UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TABLA DE MORTALIDAD EXPERIENCIA MEXICANA (62-67). ANALISIS Y AJUSTE POR MEDIO DE LAS FUNCIONES ESTABLES DE LEVY.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN ACTUARIA

P R E S E N T A :

MARIA DESIDEREE GOROSTIETA GARCIA

México, D. F. 1990

INDICE

INTRODUCCION

Desde tiempos remotos, el ser humano se ha interesado por asegurar tanto su vejez, como a su familia en caso de que él falleciera; lo que lo orilló a estudiar el comportamiento de la mortalidad. En la actualidad éste es estudiado por la actuaría, ya que si un individuo demanda protección a una compañía aseguradora, ésta debe calcular los riesgos a los que está expuesto para tener las reservas necesarias para el momento de la reclamación.

Además se deben de actualizar constantemente los cálculos, tanto de las primas como de las reservas y los valores conmutados los cuales se obtienen con valores de la tabla de mortalidad.

Este trabajo se dedicará al análisis de la tabla de mortalidad experiencia mexicana, ya que por vivir en México, es la tabla de mortalidad que nos interesa.

El objetivo de este trabajo es analizar y ajustar la tabla de mortalidad experiencia mexicana usando la última ley de mortalidad llamada: "ley del coeficiente fraccionario", el cual está fundamentado por las leyes estables de Levy y las distribuciones probabilísticas de Weibull.

La tesis consta de seis capítulos y un apéndice; en el primer capítulo se habla sobre que es una tabla de mortalidad, las partes que la consta, su construcción y funciones alrededor de ella.

En el segundo capítulo se describen las funciones estables de Levy y las funciones de probabilidad de Weibull.

En el tercer capítulo se transcribe el reporte de cómo fue elaborada la tabla de mortalidad experiencia mexicana, (con datos de los años de 1962 a 1967).

En el cuarto capítulo se retoman las leyes de mortalidad que se han desarrollado a lo largo del tiempo, presentando la ley de coeficiente fraccionario o fraccionado.

En el quinto capítulo se presentan los resultados obtenidos al analizar y tratar de ajustar nuestra tabla.

En el sexto capítulo se dan las conclusiones a las que se llegaron de acuerdo a los resultados encontrados.

En el apéndice se muestra el desarrollo del cálculo para obtener el valor que se propone para la alfa necesaria en la ley del coeficiente fraccionario.

CAPITULO I

TABLAS DE MORTALIDAD

1.1 Introducción.

En este capítulo hablaremos sobre las tablas de mortalidad ya que:

i) La tabla de mortalidad es el instrumento mediante el cual se pueden calcular las primas en el seguro de vida; es la base para el cálculo de anualidades.

ii) Es necesario conocer las tasas de mortalidad, ya que estas dan la pauta para la construcción de las tablas de mortalidad y éstas a su vez elijen la mejor ley que las describan, con el fin de que al someter las poblaciones a regímenes de seguridad, esperaremos que la experiencia recopilada dentro de las tablas se reproduzca con lo previsto en las mismas.

1.2 Función de Supervivencia.

El comportamiento normal de mortalidad observado en la vida humana es generalmente descrito por el siguiente esquema: La eliminación de vivos por muerte es mayor en las primeras edades de vida (infancia), disminuye durante la niñez, incrementándose durante la adolescencia y la edad madura, acelerándose conforme se acerca al final del lapso de la vida.

Si suponemos que x representa la edad de una persona, donde x puede tomar cualquier valor entre cero y el límite superior del intervalo de vida. Consideremos la probabilidad de que una persona de edad cero sobreviva hasta una edad x arbitraria. Esta probabilidad se puede considerar una función de x, la cual definimos $S(x)$, y a esta función se le conoce como función de superviviencia.

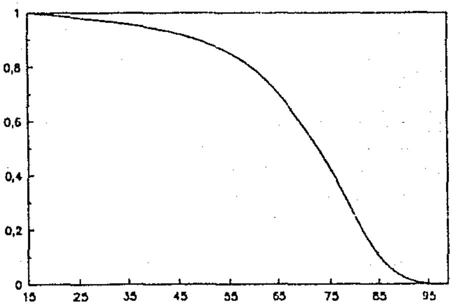
De acuedo con el comportamiento de la mortalidad, la función de supervivencia tiene la siguientes propiedades:

a) $S(x)$ es una función decreciente, ya que $S(x + t) < S(x)$ para $t>0$.

b) $S(x)$ es continua, pues estamos considerando patrones normales de mortalidad.

c) $S(0)= 1$ y $S(w)= 0$, donde w es la edad superior.

Función de supervivencia
Tabla Experiencia Mexicana



1.3 Tabla de Mortalidad.

Se puede definir como tabla de mortalidad a la estadística que resume la experiencia de una población ante el evento muerte.También se puede decir que la tabla de mortalidad es el instrumento mediante el cual se pueden calcular las probabilidades tanto de vida como de muerte.

Las tablas de mortalidad están basadas en datos obtenidos experimentalmente de dos fuentes principales: Las estadísticas generales de la población y los registros de mortalidad de las compañías de seguros.

Hay varios tipos de tablas de mortalidad que las compañias de seguros aplican en sus cálculos actuariales, como son las tablas de mortalidad:

- Selectas.
- Ultimas.

Se conocen como tablas de mortalidad selectas cuando la población que la conforma fue seleccionada mediante la aplicación de exámenes médicas o sometidos a un cuestionario exhaustivo hasta cubrir los requisitos fijados por las compañías de seguros.

Las tablas de mortalidad últimas conocidas como tablas de mortalidad ordinarias son aquellas donde la población no fue selecionada bajo exámenes médicos, es decir, que toda la población forma parte. A estas tablas pertenecen la Tabla de Mortalidad Experiencia Mexicana, Experiencia Americana, de los Hombres Americanos y otras más.

1.4 Construcción de la Tabla de Mortalidad.

La tabla de mortalidad es una tabla compuesta de varias columnas, correspondiendo a los elementos que tienen mayor aplicación.

La primera columna esta encabezada por una "x" o sea la columna correspondiente a las edades, mismas que van apareciendo de manera progresiva de forma creciente, esta columna es la que da el orden a los demás elementos.

La segunda columna es la columna del número de sobrevivientes para cada edad x, a esta columna se le denota como "l_x". Al valor inicial de l_x se le conoce como radix y se expresa como l_0 e indica el número de personas que inician el estudio.

La tercera columna denotada como "d_x" es conocida como el número de muertos o el número de defunciones que de produjeron a lo largo del año o del periodo de estudio.

La cuarta columna representa la probabilidad de muerte "q_x", la cual esta sujeta a la población durante el periodo en estudio.

Hay otra columna encabezada por μ_x y que corresponde a la fuerza de mortalidad que trataremos en el siguiente punto.

Existen otras columnas que estan reservadas a unas funciones actuariales que sirven para facilitar los cálculos de las primas de los diferentes seguros, así como para la construcción y manipulación de las fórmulas actuariales; a estos valores se les conoce como valores conmutados: D_x, N_x, S_x, C_x, M_x y R_x.

Hay tablas que anexan la esperanza de vida, la cual se define como el tiempo promedio de vida de los sobrevivientes a la edad x, denotada por " e_x^0 ".

Para poder construir la tabla de mortalidad primero hay que conocer las tasas de mortalidad. La tasa de mortalidad se define como la razón entre el número de muertos y los expuestos al riesgo, esto es:

$$q_x = \frac{\text{número de personas que fallecen entre x y x+1}}{\text{riesgo de muerte para cada edad}} \qquad [1]$$

Dado que q_x es obtenida directamente de las observaciones, puede tener desviaciones accidentales y discontinuidades que no se desean, por lo que es necesario realizar algunos ajustes, haciendo importante el suponer una formula algebraica sencilla que den la rectificación necesaria a q_x. Las más comunes son las leyes de Gompertz y las de Makeham, las cuales serán expuestas en el capítulo II. una vez determinadas las tasas de mortalidad serán aplicadas al radix obteniendo el primer dato sobre el número de defunciones, esto es:

$$d_0 = l_0 * q_0 \qquad [2]$$

Donde q_0 es la tasa de mortalidad con la que se inicia el proceso.

Posteriormente se efectua una diferencia entre el radix y el número de muertos obteniendo el número de sobrevivientes que llegan al año 1:

$$l_1 = l_0 - d_0 \qquad [3]$$

para poner completar el renglón 1 es necesario calcular d_1 el cual se obtiene multiplicando q_1 por l_1:

$$d_1 = l_1 * q_1 \qquad [4]$$

y nuevamente la diferencia entre d_1 y l_1 nos da el número de sobrevivientes que llegan al año 2:

$$l_2 = l_1 - d_1 \qquad [5]$$

Generalizando el proceso se puede observar:

$d_0 = l_0 * q_0$ $\qquad$ $l_1 = l_0 - d_0$

$d_1 = l_1 * q_1$ $\qquad$ $l_2 = l_1 - d_1$

$d_2 = l_2 * q_2$ $\qquad$ $l_3 = l_2 - d_2$

.

.

.

$d_x = l_x * q_x$ $\qquad$ $l_{x+1} = l_x - d_x$ [6]

Como puede apreciarse la construcción de una tabla de mortalidad depende de las tasas de mortalidad que se van obteniendo por estudios e investigaciones que se hacen de una población de la que se desea conocer su comportamiento de mortalidad. Por esta razón la base de una tabla de mortalidad es empírica, aunque se hacen intentos por conocer el comportamiento de la mortalidad humana. Otra forma para poder construir una tabla de mortalidad, es el considerar a q_x como una razón de probabilidad de muerte y $(1 - q_x)$ sería la razón de probabilidad de vida, se puede construir la tabla de mortalidad partiendo de $(1 - q_0)$:

$l_1 = l_0 * (1 - q_0)$ [7]

Si a $(1 - q_{x-1})$, la expresamos mediante la función de supervivencia como $S(x-1)$, es decir: $1 - q_{x-1} = S(x-1)$, entonces:

$l_x = l_{x-1}\ S(x-1)$ [8]

Otra forma es sólo exhibir el efecto de $S(x)$ para una población suficientemente grande. Sea k el número de recién nacidos. El número de vivos "l_x", que se espera para cada edad está dado por

$l_x = k\ S(x)$.

El número de defunciones a cada edad x, "d_x" se obtiene de la misma forma expresada en la fórmula [6]

Las probablilidades de muerte y de vida pueden ser obtenidas directamente de las columnas l_x y d_x. El símbolo (x) es usado para denotar "una persona de edad x".

Los diferentes tipos de probabilidades de muerte y vida son los siguientes:

La probabilidad de que (x) sobreviva un año, es denotada por p_x, y

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \qquad [9]$$

La probabilidad de que (x) muera entre las edades x y x+1 es denotada por q_x, y

$$q_x = 1 - p_x = \frac{d_x}{l_x} \qquad [10]$$

La probabilidad de que (x) sobreviva hasta alcanzar la edad x+n, es denotada por ${}_nP_x$, y

$${}_nP_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \qquad [11]$$

La probabilidad de que (x) muera entre las edades x y x+n es denotada por ${}_nq_x$, y

$${}_nq_x = 1 - {}_nP_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \qquad [12]$$

La probabilidad de que (x) sobreviva n años y muera entre las edades x+n y x+n+1, es denotada por ${}_{n/}q_x = \dfrac{d_{x+n}}{l_x}$ [13]

La probabilidad de que (x) muera entre las edades x+n y x+n+m, es denotada por ${}_{n/m}q_x$, y

$${}_{n/m}q_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_x} \qquad [14]$$

1.5 Fuerza de Mortalidad.

La fuerza de mortalidad μ_x es la función que mide la variación instantánea de la mortalidad a cada monento, es decir, que μ_x es la tasa nominal anual de la mortalidad, basada en la suposición de que la intensidad de la mortalidad permanece igual en todo momento durante el año de x a x+1, como lo fué durante el siguiente momento de cumplir la edad.

Por lo tanto μ_x se puede definir como:

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\frac{d}{dx}(l_x) \qquad [15]$$

ó

$$\mu_x = -\frac{d}{dx}\ln(l_x) \qquad [16]$$

Con las siguientes propiedades:

a) Es una medida de la mortalidad al momento preciso de alcanzar la edad x.

b) Expresa esta mortalidad en forma de una tasa anual.

La fuerza de mortalidad μ_x juega, en el calculo actuarial, el mismo papel que la fuerza de interés δ en la teoria del interes cxompuesto.

A partir de [10] podemos obtener expresiones para calcular l_x en términos μ_x. Si en [10] reemplazamos y por x e integramos en ambos lados de cero a x tenemos:

$$\int_0^x \mu_y \, dy = - \int_0^x \frac{d}{dy} \ln (l_y) \, dy$$

$$= - \ln (l_y) \Big|_0^x$$

$$= -\ln \frac{l_x}{l_0}$$

despejando l_x se obtiene:

$$l_x = l_0 \exp \left[- \int_0^x \mu_y \, dy \right] \qquad [17]$$

Cuando l_x está definida en términos de una tabla de mortalidad y la ecuación matemática es desconocida, los valores de μ_x pueden solamente aproximarse. Algunas fórmulas para aproximar μ_x son:

a) $\mu_x \approx - \frac{1}{2} (\ln p_{x-1} + \ln p_x) = \frac{1}{2} (\ln (l_{x-1}) - \ln (l_{x+1}))$

b) $\mu_x \approx \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2 \, l_x} = \frac{d_{x-1} + d_x}{2 \, l_x}$

c) $\mu_x \approx \frac{2(l_{x-1} - l_{x+1}) - (l_{x-2} - l_{x+2})}{12 \, l_x}$

CAPITULO II

DISTRIBUCIONES DE WEIBULL Y LAS FUNCIONES ESTABLES DE LEVY

2.1 Introducción.

En este capitulo expondremos una aplicación de las distribuciones de Weibull, ya que el problema de la supervivencia esta demandando modelos matemáticos que describan su naturaleza y las distribuciones de Weibull se presentan como una gran alternativa para la solución sobre los problemas de la mortalidad.

2.2 Distribuciones de Weibull.

Las funciones de Weibull son una familia de funciones que se propusieron basándose en las funciones estables de Levy, expresándose como:

$$\mathfrak{F}(x) = \exp\ (- x^{a}) \qquad [1]$$

donde x generalmente es definida por P*t, donde P es un parámetro de escala.

Otra forma para representar una función de distribución de Weibull es derivar [1]

$$f(x) = -\alpha\ P\ x^{\alpha-1}\ \exp\ (- x^{a}) \qquad [2]$$

Otro tipo de funciones de Weibull es eliminar el factor exponencial de la función propuesta en [2].

$$f(x) = -\alpha\ P\ x^{\alpha-1} \qquad [3]$$

Las tres ecuaciones presentadas son reconocidas como distribuciones de Weibull, y ofrecen una gran facilidad en cuanto a su manipulación en la aplicación de trabajos empíricos como es el comportamiento de la mortalidad.

La función de Weibull expresada en [1] describe la presencia de un número desconocido de causas que producen el mismo efecto.

en el caso de la supervivencia, son múltiples las causas por las cuales un individuo de un espacio muestral puede fallecer; Weibull lo explica mediante el argumento de la cadena, él dice que una cadena es tan resistente como lo sea el eslabón más débil, conceptualizando esta analogía diremos que un individuo puede fallecer por cualquier causa de muerte.

Formalmente cada eslabón es un factor que lleva al mismo resultado, por lo tanto la probabilidad de muerte será el resultado del producto de la probabilidades de cada uno de los distintos factores.

2.3 Función estable de Levy.

Retomando la función [1] de Weibull y lo expresamos como $\exp(-|x|^{\alpha})$ definimos la transformada de Fourier de acuerdo a la siguiente operación:

$$\mathfrak{F}(f(x)) = F_{o}(z) = \int f(x) \exp(-izx)\, dx \qquad [4]$$

Entonces la función estable de Levy será:

$$F_{\alpha}(z) = \mathfrak{F}(\exp -|x|^{\alpha}) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-izx) \exp(-|x|^{\alpha})\, dx \qquad [5]$$

donde $0 < \alpha \leq 2$.

Si efectuamos la integral propuesta en [5] sobre z de $(-\infty,\infty)$ implica que $F_{\alpha}(z)$ es una función de probabilidad.

En una publicación en 1983 Elliot W. Montroll y John T. Bendler dicen que la integral [5] corresponde a una función normalizada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{\alpha}(z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} S(x) \exp(-|x|^{\alpha})\, dx = 1 \qquad [6]$$

Si en la función anterior α se le da un valor arbitrario, por ejemplo 2, se tiene que la función de distribución obtenida es una distribución normal con media cero y desviación estandard 2.

$$F_2(z)= \frac{\Pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\ (-izx)\ \exp\ (-x^2)\ dx = \frac{\exp\left(\frac{z^2}{4}\right)}{2\sqrt{\Pi}} \qquad [7]$$

En 1853 Cauchy intentó generalizar la teoría de los mínimos cuadrados dando valores arbitrarios a α y estudiando los resultados obtenidos en cada sustitución; pero Cauchy por no hacer descriminación sobre los valores dados a α no pudo percatarse sobre los resultados cuando $\alpha > 2$. $F\alpha(z)$ no es propiamente una función de probablidad, ya que en estas condiciones es posible que para algunos valores de z dé resultados negativos en sus probabilidades; esto fue establecido por G. Polya cuando estudiaba el comportamiento de $F\alpha(z)$ con $\alpha < 1$.

Paul Levy fue quien contempló el carácter de estable cuando $\alpha \leq 2$, y es la forma como se define y la escribimos en [5].

Cuando $\alpha = 1$ nos queda:

$$F_1(z)= \frac{1}{1 + z^2} \qquad [8]$$

conocida como Lorenziana.

En 1937 Levy estudio el caso cuando $\alpha= {}^1/_2$ y en 1954 Zolotarev estudio cuando $\alpha= {}^2/_3$.

CAPITULO III

TABLA DE MORTALIDAD EXPERIENCIA MEXICANA
(E.M. 62-67)

3.1 Introducción.

En este capítulo expondremos el reporte de cómo fue elaborada la Tabla de Mortalidad Experiencia Mexicana. Esta tabla fue hecha por el actuario Jorge Rendón y la asistencia de un comité de actuarios; a continuación se transcribirá dicho reporte.

3.2 Construcción de la Tabla de Mortalidad Experiencia Mexicana.

La contrución de la tabla de motalidad comprendió tres etapas:

I El cálculo de las tasas crudas de mortalidad.

II La determinación de los márgenes que conviene fijar a las tasas crudas, con objeto de que la tabla pueda servir como base legal.

III La graduación de la tabla de mortalidad.

TASAS CRUDAS

La tasa cruda es el cociente del número de muertos para todas las edades entre el número de vivos correspondiente.

La obtención de las tasas crudas se realizó considerando las bases que se fijaron para la recolección de los datos y el cálculo matemático de las tasas. Por lo tanto, el cálculo se efectuó en función de los siguientes puntos:

a) Los datos fueron obtenidos de los seguros individuales, directos, por fallecimiento, excluyendo los seguros saldados y los prorrogados.

b) La experiencia se presentó sobre número de pólizas en vigor y pólizas siniestradas, previendo que resultaría muy complicado obtener los datos por asegurados o por otro concepto y considerando que en esta forma no variarían significativamente los resultados, ya que se están incluyendo las pólizas en vigor y también las pólizas siniestradas.

c) No se llevó a cabo distinción alguna de seguros con o sin exámen médico, porque se deseaba encontrar una tabla última. Tampoco se separaron los sexos, debido al número muy reducido de mujeres aseguradas. Igualmente, por la imposibilidad de separar la cartera de riegos subnormales, no se excluyeron estas pólizas, lo que puede producir un pequeño márgen de seguridad.

d) La experiencia abarcó los ejercicios de 1962 a 1967, y las pólizas siempre se refirieron a las que se encontraban en vigor al 31 de diciembre de cada año, pero cuyo año de emisión fuera igual al año de ejercicio disminuido en 4 años o más. Es decir, la experiencia resultó de datos con antigüedad mínima de cuatro años y medio en promedio.

e) Los cálculos de las tasas se efectuaron en base a las siguientes hipótesis:

   1º) Todas las pólizas entran en vigor a mitad del año calendario.

   2º) Como las edades se calculan al aniversario más cercano, todas las pólizas cumplen años a la mitad del año calendario.

   3º) Los siniestros ocurren habiendo cumplido años completos.

f) El método empleado en el cálculo de las tasas es el conocido con el nombre de "Método del Censo", el cual se basa en suponer que las altas y las bajas se encuentran uniformemente distribuidas en un año.

g) El objetivo principal fué el de encontrar tasas anuales por edades quinquenales, ya que con ello se obtiene mayor volúmen de datos y se evitan errores de recolección en la vecindad de cada edad.

h) Las fórmulas empleadas fueron las siguientes:

DEFINICIONES.

n = Año de valuación (1961, ... 1967).

m = Año calendario (1962, ...1967).

x = Edad.

P_x = Pólizas de edad x.

θ_x = Pólizas siniestradas de edad x.

${}^{n}P_x$ = Total de pólizas de edad x correspondientes al año de valuación n y cuyas fechas de emisión fueron de n-4 ó anteriores.

${}^{n}P_x^t$ = Pólizas de edad x correspondientes a la valuación del año n, con año de emisión t.

${}^{m}\theta_x$ = Pólizas siniestradas de edad x de fallecimientos ocurridos en el año m y cuyas fechas de emisión fueron de m-4 ó anteriores.

${}^{m}\theta_x^t$ = Pólizas siniestradas de edad x de fallecimientos ocurridos en el año m, con año de emisión t.

TASAS CENTRALES ANUALES.

$$M_x = \frac{\theta_x}{1/2\ (P_x + P_{x+1})}$$

Tasa anual por edad, por el año m:

$${}^{m}M_{x+1/2} = \frac{{}^{m}\theta_{x+1/2} - 1/2\ {}^{m}\theta_{x+1/2}^{m-4}}{1/2\ \left({}^{n-1}P_{x+1/2} + {}^{n}P_{x+1+1/2}\right)}$$

Tasa anual por edad para todos los ejercicios:

$$M_{x+1/2} = \frac{\sum\limits_{m} \left({}^{m}\theta_{x+1/2} - 1/2\ {}^{m}\theta_{x+1/2}^{m-4} \right)}{1/2 \sum\limits_{n} \left({}^{n-1}P_{x+1/2} + {}^{n}P_{x+1+1/2}\right)}$$

Tasa anual por edades quincenales para todos los ejercicios:

$$M_{\bar{x}+1/2} = \frac{\sum_{x} \sum_{n} \left({}^{n}\theta_{x+1/2} - 1/2 \; {}^{n}\theta_{x+1/2}^{n-1} \right)}{1/2 \sum_{x} \sum_{n} \left({}^{n-1}P_{x+1/2} + {}^{n}P_{x+1+1/2} \right)}$$

TASAS DE MORTALIDAD ANUALES

$$q_x = \frac{M_x}{1 + 1/2 \; M_x}$$

PORCENTAJES RELATIVOS A OTRAS TABLAS DE MORTALIDAD

q_x = Tasas de mortalidad que se desea comparar.

q_x^s = Tasa de mortalidad de una tabla estandar (100%).

$E_{\bar{x}+1/2}$ = Expuestos a la edad central.

P = Porcentaje (P_t = Porcentaje total).

$$P = \frac{q_{\bar{x}+1/2} \; E_{\bar{x}+1/2} \; 100}{q_{\bar{x}+1/2}^{s} \; E_{\bar{x}+1/2}} \qquad q_{\bar{x}+1/2}^{s} = \frac{1}{2} \left(q_x + q_{x+1} \right)$$

$$P_t = \frac{\sum_{x} \left(q_{\bar{x}+1/2} \; E_{\bar{x}+1/2} \; 100 \right)}{\sum_{x} \left(q_{\bar{x}+1/2} \; E_{\bar{x}+1/2} \right)}$$

donde

$$E_{\bar{x}+1/2} = 1/2 \sum_{x} \sum_{n} \left({}^{n-1}P_{x+1/2} + {}^{n}P_{x+1+1/2} \right)$$

MARGENES

El márgen o recargo se aplicó sobre todas las tasa crudas, de acuerdo con los deseos del comité encargado de la construcción de la tabla, el cual se basó en que las tasas de mortalidad en general tienen variaciones aleatorias para un periodo determinado o en una experiencia particular, y que estas variaciones deben quedar contenidas, lo mejor posible, en las tasas que se utilicen para los cálculos de reservas. Por lo tanto, se determinó el márgen efectuando las siguientes pruebas:

1º. Se calcularon bajo el mismo procedimiento indicado las tasa de mortalidad correspondientes a tres compañias en forma individual, escogidas principalmente por su volúmen, y se incluyeron en otra experiencia los resultados derivados de juntar las 10 compañias con menor número de asegurados reportados.

2º. Con los resultados anteriores se formó la tabla No. 5 donde se presenta también la experiencia promedio; y se adicionó una columna que se llamó "máximo" y que se refiere a la tasa mayor de las cinco comparadas, lo que representa aproximadamente una desviación media de valores individuales.

3º. El siguiente paso consistió en buscar una fórmula ya experimentada que, al aplicarla, rebasara los "máximos" encontrados, pero que a la vez no se apartara demasiado de la tendencia de las tasas originales.

4º. Las fórmulas que se consideraron correctas fueron las que se determinaron para la C.S.O. 58, sin tomar en cuenta el ajuste especial que se hizo en esa tabla por la necesidad de suavidad en las edades de 60 a 63 años. Por lo tanto, el recargo quedó en la siguiente forma:

Edades 23 y 28	$0.75 + 0.01x$
Edades 33,38,43,48,53y58	$1.07+\frac{(x-32)}{120}+\frac{(x-32)}{15,000}$
Edades 63, 68, 73, 78, 83 y 88	$0.15\ q_x$
Edad 93	sin recargo

5º. Tal como puede observarse en la tabla No. 5, las tasas recargadas con las fórmulas arriba indicadas resultan mayores a los "máximos" encontrados en todas las edades, excepto para las edades 48 y 53, pero en esas edades los máximos provienen de las compañias sin menor volúmen, que aún en conjunto tienen la menor cantidad de pólizas en esas edades, y considerando que el siguiente "máximo" ya resulta menor que las tasas recargadas y dada la ventaja de no modificar las fórmulas generales exclusivamente para esas edades, se concluyó que el recargo no debia alterarse.

6º. El recargo no se efectuó sobre la tasa a edad 18, en virtud de que claramente puede observarse que la tasa cruda a esa edad es una desviación no representativa de la mortalidad, probablemente por el volúmen de datos tan reducidos. Además se eliminó por razones prácticas, el considerar que las tasas están referidas a media edad más, lo que representa un pequeño márgen adicional.

7º. Desde luego el recargo anterior no refleja exactamente el margen real de la tabla, puesto que las tasas recargadas sólo sirvieron como puntos "pivotales" para la graduación final. El margen real, así como el valor relativo de ese margen, puede observarse en la tabla No. 10.

GRADUACION

Para efectos del ajuste de una tabla de mortalidad, la graduación debe entenderse como un procedimiento mediante el cual una serie de valores observados, que forman un conjunto irregular, se transforman en valores suavizados de edad en edad, y que a su vez esos valores suavizados tengan la misma tendencia de los valores originales. Las pruebas que indican si una serie ha sido suavizada se refieren en general a la inspección de las terceras diferencias, tanto en la regularidad de su variación en cada término como en su total, y para verificar la tendencia de los datos originales se calcula la diferencia de resultados que se producirian en una población determinada al aplicar los dos conjuntos de tasas de mortalidad. Tomando en cuenta los principios arriba indicados, el proceso de graduación se realizó en la siguiente forma:

1º. En virtud de que únicamente se contaba con valores quinquenales ya recargados, el primer paso consistió en interpolar las tasas, buscando además que esa interpolación produjera cierta suavidad. Se escogió para este efecto la fórmula de interpolación osculatoria modificada de W.A. Jenkins, que ya habia sido empleada para graduar la C.S.O. 58

y que presenta la ventaja de que la primera y la segunda derivada son continuas en los datos interpolados.
Fórmula de W.A. Jenkins a la quinta diferencia:

$$q_{x+s}= S(q_{x+1}\ 1/36\ \delta^{4}q_{x+1}) - 1/6\ S(1 - S^{2})(\delta^{2}q_{x+1} - 1/6\ \delta^{4}q_{x+1})$$
$$+ S^{1}(q_{x} - 1/36\ \delta^{4}q_{x}) - 1/6\ S^{1}(1 - S^{12})(\delta^{2}q_{x} - 1/6\ \delta^{4}q_{x})$$

2º. Sin embargo, debido fundamentalmente al volúmen reducido de los datos, la fórmula anterior no proporcionó la suavidad necesaria las terceras diferencias de los valores graduados y tampoco se adaptaban por la fórmula de Makeham, ya que, calculando el cociente de las primeras diferencias de dos cologaritmos quinquenales sucesivos a la tasa de vida, no resultó un valor constante, ya que debería ser en la fórmula de Makeham.

$$\text{Colog } P_{x} = X + Bc^{x}$$

$$\Delta \text{ Colog } {}_{5}P_{5+x} / \Delta \text{ Colog } {}_{5}P_{x} = C^{5}$$

3º. Tomando en cuenta los resultados anteriores, se vió la necesidad de que las tasas debían graduarse por algún otro método que proporcionara la suavidad requerida, y se escogió la fórmula de ecuaciones diferenciales conocida con el nombre de Whittaker-Henderson tipo A, que se basa en la obtención de una fórmula a partir de las derivadas parciales de la relación que existe entre suavidad y fidelidad. Este método fué empleado para la graduación de la tabla G.A. 51, y tiene la ventaja adicional de que puede modificarse según la importancia que se desee dar a la fidelidad o a la suavidad, ya que para nuestros efectos se buscaba sostener lo más posible la fidelidad de los datos, se usó haciendo el parámetro

$$q'_{x}= q'_{x-1}-1/3q'_{x-2}+1/3q''_{x}$$

$$q_{x}= q_{x+1}-1/3q_{x+2}+1/3q'_{x}$$

siendo q_{x} la tasa graduada.

4º. El resultado de la graduación anterior tampoco proporcionó tasas que pudieran usarse en el cálculo actuarial, ya que las terceras diferencias tenían irregularidades, aunque su suma se encontraba dentro de límites aceptables. No obstante lo anterior, se probó la posibilidad de que la graduación obtenida se pudiera ajustar con la fórmula de Makeham, siguiendo un procedimiento igual al indicado en el segundo inciso, encontrándose que era factible introducir la fórmula, ya que la constante calculada variaba únicamente de 1.66 a 1.93 de 25 a 80 años de edad.

5º. Para encontrar las constantes de la fórmula de Makeham se usó el método de King and Hardy, que consiste en formar cuatro ecuaciones con suma del logaritmo de los vivos y las dos primeras diferencias de esas sumas para un intervalo que se escoja, que en este caso fué correspondiente a 4 grupos de 14 edades cada uno.

$$\log l_x = \log K + x \log S + C^x \log g \quad \ldots(1)$$

$$\sum_{x}^{x+n-1} \log l_x = n \log K + n\left(x+\frac{n-1}{2}\right) \log S + C^x \frac{C^x - 1}{C-1} \log g$$

$$\Delta \sum \log l_x = nt \log S + \frac{C^x (C^t - 1)(C^n - 1)}{C-1} \log g$$

$$\Delta^2 \sum \log l_x = \frac{C^x (C^t - 1)^2 (C^n - 1)}{C-1} \log g$$

de donde

$$C^t = \frac{\Delta^2 \sum \log l_{x+t}}{\Delta^2 \sum \log l_x}$$

$$\log g = \frac{\left(C-1\right) \Delta^2 \sum \log l_x}{C^x (C^t - 1)^2 (C^n - 1)}$$

$$\log S = \frac{1}{nt}\left\{\Delta \sum \log l_x - \frac{\Delta^2 \sum \log l_x}{C^t - 1}\right\}$$

tasas que pudieran usarse en el cálculo actuarial, ya que las terceras diferencias tenían irregularidades, aunque su suma se encontraba dentro de límites aceptables. No obstante lo anterior, se probó la posibilidad de que la graduación obtenida se pudiera ajustar con la fórmula de Makeham, siguiendo un procedimiento igual al indicado en el segundo inciso, encontrándose que era factible introducir la fórmula, ya que la constante calculada variaba únicamente de 1.66 a 1.93 de 25 a 80 años de edad.

5º. Para encontrar las constantes de la fórmula de Makeham se usó el método de King and Hardy, que consiste en formar cuatro ecuaciones con suma del logaritmo de los vivos y las dos primeras diferencias de esas sumas para un intervalo que se escoja, que en este caso fué correspondiente a 4 grupos de 14 edades cada uno.

$$\log l_x = \log K + x \log S + C^x \log g \quad \ldots(1)$$

$$\sum_{x}^{x+n-1} \log l_x = n \log K + n\left(x + \frac{n-1}{2}\right) \log S + C^x \frac{C^n - 1}{C - 1} \log g$$

$$\Delta \sum \log l_x = nt \log S + \frac{C^x (C^t - 1)(C^n - 1)}{C - 1} \log g$$

$$\Delta^2 \sum \log l_x = \frac{C^x (C^t - 1)^2 (C^n - 1)}{C - 1} \log g$$

de donde

$$C^t = \frac{\Delta^2 \sum \log l_{x+t}}{\Delta^2 \sum \log l_x}$$

$$\log g = \frac{(C - 1)\ \Delta^2 \sum \log l_x}{C^x (C^t - 1)^2 (C^n - 1)}$$

$$\log S = \frac{1}{nt} \left\{ \Delta \sum \log l_x - \frac{\Delta^2 \sum \log l_x}{C^t - 1} \right\}$$

$$\log K = \frac{1}{n}\left\{\sum \log l_x - \frac{n(2x+n-1)}{2}\log S - \frac{C^x(C^n-1)}{C-1}\log g\right\}$$

Las constantes que resultaron fueron la siguientes:

log C =	0.04501808219	c = 1.1092209973
log K =	7.01171469491	k = 10,273,412
log S =	- 0.000702835996256	s = 0.99838297567
log g =	- 0.000138298240666	g = 0.999681607344

6º. Para encontrar los antilogaritmos de la l_x en la fórmula (1) se realizó un programa en la computadora del Centro Electrónico de Cálculo de la U.N.A.M. (Máquina G.20), donde además se obtuvieron las tasas graduadas de muerte y las constantes arriba indicadas.

7º. Con las tasas de muerte obtenidas se construyó la tabla de mortalidad, con un rádix de 10,000,000 y limitando las tasas a tres decimales, calculándose además la tasa instantánea de mortalidad (Tabla 7). Como complemento se incluye la tabla que sirve para calcular la interpolación de seguros de dos vidas.

$$t = \frac{\log(1 + C^n) - \log 2}{\log C}$$

8º. En vista de que la tabla final fué graduada por la fórmula de Makeham, no fué necesario probar la suavidad de los valores, pero se hizo la prueba de fidelidad considerando la distribución original de expuestos, lo que puede considerarse como que la tabla graduada sigue dentro de límites correctos la tendencia de los valores crudos y que además la diferencia es positiva, lo que significa un pequeño margen más de la tabla. (Tabla 8).

9º. Por último se consideró conveniente incluir una tabla que señale los márgenes reales de la tabla graduada con respecto a la tabla de tasas crudas resultante de una interpolación de los valores originales, y para efectos de comprobación se agregan las tasas correspondientes a la C.S.O. 58 y a la

Experiencia Americana. (Tabla 10).

Se incluye también las columnas conmutativas D_x, N_x, C_x y M_x en la tabla No. 11, calculadas al $4^1/_2$ % .

Tabla 1

TASAS ANUALES

Todas las Compañias

Todos los años

Edad		Expuestos	Muertos	Tasa por 1,000 M_x	Tasa por 1,000 q_x	CSO 58 Básica	CSO 58
18	(16-20)	936.5	6.5	6.9407	6.92	0.78	1.72
23	(21-25)	7,727.5	9.5	1.2294	1.23	0.92	1.90
28	(26-30)	25,644.0	3.0	1.2089	1.21	1.02	2.06
33	(31-35)	59,671.0	96.0	1.6088	1.61	1.28	2.36
38	(36-40)	89,819.5	193.5	2.1543	2.15	1.99	3.13
43	(41-45)	104,161.0	342.0	3.2834	3.28	3.46	4.73
48	(46-50)	101,105.0	547.5	5.4152	5.40	5.77	7.28
53	(51-55)	94,852.0	723.5	7.6277	7.60	9.49	11.40
58	(56-60)	71,933.5	952.5	13.2414	13.15	15.26	17.80
63	(61-65)	47,649.0	1,033.5	21.6899	21.46	24.17	27.81
68	(66-70)	26,412.5	990.0	37.4823	36.79	37.95	43.65
73	(71-76)	12,836.0	742.5	57.8451	56.22	57.12	65.69
78	(76-80)	4,810.0	427.0	88.7734	85.00	84.46	97.13
83	(81-85)	1,566.5	230.0	146.8241	136.78	125.83	144.70
88	(86-90)	308.0	85.0	275.9740	242.51	178.57	205.36
93	(91-95)	31.5	18.0	571.4286	444.44	263.19	302.98
		649,463.5	6,428.0				

Tabla 2

MORTALIDAD COMPARATIVA

Todas las Compañias

Todos los años

Edad		Expuestos al riego	Muertos	Muertos Esperados CSO 58. Básica	%	Muertos Esperados CSO 58.	%
18	(16-20)	936.5	6	1	600	2	300
23	(21-25)	7,727.5	10	7	143	15	67
28	(26-30)	25,644.0	31	26	119	53	58
33	(31-35)	59,671.0	96	76	126	141	68
38	(36-40)	89,819.5	193	179	108	281	69
43	(41-45)	104,161.0	342	360	95	493	69
48	(46-50)	101,105.0	546	583	94	736	74
53	(51-55)	94,852.0	721	900	80	1,081	67
58	(56-60)	71,933.5	946	1,098	86	1,280	74
63	(61-65)	47,649.0	1,023	1,152	89	1,325	77
68	(66-70)	26,412.5	972	1,002	97	1,153	84
73	(71-76)	12,836.0	722	733	98	843	86
78	(76-80)	4,810.0	409	406	101	467	88
83	(81-85)	1,566.5	214	197	109	227	94
88	(86-90)	308.0	75	55	136	63	119
93	(91-95)	31.5	14	8	175	10	140
		649,463.5	6,320	6,783	93	8,170	77

Tabla 3

TASAS ANUALES POR EDADES
Todas las Compañías
Todos los años

Edad	Expuestos	Muertos	Por 1,000 M_x	q_x
16	47.5	2.5	42.1053	41.24
17	72.0	0.5	6.9444	6.92
18	118.0		0.0000	0.00
19	244.5	2.0	8.1800	8.15
20	454.5	2.0	4.4004	4.39
21	689.5		0.0000	0.00
22	955.5	2.0	2.0931	2.09
23	1,471.5	1.0	0.6796	0.68
24	2,038.5	2.5	1.2264	1.22
25	2,572.5	4.0	1.5549	1.55
26	3,168.0	3.5	1.1048	1.10
27	3,944.0	8.0	2.0284	2.03
28	4,971.5	5.0	1.0057	1.01
29	6,039.5	8.5	1.4074	1.41
30	7,521.0	6.0	0.7978	0.80
31	9,022.5	10.5	1.1638	1.16
32	10,484.5	22.5	2.1460	2.14
33	11,959.0	15.0	1.2543	1.25
34	13,424.5	23.5	1.7505	1.75
35	14,780.5	24.5	1.6576	1.66
36	15,941.5	22.0	1.3800	1.38
37	16,878.5	44.5	2.6365	2.63
38	18,106.5	29.0	1.6016	1.60
39	19,068.5	41.5	2.1764	2.17
40	19,824.5	56.5	2.8500	2.85
41	20,361.5	39.0	1.9154	1.91
42	20,827.5	55.5	2.6647	2.66
43	21,116.0	82.5	3.9070	3.90
44	21,266.0	76.5	3.5973	3.59
45	20,590.0	88.5	4.2982	4.29
46	20,255.0	99.0	4.8877	4.88
47	20,231.5	98.5	4.8686	4.86
48	20,493.5	108.0	5.2700	5.26
49	20,333.5	114.5	5.6311	5.63
50	19,791.5	127.5	6.3841	6.36
51	20,027.5	137.0	6.8406	6.82
52	19,924.0	154.5	7.7545	7.73
53	19,372.5	140.5	7.2525	7.23
54	18,291.5	145.0	7.9272	7.90

Continua

Edad	Expuestos	Muertos	Por 1,000 M_x	q_x
55	17,236.5	146.5	8.4994	8.46
56	16,467.5	168.5	10.2323	10.18
57	15,272.5	201.5	13.1936	13.11
58	14,381.0	187.5	13.0380	12.95
59	13,358.5	176.0	13.1751	13.05
60	12,454.0	219.0	17.5847	17.43
61	11,544.0	228.0	19.7505	19.56
62	10,463.0	203.0	19.4017	19.22
63	9,616.5	112.5	22.0974	21.88
64	8,567.5	193.0	22.5270	22.28
65	7,458.0	197.0	22.4146	22.07
66	6,673.0	237.0	35.5163	34.90
67	5,770.0	187.0	32.4090	31.85
68	5,188.0	173.0	33.3462	32.80
69	4,688.5	191.5	40.3446	40.03
70	4,093.0	201.5	49.2304	48.05
71	3,561.0	170.5	47.8798	46.78
72	2,996.0	156.0	52.0694	50.75
73	2,525.0	137.0	54.2145	52.79
74	2,071.0	148.0	71.4631	69.00
75	1,681.0	131.0	77.9298	75.01
76	1,360.0	117.0	86.0294	82.48
77	1,141.0	93.5	81.9457	78.72
78	963.5	76.0	78.8791	75.89
79	755.5	81.5	107.8756	102.38
80	590.0	59.0	100.0000	95.24
81	495.5	49.0	98.8900	94.23
82	398.0	53.0	133.1658	124.85
83	300.0	37.0	123.3333	116.17
84	214.5	50.0	233.1002	208.77
85	158.5	41.0	258.6751	229.05
86	111.5	21.0	188.3408	172.10
87	81.0	21.0	259.2593	229.51
88	51.0	20.0	392.1569	327.87
89	39.5	10.0	253.1646	224.72
90	25.0	13.0	520.0000	412.70
91	15.0	5.0	333.3333	285.71
92	10.0	3.0	300.0000	260.87
93	4.5	1.0	222.2222	200.00
	649,461.5	6,419.0		

Tabla 4

TASAS ANUALES

Todas las compañias

Todos los años

Año	Expuestos	Muertos	Muertos Esperados Experiencia Total	Porcentaje	Por 1,000
1962	90,745	923	883	105	10.17
1963	99,956	1,058	979	108	10.58
1964	106,044	1,015	1,047	97	9.57
1965	111,160	1,068	1,067	100	9.61
1966	117,111	1,073	1,120	96	9.16
1967	124,448	1,174	1,224	96	9.43
	649,464		6,320		(9.73) I=55

Tabla 5

MORTALIDAD COMPARADA

Edad	Promedio	A	B	C	D	Máximo
23	1.23	0.40	1.89		2.11	2.11
28	1.21	0.50	0.75	1.22	1.72	1.72
33	1.61	1.45	1.48	2.29	1.52	2.29
38	2.15	1.65	1.00	1.33	2.99	2.99
43	3.28	2.84	2.19	3.45	4.15	4.15
48	5.40	5.01	7.56	5.29	6.29	7.56
53	7.60	6.58	10.37	6.25	7.66	10.37
58	13.15	12.99	10.07	11.64	14.89	14.89
63	21.46	21.01	20.81	20.66	20.94	21.46
68	36.79	37.44	28.06	30.58	36.55	37.44
73	56.22	43.96	42.35	49.19	51.12	56.22
78	85.00	81.17	71.79	54.42	70.59	85.00
83	136.78	152.54			107.32	152.54
88	242.51				175.18	242.51

Tabla 6

MORTALIDAD BASICA RECARGADA CON LOS MISMOS MARGENES USADOS EN LA C.S.O. 58

Edad	q_x Promedio	Promedio q''_x Recargado	Máximo	
23	1.23	2.21	2.11	
28	1.21	2.24	1.72	
33	1.61	2.69	2.29	
38	2.15	3.28	2.99	
43	3.28	4.53	4.15	
48	5.40	6.88	7.56	(6.29)
53	7.60	9.46	10.37	(7.66)
58	13.15	15.61	14.89	
63	21.46	24.68	21.46	
68	36.79	42.31	37.44	
73	56.22	64.65	56.22	
78	85.00	97.75	85.00	
83	136.78	157.30	152.54	
88	242.51	278.89	242.51	

Tabla 7

TABLA DE MORTALIDAD MEXICANA

(E.M. 62-67)

Edad	l_x	d_x	q_x	μ_x
15	10,000,000	17,810	1.781	1.775
16	9,982,190	17,958	1.799	1.792
17	9,964,232	18,125	1.819	1.811
18	9,946,107	18,311	1.841	1.832
19	9,927,796	18.525	1.866	1.855
20	9,909,271	18,758	1.893	1.881
21	9,890,513	19,019	1.923	1.909
22	9,871,494	19,319	1.957	1.941
23	9,852,175	19,645	1.994	1.976
24	9,832,530	20,009	2.035	2.016
25	9,812,521	20,410	2.080	2.059
26	9,792,111	20,867	2.131	2.107
27	9,771,244	21,370	2.187	2.160
28	9,749,874	21,927	2.249	2.220
29	9,727,947	22,549	2.318	2.285
30	9,705,398	23,244	2.395	2.358
31	9,682,154	24,012	2.480	2.439
32	9,658,142	24,860	2.574	2.529
33	9,633,282	25,808	2.679	2.628
34	9,607,474	26,853	2.795	2.738
35	9,580,621	28,004	2.923	2.861
36	9,552,617	29,288	3.066	2.996
37	9,523,329	30,703	3.224	3.147
38	9,492,626	32,265	3.399	3.314
39	9,460,361	34,001	3.594	3.499
40	9,426,360	35,905	3.809	3.705
41	9,390,455	38,013	4.048	3.932
42	9,352,442	40,346	4.314	4.185
43	9,312,096	42,910	4.608	4.466
44	9,269,186	45,734	4.934	4.776
45	9,223,452	48,838	5.295	5.121
46	9,174,614	52,259	5.696	5.504
47	9,122,355	56,020	6.141	5.928
48	9,066,335	60,146	6.634	6.399
49	9,006,189	64,664	7.180	6.921
50	8,941,525	69,619	7.786	7.501
51	8,871,906	75,030	8.457	8.143
52	8,796,876	80,940	9.201	8.856
53	8,715,936	87,386	10.026	9.646
54	8,628,550	94,396	10.940	10.523
55	8,534,154	102,017	11.954	11.495
56	8,432,137	110,259	13.076	12.574
57	8,321,878	119,169	14.320	13.771

Continua

Edad	l_x	d_x	q_x	μ_x
58	8,202,709	128,758	15.697	15.098
59	8.073,951	139,058	17.223	16.570
60	7,934,893	150,065	18.912	18.204
61	7,784,828	161,792	20.783	20.015
62	7,623,036	174,217	22.854	22.024
63	7,448,819	187,308	25.146	24.253
64	7,261,511	201,013	27.682	26.725
65	7,060,498	215,260	30.488	29.467
66	6,845,238	229,932	33.590	32.509
67	6,615,306	224,892	37.019	35.883
68	6,370,414	259,970	40.809	39.625
69	6,110,444	274,939	44.995	43.777
70	5,835,505	289,546	49.618	48.381
71	5,545,959	303,464	54.718	53.489
72	5,242,495	316,353	60.344	59.154
73	4,926,142	327,815	66.546	65.438
74	4,598,327	337,407	73.376	72.409
75	4,260,920	344,683	80.894	80.140
76	3,916,237	349,183	89.163	88.717
77	3,567,054	350,452	98.247	98.230
78	3,216,602	348,091	108.217	108.781
79	2,868,511	341,777	119.148	120.486
80	2,526,734	331,293	131.115	133.469
81	2,195,441	316,583	144.200	147.870
82	1,878,858	297,767	158.483	163.843
83	1,581,091	275,186	174.048	181.562
84	1,305,905	249,397	190.976	201.215
85	1,056,508	221,178	209.348	223.015
86	835,330	191,489	229.238	247.197
87	643,841	161,422	250.717	274.019
88	482,419	132,106	273.841	303.771
89	350,313	104,624	298.658	336.772
90	245,689	79,897	323.194	373.378
91	165,792	58,600	353.455	413.982
92	107,192	41,100	383.421	459.021
93	66,092	27,431	415.037	508.979
94	38,661	17,328	448.214	564.393
95	21,333	10,300	482.819	625.860
96	11,033	5,722	518.669	694.040
97	5,311	2,950	555.536	769.667
98	2,361	1,400	593.136	853.555
99	961	961	1000.000	946.604

Tabla 8

PRUEBA DE FIDELIDAD DE LAS GRADUACIONES

Edad	Expuestos	Muertos Esperados $q''_x\ E_x$	Muertos Graduados $q_x\ E_x$
23	7727.5	17	15
28	25644.0	57	58
33	59671.0	161	160
38	89819.5	295	305
43	104161.0	472	408
48	101105.0	696	671
53	94852.0	897	951
58	71933.5	1123	1129
63	47649.0	1176	1198
68	26412.5	1118	1078
73	12836.0	830	854
78	4810.0	470	521
83	1566.5	246	273
88	308.0	86	84
	648495.5	7644	7777

q''_x= Promedio Recargado (Tabla 6).

q_x= Promedio Recargado Graduado (Tabla 7, tasa central).

Error= +0.2 al millar de expuestos.

Tabla 9

TABLA MEXICANA

(E.M. 62 - 67)

TABLA DE ENVEJECIMIENTO UNIFORME

MAKEHAM

Diferencia en edad	Aumento a la edad mas joven	c^x
1	0.513	1.109220997
2	1.052	1.230371220
3	1.616	1.364753591
4	2.206	1.513813339
5	2.820	1.679153541
6	3.459	1.862552366
7	4.121	2.065982192
8	4.807	2.291630827
9	5.514	2.541925032
10	6.242	2.819556618
11	6.990	3.127511404
12	7.757	3.469101317
13	8.542	3.848000023
14	9.344	4.268282450
15	10.162	4.734468516
16	10.995	5.251571889
17	11.842	5.825153808
18	12.701	6.461382916
19	13.573	7.167101602
20	14.456	7,949899587
21	15.349	8.818195549
22	16.252	9.781327661
23	17.164	10.849654023
24	18.083	12.034664056
25	19.010	13.349102066

Tabla 10

Edad	(1) q_x (básica)	(2) (4)-(1)	% (3) (2)/(3)	(4) q_x (Mexicana)	q_x (CSO 58)	q_x (EA)
15	1.10	0.68	62	1.78	1.46	7.63
16	1.11	0.69	62	1.80	1.54	7.66
17	1.12	0.70	63	1.82	1.62	7.69
18	1.14	0.70	61	1.84	1.69	7.73
19	1.16	0.71	61	1.87	1.74	7.77
20	1.17	0.72	62	1.89	1.79	7.81
21	1.19	0.73	62	1.92	1.83	7.86
22	1.21	0.75	62	1.96	1.86	7.91
23	1.23	0.76	62	1.99	1.89	7.96
24	1.22	0.81	66	2.03	1.91	8.01
25	1.22	0.86	70	2.08	1.93	8.07
26	1.22	0.91	75	2.13	1.96	8.13
27	1.21	0.98	81	2.19	1.99	8.20
28	1.21	1.04	86	2.25	2.03	8.26
29	1.29	1.03	80	2.32	2.08	8.35
30	1.37	1.03	75	2.40	2.13	8.43
31	1.45	1.03	71	2.48	2.19	8.51
32	1.53	1.04	68	2.57	2.25	8.61
33	1.61	1.07	66	2.68	2.32	8.72
34	1.71	1.08	63	2.79	2.40	8.83
35	1.82	1.10	60	2.92	2.51	8.95
36	1.92	1.15	60	3.07	2.64	9.09
37	2.03	1.19	59	3.22	2.80	9.23
38	2.15	1.25	58	3.40	3.01	9.41
39	2.37	1.22	51	3.59	3.25	9.59
40	2.60	1.21	47	3.81	3.53	9.79
41	2.83	1.22	43	4.05	3.84	10.01
42	3.06	1.25	41	4.31	4.17	10.25
43	3.28	1.33	41	4.61	4.53	10.52
44	3.70	1.23	33	4.93	4.92	10.83
45	4.13	1.17	28	5.30	5.35	11.18
46	4.55	1.15	25	5.70	5.83	11.56
47	4.97	1.17	24	6.14	6.16	12.00
48	5.40	1.23	23	6.63	6.95	12.51
49	5.83	1.35	23	7.18	7.60	13.11
50	6.27	1.52	24	7.79	8.52	13.76
51	6.72	1.74	26	8.46	9.11	14.54
52	7.16	2.04	28	9.20	9.96	15.39
53	7.60	2.43	31	10.03	10.89	16.33
54	8.70	2.24	25	10.94	11.90	17.40
55	9.80	2.15	22	11.95	13.00	18.57
56	10.90	2.18	20	13.08	14.21	19.09
57	12.02	2.30	19	14.32	15.57	21.34
58	13.15	2.55	19	15.70	17.00	22.95
59	14.78	2.44	15	17.22	18.59	24.79

Continua

Edad	(1) q_x (básica)	(2) (4)-(1)	% (3) (2)/(3)	(4) q_x (Mexicana)	q_x (CSO 58)	q_x (EA)
60	16.42	2.49	15	18.91	20.34	26.60
61	18.09	2.69	15	20.78	22.24	28.33
62	19.77	3.08	16	22.85	24.31	31.29
63	21.46	3.69	17	25.15	26.57	33.44
64	24.50	3.18	13	27.68	29.04	36.47
65	27.56	2.93	11	30.49	31.75	40.13
66	30.62	2.97	10	33.59	34.74	43.71
67	33.70	3.32	10	37.02	38.04	47.65
68	36.79	4.02	11	40.01	41.68	52.00
69	40.65	4.35	11	45.00	45.61	56.76
70	44.53	5.09	11	49.62	49.79	61.99
71	48.41	6.31	13	54.72	54.15	67.67
72	52.31	8.03	15	60.34	58.65	73.73
73	56.22	10.33	18	66.55	63.26	80.18
74	60.53			73.38	68.12	87.03
75	65.20			80.89	73.37	94.37
76	70.36			89.16	79.18	102.31
77	76.15			98.25	85.70	111.06
78	82.69			108.22	93.06	120.83
79	89.96			119.15	101.19	131.73
80	97.73			131.12	109.98	144.47
81	106.05			144.20	119.35	158.61
82	114.78			158.48	129.17	174.30
83	123.85			174.05	139.38	191.56
84	133.30			190.98	150.01	211.36
85				209.35	161.14	235.55
86				229.24	172.82	265.68
87				250.72	185.13	303.02
88				273.84	198.25	346.89
89				298.66	212.46	395.86
90				325.19	228.14	454.55
91				353.46	245.77	532.47
92				383.42	265.93	634.26
93				415.04	289.30	734.18
94				448.21	316.66	857.14
95				482.82	351.24	1000.00
96				518.67	400.56	
97				555.54	488.42	
98				593.14	668.15	
99				1000.00	1000.00	

CAPITULO IV

LEYES DE MORTALIDAD

4.1 Introducción.

El trabajo actuarial demanda una ley matemática simple que reproduzca la experiencia de la mortalidad generalizada a un grupo de vida, en cualquier tiempo, pidiéndole tan solo un grado suficiente de exactitud y manipulación.

Se define "Ley de Mortalidad", como una expresión matemática tanto para l_x, como para μ_x, que pueda reproducir el comportamiento de un grupo inicial ante el evento muerte.

4.2 Ley de Moivre.

A Moivre se le puede considerar como el primero en realizar estudios formales acerca de encontrar una ley de mortalidad.

Alrededor de 1725, Moivre expuso su famosa hipótesis de los decrementos uniformes, esto es, presuponía que el número de vivos (l_x), decrecía en progresión aritmética de la edad x hasta la edad w, por lo que gráficamente l_x se puede expresar mediante una línea recta:

$$l_x = k\ (w - x) \tag{1}$$

donde $y = l_x$, $m = k$ y $x = w - x$ con $b = 0$

Se observa que la probabilidad de que (x) muera entre las edades x y x+1 ("q_x"), es igual a la fuerza de mortalidad ("μ_x"), esto es:

$q_x = \mu_x \qquad \forall\ x$

como $q_x = l_0 - l_x$

entonces $\mu_x = l_0 - l_x$

la expresión de Moivre se recomienda para el uso práctico en las edades entre 12 a 86 años.

Apesar de que la expresión de Moivre facilita los cálculos, no tiene una correlación aceptable y está muy lejos de tener una aplicación satisfactoria.

4.3 Ley de Gompertz.

Un siglo más tarde Gompertz propone una ley que dice "Las probabilidades de morir en intervalos infinitesimales sucesivos de tiempo crecen en progresión geométrica, es decir, que la fuerza de mortalidad (x) se incrementa en forma geométrica:

$$\mu_x = B\ C^x \qquad [2]$$

Donde x es igual a la edad en un momento dado y BC son constantes.

Gompertz decia: "Es posible que la muerte pueda ser la consecuencia de dos causas generales coexistentes, una la casualidad sin una inclinación previa a la muerte o deterioración y la otra, una deterioración o creciente incapacidad para resistir la muerte".

Se puede apreciar en la ley de Gompertz que el ajuste dado por la primera causa no está expresado.

La fórmula de l_x bajo la ley de Gompertz se obtiene mediante la definición de μx,

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\ \frac{d\ l_x}{dx} \qquad [3]$$

Integrando por ambos lados (ya hecho en el capitulo 1), obtenemos:

$$l_x = \exp\left[-\int \mu_y\ dy\right] \qquad [4]$$

sustituyendo [2] en [4]

$$l_x = l_0 \exp\left[-\int_0^x BC^y\ dy\right]$$

$$l_x = l_0 \exp\left[-B \int_0^x C^y \, dy \right] \qquad \text{haciendo } \int B^{ax} \, dx = \frac{B^{ax}}{a \ln(B)}$$

$$l_x = l_0 \exp\left[-B \left(\frac{C^y}{\ln(C)} \right]_0^x \right]$$

$$l_x = l_0 \exp\left[-B \left(\frac{C^x}{\ln(C)} - \frac{1}{\ln(C)} \right) \right] \qquad \text{haciendo } g = -\frac{B}{\ln(C)}$$

$$l_x = l_0 \exp\left[\ln g^{(c^x - 1)} \right] = l_0 \exp\left[\ln \frac{g^{c^x}}{g} \right]$$

$$l_x = l_0 \frac{g^{c^x}}{g} \qquad \text{haciendo } K = \frac{l_0}{g}$$

$$l_x = K g^{c^x} \qquad [5]$$

Y esta es la expresión de l_x bajo la ley de Gompertz.

La ecuación [5] proporciona valores aceptables para edades comprendidas entre 20 y 60 años por lo cual se deben efectuar ajustes fuera de este rango.

4.4 Leyes de Makeham.

En 1860 sugiere modificar la ley dada por Gompertz anexando la primera causa de muerte, la cual no había considerado su autor, y la expresa como:

$$\mu_x = A + BC^x \qquad [6]$$

Donde A es el factor de azar enunciado por Gompertz.

Pondremos l_x en términos de μ_x, bajo la ley de Makeham.

$$\int_0^x \mu_y \, dy = \int_0^x \left(A + BC^y \right) dy$$

$$= \int_0^x A\, dy + \int_0^x BC^y\, dy$$

$$= Ay \Big|_0^x + B\frac{C^y}{\ln(C)} \Big|_0^x$$

$$= Ax + \left(\frac{BC^x}{\ln(C)} - \frac{B}{\ln(C)} \right)$$

$$= \frac{Ax\ \ln(C) + B(C^x - 1)}{\ln(C)}$$

Haciendo $\ln(S) = -A$ y $\ln(g) = -\frac{B}{\ln(C)}$

$$\int_0^x \mu_y\, dy = \ln(S^x) - \ln\,(g^{c^x - 1})$$

$$\text{como } l_x = l_0 \exp\left[- \int_0^x \mu_y\, dy \right]$$

$$\text{entonces } l_x = l_0 \exp\left[\ln(S^x) + \ln(g^{c^x - 1}) \right]$$

$$l_x = l_0 \exp\left[\ln(S^x) + \ln(\frac{g^{c^x}}{g}) \right]$$

$$l_x = l_0 \exp\left[\ln\left(\frac{S^x\ g^{c^x}}{g} \right) \right]$$

$$l_x = \frac{l_0\ S^x\ g^{c^x}}{g} \qquad \text{haciendo } K = \frac{l_0}{g}$$

nos queda: $l_x = KS^x\ g^{c^x}$ [7]

Que es la expresión de l_x bajo la ley de Makeham, y es aceptable para las edades mayores o iguales a 20.

Existen otras leyes que se han propuesto como la segunda ley de Makeham, que hace un ajuste a la primera:

$\mu_x = A + Hx + BC^x$ [8]

donde A es constante, Hx es un elemento con progresión aritmética y B*C es el elemento con progresión geométrica. También se puede expresar l_x en términos de μ_x,

$$\text{sabemos que } l_x = l_0 \exp\left[-\int_0^x \mu_y \, dy \right] = l_0 \exp\left[-\int \left(A+Hx+BC^y\right) dy \right]$$

Resolviendo la integral se tiene:

$$\int_0^x \left(A+Hx+BC^y\right) dy = \left(Ay + \frac{Hy^2}{2} + \frac{BC^y}{\ln(C)}\right)\Big|_0^x = Ax + \frac{Hx^2}{2} + \frac{B(C^x-1)}{\ln(C)}$$

Haciendo $A = -\ln(S)$, $H = -2\ln(W)$ y $B = -\ln(C)\ln(g)$

$$\int_0^x \left(A+Hx+BC^y\right) dy = -x\ln(S) - x^2\ln(W) - (C^x-1)\ln(g)$$

$$\text{entonces } l_x = l_0 \exp\left(x\ln(S) + x^2\ln(W) + (C^x-1)\ln(g) \right)$$

$$l_x = l_0\, S^x\, W^{x^2}\, g^{C^x-1} \qquad \text{haciendo } K = \frac{l_0}{g}$$

$$l_x = K\, S^x\, W^{x^2}\, g^{C^x} \tag{9}$$

4.5 Ley del Exponente Fraccionado.

De acuerdo a los ajustes de los datos de las tablas de mortalidad, basado en Weibull se propone la siguiente expresión para μ_x:

$$\mu_x = m\, x^{\alpha-1} \tag{10}$$

donde m y α son dos parámetros, m es una constante de proporcionalidad de α y μ, esto es

$$m = \mu * \alpha \tag{11}$$

α es el parámetro de ajuste y μ es la fuerza de mortalidad para un periodo determinado. Cuando $\alpha = 1$ entonces $\mu_x = \mu$.

Ahora daremos una expresión para l_x en términos de μ_x:

$$l_x = l_0 \exp\left[- \int_0^x \mu_y \, dy \right]$$

$$l_x = l_0 \exp\left[- \int_0^x m y^{\alpha-1} \, dy \right]$$

$$l_x = l_0 \exp\left[-m \int_0^x y^{\alpha-1} \, dy \right]$$

$$l_x = l_0 \exp\left(\frac{-m \ y^{\alpha}}{\alpha} \right) \Bigg|_0^x$$

$$l_x = l_0 \exp\left(\frac{-m \ x^{\alpha}}{\alpha} \right)$$

sustituyendo [11]

$$l_x = l_0 \exp\left(- \frac{\mu \ x^{\alpha} \alpha}{\alpha} \right)$$

$$l_x = l_0 \exp\left(- \mu \ x^{\alpha} \right) \qquad [12]$$

CAPITULO V

RESULTADOS.

Con el fin de poder realizar el ajuste de la tabla Experiencia Mexicana, se efectuó lo siguiente:

1) De la ley del coeficiente fraccionario se obtuvo que:

$$l_x = l_0 \exp(-\mu\ x^{\alpha}\ )$$

pero $\mu_x = \mu\ \alpha\ x^{\alpha-1}$ de donde $\mu = \dfrac{\mu_x}{\alpha\ \ x^{\alpha-1}}$

y sustituyendo:

$$l_x = l_0 \exp\ (\ -\ \frac{\mu_x\ X}{\alpha}\ )$$

Así para poder calcular las nuevas l_x solamente se necesita tener la μ_x para cada edad (las cuales se extraen de la tabla que se va a ajustar) y el valor de α.

2) Para obtener el valor de α se debe efectuar una correlación entre los comportamientos de la misma tabla y una función de Weibull, esta correlación ya había sido calculada por el actuario Victor Manuel del Castillo Dávila (1), obteniendo la recta :

-7.62610509 + 4.0743647 X ; donde el valor 4.0743647 puede interpretarse como el valor de α del que habla Levy.

Una vez que ya se tiene el valor de α se puede ajustar la tabla, pero al ver que el valor de α obtenido y al aplicarlo al criterio de estabilidad, nos informa que ha perdido la estabilidad ya que recordemos que el valor de α debía de ser entre cero y dos.

Por esto no podemos realizar el ajuste,pero trataremos de hacer un ajuste óptimo. Para esto, se le asignó a α el máximo valor permitido por la teoría de Levy, esto es, el valor de dos; pero al sustituir dicho valor, nos percatamos de que no podíamos ajustar ya que sólo se llegaba a la edad 89 y no a la edad 99 como es la tabla experiencia mexicana originalmente.(Tabla 1)

Por consiguiente se trato de ajustar la tabla con valores menores a dos (valores permitidos por Levy), pero para estos valores ni siquiera podiamos llegar a ajustar hasta la edad 89 (Tablas 2, 3 y 4). Estos resultados nos motivaron a ver que sucederia si le asignabamos el valor obtenido en la correlación (α=4.0743647), pero aún así no logramos terminar de ajustarla. (Tabla 5).

Para poder comprender con mayor claridad lo que ocurría, primeramente se graficaron las l_x cuando α valia cuando mucho dos (Gráfica 1), donde se puede ver que ninguna de las curva se acerca a la curva de las l_x de la tabla experiencia mexicana, además de tener una caida pronunciada en las primeras edades.

Después se comparó con valores mayores a dos, donde se puede observar que la gráfica de E.M. se encuentra entre los valores de α igual a seis y a ocho. (Gráfica 2) Para ver el comportamiento con el valor de α obtenida por la correlación, se nota claramente que este valor esta muy alejado de las l_x de E.M., para ratificarlo se graficaron las diferencias de las l_x y se puede notar que existe una diferencia de millones la cual es demasiado grande. (Gráficas 3 y 4)

Para terminar nuestro estudio calculamos un nuevo valor para α usando el método de mínimos cuadrados, (Apéndice 1) el cual dio como resultado 6.650378156 y con dicho valor se hizo lo mismo que con el valor de α de la correlación; donde se puede observar que con el valor propuesto se logra una aproximación de las l_x con las originales (Tabla 6), notando que en el momento de calcular las diferencias, éstas son sólo de cientos de miles (Gráficas 5 y 6); además de que el valor está muy lejos de los límites de estabilidad marcada por las funciones estables de Levy y las prababilidades de Weibull.

Tabla 1

$\alpha = 2.0$

edad	lx	dx	qx	μx
15	10000000	142338	14.23380	1.775
16	9857662	10419	1.05694	1.792
17	9847243	10772	1.09391	1.811
18	9836471	11153	1.13384	1.832
19	9825318	11660	1.18673	1.855
20	9813658	12108	1.23379	1.881
21	9801550	12797	1.30561	1.909
22	9788753	13431	1.37208	1.941
23	9775322	14340	1.46696	1.976
24	9760982	15074	1.54431	2.016
25	9745908	16101	1.65208	2.059
26	9729807	17197	1.76746	2.107
27	9712610	18630	1.91812	2.160
28	9693980	19877	2.05045	2.220
29	9674103	21621	2.23494	2.285
30	9652482	23471	2.43160	2.358
31	9629011	25574	2.65593	2.439
32	9603437	27791	2.89386	2.529
33	9575646	30440	3.17890	2.628
34	9545206	33554	3.51527	2.738
35	9511652	36649	3.85306	2.861
36	9475003	40575	4.28232	2.996
37	9434428	44675	4.73532	3.147
38	9389753	49302	5.25062	3.314
39	9340451	54663	5.85229	3.499
40	9285788	60217	6.48486	3.705
41	9225571	66910	7.25267	3.932
42	9158661	74194	8.10097	4.185
43	9084467	81870	9.01209	4.466
44	9002597	90919	10.09920	4.776
45	8911678	100748	11.30517	5.121
46	8810930	111330	12.63544	5.504
47	8699600	123245	14.16574	5.928
48	8576355	136032	15.86128	6.399
49	8440323	150240	17.80027	6.921
50	8290083	165142	19.92043	7.501
51	8124941	181639	22.35573	8.143
52	7943302	198933	25.04412	8.856
53	7744369	217614	28.09964	9.646
54	7526755	236981	31.48515	10.523
55	7289774	257480	35.32071	11.495
56	7032294	278452	39.59618	12.574
57	6753842	299565	44.35476	13.771
58	6454277	320750	49.69573	15.098
59	6133527	341600	55.69389	16.570
60	5791927	360904	62.31156	18.204
61	5431023	378736	69.73567	20.015
62	5052287	394150	78.01417	22.024
63	4658137	406156	87.19280	24.253

64	4251981	414150	97.40166	26.725
65	3837831	417327	108.74033	29.467
66	3420504	414822	121.27511	32.509
67	3005682	406141	135.12440	35.883
68	2599541	391119	150.45695	39.625
69	2208422	369371	167.25563	43.777
70	1839051	341658	185.77951	48.381
71	1497393	308479	206.01071	53.489
72	1188914	271230	228.13256	59.154
73	917684	231458	252.21971	65.438
74	686226	190963	278.28005	72.409
75	495263	151795	306.49373	80.140
76	343468	115665	336.75626	88.717
77	227803	84081	369.09524	98.230
78	143722	57998	403.54297	108.781
79	85724	37706	439.85349	120.486
80	48018	22950	477.94577	133.469
81	25068	12974	517.55226	147.870
82	12094	6753	558.37607	163.843
83	5341	3205	600.07489	181.562
84	2136	1371	641.85393	201.215
85	765	524	684.96734	223.015
86	241	175	726.14110	247.197
87	66	51	772.72725	274.019
88	15	12	800.00001	303.771
89	3	3	1000.00000	336.772

Tabla 2

$\alpha = 1.5$

edad	lx	dx	qx	μx
15	10000000	189332	18.93320	1.775
16	9810668	13823	1.40898	1.792
17	9796845	14287	1.45833	1.811
18	9782558	14786	1.51147	1.832
19	9767772	15454	1.58214	1.855
20	9752318	16039	1.64463	1.881
21	9736279	16946	1.74050	1.909
22	9719333	17776	1.82893	1.941
23	9701557	18971	1.95546	1.976
24	9682586	19932	2.05854	2.016
25	9662654	21279	2.20219	2.059
26	9641375	22714	2.35589	2.107
27	9618661	24593	2.55680	2.160
28	9594068	26219	2.73283	2.220
29	9567849	28502	2.97893	2.285
30	9539347	30914	3.24068	2.358
31	9508433	33658	3.53981	2.439
32	9474775	36540	3.85656	2.529
33	9438235	39983	4.23628	2.628
34	9398252	44025	4.68438	2.738
35	9354227	48025	5.13404	2.861
36	9306202	53098	5.70566	2.996
37	9253104	58375	6.30869	3.147
38	9194729	64315	6.99477	3.314
39	9130414	71176	7.79548	3.499
40	9059238	78246	8.63715	3.705
41	8980992	86742	9.65840	3.932
42	8894250	95940	10.78674	4.185
43	8798310	105563	11.99810	4.466
44	8692747	116855	13.44282	4.776
45	8575892	129024	15.04497	5.121
46	8446868	142007	16.81179	5.504
47	8304861	156498	18.84414	5.928
48	8148363	171868	21.09233	6.399
49	7976495	188747	23.66290	6.921
50	7787748	206157	26.47197	7.501
51	7581591	225144	29.69614	8.143
52	7356447	244616	33.25192	8.856
53	7111831	265198	37.28969	9.646
54	6846633	285904	41.75834	10.523
55	6560729	307139	46.81477	11.495
56	6253590	327960	52.44348	12.574
57	5925630	347823	58.69806	13.771
58	5577807	366495	65.70593	15.098
59	5211312	383347	73.56055	16.570
60	4827965	396892	82.20689	18.204
61	4431073	407141	91.88316	20.015
62	4023932	413025	102.64214	22.024
63	3610907	413570	114.53355	24.253

64	3197337	408341	127.71285	26.725
65	2788996	396855	142.29314	29.467
66	2392141	378769	158.33890	32.509
67	2013372	354312	175.97941	35.883
68	1659060	324178	195.39860	39.625
69	1334882	289059	216.54274	43.777
70	1045823	250676	239.69257	48.381
71	795147	210536	264.77620	53.489
72	584611	170684	291.96167	59.154
73	413927	132981	321.26680	65.438
74	280946	99068	352.62293	72.409
75	181878	70231	386.14345	80.140
76	111647	47070	421.59665	88.717
77	64577	29634	458.89404	98.230
78	34943	17399	497.92519	108.781
79	17544	9443	538.24669	120.486
80	8101	4696	579.68152	133.469
81	3405	2117	621.73277	147.870
82	1288	855	663.81985	163.843
83	433	306	706.69746	181.562
84	127	95	748.03150	201.215
85	32	26	812.50000	223.015
86	6	5	833.33331	247.197
87	1	1	1000.00000	274.019

Tabla 3

α = 1

edad	lx	dx	qx	μx
15	10000000	282649	28.26490	1.775
16	9717351	20531	2.11282	1.792
17	9696820	21203	2.18659	1.811
18	9675617	21929	2.26642	1.832
19	9653688	22900	2.37215	1.855
20	9630788	23749	2.46595	1.681
21	9607039	25071	2.60965	1.909
22	9581968	26276	2.74223	1.941
23	9555692	28014	2.93166	1.976
24	9527678	29405	3.08627	2.016
25	9498273	31358	3.30144	2.059
26	9466915	33435	3.53177	2.107
27	9433480	36155	3.83263	2.160
28	9397325	38497	4.09659	2.220
29	9358828	41787	4.46498	2.285
30	9317041	45255	4.85723	2.358
31	9271786	49186	5.30491	2.439
32	9222600	53299	5.77917	2.529
33	9169301	58205	6.34781	2.628
34	9111096	63944	7.01826	2.738
35	9047152	69584	7.69126	2.861
36	8977568	76725	8.54630	2.996
37	8900843	84096	9.44809	3.147
38	8816747	92344	10.47370	3.314
39	8724403	101817	11.67037	3.499
40	8622586	111470	12.92768	3.705
41	8511116	123008	14.45263	3.932
42	8388108	135353	16.13630	4.185
43	8252755	148080	17.94310	4.466
44	8104675	162874	20.09630	4.776
45	7941801	178551	22.48243	5.121
46	7763250	194946	25.11139	5.504
47	7568304	212917	28.13272	5.928
48	7355387	231482	31.47108	6.399
49	7123905	251356	35.28346	6.921
50	6872549	271081	39.44403	7.501
51	6601468	291864	44.21198	8.143
52	6309604	312078	49.46079	8.856
53	5997526	332321	55.40968	9.646
54	5665205	351124	61.97904	10.523
55	5314081	368764	69.39375	11.495
56	4945317	383879	77.62475	12.574
57	4561438	395669	86.74216	13.771
58	4165769	403753	96.92160	15.098
59	3762016	407374	108.28609	16.570
60	3354642	405041	120.74045	18.204
61	2949601	397041	134.60837	20.015
62	2552560	382736	149.94203	22.024
63	2169824	361890	166.78311	24.253

64	1807934	335039	185.31595	26.725
65	1472895	302910	205.65620	29.467
66	1169985	266573	227.84309	32.509
67	903412	227651	251.99023	35.883
68	675761	188048	278.27591	39.625
69	487713	149502	306.53682	43.777
70	338211	113993	337.04698	48.381
71	224218	82867	369.58230	53.489
72	141351	57137	404.22070	59.154
73	84214	37124	440.82931	65.438
74	47090	22562	479.12508	72.409
75	24528	12731	519.03945	80.140
76	11797	6608	560.14240	88.717
77	5169	3124	602.04279	98.230
78	2065	1331	644.55205	108.781
79	734	504	686.64849	120.486
80	230	168	730.43478	133.469
81	62	48	774.19353	147.870
82	14	12	857.14287	163.843
83	2	2	1000.00000	181.562

Tabla 4

$\alpha = 0.5$

edad	lx	dx	qx	μx
15	10000000	557309	55.73090	1.775
16	9442691	39858	4.22104	1.792
17	9402833	41075	4.36836	1.811
18	9361758	42388	4.52778	1.832
19	9319370	44162	4.73873	1.855
20	9275208	45688	4.92582	1.881
21	9229520	48108	5.21241	1.909
22	9181412	50286	5.47694	1.941
23	9131126	53461	5.85481	1.976
24	9077665	55945	6.16293	2.016
25	9021720	59472	6.59209	2.059
26	8962248	63193	7.05102	2.107
27	8899055	68083	7.65059	2.160
28	8830972	72206	8.17645	2.220
29	8758766	78041	8.91005	2.285
30	8680725	84123	9.69078	2.358
31	8596602	90966	10.58162	2.439
32	8505636	98028	11.52506	2.529
33	8407608	106400	12.65521	2.628
34	8301208	116111	13.98724	2.738
35	8185097	125424	15.32346	2.861
36	8059673	137171	17.01942	2.996
37	7922502	148998	18.80694	3.147
38	7773504	161983	20.83784	3.314
39	7611521	176622	23.20456	3.499
40	7434899	190990	25.68831	3.705
41	7243909	207872	28.69611	3.932
42	7036037	225241	32.01248	4.185
43	6810796	242220	35.56412	4.466
44	6568576	261356	39.78884	4.776
45	6307220	280415	44.45937	5.121
46	6026805	298882	49.59211	5.504
47	5727923	317750	55.47386	5.928
48	5410173	335171	61.95199	6.399
49	5075002	351809	69.32195	6.921
50	4723193	365255	77.33222	7.501
51	4357938	376827	86.46911	8.143
52	3981111	384080	96.47558	8.856
53	3597031	387577	107.74914	9.646
54	3209454	385509	120.11670	10.523
55	2823945	378329	133.97180	11.495
56	2445616	364944	149.22376	12.574
57	2080672	345309	165.96033	13.771
58	1735363	320087	184.44960	15.098
59	1415276	289914	204.84626	16.570
60	1125362	255348	226.90299	18.204
61	870014	218458	251.09711	20.015
62	651556	180743	277.40210	22.024
63	470813	143951	305.74983	24.253

64	326862	109920	336.28872	26.725
65	216942	80056	369.02028	29.467
66	136886	55271	403.77393	32.509
67	81615	35950	440.48277	35.883
68	45665	21879	479.11969	39.625
69	23786	12348	519.12892	43.777
70	11438	6411	560.50009	48.381
71	5027	3029	602.54627	53.489
72	1998	1289	645.14512	59.154
73	709	488	688.29340	65.438
74	221	161	728.50680	72.409
75	60	47	783.33336	80.140
76	13	11	846.15386	88.717
77	2	2	1000.00000	98.230

Tabla 5.

α = 4.0743647

edad	lx	dx	qx	μx
15	10000000	70125	7.01250	1.775
16	9929875	5153	0.51894	1.792
17	9924722	5331	0.53714	1.811
18	9919391	5523	0.55679	1.832
19	9913868	5777	0.58272	1.855
20	9908091	6002	0.60577	1.881
21	9902089	6349	0.64118	1.909
22	9895740	6667	0.67372	1.941
23	9889073	7123	0.72029	1.976
24	9881950	7494	0.75835	2.016
25	9874456	8012	0.81139	2.059
26	9866444	8564	0.86799	2.107
27	9857880	9286	0.94199	2.160
28	9848594	9918	1.00705	2.220
29	9838676	10800	1.09771	2.285
30	9827876	11738	1.19436	2.358
31	9816138	12806	1.30459	2.439
32	9803332	13936	1.42156	2.529
33	9789396	15288	1.56169	2.628
34	9774108	16881	1.72711	2.738
35	9757227	18473	1.89326	2.861
36	9738754	20494	2.10438	2.996
37	9718260	22616	2.32717	3.147
38	9695644	25024	2.58095	3.314
39	9670620	27822	2.87696	3.499
40	9642798	30747	3.18860	3.705
41	9612051	34283	3.56667	3.932
42	9577768	38166	3.98485	4.185
43	9539602	42298	4.43394	4.466
44	9497304	47204	4.97025	4.776
45	9450100	52594	5.56544	5.121
46	9397506	58476	6.22250	5.504
47	9339030	65180	6.97931	5.928
48	9273850	72500	7.81768	6.399
49	9201350	80766	8.77762	6.921
50	9120584	89641	9.82843	7.501
51	9030943	99675	11.03705	8.143
52	8931268	110506	12.37294	8.856
53	8820762	122551	13.89347	9.646
54	8698211	135528	15.58113	10.523
55	8562683	149819	17.49673	11.495
56	8412864	165200	19.63659	12.574
57	8247664	181647	22.02405	13.771
58	8066017	199319	24.71096	15.098
59	7866698	218203	27.73756	16.570
60	7648495	237777	31.08808	18.204
61	7410718	258349	34.86153	20.015
62	7152369	279565	39.08705	22.024
63	6872804	300993	43.79479	24.253

64	6571811	322408	49.05923	26.725
65	6249403	343356	54.94221	29.467
66	5906047	363163	61.49003	32.509
67	5542884	381241	68.78026	35.883
68	5161643	397038	76.92086	39.625
69	4764605	409404	85.92612	43.777
70	4355201	417945	95.96457	48.381
71	3937256	421527	107.06111	53.489
72	3515729	419644	119.36187	59.154
73	3096085	411656	132.96017	65.438
74	2684429	397098	147.92643	72.409
75	2287331	376138	164.44406	80.140
76	1911193	348876	182.54358	88.717
77	1562317	316151	202.36035	98.230
78	1246166	279190	224.03917	108.781
79	966976	239427	247.60386	120.486
80	727549	198741	273.16511	133.469
81	528808	159045	300.76134	147.870
82	369763	122194	330.46573	163.843
83	247569	89672	352.21012	181.562
84	157897	62527	395.99866	201.215
85	95370	41174	431.72905	223.015
86	54196	25430	469.22281	247.197
87	28766	14622	508.30841	274.019
88	14144	7760	548.64252	303.771
89	6384	3766	589.91230	336.772
90	2618	1654	631.77997	373.378
91	964	649	673.23649	413.982
92	315	225	714.28573	459.021
93	90	68	755.55557	508.979
94	22	18	818.18181	564.393
95	4	4	1000.00000	625.860

Tabla 6

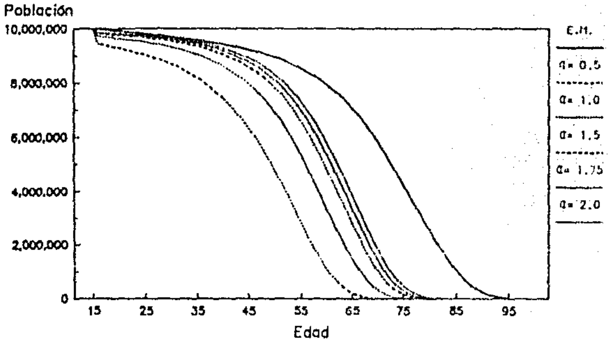
α = 6.650378156

edad	lx	dx	qx	μx
15	10000000	43021	0.00000	1.775
16	9956979	3166	0.31797	1.792
17	9953813	3276	0.32912	1.811
18	9950537	3394	0.34109	1.832
19	9947143	3552	0.35709	1.855
20	9943591	3691	0.37119	1.881
21	9939900	3905	0.39286	1.909
22	9935995	4101	0.41274	1.941
23	9931894	4384	0.44141	1.976
24	9927510	4613	0.46467	2.016
25	9922897	4933	0.49713	2.059
26	9917964	5275	0.53186	2.107
27	9912689	5722	0.57724	2.160
28	9906967	6114	0.61714	2.220
29	9900853	6660	0.67267	2.285
30	9894193	7241	0.73184	2.358
31	9886952	7904	0.79944	2.439
32	9879048	8607	0.87124	2.529
33	9870441	9446	0.95700	2.628
34	9860995	10438	1.05851	2.738
35	9850557	11430	1.16034	2.861
36	9839127	12690	1.28975	2.996
37	9826437	14017	1.42646	3.147
38	9812420	15522	1.58187	3.314
39	9796898	17278	1.76362	3.499
40	9779620	19116	1.95468	3.705
41	9760504	21343	2.18667	3.932
42	9739161	23795	2.44323	4.185
43	9715366	26414	2.71879	4.466
44	9688952	29532	3.04801	4.776
45	9659420	32971	3.41335	5.121
46	9626449	36743	3.81688	5.504
47	9589706	41060	4.28167	5.928
48	9548646	45802	4.79670	6.399
49	9502844	51190	5.38681	6.921
50	9451654	57022	6.03302	7.501
51	9394632	63661	6.77632	8.143
52	9330971	70902	7.59857	8.856
53	9260069	79034	8.53493	9.646
54	9181035	87906	9.57474	10.523
55	9093129	97806	10.75603	11.495
56	8995323	108633	12.07661	12.574
57	8886690	120426	13.55128	13.771
58	8766264	133356	15.21241	15.098
59	8632908	147502	17.08602	16.570
60	8485406	162602	19.16255	18.204
61	8322804	178977	21.50441	20.015
62	8143827	196522	24.13141	22.024
63	7947305	215080	27.06326	24.253

64	7732225	234661	30.34844	26.725
65	7497564	255128	34.02812	29.467
66	7242436	276182	38.13386	32.509
67	6966254	297586	42.71822	35.883
68	6668668	319122	47.85394	39.625
69	6349546	340054	53.55564	43.777
70	6009492	360190	59.93685	48.381
71	5649302	378634	67.02315	53.489
72	5270668	394870	74.91840	59.154
73	4875798	408085	83.69604	65.438
74	4467713	417369	93.41893	72.409
75	4050344	422153	104.22646	80.140
76	3628191	421468	116.16478	88.717
77	3206723	414802	129.35387	98.230
78	2791921	401836	143.92814	108.781
79	2390085	382296	159.95079	120.486
80	2007789	356487	177.55203	133.469
81	1651302	325020	196.82650	147.870
82	1326282	289003	217.90464	163.843
83	1037279	249812	240.83395	181.562
84	787467	209259	265.73685	201.215
85	578208	169219	292.66113	223.015
86	408989	131541	321.62479	247.197
87	277448	97847	352.66790	274.019
88	179601	69277	385.72726	303.771
89	110324	46420	420.76066	336.772
90	63904	29242	457.59264	373.378
91	34662	17195	496.07641	413.982
92	17467	9361	535.92491	459.021
93	8106	4675	576.73329	508.979
94	3431	2122	618.47860	564.393
95	1309	864	660.04586	625.860
96	445	312	701.12360	694.040
97	133	99	744.36092	769.667
98	34	27	794.11763	853.555
99	7	7	1000.00000	946.604

Comparación con diferentes valores de alfa

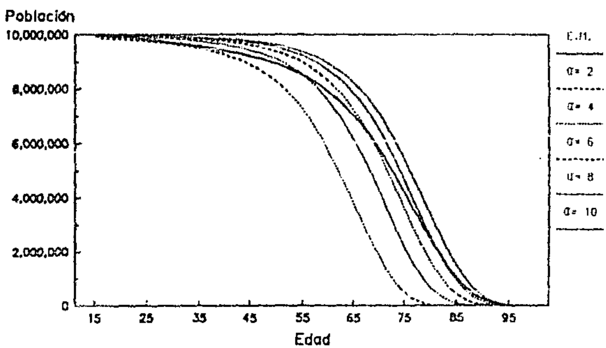
alfa menor o igual a dos



Gráfica 1.

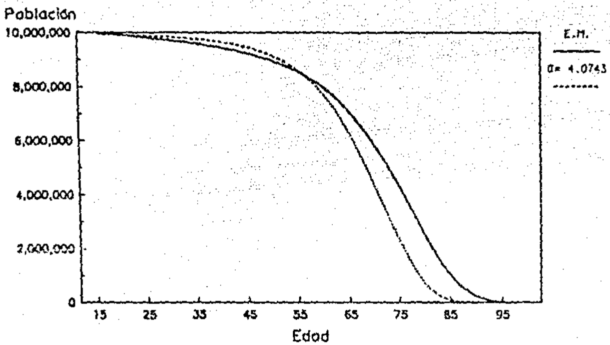
Comparación con diferentes valores de alfa

alfa mayor o igual a dos



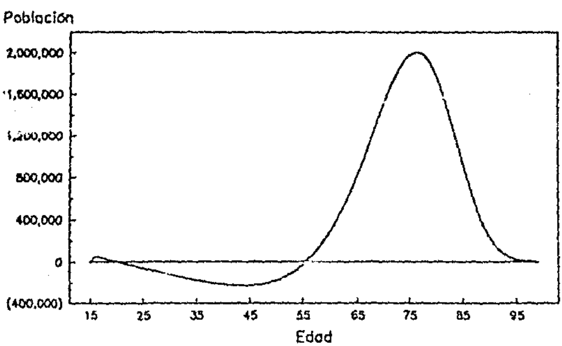
Gráfica 2.

lx con alfa de 4.0743



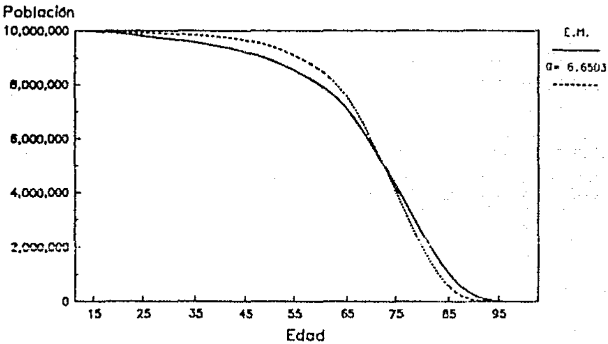
Gráfica 3.

Diferencia de las lx de E.M. y alfa de 4.0743



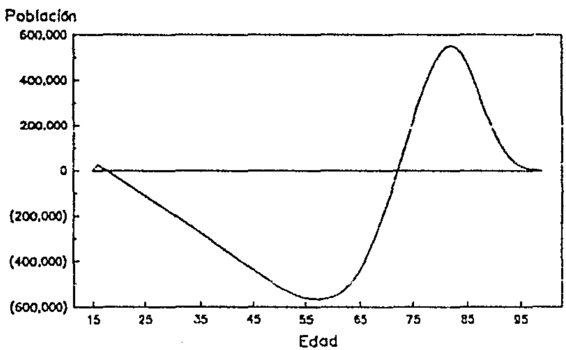
Gráfica 4.

lx con alfa propuesta (6.650378)



Gráfica 5.

Diferencia de las lx E.M. y alfa de 6.650378



Gráfica 6.

CAPITULO VI

CONCLUSIONES

En el momento de analizar toda la información obtenida en los resultados, llegamos a:

a) No es posible ajustar la tabla de mortalidad experiencia mexicana con los valores de alfa permitidos por las funciones estables de Levy.

b) Con el valor de alfa para nuestra tabla (α = 4.0743), tampoco se puede ajustar; además de que no se aproxima a la tabla E.M.

c) A tratar la tabla de mortalidad experiencia mexicana con respecto a la ley del coeficiente fraccionario se encontró un valor que matematicamente hablando pudo ajustar la tabla, este valor de alfa, (α = 6.6503) es muy superior a los valores aceptados.

Lo que nos lleva a concluir:

1.- La ley del coeficiente fraccionado no sirve para ajustar tablas; pero esto no es cierto ya que con esta ley ya han sido ajustadas otras tablas de mortalidad. lo que nos lleva a:

2.- La tabla de mortalidad Experiencia Mexicana por no tener los datos de las primeras edades, tiene una alta correlación, lo que hace que no sea una función estable y no se puede ajustar bajo las suposiciones de Levy.

3.- Se podría pensar que además de que le faltan los datos de las primeras edades, pudo haber error en el cálculo de las tasas de mortalidad (μ_x) cuando se elaboró la tabla de mortalidad;

esto se ha pensado ya que se debió de poder ajustar la tabla por lo menos con el valor real de alfa.

APENDICE 1

Para calcular el valor de α por mínimos cuadrados, se tiene que:

$l_x = l_0 \exp\left(-\frac{\mu_x X}{\alpha}\right)$, vamos a derivar sus diferencias cuadradas para después igualar a cero:

$$\sum \frac{d}{d\alpha}\left[l_x - l_0 \exp\left(-\frac{\mu_x X}{\alpha}\right)\right]^2 \text{ desarrollando:}$$

$$\sum \frac{d}{d\alpha}\left[l_x^2 - 2\, l_x\, l_0 \exp\left(-\frac{\mu_x X}{\alpha}\right) + l_0^2 \exp\left(-\frac{2\mu_x X}{\alpha}\right)\right] =$$

$$\sum\left[-2 l_x\, l_0 \exp\left(-\frac{\mu_x X}{\alpha}\right)\left(\frac{\mu_x X}{\alpha^2}\right) + l_0^2 \exp\left(-\frac{2\mu_x X}{\alpha}\right)\left(\frac{2\mu_x X}{\alpha^2}\right)\right] =$$

$$\sum -2\, l_0 \exp\left(-\frac{\mu_x X}{\alpha}\right)\left(\frac{\mu_x X}{\alpha^2}\right)\left[-l_x + l_0 \exp\left(-\frac{\mu_x X}{\alpha}\right)\right] =$$

$$-\frac{2\, l_0}{\alpha^2} \sum \exp\left(-\frac{\mu_x X}{\alpha}\right)\left(\mu_x X\right)\left[-l_x + l_0 \exp\left(-\frac{\mu_x X}{\alpha}\right)\right] \quad \ldots(1)$$

Al igualar a cero la expresión (1) para hallar la α mínima se utilizaron métodos númericos, dando como resultado $\alpha = 6.650378156$, con una diferencia de cero de 0.000375, para esto se desarrollo un programa en una calculadora programable. A continuación listo este programa:

```
  5 DIM M(99): DIM L(99)
 10 R=0: S=0: Y=6: Z=8
 20 FOR X=15 TO 99
 30 W= EXP(-M(X) * X / Y)
 40 R= R + M(X) * X * W * (L(X) - L(15) * W)
 50 W= EXP(-M(X) * X / Z)
 60 S= S + M(X) * X * W * (L(X) - L(15) * W)
 70 NEXT X
 80 FOR H=1 TO 30
 90 T=0: A=(Z+Y)/2
100 FOR X=15 TO 99
```

```
110 W= EXP(-M(X) * X / A)
120 T= T + M(X) * X * W * (L(X) - L(15) * W)
130 NEXT X
140 Q= R*T: P= S*T
150 IF Q < 0 THEN 300
160 IF P < 0 THEN 400
170 H=31
180 NEXT H
190 PRINT "A=";A;" DIF=";T
200 END
300 Z=A: S=T
310 GOTO 180
400 Y=A: R=T
410 GOTO 180
```

BIBLIOGRAFIA

1.- DESCRIPCION DE LAS LEYES DE MORTALIDAD POR MEDIO DE LAS FUNCIONES ESTABLES DE LEVY
TESIS.- FACULTAD DE CIENCIAS
VICTOR MANUEL DEL CASTILLO DAVILA

2.- TABLAS FINANCIERAS
ACT. BENJAMIN DE LA CUEVA
ED. CAPRICORNIO

3.- ON LEVY (OR STABLE) DISTRIBUTIONS AND THE WILLIAMS-WATTS MODEL OF DIELECTRIC RELAXATION
ELLIOTT W. MONTROLL AND JOHN T. BENDLER
VOL. 34 NUMS. 1/2. 1984

4.- LEVY (STABLE) PROBABILITY DENSITIES AND MACHANICAL RELAXATION IN SOLID POLYMERS
JOHN T.BENDLER
VOL. 36 NUMS. 5/6 SEPTIEMBRE DE 1984
BELGICA

5.- LIFE CONTINGENCIES
CHESTER W. JORDAN
SOCIETY OF ACTUARIES

6.- PROYECTO DE TEXTO PARA CALCULO ACTUARIAL I
TESIS.- FACULTAD DE CIENCIAS
F. ALONSO TEJEDA LOPEZ

7.- PROYECTO DE TEXTO PARA UN CURSO DE CALCULO ACTUARIAL I
TESIS.- FACULTAD DE CIENCIAS
PEDRO ALEJANDRO COVARRUBIAS GONZALEZ

8.- GRADUACION DE TABLAS DE MORTALIDAD
TESIS.- FACULTAD DE CIENCIAS
CAMILO REYNAUD GUERRERO DEL VILLAR

9.- PROBABILIDAD Y ESTADISTICA PARA INGENIEROS
IRWIN MILLER, JOHN E. FREUND
ED. PRENTICE HALL

10.- APUNTES PERSONALES DE LAS MATERIAS:
- INTRODUCCION AL SEGURO DE VIDA
- CALCULO ACTUARIAL I
- DEMOGRAFIA I