 {{dd2,1,1, dd2,1,2}, {dd2,2,1, dd2,2,2}, {dd2,3,1, dd2,3,2}}}
Gluon = Array[gg### &, {1, 1}]
{{gg1,1}}
Lista = {};
Valores = {};
g = 0.0;
h = 2.0;
k = 1.0;
```



```

+1.032 * Sum_{M=1}^1 Sum_{Iz=1}^1 (Gluon[[M, Iz]] Gluon[[M, Iz]] + 1/2)
+k * g * 0.05452 * Sum_{lambda=1}^2 Sum_{Iz1=1}^2 Sum_{f=1}^2 (((-1)^(2-Iz1)) * ((-1)^(lambda-1)) *
ClebschGordan[{1/2, (lambda - (3/2))}, {1/2, -(lambda - (3/2))}, {1, lambda - lambda}] *
ClebschGordan[{1/2, (Iz1 - (3/2))}, {1/2, -(Iz1 - (3/2))}, {1, Iz1 - Iz1}] *
Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * ((0.4999 * Qd[[lambda, Iz1, f]] * Qc[[lambda, Iz1, f]] -
(0.490066 * Qd[[lambda, Iz1, f]] * Qb[[lambda, Iz1, f]])
+ (0.509933 * Qa[[lambda, Iz1, f]] * Qc[[lambda, Iz1, f]]) + (0.4999 * Qb[[lambda, Iz1, f]] *
Qa[[lambda, Iz1, f]]) + (0.4999 * Qc[[lambda, Iz1, f]] * Qd[[lambda, Iz1, f]])
+ (0.509933 * Qc[[lambda, Iz1, f]] * Qa[[lambda, Iz1, f]]) - (0.490066 * Qb[[lambda, Iz1, f]] *
Qd[[lambda, Iz1, f]]) + (0.4999 * Qa[[lambda, Iz1, f]] * Qb[[lambda, Iz1, f]]))
+k * g * 0.05452 * Sum_{lambda=1}^2 Sum_{Iz1=1}^2 Sum_{f=1}^2 (((-1)^(2-Iz1)) * ((-1)^(1-lambda)) *
ClebschGordan[{1/2, (lambda - (3/2))}, {1/2, -(lambda - (3/2))}, {1, lambda - lambda}] *
ClebschGordan[{1/2, (Iz1 - (3/2))}, {1/2, -(Iz1 - (3/2))}, {1, Iz1 - Iz1}]
* ((0.4999 * Qd[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qc[[lambda, Iz1, f]] -
(0.490066 * Qd[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qb[[lambda, Iz1, f]])
+ (0.509933 * Qa[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qc[[lambda, Iz1, f]]) +
(0.4999 * Qb[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qa[[lambda, Iz1, f]])
+ (0.4999 * Qc[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qd[[lambda, Iz1, f]]) +
(0.509933 * Qc[[lambda, Iz1, f]] * Qa[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qa[[lambda, Iz1, f]])
- (0.490066 * Qb[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qd[[lambda, Iz1, f]]) +
(0.4999 * Qa[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qb[[lambda, Iz1, f]]))
+k * g * 0.00413 * Sum_{lambda=1}^2 Sum_{Iz1=1}^2 Sum_{f=1}^2 (((-1)^(2-Iz1)) * ((-1)^(2-lambda)) *
ClebschGordan[{1/2, (lambda - (3/2))}, {1/2, -(lambda - (3/2))}, {1, lambda - lambda}] *
ClebschGordan[{1/2, (Iz1 - (3/2))}, {1/2, -(Iz1 - (3/2))}, {1, Iz1 - Iz1}] *
((0.4999 * Qc[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qd[[lambda, Iz1, f]] -
(0.490066 * Qc[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qa[[lambda, Iz1, f]])
+ (0.509933 * Qb[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qd[[lambda, Iz1, f]]) +
(0.4999 * Qa[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qb[[lambda, Iz1, f]])
+ (0.4999 * Qd[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qc[[lambda, Iz1, f]]) +
(0.509933 * Qd[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qb[[lambda, Iz1, f]])
- (0.490066 * Qa[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qc[[lambda, Iz1, f]]) +
(0.4999 * Qb[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qa[[lambda, Iz1, f]]))
+k * g * 0.00413 * Sum_{lambda=1}^2 Sum_{Iz1=1}^2 Sum_{f=1}^2 (((-1)^(2-Iz1)) * ((-1)^(2-lambda)) *
ClebschGordan[{1/2, (lambda - (3/2))}, {1/2, -(lambda - (3/2))}, {1, lambda - lambda}] *
ClebschGordan[{1/2, (Iz1 - (3/2))}, {1/2, -(Iz1 - (3/2))}, {1, Iz1 - Iz1}] *
((0.4999 * Qc[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qd[[lambda, Iz1, f]] -
(0.490066 * Qc[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qa[[lambda, Iz1, f]])
+ (0.509933 * Qb[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qd[[lambda, Iz1, f]]) +
(0.4999 * Qa[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qb[[lambda, Iz1, f]])
+ (0.4999 * Qd[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qc[[lambda, Iz1, f]]) +
(0.509933 * Qd[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qb[[lambda, Iz1, f]])
- (0.490066 * Qa[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qc[[lambda, Iz1, f]]) +
(0.4999 * Qb[[lambda, Iz1, f]] * Gluon[[lambda - lambda + 1, Iz1 - Iz1 + 1]] * Qa[[lambda, Iz1, f]]))
}, {aa1,1,1, aa1,1,2, aa1,2,1, aa1,2,2, aa1,3,1, aa1,3,2, aa2,1,1, aa2,1,2, aa2,2,1, aa2,2,2,
aa2,3,1, aa2,3,2, bb1,1,1, bb1,1,2, bb1,2,1, bb1,2,2, bb1,3,1, bb1,3,2, bb2,1,1, bb2,1,2,
bb2,2,1, bb2,2,2, bb2,3,1, bb2,3,2, cc1,1,1, cc1,1,2, cc1,2,1, cc1,2,2, cc1,3,1, cc1,3,2,
cc2,1,1, cc2,1,2, cc2,2,1, cc2,2,2, cc2,3,1, cc2,3,2, dd1,1,1, dd1,1,2, dd1,2,1, dd1,2,2,
dd1,3,1, dd1,3,2, dd2,1,1, dd2,1,2, dd2,2,1, dd2,2,2, dd2,3,1, dd2,3,2, gg1,1,1}];
AppendTo[Valores, {g, E0}]
AppendTo[Listas, {E0[[1]], E0[[2, 49]], 0.025 E0[[2, 49, 2]] * g, g}];, {g, 1.0, 1.5, 0.05}]]];

```

Bibliografía

- [1] A. De Rújula, Howard Georgi y S. L. Glashow, *Phys. Rev. D*, **12**, 147-162, (1975).
- [2] Kenneth Wilson, *Phys. Rev. D*, **10**, 2445-2459, (1974).
- [3] J. Kogut, Leonard Susskind, *Phys. Rev. D*, **9**, 3501-3512, (1974).
- [4] T. DeGrand, R. L. Jaffe, K. Johnson and J. Kiskis, *Phys. Rev. D*, **12**, 2060, (1975).
- [5] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson y C. B. Thorn, *Phys. Rev. D*, **10**, 2599-2604, (1974).
- [6] C. E. Carlson, T. H. Hansson y C. Peterson, *Phys. Rev. D*, **27**, 1556-1564, (1983).
- [7] T. DeGrand and C. DeTar, *Lattice Methods for Quantum Chromodynamics*, (World Scientific, Singapore, 2006).
- [8] Heinz J Rothe, *Lattice Gauge Theories An Introduction*, (World Scientific, Singapore, 1992).
- [9] Craig McNeile, *Int. Rev. Nucl. Phys.*, **9**, 1-101, (2003), (arXiv:hep-lat/0307027v1).
- [10] D. G. Richards, *Chin. Phys. C*, **34**, 1281-1285, (2010).
- [11] R. Bijker, F. Iachello and A. Leviatan, *Ann. Phys.*, **236**, 69-116, (1994).
- [12] Adam. Szczepaniak, Eric S. Swanson, Chueng-Ryong Ji y Stephen R. Cotanch, *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 2011-2014, (1996).
- [13] Adam P. Szczepaniak, Eric S. Swanson, *Phys. Rev. D*, **65**, 025012, (2001).
- [14] Adam P. Szczepaniak y Eric S. Swanson, *Phys. Lett. B.*, **577**, 61-66, (2003).

- [15] Pawel Krupinski, *Gluonic Degrees of Freedom in Coulomb Gauge QCD Hamiltonian*, Ph. D., Indiana University, 2005, 109 pages; AAT 3195581.
- [16] S. Lerma H. S. Jesgarz, P. O. Hess, O. Civitarese y M. Reboiro, *Phys. Rev. C*, **67**, 055209, (2003).
- [17] M. V. Nuñez, S. H. Lerma y P. O. Hess, *Phys. Rev. C*, **70**, 035208, (2004).
- [18] Peter O. Hess, Adam P. Szczepaniak, *Phys. Rev. C*, **73**, 025201, (2006).
- [19] R. Buser, R. D. Viollier and P. Zimak, *Int. J. of Theo. Phys.*, **27**, 925, (1988).
- [20] T. Yépez-Martínez, P. O. Hess, A. Szczepaniak and O. Civitarese, *Revista Mexicana de Física*, **55**(2), 60-65, (2009).
- [21] Tochtli C. Yépez, P.O. Hess, A. Szczepaniak and O. Civitarese, *Phys. Rev. C* **81**, 045204, (2010).
- [22] Tochtli Yépez-Martínez, P. O. Hess, A. Szczepaniak, O. Civitarese and S. Lerma H., *AIP Conf. Proc.*, **1323**, 129, (2010).
- [23] T. D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, Science Press, (1988).
- [24] N. H. Christ and T. D. Lee, *Phys. Rev. D*, **22**, 939, (1980).
- [25] Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, (Westview, 1995).
- [26] Hung Cheng and Er-Cheng Tsai, *Chin. J. Phys.*, **25**, 1, (1987).
- [27] Steven Weinberg, *The Quantum theory of Fields*, Vol. 1, (Cambridge Press, 1995).
- [28] W. Greiner, J. Reinhardt, *Field Quantization*, (Springer, 1996).
- [29] Francis Halzen, Alan D. Martin, *Quarks and Leptons*, (John Wiley, 1984).
- [30] V. N. Gribov, *Nucl. Phys.* **B139**, 1, (1978).
- [31] G. S. Bali, K. Schilling, *Phys. Lett.* **B309**, 378, (1993).

- [32] H. Chen, J. Sexton, A. Vaccarino and D. Weingarten, Nucl. Phys. **B34**, 357, (1994).
- [33] C. J. Morningstar, M. J. Peardon, Phys. Rev. D, **60**, 034509, (1999).
- [34] Jutta Escher and J. P. Draayer, J. Math. Phys, **39**, 5123, (1998).
- [35] M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, (Dover,1995).
- [36] T. A. Brody, M. Moshinsky, *Tablas de Paréntesis de Transformación*, (Monografias del Instituto de Física, UNAM, 1960).
- [37] A. S. Davidov, *Quantum Mechanics*, (Pergamon Press, 1976).
- [38] P. Ring, P. Schuck, *The Nuclear Many Body Problem*, (Springer, Heidelberg, 1980).
- [39] Enrico Lipparini, *Modern Many-Particle Physics*, (World Scientific, 2008).
- [40] Walter Greiner, Joachim A. Maruhn, *Nuclear Models*, (Springer, 1996).
- [41] S. Cohen and C. Tomase, *System of Bilinear Equations*, Report of Computer Science Department (Standford University, 1995).
- [42] P-G Reinhard, Rep. Prog. Phys. **52**, 439-514, (1989).
- [43] Wolfram Mathematica 6, Wolfram Research Inc. (1988-2007).
- [44] P. O. Hess, D. Schütte, Ann. Phys., **21**, 112, 1991.
- [45] D. Schütte, *The Structure of Canonically Quantized Gauge Field Theories whitin Different Regularization Schemes and Aspects of Confinement*, Institut für Theoretische Kernphysik, (1987).
- [46] M. Aygun, O. Bayrak and I. Boztosum, J. Phys. B, **40**, 537, (2007).
- [47] Gunnar S. Bali, Talk presented at the XVI Workshop on High Energy Physics, Sept. 14-17, 1993 Protvino, Russia, arXiv:hep-lat/9311009v1
- [48] Y. Sumino, 2004, arXiv:hep-ph/0410013v1
- [49] V. Dmitrašinović, Phys. Lett. **B499**, 135, (2001).

- [50] W. Greiner, S. Schramm, E. Stein, *Quantum Chromodynamics*, (Springer, 2002).
- [51] Morton Hamermesh, *Group Theory and its Applications to Physical Problems*, (Dover Publications, 1989).
- [52] Taizo Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, (World Scientific, 1987).
- [53] Leonard I. Schiff, *Quantum Mechanics*, (McGraw-Hill, 1965).
- [54] Judah M. Eisenberg and Walter Greiner, *Excitation Mechanisms of the Nucleus*, (North Holland, 1988).
- [55] Fabien Buisseret, Phys. Rev. D **79**, 037503, (2009).
- [56] T. A. Lähde, C. J. Nyfält, D. O. Riska, Nucl. Phys. A **674**, 141, (2000).
- [57] D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev and V. K. Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum*, (World Scientific, 1988)
- [58] William J. Thompson, *Angular Momentum*, (John Wiley, 1994).
- [59] Assa Auerbach, *Interacting Electrons and Quantum Magnetism*, (Springer-Verlag, 1994).
- [60] K. T. Hecht, *The Vector Coherent State Method and Its Application to Problems of Higher Symmetries*, (Springer-Verlag, 1987).
- [61] V. G. Bornyakov and E. V. Lushevskaya, Phys. At. Nuclei., **72**, 2009.
- [62] P. Bicudo, Phys. Rev. D, **82**, 034507, (2010).
- [63] O. Civitarese, P. O. Hess, Int. Jour. Mod. Phys. E, **15**, 1233, 2006.
- [64] J. P. Draayer and Yoshimi Akiyama, J. Math. Phys, **14**, 1904, (1973).
- [65] C. Bahri, D.J. Rowe and J.P. Draayer, Comp. Phys. Commun., **159**, 121-143, (2004).
- [66] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, (Academic Press, 2007)
- [67] George B. Arfken and Hans J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, (Academic Press, 1995)

- [68] Tochtli Cuauhtli Yépez Martínez, *Reporte Exámenes Generales*, Posgrado en Ciencias Físicas UNAM, (Diciembre 2008).