



4
2 ej

ASPECTOS CLASICOS DE LA
FISICA-MATEMATICA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
MATEMATICO

PRESENTA

LORENZO LORETO CRUZ HERNANDEZ
MEXICO 1990

FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Indice

Capítulo I Desarrollo Histórico

- | | |
|---|------|
| §1. Los inicios de la ciencia | 1-4 |
| §2. El surgimiento de algunas teorías importantes | 1-28 |
| I. La teoría del potencial | 1-28 |
| II. El problema de la cuerda vibrante | 1-42 |
| III. La teoría del calor | 1-45 |
| IV. El método de Fourier | 1-48 |

Capítulo II Antecedentes Matemáticos

- | | |
|------------------------------|------|
| §1. Análisis de Fourier | 2-3 |
| §2. Transformadas integrales | 2-40 |

Capítulo III La Ecuación de Primer orden

- | | |
|-----------------------------|------|
| §1. La ecuación lineal | 3-3 |
| §2. La ecuación cuasilineal | 3-13 |
| §3. La ecuación general | 3-22 |

Capítulo IV La Ecuación de Segundo orden

- | | |
|---|-------|
| φ1. Clasificación | 4-2 |
| φ2. La ecuación de la onda | 4-13 |
| I. La modelación | 4-14 |
| II. La fórmula de D'Alembert | 4-32 |
| III. El método de Fourier | 4-42 |
| IV. La membrana vibrante | 4-60 |
| φ3. La ecuación del calor | 4-70 |
| I. La modelación | 4-70 |
| II. El principio del máximo | 4-85 |
| III. El método de Fourier | 4-94 |
| IV. La transformación de Fourier | 4-99 |
| φ4. La ecuación de Laplace | 4-105 |
| I. Problemas fundamentales | 4-105 |
| II. El método de Fourier | 4-121 |
| III. Los mapas conformes | 4-131 |
| IV. La transformación de Fourier | 4-142 |
| V. Propiedades de las funciones armónicas | 4-148 |

Capítulo I.

1-1

Desarrollo Histórico.

La evolución de la matemática es una historia que está adherida a la historia de la evolución de la humanidad.

La ciencia ha tenido etapas muy definidas en su desarrollo.

Uno de los factores de este desarrollo es el hecho de que el hombre tuvo conciencia de la utilidad de los conocimientos astronómicos, dedicándose formalmente a la recopilación de datos y a la creación de "sistemas" útiles en la comprensión de los movimientos celestes.

Este idea dominó por muchos siglos el pensamiento universal. Desde los antiguos filósofos griegos, varios siglos antes de esta era; pasando por los árabes, en la edad media; hasta el renacimiento, con la creación de grupos académicos organizados, que

perfeccionar este afán.

La culminación de esta primera época la marcan los trabajos de Brahe, Kepler y Galilei, con la creación de catálogos bastante completos de estrellas, leyes que rigen los movimientos de los planetas, y la invención del telescopio.

Esto sirve de base para el nacimiento, en el siglo XVII de una segunda época, con el descubrimiento del cálculo, y su aplicación a los más variadas disciplinas científicas que se manejaban en ese tiempo. Propiamente, la aparición de los "Principia", desencadena un movimiento importante, cuyos actores principales son Newton, Los Bernoulli, Leibniz, Euler, Laplace, Lagrange, y muchos otros.

La mecánica racional de Newton y Galilei es la base de muchas teorías que nacen en ese momento, y cuya influencia hasta nuestros días es muy fuerte.

Una tercera época se inicia a principios del siglo XIX, con la aparición de resultados que fundamen-

tan la teoría de las funciones complejas y la teoría de las funciones reales.

En este sentido sobresalen Cauchy, Riemann, Fourier, Weierstrass, Poincaré, Dirichlet, Lebesgue, Hilbert, y Courant, por mencionar algunos.

La matemática se reorganiza, muchas ramas se independizan, se reúnen ramas idénticas en una sola, surgen nuevas.

Este movimiento está en pleno desarrollo actualmente, y es la base de la riqueza del pensamiento matemático. De manera paralela, los temas clásicos de la Física-Matemática, avanzan en la segunda de las épocas descritas, y desde ese momento, compensan el desarrollo de la matemática en general, proporcionando, en muchas ocasiones, problemas, cuyas tentativas de resolución enriquecen a la matemática en su conjunto (Álgebra, Análisis, Geometría, topología, Ecuaciones Diferenciales, por ejemplo), y absorbiendo como aplicaciones, importantes resultados teóricos.

ϕ1. Los Inicios de La Ciencia

La matemática aplicada tiene orígenes tan remotos como los del lenguaje y el arte, y su vigor actual es impresionante. Siendo imposible referirse a todos los personajes que influyeron en su desarrollo histórico, indicaremos brevemente las directrices generales que contribuyeron a darle su fisonomía actual.

Al visualizar su situación geográfica, el hombre pudo percatarse de que los astros son bastante más longevos que él y que están muy distantes. Descubrió además, después de pacientes observaciones que algunas de estos astros brillan de manera constante, conservan sus posiciones relativas respecto de otros similares y que se desplazan de manera conjunta de Este a Oeste. Llamó a éstos fijos, y destacó grupos relevantes de ellos, los Constelaciones. Existen astros que

no satisfacen lo anterior, entre estos está la Luna, los llamé Errantes.

Sobre el fondo formado por las constelaciones, los errantes no se desvían de una franja relativamente estrecha, El Cinturón Zodiacal.

Otra observación importante es que las salidas y puestas del sol no siempre se producen contra el mismo fondo de estrellas, sino que se deslizan a lo largo de una banda de posiciones. Con posterioridad se llamó Eclíptica a este camino, porque sólo se aprecian eclipses cuando este camino es cruzado por la luna.

Por otra parte, la orientación sobre la tierra siempre se ha encontrado en los astros, así también, el conocimiento de las estaciones anuales, la noción del tiempo y muchas otras cosas de gran importancia para la supervivencia humana.

Durante por lo menos los dos primeros milenios de su existencia, los hombres no osan esperar de la

Astronomía sino algunas nociones prácticas.

La respuesta humana a problemas como el planteado por el orden celeste es uno de los principales motivos para atribuir realidad a la idea de progreso; aunque también es una gran sucesión de errores y arbitrariedades.

Al iniciarse un sistema de observación metódica, (de alguna forma) surge un intento por recopilar datos ordenados, y varias civilizaciones antiguas obtuvieron de esto algo más, aunque por infortuna se abandonó este estudio en casi todos los casos.

En Egipto, aproximadamente en el siglo XXVIII AC se contaba con un calendario de 365 días, señalándose del retraso que este sufría.

Se tiene la certeza de que en China, aproximadamente en el siglo XXV AC se tenía un calendario de 365.25 días, y que se había situado a la Eclíptica y al Solsticio de Invierno.

Aunque queda mucho por descifrar de lo obtenido por los Mayas, situados tal vez antes del siglo X AC, se sabe que su calendario tenía una exactitud comparable sólo al contemporáneo, además de poseer eficientes tablas de eclipses de sol y de luna, y conocer datos sobre la órbita de Venus entre otras cosas.

En Mesopotamia, existen anotaciones del siglo VIII AC, en las que se calculan novilunios y se predicen eclipses.

Tal vez quienes más influyeron para dar a la Matemática su forma conocida fueron los griegos.

La primera figura prominente que se observa aquí es la de Pitágoras de Samos, quien se sitúa hacia 580 AC.

A este personaje mítico y a su gran grupo de discípulos se debe un importante número de cosas, entre las que destacan:

- Los primeros intentos de modelación matemática, es decir, la traslación de fenómenos físicos al ámbito de los números (Theoreia), conllevando esto la experimentación.
- Una teoría musical (la proporción de los acordes).
- Un sistema de pesas y medidas.
- La comprensión de la existencia de los números irracionales y el teorema que lleva su nombre.
- La idea de la redondez de la tierra.
- La transformación del fervor religioso en fervor intelectual.

Lo último descrito es quizá la aportación más importante de los pitagóricos. El Pitagorismo, al evitar el trato con los números irracionales, tuvo un freno propio, mismo que le impidió proseguir lo que brillantemente había iniciado.

Aristarco, un pitagórico, nacido también en Samos, pero en 310 AC, fue el primero en sustentar que la tierra tiene dos movimientos, el de traslación y el de

rotación, dió las primeras mediciones razonables mediante métodos geométricos de las distancias entre la luna, la tierra y el sol, y pretendió explicar las trayectorias de los planetas mediante una teoría heliocéntrica.

¿Que impidió la recepción del heliocentrismo de Aristarco?

Vistos desde la tierra, los planetas describen unas arabescos muy raros. Lo que Aristarco proponía era un cambio de puntos de referencia para esta observación: Vistos desde el sol, los planetas describirían orbitas circulares (más bien elípticas).

Lo que faltó en ese momento fue un sucesor de Aristarco, para hacer aceptable este argumento. Su sistema fue cayendo en el silencio, hasta perdarse, recibiendo su golpe de gracia con la vigencia de Aristóteles y la Astronomía de Ptolomeo.

Con todo es el legado de Pitágoras lo que los griegos desarrollaron en buena medida, y cuya expresión

más acabada es la filosofía de Platón. Sus Diálogos más Pitagóricos son Timeo y Fedón.

Un problema que Platón planteaba continuamente es el siguiente: ¿Que movimiento ordenado y uniforme ha de suponerse para dar cuenta de los movimientos aparentes de los planetas?

Hacia falta un aparato matemático de rara sutileza y complejidad para captar las irregularidades de aquellos arabescos y capaz de reducir los cambios observados a esquemas de movimiento circular uniforme.

Un libro como Almagesto, publicado por Ptolomeo cuatro siglos después, que tratando a los planetas como meros puntos matemáticos, tratase de predecir sus localizaciones a pesar de todo. Cabe hacer notar que en este libro se utilizan unas primitivas tablas trigonométricas.

Ptolomeo (siglo II DC.) explica los movimientos celestes mediante procedimientos geométricos a par-

tiv de observaciones oculares, hace a la ciencia servir de la fé y trata de reconciliar varios puntos de vista, proponiendo un sistema geocéntrico. Aún con sus grandes errores, hay aquí un gran paso hacia el estudio de los cielos.

El Pitagorismo y el Platonismo reciben con Aristóteles una dura crítica en la propia Grecia de manos de un sistema orientado "científicamente", aunque en otra dirección.

Aristóteles creyó que las ciencias naturales debían clasificar en vez de medir, que las matemáticas tenían un tenor diferente que la física, y que la naturaleza representa una negación sistemática ante toda interpretación de causas finales, esto es, la experimentación es antinatural.

La gran amenaza de la ciencia va a ser un Aristotelismo Medieval contagiado de una ideología geocéntrica, burocráticamente religiosa.

Después de la muerte de Aristóteles, se dan grandes

pasos hacia la concepción del universo gracias a Arquímedes, Aristarco, Euclides y Apolonio. El mundo griego llega a su punto más alto en lo que a ciencia respecta (siglo II AC).

Arquímedes (287-212 AC), el gran científico de la antigüedad presentía el cálculo diferencial, al calcular áreas de segmentos parabólicos, aplicar también el método de exhaustión para calcular áreas y volúmenes de esferoides, conos, cilindros, paraboloides y hojas de revolución, conocer la propiedad Arquimediense de los números, construir una tangente a la espiral que lleva su nombre, y realizar la primera suma conocida para una serie.

Arquímedes representa por sí solo toda una época en la ciencia griega antigua. Es un gran precursor de la actual modelación en Física-Matemática, y de la aplicación de la matemática en varios ámbitos, entre ellos, el del armamentismo.

Entre sus aportaciones destaca el hecho de haber senta-

do las bases para la fundación de la Estática y la Hidrostática, al establecer las leyes de la palanca y la flotación de los cuerpos.

Las aportaciones más importantes de Euclides y Apolonio fueron Los Elementos y un tratado sobre secciones cónicas, respectivamente. El último de estos trabajos fue reproducido casi dos mil años después por Sir E. Halley, de quien nos ocuparemos después.

En Europa, dos siglos de cristianismo triunfante bastan para que la ciencia retroceda más de un milenio. Un contenido absoluto de su fe, es que ciertas personas (los pontifices) conocen directamente la verdad, y todos los demás están obligados a acatar este hecho.

Se suceden razonamientos sumamente extravagantes, la tierra ya no es esférica, sino plana y rodeada por agua, por ejemplo, y se trata de probar que tanto el cielo como la tierra tienen la

forma descrita por las sagradas escrituras.

Se describe como una tentación al saber por el saber, y se tiende a no descubrir los secretos de la naturaleza. Se considera a los experimentos como cosas inaceptables, como preguntas hechas a la naturaleza.

En esta época sucede el incendio de la biblioteca de Alejandría, lugar en el que se acumulaba gran parte del saber de la época.

Desde 635 DC. y en menos de un siglo, el Islam se extendió de manera fulminante. Los musulmanes se apoderaron de Siria, Egipto y de otros países de vieja cultura helénica.

En el siglo VIII DC., siguiendo a los griegos, los Arabes tienen observatorios provistos de gran instrumental en Damasco y Bagdad. Registran sus observaciones bajo juramento, lo que da idea de la importancia que le daban a este hecho.

Al-Batani es el más grande astrónomo medie-

val. Su *Opus Astronomicum* tiene las siguientes características.

- Determina la oblicuidad de la Eclíptica con un error inferior a medio minuto del ángulo hoy calculado.
- Fija la duración del año que luego serviría para llegar a la reforma Juliana.
- Rectifica las mediciones de la Astronomía griega, especialmente en lo que se refiere a la órbita aparente del sol.
- Hace uso de unas tablas trigonométricas más refinadas.

En el califato independiente árabe de Córdoba, durante los siglos IX y XI se desarrolló el centro cultural máximo de Europa. La biblioteca del palacio de Mesman llegó a poseer 600.000 volúmenes, y con ellos casi toda la filosofía y ciencia de la antigüedad.

Junto a la astronomía y matemática "oriental"

que florece sobre todo en Persia y Mesopotamia, hay una corriente "occidental" que produce hacia el año 1000 dc. Tablas Astronómicas Toldeanas y un siglo después, Tablas Alfonsinas que corrigieron y aumentan las anteriores.

Una feliz combinación de musulmanes, hebreos y cristianos hace posibles Los Libros del Saber, obra astronómica en la que se dibuja por primera vez la órbita de Mercurio en forma elíptica, pero con la tierra en el centro.

En el siglo XII se traducen al latín los clásicos griegos, y muchos otros libros de Matemáticas y Astronomía del Sínscito.

El espíritu liberal de Alfonso X de Castilla y el Emperador Federico II hace posible que a principios del siglo XIII haya una importante circulación de libros de muchos géneros; pero, sobre todo de Matemáticas y Astronomía.

La tendencia Platónica y la Aristotélica chocan

a cada paso.

Es en el siglo XIII cuando El Concilio de París prohíbe la lectura de obras científicas, y al no lograr efectividad con esto, substituye las ya existentes por otras "convenientemente" revisadas para su circulación. Con todo no puede impedir el Renacimiento.

Los siglos XIII y XIV se caracterizan por la preparación de la actitud científica moderna, las Universidades se convierten en una fuerza no sólo intelectual, sino política de primer orden.

Los interesados en el conocimiento de la naturaleza consideran imprescindible saber matemáticas y disponer de técnicas instrumentales de experimentación. Lo último se consideraba un poco antes como un desafío a la naturaleza.

La tendencia Pitagórica, refugiada en sectas durante más de diez siglos ante el empuje del papado, renace a través del Platonismo y del Neo-

platonismo ahora florecientes, ofreciendo en esencia una metodología afín a las nuevas ideas de exactitud y verificación en el conocimiento.

Nace en Oxford en 1235 el primer grupo académico, impulsado por Robert Grosseteste, Canciller de la Universidad y obispo de Lincoln. Este personaje compuso tratados sobre acústica, astronomía y Meteorología.

El segundo grupo académico se forma en París en 1346 a la sombra del anatémizado Guillermo de Occam, quien ha rechazado la autoridad del papa.

En Italia, la personalidad es Paolo Toscanelli, Matemático, Astrónomo y Geógrafo. Instaló un Gnomon en la cúpula del templo de Santa María en Florencia, y obtuvo muy valiosos datos, cabe recordar que el Gnomon es una especie de escuadra útil para medir el Azimut solar. Este instrumento, proveniente tal vez de Egipto, fue

introducido a Grecia por Anaximandro en el siglo VIII AC.

El fenómeno cultural más importante de entonces es un centro universitario en Padua, que, dependiente desde 1405 de la serenísima república de Venecia, ha heredado el espíritu de Oxford y París.

En este lugar se imparte la enseñanza más regular y completa sobre Matemáticas y Astronomía de la época. Es ahí donde se cide hacerse astrónomo Copérnico, el primero de los gigantes de la ciencia moderna.

Miklas Koppernigk () nace en Thorn, ciudad situada entre la Prusia Oriental y Polonia.

Durante su juventud se familiariza con los tratados de astronomía griega, de manera particular con los de Aristarco. Hizo gran amistad con los principales astrónomos de su época, entre ellos se encontraba Domenico Maria Novara, astrónomo de gran prestigio,

Pitagórico convencido y crítico de Ptolomeo. Nueva influencia en sus ideas.

En la época de Copérnico era difícil aceptar que la tierra fuera "inferior" al sol; pero la teoría de Copérnico expresada en su gran obra *De Revolutionibus Orbium Coelestium* no encontró gran oposición, el motivo es el apoyo de un pitagorismo renovado que promueve como mejor teoría aquella que imponga y demuestre la estructura matemática como fundamento real de los cielos.

Antes de la publicación de su obra, logra convencer de sus ideas al Profesor Georg Joaquin, llamado también Reticus, de la Universidad Protestante.

Aunque es una época de grandes luchas religiosas no tienen grandes problemas en entenderse. Es Reticus quien revisa el libro de Copérnico y se encarga de la publicación, cuando el autor está a punto de morir.

Veamos algunos aspectos de su obra:

En el libro III fijando cuidadosamente el movimiento aparente del sol transforma la teoría Ptolomeica en Heliocéntrica.

En el libro IV, dedicado a la luna, excluye a ésta del catálogo de los planetas. Observando durante eclipses consigue calcular las distancias entre el sol, la tierra y la luna, éstas no son muy acertadas, sin embargo, las distancias relativas de los planetas al sol tienen una exactitud sorprendente.

En el libro VI, al estudiar el movimiento de los astros, Copérnico piensa que éstos giran en tanto son redondos sin necesidad de un motor interno o externo, y utiliza los orbes para justificar la estabilidad planetaria.

Tycho Brahe (), observando que sus tablas Alfonsinas ya corregidas se equivocaban por un mes enteros, y que las de Copérnico por varios días, empleó intencionalidad para remediar la situación.

Brahe vive en una época de intensa actividad as.

trónomica. El Rey Danés Federico II le asigna una isla y recursos suficientes para construir un observatorio y contratar ayudantes. Allí reduce el margen de error al combinar todas las formas posibles de observación, y repetirlos durante mucho tiempo. Su sistema, al igual que el de Ptolomeo y el de Copérnico, le sirve para prever y registrar todos los movimientos celestes.

logra comprobar que las estrellas nacen y mueren, y demuestra que los orbes son un invento sin fundamento físico. Sus experiencias las resume en su obra *Astronomía Instauratae Progymnasmata*. Hasta este momento nadie ha hecho por sí mismo tanta observación astronómica como él.

J. Kepler es el encargado de las anotaciones durante la última parte de su vida. Nace en Weil, Snabia en 1571.

Para poder deducir las órbitas celestes, Kepler busca una relación matemática entre la distancia

de un planeta al sol y el tiempo empleado en su revolución y descubre que el movimiento planetario se va haciendo más lento a medida que los planetas se alejan del sol. Kepler nota la ley de la Gravitación Universal al suponer que esa fuerza solar se obtiene siguiendo el mismo proceso de la luz, que decrece en proporción al cuadrado de la distancia, para enseguida rechazar su propia hipótesis.

Estudia Mate por encargo de Borch y publica Astronomía Nova, libro en el que resume estos estudios. De manera muy ingeniosa, estudia los movimientos de la tierra desde Mate, logrando con este cambio de referencia muy importantes conclusiones.

Kepler efectúa una densidad exacta de hallazgos: Aristóteles se ha equivocado al atribuir a ciertos cuerpos peso y a otros ligereza, porque el peso y la distancia son propiedades relativas.

La ley de las Áreas substituye al concepto inexacto de la uniformidad por una ecuación rigurosa.

Las observaciones, desde el principio de los tiempos habían señalado una excentricidad en las órbitas de los planetas, Kepler fue el primero en aceptar este hecho y destacó en el contexto de sus famosas leyes.

Publica Las Tablas Rodolfinas que contienen el catálogo más exacto de la época pretelescopica. Esta publicación contiene 777 astros catalogados por Brahe y 342 por él. Utiliza los logaritmos por primera vez.

Kepler, el gran sucesor de Pitágoras, es el inventor del género literario de Ciencia-ficción, al escribir Somnium, libro en el que se narra por primera vez un viaje al espacio.

La invención de los Logaritmos, contemporánea a Kepler, habría de reducir su labor sobrehumana a proporciones más manejables.

Neper de Merchistown (Escocia, 1550-1617), tardó aproximadamente dos décadas en razonar las propiedades

logarítmicas y exponenciales, y anticipó algo de su descubrimiento a Kepler.

Después de inventado el cálculo, surgió de manera natural la investigación de la función logarítmica, y de la función exponencial a partir de la ecuación diferencial

$$y'(x) = y(x).$$

Actualmente, estas funciones tienen gran importancia en la Matemática aplicada.

Esta época, en la que están los orígenes de la matemática aplicada, termina con Galilei.

Hay un predecesor suyo, Leonardo da Vinci (1452-1519); pero sus trabajos no ejercieron influencia sobre la marcha de la ciencia, porque fueron publicados mucho tiempo después.

Tortaglia es geometra experto en Balística publicada en 1546 *Quesiti e Inventioni Diverse*. Tortaglia es el profesor de Benedetti, quien será, a su vez, profesor de Galilei.

G. Benedetti (1530-1590) es quien más influye en la

formación de Galilei. Benedetti proporciona la idea de la fuerza centrípeta y la ley de la caída de los cuerpos, cosas que Galilei explotará al máximo. Galileo Galilei nace en Pisa, Italia en 1564 y muere en 1642, año en el que nace Newton. Inventa el telescopio, con el que descubre las manchas solares, las lunas de Júpiter, las fases de Venus y muchas cosas más.

Aunque Kepler y Galilei son colegas en la Academia de los Lincei (de linx, linca, por su habilidad para escutar el cielo), Galilei no es seguidor de Kepler, sino que defiende la teoría heliocéntrica; aunque obtiene todo el apoyo de éste en la prédica de sus propias ideas.

Con su dinámica racional, Galilei reduce el movimiento a ecuaciones matemáticas, con experimentación constante amplía los hallazgos de su maestro Benedetti al afirmar que no sólo los cuerpos homogéneos, sino que todos caen al vacío con la misma aceleración.

Sus principales aportaciones son el principio de la inercia, la ley de la caída, la forma matemática dada a conceptos tales como Distancia, Velocidad, y Aceleración.

Sus obras más conocidas son El Diálogo y La Scienza Nuova. En 1638 publica unos estudios sobre fracturas de vigas cargadas.

Señalemos también que a la época tratada en esta sección pertenecen los trabajos de Cardano (1501-1576), quien publica su Ars Magna en 1545, constituyéndose este escrito en la suma de todos los conocimientos de álgebra de la época, y los trabajos de Stevius (1548-1620), quien enunció una teoría completa del equilibrio estático.

§ 2. El Surgimiento de algunas Teorías Im- portantes.

El desarrollo de importantes teorías de Funciones, útiles en la Física-Matemática actual es interesante; pues presenta la evolución de conceptos que surgen de observaciones físicas, y que conllevan la ampliación de formas matemáticas aplicables a otras áreas físicas, y estimulan el desarrollo de nuevas áreas de la Matemática.

I) La teoría del Potencial.

Tycho Brahe efectuó muchas observaciones astronómicas, mismas que capitalizó magistralmente, al lado de observaciones suyas, d. Kepler al enunciar sus tres famosas leyes, conocidas, desde luego como Leyes de Kepler:

1. "Todo planeta del sistema solar viaja en una trayectoria elíptica. En uno de los focos de esta curva está el sol."
2. "El radio vector que va desde el sol hasta un planeta describe áreas iguales en intervalos iguales de tiempo."
3. "Los cuadrados de los tiempos requeridos en dar una vuelta completa alrededor del sol, para dos planetas cualesquiera, son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas".

Newton halló una expresión que engloba a lo anterior: La Ley de la Gravitación Universal.

"Entre dos cuerpos cualesquiera de masas m_1 y m_2 , actúa una fuerza de atracción directamente proporcional al producto de sus masas ($m_1 m_2$) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia existente entre ellos (r)."

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

La constante de proporcionalidad γ depende únicamente de las unidades que se utilicen. Cuidadosos experimentos han evaluado a esta constante en $\gamma = 6.664 \times 10^{-8}$, considerando como unidades de masa, de longitud, de tiempo y de fuerza respectivamente a 1g., 1cm., 1seg., 1 dina.

Adequando la unidad de fuerza, es posible tener $\gamma = 1$ (esto logra facilitar varios cálculos). La unidad de fuerza que logra esto se llama Atracción Unitaria.

La grange observó en 1773 que los componentes de la atracción de un punto dado en el espacio debido a una distribución de partículas-masa pueden contenerse como derivadas espacio de cierta función de la posición de las partículas, de esta manera inventó el potencial para el campo Newtoniano Gravitacional debido a una distribu-

ción discreta de las partículas-masa. La gran obra de Lagrange es *Mechanique Analytique*, obra publicada en 1788 y en la que se intenta describir, mas que explicar los movimientos celestes. La presencia de un cuerpo atráctor de masa M en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en el espacio, implica la presencia de cierta substancia atractiva, cuya intensidad en el punto $P(x, y, z)$ se da mediante la fórmula

$$u = \gamma \frac{M}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

Las componentes F_x, F_y, F_z de la fuerza de atracción que actúa sobre un cuerpo de masa unitaria ubicado en $P(x, y, z)$ son

$$F_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

La función u se denomina Potencial del Campo

$\{F_x, F_y, F_z\}$.

Si existen varios atractores de masa M_i que se en-

encuentran en los puntos (x_i, y_i, z_i) , la fuerza anterior tiene las mismas componentes, considerando como potencial

$$u = \gamma \sum_i \frac{M_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}$$

Tomemos un solo sumando de esta fórmula, y $\gamma = 1$. Esto último se puede hacer debido a un razonamiento anterior.

$$u_i = \frac{M_i}{r}$$

donde $r = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$,

Observando que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-x_i}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-y_i}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-z_i}{r},$$

se tiene $\frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{-M_i(x-x_i)}{r^3}$, $\frac{\partial u_i}{\partial y} = \frac{-M_i(y-y_i)}{r^3}$, $\frac{\partial u_i}{\partial z} = \frac{-M_i(z-z_i)}{r^3}$,

Al derivar por segunda vez, tenemos:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = M_i \left[\frac{-1}{r^3} + \frac{3(x-x_i)}{r^5} \right],$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} = M_i \left[\frac{-1}{r^3} + \frac{3(y-y_i)}{r^5} \right],$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = M_i \left[\frac{-1}{r^3} + \frac{3(z-zi)}{r^5} \right]$$

Sumando estas tres últimas derivadas parciales, nos queda

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = 0$$

Como $u = \sum u_i$, obtenemos la muy famosa Ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

La teoría del Potencial tiene varios aspectos. Normalmente se introduce como un cuerpo de resultados provenientes de la Ley de la Gravitación Universal de Newton.

Sin embargo, si esta teoría estuviera restringida a sus aplicaciones en gravitación, no ocuparía el lugar tan importante que ostenta, no sólo en Física-Matemática, sino también en Matemática pura.

En el mundo físico es muy conocido el resultado

similar a la Ley de la Gravitación, sobre cargas eléctricas, obtenida por Coulomb, conocido como Ley de Coulomb, y a partir del cual surgen importantes resultados de la Electrostatica (Potencial Electrostatico); y el resultado por N. Bohr (1885-1962) a principios de este siglo sobre Teoría atómica.

La Teoría del Potencial puede considerarse como los temas de la Ecuación de Laplace. Es Laplace, quien, en su monumental obra Mecánica Celeste, en donde se reúne todo el conocimiento de la época sobre este tema, propone abandonar la fórmula explícita de interacción a distancia y sustituirla por la ecuación que satisface U . La introducción de este campo substituye el concepto de interacción a distancia entre cuerpos reales por el de "interacción a corta distancia" entre porciones vecinas del espacio, que se asume lleno de cierto campo de magnitud U , ideado artificialmente.

De Laplace surge la idea de introducir ecuaciones para el campo ideal u . Estas ecuaciones rigen en todas partes, excepto, claro, en el punto $P_i (x_i, y_i, z_i)$, en donde las masas gravitatorias de los cuerpos están concentradas.

Esta ecuación caracteriza el flujo constante del calor en un medio homogéneo, el flujo constante de un fluido ideal, las corrientes eléctricas estacionarias, y aparece de manera fundamental en el estudio del equilibrio de sólidos elásticos.

Esta misma ecuación (sólo en dos dimensiones) se satisface por la parte real y la parte imaginaria de funciones analíticas de variable compleja, y Riemann fundamentó su teoría de estas funciones en la teoría del Potencial.

Otras aplicaciones importantes de esta ecuación se dan en Geometría Diferencial, Mapeos Conformes y otras áreas de la Matemática.

Los métodos utilizados para resolver problemas de

esta teoría han ejercido una profunda influencia en la teoría de las Ecuaciones Diferenciales, tanto ordinarias, como parciales, y otras áreas del Análisis.

Estudiaremos ahora el campo gravitatorio generado por una masa distribuida en cierto cuerpo del espacio.

Sea $\rho(a, b, c)$ la densidad de esta distribución de masas en el punto $x=a, y=b, z=c$.

Supongamos que $\rho(a, b, c) = 0$ para todos los puntos que se encuentran fuera de alguna esfera de radio R , isto es, para aquellos puntos en que se verifica

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq R^2$$

Al dividir esta esfera en prismas elementales de aristas $\Delta a, \Delta b, \Delta c$; se obtiene en cada prisma una concentración de masa equivalente a

$$\rho(a, b, c) \Delta a \Delta b \Delta c$$

En un punto $P(x, y, z)$, el potencial gravitatorio que provoca esta masa vale

$$\frac{\rho(a, b, c) \Delta a \Delta b \Delta c}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

Considerando todos los prismas elementales, el potencial u equivale a .

$$\sum_{a, b, c} \frac{\rho(a, b, c) \Delta a \Delta b \Delta c}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

Haciendo tender a cero cada prisma elemental, se tiene en el límite, el Potencial de Volumen (o-Newtoniano).

$$u(x, y, z) = \iiint_{a^2 + b^2 + c^2 \leq R} \frac{\rho(a, b, c) da db dc}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

Si $\rho(a, b, c)$ tiene primeras derivadas parciales continuas, es posible demostrar que u satisface la Ecuación de Poisson (1827)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4\pi\rho$$

Cuando $\rho=0$, es decir, fuera de las masas gravitatorias, esta ecuación coincide con la de Laplace.

En Electrostatica, como se observó antes, La Ley de Coulomb equivale a la de Newton, y se tiene

un resultado análogo, conocido como Teorema de Gauss.

$$\epsilon \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = -4\pi\rho$$

La constante ϵ es una constante dieléctrica, equivalente a la constante gravitacional γ .

Definamos ahora al operador Laplaciano de u

$$\Delta u = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

También es usual denotar este operador por $\nabla^2 u$.

Las ecuaciones de Laplace, de Poisson y el Teorema de Gauss, se escriben respectivamente

$$\Delta u = 0, \quad \Delta u = -4\pi\rho, \quad \Delta u = -4\pi\rho\epsilon^{-1}$$

Este operador es posiblemente el más importante en Física-Matemática.

El Laplaciano de una función compare a la imagen de un punto dado bajo la función, con las imágenes bajo la función de todos los puntos de

una vecindad.

Pensemos por el momento en u dependiente de (x, y) .

Si $\Delta u > 0$ en (x_0, y_0) , entonces $u(x_0, y_0)$ es menor que el promedio de los valores $u(x, y)$, con (x, y) en una pequeña vecindad de (x_0, y_0) , digamos en una pequeña bola centrada en (x_0, y_0) .

Si $\Delta u = 0$ en (x_0, y_0) , entonces $u(x_0, y_0)$ es igual al promedio de los valores que toma la función en una vecindad.

Si $\Delta u < 0$ en (x_0, y_0) , entonces $u(x_0, y_0)$ es mayor que este promedio.

Así, la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$, nos dice que la función solución u valorada en (x_0, y_0) es siempre igual al promedio de $u(x, y)$ en una vecindad de (x_0, y_0) .

El problema de Dirichlet es el primero en la Teoría del Potencial en el que se plantea la cuestión de la existencia de la solución de la Ecuación de Laplace.

Por medio de argumentos sencillos Gauss en 1840 y Thompson (Lord Kelvin, Escocés, 1824-1907) en 1847 creían haber establecido la existencia de una solución V continua de la Ecuación de Laplace, habiendo asignado valores a toda superficie cerrada dada y reduciendo al mínimo la integral de Dirichlet

$$\iint \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

extendiendo la integración a toda la superficie encerrada por la línea.

Parece intuitivamente evidente, por la situación física que ésta es la abstracción matemática de que V existe.

Riemann en 1851 y Dirichlet en 1856 sugirieron esto también.

Weierstrass demostró que el mínimo de V requerido no pertenece al dominio de las funciones continuas

Así que se encontró una incompatibilidad disparada. Siendo falsas estas Principios de Dirichlet, como se le llamó, lo substituyó el Problema de Dirichlet:

Hallar una función armónica en una Región Ω y que satisfaga una función f dada en la frontera.

Se denomina Armónica a toda función que satisface la Ecuación de Laplace. Un importante sector de la Teoría del Potencial resultó al averiguar las condiciones bajo las cuales es soluble el Problema de Dirichlet.

Desde Riemann (1826-1866), hasta Poincaré (1854-1912), todos los principales analistas han hecho importantes aportaciones a esta teoría. En 1901, Hilbert resolvió el Problema de Dirichlet bajo restricciones convenientes y adecuadas para casi toda aplicación física concebible.

II) El Problema de la Cuerda Vibrante

El problema de la cuerda vibrante fue el primero que hizo dudar a los matemáticos el haber comprendido bien el concepto de función.

La idea de función arbitraria fue uno de los primeros pasos hacia el Análisis Abstracto, lo mismo que la necesidad de comprender los conceptos de límite, función, convergencia, constantes, etc.

Hooke, el rival de Newton, al estudiar la elasticidad de los muelles, y Galileo habían sugerido hipótesis físicas susceptibles de formulación matemática. Los experimentos de Hooke tuvieron un origen económico, pues se emprendieron en relación a los cronómetros marinos.

En 1713, Taylor, famoso por su trabajo sobre Series, estudió el problema e intentó una solución mediante métodos geométricos.

Juan Bernoulli en 1723 tradujo el problema a

una ecuación en diferencias.

Daniel Bernoulli reemplazó ésta por una ecuación en derivadas parciales y destacó el principio de superposición, muy útil en la resolución de ecuaciones diferenciales. Esta ecuación en su forma más sencilla tiene la forma siguiente.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

D'Alembert en 1747 obtuvo una solución de la forma

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at),$$

considerando a $f(x)$ y $g(x)$ como condiciones iniciales del problema, es decir posición inicial y velocidad inicial de la cuerda respectivamente.

Euler en 1748 obtuvo la solución siguiente

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left\{ f(x+at) + f(x-at) + \frac{1}{a} \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) d\xi \right\},$$

conocida ahora como Fórmula de D'Alembert.

Euler observó que por las condiciones físicas del problema, las funciones f y g podían consi.

derarse como dos curvas arbitrarias.

D'Alembert se apresuró en 1750 a declarar en contra de esta ampliación de sus ideas, puesto que él sobreentendía que $u(x,t)$ tenía que ser necesariamente una función analítica de (x,t) .

La solución hallada partiendo de consideraciones totalmente diferentes en 1753 se expresa en forma de la serie presentada a continuación, es decir, como combinaciones lineales de ondas estacionarias (superposición). Esta fórmula de D. Bernoulli es

$$u(x,t) = \sum_k A_k \cdot \sin \frac{k\pi}{L} x \cos \frac{k\pi}{L} a (t - t_k)$$

Esto provocó una gran controversia. Bernoulli argumentaba que su solución debía contener a la de D'Alembert y a la de Euler.

Euler objetaba que si así fuera, todas las funciones podían expresarse como una serie trigonométrica; pero esto era paradójico; pues como pareciera, no todas las funciones son pares o impares.

En 1759, en su gran memoria sobre propagación del sonido, Lagrange al estudiar un modelo físico aproximado confirmó los resultados de Euler y obtuvo resultados muy próximos a los de Bernoulli. Esto inclinó a D'Alembert a estar en desacuerdo con Lagrange:

Era aquella una época en la que una fórmula en un instante de intuición o producida a partir de un razonamiento débil era muy buena, a condición de que diera buenos resultados.

III) La Teoría del Calor.

En 1807, Fourier enunció su Teorema de que una función totalmente arbitraria puede ser representada mediante una serie trigonométrica.

J. B. Fourier (Francés, 1758-1830) publicó La Théorie Analytique de la Chaleur en 1822, en este trabajo, llamado por Lord Kelvin "Un poema Matemático", se encuentra la Ley de Fourier del ca-

lor y se expone la resolución de la ecuación del Calor, cuya forma más sencilla es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

La sección sexta dedicada a la solución de un problema general que consiste en desarrollar una función cualquiera en una serie infinita de senos y cosenos de arcos múltiples es la que nos interesa con respecto al problema de la cuerda vibrante.

Las objeciones partieron ahora de Lagrange. El jurado compuesto por Legendre, Laplace y Lagrange indicó que la memoria de Fourier sobre conducción del calor presentada a la Academia de París estaba falta de pruebas.

El Método de Fourier, actualmente muy utilizado, surgió en el siglo XVIII en la ecuación que describe las oscilaciones de una cuerda. Euler había encontrado en 1754 los denominados Coe-

ficientes de Fourier a propósito de un problema de Mecánica Celeste.

El Teorema de Fourier fué demostrado por Dirichlet (Aleman, 1805, 1857) en 1829, aunque hubo que imponer condiciones muy rigurosas. Esta fué la primera demostración del teorema. Dirichlet además demostró en 1837 el teorema fundamental de que al alterar el orden de los términos de una serie absolutamente convergente, la serie no varía.

En 1853, Riemann (Aleman, 1826, 1866), al estudiar las condiciones bajo las cuales una función puede ser representada mediante su serie de Fourier, llegó en particular a su conocida definición de Integral. El genio de Riemann previó en 1854 la geometrización de la Física-Matemática. Las investigaciones de Riemann sobre variable Compleja partieron de las Series de Fourier y de la Teoría del Potencial.

Las series de Fourier engendradas por una función $f(x)$ pueden no ser convergentes en todo el intervalo para el que se obtuvieron e incluso en ningún punto de este intervalo, y si su serie es convergente, su suma no tiene por que ser $f(x)$.

Du Bois Reymond (Alemán, 1831, 1889), demostró en 1873 con un ejemplo que una función continua no ha de ser necesariamente representable por su serie de Fourier.

Weierstrass, en 1875 demostró que no son necesarias conjuntamente continuidad y diferenciabilidad para el desarrollo de una función en series de Fourier. Todo esto y muchas otras cosas no menos inesperadas estimularon a Cantor a crear su teoría de Conjuntos de Puntos.

IV) El Método de Fourier

El método de Fourier o Técnica de Separación de Variables, muy útil en la resolución de ecuaciones

de la Física-Matemática tiene su fundamento en las Series de Fourier y se relaciona y complementa además con lo siguiente.

Sturm (suizo 1803-1855), al analizar en 1836 la transmisión de calor de una varilla no homogénea, fue a parar a una ecuación diferencial de segundo orden cuyas soluciones definían una especie de funciones caracterizadas en un cierto intervalo por sus ceros.

Un ejemplo muy sencillo de esa ecuación diferencial es la que tiene como soluciones linealmente independientes a $\text{sen } nx$, y $\text{cos } nx$.

En muchos problemas de la Física-Matemática se necesita desarrollar una función arbitraria como una serie de funciones construidas a partir de soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias. Las funciones que introdujo Sturm se llaman oscilantes.

Siguiendo a Sturm, Liouville en 1837 fue a pa-

rar a una ecuación integral lineal que resolvió por el método de sustituciones sucesivas. El problema de Liouville era el de encontrar las soluciones, en el caso de que existan de una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden que adopte valores prefijados de la variable independiente. De esta forma se interesó por las funciones oscilantes de Sturm, y se acostumbra designar a la teoría resultante con el nombre de ambos.

Neumann aplicó en 1877 el método de Liouville al problema de Dirichlet para resolver su ecuación integral que da la incógnita como una serie de potencias.

Laplace en 1782 encontró las ecuaciones integrales al resolver ecuaciones diferenciales, y Fourier en 1822 en el resultado que ahora se conoce como Fórmula Integral de Fourier encontró lo que es la primera solución de una ecuación integral.

La ventaja de formular estos problemas físicos valiéndose de ecuaciones integrales en lugar de ecuaciones diferenciales estriba en que, mientras que el aumento del número de variables aumenta las dificultades matemáticas de la formulación diferencial, no ocurre lo mismo con las ecuaciones integrales.

Una situación común en varias funciones especiales, cuyo desarrollo no parece muy redituable es la siguiente.

Investigando las oscilaciones de cadenas pesadas, Daniel Bernoulli (Suizo, 1700-1782) encontró en 1732 la función llamada después de Bessel de orden cero.

Los coeficientes de orden $\frac{1}{3}$ aparecieron antes, en un problema de Jaime Bernoulli (1654-1705). Las vibraciones de una membrana tensa condujeron a Euler en 1764 a coeficientes más generales, y poco después, en 1771, Lagrange encontró lo

mismo durante el estudio del movimiento elíptico. En 1824, el astrónomo alemán Bessel (1784-1846), necesitando estas funciones en la investigación de una función perturbativa en astronomía dinámica desarrolló algunas de sus propiedades más útiles.

Después, los coeficientes de Bessel y su extensión inmediata, las funciones de Bessel, aparecieron en Física-Matemática casi tan frecuentemente como las funciones circulares. Como se sabe, al estudiar situaciones físicas que involucren simetría respecto de un punto o una recta, es forzoso (o más conveniente) emplear coordenadas esféricas o cilíndricas.

Aunque los Coeficientes de Bessel aparecen de manera casi casual en problemas mecánicos, su mayor importancia se da al desarrollarse la técnica de Separación de Variables aplicada a las Ecuaciones Parciales.

Capítulo II

Antecedentes Matemáticos.

Para que una estructura matemática sea aplicable en el ámbito físico, se hace necesaria su fundamentación rigurosa.

El Análisis de Fourier surge a partir de los trabajos realizados a principios del siglo XIX. De su desarrollo y fundamentación se han encargado, a partir de entonces, los más importantes analistas.

Se presentan en este capítulo los resultados sobre el tipo de funciones desarrollables en Series de Fourier y sobre la convergencia puntual, en la media y uniforme de estas series.

Se trabaja con el sistema de las funciones

trigonométricas y se muestra la completitud de éste en el espacio de las funciones Cuadrado-Integrables.

Al extender los resultados anteriores a funciones no periódicas se obtiene la fórmula Integral de Fourier, y se analizan las propiedades de las transformaciones de Fourier y de Laplace.

Este trabajo nos asegura la validez de los resultados que obtendremos en la resolución de EDP.

ϕ1. Analisis de Fourier.

En el mundo físico, de manera normal aparecen procesos periódicos, tales como oscilaciones, rotaciones, movimientos periódicos, vibraciones, etc.

Estos procesos pueden describirse mediante funciones periódicas. Desarrollaremos en esta sección la herramienta necesaria para la comprensión matemática de estos fenómenos.

Definición: Una función $f(x)$ se denomina Periódica si existe un número $T \neq 0$, llamado el Período de la función $f(x)$, tal que

$$f(x) = f(x+T), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Puede demostrarse, por inducción por ejemplo, que toda función $f(x)$ con período T , también tiene período kT , con $k \in \mathbb{Z}$, y que si T_1 y T_2 son períodos

de f , entonces $nT_1 + mT_2$ también lo son, si n y $m \in \mathbb{Z}$. Eso indica que el periodo de una función no es único, así que llamaremos Periodo Primitivo, o simplemente periodo, si no hay confusiones, al menor número positivo que satisfaga esta propiedad.

Si tomamos una función no periódica $f(x)$ definida en un intervalo $[a, a+T]$ podemos construir una función periódica $F(x)$ con periodo T que coincida con $f(x)$ en este intervalo, trasladando la gráfica de $f(x)$ a la izquierda y a la derecha de $f(x)$ a través de todo el eje x una distancia kT , $k \in \mathbb{Z}$, obteniendo así una Extensión Periódica con Periodo T de la función $f(x)$ del intervalo $[a, a+T]$ al eje x .

Una observación importante es la siguiente:

Para f periódica, de periodo T

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx, \quad \forall a.$$

Esto significa que la integral de una función periódica, tomada en un intervalo arbitrario de longitud T , asume el mismo valor.

Las funciones periódicas más conocidas son

$$f(x) = \text{sen } x$$

$$f(x) = \text{cos } x$$

El proceso más sencillo, en física, se describe mediante la función

$$f(x) = A \text{ sen } (\omega x + \varphi)$$

denominada una Vibración Armónica, o simplemente, una Armónica.

Como $f(x) = f(x + \frac{2\pi}{\omega})$, el periodo de una armónica es $\frac{2\pi}{\omega}$.

Las constantes A y ω , y la expresión $\omega x + \varphi$, se denominan la Amplitud, la Frecuencia y la Fase de la armónica.

Consideremos ahora una sucesión de armónicas

$$A_k \text{ Sen } \left(\frac{2k\pi}{T} x + \varphi_k \right), \quad k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}, T > 0.$$

El número $T_k = \frac{T}{k}$, $k \in \mathbb{N}$ es el período (primitivo) de la k -ésima armónica, por lo que $T = kT_k$, el período de la primera armónica de la sucesión, es un período común para todas las armónicas.

La frecuencia de la k -ésima armónica es $\lambda_k = \frac{2k\pi}{T}$, $k \in \mathbb{N}$. Como $\lambda_1 = \frac{2\pi}{T}$ y $\lambda_k = k\lambda_1$, se conoce comúnmente a una sucesión de armónicas de este tipo como una armónica con frecuencias múltiples.

Una superposición o suma de un número finito de armónicas tiene la forma

$$f_N(x) = A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \operatorname{Sen}\left(\frac{2k\pi}{T}x + \varphi_k\right), \quad A_0 = \text{Cte.}$$

Y es una función periódica, con período T .

Análogamente, una superposición de un número infinito de armónicas es de la forma

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{Sen}\left(\frac{2k\pi}{T}x + \varphi_k\right)$$

Y también tiene período T .

Considerando que

$$A_k \operatorname{Sen} \left(\frac{2k\pi}{T} x + \varphi_k \right) = A_k \operatorname{Sen} \varphi_k \operatorname{Cos} \frac{2k\pi}{T} x + A_k \operatorname{Cos} \varphi_k \operatorname{Sen} \frac{2k\pi}{T} x$$

y estableciendo la notación siguiente:

$$\frac{a_0}{2} = A_0, \quad a_k = A_k \operatorname{Sen} \varphi_k, \quad b_k = A_k \operatorname{Cos} \varphi_k, \quad 2L = T,$$

tenemos el desarrollo de la función $f(x)$ en una serie trigonométrica en la notación usual:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \operatorname{Cos} \frac{k\pi}{L} x + b_k \operatorname{Sen} \frac{k\pi}{L} x \right). \quad (1)$$

En principio, intentemos aclarar los puntos siguientes:

- 1.) ¿Cuáles son las funciones periódicas, con periodo $2L$, que pueden expandirse en una serie trigonométrica, es decir, que pueden representarse como una suma de este tipo?
- 2.) ¿Cómo determinar los coeficientes a_0 , a_k y b_k , con $k \in \mathbb{N}$, de esta expresión, si ésta es válida?
- 3.) ¿Qué relación hay entre las propiedades de la función $f(x)$ y la convergencia de la serie?

La relación (1) se llama expansión en una serie de la función $f(x)$ con respecto al Sistema Trigo

ortogonal (Sistema de funciones):

$$\left\{ \frac{1}{2}, \cos \frac{\pi}{L}x, \sin \frac{\pi}{L}x, \dots, \cos \frac{k\pi}{L}x, \sin \frac{k\pi}{L}x, \dots \right\}$$

Este sistema es ortogonal, es decir, la integral en $[-L, L]$ del producto de dos funciones diferentes, pertenecientes al sistema, se anula:

$$\int_{-L}^L \frac{1}{2} \cos \frac{k\pi}{L}x \, dx = \frac{1}{2} \frac{L}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{L}x \Big|_{-L}^L = 0,$$

$$\int_{-L}^L \frac{1}{2} \sin \frac{k\pi}{L}x \, dx = -\frac{1}{2} \frac{L}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{L}x \Big|_{-L}^L = 0,$$

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \frac{k\pi}{L}x \sin \frac{n\pi}{L}x \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos \frac{(k+n)\pi}{L}x + \cos \frac{(k-n)\pi}{L}x \right] dx \\ &= 0, \text{ para } k \neq n, \end{aligned}$$

Análogamente

$$\int_{-L}^L \sin \frac{k\pi}{L}x \sin \frac{n\pi}{L}x \, dx = 0, \text{ y}$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{k\pi}{L}x \cos \frac{n\pi}{L}x \, dx = 0, \text{ para } n \neq k,$$

pero

$$\int_{-L}^L \cos^2 \frac{k\pi}{L} x \, dx = \int_{-L}^L \frac{1 + \cos \frac{2k\pi}{L} x}{2} \, dx = L,$$

$$\int_{-L}^L \sin^2 \frac{k\pi}{L} x \, dx = \int_{-L}^L \frac{1 - \cos \frac{2k\pi}{L} x}{2} \, dx = L, \quad \forall$$

$$\int_{-L}^L \left(\frac{1}{2}\right)^2 \, dx = \frac{1}{2} L.$$

Si la serie (1) converge uniformemente, o en la media, a la función $f(x)$ en $[-L, L]$, es válida la integración término a término. Además la convergencia se preserva al multiplicar ambos miembros de (1) por una función continua.

Estas observaciones nos ayudarán a calcular los coeficientes que necesitamos:

Integrando (1) término a término, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-L}^L \cos \frac{k\pi}{L} x \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-L}^L \sin \frac{k\pi}{L} x \, dx \\ &= a_0 L. \end{aligned}$$

de donde

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \, dx$$

Multipliquemos en seguida (i) por $\cos \frac{n\pi}{L}x$, e integremos, para obtener

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L}x \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi}{L}x \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-L}^L \cos \frac{k\pi}{L}x \cos \frac{n\pi}{L}x \, dx \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-L}^L \sin \frac{k\pi}{L}x \cos \frac{n\pi}{L}x \, dx \\ &= a_n \int_{-L}^L \cos^2 \frac{n\pi}{L}x \, dx, \\ &= a_n L. \end{aligned}$$

de donde

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L}x \, dx$$

Análogamente, al multiplicar (i) por $\sin \frac{n\pi}{L}x$, e integrar término a término, se obtiene

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x \, dx.$$

Definición: los números $a_0, a_k, b_k, k \in \mathbb{N}$, determinados mediante las fórmulas

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \, dx, \quad a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi}{L}x \, dx, \quad b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi}{L}x \, dx$$

se denominan Coefficientes de Fourier de la función $f(x)$ con respecto al sistema ortogonal trigonométrico

$$\left\{ \frac{1}{2}, \cos \frac{k\pi}{L}x, \sin \frac{k\pi}{L}x \right\}, k \in \mathbb{N}.$$

Definición: La serie trigonométrica

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{L}x + b_k \sin \frac{k\pi}{L}x \right)$$

cuyos coeficientes a_0 , a_k y b_k están determinadas por la función $f(x)$, de acuerdo a las fórmulas de la definición anterior, se denomina Serie de Fourier de la función $f(x)$.

Los coeficientes de Fourier existen para una función integrable en $[-L, L]$.

Como para algunas funciones es probable que la serie no converja, es usual escribir la última relación definida como

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{L}x + b_k \sin \frac{k\pi}{L}x \right).$$

De todas las extensiones periódicas de una función, las

siguientes son particularmente útiles: las pares y las impares.

Recordemos que una función $f(x)$ definida en $[-L, L]$ se llama Par si $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in [-L, L]$, y se llama Impar si $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in [-L, L]$.

Geométricamente, una función par es simétrica respecto al eje vertical y una función impar es simétrica respecto al origen.

Una función arbitraria f definida en $[-L, L]$ puede fragmentarse en la suma de una función par y una función impar, definiendo

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

porque $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, y f_1 es par y f_2 es impar.

Si f además es integrable en $[-L, L]$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^L f(x) dx \\ &= \int_0^L [f(x) + f(-x)] dx \end{aligned}$$

Entonces, substituyendo x por $-x$,

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = \int_0^L f(-x) dx,$$

de donde

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^L f(x) dx, & \text{si } f(x) \text{ es par} \\ 0, & \text{si } f(x) \text{ es impar.} \end{cases}$$

Las funciones $\frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{L}x$, ..., $\cos \frac{k\pi}{L}x$, son pares, y las funciones $\sin \frac{\pi}{L}x$, ..., $\sin \frac{k\pi}{L}x$, son impares, por lo que la serie de Fourier para una función par tiene la forma denominada Serie Coseno de Fourier para f :

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{L}x$$

Y para una función impar, la denominada Serie Seno de Fourier para f :

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{L}x,$$

ya que si f es par, $f(x) \cos \frac{k\pi}{L}x$ es también par y

$f(x) \cos \frac{k\pi}{L}x$ es impar, y los coeficientes toman la forma

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(\xi) d\xi = \frac{2}{L} \int_0^L f(\xi) d\xi,$$

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(\xi) \cos \frac{k\pi}{L}\xi d\xi = \frac{2}{L} \int_0^L f(\xi) \cos \frac{k\pi}{L}\xi d\xi, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(\xi) \sin \frac{k\pi}{L}\xi d\xi = 0.$$

De manera similar, para una función impar, $f(x) \cos \frac{k\pi}{L}x$ es impar y $f(x) \sin \frac{k\pi}{L}x$ es par, y se tiene

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(\xi) d\xi = 0$$

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(\xi) \cos \frac{k\pi}{L}\xi d\xi = 0$$

$$b_k = \frac{2}{L} \int_{-L}^L f(\xi) \sin \frac{k\pi}{L}\xi d\xi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Probemos ahora un teorema fundamental sobre convergencia de Series de Fourier.

Definición: Una función $f(x)$ se llama Continua a Pedazos en un intervalo $[a, b]$, si es continua en

$$A_k \operatorname{Sen} \left(\frac{2k\pi}{T} x + \varphi_k \right) = A_k \operatorname{Sen} \varphi_k \operatorname{Cos} \frac{2k\pi}{T} x + A_k \operatorname{Cos} \varphi_k \operatorname{Sen} \frac{2k\pi}{T} x$$

y estableciendo la notación siguiente:

$$\frac{a_0}{2} = A_0, \quad a_k = A_k \operatorname{Sen} \varphi_k, \quad b_k = A_k \operatorname{Cos} \varphi_k, \quad 2L = T,$$

tenemos el desarrollo de la función $f(x)$ en una serie trigonométrica en la notación usual:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \operatorname{Cos} \frac{k\pi}{L} x + b_k \operatorname{Sen} \frac{k\pi}{L} x \right). \quad (1)$$

En principio, intentemos aclarar los puntos siguientes:

- 1.) ¿Cuáles son las funciones periódicas, con periodo $2L$, que pueden expandirse en una serie trigonométrica, es decir, que pueden representarse como una suma de este tipo?
- 2.) ¿Cómo determinar los coeficientes a_0 , a_k y b_k , con $k \in \mathbb{N}$, de esta expresión, si ésta es válida?
- 3.) ¿Qué relación hay entre las propiedades de la función $f(x)$ y la convergencia de la serie?

La relación (1) se llama expansión en una serie de la función $f(x)$ con respecto al Sistema Trigo

ortogonal (Sistema de funciones):

$$\left\{ \frac{1}{2}, \cos \frac{\pi}{L} x, \sin \frac{\pi}{L} x, \dots, \cos \frac{k\pi}{L} x, \sin \frac{k\pi}{L} x, \dots \right\}$$

Este sistema es ortogonal, es decir, la integral en $[-L, L]$ del producto de dos funciones diferentes, pertenecientes al sistema, se anula:

$$\int_{-L}^L \frac{1}{2} \cos \frac{k\pi}{L} x dx = \frac{1}{2} \frac{L}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{L} x \Big|_{-L}^L = 0,$$

$$\int_{-L}^L \frac{1}{2} \sin \frac{k\pi}{L} x dx = -\frac{1}{2} \frac{L}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{L} x \Big|_{-L}^L = 0,$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{k\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{L} x dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos \frac{(k+n)\pi}{L} x + \cos \frac{(k-n)\pi}{L} x \right] dx \\ = 0, \text{ para } k \neq n,$$

Análogamente

$$\int_{-L}^L \sin \frac{k\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{L} x dx = 0, \text{ y}$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{k\pi}{L} x \cos \frac{n\pi}{L} x dx = 0, \text{ para } n \neq k.$$

pero

$$\int_{-L}^L \cos^2 \frac{k\pi}{L} x \, dx = \int_{-L}^L \frac{1 + \cos \frac{2k\pi}{L} x}{2} \, dx = L,$$

$$\int_{-L}^L \sin^2 \frac{k\pi}{L} x \, dx = \int_{-L}^L \frac{1 - \cos \frac{2k\pi}{L} x}{2} \, dx = L, \quad \forall$$

$$\int_{-L}^L \left(\frac{1}{2}\right)^2 \, dx = \frac{1}{2} L.$$

Si la serie (1) converge uniformemente, o en la media, a la función $f(x)$ en $[-L, L]$, es válida la integración término a término. Además la convergencia se preserva al multiplicar ambos miembros de (1) por una función continua.

Estas observaciones nos ayudarán a calcular los coeficientes que necesitamos:

Integrando (1) término a término, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-L}^L \cos \frac{k\pi}{L} x \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-L}^L \sin \frac{k\pi}{L} x \, dx \\ &= a_0 L. \end{aligned}$$

de donde

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \, dx$$

Multipliquemos en seguida (i) por $\cos \frac{n\pi}{L} x$, e integremos, para obtener

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-L}^L \cos \frac{k\pi}{L} x \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-L}^L \sin \frac{k\pi}{L} x \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx \\ &= a_n \int_{-L}^L \cos^2 \frac{n\pi}{L} x \, dx, \\ &= a_n L. \end{aligned}$$

de donde

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

Análogamente, al multiplicar (i) por $\sin \frac{n\pi}{L} x$, e integrar término a término, se obtiene

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx.$$

Definición: los números $a_0, a_k, b_k, k \in \mathbb{N}$, determinados mediante las fórmulas

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \, dx, \quad a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi}{L} x \, dx, \quad b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi}{L} x \, dx$$

se denominan Coefficientes de Fourier de la función $f(x)$ con respecto al sistema ortogonal trigonométrico

$$\left\{ \frac{1}{2}, \cos \frac{k\pi}{L}x, \sin \frac{k\pi}{L}x \right\}, k \in \mathbb{N}.$$

Definición: La serie trigonométrica

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{L}x + b_k \sin \frac{k\pi}{L}x \right)$$

cuyos coeficientes a_0 , a_k y b_k están determinadas por la función $f(x)$, de acuerdo a las fórmulas de la definición anterior, se denomina Serie de Fourier de la función $f(x)$.

Los coeficientes de Fourier existen para una función integrable en $[-L, L]$.

Como para algunas funciones es probable que la serie no converja, es usual escribir la última relación definida como

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{L}x + b_k \sin \frac{k\pi}{L}x \right).$$

De todas las extensiones periódicas de una función, las

siguientes son particularmente útiles: Las pares y las impares.

Recordemos que una función $f(x)$ definida en $[-L, L]$ se llama Par si $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in [-L, L]$, y se llama Impar si $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in [-L, L]$.

Geométricamente, una función par es simétrica respecto al eje vertical y una función impar es simétrica respecto al origen.

Una función arbitraria f definida en $[-L, L]$ pueda fragmentarse en la suma de una función par y una función impar, definiendo

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

porque $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, y f_1 es par y f_2 es impar.

Si f además es integrable en $[-L, L]$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^L f(x) dx \\ &= \int_0^L [f(x) + f(-x)] dx \end{aligned}$$

Entonces, substituyendo x por $-x$,

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = \int_0^L f(-x) dx,$$

de donde

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^L f(x) dx, & \text{si } f(x) \text{ es par} \\ 0, & \text{si } f(x) \text{ es impar.} \end{cases}$$

Las funciones $\frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{L}x$, ..., $\cos \frac{k\pi}{L}x$, son pares, y las funciones $\sin \frac{\pi}{L}x$, ..., $\sin \frac{k\pi}{L}x$, son impares, por lo que la serie de Fourier para una función par tiene la forma denominada Serie Coseno de Fourier para f :

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{L}x$$

Y para una función impar, la denominada Serie Seno de Fourier para f :

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{L}x,$$

ya que si f es par, $f(x) \cos \frac{k\pi}{L}x$ es también par y

$f(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi}{L}x$ es impar, y los coeficientes toman la forma

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(\xi) d\xi = \frac{2}{L} \int_0^L f(\xi) d\xi,$$

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(\xi) \cos \frac{k\pi}{L}\xi d\xi = \frac{2}{L} \int_0^L f(\xi) \cos \frac{k\pi}{L}\xi d\xi, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(\xi) \operatorname{sen} \frac{k\pi}{L}\xi d\xi = 0.$$

De manera similar, para una función impar, $f(x) \cos \frac{k\pi}{L}x$ es impar y $f(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi}{L}x$ es par, y se tiene

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(\xi) d\xi = 0$$

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(\xi) \cos \frac{k\pi}{L}\xi d\xi = 0$$

$$b_k = \frac{2}{L} \int_{-L}^L f(\xi) \operatorname{sen} \frac{k\pi}{L}\xi d\xi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Probemos ahora un teorema fundamental sobre convergencia de Series de Fourier.

Definición: Una función $f(x)$ se llama Continua a Pedazos en un intervalo $[a, b]$, si es continua en

todo el intervalo, excepto tal vez en un número finito de puntos de discontinuidad ordinaria (discontinuidades de primer tipo o de salto).

Una función de este tipo tiene límites por la izquierda y por la derecha finitos

$$f(x+0) = \lim_{z \rightarrow 0, z > 0} f(x+z), \quad f(x-0) = \lim_{z \rightarrow 0, z > 0} f(x-z)$$

en cada punto interior de $[a, b]$, y también límites finitos $f(a+0)$ y $f(b-0)$ en los extremos.

Definición: Una función $f(x)$ se llama suave a pedazos en $[a, b]$ si su derivada $f'(x)$ existe y es continua a pedazos en el intervalo $[a, b]$.

Evidentemente, una función suave a pedazos es continua a pedazos.

Dos resultados necesarios son los siguientes.

Lema 1: (Lema de Dirichlet).

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku = \frac{\operatorname{Sen}(n + \frac{1}{2})u}{2 \operatorname{Sen} \frac{u}{2}}$$

demostración:

$$\text{Sea } D_n(u) = \frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \dots + \cos nu,$$

Entonces

$$2 D_n(u) \sin \frac{u}{2} = \sin \frac{u}{2} + 2 \cos u \sin \frac{u}{2} + \dots + 2 \cos nu \sin \frac{u}{2},$$

Aplicando la identidad

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

a cada producto de esta forma en el lado derecho se tiene

$$\begin{aligned} 2 D_n(u) \sin \frac{u}{2} &= \sin \frac{u}{2} + \left[\sin \left(u + \frac{u}{2} \right) - \sin \left(u - \frac{u}{2} \right) \right] \\ &\quad + \left[\sin \left(2u + \frac{u}{2} \right) - \sin \left(2u - \frac{u}{2} \right) \right] + \dots \\ &\quad + \left[\sin \left(nu + \frac{u}{2} \right) - \sin \left(nu - \frac{u}{2} \right) \right] \\ &= \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u, \end{aligned}$$

por tratarse de una suma telescópica,

$$\therefore D_n(u) = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u}{2 \sin \frac{u}{2}}.$$

$D_n(u)$ es conocido como Núcleo de Dirichlet.

Lema 2. (Riemann - Lebesgue)

Si $f(x)$ es suave a pedazos en $[a, b]$, se tiene

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx = 0.$$

Demostración:

Sean a_0, \dots, a_{n-1} puntos en donde f y f' son discontinuas.

En cada intervalo $[a_i, a_{i+1}]$, $i=0, \dots, n-1$ ($a_0=a$, $a_n=b$), f y f' son continuas y tienden a límites finitos en los extremos, es decir, existen

$$f(a_i+0), f'(a_i+0) \text{ y } f(a_{i+1}-0), f'(a_{i+1}-0),$$

cuando $x \rightarrow a_{i+1}$ por la izquierda y $x \rightarrow a_i$ por la derecha.

$$\text{Como } \int_a^b f(x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx,$$

es suficiente probar que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx = 0, \text{ para } i=0, 1, \dots, n-1.$$

Las funciones f y f' son acotadas, lo que implica

que existen M_1 y M_2 constantes positivas, tales que
 $|f(x)| \leq M_1$ y $|f'(x)| \leq M_2$, $\forall x \in [a_i, a_{i+1}]$.

Integrando por partes, tenemos

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx = \frac{-f(x) \cos \alpha x}{\alpha} \Big|_{a_i}^{a_{i+1}} + \frac{1}{\alpha} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x) \cos \alpha x \, dx$$

$$\left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx \right| \leq \frac{2M_1}{\alpha} + \frac{M_2(a_{i+1} - a_i)}{\alpha}$$

Pasando al límite cuando $\alpha \rightarrow \infty$, tenemos probado el lema.

Teorema: si $f(x)$ es una función suave a pedazos en un intervalo $[-L, L]$, su Serie de Fourier converge en cada punto de su dominio, y la suma

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{L} x + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{L} x \right)$$

satisface

$$S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

Demostración: Sea f suave a pedazos en $[-L, L]$.
 Extendamos la función f como una función pe-

periódica, con periodo $2L$, del intervalo $[-L, L]$ a todo el eje.

$$\text{Sea } S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi}{L}x + b_k \sin \frac{k\pi}{L}x \right)$$

la n -ésima suma parcial de la serie de Fourier de f .

Probaremos que

$$\left\{ S_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall x.$$

Substituyendo los coeficientes de Fourier en S_n se obtiene.

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\xi) d\xi + \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n \int_{-L}^L f(\xi) \left[\cos \frac{k\pi}{L} \xi \cos \frac{k\pi}{L} x + \sin \frac{k\pi}{L} \xi \sin \frac{k\pi}{L} x \right] d\xi \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(\xi) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{L} (\xi - x) \right] d\xi \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L-x}^{L-x} f(x+z) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{L} z \right] dz. \end{aligned}$$

Hemos hecho el cambio $z = \xi - x$.

Podemos describir la n -ésima suma parcial de la serie de Fourier utilizando el núcleo de Dirichlet.

$$S_n(x) = \frac{1}{L} \int_{-L-x}^{L-x} f(x+z) D_n(z) dz$$

La función $f(x)$ es periódica, con periodo $2L$, y $D_n(z)$ es una función de z periódica, con periodo $2L$ también, por lo que el producto $f(x+z)D_n(z)$ es una función periódica, de periodo $2L$.

Por lo tanto, la integral de este producto se puede tomar sobre cualquier intervalo de longitud $2L$, es decir, tenemos

$$S_n(x) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x+z) D_n(z) dz.$$

Por otra parte, observemos que

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L D_n(z) dz = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dz = 1$$

Esto último debido al desarrollo del Núcleo de Dirichlet y a las condiciones de ortogonalidad del sistema trigonométrico.

La expresión $D_n(z)$ es una función par de z , lo que implica

$$\begin{cases} \frac{1}{L} \int_{-L}^0 D_n(z) dz = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{L} \int_0^L D_n(z) dz = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Multipliquemos estas últimas igualdades por $f(x-0)$ y $f(x+0)$ respectivamente y sumemos:

$$\frac{1}{2} (f(x-0) + f(x+0)) = \frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(x-0) D_n(z) dz + \frac{1}{L} \int_0^L f(x+0) D_n(z) dz$$

Ahora,

$$\begin{aligned} S_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \frac{1}{L} \int_0^L [f(x+z) - f(x+0)] D_n(z) dz \\ &+ \frac{1}{L} \int_{-L}^0 [f(x+z) - f(x-0)] D_n(z) dz \\ &= J_n + G_n \end{aligned}$$

El último paso consiste en probar que J_n y G_n tienden a cero cuando $n \rightarrow \infty$.

Reescribamos J_n en la forma siguiente:

$$J_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z} \left(\frac{\frac{\pi}{2L} z}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2L} z} \right) \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} z dz$$

$$+ \frac{1}{L} \int_{\delta}^L \frac{f(x+z) - f(x-0)}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2L} z} \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L} z \, dz \quad 2-22$$

$$= J_{n1} + J_{n2}, \text{ donde } 0 < \delta < L.$$

Tomemos $\varepsilon > 0$. Mostraremos que para $\delta > 0$ suficientemente pequeña, tenemos $J_{n1} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como $\frac{f(x+z) - f(x+0)}{z} \rightarrow f'(x+0)$, cuando $z \rightarrow 0$ y $z > 0$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeña y $\forall z \in (0, \delta)$, tenemos

$$\left| \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z} \right| < |f'(x+0)| + 1,$$

$$\text{Como } \frac{\frac{\pi}{2L} z}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2L} z} \rightarrow 1, \text{ cuando } z \rightarrow 0,$$

para δ pequeña tenemos

$$1 < \left| \frac{\frac{\pi}{2L} z}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2L} z} \right| < 2.$$

finalmente, como $\forall z \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, podemos escribir

$$\left| \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L} z \right| \leq 1,$$

$$\text{se tiene } |J_{n1}| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \left| \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z} \right| \left| \frac{\frac{\pi}{2L} z}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2L} z} \right| \left| \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L} z \right| dz$$

$$\leq \frac{2\delta}{\pi} \left(|f'(x_0)| + 1 \right),$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, siempre que δ sea suficientemente pequeña.

Tomamos $\delta > 0$, de tal manera que

$$\frac{2\delta}{\pi} \left(|f'(x_0)| + 1 \right) < \frac{\epsilon}{2}$$

y tendremos $|J_{n1}| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Para $\delta > 0$ fije mediante el proceso anterior, estimemos la segunda integral (J_{n2}).

La función

$$\frac{f(x+z) - f(x_0)}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2L} z}$$

es continua a pedazos y suave a pedazos en $[\delta, L]$, ya que el numerador es una función suave a pedazos y el denominador es una función continuamente diferenciable y que no se anula en $[\delta, L]$.

Aplicando el lema 2 (Riemann-Lebesgue) a esta situación tenemos

$$J_{n2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

En consecuencia, para n suficientemente grande, se tiene $|J_{n2}| < \frac{\epsilon}{2}$.

De donde

$$|J_n| \leq |J_{n1}| + |J_{n2}| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

para n suficientemente grande.

Esto significa que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 0$$

Para G_n podemos actuar de manera similar, para obtener

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{f(x+0) - f(x-0)}{2}.$$

Conclusión: Sea $f(x)$ suave a pedazos en $[-L, L]$,

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{L}x + b_k \sin \frac{k\pi}{L}x \right)$$

su serie de Fourier.

a) Para los puntos de continuidad de $f(x)$ se satisface:

$$S(x) = f(x).$$

Demostración:

$$S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

$$= \frac{f(x) + f(x)}{2}$$

$$= f(x)$$

b) Para los extremos se satisface:

$$S(L) = S(-L)$$

Demostración: Como la función f ha sido extendida periódicamente, si en L hay discontinuidad de salto, se tiene

$$S(L) = \frac{f(-L+0) + f(L-0)}{2}$$

$$= S(-L)$$

La expansión de una función f en serie de Fourier es un caso particular de la expansión de una función en una serie con respecto a un sistema ortogonal de funciones.

Pensemos en el conjunto de funciones integrables en $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Este resulta ser un espacio Vectorial con las opera-

ciones suma de funciones y multiplicación de una función por un escalar definidas de la manera usual.

En este espacio vectorial se puede definir el producto interno siguiente

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx.$$

Con φ y ψ pertenecientes a este espacio. El espacio será así Euclideo.

Un conjunto de funciones $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots\}$ de este espacio, se denomina Sistema Ortogonal en $[a, b]$ si

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0, \quad \forall i \neq j.$$

Esta es una generalización del concepto de base.

Para todo elemento de este espacio Euclideo, la función

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = \|\varphi\| = \left(\int_a^b \varphi^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

satisface las propiedades de una Norma en este espacio. Un espacio así se llama Normado.

Sea $E[a, b]$ este espacio normado, si

$$\{ \varphi_k \} \in E[a, b], \quad k=1, \dots, n$$

es un sistema ortogonal, la suma

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x), \quad \text{con } \alpha_k \text{ coeficientes arbitrarios}$$

se llama Polinomio de Orden n con respecto al sistema ortogonal $\{ \varphi_k \}$.

Se denomina Serie de Fourier de f con respecto al sistema $\{ \varphi_k \}$ a la serie siguiente

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad \text{con } a_k = \frac{1}{\| \varphi_k(x) \|^2} \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx.$$

Los coeficientes a_k se llaman Coefficientes de Fourier de f .

Nuevamente, es usual escribir esta relación como

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x).$$

entanto se analiza la convergencia.

Hasta ahora solo hemos analizado la convergencia puntual de la Serie de Fourier para una función

dada. Estudiaremos en seguida otros tipos de convergencia.

Definición: Dadas dos funciones φ, ψ integrables en $[a, b]$, el número positivo

$$\|\varphi - \psi\|^2 = \int_a^b [\varphi(x) - \psi(x)]^2 dx$$

se llama Desviación Cuadrática media de φ respecto de ψ en el intervalo $[a, b]$. Es usual denotar esta cantidad por $\rho^2(\varphi, \psi)$.

Definición: Una sucesión de funciones $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ se llama Convergente en la Media (Media Cuadrática) a la función $f(x)$ en $[a, b]$ si

$$\rho^2(\varphi_n, f) = \int_a^b [\varphi_n(x) - f(x)]^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

La notación usual para este tipo de convergencia es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) \doteq f(x)$$

Definición: Una serie funcional $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)$

es convergente en la media (cuadrática) a $S(x)$ en $[a, b]$ si la sucesión de sumas parciales

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x)$$

converge en la media a $S(x)$, es decir, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \doteq S(x)$$

Para una función f en $E[a, b]$, dado un sistema ortogonal $\{\varphi_k\}$, es necesario resolver el problema siguiente:

¿Que polinomio de la forma $\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x)$ tiene la menor desviación cuadrática respecto de f en $[a, b]$?

Es decir: ¿Para que coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$,

$$\rho^2\left(f, \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k\right) = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x) \right]^2 dx$$

$$= \left\| f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x) \right\|^2$$

tiene su valor mínimo absoluto?

Veamos.

$$\begin{aligned} \rho^2 \left(f(x), \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right) &= \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx + \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x) \right)^2 dx \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \|\varphi_k\|^2 \end{aligned}$$

Esto último debido a que

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = a_k \|\varphi_k\|^2, \quad \int_a^b \varphi_k^2(x) dx = \|\varphi_k\|^2,$$

y la ortogonalidad del sistema.

Reagrupando, se tiene

$$\rho^2 \left(f(x), \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right) = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=1}^n a_k^2 \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - a_k)^2 \|\varphi_k\|^2.$$

Observemos ahora que, de todos los términos del lado derecho, solamente el último depende de los coeficientes α_k .

El mínimo valor de

$$\rho^2 \left(f(x), \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right)$$

se obtiene haciendo $\alpha_k = a_k$

Definición: El polinomio $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$, donde

a_k son los coeficientes de Fourier, se llama Polinomio de Fourier de $f(x)$ respecto del sistema ortogonal $\{\varphi_k(x)\}$, $k=1, \dots, n$.

Intuitivamente, el Polinomio de Fourier definido es el más "próximo" a f , de entre todos los polinomios de esta forma.

Notemos ahora que

$$\min p^2\left(f(x), \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k\right) = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=1}^n a_k^2 \|\varphi_k\|^2.$$

Como el lado derecho de esta igualdad no es negativo,

$$\text{se tiene } \sum_{k=1}^n a_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx.$$

Esta desigualdad se cumple para $n \in \mathbb{N}$.

Como la suma del lado izquierdo es no negativa y no decreciente cuando $n \rightarrow \infty$, y el lado derecho no depende de n y acota a la sucesión de sumas parciales, se tiene la Desigualdad de Bessel, al pasar al límite cuando $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx.$$

Además, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|\varphi_k\|^2$ es convergente:

En el caso particular del sistema trigonométrico que hemos estado estudiando, la Desigualdad de Bessel toma la forma

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx.$$

Definición: Una función $f(x)$ es cuadrado-integrable en $[a, b]$ si las integrales

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{y} \quad \int_a^b f^2(x) dx$$

existen.

En consecuencia, la desigualdad de Bessel es válida para funciones cuadrado-integrables. Mas aún, es válida en el caso en el que el sistema ortogonal de funciones sea de cuadrado-integrables.

En seguida probaremos un teorema sobre convergencia

uniforme de la serie de Fourier de una función.

Teorema: Sea $f(x)$ continua y suave a pedazos en $[-L, L]$, con derivada $f'(x)$ cuadrado-integrable.

Si $f(-L) = f(L)$, entonces, su Serie de Fourier

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{L}x + b_k \sin \frac{k\pi}{L}x \right)$$

Converge uniformemente en $[-L, L]$, y

$$S(x) = f(x) \quad \forall x \in [-L, L].$$

Demostración: Observemos que

$$\left| a_k \cos \frac{k\pi}{L}x \right| \leq |a_k|, \quad \left| b_k \sin \frac{k\pi}{L}x \right| \leq |b_k|.$$

Entonces, será suficiente probar que

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|),$$

o que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)$

converga (por ser $\frac{|a_0|}{2}$ una constante), y usar la

prueba M de Weierstrass.

Integramos por partes los coeficientes de Fourier de la función f .

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi}{L} x \, dx \\ &= \frac{1}{L} \left[\frac{L}{k\pi} f(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi}{L} x \Big|_{-L}^L - \frac{L}{k\pi} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi}{L} x \, dx \right] \\ &= -\frac{L}{k\pi} b'_k, \end{aligned}$$

Análogamente

$$b_k = \frac{L}{k\pi} a'_k.$$

Aquí se ha utilizado el hecho de que $f(L) = f(-L)$.

a'_k y b'_k son los coeficientes de Fourier de f' . Estos coeficientes existen por las condiciones del teorema.

Tenemos ahora

$$|a_k| + |b_k| \leq \frac{L}{\pi} \left(\frac{|a'_k|}{k} + \frac{|b'_k|}{k} \right)$$

Como f' es continua a pedazos y Cuadrado-Inte-

grable en $[-L, L]$, la desigualdad de Bessel se satis-
face para f' , es decir

$$\frac{a_0'^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k'^2 + b_k'^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x)^2 dx$$

Esto implica la convergencia de

$$\frac{a_0'^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k'^2 + b_k'^2)$$

Ahora desarrollemos las desigualdades siguientes

$$0 \leq \left(|a_k'| - \frac{1}{k} \right)^2 = a_k'^2 - 2 \frac{|a_k'|}{k} + \frac{1}{k^2},$$

$$0 \leq \left(|b_k'| - \frac{1}{k} \right)^2 = b_k'^2 - 2 \frac{|b_k'|}{k} + \frac{1}{k^2}.$$

Las cuales implican que

$$\frac{|a_k'|}{k} \leq \frac{1}{2} \left(a_k'^2 + \frac{1}{k^2} \right)$$

$$\frac{|b_k'|}{k} \leq \frac{1}{2} \left(b_k'^2 + \frac{1}{k^2} \right),$$

De donde

$$\frac{|a_k'|}{k} + \frac{|b_k'|}{k} \leq \frac{1}{2} (a_k'^2 + b_k'^2) + \frac{1}{k^2}$$

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ converge.}$$

2-36

Este es el último detalle. Se tiene ahora demostrado el teorema:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) &\leq \frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|a'_k|}{k} + \frac{|b'_k|}{k} \right) \\ &\leq \frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} (a_k'^2 + b_k'^2) + \frac{1}{k^2} \right\}. \end{aligned}$$

Aplicando varias veces la prueba M de Weierstrass, puesto que la última expresión es convergente.

Una función continua y periódica se determina de manera única por su Serie de Fourier, ya que si f_1 y f_2 son continuas, con el mismo período y mismos coeficientes de Fourier, entonces $(f_1 - f_2)$ es continua y se anula idénticamente en todo punto.

Sin embargo, como la Serie de Fourier para una función continua no converge necesariamente, no siempre se puede obtener f sumando directamente su Serie de Fourier.

Una manera de reconstruir una función continua a partir de su Serie de Fourier fue demostrada por Fejér a principios de este siglo. Enunciaremos los siguientes resultados con funciones periódicas de periodo 2π . Debe quedar claro que esto puede ser extendido a funciones periódicas, de periodo arbitrario.

Definición: Sea $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$,

Las medias aritméticas de las primeras n sumas parciales de Fourier de $f(x)$

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_{n-1}(x)}{n}$$

se llaman Sumas de Fejér de la función $f(x)$.

Teorema (Fejér, 1905)

Sea $f(x)$ una función continua de período 2π .
La sucesión $\{\sigma_n(x)\}$ de sus Sumas de Fejér
converge uniformemente a $f(x)$ en toda la
recta real.

En la demostración (que no se efectuará aquí)
de este resultado, interviene la expresión

$$F_n(u) = \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\text{Sen } n \frac{u}{2}}{\text{Sen } \frac{u}{2}} \right)^2$$

denominada Núcleo de Fejér.

De este teorema se desprende la Complejitud del
sistema trigonométrico $\left\{ \frac{1}{2}, \text{sen } \frac{n\pi}{L}x, \text{cos } \frac{n\pi}{L}x \right\}$ en el
espacio de las funciones Cuadrado-integrables
en $[-L, L]$.

En efecto, de acuerdo a este resultado, toda
función continua es el límite uniforme (y

por lo tanto en la media) de una sucesión de polinomios trigonométricos T_n , y además las funciones continuas son siempre densas en este espacio.

El teorema de Fejér puede considerarse como un complemento del teorema de Weierstrass sobre aproximación de funciones continuas mediante polinomios trigonométricos, éste último afirma que toda función continua y periódica es el límite uniforme de cierta sucesión de polinomios trigonométricos, mientras que el de Fejér indica una sucesión concreta con esta propiedad.

§2. Transformadas Integrales.

Los resultados anteriores pueden extenderse a funciones no periódicas.

Sea f una función tal que en cada intervalo finito $[-L, L]$ satisface las condiciones que garantizan su desarrollo en Series de Fourier.

Este desarrollo tendría la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k}{L} x + b_k \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} x \right)$$

Substituyendo los coeficientes por sus expresiones equivalentes, tendremos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{\pi k}{L} x \cos \frac{\pi k}{L} t dt + \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} x \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} t dt \right) \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-L}^L f(t) \left[\cos \frac{\pi k}{L} x \cos \frac{\pi k}{L} t + \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} x \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} t \right] dt \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{\pi k}{L} (t-x) dt \end{aligned}$$

Si además se cumple que f es absolutamente integrable en toda la recta, es decir $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < +\infty$,

Pasando al límite (cuando $L \rightarrow \infty$), obtenemos que

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0.$$

Además $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi k}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{\pi k}{L} (t-x) dt$ puede considerarse

como la suma integral (referida a todo el intervalo infinito) de la integral $\int_0^{\infty} F(\lambda) d\lambda$ de la función $F(\lambda) = \int_{-L}^L f(t) \cos \lambda (t-x) dt$.

Haciendo $\lambda_k = \frac{\pi k}{L}$, $\Delta \lambda = \frac{\pi}{L}$, el paso formal al límite para $L \rightarrow \infty$, nos lleva a la Fórmula Integral de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda (t-x) dt.$$

Haciendo $a_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt$, $b_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda t dt$,

la Fórmula Integral de Fourier tiene el aspecto si-

quiente, semejante a una Serie de Fourier

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a_{\lambda} \cos \lambda x + b_{\lambda} \sin \lambda x) d\lambda.$$

Teorema (Teorema Integral de Fourier)

Sea f una función absolutamente integrable y sea
ve a pedazos en $(-\infty, \infty)$.

Entonces

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(t-x) dt.$$

Demostración: Sea $J(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^A d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(t-x) dt$,
debemos demostrar que $\lim_{A \rightarrow \infty} J(A) = f(x)$.

Como f es absolutamente integrable, la integral

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(t-x) dt$ converge uniformemente $\forall \lambda$.

Por lo tanto, aplicando el Teorema de Fubini, podemos cambiar el orden de integración en $J(A)$ para obtener

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^A f(t) \cos \lambda(t-x) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin A(t-x)}{t-x} dt$$

Haciendo $z = t-x$, tenemos

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+z) \frac{\operatorname{Sen} Az}{z} dz.$$

Utilizando el hecho siguiente: $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Sen} Az}{z} dz = 1$, si $A > 0$, encontramos que

$$J(A) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \operatorname{Sen} Az dz,$$

lo cual puede reescribirse como

$$\begin{aligned} J(A) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-N}^N \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \operatorname{Sen} Az dz + \frac{1}{\pi} \int_{|z| \geq N} \frac{f(x+z)}{z} \operatorname{Sen} Az dz \\ &\quad - \frac{f(x)}{\pi} \int_{|z| \geq N} \frac{\operatorname{Sen} Az}{z} dz \end{aligned}$$

Como los dos últimos términos del miembro derecho son integrales convergentes, cada uno de ellos puede hacerse menor que $\frac{\epsilon}{3}$, si se escoge N suficientemente grande. El primero de estos sumandos tiende a cero para N fija, esto debido a que f es suave a pedazos (al aplicar el lema de Riemann-Lebesgue, como se observa en una demostración anterior).

Así obtenemos $\lim_{A \rightarrow \infty} (J(A) - f(x)) = 0$.

Ahora, debido a que la integral interior de la Fórmula Integral de Fourier es una función por respecto de λ , podemos reescribir la fórmula como

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(t-x) dt. \quad (1)$$

El hecho de que f sea absolutamente integrable implica la existencia de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda(t-x) dt$ y de que esta sea impar respecto de λ .

$$\text{Por lo que } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda(t-x) dt = 0, \quad (2)$$

entendiendo a la integral respecto de λ en el sentido del valor principal.

Sumando a (1) la fórmula (2) multiplicada por $-i$ se obtiene la Fórmula Integral de Fourier Compleja

Compleja :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt.$$

Definición: Para f continua en todo punto, absolutamente integrable y suave a pedazos en toda la

recta, la función

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt$$

en el sentido de su valor principal, se denomina

Transformación de Fourier, Función Transformada de Fourier, o más brevemente Transformada de Fourier.

Es frecuente denotar esta transformada por $\mathcal{F}\{f\}$.

Definición: La función

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

se llama Transformada Inversa de Fourier, y se denota por $\mathcal{F}^{-1}\{F\}$.

Uno de los métodos clásicos en Matemáticas, consiste en convertir un problema en otro más manejable, resolver este último, y a partir de su solución, obtener la solución del problema original.

En la resolución de Ecuaciones Diferenciales, son de gran ayuda las transformadas Integrales.

Definición: Una transformada Integral para una función $f(x)$ es una función de la forma

$$T\{f\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) N(s,x) dx,$$

La función $N(s,x)$ se denomina Núcleo de la Transformación.

Si α , β , $N(s,x)$ se eligen de manera adecuada, el problema inicial se transforma en otro más sencillo, desde luego que será necesario justificar que esta manipulación no conduce a resultados falsos.

La Transformada de Fourier es un buen ejemplo de transformada Integral; pero como el conjunto de funciones para las que existe una transformada no es suficientemente amplio, necesitamos pensar en otras transformaciones. Aquí sólo consideraremos una más:

Supongamos que f (en general no integrable en toda la recta) resulta ser integrable si se multiplica por $e^{-\delta x}$ ($\delta \in \mathbb{R}$).

$$\text{Entonces } g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\lambda} e^{\mu x} dx$$

Converge para determinados valores complejos de $s = \lambda + i\mu$, en particular, converge en la recta $\mu = -\delta$.

En esta recta $g(s)$ representa la Transformada de Fourier de la función $f(x) e^{\mu x}$.

El caso más importante para las aplicaciones, en el que se cumplen nuestras suposiciones sobre la integrabilidad de la función $f(x) e^{-\delta x}$, es en el que f satisface las condiciones siguientes.

- i) $f(x) < M e^{\delta_0 x}$ para $x \geq 0$
- ii) $f(x) = 0$ para $x < 0$.

Definición: Una función que verifica la condición

i) con δ_0 y M constantes positivas se llama de Orden Exponencial δ_0 cuando x trende a infinito.

Intuitivamente, una función $f(x)$ de este tipo crece más lentamente que $Me^{\sigma_0 x}$.

Al satisfacerse las condiciones i) y ii), la integral

$$g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx = \int_0^{\infty} f(x) e^{-isx} dx, \quad (3)$$

existe para todos los números $s = \lambda + i\mu$ tales que $M < \lambda_0$, es decir, en el semiplano limitado por la recta $\text{Im } s = -\lambda_0$ y representa a la transformada de Fourier de la función $f(x)e^{Mx}$.

Definición: Sea $f(x)$ una función, se define la Transformación de Laplace (Función transformada de Laplace, o simplemente Transformada de Laplace) de f para $x > 0$, $s \in \mathbb{R}$, mediante la función

$$\Phi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx,$$

denotada también por $\mathcal{L}\{f\}$, o por $F(s)$, si esto no cause confusión con la Transformada de

Fueris.

Observación: De manera más general, la transformada de Laplace para una función f se define como en (3); pero para nuestros propósitos de aplicación inmediata no será necesaria esta generalidad.

Cada transformada posee varias propiedades, éstas son similares a las que poseen otras transformadas, utilizaremos a la transformada de Laplace para ilustrar este hecho.

Una necesidad inicial consiste en saber a qué tipo de funciones es aplicable una transformación.

Teorema: Sea $f(x)$ continua a pedazos en cada intervalo finito $0 \leq x \leq N$ y de orden exponencial ρ cuando x tiende a infinito para $x > N$.

Entonces la transformada de Laplace existe para $s > \rho$.

Demostación:

$$\text{Sea } N > 0, \quad \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_0^N e^{-sx} f(x) dx + \int_N^{\infty} e^{-sx} f(x) dx.$$

La primera integral del miembro derecho existe por un resultado de cálculo que nos dice que una función continua a pedazos en $[\alpha, \beta]$ es integrable en este intervalo.

$$\begin{aligned} \text{Notemos que} \quad \left| \int_N^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \right| &\leq \int_N^{\infty} e^{-sx} |f(x)| dx \\ &\leq \int_N^{\infty} e^{-sx} M e^{\delta x} dx \\ &= M \int_N^{\infty} e^{(\delta - s)x} dx \end{aligned}$$

Si $\delta - s < 0$, la última integral converge $\forall x > N$.

Así la transformada de Laplace para $f(x)$ existe para $s > \delta$.

En relación con las transformadas (en especial, la de Laplace), el hecho más importante es el siguiente:

Tenemos: La Transformada de Laplace es una función inyectiva.

Demostración: Sean $f(x)$, $g(x)$ tales que existen sus transformadas de Laplace $F(s)$, $G(s)$ respectivamente

Debemos demostrar que si $F(s) = G(s)$, entonces $f(x) = g(x)$, si $f \neq g$ son funciones continuas.

Tenemos que

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} g(x) dx = G(s), \quad \forall x$$

$$\text{Entonces} \quad \int_0^{\infty} e^{-sx} [f(x) - g(x)] dx = 0$$

$\therefore f(x) = g(x)$, en casi todos los puntos.

Este resultado nos dice además que existe una función inversa para la Transformada de Laplace. Este muy famoso teorema se conoce como de Inversión de Laplace, con esto podemos garantizar los resultados obtenidos en las aplicaciones.

Este hecho está previsto además por la Transformación de Fourier.

Teorema: (De Inversión Compleja).

Sea $f(x)$ una función cuya transformada de Laplace exista

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

Entonces $L^{-1}\{F(s)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sx} F(s) ds$; $x > 0$.

Aquí, γ representa a una recta vertical en el plano complejo que está a la derecha de todas las singularidades de $F(s)$ como única restricción.

Demostración:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{sx} F(s) ds &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{sx} \int_0^{\infty} e^{-s'x'} f(x') dx' ds \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} \int_0^{\infty} e^{s(x-x')} f(x') dx' ds \end{aligned}$$

Sea $s = \gamma + iy$, entonces, lo último equivale a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{\gamma x} \int_0^T \int_{-T}^{\infty} e^{i\gamma(x-x')} \left[e^{-\gamma x'} f(x') \right] dx' dy$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{\gamma x} \left[2\pi e^{-\gamma x} f(x) \right] & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sx} F(s) ds = f(x) , \text{ si } x \geq 0.$$

Hemos utilizado la Fórmula Integral de Fourier, con el hecho de que $e^{-\gamma x'} f(x')$ es absolutamente integrable en $(0, \infty)$, es decir $\int_0^{\infty} e^{-\gamma x'} |f(x')| dx'$ converge; pero esto es cierto, ya que f es de orden exponencial γ cuando $x' \rightarrow \infty$.

En la práctica es muy conveniente calcular la Transformada de Laplace para algunas funciones, y a partir de ellas formar la Transformada de Laplace o la Inversa para funciones más complicadas, a la manera del cálculo.

También es usual utilizar letras minúsculas

para denotar funciones y reservar las mayúsculas para sus transformadas.

Propiedad: La Transformada de Laplace y su Inversa son operadores lineales.

Demostración:

i) Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$; $f_1(x), \dots, f_n(x)$, funciones cuyas transformadas $F_1(s), \dots, F_n(s)$ existan.

$$L\{a_1 f_1(x) + \dots + a_n f_n(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} \{a_1 f_1(x) + \dots + a_n f_n(x)\} dx$$

$$= a_1 \int_0^{\infty} e^{-sx} f_1(x) dx + \dots + a_n \int_0^{\infty} e^{-sx} f_n(x) dx$$

$$= a_1 F_1(s) + \dots + a_n F_n(s).$$

ii) De la parte i)

$$\begin{aligned} L^{-1}\{a_1 F_1(s) + \dots + a_n F_n(s)\} &= a_1 f_1(x) + \dots + a_n f_n(x) \\ &= a_1 L^{-1}\{F_1(s)\} + \dots + a_n L^{-1}\{F_n(s)\} \end{aligned}$$

Propiedad: Sea $f(x)$ continua en cada intervalo $0 \leq x \leq N$ y de orden exponencial ρ cuando $x \rightarrow \infty$

para $t > N$, $f'(x)$ continua a pedazos en cada intervalo $0 \leq x \leq N$.

Entonces $L \{ f'(x) \} = s L \{ f(x) \} - f(0)$, para $s > \gamma$.

Demonstración:

$$\begin{aligned} L \{ f'(x) \} &= \int_0^{\infty} e^{-sx} f'(x) dx \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-sx} f'(x) dx. \end{aligned}$$

Sean $x_1, \dots, x_n \in [0, A]$ puntos en donde $f'(x)$ es discontinua, Así que:

$$\int_0^A e^{-sx} f'(x) dx = \int_0^{x_1} e^{-sx} f'(x) dx + \dots + \int_{x_n}^A e^{-sx} f'(x) dx.$$

Integrando por partes cada integral del segundo miembro, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-sx} f'(x) dx &= e^{-sx} f(x) \Big|_0^{x_1} + \dots + e^{-sx} f(x) \Big|_{x_n}^A + s \left[\int_0^{x_1} e^{-sx} f(x) dx + \dots + \int_{x_n}^A e^{-sx} f(x) dx \right] \\ &= e^{-sA} f(A) - f(0) + s \int_0^A e^{-sx} f(x) dx. \end{aligned}$$

Lo último se debe a la continuidad de f .

Ahora, tomando el límite cuando $A \rightarrow \infty$,

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = s \mathcal{L}\{f(x)\} - f(0), \text{ para } s > \delta.$$

Lo siguiente es una generalización, y, en demostración se omite, pues puede construirse por inducción a partir de lo visto.

Corolario: Sean $f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ continuas y de orden exponencial δ cuando $t \rightarrow \infty$, y $f^{(n)}(x)$ continua a pedazos, para cada intervalo $0 \leq x \leq N$.
Entonces

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} = s^n \mathcal{L}\{f(x)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

El resultado equivalente a la última propiedad para la transformación de Fourier es el siguiente.

Propiedad: Si f y f' son absolutamente continuas en todo intervalo finito, se tiene

$$F[f'] = i\lambda F[f]$$

Continuaremos con las propiedades de la Transformación de Laplace.

Propiedad: Si $L \{ f(x) \} = F(s)$

Entonces $L \{ x f(x) \} = -F'(s)$.

Demostración:

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx,$$

$$F'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} e^{-sx} f(x) dx$$

$$= - \int_0^{\infty} e^{-sx} [x f(x)] dx$$

$$= -L \{ x f(x) \}.$$

Corolario: Si $L \{ f(x) \} = F(s)$

Entonces $L \{ x^n f(x) \} = (-1)^n F^{(n)}(s), n \in \mathbb{N}$.

Propiedad: Si $L \{f(x)\} = F(s)$ existe para $s > a \geq 0$.

Entonces, para toda constante c

$$L \{e^{cx} f(x)\} = F(s-c) ; \quad s > a+c.$$

Demostración:

$$L \{e^{cx} f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{cx} f(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(s-c)x} f(x) dx$$

$$= F(s-c).$$

Los siguientes resultados se obtienen al aplicar la inversa a los resultados recién obtenidos, así que las demostraciones son directas y se omiten.

Propiedad: Si $L^{-1} \{F(s)\} = f(x)$

Entonces

$$i) L^{-1} \{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n x^n f(x)$$

$$ii) L^{-1} \{sF(s)\} = f'(x), \text{ aquí}$$

se requiere además que $f(0) = 0$.

$$\text{iii) } \mathcal{L}^{-1} \{ F(s-c) \} = e^{cx} f(x).$$

Un método para obtener la Inversa de Laplace se considera en seguida, y es muy útil cuando tenemos un producto de funciones.

Definición: Sean $f(x)$, $g(x)$ funciones, se define la función

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_0^x f(x-x')g(x')dx' = \int_0^x f(x')g(x-x')dx'$$

como la convolución de f y g . Las integrales que aparecen se denominan de Convolución.

A partir de la definición, las siguientes propiedades de la convolución de dos funciones son inmediatas.

Propiedad:

$$\text{i) } f * g = g * f$$

$$\text{ii) } f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$$

$$\text{iii) } (f * g) * h = f * (g * h)$$

$$\text{iv) } f * 0 = 0.$$

Esta operación definida nos permite el siguiente resultado.

Teorema: Si $L\{f(x)\} = F(s)$, $L\{g(x)\} = G(s)$.

Entonces $H(s) = L\{h(x)\} = F(s)G(s)$,

donde h es la convolución de f y g .

Demstración:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\xi} f(\xi) d\xi, \quad G(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\eta} g(\eta) d\eta,$$

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\xi} f(\xi) d\xi \int_0^{\infty} e^{-s\eta} g(\eta) d\eta,$$

El integrando de la primera integral es independiente de la variable de integración de la segunda, así que

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} g(\eta) d\eta \int_0^{\infty} e^{-s(\xi+\eta)} f(\xi) d\xi$$

hagamos los siguientes cambios de variable

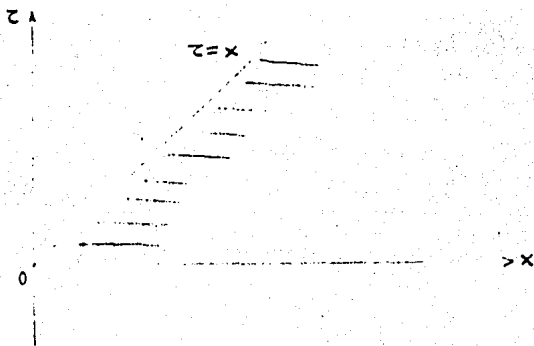
Sea: $x = \xi + \eta$, η fija

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} g(\eta) d\eta \int_{\eta}^{\infty} e^{-s\xi} f(x-\eta) d\xi$$

Sea $z = \eta$

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} g(z) dz \int_z^{\infty} e^{-s\xi} f(z-\xi) d\xi$$

Esta integral se calcula sobre la región rayada del plano xz



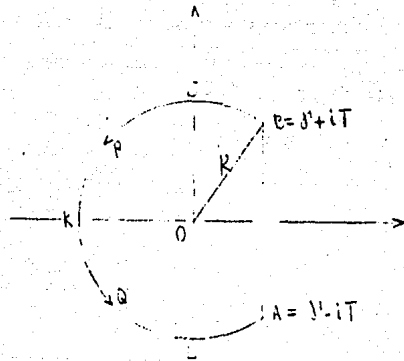
considerando que puede invertirse el orden de integración, nos queda

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^{\infty} e^{-s\xi} d\xi \int_0^{\xi} f(\xi-z) g(z) dz \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s\xi} h(\xi) d\xi \end{aligned}$$

El teorema de Convención se enuncia exactamente igual para la Transformación de Fourier.

En algunas ocasiones es necesario calcular la inversa de Laplace de manera directa, para ello se utiliza la integral de contorno

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{sx} F(s) ds$$



donde C es el contorno de Bromwich que comprende la recta AB y el arco $BJKLA$ de un círculo de radio R con centro en el origen.

De la gráfica es claro que $T = \sqrt{R^2 - \sigma^2}$

Ahora,

$$f(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{R-iT}^{R+iT} e^{sx} F(s) ds$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \left\{ \oint_{\Gamma} e^{sx} F(s) ds - \int_{\Gamma} e^{sx} F(s) ds \right\},$$

donde Γ es el arco BJKLA.

Los resultados siguientes facilitan esta técnica.

El lema siguiente puede demostrarse considerando que

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4,$$

donde $\Gamma_1 = \text{arc BJ}$, $\Gamma_2 = \text{arc JPK}$, $\Gamma_3 = \text{arc KQL}$,

$$\Gamma_4 = \text{arc LA}.$$

aquí omitimos la demostración.

Lema: Si Γ es el arco BJKLA de un círculo de radio R , y existen $k > 0$, M constantes, tales que

$$|F(s)| < \frac{M}{R^k},$$

Entonces

2-64

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} e^{sx} F(s) dx = 0$$

Teorema: Si las únicas singularidades de $F(s)$ son polos que están a la izquierda de la recta $s = \gamma$, para alguna constante γ , y existen $k > 0$, M constantes tales que

$$|F(s)| < \frac{M}{R^k}$$

Entonces

$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} =$ Suma de Residuos de $e^{sx} F(s)$
en todos los polos de $F(s)$.

Demostración:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sx} F(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{sx} F(s) ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{sx} F(s) ds$$

donde C es el contorno de Bromwich y

Γ es el arco BJKLA.

El teorema del Residuo nos asegura que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sx} F(s) ds = \text{Suma de Residuos de } e^{sx} F(s) \text{ en todos los polos de } F(s) \text{ dentro de } C.$$

Así

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{R-iT}^{R+iT} e^{sx} F(s) ds = \text{Suma de Residuos de } e^{sx} F(s) \text{ en todos los polos de } F(s) \text{ dentro de } C - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{sx} F(s) ds.$$

Tomando el límite cuando $R \rightarrow \infty$ y utilizando el lema anterior, tenemos concluida la demostración.

Capítulo III.

La Ecuación de Primer Orden.

La idea central de este capítulo radica en lograr, mediante un cambio de coordenadas, la transformación de una EDP de primer orden en un sistema de EDO. Esto proporciona una solución para la EDP original en términos de la Transformación.

Buscando la unicidad de la solución, se introducen condiciones iniciales, sugerido esto por la teoría de los EDO. Se plantea el problema de Cauchy y se proponen las condiciones que garantizan esta unicidad.

Es conveniente mencionar aquí que este método no es extensible a ecuaciones de mayor orden, ni a sistemas de primer orden.

por infortunio.

Se inicia con la ecuación lineal, se continúa con la cuasilineal y se conduce con la general, tratando los dos últimos casos con ideas que se presentan en la ecuación lineal. Para la ecuación lineal se introduce el concepto de curva característica en \mathbb{R}^2 , por ejemplo, este mismo concepto equivale en la ecuación no lineal al denominado soporte de banda característica en \mathbb{R}^3 .

Iniciaremos con la ecuación lineal de primer orden, en este caso y en los sucesivos, el aspecto geométrico será de gran ayuda.

Se busca una función $u(x, y)$ que satisfaga la Ecuación Diferencial Parcial de Primer Orden Lineal

$$a u_x + b u_y + c u = d, \quad (1)$$

donde a, b, c y d son funciones continuas en alguna región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y que dependen de (x, y) . A la función Solución $u(x, y)$ se le llama también Superficie Integral de (1). Este nombre se debe a que esta solución puede pensarse como una superficie $z = u(x, y)$ en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Una ecuación lineal tiene la propiedad siguiente: Dadas dos soluciones u_1 y u_2 de la Ecuación Homogénea Asociada

$$a u_x + b u_y + c u = 0$$

se tiene que toda combinación lineal

$$u = \alpha u_1 + \beta u_2$$

3-4

es también solución de la homogénea.

Si tomamos $v = (a, b)$, y reescribimos (1)

como

$$v \cdot \nabla u = d - cu$$

obtenemos una interesante geometría de la situación: Estamos trabajando en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Tomemos $P_0 = (x_0, y_0)$. $v \cdot \nabla u$ en la ecuación anterior corresponde a la tasa de crecimiento de la función u en el punto P_0 en la dirección v .

Consideremos el campo vectorial continuo

$$F = a_i + b_j$$

donde i, j son los vectores unitarios canónicos.

Las líneas vectoriales de este campo, líneas cuyas tangentes tienen en cada punto una dirección que coincide con F en ese punto, se determinan por la condición de paralelismo entre $T = i dx + j dy$, el vector dirigido por la tangente de las líneas buscadas, y el vector F del

Campo, es decir, debemos tener

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}.$$

Mediante la regla de la Cadena, definimos a la familia de Curvas Características de la ecuación (1), como el conjunto de curvas que satisfacen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a},$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a \\ \frac{dy}{dt} = b \end{cases} \quad (2)$$

Aquí estamos involucrando a t para parametrizar a la familia de curvas características.

Tomemos una curva $\gamma = (x(t), y(t))$ que satisfaga el sistema (2); ésta existe si $a, b \in C^1(\Omega)$.

Derivando $u = u(x, y) = u(x(t), y(t))$

se obtiene

$$\frac{du}{dt} = a u_x + b u_y.$$

Con lo que nuestro problema (1) se transforma ahora en

$$\frac{du}{dt} + cu = d, \quad (3)$$

3-6

donde c y d son funciones de $(x(t), y(t))$.

$u(x, y)$ puede considerarse como la unión en el espacio de las curvas dadas por soluciones de la ecuación (3), escogiendo una solución para cada curva característica.

El Problema de Cauchy.

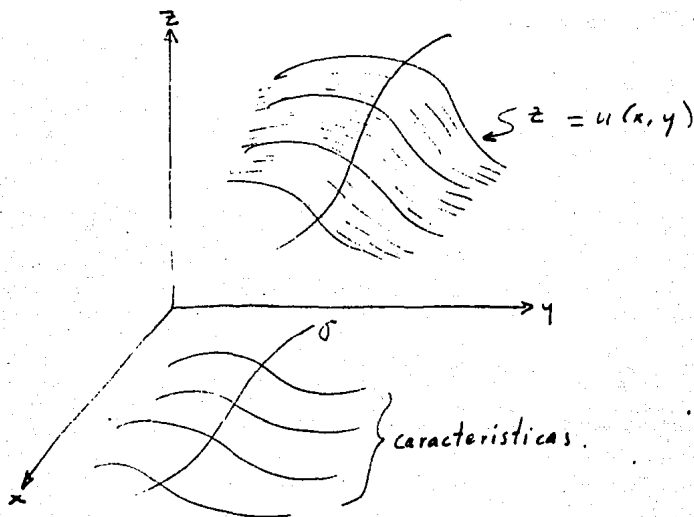
Para que (3) tenga una solución única para cada curva característica, es necesario tener una condición inicial $u(t_0) = u_0$.

Para nuestra EDP, esto significa que es necesario especificar el valor de u en un punto de cada curva característica, lo cual nos sugiere tomar una curva $\sigma(s)$ en el plano (x, y) y especificar los valores de u en esa curva: $u = f(s)$ en $\sigma(s)$.

Así, tenemos planteado el problema de resolver una EDP lineal de primer orden con con-

diciones iniciales o Problema de Cauchy.

$$\begin{cases} au_x + bu_y + cu = d \\ u = f(s) \text{ en } \sigma = \sigma(s). \end{cases}$$



si: $\sigma(s)$, una curva de valores iniciales, corta a cada curva característica $\sigma'(t)$ en un solo punto, no habrá problemas para especificar los valores que u tomará en σ .

Nota: Hemos parametrizado a las curvas características con t , y a la curva de valores iniciales con s , para evitar confusiones.

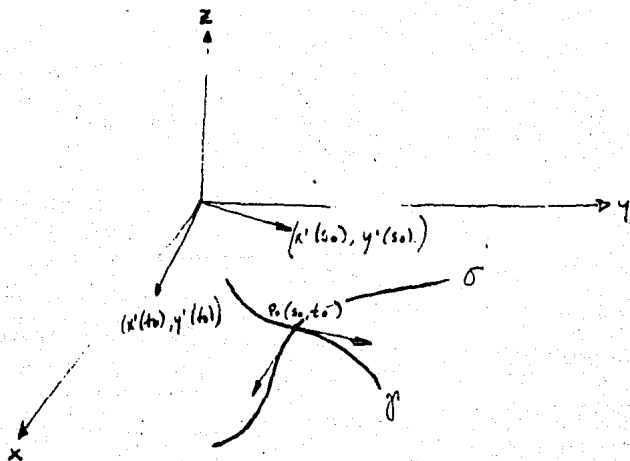
Consideremos (s_0, t_0) , valores para los cuales se intersectan σ' y σ , es decir

$$(x(t_0), y(t_0)) = (x(s_0), y(s_0))$$

Las tangentes de ambas curvas en este punto están dadas por

$$(x'(t_0), y'(t_0)) \quad \text{y} \quad (x'(s_0), y'(s_0))$$

respectivamente.



Debemos evitar que una curva de valores iniciales toque a una característica en más de un punto (para nuestros propósitos de unicidad). Para esto necesitamos que los vectores tangentes sean no paralelos, es decir, basta pedir

$$\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \neq \frac{y'(s_0)}{x'(s_0)} \quad (4)$$

Sin perder generalidad, podemos asumir que $t_0 = 0$ (siempre se puede hacer una traslación).

El problema de Cauchy

$$\begin{cases} au_x + bu_y + cu = d, \\ u = f(s) \text{ en } \delta = \delta(s) \end{cases}$$

se transforma en:

Hallar funciones $u(t)$, $x(t)$, $y(t)$ que satisfagan

$$\frac{du}{dt} + cu = d, \quad \frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b$$

con las condiciones iniciales

$$u(s, 0) = u_0(s), \quad x(s, 0) = x_0(s), \quad y(s, 0) = y_0(s).$$

De donde obtendremos soluciones únicas:

$$u = U(s, t), \quad x = X(s, t), \quad y = Y(s, t).$$

Para interpretar nuestra solución u como se pedía inicialmente, esto es, como función de (x, y) se debe considerar la transformación

$$\Pi = \begin{cases} x = X(s, t) \\ y = Y(s, t) \end{cases}$$

Si Π es invertible, nuestro problema está solucionado. Esto sucede si

$$\begin{vmatrix} X_s & X_t \\ Y_s & Y_t \end{vmatrix} \neq 0$$

en particular para $(x(s,0), y(s,0))$ en σ .

Pero esta condición no es sino (4).

Se obtiene así la solución de la EDP con valores iniciales.

Concluiremos esta sección con un ejemplo.

Resolvamos el siguiente Problema de Cauchy:

$$Xu_x + yU_y - 2U = y, \quad u = s^2 \text{ en } (s,1).$$

Las ecuaciones de las características son

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = y,$$

cuyas soluciones son

$$x(t) = c_1 e^t, \quad y(t) = c_2 e^t;$$

La curva de valores iniciales es

$$x(s,0) = s; \quad y(s,0) = 1,$$

Con lo que

$$X(s,t) = se^t, \quad Y(s,t) = e^t.$$

3-11

Para ver que

$$\Pi = \begin{cases} x = se^t & = X(s,t) \\ y = e^t & = Y(s,t) \end{cases}$$

es invertible, calculamos

$$\begin{vmatrix} X_s & X_t \\ Y_s & Y_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & se^t \\ 0 & e^t \end{vmatrix} \neq 0.$$

La inversión está dada por

$$\Pi^{-1} = \begin{cases} t = \log y & = T(x,y) \\ s = \frac{x}{y} & = S(x,y) \end{cases}$$

Ahora, la solución de

$$\frac{du}{dt} - 2u = e^t$$

es $u(t) = -e^t + ce^{2t}$;

Pero tenemos la condición

$$u = s^2 \text{ en } (s,1),$$

$$u(s,0) = s^2$$

$$= c-1, \quad \therefore c = s^2 + 1$$

Así

3-12

$$V(s,t) = -e^t + (s^2 + 1)e^{2t}.$$

Utilizando la fórmula de inversión nos queda

$$u(x,y) = x^2 + y^2 - 4$$

como solución final.

Comprobar que nuestra solución es correcta
es un ejercicio sencillo.

§2. La Ecuación Cuasilineal

3-13

Consideremos la Ecuación Diferencial Parcial de Primer Orden Cuasilineal

$$a u_x + b u_y = c, \quad (1)$$

donde a, b, c son funciones de (x, y, u) .

Nuevamente, denominaremos Superficies Integrales a las soluciones $u(x, y)$ de (1) y las representaremos por $z = u(x, y)$.

Las funciones a, b, c definen un campo vectorial en alguna región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Como $(u_x, u_y, -1)$ constituyen números directores de la normal a la superficie $z = u(x, y)$, se observa que (1) resento como

$$(a, b, c) \cdot (u_x, u_y, -1) = 0$$

es precisamente la condición de que la normal de una superficie integral sea perpendicular en todo punto a la dirección (correspondiente a este punto) del vector (a, b, c) .

Así, las superficies integrales, son superficies que en cada punto son tangentes a las direccio-

nes características.

3-14

Asociaremos al campo de direcciones características con números directores (a, b, c) , una familia de Curvas Características, las cuales son tangentes al campo de direcciones en todo punto.

A lo largo de una curva característica se satisface

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c}.$$

Si utilizamos la regla de la cadena, y el parámetro t podemos reescribir

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b, \quad \frac{dz}{dt} = c.$$

Con $a, b, c \in C^1(\Omega)$ podemos lograr una solución única para este sistema autónomo, considerando condiciones iniciales.

El resultado siguiente nos proporciona la conformación de una superficie integral para (1).

Teorema: Una superficie $S: z = u(x, y)$ es la unión de curvas características, si y sólo si S es una superficie integral.

Demostración: Sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S: z = u(x, y)$ superficie integral.

Sea γ una curva característica que pasa por P_0 . Demostraremos que S contiene totalmente a γ .

Tomemos $\beta = (x(t), y(t), z(t))$ solución del sistema

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b, \quad \frac{dz}{dt} = c,$$

para la cual $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ para $t = t_0$.

De β y S formemos la expresión

$$U(t) = z(t) - u(x(t), y(t)),$$

Es claro que $U(t_0) = 0$.

Derivando respecto de t , se obtiene

$$\frac{d}{dt} U(t) = \frac{dz}{dt} - u_x(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} - u_y(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}$$

$$= c(x, y, z) - u_x(x, y) a(x, y, z) - u_y(x, y) b(x, y, z)$$

Esto puede considerarse como una EDO para $V(t)$ (utilizando la parametrización de γ):

$$\frac{dV}{dt} = c(x, y, V+u(x, y)) - u_x(x, y)a(x, y, V+u(x, y)) - u_y(x, y)b(x, y, V+u(x, y)) ;$$

$V \equiv 0$ es solución particular de esta ecuación, ya que $u(x, y)$ satisface la ecuación (1).

Dada la unicidad de la solución, ésta es la única solución que se anula para $t = t_0$.

Así, la función $V(t)$ se anula idénticamente, lo cual significa que $\gamma \in S$.

Ahora, si a través de todo punto P de alguna superficie S pasa una curva característica γ contenida en S , la tangente a γ en P necesariamente está en el plano tangente de S en P .

Como la tangente a γ tiene la dirección característica, la normal a S en P es perpendicular a la dirección característica, lo cual hace que S sea una superficie integral.

Corolario: Si dos superficies integrales tienen

un punto en común, entonces se intersecan a lo largo de la curva característica que pasa por P.

Hasta aquí hemos obtenido una descripción de la solución general de (1):

La superficie integral $S: z = u(x, y)$ de (1) es la unión de las curvas características de (1).

El Problema de Cauchy

Una manera sencilla de seleccionar una solución particular $u(x, y)$ del conjunto infinito de soluciones de (1), consiste en dar una curva

Γ en \mathbb{R}^3 totalmente contenida en la superficie³⁻¹⁸
integral.

Representemos a Γ por

$$x = f(s), \quad y = g(s), \quad z = h(s).$$

Trataremos ahora de encontrar una solución

$u(x, y)$ de (1) tal que

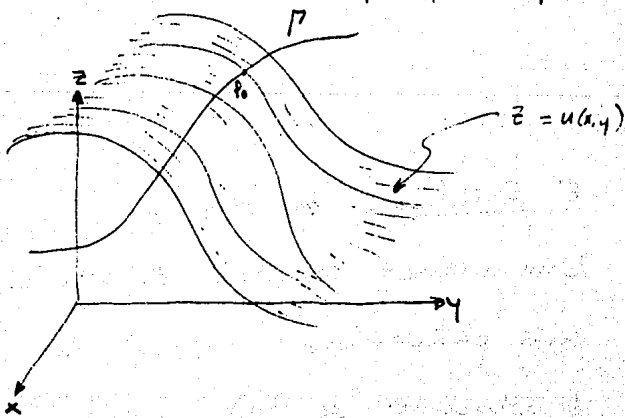
$$h(s) = u(f(s), g(s)), \quad \forall s.$$

Este problema se denomina Problema de Cauchy para la Ecuación Cuasilineal de Primer orden.

Tomemos Γ de clase C^1 en una vecindad de s_0 .

$$\text{Sea } P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (f(s_0), g(s_0), h(s_0)).$$

Consideremos a, b, c de clase C^1 en una vecindad de P_0 . La superficie integral buscada consistirá de las curvas características que pasan por Γ .



Sea $x = X(s, t)$, $y = Y(s, t)$, $z = Z(s, t)$

Solución del sistema de características de (1) que se reduce a $f(s)$, $g(s)$, $h(s)$ para $t=0$.

Del teorema de existencia y unicidad de ecuaciones ordinarias se sigue que existe un conjunto único de funciones X, Y, Z de (s, t) de clase C^1 en una vecindad de $(s_0, 0)$ que satisfacen

$$X_t = a(X, Y, Z), Y_t = b(X, Y, Z), Z_t = c(X, Y, Z)$$

$\forall (s, t)$, y también satisfacen las condiciones

$$X(s, 0) = f(s), Y(s, 0) = g(s), Z(s, 0) = h(s).$$

Estas funciones X, Y, Z representan una superficie $S: z = u(x, y)$ parametrizada por (s, t) .

Nuestra solución ha sido obtenida en términos de (s, t) .

Como $x_0 = X(s_0, 0)$, $y_0 = Y(s_0, 0)$,

El teorema de la función implícita asegura la existencia de soluciones

$$s = S(x, y), t = T(x, y)$$

de $x = X(s, t)$, $y = Y(s, t)$

de clase C^1 en una vecindad de (x_0, y_0) y que satisfacen

$$s_0 = S(x_0, y_0), \quad 0 = T(x_0, y_0),$$

siempre que

$$J = \begin{vmatrix} X_s(s_0, 0) & Y_s(s_0, 0) \\ X_t(s_0, 0) & Y_t(s_0, 0) \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} f'(s_0) & g'(s_0) \\ a(x_0, y_0, z_0) & b(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix}$$

no se anule.

Nuestra solución tiene ahora la forma deseada.

$$z = u(x, y) = Z(S(x, y), T(x, y)).$$

La condición de que el Jacobiano anterior no se anule garantiza la existencia local de la solución del problema de Cauchy.

Veamos ahora que sucede ahora con la unicidad de esta solución:

Toda superficie integral que contiene a Π , contiene a todas las curvas características que pasan por Π , es decir, contiene a la superficie

parametrizada por X, Y, Z , y por lo tanto, localmente, ésta coincidirá con la superficie integral.

Observemos que el tratamiento del caso cuasilineal es una generalización del correspondiente al lineal. Las curvas características para el caso lineal se reducen a "proyecciones" en el plano xy de las curvas características.

§3. La Ecuación General

La Ecuación Diferencial Parcial de Primer Orden General tiene la forma

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Es usual reescribir esto como

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad (1)$$

donde $z = u(x, y)$, $p = u_x(x, y)$, $q = u_y(x, y)$.

Trataremos de reducir el problema de hallar una superficie integral para (1) mediante la resolución de un sistema de ecuaciones ordinarias.

La ecuación (1) puede verse como una relación entre las coordenadas (x, y, z) de un punto de la superficie integral y la dirección de la normal a la superficie integral en este punto, descrita por los números directores $(p, q, -1)$.

Una superficie integral que pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ tiene plano tangente

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0)$$

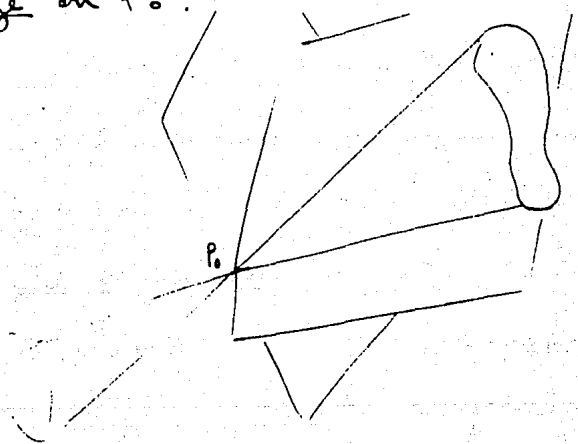
para el cual los números directores $(p, q, -1)$

de la normal satisfacen

$$F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0.$$

Así, la ecuación restringe las posibles tangentes de una superficie integral que pasa por P_0 a una familia monoparamétrica.

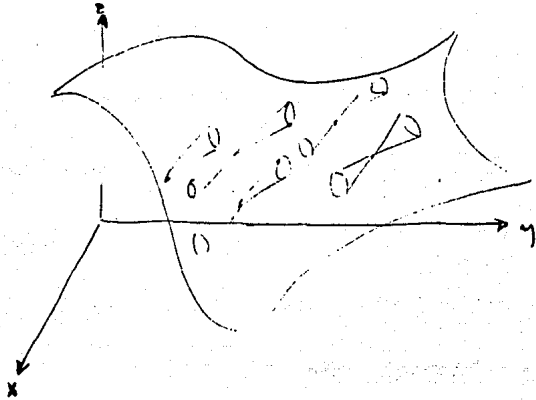
De manera general, de tal familia de planos que pasa por P_0 puede esperarse que "envuelva" a un cono con vértice en P_0 , llamado Cono de Monge en P_0 .



Cada posible plano tangente toca al cono de Monge a lo largo de cierta generatriz. De esta manera (i) define un campo de conos.

Una superficie $z = u(x, y)$ es integral si en cada uno de sus puntos toca al cono con vértice en

P_0 . En este caso, la generatriz a lo largo de la cual el plano tangente toca al cono de Monge define una dirección sobre la superficie.



Estas direcciones "Características" en el caso de una ecuación cuasilineal degeneran en una recta

que pasa por P_0 y tiene dirección (a, b, c) .

El concepto de Envolverte de una familia de superficies

$S_\lambda: z = G(x, y, \lambda)$, dependientes de un parámetro λ , es aquí de la mayor utilidad:

Al combinar la ecuación

$$z = G(x, y, \lambda)$$

con la siguiente

$$0 = G_\lambda(x, y, \lambda)$$

se obtiene una curva γ_λ , para λ fija. 3-25

La envolvente E es la unión de estas curvas.

Su ecuación se obtiene resolviendo

$$G_\lambda(x, y, \lambda) = 0, \text{ para } \lambda = g(x, y)$$

y substituyendo, así:

$$z = G(x, y, g(x, y))$$

La envolvente E toca a la superficie S_λ a lo largo de la curva γ_λ , ya que, para un punto (x, y, z) de γ_λ se tiene $g(x, y) = \lambda$.

Para λ fija podemos reescribir las ecuaciones anteriores en forma diferencial

$$dz = G_x dx + G_y dy$$

$$0 = G_{\lambda x} dx + G_{\lambda y} dy$$

Estas ecuaciones se satisfacen a lo largo de la curva γ_λ .

Regresemos a nuestro problema principal. La ecuación del plano tangente

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0)$$

define una familia monoparamétrica de planos para (x_0, y_0, z_0) fijo.

Podemos ahora elegir a p como el parámetro y pensar a q como función de p ($q(p)$). Esto debido a la relación

$$F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0.$$

La generatriz a cuyo largo el plano toca al cono de Monge satisface

$$\begin{aligned} dz &= p dx + q dy \\ 0 &= dx + \frac{dq}{dp} dy \end{aligned}$$

como $F_p + \frac{dq}{dp} F_q = 0$

tenemos $\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q}$.

Sobre una superficie integral conocida

$S: z = u(x, y)$, las ecuaciones

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q}, \quad dz = p dx + q dy$$

definen un campo de direcciones. Las curvas características de la superficie integral satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones or-

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F_p \\ \frac{dy}{dt} = F_q \\ \frac{dz}{dt} = pF_p + qF_q \end{cases} \quad (2)$$

Hasta aquí tenemos un sistema de tres ecuaciones para cinco funciones de t , (x, y, z, p, q) .

Derivando $F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = 0$ sucesivamente, tenemos

$$F_x + u_x F_z + u_{xx} F_p + u_{xy} F_q = 0$$

$$F_y + u_y F_z + u_{xy} F_p + u_{yy} F_q = 0$$

y observando que

$$\frac{dp}{dt} = u_{xx} \frac{dx}{dt} + u_{xy} \frac{dy}{dt}$$

$$= u_{xx} F_p + u_{xy} F_q$$

$$= -F_x - u_x F_z,$$

y que análogamente

$$\frac{dq}{dt} = -F_y - u_y F_z$$

se obtiene un sistema autónomo de cinco ecu-

ciones ordinarias para cinco funciones de t .

Esta formulación no requiere del conocimiento de la superficie integral.

La expresión $F(x, y, z, p, q)$ es una Integral de este sistema, es decir F es constante a lo largo de cualquier solución, para ver esto, derivemos F respecto de t .

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} + F_p \frac{dp}{dt} + F_q \frac{dq}{dt} \\ &= F_x F_p + F_y F_q + F_z (pF_p + qF_q) \\ &\quad + F_p (-F_x - pF_z) + F_q (-F_y - qF_z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

A lo largo de cualquier trayectoria del sistema tendremos $F=0 \forall t$, si $F=0$ para alguna solución particular.

Llamaremos al sistema obtenido

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = F_p \\ \frac{dy}{dt} = F_q \\ \frac{dz}{dt} = pF_p + qF_q \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{dp}{dt} = -F_x - pF_z \\ \frac{dq}{dt} = -F_y - qF_z \end{array} \quad (3)$$

y a la ecuación $F(x, y, z, p, q) = 0$, conjuntamente, Ecuaciones Características.

Llamaremos a una quinteta (x, y, z, p, q) , un Elemento Plano. Un elemento (plano) se interpreta geométicamente como un punto (x, y, z) por el cual pasa un plano con ecuación

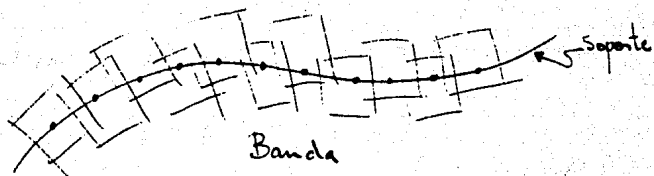
$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y),$$

$(p, q, -1)$ son los números directores de la normal de este plano.

Un elemento que satisface (1) se llama Característico.

Una familia monoparamétrica de elementos

$(x(t), y(t), z(t), p(t), q(t))$ se llama Banda si todos los elementos son tangentes a la curva dada por $(x(t), y(t), z(t))$. Esta curva se llama Soporte de la Banda.



En este caso se satisface la llamada Condición de Banda:

$$\frac{dz}{dt} = p \frac{dx}{dt} + q \frac{dy}{dt}$$

Una solución de las ecuaciones características se llama Banda Característica. En una banda característica se satisface, evidentemente, la condición de banda.

Una superficie $z = u(x, y)$ parametrizada mediante (s, t) puede pensarse como consistente de una familia 2-paramétrica de elementos $(x(s, t), y(s, t), z(s, t), p(s, t), q(s, t))$ formada por los puntos de la superficie y sus correspondientes planos tangentes.

Por supuesto que no cualquiera familia 2-paramétrica de elementos forma una superficie.

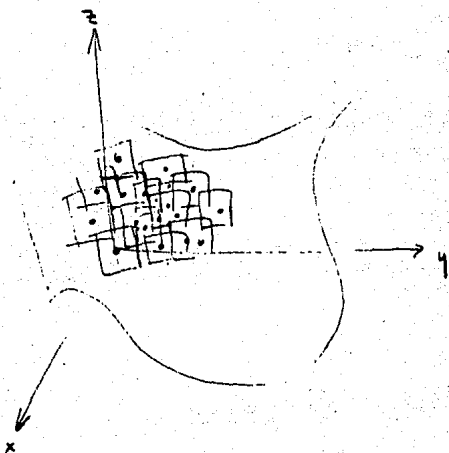
Es necesario, para esto, que se cumpla

$$dz = p dx + q dy$$

para toda la familia, es decir, que se satisfagan las condiciones de banda.

$$\frac{\partial z}{\partial s} = p \frac{\partial x}{\partial s} + q \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = p \frac{\partial x}{\partial t} + q \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Al visualizar un elemento como una pequeña pieza plana que pasa por un punto, los elementos de la familia 2-paramétrica pertenecientes a la superficie parecen acomodarse suavemente, como escamas.



Una banda característica está determinada de manera única, fijando uno de sus elementos z . ¿Porque?

Si un elemento de la banda consiste de un punto P de una superficie integral S , y del plano tangente a S en P , entonces la banda

está formada por la curva característica de S que pasa por P y de los planos tangentes de S a lo largo de la curva.

Si cualquiera otra superficie integral toca en el punto P a S , entonces tal superficie también tocará a S a lo largo de una curva característica. Observemos la analogía existente con el caso cuasilineal.

El sistema (3) describe una propagación de elementos característicos (o de planos tangentes) en una superficie integral, a lo largo de las curvas características.

El Problema de Cauchy

El Problema de Cauchy para la Ecuación Diferencial Parcial General de Primer orden consiste en obtener una superficie integral de

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

que contenga a una curva inicial Γ parametrizada por

$$x = f(s), \quad y = g(s), \quad z = h(s).$$

Esto se logrará pasando por Γ bandas características adecuadas

Si f, g, h son de clase C^1 para s en una vecindad de s_0 , tal que

$$p_0 = (x_0, y_0, z_0) = (f(s_0), g(s_0), h(s_0)),$$

Tenemos que hallar funciones

$$p = \phi(s), \quad q = \psi(s)$$

que satisfagan las condiciones de Banda Característica

$$h'(s) = \phi(s) f'(s) + \psi(s) g'(s)$$

$$F(f(s), g(s), h(s), \phi(s), \psi(s)) = 0$$

Por el teorema de la función Implícita, existen funciones únicas $\phi(s), \psi(s)$ de clase C^1 en una vecindad de s_0 que satisfacen estas últimas ecuaciones y que se reducen a p_0, q_0 para $s = s_0$, esto es

$$h'(s_0) = p_0 f'(s_0) + q_0 g'(s_0)$$

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0,$$

Siempre que las tangentes de las proyecciones

en el plano xy del soporte de la banda característica y de la curva inicial Γ no sean paralelas, es decir

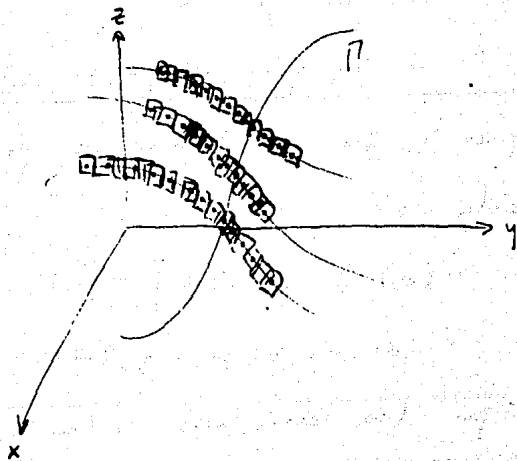
$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \neq 0$$

o equivalentemente

$$\Delta = f'(s_0) F_q(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) - g'(s_0) F_p(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \neq 0.$$

Nuevamente, existe una analogía con los casos lineal y cuasilineal.

Ahora, A través de cada elemento $(f(s), g(s), h(s), \phi(s), \psi(s))$ de Γ podemos hacer pasar una banda característica reducida a tal elemento para $t=0$.



De esta manera determinamos cinco funciones $x = X(s, t)$, $y = Y(s, t)$, $z = Z(s, t)$, $p = P(s, t)$, $q = Q(s, t)$ definidas para $|s - s_0|$ y $|t|$ suficientemente pequeñas que satisfagan para s fija el sistema (3) como funciones de t , y que para $t = 0$ se reduzcan a $f(s)$, $g(s)$, $h(s)$, $\phi(s)$, $\psi(s)$ respectivamente

La relación

$$F(X, Y, Z, P, Q) = 0$$

se cumple idénticamente en (s, t) , ya que se cumple para $t = 0$.

De lo estudiado anteriormente (ϕ_2), debe ser claro que si existe una superficie integral S que pasa por Γ conteniendo al elemento $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, entonces, tal superficie será la unión de los soportes de las bandas características que se intersectan con Γ .

En particular, las tres primeras ecuaciones

$$x = X(s, t), \quad y = Y(s, t), \quad z = Z(s, t)$$

constituyen una representación paramétrica de S .

Probemos ahora que

$$x = X(s,t), \quad y = Y(s,t), \quad z = Z(s,t), \quad p = P(s,t), \quad q = Q(s,t)$$

representa la solución de nuestro problema de Cauchy en forma paramétrica en una vecindad del punto P_0 .

Al obtener $x = X(s,t)$, $y = Y(s,t)$ en términos de (x, y) en una vecindad de (x_0, y_0) se tiene

$$x_0 = f(s_0) = X(s_0, 0), \quad y_0 = g(s_0) = Y(s_0, 0).$$

Como tenemos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} X_s & Y_s \\ X_t & Y_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f' & g' \\ f_t & g_t \end{vmatrix} = \Delta \neq 0,$$

podemos obtener explícitamente la ecuación de la superficie que pasa por Γ :

$$z = Z(s, t) = u(x, y).$$

Como $F(X, Y, Z, P, Q) = 0$, $u(x, y)$ será una superficie integral si podemos demostrar que $p = P(s, t)$ y $q = Q(s, t)$ son u_x y u_y respectivamente (a través de la transformación).

Utilizando la regla de la cadena, determinamos

$$Z_s = u_x X_s + u_y Y_s$$

$$Z_t = u_x X_t + u_y Y_t$$

Para tener $u_x = P(s,t)$, $u_y = Q(s,t)$ nos basta probar únicamente que

$$Z_s = P X_s + Q Y_s$$

$$Z_t = P X_t + Q Y_t$$

Estas últimas dos ecuaciones expresan precisamente que la familia z -paramétrica de elementos $x = X(s,t)$, $y = Y(s,t)$, $z = Z(s,t)$, $p = P(s,t)$, $q = Q(s,t)$ pertenece a una superficie.

La segunda ecuación

$$Z_t = P X_t + Q Y_t$$

es una consecuencia de las ecuaciones (2)

$$\frac{dx}{dt} = F_p, \quad \frac{dy}{dt} = F_q, \quad \frac{dz}{dt} = p F_p + q F_q$$

satisfechas por X, Y, Z, P, Q como funciones de t .

Solo falta verificar la primera ecuación. Para ésto introduzcamos la expresión

$$A(s,t) = Z_s - P X_s - Q Y_s.$$

Es claro que, por lo visto antes

$$A(s,0) = h' - \phi f' - \psi g' = 0.$$

Derivando $A(s,t)$ respecto de t se tiene

$$\begin{aligned} A_t &= Z_{st} - P_t X_s - Q_t Y_s - P X_{st} - Q Y_{st} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} (Z_t - P X_t - Q Y_t) + P_s X_t + Q_s Y_t - Q_t Y_s - P_t X_s \\ &= P_s F_p + Q_s F_q + X_s (F_x + F_z P) + Y_s (F_y + F_z Q) \\ &= \frac{\partial F}{\partial s} - F_z (Z_s - P X_s - Q Y_s) \\ &= -F_z A. \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} A(s,t) &= A(s,0) \exp\left(-\int_0^t F_z dt\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto completa la prueba, pues

$$0 = Z_s - P X_s - Q Y_s$$

$$\Rightarrow Z_s = P X_s + Q Y_s.$$

Capítulo IV

La Ecuación de Segundo Orden.

Utilizando una transformación de Coordenadas, la EDP lineal respecto a sus derivadas de mayor orden se reduce a una de tres formas canónicas posibles, denominadas Elíptica, Parabólica e Hiperbólica.

De cada una de estas tres formas es representante la modelación de un tipo de situación física, a saber, Teoría del Potencial, Teoría del Calor y Teoría de las Ondas, respectivamente.

11. Clasificación.

Estudiaremos en este capítulo a la Ecuación Diferencial Parcial de Segundo Orden.

La Ecuación General de este tipo es de la forma:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

En particular, si tiene la forma

$$a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy} + d = 0$$

se denomina Cuasilineal cuando los coeficientes a, b, c, d dependen de (x, y, u, u_x, u_y) .

Si a, b, c dependen sólo de (x, y) y d depende de (x, y, u, u_x, u_y) se denomina Lineal respecto de las derivadas de mayor orden.

Si la ecuación es lineal respecto de todas las derivadas que aparecen y de la función u , se llama Lineal, su forma es:

$$a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y + f u + g = 0,$$

donde a, b, c, d, e, f, g son funciones de (x, y) .

Para lograr alguna simplificación al problema de resolver el caso lineal respecto a sus derivadas de mayor orden

$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + d = 0 \quad (1)$$

con a, b, c funciones de (x, y) y d función de (x, y, u, u_x, u_y) , que es el único que trataremos en este trabajo, propongamos una transformación invertible de coordenadas

$$\Pi = \begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}.$$

Ahora seleccionaremos a ξ y a η de tal manera que se obtenga una ecuación transformada más sencilla.

Considerando a la función u a través de la transformación Π se obtiene:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2 u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2 u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_{\xi} \xi_{xy} + u_{\eta} \eta_{xy},$$

Substituyendo estos valores en la ecuación (1) y reagrupando se obtiene

$$A u_{\xi\xi} + 2B u_{\xi\eta} + C u_{\eta\eta} + D = 0, \quad (2)$$

aquí.

$$A = a \xi_x^2 + 2b \xi_x \xi_y + c \xi_y^2,$$

$$B = a \xi_x \eta_x + b (\xi_x \eta_y + \eta_x \xi_y) + c \xi_y \eta_y,$$

$$C = a \eta_x^2 + 2b \eta_x \eta_y + c \eta_y^2,$$

y D no depende de las derivadas de segundo orden.

El resultado siguiente será de gran utilidad en la simplificación requerida.

Teorema: $z = \varphi(x, y)$ es una solución de la EDP

$$a z_x^2 + 2b z_x z_y + c z_y^2 = 0 \quad (3)$$

$\iff \varphi(x, y) = C$ es una integral de la EDO

$$a dy^2 - 2b dx dy + c dx^2 = 0 \quad (4)$$

Demostración: Como $z = \varphi(x, y)$ en toda la región en la que φ satisface a (3), se tiene

$$a \left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 - 2b \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right) + c = 0$$

$\varphi(x, y) = C$ será una integral general de (4) si la función y determinada por la relación implícita $\varphi(x, y) = C$ satisface (4).

Sea $y = f(x, C)$ esta función.

Al derivar $\varphi(x, y) = C$ se tiene

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)} \Big|_{y=f(x, C)}$$

se tiene en seguida

$$a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2b \left(\frac{dy}{dx} \right) + c = a \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 - 2b \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right) + c = 0.$$

En particular, esto se satisface para $y = f(x, C)$.

Esto implica que $y = f(x, C)$ satisface (4).

Recíprocamente, sea $\varphi(x, y) = C$ una integral de (4), demostraremos que

$$a \varphi_x^2 + 2b \varphi_x \varphi_y + c \varphi_y^2 = 0, \forall x, y \quad (5)$$

Sea $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto arbitrario en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en la que la ecuación (4) está definida.

Demostremos que en P_0 se satisface (5), para concluir que (5) es una identidad.

Por (x_0, y_0) tracemos una curva integral de (4) haciendo $\varphi(x_0, y_0) = C_0$ (Aquí $y_0 = f(x_0, C_0)$).

Al considerar la curva $y = f(x, C_0)$ tendremos

$$a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2b \left(\frac{dy}{dx} \right) + c = \left[a \left(\frac{-\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 - 2b \left(\frac{-\varphi_x}{\varphi_y} \right) + c \right]_{y=f(x, C_0)} = 0$$

haciendo $x = x_0$ en esta última igualdad, se tiene

$$a \varphi_x^2(x_0, y_0) + 2b \varphi_x(x_0, y_0) \varphi_y(x_0, y_0) + c \varphi_y^2(x_0, y_0) = 0$$

Este resultado es análogo a lo utilizado para resolver una ecuación parcial de primer orden mediante un sistema de ecuaciones ordinarias, visto en el capítulo anterior.

La ecuación

$$a dy^2 - 2b dx dy + c dx^2 = 0$$

denominada Ecuación Característica de la Ecuación

(1) tiene soluciones dadas por

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{b + \sqrt{I}}{a} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{b - \sqrt{I}}{a} \end{aligned} \right\} (6)$$

Aquí, el Indicador I equivale a $b^2 - ac$.

Las integrales generales de este sistema se denominan Características de la Ecuación (1).

Consideremos los casos siguientes:

CASO I) si $I > 0$ en toda una región Ω , entonces los segundos miembros de las ecuaciones (6) son reales y diferentes. Las integrales generales $\psi(x, y) = C_1$ y $\psi(x, y) = C_2$ determinan familias reales de características.

Si tomamos $\xi = \psi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ independientes, tendremos $A = 0$, $C = 0$ en (2), en virtud de la situación simétrica que se aprecia para A y C

La ecuación (2) queda reducida a la forma

$$u_{\xi\eta} = \frac{-D}{2B},$$

re Etiquetando, tendremos

$$u_{\xi\eta} = \Phi; \quad \Phi \text{ es función de } (\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}). \quad (7)$$

Esta forma se denomina Primera Forma Canónica para una Ecuación de Tipo Hiperbólico.

haciendo $\xi = \alpha + \beta, \quad \eta = \alpha - \beta$

es decir, introduciendo nuevas variables α y β

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2}$$

tendremos que

$$u_{\xi} = \frac{1}{2} (u_{\alpha} + u_{\beta})$$

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{4} (u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta})$$

con lo que (7) queda rescrito como

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = 4\Phi,$$

haciendo $\Psi = 4\Phi$, tendremos la Segunda Forma

Canónica para una Ecuación de Tipo Hiperbólico.

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Psi; \quad \Psi \text{ es función de } (\alpha, \beta, u, u_{\alpha}, u_{\beta}).$$

Caso II) Si $I=0$ en una región Ω , las ecuaciones

(6) coinciden y se tiene una integral característica de (1): $\varphi(x, y) = C$.

Tomemos ahora

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y).$$

Con $\eta(x, y)$ una función cualquiera, se pide solamente que sea independiente de $\xi = \varphi(x, y)$.

Al considerar esta elección, como $A=0$, y $b = \sqrt{a} \sqrt{c}$, se tiene

$$\begin{aligned} a \xi_x^2 + 2b \xi_x \xi_y + c \xi_y^2 &= (\sqrt{a} \xi_x + \sqrt{c} \xi_y)^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

de aquí:

$$\begin{aligned} B &= a \xi_x \eta_x + b (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + c \xi_y \eta_y \\ &= (\sqrt{a} \xi_x + \sqrt{c} \xi_y) (\sqrt{a} \eta_x + \sqrt{c} \eta_y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo que la ecuación (2) nos queda transformada así:

$$U \eta = \frac{-D}{C}.$$

Entonces, se denomina Forma Canónica para una

Ecuación de Tipo Parabólico a la siguiente:

$$u_{\eta\eta} = \Phi, \text{ con } \Phi \text{ función de } (S, \eta, u, u_S, u_\eta).$$

Caso III) si $I < 0$ en una región Ω , los segundos miembros de (6) son complejos.

Sea $\varphi(x, y)$ integral compleja de la primera ecuación que aparece en (6), entonces

$\varphi^*(x, y) = c$ (la función conjugada de φ) será una integral de la segunda.

si tomamos $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \varphi^*(x, y)$ tendremos en esencia una ecuación de tipo hiperbólico, pero con características complejas.

Tratando de evitar a las variables complejas, introduzcamos nuevas variables

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2}$$

de tal manera que

$$\xi = \alpha + i\beta, \quad \eta = \alpha - i\beta,$$

Ahora:

$$a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = (a\alpha_x^2 + 2b\alpha_x\alpha_y + c\alpha_y^2)$$

$$\begin{aligned}
 & - (a \beta_x^2 + 2b \beta_x \beta_y + c \beta_y^2) \\
 & + 2i (a \alpha_x \beta_x + b (\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x)) + c \alpha_y \beta_y \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

Como tanto la parte real como la imaginaria se anulan, tenemos

$$A = c, \quad B = 0$$

La ecuación (2) se transforma en

$$U_{xx} + U_{yy} = \Phi.$$

Hemos obtenido así, la Forma Canónica para una Ecuación de tipo Elíptica.

Resumiendo: Una ecuación de segundo orden, lineal respecto de sus derivadas de mayor orden

$$a U_{xx} + 2b U_{xy} + c U_{yy} + d = 0,$$

con a, b, c funciones de (x, y) y d función de (x, y, U, U_x, U_y) , puede, mediante un cambio de variables, llevarse a alguna de las formas canónicas siguientes, si $I > 0$, $I = 0$, $I < 0$, respectivamente:

$$\text{Tipo Hiperbólico} \quad \begin{cases} u_{xy} = F \\ u_{xx} - u_{yy} = F \end{cases}$$

$$\text{Tipo Parabólico} \quad u_{xx} = F$$

$$\text{Tipo Elíptico} \quad u_{xx} + u_{yy} = F$$

En cada caso, F es función de (x, y, u, u_x, u_y) .

Esta nomenclatura está influenciada por la usual en la ecuación algebraica de segundo grado.

La transformación enunciada en esta sección es puntual, consideremos el sencillo ejemplo siguiente

$$x u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Esta ecuación es hiperbólica en el semiplano abierto izquierdo del plano cartesiano ($x < 0$), es parabólica en el eje vertical ($x = 0$), y es elíptica en el semiplano abierto derecho.

§ 2. La Ecuación de la Onda.

En esta sección estudiaremos la modelación que conduce a la Ecuación de la Onda, la más representativa y sencilla de las ecuaciones de tipo hipérbolico. Existen muchos problemas cuya analogía física permite la misma modelación.

Para que una situación física sea representable mediante un problema matemático, son necesarias la existencia, la unicidad y la estabilidad de la solución del problema, además de que esta solución debe reflejar el aspecto físico de la situación propuesta.

Un problema matemático cuya solución satisfaga los requerimientos citados se denomina Bien Planteado.

Vemos la resolución del problema mediante varias técnicas, su buen planteamiento y la interpretación física de su solución.

I La Modelación

Todo proceso de abstracción requiere de la determinación de los aspectos más característicos del problema y de la consideración de las irrelevantancias.

Iniciaremos considerando el problema más sencillo sobre las oscilaciones de una cuerda: Tomemos una cuerda elástica y flexible de longitud L y coloquémola en el plano XU , haciéndole coincidir con el eje horizontal.

Supongamos que los desplazamientos de la cuerda se hallan en el plano XU y que el vector de desplazamiento u es perpendicular en cualquier momento al eje x ; entonces, el proceso oscilatorio en el tiempo t se puede describir mediante una sola función $u(x, t)$ que caracteriza el desplazamiento vertical de la cuerda.

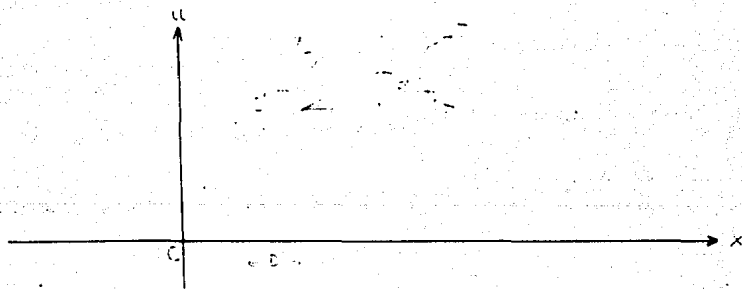
La expresión matemática del concepto de flexibilidad reside en que las tensiones que surgen en la cuerda están dirigidas siempre por la tangente a

en perfil instantáneo. Esta condición expresa el hecho de que la cuerda no se resiste a la flexión.

La Magnitud de la tensión que surge en la cuerda como consecuencia de la elasticidad, puede ser calculada por la Ley de Hooke. Consideraremos pequeñas oscilaciones de la cuerda y despreciaremos el cuadrado de u_x con respecto a la unidad.

Calculemos, usando esta condición, el alargamiento a que se somete un segmento (x_1, x_2) de la cuerda. La longitud de este segmento es igual a

$$D' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u_x)^2} dx \cong x_2 - x_1 = D.$$



De esta manera, en los límites de la exactitud convenida en el proceso oscilatorio, no hay ningún alargamiento de los segmentos de cuerda; de aquí y en base a la

Ley de Hooke, tenemos que la magnitud de la Tensión T en cada punto no varía con el tiempo.

Ahora vemos que la tensión no depende tampoco de x , es decir que $T(x) = T_0 = \text{Constante}$.

Flamemos T_x y T_u a las proyecciones sobre los ejes x y u de la Tensión T .

$$T_x = T(x) \cos \alpha = \frac{T(x)}{\sqrt{1+(u_x)^2}} \cong T(x)$$

$$T_u = T(x) \sin \alpha \cong T(x) \tan \alpha = T(x) u_x,$$

siendo α el ángulo de la tangente a la curva $u(x,t)$ con el eje x .

Sobre el segmento (x_1, x_2) actúan fuerzas de tensión, fuerzas externas y fuerzas de inercia. La suma de las proyecciones de todas las fuerzas sobre el eje x debe ser igual a cero (considerando sólo las oscilaciones transversales).

Como las fuerzas de inercia y las externas están dirigidas, por hipótesis, a lo largo del eje u , tendremos

$$T_x(x_2) - T_x(x_1) = 0, \text{ es decir } T(x_1) = T(x_2).$$

Como x_1 y x_2 son puntos arbitrarios, la tensión no depende de x , es decir, que para todos los valores de x y de t se tiene $T(x) \equiv T_0$

Después de estas observaciones preliminares, podemos deducir la ecuación de las oscilaciones transversales de una cuerda, aplicando la segunda Ley de Newton.

La componente de la cantidad de movimiento del segmento de cuerda (x_1, x_2) sobre el eje U es iguala

$$\int_{x_1}^{x_2} U_t(\xi, t) \rho(\xi) d\xi$$

donde ρ es la densidad lineal de la cuerda.

Igulemos la variación de la cantidad de movimiento en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$.

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) [U_t(\xi, t_2) - U_t(\xi, t_1)] d\xi$$

al impulso de las fuerzas que actúan, formadas por la tensión $T_0 U_x|_{x=x_2}$ y $T_0 U_x|_{x=x_1}$ en los puntos x_2 y x_1 y por la fuerza externa, que consideraremos distribuida continuamente con densidad (carga) $F(x, t)$, calculada en la unidad de longitud. Como resultado se obtiene la ecuación de las oscilaciones transversales de un

elemento de la cuerda en forma integral.

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] \rho(\xi) d\xi = \int_{t_1}^{t_2} [T_0 [u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)]] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

Para llegar a la Ecuación Diferencial, suponemos que existen las segundas derivadas de $u(x, t)$ y que son continuas, en realidad, físicamente sólo se trabaja con funciones de este tipo.

Después de aplicar a la fórmula anterior dos veces el teorema del valor medio, tenemos.

$$u_{tt}(\xi^*, t^*) \rho(\xi^*) \Delta t \Delta x = \{ T_0 [u_{xx}(\xi^{***}, t^{***})] + F(\xi^{***}, t^{***}) \} \Delta t \Delta x,$$

con $\xi^*, \xi^{**}, \xi^{***} \in (x_1, x_2)$, $t^*, t^{**}, t^{***} \in (t_1, t_2)$.

Dividiendo ambos miembros por $\Delta t \Delta x$, y pasando al límite cuando $x_2 \rightarrow x_1$, $t_2 \rightarrow t_1$, se obtiene

la Ecuación Diferencial de las oscilaciones Transversales de la cuerda.

$$T_0 u_{xx} = \rho u_{tt} - F(x, t).$$

Si la densidad es constante, $\rho = \text{constante}$, esta ecuación

ción toma la forma

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t),$$

$$a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \quad f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t).$$

$f(x, t)$ es la densidad de la fuerza con respecto a la unidad de masa. Si no hay fuerzas externas, se obtiene la Ecuación Homogénea.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

Esta ecuación que describe las oscilaciones libres de una cuerda, es el ejemplo más sencillo de una ecuación de tipo Hiperbólico.

Como se sabe, las ecuaciones diferenciales poseen en general un conjunto infinito de soluciones. Por esta razón, cuando un problema físico se modela mediante una ecuación en derivadas parciales, para la caracterización unívoca de este proceso es necesario agregar a la ecuación ciertas condiciones complementarias.

En el problema más sencillo sobre las oscilaciones de la cuerda con extremos fijos, $u(x, t)$ proporcio-

na la desviación de la cuerda del eje x . Si los extremos de la cuerda están fijos, deben cumplirse las condiciones de frontera:

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0.$$

Como el proceso de las oscilaciones de la cuerda depende de su forma inicial y de la distribución de las velocidades, tenemos las condiciones iniciales:

$$u(x, t_0) = \varphi(x)$$

$$u_t(x, t_0) = \psi(x)$$

De esta manera, las condiciones complementarias están formadas por condiciones de frontera e iniciales, donde $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son funciones dadas de un punto.

Si los extremos de la cuerda se mueven según cierta ley dada, las condiciones de frontera toman la forma siguiente:

$$u(0,t) = f_1(t)$$

$$u(L,t) = f_2(t),$$

donde $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son funciones dadas.

Existen otros tipos de condiciones de frontera. En general, se consideran tres tipos fundamentales de con-

condiciones de Frontera (o Contorno).

Primera Especie (Régimen dado)

$$u(0,t) = \mu(t).$$

Segunda Especie (Fuerza dada)

$$u_x(0,t) = \nu(t)$$

Tercera Especie (Enlace elástico)

$$u_x(0,t) = h[u(0,t) - \theta(t)].$$

Los nombres dados tienen una motivación física. De igual modo se plantean las condiciones de frontera en el extremo $x=L$.

Si las funciones dadas ($\mu(t)$, $\nu(t)$; $\theta(t)$) son nulas, las condiciones de frontera se llaman Homogéneas.

Al combinar los tres tipos de condiciones de frontera, se obtienen seis tipos de problemas de contorno simples. Consideraremos los tres tipos más sencillos de condiciones de frontera, haciendo las exposiciones fundamentales en el primer tipo de condición, en la inteligencia de que lo relativo a las condiciones de segunda y ter-

Esta especie se requerirá de modificaciones no profundas.

El primer problema de Contorno para la Ecuación de Onda, se describe como:

Hallar la función $u(x,t)$, definida en la región $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$, que satisfaga a la Ecuación

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad \text{para } 0 < x < L, t > 0,$$

a las Condiciones Iniciales

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad (0 < x < L)$$

$$u_t(x,0) = \psi(x),$$

y a las Condiciones de Fronteras.

$$u(0,t) = p_1(t), \quad t > 0$$

$$u(L,t) = p_2(t).$$

Si en ambos extremos se toman condiciones de fronteras de segunda o tercera especie, los problemas correspondientes se llaman segundo o tercer problema de contorno. Si las condiciones de fronteras para un mismo caso son de diferente tipo, los problemas de Contorno se llaman Mixtos.

Veamos ahora los casos límite del problema planteado. La influencia de las condiciones de frontera sobre un punto P_0 , suficientemente lejano de la frontera en la cual éstas están dadas, se siente después de un intervalo de tiempo suficientemente grande.

Para estudiar el fenómeno durante un intervalo pequeño de tiempo, en el cual la influencia de las fronteras aún no es esencial, en lugar del problema completo se debe estudiar el problema límite con condiciones iniciales o Problema de Cauchy para una región no acotada:

Hallar la función $u(x,t)$ que satisfaga a la ecuación

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \text{ para } -\infty < x < +\infty$$

y $t > 0$, con las condiciones iniciales

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \text{ para } -\infty < x < +\infty.$$

En cambio, si se estudia el fenómeno en las cercanías de una frontera, y la influencia del régimen de frontera en la segunda frontera no tiene sig-

nificado importante durante el transcurso del intervalo de interés, se obtiene el problema en la x -misma $0 \leq x < +\infty$, en el que se dan, además de la ecuación, las condiciones:

$$u(0, t) = \mu(t), \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_x(x, 0) = \psi(x); \quad 0 \leq x < +\infty.$$

El carácter del fenómeno para los momentos de tiempo suficientemente alejados del momento inicial $t=0$, se determina completamente por los valores de frontera, puesto que la influencia de las condiciones iniciales a causa del rozamiento, que existe en cualquier sistema real, se debilita con el transcurso del tiempo. Los problemas de este tipo se encuentran con particular frecuencia en los casos en que el sistema es excitado mediante un régimen de frontera periódico, que actúa un tiempo prolongado. Se plantea así el problema sin Condiciones iniciales:

Hallar la función $u(x, t)$ que satisfaga la ecuación

estudiada para $0 \leq x \leq L$, $t > 0$, con las condiciones de frontera

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(L,t) = \mu_2(t).$$

De manera análoga se plantea el problema sin condiciones iniciales para la semirecta.

Al resolver los problemas de contorno, se debe comprobar que las condiciones complementarias son suficientes para tener una solución única, haremos esto; la demostración de la existencia de la solución con frecuencia está estrechamente ligada al método de determinación de la solución.

Teorema (De Unicidad).

Existe únicamente una función $u(x,t)$ definida en la región $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$ que satisfaga a la ecuación

$$p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x,t),$$

$$p(x) > 0, \quad k(x) > 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

y a las condiciones iniciales y de frontera

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x)$$

$$u(0, t) = M_1(t), \quad u(L, t) = M_2(t),$$

siempre que

- i) La función $u(x, t)$ y sus segundas derivadas parciales sean continuas en $0 \leq x \leq L, t \geq 0$,
- ii) Los coeficientes $p(x), k(x)$ sean continuos en $0 \leq x \leq L$.

Demostración:

Supóngase que existen dos soluciones del problema considerado: $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$.

$$\text{Sea } v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t).$$

evidentemente $v(x, t)$ satisface a la ecuación

$$\text{homogénea} \quad p \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

y a las condiciones complementarias homogéneas

$$v(x, 0) = 0, \quad v(0, t) = 0$$

$$v_t(x, 0) = 0, \quad v(L, t) = 0$$

así como a la primera condición del teorema.

Demostremos que la función $v(x, t)$ es idénticamente nula.

Tomemos la función que representa a la energía total de la cuerda en el momento de tiempo t .

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \{ k(v_x)^2 + \rho(v_t)^2 \} dx$$

Derivemos $E(t)$ con respecto a t para demostrar que $E(t)$ es constante.

$$\frac{d}{dt} E(t) = \int_0^L (k v_x v_{xt} + \rho v_t v_{tt}) dx$$

Al integrar por partes el primer sumando del segundo miembro se tiene:

$$\int_0^L k v_x v_{xt} dx = [k v_x v_t]_0^L - \int_0^L v_t (k v_x)_x dx.$$

El primer término de la derecha se anula en virtud de las condiciones de frontera, ya que $v(0,t) = 0$ implica $v_t(0,t) = 0$, y lo mismo para $x=L$.

De aquí se tiene:

$$\frac{d}{dt} E(t) = \int_0^L [\rho v_t v_{tt} - v_t (k v_x)_x] dx = \int_0^L v_t [\rho v_{tt} - (k v_x)_x] dx = 0,$$

es decir, $E(t) = \text{Constante}$.

Considerando las condiciones iniciales se tiene

$$E(t) = \text{Constante} = E(0) = \frac{1}{2} \int_0^L [k(V_x)^2 + p(V_t)^2] dx = 0,$$

ya que $V(x,0) = 0$, $V_t(x,0) = 0$

Usando esto y el hecho de que $k > 0$, $p > 0$, se concluye que

$$V_x(x,t) \equiv 0, \quad V_t(x,t) \equiv 0,$$

de donde $V(x,t) = \text{Constante} = C_0$.

Al utilizar la Condición inicial, se tiene

$$V(x,0) = C_0 = 0,$$

lo que demuestra que $V(x,t) \equiv 0$.

Por lo tanto si dos funciones $u_1(x,t)$ y $u_2(x,t)$ satisfacen las condiciones del teorema, entonces

$$u_1(x,t) = u_2(x,t).$$

La misma idea sirve para el segundo y tercer problema de contorno, sólo hay que hacer algunas adaptaciones.

Este método de demostración para la unicidad de la solución de un problema, basado en la aplicación

de la expresión de la energía total, se aplica ampliamente en la demostración de teoremas de unicidad en diferentes ramas de la Física-Matemática, por ejemplo, en la teoría de los Campos electromagnéticos, en la teoría de la elasticidad y en la hidrodinámica.

Así que será conveniente hallar la expresión de la energía de las oscilaciones transversales de una cuerda: $E = K + U$, donde K es la energía cinética y U la energía potencial.

El elemento de cuerda dx , que se mueve con velocidad $v = u_x$ posee la energía cinética.

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho(x) dx \cdot (u_x)^2, \quad m = \rho dx$$

La energía Cinética de toda la cuerda es

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) [u_x(x,t)]^2 dx.$$

La energía Potencial de las oscilaciones transversales de una cuerda que tiene para $t = t_0$, la forma $u(x, t_0) = u_0(x)$, es igual al trabajo que es neces-

será efectuar para que la cuerda pase de la posición de equilibrio a la posición $u_0(x)$. Supongamos que la función $u(x,t)$ da el perfil de la cuerda en el momento t , siendo, además

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,t_0) = u_0(x).$$

El elemento dx , bajo la acción de la resultante de las fuerzas de tensión $T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx} - T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x = T u_{xx} dx$, recorre un camino $u_t(x,t) dt$ durante el tiempo dt .

El trabajo efectuado por toda la cuerda durante el tiempo dt es igual a

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^L T_0 u_{xx} u_t dx \right\} dt &= \left\{ T_0 u_x u_t \Big|_0^L - \int_0^L T_0 u_x u_{xt} dx \right\} dt \\ &= \left\{ -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L T_0 (u_x)^2 dx + T_0 u_x u_t \Big|_0^L \right\} dt \end{aligned}$$

Al integrar respecto de t , desde cero hasta t_0 , se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^L T_0 (u_x)^2 dx \Big|_0^{t_0} + \int_0^{t_0} \int_0^L T_0 u_x u_t dx dt &= -\frac{1}{2} \int_0^L T_0 [u_x(x, t_0)]^2 dx \\ &+ \int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \Big|_0^L dt \end{aligned}$$

Analizamos el sentido del último sumando del segundo miembro de esta igualdad.

$T_0 u_x|_{x=0}$ es la magnitud de la tensión en el extremo de la cuerda $x=0$; $u_x(0,t) dt$ es el desplazamiento de este mismo extremo, y la integral

$$\int_0^{t_0} T_0 u_x u_x|_{x=0} dt$$

es el trabajo que hay que gastar en el desplazamiento del extremo $x=0$. El sumando correspondiente a $x=L$ tiene sentido análogo.

Si los extremos de la cuerda están fijos, el trabajo en dichos extremos será igual a cero, en este caso $u(0,t)=0$, $u_x(0,t)=0$.

En consecuencia, al desplazar una cuerda con extremos fijos de la posición de equilibrio $u=0$ a la posición $u_0(x)$ el trabajo no depende de la forma en que la cuerda se lleva a esta posición, y es igual a

$$-\frac{1}{2} \int_0^L T_0 [u_x(x,t)]^2 dx$$

que es la energía potencial de la cuerda en el momento $t=t_0$, con signo opuesto.

Así, la Energía Total de la Cuerda es igual a

$$E = \frac{1}{2} \int_0^L [T_0 (u_x)^2 + \rho(x) (u_t)^2] dx$$

II La Fórmula de D'Alembert.

Iniciaremos el estudio de los métodos de determinación de las soluciones de los problemas de contorno para las ecuaciones de tipo hiperbólico con el problema con condiciones iniciales para la cuerda no acotada:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

transformemos esta ecuación a la forma canónica que contiene a la derivada mixta, la ecuación de las características es

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0,$$

la cual se divide en

$$dx - a dt = 0, \quad dx + a dt = 0,$$

cuyas integrales son las rectas

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2.$$

Introduciendo las nuevas variables

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at$$

la ecuación de la onda se reduce a

$$u_{\xi\eta} = 0$$

Esto puede observarse al efectuar las operaciones siguientes y substituir los resultados en la ecuación original

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_{tt} = a^2 [u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}].$$

tenemos ahora que

$$u_{\eta}(\xi, \eta) = f^*(\eta),$$

donde $f^*(\eta)$ es cierta función que sólo depende de η . Integrando esta igualdad con respecto a η , para ξ fija, se obtiene

$$u(\xi, \eta) = \int f^*(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

donde f_1 y f_2 son funciones que dependen únicamente de ξ y η respectivamente.

Escrito de otra manera

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$$

Esta fórmula es la Integral general del problema original.

Si la solución del problema existe, ésta se expresa mediante la fórmula anterior. Determinaremos ahora f_1 y f_2 de manera que satisfagan las condiciones iniciales.

$$u(x,0) = \psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$u_t(x,0) = \psi'(x) = a f_1'(x) - a f_2'(x)$$

Integrando la última igualdad, obtenemos

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi'(a) da + C,$$

con x_0 y C constantes.

Con lo siguiente:

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi'(a) da + C$$

$$f_1(x) + f_2(x) = \psi(x)$$

se tiene

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \psi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi'(a) da + \frac{C}{2}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \psi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi'(a) da - \frac{C}{2}$$

Se obtiene así la llamada Fórmula de D'Alembert

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha.$$

Si φ es derivable dos veces, y una vez, la fórmula de D'Alembert satisface la ecuación de onda con las condiciones iniciales dadas.

Demostremos ahora que esta solución varía en forma continua, si las condiciones iniciales varían en forma continua.

Teorema (De estabilidad):

Para cualquier intervalo de tiempo $[0, t_0]$, y cualquier grado de exactitud ϵ , existe $\delta(\epsilon, t_0)$, tal que dos soluciones $u_1(x,t)$ y $u_2(x,t)$ cualesquiera de la ecuación de onda, difieren en menos de ϵ durante el intervalo de tiempo t_0 :

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \epsilon, \quad 0 \leq t \leq t_0,$$

siempre que los valores iniciales

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) = \psi_1(x);$$

$$\text{y} \quad u_2(x,0) = \varphi_2(x), \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0) = \psi_2(x);$$

difieran en menos de δ :

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta, \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta.$$

Demostración:

Las funciones $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ están relacionadas con sus valores iniciales por la fórmula de D'Alembert, de tal manera que

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \frac{|\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)|}{2} + \frac{|\varphi_1(x-at) - \varphi_2(x-at)|}{2} \\ + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(\alpha) - \psi_2(\alpha)| d\alpha,$$

de donde se obtiene

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a} \delta (2at) \leq \delta (1 + t_0).$$

El teorema se demuestra haciendo $J = \frac{\epsilon}{1+t_0}$.

Todo proceso físicamente determinado, que se desarrolla con el transcurso del tiempo, debe caracterizarse mediante funciones que dependan en forma continua de los valores iniciales.

Si no existiera esta dependencia continua, dos procesos esencialmente diferentes podrían responder a

sistemas de condiciones iniciales prácticamente iguales, cuya diferencia se da en los límites de exactitud de las mediciones. Los procesos de este tipo no se pueden considerar físicamente definidos por estas condiciones iniciales.

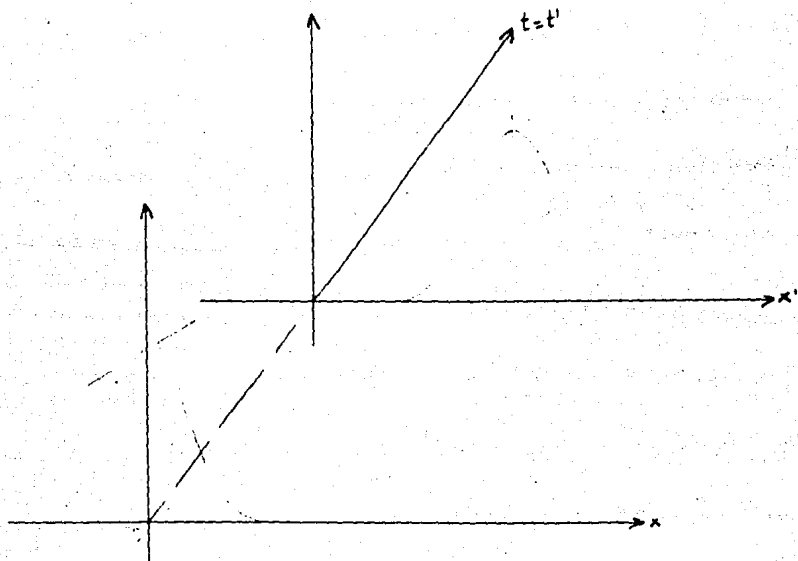
Del teorema anterior se deduce que el proceso de las oscilaciones de una cuerda está determinado no sólo matemáticamente, sino también físicamente por sus condiciones iniciales.

Si la solución de un problema matemático depende en forma continua de las condiciones complementarias, es decir, de las condiciones iniciales y de fronteras se dice que el problema es estable.

Terminaremos la discusión de esta parte con una interpretación física de la Fórmula de D'Alembert.

La función $u(x,t)$ determinada por esta fórmula representa el proceso de propagación de la desviación y velocidad iniciales. Si fijamos $t=t_0$, la función $u(x,t_0)$ da el perfil de la cuerda en el

momento t_0 : fijando $x=x_0$, obtenemos la función $u(x_0, t)$ que da el proceso del movimiento del punto x_0 .



Supongamos que un observador que se hallaba en el punto $x=0$ en el momento $t=0$, se mueve con velocidad a en el sentido positivo. Introduzcamos un sistema de coordenadas relacionado con el observador, haciendo $x'=x-at$, $t'=t$. En este sistema móvil de coordenadas, la función $u(x,t)=f(x-at)$ se determinará mediante la fórmula $u=f(x')$, y el observador verá todo el tiempo el

misimo perfil que en el momento inicial. Por lo tanto, la función $u(x,t) = f(x-at)$ es el perfil invariable $f(x)$, que se desplaza hacia la derecha, en el sentido positivo del eje x y con velocidad a (onda que se propaga). De la misma manera, la función $f(x+at)$ representa una onda que se desplaza hacia la izquierda, en el sentido negativo del eje x y con velocidad a .

La solución de D'Alembert para el problema de Cauchy para la cuerda infinita es la superposición de dos ondas, $f_1(x+at) + f_2(x-at)$, una de las cuales se desplaza hacia la derecha con velocidad a , y la otra, hacia la izquierda con la misma velocidad.

Para aclarar un poco más el carácter de la solución de D'Alembert es muy útil utilizar el plano (x,t)

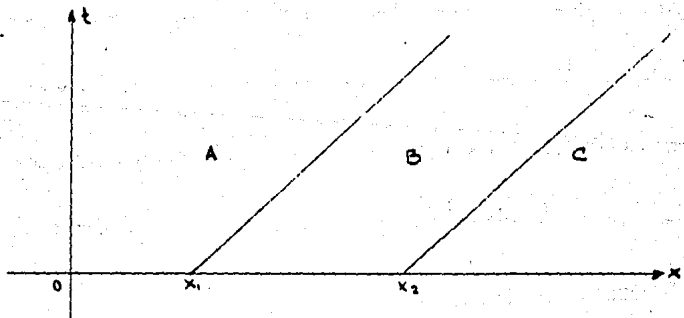
o Plano de Fases.

Las rectas $x-at = \text{Constante}$, $x+at = \text{Constante}$ son las características de la ecuación. La función $u = f(x-at)$ se mantiene constante a lo largo de la característica

$x-at = \text{constante}$, la función $u = f(x+at)$ es constante a lo largo de la característica $x+at = \text{constante}$. Supongamos que $f(x)$ es diferente de cero sólo en el intervalo (x_1, x_2) y nula fuera del intervalo.

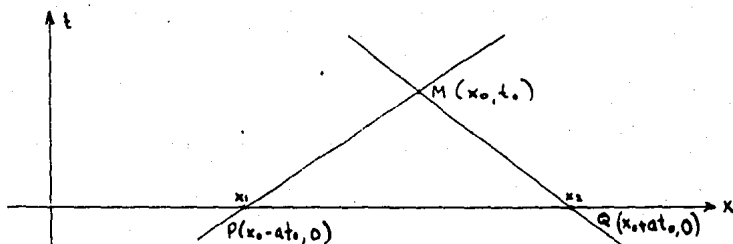
Tracemos las características $x-at = x_1$, $x-at = x_2$ por los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$; éstas dividen al semiplano $(x, t > 0)$ en tres regiones A, B y C.

La función $u = f(x-at)$ es distinta de cero sólo en la región B, donde $x_1 < x-at < x_2$, y las características $x-at = x_1$, $x-at = x_2$ representan los frentes delanteros y traseros de la onda que se propaga hacia la derecha.



Tomemos ahora un punto fijo $M(x_0, t_0)$, y tracemos por él ambas características $x-at = x_0 - at_0$, $x+at = x_0 + at_0$, las cuales cortarían al eje x en los

puntos $P(x_1 = x_0 - at_0, t = 0)$, $Q(x_2 = x_0 + at_0, t = 0)$



El valor de la función $u = f_1(x - at) + f_2(x + at)$ en el punto (x_0, t_0) es igual a $u(x_0, t_0) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, es decir, se determina por los valores de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ en los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$, que son los vértices del triángulo MPQ , formado por las dos características y el eje x . Este triángulo se llama Triángulo Característico del punto (x_0, t_0) .

De la fórmula de D'Alembert se aprecia que la desviación $u(x_0, t_0)$ del punto de la cuerda en el momento t_0 depende sólo de los valores de la desviación inicial en los vértices $P(x_0 - at_0, 0)$ y $Q(x_0 + at_0, 0)$ del triángulo característico MPQ y de los valores de la velocidad inicial en el lado PQ . Esto se aclara particularmente, si se escribe la fórmula de D'Alembert

en la forma

$$u(M) = \frac{\varphi(P) + \varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{PQ} \psi(\alpha) d\alpha.$$

Los datos iniciales dados fuera de PQ no ejercen influencia en el valor de $u(x,t)$ en el punto $M(x_0, t_0)$.

III El Método de Fourier

El Método de Fourier, llamado también de Separación de Variables es uno de los más generalizados métodos de resolución de ecuaciones en derivadas parciales. Expondremos este método para el problema sobre las oscilaciones de una cuerda fija en sus extremos. Estudiamos la resolución de este problema detalladamente, y posteriormente, para otros problemas, obviaremos esto.

Se busca una función $u(x,t)$, solución de

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

que satisfaga a las condiciones de fronteras homogéneas

$$u(0,t)=0, \quad u(L,t)=0,$$

y a las condiciones iniciales

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x).$$

Esta ecuación es lineal y homogénea; por lo tanto, la suma de soluciones particulares es también solución de la ecuación. Si se tiene un número suficientemente grande de soluciones particulares, se puede intentar, sumándoles con "ciertos" coeficientes, hallar la solución buscada.

El Problema Auxiliar Fundamental Asociado al problema es:

Hallar la solución no trivial de la ecuación

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

que satisfaga a las condiciones de frontera homogéneas

$$u(0,t)=0, \quad u(L,t)=0,$$

y se represente en forma de producto

$$u(x,t) = X(x)T(t), \quad (1)$$

donde $X(x)$ es una función que depende solamente de la variable x , y $T(t)$ una función sólo de t .

Aquí hay una poderosa razón para denominar a este método Separación de Variables.

Al substituir la solución propuesta en la ecuación se obtiene

$$a^2 X''(x)T(t) = T''(t)X(x)$$

La derivación de X se efectúa respecto de x , y la de T respecto de t . Después de dividir entre $X(x)T(t)$ se tiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}$$

Para que la función $u(x,t)$ propuesta sea solución, la última igualdad debe satisfacerse idénticamente, es decir, para cualesquiera valores de las variables independientes $0 < x < L$, $t > 0$. El primer miembro de esta igualdad es una función que depende sólo de x , y el segundo sólo de t . Fijando, por ejemplo, cierto valor de x y variando t (o al revés), se tiene que ambos miembros de esta igualdad se mantienen constantes al variar sus argumentos, es

$$\text{señ} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda$$

donde λ es una constante, el signo negativo se coloca para tener una mayor comodidad en los razonamientos posteriores

De la última igualdad se obtiene el sistema desacoplado de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias siguiente

$$X(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0, \quad (2)$$

$$T(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0. \quad (3)$$

Las condiciones de frontera nos indican

$$u(0, t) = X(0) T(t) = 0$$

$$u(L, t) = X(L) T(t) = 0,$$

De aquí se deduce que la función $X(x)$ debe satisfacer a las condiciones

$$X(0) = X(L) = 0,$$

puesto que si no, tendríamos que

$$T(t) \equiv 0, \quad u(x, t) \equiv 0;$$

pero el problema consiste en hallar la solución no trivial.

Para la función $T(t)$ no hay ninguna condición complementaria en el problema auxiliar fundamental.

Se plantea así un problema de Sturm-Liouville:

Hallar los valores del parámetro λ , para los cuales existen soluciones no triviales del problema:

$$X'' + \lambda X = 0, \text{ con } X(0) = X(L) = 0,$$

Hallar además estas soluciones. Tales valores del parámetro λ se llaman Valores propios, y las soluciones no triviales correspondientes, Funciones Propias del problema.

Demostremos en seguida que para este problema, λ es un número positivo, veamos:

i) si $\lambda < 0$, el problema no tiene soluciones no triviales.

En efecto, la solución general del problema tiene la forma

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

Las condiciones del problema dan

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0,$$

$$X(L) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} = 0, \quad (\alpha = \sqrt{-\lambda}L > 0)$$

Como $e^{\alpha} - e^{-\alpha} \neq 0$ y $C_1 = -C_2$

se tiene $C_1(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0$,

lo que implica $C_1 = 0, C_2 = 0$,

y por lo tanto $X(x) \equiv 0$.

i) si $\lambda = 0$, el problema no tiene soluciones no triviales.

Para este caso, la solución general de la ecuación tiene la forma

$$X(x) = C_1 x + C_2,$$

las condiciones de frontera dan

$$X(0) = [C_1 x + C_2]_{x=0} = C_2 = 0$$

$$X(L) = C_1 L = 0,$$

es decir, $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$,

Por lo tanto $X(x) \equiv 0$.

Así tenemos $\lambda > 0$. La solución general de la ecuación se escribe en la forma

$$X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda} x + D_2 \sin \sqrt{\lambda} x,$$

Las condiciones de frontera dan

$$X(0) = D_1 = 0$$

$$X(L) = D_2 \sin \sqrt{\lambda} L = 0$$

Para que $X(x) \not\equiv 0$, entonces, D_2 no debe anularse, para esto debe suceder que $\sin \sqrt{\lambda} L = 0$, es decir

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{L}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

En consecuencia, las soluciones no triviales del problema sólo son posibles para los valores

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2.$$

A estos valores propios les corresponden las funciones propias

$$X_n(x) = D_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{L} x,$$

donde D_n es una constante arbitraria.

Para el problema (3), a estos mismos valores λ_n les corresponden las siguientes soluciones

$$T_n(t) = E_n \cos \frac{\pi n}{L} at + F_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{L} at,$$

donde E_n y F_n son constantes arbitrarias.

Ahora, las funciones

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{L} at + B_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{L} at \right) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{L} x,$$

con A_n y B_n constantes arbitrarias, son soluciones particulares de la ecuación (1) que satisfacen a las condiciones de frontera y son representables en forma de producto de dos funciones, una de las cuales depende sólo de x , y la otra, de t .

Estas soluciones pueden satisfacer a las condiciones iniciales de nuestro problema original sólo para casos particulares de las funciones iniciales $\varphi(x)$ y $\psi(x)$.

Consideremos la resolución del problema original en el caso general. Debido a la linealidad y homogeneidad de

la ecuación, la suma de soluciones particulares

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{L} at + B_n \sin \frac{\pi n}{L} at \right) \sin \frac{\pi n}{L} x$$

también satisface a esta ecuación y a las condiciones de frontera. Las condiciones iniciales nos permitirán determinar A_n y B_n . Exijamos que la última función satisfaga a las condiciones iniciales.

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{L} x,$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d u_n}{dt}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{L} a B_n \sin \frac{\pi n}{L} x.$$

Si las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ satisfacen a las condiciones que garantizan su desarrollo en series de Fourier,

tenemos
$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{L} x; \quad \varphi_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{L} \xi d\xi,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{L} x; \quad \psi_n = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{L} \xi d\xi.$$

Los coeficientes que necesitamos son

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{L}{\pi n a} \psi_n.$$

Con lo cual se determina totalmente la función $u(x,t)$ que da la solución del problema originalmente investigado. Si esta serie diverge o la función que ésta determina no es derivable, no puede, claro está, representar la solución de nuestra ecuación diferencial.

Para fundamentar la representación de la solución como se vio, veamos ahora la generalización del principio de superposición, bien conocido para las sumas finitas, al caso de series infinitas.

Sea $L(u)$ un operador diferencial lineal, de tal manera que $L(u)$ es igual a la suma de ciertas derivadas (ordinarias o parciales) de la función u , con coeficientes que son funciones de las variables independientes.

Lema (Principio Generalizado de Superposición):

Si las funciones u_i ($i=1, 2, \dots, n, \dots$) son soluciones particulares de la Ecuación Diferencial Lineal

Homogéneas $L(u)=0$ (ordinaria o en derivadas parciales),

Entonces, la serie $u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$ es también solución de la Ecuación, si el cálculo de las derivadas de u que figuran en la ecuación $L(u)=0$ se puede efectuar mediante la derivación término a término de la serie.

Demostración: En efecto, si las derivadas de u que figuran en la ecuación $L(u)=0$ pueden ser calculadas derivando la serie término a término, entonces, tendremos en virtud de la linealidad de la ecuación

$$L(u) = L\left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i L(u_i) = 0,$$

puesto que las series convergentes pueden sumarse término a término. Con esto queda demostrado que la función u satisface a la ecuación. Como condición suficiente para la legitimidad de la derivación término a término de la serie, utilizaremos

la condición de convergencia uniforme de la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i L(u_i),$$

que se obtiene después de la derivación.

Demos ahora una interpretación física de la solución obtenida. La función $u_n(x, t)$ puede representarse en la forma

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \left(A_n \cos \frac{\pi n}{L} at + B_n \sin \frac{\pi n}{L} at \right) \sin \frac{\pi n}{L} x \\ &= \alpha_n \cos \frac{\pi n}{L} a(t + \delta_n) \sin \frac{\pi n}{L} x, \end{aligned}$$

donde $\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, $\frac{\pi n}{L} a \delta_n = -A_n \tan \frac{B_n}{A_n}$.

Cada punto de la cuerda x_0 efectúa las oscilaciones armónicas

$$u_n(x_0, t) = \alpha_n \cos \frac{\pi n}{L} a(t + \delta_n) \sin \frac{\pi n}{L} x_0.$$

con amplitud $\alpha_n \sin \frac{\pi n}{L} x_0$.

El movimiento de una cuerda de este tipo se llama Corda Estacionaria. Los puntos $x = m \frac{L}{n}$, $m=1, 2, \dots, n-1$, en los cuales $\sin \frac{\pi n}{L} x = 0$, quedan inmóviles du-

rante todo el proceso y se llaman nodos de la onda estacionaria $U_n(x,t)$. Los puntos $x = \frac{2m+1}{2n}L$, $m = 0, 1, \dots, n-1$; en los cuales $\text{sen } \frac{\pi n}{L}x = \pm 1$, oscilan con la amplitud máxima α_n , y se llaman Vientes de la onda estacionaria.

El perfil de una onda estacionaria es en todo momento una sinusoides.

$$U_n(x,t) = C_n(t) \text{sen } \frac{\pi n}{L}x,$$

donde $C_n(t) = \alpha_n \cos \omega_n(t + \delta_n)$; $\omega_n = \frac{\pi n}{L}a$.

En el momento de tiempo t , en el cual $\cos \omega_n(t + \delta_n) = \pm 1$, las desviaciones alcanzan sus valores máximos, y la velocidad del movimiento es nula.

En los momentos de tiempo t , en los cuales $\cos \omega_n(t + \delta_n) = 0$, la desviación es igual a cero, y la velocidad del movimiento es máxima. Las frecuencias de las oscilaciones de todos los puntos de la cuerda coinciden, y son iguales a

$$\omega_n = \frac{\pi n}{L}a.$$

Las frecuencias ω_n se llaman frecuencias propias de las oscilaciones de la cuerda. Para las oscilaciones transversales de la cuerda, $a^2 = \frac{T}{\rho}$, y por lo tanto

$$\omega_n = \frac{\pi n}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

La energía de la onda estacionaria n -ésima (n -ésima Armónica) para el caso de las oscilaciones transversales de la cuerda es igual a

$$E_n = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 + T \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

$$= \frac{\alpha_n^2}{2} \int_0^L \left[\rho \omega_n^2 \sin^2 \omega_n(t + \delta_n) \sin^2 \frac{\pi n}{L} x + T \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 \cos^2 \omega_n(t + \delta_n) \cos^2 \frac{\pi n}{L} x \right] dx$$

$$= \frac{\alpha_n^2}{2} \frac{L}{2} \left[\rho \omega_n^2 \sin^2 \omega_n(t + \delta_n) + T \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 \cos^2 \omega_n(t + \delta_n) \right],$$

ya que $\int_0^L \sin^2 \frac{\pi n}{L} x dx = \int_0^L \cos^2 \frac{\pi n}{L} x dx = \frac{L}{2}$.

Utilizando la expresión para α_n , ω_n , así como también la igualdad $T = a^2 \rho$, obtenemos

$$E_n = \frac{\rho \alpha_n^2 \omega_n^2}{4} L = \omega_n^2 M \frac{A_n^2 + B_n^2}{4}$$

donde $M = L\rho$ es la masa de la cuerda.

Las oscilaciones de una cuerda son captadas generalmente por el sonido que ésta genera. Sin detenernos en el proceso de la propagación de las oscilaciones en el aire y de la percepción de las oscilaciones acústicas por nuestro oído, se puede decir que el sonido de una cuerda es la superposición de "tonos simples", que corresponden a las ondas estacionarias, en las cuales se descompone la oscilación.

Esta descomposición del sonido en tonos simples no es una operación de carácter solamente matemático. La obtención de los tonos simples se puede efectuar por vía experimental mediante resonadores.

La altura del tono depende de la frecuencia de las oscilaciones que le corresponden. La fuerza del tono se determina por su energía, y por consiguiente, por su amplitud. El tono más bajo que puede emitir una cuerda se determina por la frecuencia propia más baja $\omega_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, y se llama Tono Principal

de la cuerda.

Los demás tonos, que corresponden a frecuencias múltiples de ω_1 , se llaman Armónicos o subtonos. El timbre del sonido depende de los armónicos que haya conjuntamente con el tono principal, y de la distribución de la energía de éstos.

El tono más bajo de la cuerda y su timbre dependen del método de excitación de las oscilaciones. En efecto, el método de generación de las oscilaciones determina las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

mediante las cuales se expresan los coeficientes A_n y B_n .

Si $A_1 = B_1 = 0$, el tono más bajo será el que corresponda a la frecuencia ω_n , donde n es el mínimo número para el que A_n o B_n son diferentes de cero.

En general, la cuerda da un mismo sonido. En efecto, hagamos oscilar la cuerda tirándola hacia un lado y soltándola sin velocidad inicial, tenemos

$$u(x, 0) = \varphi(x) > 0, \quad u_t(x, 0) = 0$$

$$A_1 = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(\xi) \sin \frac{\pi}{L} \xi d\xi > 0,$$

puesto que $\sin \frac{\pi}{L} \xi > 0$.

Los demás coeficientes son, en general, mucho menores que A_1 , puesto que la función $\sin \frac{n\pi}{L} \xi$ es de signo variable para $n \geq 2$. En particular, si $\varphi(x)$ es simétrica con respecto al centro de la cuerda, $A_2 = 0$.

De esta forma, si hacemos oscilar una cuerda desplazándola hacia un lado ($\varphi(x) > 0$), el tono más bajo será el tono principal de la cuerda, cuya energía, en general, es mayor que la de los demás armónicos.

También se puede hacer oscilar una cuerda por otros medios. Por ejemplo, si la función inicial es impar con respecto al centro de la cuerda, entonces $A_1 = 0$, y el tono más bajo corresponde a la frecuencia

$$\omega = \omega_2 = \frac{2\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Si se toca la cuerda exactamente en su centro, su sonido cambia notablemente, y ésta pasa a sonar

a una octava de su tono. Este método de cambiar el tono se aplica con frecuencia al tocar el violín, la guitarra y otros instrumentos de cuerda, y se denomina Flageolet. Desde el punto de vista de la teoría de las oscilaciones de las cuerdas, este fenómeno queda completamente claro. En el momento de tocar la cuerda en su centro, eliminamos las ondas estacionarias que tienen vientres en este punto, y conservamos sólo los armónicos que poseen nodos en dicho punto. De esta manera, se quedan sólo los armónicos pares, y la frecuencia más baja será

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Si tocamos la cuerda a una distancia de $\frac{1}{3}$ de su longitud a partir de su extremo, la altura del tono fundamental aumenta tres veces, puesto que en este caso se conservan sólo los armónicos que tienen nodos en el punto $x = \frac{L}{3}$.

Las fórmulas

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad , \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2L \sqrt{\frac{\rho}{T}} \quad ,$$

que determinan la frecuencia y el periodo de la oscilación fundamental respectivamente, explican las siguientes leyes de las oscilaciones de las cuerdas, que fueron descubiertas por primera vez empíricamente, y que se conocen como Leyes de Mersenne.

1. Para las cuerdas de igual densidad e igual tensión, el periodo de oscilaciones es proporcional a su longitud.
2. Si la longitud de la cuerda es fija, el periodo varía en forma inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión.
3. Si la longitud y la tensión están fijas, el periodo varía proporcionalmente a la raíz cuadrada de la densidad lineal de la cuerda.

Un experimento interesante consiste en observar estas leyes en un monocordio.

IV. La Membrana Vibrante.

En esta parte trataremos situaciones un poco más generales de la ecuación de onda. La expresión U_{xx} que aparece en la ecuación de onda, es el Laplaciano de la función $U(x)$; en el caso de tratar con problemas representables en dos o más dimensiones, esta expresión se substituye por $\Delta U = \sum_{i=1}^n U_{x_i x_i}$.

Problema (Membrana Rectangular Vibrante):

Debemos hallar una función $U(x, y, t)$ tal que

$$U_{tt} = a^2 (U_{xx} + U_{yy}).$$

Si la membrana está fija en sus extremos, podemos imponer como única condición de frontera

$$u(x, y, t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

en $x=0, x=b, y=0, y=c$.

Debemos hallar la solución si nos son dadas las condiciones iniciales siguientes.

$$u(x, y, 0) = f(x, y) ; \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} u(x, y, t) \right|_{t=0} = g(x, y),$$

que corresponden a la posición y velocidad iniciales, respectivamente.

Notemos que existe una analogía entre este problema y el estudiado anteriormente, que corresponde a la cuerda.

Nuevamente utilizaremos el Método de Separación de Variables: Se pretende una solución

$$u(x, y, t) = F(x, y)T(t).$$

Después de substituir esta solución en el problema y hacer las abreviaturas necesarias, obtenemos

$$FT_{tt} = a^2 (F_{xx}T + F_{yy}T).$$

Como la solución $u(x, y, t) \equiv 0$ no es interesante, podemos descartarla.

Al dividir lo anterior entre $a^2 FT$ ($FT \neq 0$), nos queda

$$\frac{T_{tt}}{a^2 T} = \frac{1}{F} (F_{xx} + F_{yy}) = -V^2,$$

esto último por el conocido argumento de que dos funciones que dependen de variables diferentes son iguales si ambas son la misma constante, y por un razo-

variante semejante al utilizado antes, se llega a que esta constante debe ser negativa.

Así obtenemos el siguiente sistema

$$T_{tt} + \lambda^2 T = 0, \quad \lambda = av$$

$$F_{xx} + F_{yy} + v^2 F = 0,$$

La primera ecuación tiene la solución siguiente:

$$T(t) = A_1 \cos \lambda t + A_2 \sin \lambda t.$$

Ahora, dentro del proceso general debemos aplicar el mismo método, de manera recursiva, para solucionar la segunda ecuación, la cual es en derivadas parciales.

Substitúyase $F(x, y) = X(x)Y(y)$, para obtener

$$X_{xx}Y + XY_{yy} + v^2XY = 0$$

o bien,
$$\frac{X_{xx}}{X} = -\frac{1}{Y} (Y_{yy} + v^2Y) = -k^2.$$

Aquí hemos aplicado el mismo argumento utilizado al inicio del problema.

Se tiene en seguida

$$X_{xx} + k^2X = 0$$

$$Y_{yy} + p^2Y = 0; \quad p^2 = v^2 - k^2.$$

Las soluciones para este último sistema son

$$X(x) = B_1 \cos kx + B_2 \operatorname{Sen} kx$$

$$Y(y) = C_1 \cos py + C_2 \operatorname{Sen} py$$

Obsérvese que hemos pensado en una solución que se anule en la frontera para $t \geq 0$, así que necesariamente $f(x, y) = X(x)Y(y) = 0$

también en la frontera, esto es

$$X(0) = 0, X(b) = 0; Y(0) = 0, Y(c) = 0.$$

Ahora, $X(0) = B_1 = 0,$

así que $X(b) = B_2 \operatorname{Sen} kb = 0, B_2 \neq 0,$

Por lo tanto $k = \frac{n\pi}{b}, n = 1, 2, \dots$

Análogamente $Y(0) = C_1 = 0$

$$Y(c) = C_2 \operatorname{Sen} py = 0, c_2 \neq 0,$$

por lo que $p = \frac{m\pi}{c}, m = 1, 2, \dots$

De tal manera, que

$$X_n(x) = B_n \operatorname{Sen} \frac{n\pi}{b} x$$

$$Y_m(y) = C_m \operatorname{Sen} \frac{m\pi}{c} y$$

Si recordamos que $p^2 = v^2 - k^2$, se tiene

$$v_{nm} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{m^2}{c^2}}$$

y por lo tanto $\lambda_{nm} = a V_{nm} = a\pi \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{m^2}{c^2}}$.

Ahora ya podemos amarrar la solución general restringiendo los coeficientes

$$U_{nm}(x, y, t) = (B_{nm} \cos \lambda_{nm} t + B_{nm}^* \sin \lambda_{nm} t) \sin \frac{n\pi}{b} x \sin \frac{m\pi}{c} y,$$

con $n, m \in \mathbb{N}$.

Se propone en seguida una serie doble que satisfaga a las condiciones iniciales,

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{nm}(x, y, t).$$

De la primera condición inicial tenemos

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \sin \frac{n\pi}{b} x \sin \frac{m\pi}{c} y.$$

Si $f(x, y)$ puede expresarse como una serie doble de Fourier, podemos determinar los coeficientes B_{nm} de la siguiente manera.

Sea $k_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \sin \frac{n\pi}{b} x$, entonces

$$B_{nm} = \frac{2}{b} \int_0^b k_n(x) \sin \frac{n\pi}{b} x dx,$$

Además $f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} k_n(x) \sin \frac{m\pi}{c} y$

y obtenemos para x fija $k_n(x) = \frac{2}{c} \int_0^c f(x, y) \sin \frac{m\pi}{c} y dy$,

así que $B_{nm} = \frac{4}{bc} \int_0^b \int_0^c f(x, y) \sin \frac{n\pi}{b} x \sin \frac{m\pi}{c} y dy dx$.

Los coeficientes B_{nm}^* se calculan utilizando la segun-

de condición inicial

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm}^* \lambda_{nm} \sin \frac{n\pi}{b} x \sin \frac{m\pi}{c} y,$$

siguiendo el procedimiento citado anteriormente se tiene

$$B_{nm}^* = \frac{4}{bc \lambda_{nm}} \int_0^b \int_0^c g(x, y) \sin \frac{n\pi}{b} x \sin \frac{m\pi}{c} y \, dy \, dx,$$

con lo que el problema queda resuelto.

Hemos logrado además una generalización para los coeficientes de Fourier.

En seguida vemos una variante del mismo problema.

Tenemos ahora una membrana circular de radio p .

Al tratar de resolver la ecuación $U_{tt} = a^2 (U_{xx} + U_{yy})$,

será conveniente utilizar coordenadas polares.

El término $\Delta U(x, y) = U_{xx} + U_{yy}$, corresponde al Laplaciano de U , y tiene su representación en coordenadas polares como sigue

$$U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\theta\theta},$$

donde $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

Aí que lo que debemos resolver realmente es la ecuación

$$U_{tt} = a^2 \left(U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\theta\theta} \right),$$

y dado que la solución buscada U es independiente del ángulo θ (por simetría), y por lo tanto sólo es función del radio, tenemos la reducción siguiente:

Problema (Membrana Circular Vibrante).

Hallar una función $u(r,t)$ tal que,

$$U_{tt} = a^2 \left(U_{rr} + \frac{1}{r} U_r \right),$$

con la condición de frontera $u(\rho,t) = 0, \forall t \geq 0$, si los extremos están fijos.

Las condiciones iniciales tampoco dependen de θ

$$u(r,0) = f(r); \quad \frac{\partial}{\partial t} u(r,t) \Big|_{t=0} = g(r),$$

y corresponden a la posición inicial y a la velocidad inicial.

El paso obligado es proponer $u(r,t) = R(r)T(t)$.

Haciendo las substituciones y abreviaturas correspondientes; y considerando que no nos interesa el caso $u(r,t) \equiv 0$, para dividir entre $a^2 RT$, obtenemos

$$\frac{T_{tt}}{a^2 T} = \frac{1}{R} \left(R_{rr} + \frac{1}{r} R_r \right) = -k^2,$$

donde $-k^2$ es la constante negativa equivalente a una igualdad de dos funciones que dependen cada una de variables diferentes. De aquí pasamos el sistema

$$T_{tt} + \lambda^2 T = 0, \quad \lambda = ak$$

$$R_{rr} + \frac{1}{r} R_r + k^2 R = 0.$$

Proponemos el siguiente cambio de variable para transformar la segunda ecuación

sea $s = kr$, entonces $R_r = k R_s$, $R_{rr} = k^2 R_{ss}$;

Aquí hemos utilizado la regla de la cadena.

Si simplificamos la transformación, se tiene

$$R_{ss} + \frac{1}{s} R_s + R = 0,$$

esta es una forma de la denominada Ecuación de Bessel, cuya solución es

$$R(s) = C_1 J_0(s) + C_2 Y_0(s),$$

donde J_0 y Y_0 son las funciones de Bessel de Primera y Segunda Clase de orden cero, es decir

$$J_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s^{2n}}{2^{2n} (n!)^2},$$

$$Y_0(s) = \frac{2}{\pi} \left[J_0(s) \left(\ln \frac{s}{2} + \gamma \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} h_n s^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \right],$$

donde $\gamma = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^s \frac{1}{i} - \ln s$ es la Constante de Euler, y $h_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$.

Si consideramos que la posición de la membrana es finita, y observamos que $Y_0 \rightarrow \infty$ cuando $s \rightarrow 0$, necesariamente $C_2 = 0$, para que no usemos Y_0 .

Así $C_1 \neq 0$. Seleccionemos $C_1 = 1$, entonces

$$R(r) = J_0(s) = J_0(kr).$$

Utilicemos ahora la condición de frontera

$$R(\rho) = 0 = J_0(k\rho).$$

Si los ceros positivos de $J_0(s)$ son $\alpha_1, \alpha_2, \dots$

se obtiene $k\rho = \alpha_n$, $k_n = \frac{\alpha_n}{\rho}$, $n = 1, 2, \dots$

Así $R_n(r) = J_0\left(\frac{\alpha_n}{\rho} r\right)$, $n = 1, 2, \dots$

son soluciones que se anulan en $r = \rho$.

Por otra parte, las soluciones para

$$T_{tt} + \lambda^2 T = 0, \quad \lambda = ak$$

son $T_n(t) = a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t$, $\lambda_n = a \frac{\alpha_n}{\rho}$.

Así, la solución general del problema es

$$u(r, t) = (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t) J_0(k_n r).$$

Como paso final propongamos una serie que también satisfaga a las condiciones iniciales.

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t) J_0\left(\frac{\alpha_n}{p} r\right)$$

$$u(r, 0) = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\alpha_n}{p} r\right).$$

Esta serie generalizada de Fourier se denomina Serie de Fourier-Bessel, y los coeficientes son

$$a_n = \frac{2}{p^2 J_1^2(\alpha_n)} \int_0^p r f(r) J_0\left(\frac{\alpha_n}{p} r\right) dr.$$

Utilizando la última condición inicial se obtienen los coeficientes

$$b_n = \frac{2}{a \alpha_n p J_1^2(\alpha_n)} \int_0^p r g(r) J_0\left(\frac{\alpha_n}{p} r\right) dr,$$

donde
$$J_0(\alpha) = \alpha \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \alpha^{2m}}{2^{m+1} m! (m+1)!}$$

es la función de Bessel de primera clase de orden uno.

φ3. La Ecuación del calor

Los procesos de conducción del calor y de difusión de gases conducen a la ecuación más sencilla y representativa de tipo Parabólico.

Para esta ecuación es importante determinar el buen planteamiento del problema, es decir, las condiciones bajo las cuales existe una solución única y estable del problema. Esto permite una aplicación confiable en el ámbito físico.

I La Modelación

Tomemos una barra homogénea de longitud L , térmicamente aislada por los lados y lo suficientemente fina como para que en cualquier momento de tiempo se pueda considerar la temperatura igual en todos los puntos de un corte transversal.

Si se mantienen los extremos de la barra a temperaturas constantes u_1 y u_2 , entonces, a lo largo de la barra se establece la distribución lineal de temperatura.

$$u(x) = \frac{u_2 - u_1}{L} x$$

Del extremo más caliente pasará calor al extremo menos caliente. La cantidad de calor que pasa por una sección de la barra de superficie S por la unidad de tiempo, se expresa empíricamente como

$$Q = -k \frac{u_2 - u_1}{L} S = -k \frac{\partial u}{\partial x} S,$$

donde k es el coeficiente de conductividad térmica, que depende del material de la barra.

La magnitud del flujo calorífico se considera positiva si el calor pasa en dirección del crecimiento de x .

Analicemos el proceso de distribución de la temperatura en la barra. Este proceso puede describirse mediante la función $u(x, t)$, que representa la temperatura en el corte x en el momento de tiempo t . Hallaremos la ecuación que debe satisfacer la función $u(x, t)$.

En primer lugar, necesitamos las siguientes leyes

que determinan los procesos relacionados con la propagación del calor.

A) Si la temperatura de un cuerpo no es homogénea, en el cuerpo aparecen flujos caloríficos dirigidos desde los lugares de mayor temperatura hasta los lugares de menor temperatura. Esto se conoce como Ley de Fourier.

La cantidad de calor que pasa por la sección x durante el intervalo de tiempo $(t, t+dt)$, es igual a

$$dQ = q S dt,$$

donde $q = -k(x) \frac{\partial u}{\partial x}$.

es la densidad del flujo calorífico, igual a la cantidad de calor que pasa en la unidad de tiempo por una superficie de 1 cm^2 . Esta ley es una generalización de la fórmula empírica vista antes.

La forma integral de esta ley es

$$Q = -S \int_{t_1}^{t_2} k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt,$$

donde Q es la cantidad de calor que pasa durante el intervalo de tiempo (t_1, t_2) por la sección x . Si la barra

no es homogénea, k es una función de x **ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA**

B) La cantidad de calor que es necesario dar a un cuerpo homogéneo para elevar su temperatura en Δu , es igual a

$$Q = cm \Delta u = c \rho V \Delta u,$$

donde c es el calor específico, m , la masa del cuerpo, ρ , su densidad, V , el volumen.

Si la variación de temperatura tiene una magnitud diferente en distintas partes de la barra, o si ésta no es homogénea, entonces

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} c \rho S \Delta u(x) dx$$

C) Dentro de la barra puede surgir o absorberse calor, por ejemplo, al pasar corriente, por reacciones químicas, etc. La emisión de calor se puede caracterizar por la densidad de las fuentes térmicas $F(x, t)$ en el punto x en el momento t .

Como resultado de la acción de estas fuentes en el intervalo de la barra $(x, x+dx)$ durante un intervalo de tiempo $(t, t+dt)$ se emitirá una cantidad de calor

$$dQ = S F(x,t) dx dt,$$

o, escrito en forma integral,

$$Q = S \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x,t) dx dt,$$

donde Q es la cantidad de calor que se emite en el intervalo de la barra (x_1, x_2) durante el tiempo (t_1, t_2) .

La ecuación buscada se obtiene al calcular el balance de calor en cierto segmento (x_1, x_2) durante cierto intervalo de tiempo (t_1, t_2) . Aplicando la ley de la Conservación de la energía y las fórmulas vistas antes, se puede escribir la Ecuación de la conducción del calor en forma integral.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_1} \right] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau = \int_{x_1}^{x_2} [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)] d\xi.$$

Para obtener la forma diferencial de esta ecuación, debemos suponer que la función $u(x,t)$ posee derivadas continuas u_{xx} y u_t . Nuevamente se observa que este requerimiento es acorde al aspecto físico del problema.

Aplicando dos veces el teorema del valor medio se obtiene sucesivamente.

$$\left[k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_1} \right]_{\tau=t_3} \Delta t + F(x_4, t_4) \Delta x \Delta t$$

$$= \int_{\xi=x_3} c_p [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)] \Delta x ;$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]_{\substack{x=x_5 \\ t=t_3}} \Delta t \Delta x + F(x_4, t_4) \Delta x \Delta t$$

$$= \left[c_p \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right]_{\substack{x=x_3 \\ t=t_5}} ,$$

donde t_3, t_4, t_5 , y x_3, x_4, x_5 son puntos interiores de los intervalos (t_1, t_2) y (x_1, x_2) .

Después de dividir entre el producto $\Delta x \Delta t$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{\substack{x=x_5 \\ t=t_3}} + F(x, t) \Big|_{\substack{x=x_4 \\ t=t_4}} = c_p \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\substack{t=t_5 \\ x=x_3}} .$$

Todo lo anterior es aplicable a intervalos $(x_1, x_2), (t_1, t_2)$ cualesquiera. Al pasar al límite cuando $x_1, x_2 \rightarrow x$, $t_1, t_2 \rightarrow t$ se obtiene la ecuación de la conducción del calor, o más brevemente, la Ecuación del calor.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} .$$

Consideremos ahora algunos casos particulares.

A) Si la barra es homogénea, entonces k, c, ρ se pueden considerar constantes, y la ecuación se escribe en la forma

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t); \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}; \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{c\rho},$$

donde a^2 es una constante, llamada Coefficiente de Conductividad de temperatura. Si no hay fuentes de calor, es decir $F(x, t) = 0$, la ecuación del calor tiene la sencilla forma

$$u_t = a^2 u_{xx} .$$

B) La densidad de las fuentes de calor puede depender de la temperatura. En el caso de un intercambio térmico con el medio que se somete a la Ley de Newton, la cantidad de calor que pierde la barra, calculada en las unidades de longitud y tiempo, es igual a $F_0 = h(u - \theta)$,

donde $\theta(x,t)$ es la temperatura del medio, h , el coeficiente de intercambio térmico. De esta manera, la densidad de las fuentes caloríficas en el punto x en el momento t es igual a

$$F = F_1(x,t) - h(u - \theta),$$

donde F_1 es la densidad de las otras fuentes de calor. Si la barra es homogénea, la ecuación del calor con intercambio térmico lateral tiene la forma

$$u_t = a^2 u_{xx} - \alpha u + f(x,t),$$

donde $\alpha = \frac{h}{c\rho}$, $f(x,t) = \alpha\theta(x,t) + \frac{F_1(x,t)}{c\rho}$,

Aquí, f es una función conocida.

c) Los coeficientes k y c son generalmente funciones de la temperatura de variación lenta. Por esta razón, la suposición hecha sobre la constancia de estos coeficientes es posible sólo con la condición de que se tomen intervalos pequeños de variación de temperatura. El estudio de los procesos térmicos en un gran intervalo de variación de temperaturas nos lleva

a la ecuación cuasilineal del calor para un medio no homogéneo.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) = C(u, x) \rho(u, x) \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Con el fin de obtener una solución única de la ecuación del calor, es necesario agregar a ésta condiciones iniciales y de frontera. La condición inicial, a diferencia de la ecuación de tipo hiperbólico, consiste sólo en la determinación de los valores de la función $u(x, t)$ en el momento inicial t_0 .

Las condiciones de frontera pueden ser diferentes, según el régimen de temperatura en las fronteras. Se estudian tres tipos fundamentales de condiciones de frontera (o contornos).

A) En el extremo de la barra $x=0$, se da la temperatura $u(0, t) = \mu(t)$,

donde $\mu(t)$ es una función dada en cierto segmento $t_0 \leq t \leq T$, siendo T el intervalo de tiempo.

durante el cual se estudia el proceso.

B) En el extremo $x=0$, se da el valor de la derivada

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = v(t),$$

siendo $v(t)$ una función conocida.

C) En el extremo $x=0$, se da una relación lineal entre la derivada y la función

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -\lambda [u(0,t) - \theta(t)].$$

Esta condición de frontera corresponde a un intercambio térmico de acuerdo con la ley de Newton en la superficie del cuerpo con el medio ambiente, cuya temperatura θ es conocida y $\lambda = \frac{h}{k}$ es el coeficiente de intercambio térmico.

Para el extremo $x=L$ de la barra se plantean las condiciones de igual manera.

Las condiciones de frontera para $x=0$ y $x=L$ pueden ser de diferentes tipos, de tal manera que el número de problemas distintos es grande.

El primer problema de contorno para la ecuación del calor se plantea como sigue.

Hallar una función $u(x,t)$ que satisfaga a la ecuación del calor

$$u_t = a^2 u_{xx}, \text{ para } 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T,$$

y que satisfaga además a las condiciones

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L,$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(L,t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

donde $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ son funciones dadas.

Llamaremos Solución del primer problema de contorno a una función $u(x,t)$ que tenga las propiedades siguientes

1) $u(x,t)$ está definida y es continua en la región

$$0 \leq x \leq L, \quad t_0 \leq t \leq T;$$

2) $u(x,t)$ satisface a la ecuación del calor en la

región $0 < x < L, \quad t_0 \leq t;$

3) $u(x,t)$ satisface a la condición inicial y de fronteras, es decir

$$u(x,t_0) = \varphi(x), \quad u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(L,t) = \mu_2(t),$$

donde $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ son funciones continuas, que satisfacen a las condiciones de conjugación.

$$\varphi(0) = \mu_1(t_0), \quad [= u(0, t_0)],$$

$$\varphi(L) = \mu_2(t_0), \quad [= u(L, t_0)].$$

Estas últimas condiciones son necesarias para la continuidad de $u(x, t)$ en la región cerrada.

Análogamente se plantean los otros problemas de contorno con las distintas combinaciones de condiciones de contorno para $x=0$ y $x=L$.

Además de estos problemas, a menudo se encuentran los casos límite. Consideremos el proceso de conducción del calor en una barra muy larga. Durante un pequeño intervalo de tiempo, la influencia del régimen térmico dado en la frontera influye muy débilmente en la parte central de la barra, y la temperatura en este intervalo se determina fundamentalmente sólo por la distribución inicial de la temperatura. En este caso, el cálculo exacto de la longitud de la barra no tiene significación, puesto que la variación de su longitud no influye fundamentalmente

en la temperatura del intervalo que nos interesa; en problemas de este tipo, comúnmente se considera que la barra tiene longitud infinita.

Así, se plantea el problema con Condiciones Iniciales o Problema de Cauchy sobre la distribución de la temperatura en la recta infinita.

Hallar la solución de la ecuación del calor en la región $-\infty < x < \infty$, $t \geq t_0$, que satisfaga a la condición $u(x, t_0) = \varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$,

donde $\varphi(x)$ es una función dada.

Análogamente, si el segmento de barra, cuya temperatura nos interesa, se halla cerca de un extremo y lejos del otro, en este caso, la temperatura prácticamente se determina por el régimen térmico del extremo próximo, y por las condiciones iniciales. En problemas de este tipo, generalmente se considera que la barra es seminfinita, y que la coordenada, contada a partir del extremo, varía entre los límites $[0, \infty)$. Veamos un ejemplo de este tipo de problemas.

El primer problema de contorno para la barra semi-infinita se plantea como sigue.

Hallar la solución de la ecuación del calor en la región $0 < x < \infty$, $t_0 \leq t$, que satisfaga a las condiciones

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad t \geq t_0,$$

donde $\varphi(x)$ y $\mu(t)$ son funciones dadas.

Los problemas expuestos son casos límite o degeneraciones de los problemas de contorno fundamentales.

También son posibles los casos límite del problema fundamental de otro tipo, cuando se desprecia el cálculo exacto de las condiciones iniciales. La influencia de las condiciones iniciales en la propagación de la temperatura por la barra se debilita con el transcurso del tiempo. Si el momento que nos interesa está suficientemente lejano del inicial, la temperatura de la barra se determina prácticamente por las condi-

ciones de fronteras, puesto que la variación de las condiciones iniciales no cambiaría el estado térmico de la barra en los límites de la exactitud de la observación.

En este caso se puede considerar, prácticamente, que el experimento se prolongó un tiempo infinitamente largo, y que por esto las condiciones iniciales no influyen:

Así, se obtiene el problema de contorno sin condiciones iniciales.

Hallar la solución de la ecuación del calor para $0 \leq x \leq L$, $t > -\infty$, que satisfaga a las condiciones

$$u(0, t) = \mu_1(t)$$

$$u(L, t) = \mu_2(t).$$

Según el régimen de frontera, también son posibles otros tipos de problemas sin condiciones iniciales.

Terminaremos esta parte con la observación siguiente.

La ecuación con coeficientes constantes

$$V_t = a^2 V_{xx} + \beta V_x + \gamma V$$

se reduce, mediante el cambio

$$v = e^{\mu x + \lambda t} u, \quad \text{para } \mu = -\frac{\beta}{2a^2}, \quad \lambda = \gamma - \frac{\beta^2}{4a^2}$$

a la forma $u_t = a^2 u_{xx}$,

lo que nos permite extender de manera inmediata los resultados de la última.

II El Principio del Máximo.

Venimos en seguida una propiedad de la solución de la ecuación del calor que nos permitirá establecer de manera inmediata la unicidad y la estabilidad de esta solución.

Esta propiedad, denominada principio del máximo, nos dice que la función $u(x,t)$, solución de la ecuación del calor, definida en la región cerrada $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq L$, alcanza su valor máximo en el momento inicial o en los puntos $x=0$ o $x=L$ de la frontera. El sentido físico de este resultado es evidente: si la tem-

peratura en la frontera y en el momento inicial no supera cierto valor M , entonces, si no hay fuentes de calor dentro de la barra, no se puede crear una temperatura mayor que M .

La función $u(x,t) = \text{Constante}$, satisface obviamente a la ecuación, y alcanza su valor máximo en cualquier punto, sin embargo esto no contradice al resultado, puesto que de su condición se deduce que si el valor máximo se alcanza dentro de la región, este también (y no solamente) se debe alcanzar o bien para $t=0$, o bien para $x=0$, o para $x=L$.

Demostrado este teorema, se puede demostrar un resultado equivalente sobre el valor mínimo. Este teorema diría que el valor mínimo de la función que satisface a la ecuación del calor se alcanza en las fronteras o en el momento inicial.

En efecto, si la función u , solución de la ecuación del calor alcanza su máximo en algún punto, la función $u_1 = -u$ también es solución y alcanza su mínimo en

donde u alcanza su máximo.

Teorema: (Principio del Valor Máximo)

Si una función $u(x,t)$ definida y continua en la región $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq L$, satisface a la ecuación del calor $u_t = a^2 u_{xx}$ en los puntos de la región $0 < x < L$, $0 < t \leq T$,

Entonces, el valor máximo de la función $u(x,t)$ se alcanza o bien en los puntos $x=0$ o $x=L$ de la frontera o bien en el momento inicial.

Demostración:

Sea M el valor máximo de $u(x,t)$ para $t=0$ ($0 \leq x \leq L$), o para $x=0$ o bien para $x=L$ en $0 \leq t \leq T$, y supongamos que existe un punto (x_0, t_0) , con $0 < x_0 < L$, $0 < t_0 \leq T$, tal que la función $u(x,t)$ alcance su valor máximo, es decir

$$u(x_0, t_0) = M + \epsilon, \quad \epsilon > 0.$$

Estamos utilizando un resultado que nos asegura que toda función continua definida en una región cerrada alcanza su máximo en esa región.

Como en (x_0, t_0) , la función $u(x, t)$ alcanza su valor máximo, necesariamente debe pasar

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leq 0,$$

Como $u(x_0, t)$ alcanza su valor máximo para $t = t_0$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0.$$

Al evaluar la ecuación del calor en (x_0, t_0) se observa que ambos miembros de esta ecuación son de signo diferente. Sin embargo, este razonamiento aún no demuestra el teorema, puesto que ambos miembros pueden ser nulos, lo cual no implica ninguna contradicción.

Definamos $v(x, t) = u(x, t) + k(t_0 - t)$,

donde k es esta constante positiva. Es evidente que

$v(x, t)$ es continua, y que

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \epsilon,$$

con $k(t_0 - t) \leq kT$.

Tomemos k de tal forma que kT sea menor que $\frac{\epsilon}{2}$, es decir $k < \frac{\epsilon}{2T}$; entonces, el valor máximo de

$v(x,t)$ para $t=0$, o bien $x=0$, $x=L$ no superará a $M + \frac{\epsilon}{2}$, es decir

$$v(x,t) \leq M + \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para } t=0, \text{ ; } x=0, \text{ ; } x=L,$$

En virtud de la continuidad de la función $v(x,t)$, ésta debe alcanzar su valor máximo en cierto punto (x_0, t_0) . Es evidente que

$$v(x_0, t_0) \geq v(x_0, t_0) = M + \epsilon.$$

Aquí $t_0 > 0$, $0 < x_0 < L$, ya que para $t=0$; $x=0$; $x=L$, $v(x,t) \leq M + \frac{\epsilon}{2}$.

En el punto (x_0, t_0) debe suceder

$$v_{xx}(x_0, t_0) \leq 0, \quad v_t(x_0, t_0) \geq 0.$$

De aquí, se obtienen las relaciones siguientes

$$u_{xx}(x_0, t_0) = v_{xx}(x_0, t_0) \leq 0,$$

$$u_t(x_0, t_0) = v_t(x_0, t_0) + k \geq k > 0,$$

de donde se deduce que

$$u_t(x_0, t_0) - a^2 u_{xx}(x_0, t_0) \geq k > 0.$$

Esto quiere decir que la ecuación del calor no se satisface en el punto interior (x_0, t_0) .

Se demuestra así que la solución $u(x,t)$ de la ecuación del

calor, no puede, dentro de la región, tomar valores que superen al valor máximo de $u(x,t)$ en la frontera, es decir, para $t=0$, $x=0$, $x=L$.

La unicidad de la solución de la ecuación del calor, puede ahora establecerse fácilmente.

Teorema (de unicidad):

Si dos funciones $u_1(x,t)$ y $u_2(x,t)$ definidas y continuas en la región $0 \leq x \leq L$, $0 \leq t \leq T$, satisfacen a la ecuación del calor

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \text{ para } t > 0, 0 < x < L.$$

y a iguales condiciones iniciales y de frontera

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = \varphi(x)$$

$$u_1(0,t) = u_2(0,t) = \mu_1(t)$$

$$u_1(L,t) = u_2(L,t) = \mu_2(t),$$

Entonces $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$.

Demostración:

Definamos $v(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t)$.

Esta función es continua en la región de definición de u_1 y u_2 . Además $v(x,t)$ es solución de la ecuación

ción del calor homogénea en esta misma región.

De esta forma se puede aplicar el principio del Máximo a esta función, es decir, ésta alcanza sus valores máximos y mínimos o bien para $t=0$, o bien para $x=0$, ó $x=L$.

Por hipótesis se tiene

$$v(x,0)=0, \quad v(0,t)=0, \quad v(L,t)=0.$$

Lo cual implica $v(x,t) \equiv 0$,

es decir $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$.

De aquí se deduce que la solución del primer problema de contorno es única.

Otros corolarios del principio del máximo son los siguientes.

Lema 1: Si dos soluciones de la ecuación del calor, u_1 y u_2 , satisfacen a las condiciones

$$u_1(x,0) \leq u_2(x,0),$$

$$u_1(0,t) \leq u_2(0,t), \quad u_1(L,t) \leq u_2(L,t),$$

Entonces $u_1(x,t) \leq u_2(x,t)$,

para todos los valores de $0 \leq x \leq L$, $0 \leq t \leq T$.

Demostración: La función $v(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t)$ satisface a las hipótesis del principio del valor máximo. Además

$$v(x,0) \geq 0, \quad v(0,t) \geq 0, \quad v(L,t) \geq 0.$$

Por esta razón

$$v(x,t) \geq 0, \quad \text{para } 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T,$$

ya que si no fuera así, la función $v(x,t)$ tendría un valor mínimo negativo en la región

$$0 < x < L, \quad 0 < t \leq T.$$

Lema 2. Si tres soluciones de la ecuación del calor $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$

satisfacen a las condiciones

$$u_1(x,t) \leq u_2(x,t) \leq u_3(x,t), \quad \text{para } t=0, x=0, \text{ y } x=L,$$

Entonces, estas mismas desigualdades se cumplen idénticamente, es decir, para todos los valores (x,t) en $0 \leq x \leq L$, $0 \leq t \leq T$.

Demostración: Este enunciado es una aplicación del Lema 1 a las funciones

$$u_1(x,t), \quad u_2(x,t) \quad \text{y} \quad u_2(x,t), \quad u_3(x,t).$$

Con estos resultados, es posible establecer la dependencia continua de la solución del primer problema de contorno de los valores inicial y de frontera.

Teorema (de estabilidad):

Si para dos soluciones $u_1(x,t)$ y $u_2(x,t)$ de la ecuación del calor, tiene lugar la desigualdad

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \epsilon, \text{ para } t=0, x=0, x=L,$$

entonces

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \epsilon \text{ idénticamente.}$$

Es decir, se satisface para todos los valores (x,t) en $0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T$.

Demostración: El Lema 2 aplicado a las soluciones siguientes de la ecuación del calor nos proporcionan esta afirmación.

$$v(x,t) = -\epsilon$$

$$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

$$w(x,t) = \epsilon.$$

III. El Método de Fourier.

Iniciaremos el estudio del primer problema general de contorno con la resolución del siguiente problema canónico:

Hallar la solución continua en la región cerrada $0 \leq x \leq L$, $0 \leq t \leq T$, de la ecuación homogénea

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T,$$

que satisfaga a la condición inicial

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L,$$

y a las condiciones de frontera

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Establezcamos en primer lugar, el problema Auxiliar fundamental:

Hallar la solución de la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

que no sea idénticamente nula, que satisfaga a las condiciones homogéneas de frontera

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0,$$

Y que se represente en la forma

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

donde $X(x)$ es una función sólo de la variable x ,
y $T(t)$, sólo de t .

Substituyendo la forma propuesta de la solución en la ecuación que se pretende resolver, y dividiendo ambos miembros de la igualdad entre a^2XT , se obtiene la simplificación siguiente

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

donde λ es una constante, ya que el primer miembro de la igualdad depende sólo de t , y el segundo, sólo de x .

De aquí se obtiene el sistema siguiente

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$T' + a^2\lambda T = 0,$$

Las condiciones de frontera nos indican

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0.$$

De esta manera, para determinar la función $X(x)$

se obtiene el siguiente problema de Sturm-Liouville:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0,$$

este problema ya ha sido analizado anteriormente (ver Cap. IV; § 2, III). Como se demostró, sólo para

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

existen soluciones no triviales de la ecuación, e igual-

les a
$$X_n(x) = \text{sen } \frac{\pi n}{L} x.$$

A estos valores propios, les corresponden las soluciones siguientes de la segunda ecuación del sistema

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t},$$

donde C_n son coeficientes momentáneamente indeterminados.

Volviendo al problema auxiliar fundamental, se admite que las funciones

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t} \text{Sen } \frac{\pi n}{L} x,$$

son soluciones particulares de la ecuación, que satisfacen a las condiciones de frontera nulas.

Resolvamos ahora el problema canónico. Escribamos

formalmente su solución como la serie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 a^2 t} \operatorname{Sen} \frac{\pi n}{L} x.$$

La función $u(x,t)$ satisface a las condiciones de frontera, puesto que la satisfacen todos los términos de la serie. Al pedir que no cumplan las condiciones iniciales, se obtiene

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{Sen} \frac{\pi n}{L} x,$$

donde C_n son los coeficientes de Fourier de la función $\varphi(x)$ al ser desarrollada en serie de senos en el intervalo $(0, L)$

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(\xi) \operatorname{Sen} \frac{\pi n}{L} \xi d\xi.$$

La función $u(x,t)$ con los coeficientes determinados satisface todas las condiciones de nuestro problema original. Para ver esto basta demostrar que la función $u(x,t)$, determinada por la serie, es derivable, satisface a la ecuación en la región

$0 < x < L$, $t > 0$, y es continua en los puntos de la frontera de esta región, es decir para $t=0$, $x=0$, $x=L$.

Como la ecuación homogénea del calor es lineal, en virtud del principio de superposición, la serie formada por soluciones particulares, también será solución, si ésta converge y se puede derivar término a término dos veces con respecto a x y una vez con respecto a t .

Si la función $\varphi(x)$ es continua, tiene derivada continua a pedazos y satisface a las condiciones $\varphi(0)=0$, $\varphi(L)=0$, entonces, la serie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a^2 t} \operatorname{Sen} \frac{n\pi}{L} x$$

determina una función continua para $t \geq 0$.

En efecto, de la desigualdad

$$|u_n(x,t)| < |c_n|, \text{ para } t \geq 0, 0 \leq x \leq L,$$

se deduce directamente la convergencia uniforme de la serie anterior para $t \geq 0$, $0 \leq x \leq L$, lo que

demuestra la veracidad de la afirmación hecha, si se tiene en cuenta que para una función $\varphi(x)$ continua y suave a pedazos, la serie de los valores absolutos de los coeficientes de Fourier converge, si $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$.

IV La Transformada de Fourier.

La aplicación de la transformación de Fourier a ecuaciones diferenciales, se basa en que esta transformación convierte la operación de diferenciación en la de multiplicación por la variable independiente.

Sin embargo este método es poco fecundo en el caso de ecuaciones ordinarias, ya que la solución de ecuaciones lineales de coeficientes constantes, a las que puede ser aplicado, no ofrece, por sí misma grandes dificultades.

Es de mayor importancia la aplicación de la Transformación de Fourier a ecuaciones en derivadas parciales, donde permite, en ciertas condiciones, reducir la solución de una ecuación de este tipo a la solución de una ecuación diferencial ordinaria. Ilustremos este hecho resolviendo el problema de Cauchy para la ecuación del calor.

Necesitaremos el resultado siguiente

Lema: si $f(x) = e^{-ax^2}$,

Entonces $F[f] = g(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Demostración:

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\lambda x} dx,$$

El integrando representa a una función analítica que no tiene singularidades en ninguna parte finita del plano. Por lo tanto, en virtud del teorema de Cauchy, la integral no cambiará de valor, si, en lugar de tomarse respecto al eje real, se toma respecto a cualquier recta $z = x + iy$ ($y = \text{cte}$)

paralela a este eje. Es decir,

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+iy)^2} e^{-i\lambda(x+iy)} dx \\ &= e^{ay^2 + \lambda y} \int e^{-ax^2 - 2aixy - i\lambda x} dx \\ &= e^{ay^2 + \lambda y} \int e^{-ax^2 - ix(2ay + \lambda)} dx. \end{aligned}$$

Escojamos ahora la constante y de tal manera que se anule la parte imaginaria en el exponente del integrando, esto es tomemos $y = \frac{-\lambda}{2a}$. Entonces

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= e^{\frac{a\lambda^2}{4a^2} - \frac{\lambda^2}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \end{aligned}$$

ya que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

En particular, para $a = \frac{1}{2}$, tenemos

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad g(\lambda) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Es decir, la función $e^{-\frac{x^2}{2}}$ corresponde a sí misma, salvo un coeficiente constante, en la transformación de Fourier.

Problema (De Cauchy para la ecuación del calor):

Se busca la solución de la ecuación

$$u_t = u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) = u_0(x)$$

El contenido físico de este problema consiste en determinar la temperatura de una varilla termoconductiva infinita para cualquier momento $t > 0$, si en el momento inicial $t = 0$, su temperatura en cada punto está dada por $\varphi(x) = u_0(x)$.

Buscaremos la solución del problema planteado en la clase de funciones $u(x, t)$ que satisfacen las condiciones siguientes:

A) Las funciones $u(x, t)$, $u_x(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$ son absolutamente integrables en todo el eje x para $t \geq 0$ fijo.

B) La función $u_t(x, t)$ tiene en todo intervalo finito $0 \leq t \leq T$ una mayorante integrable $f(x)$, que no depende de t , es decir

$$|u_t(x, t)| \leq f(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx < +\infty.$$

Aplicaremos la transformación de Fourier a la ecuación

del calor. En el miembro derecho tenemos

$$F[u_{xx}(x,t)] = -\lambda^2 v(\lambda,t),$$

donde $v(\lambda,t) = F[u(x,t)]$.

En virtud de la condición B, en el miembro izquierdo se tiene

$$\begin{aligned} F[u_t(x,t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t) e^{-i\lambda x} dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\lambda x} dx \\ &= v_t(\lambda,t). \end{aligned}$$

De esta manera, la transformación de Fourier convierte a la ecuación del calor en la siguiente ecuación diferencial ordinaria.

$$v_t(\lambda,t) = -\lambda^2 v(\lambda,t)$$

Ahora debemos buscar la solución de esta ecuación que satisfaga a la condición inicial

$$\begin{aligned} v_0(\lambda) &= F[u_0(x)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) e^{-i\lambda x} dx. \end{aligned}$$

Esta solución es

$$v(\lambda,t) = e^{-\lambda^2 t} v_0(\lambda).$$

Ahora, para obtener la solución del problema inicial,

debemos encontrar una función $u(x,t)$ cuya transformación de Fourier es la función $v(\lambda,t)$.

Recordando el lema previo se tiene

$$F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right] = e^{-\lambda^2 t}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} v(\lambda,t) &= F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right] F[u_0(x)] \\ &= F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x)\right]. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Convulsión, se obtiene la Fórmula de Poisson para la solución de la ecuación del calor.

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} u_0(x-\xi) d\xi.$$

§4. La Ecuación de Laplace

Las ecuaciones de Laplace, y la de Poisson, son los representantes más sencillos de las ecuaciones de tipo elíptico.

Se ha hecho una justificación del surgimiento histórico, del aspecto físico, y de la importancia de la ecuación de Laplace en el Capítulo I.

Vemos aquí el buen planteamiento de este problema, es decir, las condiciones bajo las cuales se garantiza la existencia, la unicidad, y la estabilidad de su solución.

I Problemas Fundamentales

Definición: Una función $u(x, y)$ se denomina

Armónica si satisface a la ecuación de Laplace.

es decir, si $\Delta u(x, y) = u_{xx} + u_{yy} = 0$.

En general, al operador $\Delta u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$ se le denomina Laplaciano de u .

La presentación de este operador en coordenadas esféricas es

$$\Delta u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

Aquí, $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$.

La presentación del Laplaciano de u en coordenadas cilíndricas es

$$\Delta u(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

donde, $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$.

Estas modalidades del Laplaciano de u serán útiles cada vez que exista la necesidad de tratar con problemas que involucren geometría esférica o circular.

La ecuación de Laplace con simetría esférica se reduce a la ecuación ordinaria

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0,$$

cuya solución es $u(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$.

Haciendo, por ejemplo $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ se obtiene la función $u(r) = \frac{1}{r}$, denominada Solución Fundamental de la Ecuación de Laplace en el Espacio.

La función $u(r) = \frac{1}{r}$ satisface a la ecuación de Laplace en todos partes, excepto en $r=0$, en donde se vuelve infinita.

La ecuación de Laplace con simetría cilíndrica se reduce a la forma

$$\frac{d}{dp} \left(p \frac{du}{dp} \right) = 0.$$

cuya solución es $u(p) = C_1 \ln p + C_2$.

seleccionando $C_1 = -1$, $C_2 = 0$, se tiene la solución fundamental de la Ecuación de Laplace en

el plano (para dos variables independientes).

$$u(\rho) = \ln \frac{1}{\rho} ..$$

Esta función satisface a la Ecuación de Laplace en todo el plano, excepto, en el punto $\rho = 0$, en donde se vuelve infinita.

Las funciones $u(r) = \frac{1}{r}$, $u(\rho) = \ln\left(\frac{1}{\rho}\right)$ tienen una gran importancia en la teoría de las funciones armónicas.

Un método muy general de resolución de los problemas bidimensionales de la Ecuación de Laplace, es el que utiliza funciones de variable compleja.

Sea $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$

esta función de la variable compleja $z = x + iy$, siendo u, v funciones reales de las variables x, y .

El mayor interés lo tienen las funciones llamadas Análíticas, para las cuales existe la derivada

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} ..$$

El incremento $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ puede, evidentemente, tender a cero de varias maneras. Para cada una de estas maneras de tender Δz a cero se puede obtener, en general, un valor distinto del límite.

Sin embargo, si la función $w = f(z)$ es analítica, el límite $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z)$ no depende del camino elegido.

Las condiciones necesarias y suficientes para que una función sea analítica, se llaman Condiciones de Cauchy-Riemann.

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Una manera de obtener estas condiciones es la siguiente. sea $w = u + iv = f(z)$ una función analítica.

$$w_x = u_x + iv_x = \frac{\partial w(z)}{\partial z} z_x = \frac{dw}{dz},$$

$$w_y = u_y + iv_y = \frac{\partial w(z)}{\partial z} z_y = i \frac{dw}{dz}.$$

se tiene así

$$u_x + iv_x = v_y - iu_y = \frac{dw}{dz},$$

De donde se deducen las Ecuaciones de Cauchy-Riemann.

En la teoría de funciones de variable compleja se demuestra que una función analítica en cierta región G del plano $z = x + iy$, tiene en esta región derivadas de todos los órdenes, y se desarrolla en serie de Potencias. En particular, para esta función, $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tienen derivadas continuas de segundo orden, con respecto a x e y . De las condiciones de Cauchy-Riemann se sigue inmediatamente que

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

De esta manera, las partes real e imaginaria de una función analítica satisfacen a la ecuación de Laplace. Estas funciones u y v se conocen como Armónicas Conjugadas.

Consideremos ahora a la Transformación

$$\Phi \begin{cases} x = x(u, v), & u = u(x, y) \\ y = y(u, v), & v = v(x, y) \end{cases}$$

que transforma biunívocamente cierta región G del plano (x, y) en la región G' del plano (u, v) .

Sea $U = U(x, y)$, esta función real con derivadas continuas, definida dentro de la región G .

Analizaremos como varía en esta transformación el operador de Laplace de la función

$$U = U(x(u, v), y(u, v)) = \tilde{U}(u, v).$$

Calculamos las derivadas de la función

$$U_x = \tilde{U}_u u_x + \tilde{U}_v v_x, \quad U_y = \tilde{U}_u u_y + \tilde{U}_v v_y,$$

$$U_{xx} = \tilde{U}_{uu} u_x^2 + \tilde{U}_{vv} v_x^2 + 2\tilde{U}_{uv} u_x v_x + \tilde{U}_u u_{xx} + \tilde{U}_v v_{xx},$$

$$U_{yy} = \tilde{U}_{uu} u_y^2 + \tilde{U}_{vv} v_y^2 + 2\tilde{U}_{uv} u_y v_y + \tilde{U}_u u_{yy} + \tilde{U}_v v_{yy},$$

Obtenemos así

$$U_{xx} + U_{yy} = \tilde{U}_{uu} (u_x^2 + u_y^2) + \tilde{U}_{vv} (v_x^2 + v_y^2) + 2\tilde{U}_{uv} (u_x v_x + u_y v_y) + \tilde{U}_u (u_{xx} + u_{yy}) + \tilde{U}_v (v_{xx} + v_{yy}).$$

Si las funciones u y v son armónicas conjugadas, la transformación Φ es equivalente a la transformación que se efectúa mediante la función analítica

$$w = f(z) = u + iv, \quad z = x + iy.$$

Las relaciones siguientes se satisfacen, como consecuencia de las condiciones de Cauchy-Riemann.

$$u_x^2 + u_y^2 = u_x^2 + v_x^2 = v_y^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2,$$

$$u_x v_x + u_y v_y = 0.$$

De esta manera

$$U_{xx} + U_{yy} = (\tilde{U}_{uu} + \tilde{U}_{vv}) |f'(z)|^2,$$

es decir,

$$\Delta \tilde{U}(u,v) = \frac{1}{|f'(z)|^2} \Delta U(x,y).$$

Se deduce así que, bajo la transformación Φ , la función $U(x,y)$, armónica en la región G , se transforma en la función $\tilde{U}(u,v)$ armónica en la región G' , siempre que $|f'(z)|^2 \neq 0$.

Veamos ahora los problemas bien planteados fundamentales para la ecuación de Laplace.

Problema de Dirichlet:

Hallar una función armónica u en una región G , y que satisfaga a la siguiente condición de frontera

$$u = f, \text{ en } \Gamma.$$

donde f es una función dada, y Γ es la frontera de G .

Este problema también se conoce como Primer Problema de contorno para la ecuación de Laplace.

Problema de Neumann:

Hallar una función armónica u en la región G , y que satisfaga a la siguiente condición de frontera

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f, \text{ en } \Gamma,$$

donde f es una función dada, y $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada dirigida por la normal exterior a Γ , la frontera de G .

también se conoce a este, como Segundo Problema de Contorno para la Ecuación de Laplace.

En cada uno de los casos anteriores, si se busca la solución en la región interna (o Externa), con respecto a la frontera Γ , el problema correspondiente se llama Primer o segundo Problema de contorno Interno (o Externo).

El siguiente es un problema más general que se

quiere de un tratamiento extenso con teoría de funciones de variable compleja, así que únicamente se enunciará aquí.

Problema con Derivada Oblicua:

Hallar la solución $\varphi(x, y)$ de la ecuación de Laplace $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$ que sea continua conjuntamente con sus derivadas primeras hasta la frontera inclusive, y que satisface la condición de frontera $\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_r = f(s)$.

Aquí $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ designa a la derivada en alguna dirección r .

Si denotamos los cosenos directores de esta dirección por $a(s)$, $-b(s)$, la condición de frontera se escribirá como sigue

$$a(s) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - b(s) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f(s).$$

Hagamos $u = \varphi_x$, $v = -\varphi_y$. Evidentemente $u_y = -v_x$.

Además $u_x - v_y = (\varphi_x)_x - (-\varphi_y)_y = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$.

De esta manera, se observa que u y v están relacionadas por las condiciones de Cauchy-Riemann.

La función $u+iv$ resulta ser analítica. La condición de frontera $a\varphi_x - b\varphi_y = f$ se escribe, para esta función analítica, así

$$au + bv = f.$$

El problema de determinar una función φ armónica continua φ que satisfaga a la última condición de frontera escrita se denomina Problema de Hilbert.

El problema de Neumann es el caso particular del problema con derivada oblicua, cuando la dirección ν coincide con la normal.

Mostraremos a continuación una propiedad importante de las funciones armónicas, esto permitirá establecer el buen planteamiento del problema de Dirichlet. Un tratamiento similar es posible para el problema de Neumann.

Tema (Principio del Máximo):

Una función armónica $u(x,y)$, continua en un

dominio cerrado $\bar{G} = G \cup \Gamma$ y que tenga dentro de este dominio derivadas primeras y segundas continuas no puede tomar en el interior del dominio valores mayores que el máximo de sus valores en la frontera Γ .

Demostración:

Sea m el máximo de los valores de $u(x, y)$ en Γ , y supongamos que el valor máximo de u es igual a $u(x_0, y_0) = M > m$. El punto (x_0, y_0) se supone situado dentro de G .

Escribamos la función auxiliar

$$v = u(x, y) + \frac{M-m}{2d^2} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2],$$

donde d es el diámetro de la región G .

De la desigualdad

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq d^2$$

se desprende que sobre Γ

$$v(x, y) \leq m + \frac{M-m}{2d^2} d^2 = \frac{M+m}{2} < M.$$

Por otra parte

$$v(x_0, y_0) = u(x_0, y_0) = M$$

De aquí se sigue que el máximo de $v(x, y)$ dentro de G no es menor que M , y por lo tanto, es mayor que el máximo de v sobre \bar{D} . Este máximo se alcanza, evidentemente, en cierto punto (x, y) interior de G .

En el punto máximo se verifica

$$v_x = v_y = 0 ; \quad v_{xx} \leq 0, \quad v_{yy} \leq 0,$$

y por lo tanto que

$$v_{xx} + v_{yy} \leq 0.$$

sin embargo,

$$\begin{aligned} v_{xx} + v_{yy} &= u_{xx} + u_{yy} + \frac{M-m}{2d^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2] \\ &= 0 + \frac{M-m}{2d^2} [2+2] \\ &> 0. \end{aligned}$$

La contradicción obtenida demuestra el absurdo de la hipótesis que $M > m$.

Se ha demostrado así, que dentro de G ,

$$u(x, y) \leq \max u|_{\bar{D}}.$$

Un principio del mínimo, análogo, puede demos-

trase al aplicar a la función armónica $-u(x, y)$ el teorema anterior.

De esta manera, una función que satisfaga las condiciones del teorema anterior, no puede tomar valores superiores (o inferiores) al máximo (o mínimo) de sus valores en la frontera, en el interior de su dominio.

Corolario 1: Si las funciones u_1 y u_2 son continuas en la región $\bar{G} = G \cup \Gamma$, armónicas en G , y si

$$u_1 \leq u_2 \text{ en } \Gamma,$$

Entonces $u_1 \leq u_2$ en todo punto de G .

Demostración: La función $u_2 - u_1$ es continua en \bar{G} , armónica en G , y $u_2 - u_1 \geq 0$ en Γ .

En virtud del principio del máximo

$$u_2 - u_1 \geq 0 \text{ en todo punto de } G.$$

Corolario 2: Si las funciones u_1 y u_2 son continuas en la región $\bar{G} = G \cup \Gamma$, armónicas en G , y si

$$|u_1| \leq u_2 \text{ en } \Gamma,$$

Entonces $|u_1| \leq u_2$ en todo punto de G .

Demostración: Las funciones u_1 , u_2 y $-u_2$ son armónicas en G , y satisfacen

$$-u_2 \leq u_1 \leq u_2 \text{ en } \bar{G}.$$

Al aplicar 2 veces el corolario I se obtiene que

$$-u_2 \leq u_1 \leq u_2 \text{ en todos puntos de } G.$$

Ahora es posible demostrar los siguientes resultados importantes para el primer problema interior de contorno para la ecuación de Laplace.

Teorema (De Unicidad):

El primer problema interior de contorno para la ecuación de Laplace tiene solución única.

Demostración: Supongamos que u_1 y u_2 son soluciones diferentes del problema, es decir, son funciones continuas en $\bar{G} = G \cup \bar{\Gamma}$, armónicas en G , y que toman en la frontera $\bar{\Gamma}$ el mismo valor f .

Consideremos la función $u = u_1 - u_2$.

u es armónica en G , continua en \bar{G} , y además

$u = 0$ en Γ .

Un hecho importante es el siguiente: Toda función continua en una región cerrada alcanza su máximo en la región.

Si $u > 0$ al menos en algún punto, la función alcanzaría su valor máximo positivo dentro de la región G , lo cual es imposible, por el principio del máximo.

De manera análoga, no puede darse $u < 0$ en un punto interior de G .

Así, se tiene $u \equiv 0$, y por lo tanto $u_1 \equiv u_2$.

Teorema (De estabilidad):

Si dos funciones u_1 y u_2 son soluciones del primer problema de contorno para la ecuación de Laplace (interior), y satisfacen

$$|u_1 - u_2| \leq \varepsilon \text{ en } \Gamma,$$

Entonces, esta desigualdad se satisface para todo punto de G .

Demostración:

Las funciones $u = u_1 - u_2$ y $\tilde{u} = \epsilon$ son continuas en \bar{G} , armónicas en G , y satisfacen

$$|u| \leq \tilde{u} \text{ en } \Gamma.$$

Del corolario 2 se deduce que

$$|u_1 - u_2| \leq \epsilon \text{ en todo punto de } G.$$

II. El Método de Fourier.

El problema de Dirichlet para el círculo es uno de los más importantes de la teoría de las funciones armónicas, lo resolvemos ahora mediante el método de separación de variables.

Problema: Hallar una función u armónica dentro de un círculo, continua en la cerradura del círculo, y que satisfaga a la condición $u = f$ en la frontera del círculo.

Aquí, f es una función continua dada.

Utilizaremos un sistema de coordenadas polares (ρ, φ) con origen en el centro del círculo. La ecuación de Laplace en coordenadas polares tiene la forma siguiente

$$\Delta u(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Busquemos una solución no trivial de la forma

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho) \Phi(\varphi)$$

Al substituir esta solución en la ecuación de Laplace se obtiene

$$\frac{\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right)}{\frac{R}{\rho}} = - \frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda = \text{cte.}$$

De aquí se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones ordinarias

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0, \quad \Phi \neq 0,$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \lambda R = 0, \quad R \neq 0.$$

La primera de estas ecuaciones tiene la solución

$$\Phi(\varphi) = A \cos \sqrt{\lambda} \varphi + B \sin \sqrt{\lambda} \varphi.$$

Obsérvese que, cuando el ángulo φ varía en la magnitud 2π , la función uniforme $u(\rho, \varphi)$ debe retornar su valor inicial

$$u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi)$$

De aquí se deduce que $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$,

es decir, Φ es una función periódica del ángulo φ , con periodo 2π .

Esto sólo es posible si $\sqrt{\lambda} = n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Así que $\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$.

La segunda ecuación del sistema obtenido es del tipo de Euler, su solución debe tener la forma

$$R(\rho) = \rho^M.$$

Al substituir esta solución en la ecuación correspondiente y simplificar, se tiene

$$n^2 = M^2, \text{ es decir, } M = \pm n, n > 0.$$

Por lo tanto

$$R(\rho) = C \rho^n + D \rho^{-n},$$

con C y D constantes.

Para resolver el problema interior hay que hacer $R=C\rho^n$, puesto que si $D \neq 0$, la función $u = R(\rho) \Phi(\varphi)$ se vuelve infinita para $\rho=0$, y no es armónica dentro del círculo.

Para resolver el problema exterior, por el contrario, debemos tomar $R=D\rho^{-n}$, ya que la solución del problema exterior debe estar acotada en el infinito. De esta manera, las soluciones de nuestro problema, para a fijo son

$$u_n(\rho, \varphi) = \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \text{ para } \rho \leq a,$$

$$u_n(\rho, \varphi) = \rho^{-n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \text{ para } \rho \geq a.$$

Las sumas de estas funciones serán también armónicas, a condición de que haya una convergencia suficientemente buena.

Se obtienen así las siguientes soluciones para el problema interior y el exterior respectivamente.

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{-n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Para obtener los coeficientes A_n y B_n será necesario

utilizar la condición de frontera

$$u(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f.$$

Considerando que f está dada como función del ángulo φ , tomemos un desarrollo en serie de Fourier.

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi),$$

$$\text{donde } \alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos n\psi d\psi, \quad n=1, 2, \dots$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin n\psi d\psi, \quad n=1, 2, \dots$$

De donde se obtiene

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = a^{-n} \alpha_n, \quad B_n = a^{-n} \beta_n; \quad \text{para el problema interior,}$$

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = a^n \alpha_n, \quad B_n = a^n \beta_n; \quad \text{para el problema exterior.}$$

De esta manera, hemos obtenido la solución formal del primer problema, interior y exterior para el círculo en forma de la serie

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi),$$

y

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi),$$

respectivamente.

Para comprobar que las funciones obtenidas son efectivamente las soluciones buscadas, hay que demostrar que es aplicable el principio de superposición, para lo cual hay que demostrar la convergencia de las series, la posibilidad de derivarlas término a término, así como también demostrar la continuidad de estas funciones en la frontera del círculo.

Las series anteriores se pueden representar mediante una sola fórmula.

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) + \frac{\alpha_0}{2},$$

donde $t = \begin{cases} \frac{\rho}{a} \leq 1, & \text{para } \rho \leq a \text{ (Problema Interior),} \\ \frac{a}{\rho} \leq 1, & \text{para } \rho \geq a \text{ (Problema Exterior),} \end{cases}$

y α_n, β_n son los coeficientes de Fourier de la función $f(\varphi)$. Demostraremos ahora que esta serie se puede derivar cualquier número de veces, para $t < 1$. Sea

$$U_n = t^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi).$$

La k -ésima derivada de la función U_n con respecto a φ es

$$\frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k} = t^n n^k \left[\alpha_n \cos \left(n\varphi + k \frac{\pi}{2} \right) + \beta_n \sin \left(n\varphi + k \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

De aquí se obtiene la acotación

$$\left| \frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k} \right| \leq t^n n^k 2M,$$

donde M indica el máximo del valor absoluto de los coeficientes de Fourier α_n y β_n .

Fijemos ahora cierto valor $\rho_0 < a$ (para el problema interior), o bien $\rho_0 = \frac{a^2}{\rho} > a$ (para el problema exterior); entonces $t_0 = \frac{\rho_0}{a} < 1$.

Al considerar la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n n^k (|\alpha_n| + |\beta_n|) \leq 2M \sum_{n=1}^{\infty} t_0^n n^k; \quad t \leq t_0,$$

se observa que ésta converge uniformemente para $t \leq t_0 < 1$, para cualquier número k .

Por este razón la serie que expresa el resultado del problema de Dirichlet puede derivarse con respecto a φ en cualquier punto dentro (fuera) del círculo cualquier número de veces.

Análogamente se puede observar que la serie se puede

de derivar con respecto a la variable p dentro (fuera) del círculo de radio $p_0 < a$ ($p_0 > a$) cualquier número de veces.

Como p_0 es arbitrario, se concluye que la serie en cuestión puede derivarse término a término en cualquier punto interior (exterior) del círculo.

De la posibilidad de derivar término a término, se deduce la posibilidad de aplicar el principio de superposición.

De la hipótesis de continuidad y derivabilidad de la función $f(\varphi)$, se deduce que se puede desarrollar en serie de Fourier, así como también la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty$,

Por otra parte

$$|t^n a_n \cos n\varphi| \leq |a_n|$$

$$|t^n b_n \sin n\varphi| \leq |b_n|$$

Por esta razón, la solución converge uniformemente para $t \leq 1$, y por consiguiente, las funciones que estas representan son continuas en la frontera del círculo. De igual manera se observa que la solución

del problema exterior está acotada en el infinito.

Reescribamos ahora la solución del problema interior tratado, substituyendo las expresiones para los coeficientes de Fourier y reordenando.

$$\begin{aligned}
 u(\rho, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (\cos n\psi \cos n\varphi + \sin n\psi \sin n\varphi) \right\} d\psi \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cos n(\varphi - \psi) \right\} d\psi.
 \end{aligned}$$

efectuemos ahora las siguientes transformaciones idénticas

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n(\varphi - \psi) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} t^n (e^{in(\varphi - \psi)} + e^{-in(\varphi - \psi)}) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(te^{i(\varphi - \psi)})^n + (te^{-i(\varphi - \psi)})^n \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{te^{i(\varphi - \psi)}}{1 - te^{i(\varphi - \psi)}} + \frac{te^{-i(\varphi - \psi)}}{1 - te^{-i(\varphi - \psi)}} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1 - t^2}{1 - 2t \cos(\varphi - \psi) + t^2} ;
 \end{aligned}$$

Aquí hemos considerado $t = \frac{\rho}{a} < 1$.

al substituir estos resultados en la función $u(\rho, \varphi)$, se tiene la fórmula siguiente, denominada Integral de Poisson, que da la solución del problema de Dirichlet interior del círculo.

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi.$$

La expresión subintegral

$$K(\rho, \varphi, a, \psi) = \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \psi) + a^2}$$

se denomina Núcleo de Poisson.

Obsérvese que $K(\rho, \varphi, a, \psi) > 0$, cuando $\rho < a$, puesto que $2a\rho < a^2 + \rho^2$, si $\rho \neq a$.

La integral de Poisson fue deducida bajo la hipótesis de que $\rho < a$; para $\rho = a$ esta integral no tiene sentido, sin embargo

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow a \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} u(\rho, \varphi) = f(\varphi_0),$$

puesto que la serie, de donde se obtuvo la integral de Poisson, es una función continua en una región cerrada.

La siguiente función es armónica para $\rho < a$ y es continua en la región cerrada, incluyendo la circunferencia $\rho = a$.

$$u(\rho, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2\rho a \cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi; & \rho < a, \\ f(\varphi) & ; \rho = a. \end{cases}$$

La solución del problema externo de Dirichlet para el círculo es

$$u(\rho, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2\rho a \cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi; & \rho > a, \\ f(\varphi) & ; \rho = a. \end{cases}$$

III. Los mapeos conformes

La ecuación de Laplace es invariante bajo mapeos conformes no degenerados.

Esta propiedad es muy importante, la utilizaremos aquí para solucionar el problema de Dirichlet para el círculo. La solución de este problema se describe mediante la Integral de Poisson.

Teorema: La ecuación de Laplace es invariante con respecto a las transformaciones conformes del plano no degeneradas.

Demostración: Consideremos la transformación

$$\Phi = \begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases}$$

La condición de que una transformación sea conforme se escribe mediante las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

La no degeneración de la transformación equivale a la desigualdad

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \neq 0$$

De las ecuaciones de Cauchy-Riemann se obtienen las siguientes igualdades

$$A) \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}^2$$

$$b) \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0,$$

$$c) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0.$$

Ahora, para una función $u(x,y)$ arbitraria, suficientemente suave, se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2\right]$$

$$+ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta}\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right]$$

$$= \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} .$$

de donde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} .$$

Lo cual muestra la equivalencia de las expresiones siguientes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 .$$

Ahora integremos la igualdad

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} .$$

sobre algún recinto G' del plano ξ, η :

$$\iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta = \iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta ,$$

Si en la transformación Φ , el recinto G' se transforma en el recinto G , entonces

$$\iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

La igualdad

$$\iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

determina la invariancia con respecto a las transformaciones conformes no degeneradas de la Integral de Dirichlet:

$$\iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

La función u que aparece en esta integral no es necesariamente armónica. La integral de Dirichlet es importante en el tratamiento del problema de Dirichlet.

Mostraremos en seguida que la invariancia de la Ecuación de Laplace con respecto a las transformaciones conformes puede utilizarse para resolver el problema

de Dirichlet para el círculo.

Sea $u(x, y)$ la solución del problema de Dirichlet en el círculo, con las condiciones de frontera

$$u(R \cos \theta, R \sin \theta) = F(\theta); \quad x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta.$$

Se sabe que esta solución existe y es única.

Sea $u_0 = u(0, 0)$ el valor que u toma en el centro del círculo.

Las soluciones de la ecuación de Laplace siguen siendo, si sometemos a las variables independientes a una transformación conforme, o en particular, ortogonal. Así que

$$u(x, y, \alpha) = u(x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha)$$

también será una función armónica en el círculo, cuyo valor en la frontera es $F(\theta + \alpha)$.

Al efectuar un giro, el valor en el centro, evidentemente, no varía

$$u(0, 0, \alpha) = u_0.$$

Ahora, consideremos la función

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, y, \alpha) d\alpha$$

Considerando a $u(x, y)$ suficientemente lisa, la integral puede ser derivada con respecto a los parámetros x, y :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 0 d\alpha = 0.$$

Esto quiere decir que \tilde{u} es armónica.

Sus valores en la frontera no dependen de θ , es decir, son constantes.

$$\tilde{u}(R \cos \theta, R \sin \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta + \alpha) d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) d\alpha$$

Ahora, una constante es solución de la ecuación de Laplace, con valores de frontera constantes.

En virtud de la unicidad, no puede haber otra solución que tome en la frontera de la circunferencia el valor $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) d\alpha$.

Así, pues

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) d\alpha, \quad \tilde{u}(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) d\alpha.$$

Por, por otra parte

$$\tilde{u}(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(0, 0, \alpha) d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0 d\alpha = u_0$$

le establece, entonces, que la solución sobre $u(x,y)$ que tome sobre la frontera los valores $F(\theta)$, debe poder calcularse según la fórmula

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta$$

en el centro del círculo.

Procedamos ahora a calcular los valores de la solución en cualquier punto del círculo.

Supongamos que sobre la circunferencia $x = R \cos w$, $y = R \sin w$, hemos dado una función continua $f(w)$. Queremos considerar a $f(w)$ como valores de frontera de un problema de Dirichlet.

La solución $u(x,y)$ de este problema será calculada ahora en el punto $x = \rho$, $y = 0$, $R > \rho \geq 0$.

Sean $z = x + iy$, $\xi = \xi + i\eta$, y efectuemos la transformación racional conforme

$$\xi = R^2 \frac{z - \rho}{R^2 - \rho z}$$

que lleva al punto $z = \rho$, al $\xi = 0$, eje real sobre sí mismo, y la circunferencia $|z| = R$, también sobre sí

misma. Las primeras dos afirmaciones son evidentes, la última es una consecuencia de las igualdades.

$$\begin{aligned} \left| \frac{R^2 R e^{i\omega} - p}{R^2 - p R e^{i\omega}} \right| &= \left| R \frac{R e^{i\omega} - p}{R - p e^{i\omega}} \right| = \left| R e^{-i\omega} \frac{R e^{i\omega} - p}{R e^{-i\omega} - p} \right| \\ &= |R| |e^{i\omega}| \left| \frac{R e^{i\omega} - p}{R e^{-i\omega} - p} \right| = R. \end{aligned}$$

El punto $z = R e^{i\omega}$ se transforma en $\zeta = R e^{i\theta}$, donde los ángulos θ, ω están relacionados por la igualdad

$$R e^{i\theta} = R \frac{R e^{i\omega} - p}{R^2 - p R e^{i\omega}},$$

$$e^{i\theta} = \frac{R e^{i\omega} - p}{R - p e^{i\omega}}.$$

Al derivar esta última expresión se tiene que

$$i e^{i\theta} d\theta = i e^{i\omega} \frac{R^2 - p^2}{(R - p e^{i\omega})^2} d\omega.$$

Al substituir $e^{i\theta}$ por su expresión como expresión de ω , se tiene

$$d\theta = \frac{R - p e^{i\omega}}{R e^{i\omega} - p} e^{i\omega} \frac{R^2 - p^2}{(R - p e^{i\omega})^2} d\omega$$

$$= \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos w + \rho^2} dw.$$

Bajo la transformación que hemos utilizado, la función armónica $u(x, y)$ se transforma en la función armónica $v(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$, que toma el valor $v(0, 0) = u(\rho, 0)$ en el centro, y los valores $v(R \cos \theta, R \sin \theta) = F(\theta)$, en la frontera.

Se sabe que

$$u(\rho, 0) = v(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w) \frac{d\theta}{dw} dw.$$

Al substituir $\frac{d\theta}{dw}$ por su expresión equivalente, nos queda

$$u(\rho, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos w + \rho^2} dw.$$

Ahora, para calcular el valor $u(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha)$ en un punto arbitrario de nuestro círculo, $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, basta girar al vector $(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha)$ en un ángulo α en el sentido de las manecillas del reloj, hasta ubicarlo sobre el eje real.

Al hacer esto, la función $f(w)$ se transformará en $f(w + \alpha)$. Esto nos lleva a la fórmula de Poisson.

$$\begin{aligned}
 u(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + \alpha) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos(w) + \rho^2} dw \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \alpha) + \rho^2} d\theta.
 \end{aligned}$$

Esta fórmula proporciona la solución del problema de Dirichlet en el círculo, para toda función continua $f(\theta)$.

La fórmula de Poisson es fundamental en el estudio de las funciones armónicas. La presentación siguiente nos será de gran utilidad.

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{R^2 - x^2 - y^2}{R^2 - 2R(x \cos \theta + y \sin \theta) + x^2 + y^2} d\theta$$

El desarrollo en fracciones elementales del Núcleo de Poisson nos da otra presentación también útil.

$$\frac{R^2 - x^2 - y^2}{R^2 - 2R(x \cos \theta + y \sin \theta) + x^2 + y^2} = -1 + \frac{Re^{i\theta}}{Re^{i\theta} - (x + iy)} + \frac{Re^{-i\theta}}{Re^{-i\theta} - (x - iy)}$$

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta + 2Re \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{Re^{i\theta}}{Re^{i\theta} - (x + iy)} d\theta.$$

Problemas ahora un resultado del Núcleo de Poisson.

Propiedad:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \omega) + \rho^2} d\theta = 1$$

Demostración:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \omega) + \rho^2} d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int \frac{dz}{z - (x+iy)}$$

donde $\int \frac{dz}{z - (x+iy)}$ se toma por el contorno cerrado que constituye la circunferencia de radio R con centro en el origen de coordenadas.

Por esta razón
$$\oint \frac{dz}{z - (x+iy)} = 2\pi i$$

De esta manera

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \omega) + \rho^2} d\theta = -1 + \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} (2\pi i) = -1 + 2 = 1.$$

IV. La Transformación de Fourier.

Para resolver el problema de Dirichlet en regiones infinitas

es de gran utilidad el Método de transformación de Fourier.

Problema: Hallar una función armónica u definida en la región $y > 0$ del plano xy , y que satisfaga a las condiciones de frontera siguientes

$$u \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty,$$

$$u_x \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty,$$

$$u \text{ acotada, } y \rightarrow \infty,$$

$$u(x, 0) = f(x).$$

Aplicaremos la Transformación de Fourier con respecto a x . La función $u(x, y)$ buscada debe satisfacer

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

$$\text{Sea } F[u] = U(s, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} u(x, y) dx,$$

$$\begin{aligned} F[u_{xx}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} u_{xx}(x, y) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} d^2 u_x(x, y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-isx} u_x(x, y) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{is}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} u_x(x, y) dx. \end{aligned}$$

Se requiere que nuestra solución $u \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, así que sólo nos queda el término último.

$$\begin{aligned}
 F[u_{xx}] &= \frac{is}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} d u(x,y) && 4-144 \\
 &= \frac{is}{\sqrt{2\pi}} e^{-isx} u(x,y) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i^2 s^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} u(x,y) dx \\
 &= -s^2 U(s,y) .
 \end{aligned}$$

Hemos utilizado nuevamente el último argumento.

Para u_{yy} , observemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} u_{yy}(x,y) dx = U_{yy}(s,y) .$$

Así, la ecuación transformada es

$$U_{yy}(s,y) - s^2 U(s,y) = 0 ,$$

cuya solución es

$$U(s,y) = A(s) e^{sy} + B(s) e^{-sy} .$$

Como se requiere que u sea acotada cuando $y \rightarrow \infty$,

$$\text{si } s > 0, \quad U(s,y) = B(s) e^{-sy}, \quad A(s) = 0 ,$$

$$\text{si } s < 0, \quad U(s,y) = A(s) e^{sy}, \quad B(s) = 0 .$$

$$\text{En cada caso} \quad U(s,0) = B(s)$$

$$U(s,0) = A(s)$$

respectivamente.

$$\text{Por lo que} \quad U(s,y) = U(s,0) e^{-|s|y} .$$

Ahora, $U(s,0)$ es la transformación de $u(x,0) = f(x)$.

es decir,
$$U(s,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-isx'} dx'.$$

De tal manera que

$$U(s,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-isx'} dx' e^{-|s|y}.$$

La función armónica buscada es la inversa de esta última función, esto es:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} U(s,y) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-isx'} dx' \right] e^{-|s|y} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-is(x'-x) - |s|y} dx' ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(x'-x) - |s|y} ds dx' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(x'-x) - |s|y} ds dx' \end{aligned}$$

La integral interior es equivalente a

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{is(x-x') - sy} ds + \int_{-\infty}^0 e^{is(x-x') + sy} ds &= \frac{e^{is(x-x') - sy}}{i(x-x') - y} \Big|_0^{\infty} + \frac{e^{is(x-x') + sy}}{i(x-x') + y} \Big|_{-\infty}^0 \\ &= \frac{-1}{i(x-x') - y} + \frac{1}{i(x-x') + y} \end{aligned}$$

$$= \frac{2y}{(x-x')^2 + y^2}$$

Por lo tanto

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{(x-x')^2 + y^2} dx'$$

es la solución del problema de Dirichlet planteado.

Un recurso muy usual para resolver el problema de Neumann para el semiplano, y que involucra a la solución del problema de Dirichlet es el siguiente.

Problema: Hallar una función v armónica definida en la región $y > 0$ del plano xy , y que satisfaga a las condiciones de frontera siguientes.

$$v \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

$$v_x \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

$$v \text{ acotada, } y \rightarrow \infty,$$

$$v_y(x, 0) = f(x).$$

La función $v(x, y)$ armónica buscada debe satisfacer $v_{xx} + v_{yy} = 0$, si $y > 0$.

Sea $u(x, y)$ la solución del problema de Dirichlet hallada recientemente.

Definamos $v_y(x, y) = u(x, y)$.

v está acotada en el semiplano superior, además

$$v_y(x, 0) = u(x, 0) = f(x).$$

Notemos ahora que si $y > 0$,

$$\Delta u(x, y) = \Delta v_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \Delta v(x, y) = 0,$$

La función v puede calcularse fácilmente.

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_0^y u(x, \eta) d\eta \\ &= \int_0^y \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x') dx'}{(x-x')^2 + \eta^2} d\eta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{2 f(x')}{(x-x')^2 + \eta^2} dx' d\eta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^y \frac{2 f(x')}{(x-x')^2 + \eta^2} d\eta dx' \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \int_0^y \frac{2}{(x-x')^2 + \eta^2} d\eta dx' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \log [(x-x')^2 + y^2] dx'. \end{aligned}$$

Tenemos así, la solución del problema de Neumann planteado.

V Propiedades de las funciones armónicas.

Las funciones armónicas tienen muchas propiedades, muy interesantes e importantes todas. Describiremos aquí algunas de éstas.

En el capítulo I (p. 4-1) se dice que el Laplaciano de una función compare a la imagen, de un punto dado bajo la función, con las imágenes bajo la función de todos los puntos de una vecindad. Iniciemos esta parte dando una argumentación rigurosa de este hecho.

Teorema (de la media aritmética):

Si $u(x, y)$ es continua en el círculo $C \{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq R^2\}$, y armónica dentro de éste,

Entonces
$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R \cos \varphi, y_0 + R \sin \varphi) d\varphi$$

Demostración: Escribamos la fórmula de Poisson para un círculo con centro en (x_0, y_0) .

$$u(x_0 + \rho \cos \alpha, y_0 + \rho \sin \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R \cos \varphi, y_0 + R \sin \varphi) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + 2R\rho \cos(\varphi - \alpha) + \rho^2} d\varphi$$

El teorema queda demostrado al hacer $p=0$.

Corolario 1. Con las mismas hipótesis,

$$u(x_0, y_0) = \frac{\iint_C u(x, y) dx dy}{\iint_C dx dy} = \frac{\iint_C u(x, y) dx dy}{\pi R^2}$$

Demostración: para cualquier número r , $0 \leq r \leq R$,
se tiene, de acuerdo al teorema

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) d\varphi$$

Multipliquemos ambos miembros de esta igualdad por $r dr$ e integremos con respecto a r , desde 0 hasta R :

$$u(x_0, y_0) \int_0^R r dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R u(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) r dr d\varphi,$$

De aquí se sigue que

$$u(x_0, y_0) = \frac{\iint_C u(x, y) dx dy}{\frac{R^2}{2} (2\pi)}.$$

Este resultado no es sino otra manera de escribir el teorema de la media aritmética.

Corolario 2. Con las mismas hipótesis,

$$|u(x_0, y_0)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi R^2}} \sqrt{\iint_C u^2(x, y) dx dy}$$

demostración: Del corolario anterior, se tiene

$$|u(x_0, y_0)| = \frac{1}{\pi R^2} \left| \iint_C u(x, y) dx dy \right| \leq \frac{1}{\pi R^2} \iint_C |u(x, y)| dx dy$$

La demostración se concluye al aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwartz-Bunyakovski

$$\begin{aligned} \iint_C |u(x, y)| dx dy &\leq \sqrt{\iint_C u^2(x, y) dx dy} \sqrt{\iint_C 1^2 dx dy} \\ &= \sqrt{\pi R^2} \sqrt{\iint_C u^2(x, y) dx dy} \end{aligned}$$

Un primer resultado sobre convergencia de funciones armónicas se probará en seguida.

Corolario 3.

Sea G el conjunto de puntos del dominio G que se encuentran a distancia mayor que $\delta/2$ de su frontera.

Si la sucesión $\{u_n(x, y)\}$ de funciones armónicas, continuas en \bar{G} , converge en G en media cuadrática,

Entonces, converge uniformemente en cada subdominio G_δ de G .

Demostración: Para cada círculo de radio δ con centro en G_δ , enteramente contenido en G , se tiene

$$\max_{(x,y) \in G_\delta} |u_n(x,y) - u_m(x,y)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \delta \sqrt{\iint_G (u_n - u_m)^2 dx dy},$$

lo cual demuestra lo requerido. Obsérvese que la función $(u_n - u_m)$ también es armónica.

Una función armónica continua dentro de un círculo puede ser derivada tantas veces como se quiera, para probar esto, obsérvese que

$$\frac{\partial^n}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \left[\frac{Re^{ip}}{Re^{ip} - (x+iy)} \right] = \frac{n! Re^{ip} i^{n-m}}{[Re^{ip} - (x+iy)]^{n+1}},$$

y que $|Re^{ip} - (x+iy)| \geq R - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Esto último se hace evidente si consideramos, en el plano complejo, el triángulo que tiene por vértices los puntos Re^{ip} , $x+iy$, y el origen de coordenadas.

De aquí se sigue que

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \frac{R e^{i\varphi}}{R e^{i\varphi} - (x+iy)} \right| \leq \frac{n! R}{(R - \sqrt{x^2 + y^2})^{n+1}}.$$

Análogamente

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \frac{R e^{-i\varphi}}{R e^{-i\varphi} - (x-iy)} \right| \leq \frac{n! R}{(R - \sqrt{x^2 + y^2})^{n+1}}.$$

La existencia, acotación y continuidad de todas estas derivadas hacen lícita la derivación formal, dentro del círculo $x^2 + y^2 \leq r^2 < R^2$, de la fórmula de Poisson.

$$u(x, y) = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi) R e^{i\varphi} d\varphi}{R e^{i\varphi} - (x+iy)} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi) R e^{-i\varphi} d\varphi}{R e^{-i\varphi} - (x-iy)}$$

con respecto a los parámetros x, y tantas veces como se quiera. La continuidad de las derivadas n -ésimas sigue de la acotación de las $n+1$ -ésimas.

Para las derivadas n -ésimas ($n > 0$), retiene la acotación siguiente

$$\left| \frac{\partial^n u(x, y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \right| \leq \frac{2n! R M}{(R - \sqrt{x^2 + y^2})^{n+1}}$$

Aquí hemos designado por M al máximo de $|f(\varphi)|$, que es igual a $\max |u(R \cos \varphi, R \sin \varphi)|$.

En el centro del círculo, es decir, cuando $x=y=0$,

se tiene

$$\left| \left[\frac{\partial^n u(x,y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} \right| \leq \frac{2^n! M}{R^n}.$$

Es claro que una acotación análoga puede escribirse también para un círculo con centro en un punto ar-

bitrario

$$\left| \left[\frac{\partial^n u(x,y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \right| \leq \frac{2^n!}{R^n} \max_{\varphi} |u(x_0 + R \cos \varphi, y_0 + R \sin \varphi)|.$$

Un teorema sobre convergencia de funciones armónicas, más fuerte que el anterior es el siguiente.

Teorema (De Harnack) :

Una sucesión de funciones armónicas en G , continuas en \bar{G} que converja uniformemente en la frontera Γ del dominio G , será uniformemente convergente también dentro de G . Además su límite será una función armónica.

Para cada subdominio G_5 interior, la convergencia será uniforme no sólo para las propias funciones, sino también para las derivadas de cualquier orden.

Demostración: La convergencia uniforme de la sucesión $\{u_k(x, y)\}$ dentro de G se sigue de su convergencia uniforme sobre la frontera. Esto puede comprobarse aplicando el principio del máximo a la función armónica $u_k(x, y) - u_l(x, y)$.

Demostremos ahora la convergencia uniforme de las derivadas de algún orden prefijado, digamos, n ,

$$\frac{\partial^n u_k(x, y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$$

dentro de $G\delta$.

Consideremos un círculo concéntrico en un punto arbitrario (x_0, y_0) y radio δ , que esté enteramente dentro de G , y apliquemos a la función armónica $u_k(x, y) - u_l(x, y)$, la acotación.

$$\left| \left[\frac{\partial^n (u_k - u_l)}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \right| \leq \frac{2n!}{\delta^n} \max_{\substack{(x-x_0)^2 + \\ (y-y_0)^2 = \delta^2}} |u_k(x, y) - u_l(x, y)|$$

$$\leq \frac{2n!}{\delta^n} \max_{\Gamma} |u_k(x, y) - u_l(x, y)|.$$

Como $(x_0, y_0) \in G\delta$ es un punto arbitrario, se concluye

que en todo punto interior de G se tiene

$$\left| \frac{\partial^n (u_k - u_l)}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \right| \leq \frac{2^n!}{\delta^n} \text{Máx}_\Gamma |u_k(x,y) - u_l(x,y)|.$$

Esta desigualdad demuestra, precisamente, la convergencia uniforme de las derivadas en G .

Según un conocido teorema del análisis, de aquí se desprende que en todo punto de G existen las derivadas

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^m \partial y^{n-m}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial^n u_k}{\partial x^m \partial y^{n-m}}.$$

Pasando al límite cuando $k \rightarrow \infty$ en la ecuación

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} = 0,$$

se concluye que la función límite $u(x,y)$ es armónica en el dominio G .

Un corolario importante del teorema de Harnack es el siguiente:

Corolario: Una sucesión $u_k(x,y)$ armónicas en un

cierto dominio G y continua en su clausura \bar{G} , que conveja en media cuadrática dentro de este dominio, será uniformemente convergente dentro de cualquier subdominio G_1 , así como también sus derivadas de cualquier orden.

El límite de esta sucesión, será una función armónica $u(x, y)$, y el de la sucesión de sus derivadas, las derivadas correspondientes de u .

Demostración: Se sigue del teorema de Harnack, y del tercer corolario sobre la media aritmética.

En el siguiente resultado, se deduce una desigualdad muy importante (y elegante) para funciones armónicas no negativas, a partir de la fórmula de Poisson.

Propiedad (Desigualdad de Harnack):

Sea $u(x, y) \geq 0$ armónica dentro del círculo

$C = \{ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq R^2 \}$, y continua en todo él, incluyendo su frontera,

Entonces u satisface la desigualdad.

$$\frac{R-p}{R+p} u(x_0, y_0) \leq u(x_0 + p \cos \alpha, y_0 + p \sin \alpha) \leq \frac{R+p}{R-p} u(x_0, y_0),$$

para todo $0 \leq p \leq R$.

Demostración:

Utilicemos la desigualdad

$$\frac{R-p}{R+p} = \frac{R^2 - p^2}{(R+p)^2} \leq \frac{R^2 - p^2}{R^2 + p^2 - 2Rp \cos \omega} \leq \frac{R^2 - p^2}{(R-p)^2} = \frac{R+p}{R-p},$$

y la fórmula de Poisson,

$$u(x_0 + p \cos \alpha, y_0 + p \sin \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R \cos \varphi, y_0 + R \sin \varphi) \frac{R^2 - p^2}{R^2 + p^2 - 2Rp \cos(\varphi - \alpha)} d\varphi.$$

Tomando en cuenta, además, que

$$u(x_0 + R \cos \varphi, y_0 + R \sin \varphi) = f(\varphi)$$

es no negativa, se tiene

$$\left(\frac{R-p}{R+p}\right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi \leq u(x_0 + p \cos \alpha, y_0 + p \sin \alpha) \leq \left(\frac{R+p}{R-p}\right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi$$

En virtud del teorema sobre la media aritmética

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = u(x_0, y_0).$$

Y así, queda probada la desigualdad de Harnack.

El siguiente resultado es un teorema muy importante sobre las funciones armónicas definidas en todos los puntos del plano (x, y) .

Teorema (De Liouville):

Una función $u(x, y)$ armónica en todo el plano no puede estar acotada por arriba o por abajo, a menos que sea constante.

Demostración: Si $u(x, y)$ está acotada por arriba, la función $-u(x, y)$ estará acotada por abajo, Así que basta considerar el caso en que una función armónica $u(x, y)$ es mayor en todas partes que un cierto número M .

Más aún podemos asumir que $M=0$. En efecto, $u(x, y) - M \geq 0$, y la diferencia $u - M$ es armónica.

Así, suponiendo que existe una función $u(x, y)$ armónica y no negativa en todo el plano, proba-

emos que es constante.

Aplicaremos la desigualdad de Harnack ($0 < \rho < R$)

$$\frac{R-\rho}{R+\rho} u(0,0) \leq u(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha) \leq \frac{R+\rho}{R-\rho} u(0,0).$$

Si la función $u(x,y)$ es armónica en todo el plano ($u \geq 0$), fijando un número $\rho > 0$ arbitrario, y aumentando R indefinidamente, obtenemos que

$$u(0,0) \leq u(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha) \leq u(0,0),$$

es decir $u(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha) \equiv u(0,0)$.

Lo cual prueba el teorema de Liouville.

Finalmente, probemos una generalización importante del principio del máximo para funciones armónicas.

Teorema (Principio fuerte del Máximo):

Si una función $u(x,y)$, armónica dentro de un dominio G , toma su valor máximo o bien su valor mínimo, en algún punto interior (x_0, y_0) ,

Entonces $u(x, y) = \text{constante}$ en G .

Demostración: Basta considerar el caso $u(x, y) \geq u(x_0, y_0) = 0$. Todos los demás casos se reducen a éste, como se observa del teorema anterior.

Supongamos que el círculo de radio R con centro en el punto (x_0, y_0) está contenido en G . Para cualquier punto interior (x, y) de este círculo,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 < R^2,$$

se tendrá, por la desigualdad de Harnack

$$0 = \frac{R - \rho}{R + \rho} u(x_0, y_0) \leq u(x, y) \leq \frac{R + \rho}{R - \rho} u(x_0, y_0) = 0.$$

Se sigue que $u(x, y) = 0$ dentro del círculo.

Ahora, sea (x^*, y^*) otro punto interior cualquiera de G . Unamos este punto con el (x_0, y_0) , por medio de una línea poligonal, que se encuentre enteramente en G . Supongamos que cada punto de la poligonal se halla a una distancia mayor que $\delta > 0$ de la frontera.

seleccionemos $R < \delta$, y fijemos sobre la poligonal una sucesión finita de puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, con $x_n = x^*$, $y_n = y^*$, de tal manera que $(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2 \leq \frac{R^2}{4}$.

Si trazamos un círculo con centro en el punto (x_k, y_k) de radio R , el punto (x_{k+1}, y_{k+1}) estará en su interior.

Si ya hemos podido demostrar que $u(x_k, y_k) = 0$, para la función armónica no negativa $u(x, y)$, entonces por lo que acabamos de probar, también será $u(x_{k+1}, y_{k+1}) = 0$.

Por consiguiente, de $u(x_0, y_0) = 0$, se desprende que $u(x^*, y^*) = 0$.

Esto demuestra el principio fuerte del máximo.