

T-496
Z
DES
g.1

0623



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ingeniería

División de Estudios Superiores

INTERACCION SUELO-AGUA-CORTINA EN PRESAS
DURANTE SISMO

T E S I S

Que como candidato al grado de:

DOCTOR EN INGENIERIA

P r e s e n t a :

Fernando Zamorano Bernal

México, D. F.

1977

0623

IN MEMORIAM. 1971

A mi padre, José María Zamorano Aguirre

INTERACCION SUELO - AGUA - CORTINA EN PRESAS DURANTE SISMO

- I Antecedentes
- II Objetivos
- III Desarrollo del modelo matemático
 - 1. Elementos finitos de agua
 - 2. Elementos finitos de un sólido elástico lineal
 - 3. Interfases
 - 4. Fronteras absorbentes
 - 4.1 Método de W.D.Smith
 - 4.2 Método de J. Lysmer
 - 4.3 Método de Robinson
 - 5. Fronteras activas
 - 6. Solución del sistema de ecuaciones diferenciales de movimiento
 - 6.1 Método de matrices de transición
 - 6.2 Método de E. Buturla
- IV Comprobación del modelo
- V Aplicación a un estudio paramétrico
- VI Conclusiones y recomendaciones

I ANTECEDENTES

Para cálculo de presiones hidrodinámicas sobre la cortina de una presa diferentes autores han hecho análisis que emplean diversidad de hipótesis simplificadoras.

Dependiendo de las hipótesis empleadas, se reportan en la literatura valores de presión hidrodinámica que para un mismo temblor oscilan entre 30 y 300 por ciento de la presión hidrostática. Tomando en cuenta las consecuencias que tiene la falla de una presa así como el costo que suele alcanzar la construcción de una estructura de esta clase, salta a la vista la importancia de acotar de manera más precisa la presión hidrodinámica de diseño con base en análisis que empleen el menor número posible de hipótesis simplificadoras y que las hipótesis representen lo más cercanamente posible el comportamiento real. Esto involucra considerar el comportamiento dinámico del sistema agua-cortina-suelo.

A la fecha se ha realizado gran volumen de investigaciones concernientes a presiones del agua sobre presas rígidas. En varios de esos estudios se ha considerado la presión del agua como fuerza externa proporcional a una masa virtual de agua, reduciéndose el problema a determinar la respuesta de la presa sujeta a la aceleración del terreno y a dichas fuerzas externas. Este procedimiento no toma en cuenta la interacción entre la cortina y el agua almacenada. El grado de acoplamiento entre las dos fases dependerá de sus propiedades relativas. Si la frecuencia natural de la cortina es mucho mayor que la fundamental del agua almacenada, puede ser aceptable el procedimiento mencionado, pero las frecuencias fundamentales de las dos fases pueden ser del mismo orden; es entonces imprescindible tomar en cuenta la interacción.

Chopra ha desarrollado investigaciones para tomar en cuenta la interacción agua-cortina, considerando que la cortina se deforma en su modo fundamental y tratando el agua como un continuo gobernado por la ecuación de onda bidimensional. Holla que sí es importante reconocer la interacción entre cortina y agua (9).

Este procedimiento está restringido a que la cortina tenga el paramento de aguas arriba vertical y el fondo del vaso sea horizontal. Posteriormente Chopra, Wilson y Farhoomand salvan esta restricción empleando elementos finitos para representar el sistema agua-cortina; reportan que la flexibilidad de la cortina tiene efectos significativos en las fuerzas hidrodinámicas y mencionan que puede ser interesante estudiar el efecto de la interacción con el subsuelo y la variación espacial de la excitación (6).

En la ref 1 Rasenblueth reseña el estado del arte en este campo.

II OBJETIVOS

Como se implica en las páginas anteriores, a la fecha no se ha estudiado satisfactoriamente el comportamiento dinámico de presas considerando la participación conjunta de los tres subsistemas suelo, agua y cortina, por lo que en el presente trabajo se pretenderá llenar en parte este hueco.

El problema se planteará en el marco de comportamiento lineal. Puesto que un estudio en tres dimensiones sería en exceso ambicioso, el trabajo estará confinado a un modelo bidimensional lineal. La hipótesis de linealidad es una limitación seria, ya que es seguro que durante un temblor intenso el comportamiento real del fenómeno en estudio estará lejos de ser lineal, sobre todo en lo que se refiere al comportamiento del suelo. Sin embargo, todo método de análisis lineal en el dominio del tiempo puede adaptarse a comportamiento no lineal tratando el problema como de rigidez variable.

El objetivo principal de la tesis será dar un paso en el campo de la interacción suelo-agua-cortina en presas sujetas a temblor. Quizá en un futuro, al ampliarse la capacidad y velocidad de los sistemas de cómputo electrónico, sea factible estudiar la respuesta de modelos tridimensionales no lineales a un costo razonable.

Otro objetivo será mejorar los métodos conocidos para modelar una frontera no reflejante con el fin de eliminar reflexión de ondas espurias al simular un semiespacio mediante un modelo con número finito de elementos finitos.

III DESARROLLO DEL MODELO MATEMATICO

La complejidad del problema anula la posibilidad de solución analítica a un modelo matemático constituido por un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que tome en cuenta los diferentes materiales, fronteras irregulares y carácter transitorio de la excitación, por lo que se deberá recurrir a discretización. Esta puede aplicarse al sistema de ecuaciones mediante diferencias finitas o al modelo icónico del sistema físico mediante elementos finitos.

Para el desarrollo de este trabajo se ha elegido el método de elementos finitos. ¿ Por qué elementos finitos ? Para dar una respuesta a esta pregunta no trivial, será necesario definir el método en forma general. Veremos como, dentro de una definición amplia, las técnicas de diferencias finitas quedan como subclase dentro de la metodología general de elementos finitos, que de hecho abarca muchos otros procedimientos clásicos de solución numérica. En el campo de estructuras y mecánica de sólidos los procedimientos de elementos finitos casi han desplazado a las otras alternativas. Lo mismo empieza a suceder en el campo de mecánica de fluidos.

El método del elemento finito reemplaza al continuo por un número limitado de subdominios (o elementos) cuyo comportamiento se puede modelar convenientemente a través de los grados de libertad nodales. Dichos elementos pueden ensamblarse mediante procesos bien conocidos del análisis de sistemas discretos.

Podemos definir pues el método de elementos finitos como un proceso de aproximación en el cual:

- a) El comportamiento del sistema continuo completo que involucra un número infinito de grados de libertad se representa en forma aproximada con un número finito

de parámetros, a_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

b) Las n ecuaciones que gobiernan el comportamiento del sistema completo discretizado,

$$F_j(a_i) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

pueden ensamblarse mediante adición de las contribuciones de los subdominios o elementos que dividen el dominio en entidades físicamente identificables sin traslapes o exclusiones. Tiene importancia práctica el que generalmente la contribución de los elementos sea muy localizada; ello conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas con matriz de coeficientes porosa y en banda. Además la banda es simétrica con la diagonal principal en virtud del principio de reciprocidad. Aunque esto no es esencial en la definición del proceso de elementos finitos, en la práctica significa la posibilidad de manejar solamente la semibanda con el considerable ahorro en memoria de computadora asociado.

Cualquier problema de valores en la frontera puede definirse, ya sea por un sistema de ecuaciones diferenciales válido en un dominio Ω

$$D(\phi) = 0$$

junto con las condiciones de frontera asociadas que deben satisfacerse en Γ (fronteras del dominio)

$$B(\phi) = 0$$

(donde D y B son operadores diferenciales aplicados a una función ϕ de una o mas variables independientes las cuales representan el estado del sistema físico.) o por un principio variacional que requiera que una funcional escalar Π tenga valor estacionario:

$$\pi = \int_{\Omega} G(\phi) d\Omega + \int_{\Gamma} g(\phi) d\Gamma$$

(donde G y g son operadores diferenciales).

En ambos planteamientos ϕ puede representar una función incógnita o un conjunto de tales funciones.

Para obtener una aproximación de elementos finitos del problema general descrito, podemos proceder como sigue:

- I) Expresamos las funciones incógnitas mediante un número finito de funciones de interpolación N_i supuestas y parámetros nodales incógnitos a_i : $\hat{\phi} = \sum_{i=1}^n N_i a_i$
- II) Expresamos la aproximación en la forma de n ecuaciones, las cuales están definidas como integrales sobre Ω y Γ , esto es,

$$F_i = \int_{\Omega} E(\hat{\phi}) d\Omega + \int_{\Gamma} e(\hat{\phi}) d\Gamma \quad i = 1, 2, \dots, n$$

y tenemos en cuenta que:

$$\int_{\Omega} () d\Omega = \sum \int_{\Omega^e} () d\Omega^e$$

$$\int_{\Gamma} () d\Gamma = \sum \int_{\Gamma^e} () d\Gamma^e$$

donde E y e son operadores diferenciales, $\hat{\phi}$ es la aproximación de las funciones incógnitas, Ω^e y Γ^e significan subdominios a nivel de elemento.

Un punto crucial en la metodología viene a ser entonces el problema de formar las integrales de aproximación., lo cual logramos mediante :

Principios variacionales. Si el problema se puede plantear en términos de un funcional estacionario la formulación de elementos finitos es más directa ya que podemos escribir la forma aproximada del funcional como

$$\pi \doteq \hat{\pi} = \pi(\hat{\phi})$$

y mediante la condición de estacionariedad tendremos un sistema de n ecuaciones

$$F_i = \frac{\partial \pi}{\partial a_j} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

las cuales, por la definición de π , están en forma integral.

Integrales pesadas. Es posible reemplazar las ecuaciones diferenciales que gobiernan un problema de valores en la frontera por un planteamiento integral equivalente, o sea,

$$\int_{\Omega} W^t D(\phi) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}^t B(\phi) d\Gamma = 0$$

donde W y \bar{W} = funciones de peso. Inmediatamente surge la posibilidad de una aproximación en forma integral seleccionando funciones de peso específicas W_i y \bar{W}_i escribiendo

$$\int_{\Omega} W_i^t D(\hat{\phi}) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_i^t B(\hat{\phi}) d\Gamma = 0$$

Este proceso se conoce con el nombre de método de residuos pesados por considerar a $D(\hat{\phi})$ y $B(\hat{\phi})$ como residuos de la aproximación. El proceso de Galerkin, en el que las funciones de peso son idénticas a las funciones de interpolación, es el más usado.

Integrales directas. En muchas situaciones físicas es posible formular el problema directamente en forma integral sin necesidad de escribir las ecuaciones diferenciales, partiendo de algún principio físico global. Un ejemplo típico es la aplicación del principio del trabajo virtual de mecánica a la formulación directa de elementos finitos en problemas de ingeniería estructural.

3.1 Elementos finitos de agua

En el modelo puede discretizarse el agua haciendo un planteamiento variacional, o partiendo de la ecuación de onda, en términos de la presión hidrodinámica, o aplicando un principio físico global.

Si partimos de la ecuación de onda en términos de la presión hidrodinámica, puesto que la discretización de la cortina y del suelo se hará en el campo de desplazamientos, será conveniente trabajar el agua en el campo de los desplazamientos. Por ello, escribimos las ecuaciones de movimiento en un sistema cartesiano,

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = 0$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0$$

donde

u = desplazamiento horizontal

v = desplazamiento vertical

t = tiempo

ρ = densidad

k = módulo de deformación volumétrica

Si llamamos $Q = -(\rho/k) \partial^2 u / \partial t^2$, $R = -(\rho/k) \partial^2 v / \partial t^2$

podemos escribir las ecuaciones de movimiento como

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + Q = 0, \quad k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + R = 0$$

Es posible reemplazar estas ecuaciones por las integrales pesadas siguientes, en todos aspectos equivalentes,

$$\int_{\mathcal{V}} W_i \left[k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + Q \right] d v = 0$$

$$\int_{\mathcal{V}} W_i \left[k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + R \right] d v = 0.$$

donde W_i son funciones de peso arbitrarias.

Si discretizamos en términos de los desplazamientos nodales tendremos

$$u = [N] \cdot \{u^e\}, \quad v = [N] \cdot \{v^e\}$$

donde $[N] = [N_1, N_2, N_3, \dots, N_n]$ = funciones de interpolación,

$\{u^e\}, \{v^e\}$ = vectores de desplazamientos nodales horizontales y verticales respectivamente de un elemento, y si además aplicamos el proceso de Galerkin.

Podemos entonces escribir las integrales pesadas como

$$\int_{\mathcal{V}} N_i \left[k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + Q \right] d v = 0,$$

$$\int_{\mathcal{V}} N_i \left[k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + R \right] d v = 0$$

Esta forma integral requiere continuidad en las pendientes en todas las interfaces para evitar infinitos en las segundas derivadas.

Para quitar esta restricción integramos por partes. Trabajando con la primera ecuación tenemos

$$\int_V N_i k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy + \int_V N_i k \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy + \int_V N_i Q dx dy =$$

$$k \int_S N_i \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_A^B dy - k \int_V \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy + k \int_S N_i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_A^B dx$$

$$- k \int_V \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy + \int_V N_i Q dx dy$$

donde podemos hacer $\int_S N_i \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_A^B dy = \oint N_i \frac{\partial u}{\partial x} l_x ds = \oint N_i \frac{\partial u}{\partial n} ds$

donde $l_x =$ coseno director de la normal hacia afuera respecto al eje x.

De igual manera, $\int_S N_i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_A^B dx = \oint N_i \frac{\partial v}{\partial n} ds$

haciendo lo mismo con la segunda ecuación y agrupando términos tendremos

$$k \int_V \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right] dx dy - \int_V N_i Q dx dy$$

$$- \oint N_i \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = 0$$

$$k \int_V \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy - \int_V N_i R dx dy$$

$$- \oint N_i \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = 0$$

sustituyendo en estas ecuaciones $u = [N] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$, $v = [N] \begin{Bmatrix} v \\ u \end{Bmatrix}$ obtenemos

$$k \int_V \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} \{u^e\} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial x} \{v^e\} \right] dx dy - \int_V N_i Q dx dy$$

$$- \int_S N_i \left[\frac{\partial [N]}{\partial n} \{u^e\} + \frac{\partial [N]}{\partial n} \{v^e\} \right] ds = 0$$

$$k \int_V \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial y} \{u^e\} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \{v^e\} \right] dx dy - \int_V N_i R dx dy$$

$$- \int_S N_i \left[\frac{\partial [N]}{\partial n} \{u^e\} + \frac{\partial [N]}{\partial n} \{v^e\} \right] ds = 0$$

Agrupando los desplazamientos en un punto como $\phi_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$ podemos ensamblar la forma estándar del sistema de ecuaciones algebraicas

$$[K] \{\phi\} + \{F\} = 0 \quad \text{para todo el dominio, donde}$$

la contribución de cada elemento será

$$k_{ij}^e = k \int_V \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \\ \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_l}{\partial x} & \frac{\partial N_l}{\partial y} \\ \frac{\partial N_k}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_l}{\partial x} & \frac{\partial N_l}{\partial y} \end{bmatrix} dx dy$$

En forma alternativa podemos emplear un planteamiento directo basados en el principio físico global del trabajo virtual y obtener exactamente la misma expresión arriba anotada para los elementos de la matriz de rigidez.

Trabajaremos con elementos finitos cuadriláteros planos con cuatro puntos nodales.

Seleccionamos un sistema local de coordenadas (s, t) tales que s y t varíen de -1 a $+1$ en cada elemento (fig 1) y usamos las funciones de interpolación

$$N_1 = (1-s)(1-t)/4, \quad N_3 = (1+s)(1-t)/4$$

$$N_2 = (1+s)(1-t)/4, \quad N_4 = (1-s)(1+t)/4$$

enseguida expresamos los desplazamientos de cualquier punto de un elemento en términos de los desplazamientos nodales de dicho elemento:

$$u(s, t) = \sum_{i=1}^4 N_i u_i, \quad v(s, t) = \sum_{i=1}^4 N_i v_i$$

o sea,

$$u(s, t) = \begin{bmatrix} (1-s)(1-t)/4, & (1+s)(1-t)/4, \\ (1+s)(1+t)/4, & (1-s)(1+t)/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

$$v(s, t) = \begin{bmatrix} (1-s)(1-t)/4, & (1+s)(1-t)/4, \\ (1+s)(1+t)/4, & (1-s)(1+t)/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Podemos escribir entonces

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-s)(1-t) & 0 & (1+s)(1-t) & 0 \\ 0 & (1-s)(1-t) & 0 & (1+s)(1-t) \\ (1+s)(1+t) & 0 & (1-s)(1+t) & 0 \\ 0 & (1+s)(1+t) & 0 & (1-s)(1+t) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

La relación desplazamiento-deformación

$$\begin{Bmatrix} \epsilon \\ \epsilon \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

expresada en términos de los parámetros nodales será

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \end{Bmatrix} = 1/4 \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(1-s)(1-t)}{0} \right] & \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{0}{(1-s)(1-t)} \right] \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(1+s)(1-t)}{0} \right] & \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{0}{(1+s)(1-t)} \right] \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(1+s)(1+t)}{0} \right] & \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{0}{(1+s)(1+t)} \right] \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(1-s)(1+t)}{0} \right] & \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{0}{(1-s)(1+t)} \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Pero sabemos que $\partial/\partial s = (\partial x/\partial s)(\partial/\partial x) + (\partial y/\partial s)(\partial/\partial y)$

$$\partial/\partial t = (\partial x/\partial t)(\partial/\partial x) + (\partial y/\partial t)(\partial/\partial y)$$

De aquí ,

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial s \\ \partial/\partial t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial s & \partial y/\partial s \\ \partial x/\partial t & \partial y/\partial t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix}$$

de donde, resolviendo para las derivadas parciales con respecto a x, y , tendremos

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} = 1/J \begin{bmatrix} \partial y/\partial t & -\partial y/\partial s \\ -\partial x/\partial t & \partial x/\partial s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial/\partial s \\ \partial/\partial t \end{Bmatrix}$$

donde $J =$ determinante del Jacobiano

$$= (\partial x/\partial s)(\partial y/\partial t) - (\partial x/\partial t)(\partial y/\partial s)$$

Si las coordenadas x, y en términos de s, t están dadas por las relaciones

$$x(s, t) = \sum_{i=1}^4 N_i x_i, \quad y(s, t) = \sum_{i=1}^4 N_i y_i$$

donde x_i, y_i son las coordenadas de los nudos, entonces

$$\frac{\partial x}{\partial s} = (-1+t)x_1/4 + (1-t)x_2/4 + (1+t)x_3/4 + (-1-t)x_4/4 = A$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = (-1+s)x_1/4 + (-1-s)x_2/4 + (1+s)x_3/4 + (1-s)x_4/4 = B$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = (-1+t)y_1/4 + (1-t)y_2/4 + (1+t)y_3/4 + (-1-t)y_4/4 = C$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = (-1+s)y_1/4 + (-1-s)y_2/4 + (1+s)y_3/4 + (1-s)y_4/4 = E$$

$$J(s, t) = \left\{ \begin{aligned} &(-x_2 y_1 + x_4 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_3 - x_4 y_3 - x_1 y_4 + x_3 y_4 - x_3 y_2) \\ &+ (x_4 y_2 - x_4 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3 + x_2 y_3 + x_1 y_4 - x_2 y_4 + x_3 y_1) s \\ &+ (x_2 y_1 - x_3 y_1 - x_1 y_2 + x_4 y_2 + x_1 y_3 - x_4 y_3 - x_2 y_4 + x_3 y_4) t \end{aligned} \right\} 1/8$$

y la relación desplazamiento-deformación podrá escribirse como

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \end{Bmatrix} = 1/4 J \begin{bmatrix} E(-1+t) & & E(1-t) & \\ -C(-1+s) & 0 & -C(-1-s) & 0 \\ 0 & A(-1+s) & 0 & A(-1-s) \\ & -B(-1+t) & & -B(1-t) \\ \hline E(1+t) & & E(-1-t) & \\ -C(1+s) & 0 & -C(1-s) & 0 \\ 0 & A(1+s) & 0 & A(1-s) \\ & -B(1+t) & & -B(-1-t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

quedando expresada en términos de los parámetros nodales y las coordenadas locales

s, t como

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \end{Bmatrix} = [B] (u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4)^t$$

Si consideramos el agua como un fluido ideal, en que $\lambda = k$, tendremos las ecuaciones constitutivas de un sólido elástico, isótropo, homogéneo e invíscido, con $\mu = 0$:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D \\ D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \end{Bmatrix}$$

donde λ, μ = constantes de Lamé, y k = módulo de deformación volumétrica del agua.

Efectuando el producto matricial $B^t D B$ y empleando la notación

$$\begin{aligned} F &= (-1+t), \quad G = (-1+s), \quad H = (1-t), \quad L = (-1-s), \quad M = (1+t), \quad P = (1+s), \\ Q &= (1-s), \quad R = (-1-t), \quad A = \partial x / \partial s, \quad B = \partial x / \partial t, \quad C = \partial y / \partial s, \quad E = \partial y / \partial t, \\ (EF - CG) &= Z_1, \quad (AG - BF) = Z_2, \quad (EH - CL) = Z_3, \quad (AL - BH) = Z_4, \\ (EM - CP) &= Z_5, \quad (AP - BM) = Z_6, \quad (ER - CQ) = Z_7, \quad (AQ - BR) = Z_8 \end{aligned}$$

podemos escribir

$$B^t D B = \frac{k}{16 J^2} \begin{bmatrix} Z_1.Z_1 & Z_1.Z_2 & Z_1.Z_3 & Z_1.Z_4 & Z_1.Z_5 & Z_1.Z_6 & Z_1.Z_7 & Z_1.Z_8 \\ & Z_2.Z_2 & Z_2.Z_3 & Z_2.Z_4 & Z_2.Z_5 & Z_2.Z_6 & Z_2.Z_7 & Z_2.Z_8 \\ & & Z_3.Z_3 & Z_3.Z_4 & Z_3.Z_5 & Z_3.Z_6 & Z_3.Z_7 & Z_3.Z_8 \\ & & & Z_4.Z_4 & Z_4.Z_5 & Z_4.Z_6 & Z_4.Z_7 & Z_4.Z_8 \\ & & & & Z_5.Z_5 & Z_5.Z_6 & Z_5.Z_7 & Z_5.Z_8 \\ & & & & & Z_6.Z_6 & Z_6.Z_7 & Z_6.Z_8 \\ & & & & & & Z_7.Z_7 & Z_7.Z_8 \\ & & & & & & & Z_8.Z_8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Es decir, } B^t D B_{p,q} = k / (16 J^2) \begin{bmatrix} Z_p & Z_q \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de un elemento de espesor constante será entonces

$$K_{p,q} = \text{espesor} \iint \left[B^t D B \right]_{p,q} dx dy = \text{espesor} \iint \left[B^t D B \right]_{p,q} J ds dt$$

Empleando integración numérica, para espesor unitario tendremos

$$K_{p,q} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j J(s_i, t_j) \left[B^t D B(s_i, t_j) \right]_{p,q}$$

donde (s_i, t_j) = puntos de integración; W_i, W_j = coeficientes de peso asociados y n = números de puntos de integración empleados.

Con base en la expresión anterior se desarrolló una subrutina para computadora digital con lenguaje FORTRAN IV que genera la matriz de rigidez de los elementos finitos cuadriláteros con ocho grados de libertad para discretizar el agua a partir de las coordenadas de los puntos nodales y el módulo de deformación volumétrica. A esta subrutina se llamó ELH20.

3.2 Elementos finitos de un sólido elástico lineal

Trabajamos nuevamente con elementos cuadriláteros con ocho grados de libertad empleando las mismas funciones de interpolación que en el elemento de agua, solo que ahora la relación desplazamiento deformación es

$$\left\{ \epsilon \right\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} = \left[B \right] \left\{ \delta^e \right\}$$

por lo que ahora tendremos

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$= [B] \left[\delta^e \right]$$

y la relación esfuerzo - deformación será

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

que es válida para estado plano de deformaciones.

Si llamamos

$$N_{ix} = \frac{\partial N_i}{\partial x}, \quad N_{iy} = \frac{\partial N_i}{\partial y}, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \dots$$

y recordamos que

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & -\frac{\partial y}{\partial s} \\ -\frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{Bmatrix}$$

donde $J = (\partial x / \partial s) (\partial y / \partial t) - (\partial x / \partial t) (\partial y / \partial s)$, es el determinante del Jacobiano.

Si además empleamos las mismas funciones de interpolación y la misma relación entre coordenadas locales y globales, tendremos

$$N_{i,x} = 1/J \left[(\partial y / \partial t) (\partial N_i / \partial s) - (\partial y / \partial s) (\partial N_i / \partial t) \right] = DP_i / (16J)$$

para $i = 1, 2, 3, 4$; $i = 1, 3, 5, 7$

$$N_{i,y} = 1/J \left[(\partial x / \partial t) (\partial N_i / \partial s) + (\partial x / \partial s) (\partial N_i / \partial t) \right] = DP_i / (16J)$$

para $i = 1, 2, 3, 4$; $i = 2, 4, 6, 8$

siendo

$$DP_1 = - \left\{ (1-s)(y_4 - y_1) + (1+t)(y_3 - y_2) \right\} (1-t) + \left\{ (1-t)(y_2 - y_1) + (1+t)(y_3 - y_4) \right\} (1-s)$$

$$DP_2 = - \left\{ (1-t)(x_2 - x_1) + (1+t)(x_3 - x_4) \right\} (1-s) + \left\{ (1-s)(x_4 - x_1) + (1+t)(x_3 - x_2) \right\} (1-t)$$

$$DP_3 = - \left\{ (1-s)(y_4 - y_1) + (1+t)(y_3 - y_2) \right\} (1-t) + \left\{ (1-t)(y_2 - y_1) + (1+t)(y_3 - y_4) \right\} (1+s)$$

$$DP_4 = - \left\{ (1-t)(x_2 - x_1) + (1+t)(x_3 - x_4) \right\} (1+s) - \left\{ (1-s)(x_4 - x_1) + (1+t)(x_3 - x_2) \right\} (1-t)$$

$$DP_5 = - \left\{ (1-s)(y_4 - y_1) + (1+t)(y_3 - y_2) \right\} (1+t) - \left\{ (1-t)(y_2 - y_1) + (1+t)(y_3 - y_4) \right\} (1+s)$$

$$DP_6 = - \left\{ (1-t)(x_2 - x_1) + (1+t)(x_3 - x_4) \right\} (1+s) - \left\{ (1-s)(x_4 - x_1) + (1+t)(x_3 - x_2) \right\} (1+t)$$

$$DP_7 = - \left\{ (1-s)(y_4 - y_1) + (1+t)(y_3 - y_2) \right\} (1+t) - \left\{ (1+t)(y_2 - y_1) + (1-t)(y_3 - y_4) \right\} (1-s)$$

$$DP_8 = - \left\{ (1-t)(x_2 - x_1) + (1+t)(x_3 - x_4) \right\} (1-s) + \left\{ (1-s)(x_4 - x_1) + (1+t)(x_3 - x_2) \right\} (1+t)$$

Empleando la notación anterior podemos escribir el pro-

ducto matricial $B^T D B$ de la siguiente manera :

$$\left[B^T D B \right]_{i,j} = \frac{E}{(1-\nu^2)} J^2 \left[\begin{array}{cc} DP_i & DP_i \\ + (1-\nu)/2 (DP_{i+1} & DP_{i+1}) \end{array} \right]$$

para $i = 1, 3, 5, 7$; $i = 1, 3, 5, 7,$

$$\left[B^T D B \right]_{ij} = \frac{E}{(1-\nu^2)J^2} \left[\nu DP_i DP_j + (1-\nu)/2 (DP_{i-1} DP_{j-1}) \right]$$

para $i = 2, 4, 6, 8$; $j = 2, 4, 6, 8$

$$\left[B^T D B \right]_{ij} = \frac{E}{(1-\nu^2)J^2} \left[\nu DP_i DP_j + (1-\nu)/2 (DP_{i+1} DP_{j+1}) \right]$$

para $i = 1, 3, 5, 7$; $j = 2, 4, 6, 8$

$$\left[B^T D B \right]_{ij} = \frac{E}{(1-\nu^2)J^2} \left[\nu DP_i DP_j + (1-\nu)/2 (DP_{i-1} DP_{j+1}) \right]$$

para $i = 2, 4, 6, 8$; $j = 1, 3, 5, 7$

siendo la matriz de rigidez de un elemento igual a

$K = \int \left[B^T D B \right] dv$. Para espesor unitario $dv = dx dy = J ds dt$, por lo que podemos escribir, al emplear integración numérica,

$$K_{p,q} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j J (s_i, t_j) \left[B^T D B \right]_{p,q}$$

$p = 1, 2, \dots, 8$; $q = 1, 2, \dots, 8$

donde s_i, t_j = puntos de integración; W_i, W_j = coeficientes de peso asociado, y n = número de puntos de integración. Con base en la expresión anterior se desarrolló la subrutina de computadora ELEMPL que genera la matriz de rigidez de elementos cuadriláteros planos de un medio continuo elástico lineal, para discretizar el suelo y la cortina a partir de coordenadas nodales y módulos de Young y Poisson.

3.3 Interfases

La interfase suelo-cortina no presenta mayor problema al suponer, que no existirán desplazamientos relativos entre suelo y cortina. No es este el caso para las interfases agua-suelo y agua-cortina, donde el desplazamiento normal a la interfase debe ser el mismo en ambos materiales (considerando que no existe permeabilidad), más el desplazamiento tangencial, en general, deber ser distinto, debido a que el agua desliza sobre la superficie de interfase. Para representar este último fenómeno en el modelo de elementos finitos, cuando la normal a la interfase tiene la misma dirección que uno de los ejes de referencia, usamos nudos dobles en la interfase y hacemos el grado de libertad en la dirección normal igual en ambos nudos, siendo en general distintos en la dirección tangencial (fig 2). Cuando la normal a la interfase no coincide con la dirección de alguno de los ejes de referencia será necesario igualar las proyecciones sobre la normal a la interfase de los desplazamientos de los dos nudos adyacentes. Ello no es fácil introducir en la solución mediante un proceso de integración paso a paso de las ecuaciones diferenciales de movimiento. Por tanto cuando la superficie de interfase sea inclinada con respecto a los ejes globales de referencia se considerará que el agua se mueve con la interfase y que debido a la ausencia de viscosidad del agua los puntos alejados una pequeña distancia de la interfase se comportan como si hubiese habido deslizamiento del agua sobre la superficie de interfase.

En el capítulo correspondiente a la comprobación del modelo, entre otras cosas se evaluará la aproximación de esta suposición.

3.4 Fronteras absorbentes

En un modelo de elementos finitos en que se

pretende manejar el suelo como un semiespacio infinito será necesario introducir fronteras artificiales para limitar el número de elementos a un orden de magnitud compatible con la capacidad del sistema de cómputo a emplear.

Estas fronteras artificiales deben permitir el paso de ondas que se propagan en el medio sin provocar reflexiones espurias que contaminen la solución. Si construimos un modelo suficientemente grande de manera que podamos obtener la solución de interés antes que la reflexión arribe a la zona de estudio, nos habremos sacudido de una manera simple el problema de las reflexiones. Esto no es posible prácticamente en la mayoría de los casos debido a la tremenda capacidad de memoria requerida del sistema de cómputo. Por otra parte al usar un modelo muy grande el tiempo de máquina necesario para la solución de las ecuaciones de movimiento se ve incrementado a niveles prohibitivos.

En este trabajo emplearemos una combinación de los métodos de Smith y de Lysmer. Primeramente se presentará una descripción detallada de ambas, en forma somera la descripción de métodos alternativos, y se justificará la selección de una combinación de los dos primeros como solución al presente estudio.

3.4.1 Método de Smith

Este método involucra la superposición de soluciones con diferentes condiciones de frontera. Elimina de manera analíticamente exacta las reflexiones, independientemente del ángulo de incidencia, frecuencia y tipo de ondas incidentes a una frontera ficticia.

La demostración para el caso de la ecuación de onda escalar es casi trivial:

La ecuación que gobierna el fenómeno es

$\nabla^2 u = 1/c^2 (d^2 u / dt^2)$, cuya solución podemos escribir como

$$u = \exp \left[i\omega/c (x \cos i + y \operatorname{sen} i - ct) \right] + A \exp \left[i\omega/c (-x \cos i + y \operatorname{sen} i - ct) \right]$$

cuando en $x = 0$ tenemos una frontera reflejante. En estas expresiones, con referencia a la fig 3,

u = desplazamiento de las partículas

i = ángulo de incidencia de la onda plana e igual al ángulo de reflexión

ω = frecuencia angular de la onda plana

c = velocidad de propagación de la onda plana

A = amplitud de la onda reflejada cuando la onda incidente es de amplitud unitaria.

Si en la frontera $x = 0$ imponemos la condición

de Neumann $du/dx = 0$ tendremos que $(i\omega/c) \cos i \exp \left[i\omega/c (y \operatorname{sen} i - ct) \right]$

$- (i\omega/c) A \exp \left[i\omega/c (y \operatorname{sen} i - ct) \right] = 0$, de donde $A = 1$; al imponer la condición de Dirichlet, $u = 0$, obtenemos $A = -1$. La superposición de Neumann y

Dirichlet elimina la reflexión. Lo anterior sigue siendo válido en el caso de exis-

tir amortiguamiento en el medio, ya que los exponentes imaginarios son ahora comple-

jos, pero las amplitudes de las ondas reflejadas en las dos soluciones siguen siendo

iguales en magnitud en cada instante y tienen signo contrario.

Para ondas P y ondas S la demostración no es

obvia. Consideremos primero el caso de ondas P o dilatacionales.

Podemos expresar los desplazamientos en térmi-

nos de dos potenciales, ϕ y ψ .

$$\phi = \exp \left[(i\omega/\alpha) (x \cos i + y \operatorname{sen} i - \alpha t) \right] + A \exp \left[(i\omega/\alpha) (-x \cos i + y \operatorname{sen} i - \alpha t) \right]$$

$$\psi = B \exp \left[(i\omega/\beta) (-x \cos j + y \operatorname{sen} j - \beta t) \right]$$

de manera que $u = d\phi/dx - d\psi/dy$, $v = d\phi/dy + d\psi/dx$

$$\text{Además, } \nabla^2 \phi = (1/\alpha^2) (d^2 \phi / dt^2), \quad \nabla^2 \psi = (1/\beta^2) (d^2 \psi / dt^2)$$

ϕ está relacionado con las ondas P incidente y reflejada, y ψ únicamente con la onda S reflejada. La onda P incidente tiene amplitud unitaria y sabemos que una onda P incidente se refleja en una onda P y una onda S, cuyas amplitudes A y B deberemos determinar en función de las condiciones de frontera. Además, en las expresiones de arriba,

α = velocidad de propagación de ondas P en el medio

β = velocidad de propagación de ondas S en el medio

j = ángulo de reflexión de la onda S

i = ángulo de incidencia y reflexión de la onda P

u = desplazamiento paralelo al eje x

v = desplazamiento paralelo al eje y

Si en $x = 0$ imponemos las condiciones de frontera $u = 0$

(Dirichlet) y simultáneamente $\bar{\sigma}_{xy} = \mu (du/dy + dv/dx) = 0$ (Neumann),

resulta $u = d\phi/dx - d\psi/dy =$

$$\left\{ \cos i \exp \left[(i\omega/\alpha) (y \operatorname{sen} i - \alpha t) \right] - \cos i A \exp \left[(i\omega/\alpha) (y \operatorname{sen} i - \alpha t) \right] \right\} i\omega/\alpha - \left\{ \operatorname{sen} j B \exp \left[(i\omega/\beta) (y \operatorname{sen} j - \beta t) \right] \right\} i\omega/\beta = 0, \text{ en } x = 0$$

de donde, $\cos i/\alpha \left[\frac{\exp \left[(y/\alpha) \operatorname{sen} i \right]}{\exp t} \right] (1 - A) =$

$$(\operatorname{sen} j/\beta) B \left[\frac{\exp \left[(y/\beta) \operatorname{sen} j \right]}{\exp t} \right]$$

empleando la ley de Snell $\text{sen } i / \alpha = \text{sen } j / \beta$

la ecuación se reduce a $\cos i (1 - A) = \text{sen } j B$ (1)

La otra condición de frontera es $\sigma_{xy} = \mu (du/dy + dv/dx) = 0$, pero teniendo en cuenta que además $u = 0$ para toda y en $x = 0$. Por tanto $du/dy = 0$ en $x = 0$, por lo que esta condición se reduce a $dv/dx = 0$. De aquí,

$d^2\psi / (dx dy) + d^2\psi / dx^2 = 0$ en $x = 0$, de manera que al sustituir las expresiones de los potenciales ϕ, ψ en la ecuación anterior tenemos

$$\frac{\cos i \text{sen } j (1 - A)}{\alpha^2} = -\frac{B \cos^2 j}{\beta^2} \quad (2)$$

que podemos reescribir de la manera siguiente: $\frac{\cos i (1 - A) \text{sen } j}{\alpha^2} = -\frac{B \cos^2 j}{\beta^2}$, don

de, al sustituir la ec 1 tenemos que emplear $\text{sen}^2 i / \alpha^2 = \text{sen}^2 j / \beta^2$. De aquí $(\text{sen}^2 j / \beta^2 + \cos^2 j / \beta^2) B = 0$, de donde, $B = 0$. Sustituyendo en la ec 2 tendremos $A = 1$. Esto significa que con las condiciones de frontera propuestas una onda P incidente de amplitud unitaria se refleja totalmente como una onda P en fase, sin cambio de modo.

Si ahora buscamos la solución cuando las condiciones de frontera son $v = 0$ (Dirichlet) y $\sigma_{xx} = 0$ (Neumann) en $x = 0$, tendremos que, haciendo un desarrollo similar al anterior, llegamos a las ecuaciones

$$\text{sen } i / \alpha (1 - A) = \cos j / \beta \{B\} \quad (3)$$

$$\cos^2 i / \alpha^2 \{1 + A\} = -\cos j \text{sen } j / \beta^2 \quad (4)$$

Resolviendo encontramos $A = 1$, $B = 0$. Ello significa que para las condiciones de frontera propuesta, una onda P incidente se refleja totalmente como P con fase contraria y sin cambio de modo, es decir sin reflexión de onda S.

La superposición de ambas soluciones elimina, pues, las re-

flexiones.

Revisemos ahora el caso de una onda S incidente, donde las potenciales son

$$\phi = A \exp \left[(i\omega/\alpha) (-x \cos i + y \sin i - \alpha t) \right]$$

$$\psi = \exp \left[(i\omega/\beta) (x \cos j + y \sin j - \beta t) \right] + B \exp \left[(i\omega/\beta) (-x \cos j + y \sin j - \beta t) \right]$$

Imponiendo las condiciones $u = \sigma_x y = 0$ en $x = 0$, se llega a

$$\cos i / \alpha \quad A = - \sin j / \beta \quad (1+B) \quad (5)$$

$$(\cos i \sin i / \alpha^2) \quad A = \cos^2 j / \beta^2 \quad (1+B) \quad (6)$$

Combinando las ecs 5 y 6 y recordando nuevamente que $\sin i / \alpha = \sin j / \beta$ llegamos a $A = 0$; $B = -1$. Esto significa que bajo las condiciones de frontera seleccionadas tenemos una onda S reflejada de fase contraria a la onda S incidente sin que exista una onda P reflejada.

De manera similar se demuestra que las condiciones de frontera $v = \sigma_{xx} = 0$ en $x = 0$, conducen a que $A = 0$; $B = 1$. Por consiguiente, bajo estas condiciones de frontera existe una onda S reflejada en fase con la onda S incidente, que cancela la onda S de la solución anterior al efectuar la superposición ya que en ninguna de las dos soluciones existen ondas P reflejadas.

Con base en lo expuesto podemos concluir que la superposición de las dos soluciones para condiciones de frontera

1. desplazamiento normal = 0 y esfuerzo tangencial = 0
 2. desplazamiento tangencial = 0 y esfuerzo normal = 0
- elimina la reflexión tanto de ondas P como de ondas S, siendo válida esta situación aun cuando exista mortiguamiento en el sistema.

En el caso de ondas de cuerpo en tres dimensiones, puesto que el componente SH está desacoplado de las ondas P y de las SV, hay que super_

poner las soluciones que satisfacen las siguientes condiciones de frontera:

1. El desplazamiento normal a la frontera y ambos esfuerzos tangenciales iguales a cero.
2. Ambos desplazamientos en el plano de la frontera y el esfuerzo normal iguales a cero.

Si consideramos ahora ondas de superficie podemos observar que en el caso de ondas de Love el movimiento de las partículas es transversal a la dirección de propagación y está contenido en el plano formado por la propia dirección de propagación y la normal a la frontera, solo que la amplitud decrece con la distancia a la superficie de interfase. Por tanto el caso para una distancia particular es enteramente similar al de las ondas SV en dos dimensiones que ya hemos discutido y la superposición de ambas soluciones elimina la reflexión.

Si analizamos en seguida las ondas de Rayleigh, deberemos recordar que el movimiento de las partículas está contenido en el plano formado por la dirección de propagación y la normal a la superficie libre (recordemos también que las ondas de Rayleigh se propagan solamente cuando existe una superficie libre y que la amplitud de estas ondas decrece exponencialmente con la distancia a la superficie libre en un semiespacio). Bajo estas condiciones procede escribir la función potencial escalar en la forma

$$\phi = f(z) \left[A \exp \{ (i\omega/c)(x \cos i + y \operatorname{sen} i - ct) \} + A_1 \exp \{ (i\omega/c)(-x \cos i + y \operatorname{sen} i - ct) \} \right]$$

donde i = ángulo de incidencia con respecto a la normal a la frontera.

Procede asimismo expresar la función potencial vectorial en

la forma

$$\psi_x = g(z) \operatorname{sen} i \left[B \exp \{ (i\omega/c)(x \cos i + y \operatorname{sen} i - ct) \} + B_1 \exp \{ (i\omega/c)(-x \cos i + y \operatorname{sen} i - ct) \} \right]$$

$$\psi_y = g(z) \operatorname{cos} i \left[B \exp \{ (i\omega/c)(x \cos i + y \operatorname{sen} i - ct) \} + B_1 \exp \{ (i\omega/c)(-x \cos i + y \operatorname{sen} i - ct) \} \right]$$

$$\psi_z = 0$$

donde A, B son las amplitudes de los componentes P, S incidentes, y A_1, B_1 las amplitudes de los componentes P, S reflejados.

El vector de desplazamiento en términos de los potenciales puede expresarse mediante la siguiente ecuación vectorial $\bar{u} = \text{grad } \phi + \text{rot } \bar{\psi}$ para separar las ondas dilatacionales, y las distorsionales.

Las funciones $f(z), g(z)$, la velocidad c y la relación A/B (relación entre las amplitudes de los componentes S y P de la onda de Rayleigh incidente) deben ser tales que los potenciales $\phi, \bar{\psi}$ satisfagan la ecuación de onda con velocidades $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ respectivamente y satisfagan la condición de esfuerzos nulos en la superficie libre.

Sustituyendo las funciones potenciales propuestas en la ecuación del vector de desplazamientos tenemos en $x = 0$

$$u_x = \partial\phi/\partial x + \partial\psi_z/\partial y - \partial\psi_y/\partial z =$$

$$\exp \left[(i\omega/c) (y \text{ sen } i - ct) \right] \left\{ (i\omega/c) \text{ cos } i f(z) (A - A_1) - g'(z) \text{ cos } i (B - B_1) \right\}$$

$$u_y = \partial\phi/\partial y + \partial\psi_x/\partial z - \partial\psi_z/\partial x =$$

$$\exp \left[(i\omega/c) (y \text{ sen } i - ct) \right] \left\{ (i\omega/c) \text{ sen } i f(z) (A + A_1) + g'(z) \text{ sen } i (B + B_1) \right\}$$

$$u_z = \partial\phi/\partial z + \partial\psi_y/\partial x - \partial\psi_x/\partial y =$$

$$\exp \left[(i\omega/c) (y \text{ sen } i - ct) \right] \left\{ f'(z) (A + A_1) - g(z) (B + B_1) \right\}$$

De aquí que, si $u_x = 0$ en $x = 0$, entonces $A_1 = A, B_1 = B$, y si $u_y = u_z = 0$ entonces $A_1 = -A, B_1 = -B$ y por tanto la superposición de dos soluciones con las condiciones de frontera

$$1) \quad u_x = 0, \quad \sigma_{zy} = \sigma_{yz} = 0$$

$$2) \quad u_y = u_z = 0, \quad \sigma_{xx} = 0$$

elimina la reflexión de ondas de Rayleigh (fig 4).

Sobre la frontera ficticia simulada de la manera descrita la generación de ondas de superficie es imposible, puesto que ninguna de las dos soluciones que se superponen considera una superficie libre en la frontera artificial, ya que cuando menos uno de los desplazamientos es igual a cero. En esas condiciones las ondas de Rayleigh no pueden propagarse. Puesto que las ondas de Love no se propagan en un medio homogéneo, puede garantizarse que su propagación se ve suprimida si el medio es homogéneo en la vecindad de la frontera absorbente.

El método que hemos discutido para simular una frontera artificial no reflejante elimina de manera exacta, como hemos visto, la reflexión de cualquier tipo de onda plana, independientemente de la frecuencia y ángulo de incidencia de las ondas que arriben a la frontera. Sin embargo, su aplicación es más costosa que la de cualquier otro método pues implica la superposición de dos soluciones para simular una frontera absorbente. Este problema se agrava considerablemente cuando son varias fronteras las que hay que manejar. En general el número de soluciones que es necesario combinar es igual a 2^n en donde n = número de fronteras absorbentes. Veamos por ejemplo el caso de tres fronteras, en que las ocho soluciones que hay que superponer para un problema bidimensional se muestran en la fig 5.

Los desplazamientos y esfuerzos anotados en las figuras deben hacerse iguales a cero. Para mejor ilustrar la necesidad de las ocho soluciones se han dibujado sobre cada gráfica la onda incidente (O.I.) y las ondas reflejadas; perpendicular al rayo que representa la onda se ha dibujado una flecha que representa la fase de la onda. Se observa que el promedio de las ocho soluciones elimina las reflexiones en las tres superficies. Existen sin embargo reflexiones que no pueden eliminarse y se presentan cuando una onda encuentra la misma frontera más de una vez.

Para evitar la necesidad de superponer un número grande de soluciones, que implicaría mucho tiempo en la computadora, surge como atractiva la idea de superponer instantáneamente dos soluciones y cancelar en cada incremento de tiempo las reflexiones. Esto permitiría manejar cualquier número de fronteras absorbentes mediante el promedio de dos soluciones únicamente, al cancelar las reflexiones en cuanto se presenten, no permitiendo que se propaguen a otras fronteras ficticias, evitando así las reflexiones múltiples y las reflexiones de orden superior.

Al desarrollar esta idea y hacer varias corridas de prueba se encontró que las reflexiones no se eliminaban, atribuyéndose esto a fallas en la lógica del programa de computadora. Después de una revisión exhaustiva del programa se concluyó que el error no era de programación sino que de concepto, al no ser válida la superposición instantánea para entrar al paso de integración siguiente, ya que en una solución la condición de frontera es desplazamiento nulo mientras que la otra solución tiene como condición de frontera desplazamiento libre y la superposición de ambas da como resultado un desplazamiento en la frontera que no es compatible con la condición de frontera requerida por la primera solución para proseguir correctamente con el algoritmo arriba propuesto.

3.4.2 Método de Lysmer

Una manera de simular una frontera artificial es lograr de alguna forma absorber toda la energía que incide a la frontera en cuestión. Lysmer y Kuhlemeyer (30) encontraron que un camino promisorio es imponer las condiciones:

$$\begin{aligned}\sigma &= a \rho V_p \dot{v} \\ \tau &= b \rho V_s \dot{u}\end{aligned}\quad (\text{ver fig 6})$$

donde σ , τ = esfuerzos normal y tangencial respectivamente; \dot{v} , \dot{u} = velocidades normal y tangencial de las partículas de la frontera; ρ = densidad de masa; V_p , V_s = velocidades de propagación de las ondas P y las ondas S respectivamente, y a , b = parámetros adimensionales.

Físicamente las condiciones de frontera propuestas corresponden a que la frontera artificial se encuentre soportada sobre amortiguadores infinitesimales, orientados normal y tangencialmente a la frontera, por lo que esta frontera ha sido bautizada como "frontera viscosa".

Lysmer y Kuhlemeyer adoptaron como criterio para evaluar el comportamiento de esta frontera la razón de energía, o sea la energía reflejada entre la incidente. Dichos autores obtuvieron los resultados mostrados en las figs 7 y 8 para ondas P y S respectivamente.

Una razón de energía igual a uno corresponde a reflexión perfecta, mientras que una razón igual a cero corresponde a absorción completa.

De las figs 7 y 8 se encontró que para los valores $a = b = 1$ se obtiene la máxima absorción. Se observa que para $\theta > 30^\circ$ la absorción es casi total mientras que para $\theta < 30^\circ$ el comportamiento de la frontera viscosa es pobre.

Con objeto de investigar la posibilidad de mejorar el comportamiento de la frontera viscosa de Lysmer, se proponen las siguientes condiciones de frontera:

$$\sigma = a \rho V_p \dot{v} + b \rho V_s \dot{u}$$

$$\tau = c \rho V_s \dot{u} + d \rho V_p \dot{v}$$

Corresponden a una frontera soportada sobre amortiguadores en línea y amortiguadores con acoplamiento cruzado, es decir amortiguadores que producen respectivamente esfuerzos en dirección de la velocidad de la partícula y normalmente a dicha velocidad.

Es necesario ahora estudiar la reflexión de ondas elásticas en la frontera viscosa propuesta para determinar los valores más adecuados de los parámetros a , b , c , d que conduzcan a la máxima absorción de energía.

Analicemos primero una onda P incidiendo en la frontera propuesta (fig 9) :

Podemos expresar los desplazamientos horizontal y vertical en términos de dos potenciales, ϕ , ψ , como $u = d\phi/dx - d\psi/dy$, $v = d\phi/dy + d\psi/dx$. Sustituiremos estos en la ecuación de Navier,

$$\rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} = (\lambda + \mu) (de/dx_i) + \mu \nabla^2 u_i + \rho F_i$$

que gobierna el fenómeno; aquí,

$e = \text{div } \bar{u} = du_i/dx_i = du/dx + dv/dy$ = dilatación volumétrica, F_i = fuerzas de cuerpo (que por simplicidad hacemos iguales a cero), t = tiempo; λ , μ = constantes elásticas de Lamé y ρ = densidad de masa.

Así obtenemos

$$\nabla^2 \phi = (1/\alpha^2) d^2 \phi/dt^2, \quad \nabla^2 \psi = (1/\beta^2) d^2 \psi/dt^2$$

$$\text{donde } \alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = V_p, \quad \beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = V_s$$

o sea que ϕ está asociada con desplazamientos debidos a la propagación de ondas

P, y ψ lo está con los debidos a la propagación de ondas S. Por tanto, los potenciales de desplazamiento para ondas P de frecuencia ω deben tener la forma

$$\phi = \exp [ik (ct + y \operatorname{sen} \theta - x)] + A \exp [ik (ct - y \tan \theta - x)] \quad (I)$$

$$\psi = B \exp [ik (ct - y \tan \vartheta - x)] \quad (II)$$

donde $k = \omega/c$, es el número de onda

$\omega =$ frecuencia de la onda

$c =$ velocidad del frente de onda a lo largo del eje $x = V_p \operatorname{sen} \theta$

A y B = las amplitudes desconocidas de las ondas reflejadas

Para determinar las amplitudes A y B empleamos las condiciones de frontera propuestas, las cuales pueden expresarse en términos de los potenciales de desplazamientos desarrollando

$$\sigma = a \rho V_p \dot{v} + b \rho V_s \dot{u} = \lambda (\partial u / \partial x + \partial v / \partial y) + 2\mu \partial v / \partial y$$

$$\tau = c \rho V_s \dot{u} + d \rho V_p \dot{v} = \mu (\partial v / \partial x + \partial u / \partial y)$$

$$u = \partial \phi / \partial x - \partial \psi / \partial y, \quad v = \partial \phi / \partial y + \partial \psi / \partial x$$

$$\begin{aligned} \sigma &= a \rho V_p (\partial \dot{\phi} / \partial y + \partial \dot{\psi} / \partial x) + b \rho V_s (\partial \dot{\phi} / \partial x - \partial \dot{\psi} / \partial y) = \\ &\quad \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu (\partial^2 \phi / \partial y^2 + \partial^2 \psi / \partial x \partial y) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \tau &= c \rho V_s (\partial \dot{\phi} / \partial x - \partial \dot{\psi} / \partial y) + d \rho V_p (\partial \dot{\phi} / \partial y + \partial \dot{\psi} / \partial x) = \\ &\quad \mu (2 \partial^2 \phi / \partial x \partial y + \partial^2 \psi / \partial x^2 - \partial^2 \psi / \partial y^2) \end{aligned} \quad (2)$$

sustituyendo las ecs 1 y II en las ecs 1 y 2 obtenemos

$$\begin{aligned} A (a \operatorname{sen} \theta - \cos 2 \vartheta - b \cos \vartheta) + B (\operatorname{sen} 2 \vartheta + a \cos \theta - b \operatorname{sen} \vartheta) = \\ a \operatorname{sen} \theta + \cos 2 \vartheta - b \cos \vartheta \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} A (c \cos \vartheta + s^2 \operatorname{sen} 2 \theta + d \operatorname{sen} \theta) + B (\cos 2 \vartheta - c \operatorname{sen} \vartheta + d \cos \theta) = \\ s^2 \operatorname{sen} 2 \theta - c \cos \vartheta + d \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \quad (4)$$

donde $s = \sqrt{\frac{1-2\eta}{2(1-\eta)}}$, $\eta =$ módulo de Poisson

Veamos ahora el caso de ondas S incidentes a la frontera

propuesta (fig 10). Tendremos

$$\phi = A \exp [ik(ct - y \tan \theta - x)]$$

$$\psi = \exp [ik(ct + y \tan \vartheta - x)] + B \exp [ik(ct - y \tan \vartheta - x)]$$

Nuevamente, para determinar las amplitudes A y B empleamos las condiciones de frontera propuestas, sustituyendo los potenciales de desplazamientos en las expresiones

$$\sigma = a \rho V_p (\partial \dot{\phi} / \partial y + \partial \dot{\psi} / \partial x) + b \rho V_s (\partial \dot{\phi} / \partial x - \partial \dot{\psi} / \partial y) =$$

$$\lambda \nabla^2 \phi + 2 \mu (\partial^2 \phi / \partial y^2 + \partial^2 \psi / \partial x \partial y)$$

$$\tau = c \rho V_s (\partial \dot{\phi} / \partial x - \partial \dot{\psi} / \partial y) + d \rho V_p (\partial \dot{\phi} / \partial y + \partial \dot{\psi} / \partial x) =$$

$$\mu (2 \partial^2 \phi / \partial x \partial y + \partial^2 \psi / \partial x^2 - \partial^2 \psi / \partial y^2)$$

Obtenemos las ecuaciones

$$A (a \sin \theta - 2 \cos \vartheta + b \cos \vartheta) + B (\sin 2 \vartheta + a \cos \theta - \sin \vartheta) =$$

$$\sin 2 \vartheta - a \cos \theta - b \sin \vartheta \quad (5)$$

$$A (s^2 \sin 2 \theta + c \cos \vartheta + d \sin \theta) + B (\cos 2 \vartheta - c \sin \vartheta + d \cos \theta) =$$

$$-\cos 2 \vartheta - c \sin \vartheta - d \cos \theta \quad (6)$$

Las ecs 3-6 constituyen dos sistemas en que A y B son las incógnitas. En ambos los coeficientes de A y B son los mismos mientras que difieren los términos independientes.

Se escribió un programa para computadora mediante el cual al proponer valores para los parámetros a, b, c y d se calcula el valor de los coeficientes de A y B para un valor fijo del módulo de Poisson igual a 0.25. También se calculan los términos independientes y se resuelven los dos sistemas de ecuaciones, haciendo variar θ de 0° a 90° en incrementos de $\pi/40$.

La razón de energía tiene las siguientes formas

$$E_r/E_i = A^2 + s (\sin \nu / \sin \theta) B^2 \quad \text{para onda P incidente}$$

$$E_r/E_i = B^2 + 1/s (\sin \theta / \sin \nu) A^2, \quad \nu_{cr} \leq \nu \quad \text{para onda S incidente}$$

donde $\cos \nu_{cr} = s$. Según la ley de Snell $\cos \nu = s \cos \theta$, para ángulos de incidencia de ondas S menores de ν_{cr} resulta

$$\cos \theta = \cos \nu / s > 1, \quad \text{entonces:} \quad \sin \theta = i \sqrt{\cos^2 \theta - 1} \quad (\text{imaginario})$$

y el sistema de ecuaciones se hace complejo. Ahora las soluciones para A y B son de la forma $A = A_1 + iA_2$; $B = B_1 + iB_2$. Por consiguiente la razón de energía se transforma en

$$E_r/E_i = B_1^2 + B_2^2 \quad \text{para } \nu < \nu_{cr}$$

Una vez encontradas las soluciones para las amplitudes A y B, el programa calcula las razones de energía.

Se corrió el programa para una variedad de valores de los parámetros. Se encontró que la máxima absorción se presenta cuando $a = 1$, $b = 0$; $c = 1$, $d = 0$, es decir cuando la frontera propuesta coincide con la de Lysmer.

Para problemas en estado estacionario es posible extrapolar los conceptos manejados y construir una frontera que absorba completamente las ondas de Rayleigh. En este caso los parámetros a y b deben variar con la distancia a la superficie libre sobre la que se propagan las ondas de Rayleigh.

Para encontrar la variación de a y b empleamos la expresión de los desplazamientos para este caso. Puede escribirse como

$$u = f(ky) \sin(\omega t - kx)$$

$$v = g(ky) \cos(\omega t - kx)$$

donde $k = \text{número de onda } (\omega / v_R)$

$\omega = \text{frecuencia de las ondas}$

$v_R = \text{velocidad de propagación de las ondas en la superficie libre.}$

Por diferenciación las velocidades de las partículas resultan

$$\dot{u} = \omega f(ky) \cos(\omega t - kx)$$

$$\dot{v} = -\omega g(ky) \sin(\omega t - kx)$$

El esfuerzo normal sobre un plano vertical está dado por

$$\sigma = (\lambda + 2G) \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial v}{\partial y} = k \left[(\lambda + 2G) f(ky) - \lambda g'(ky) \right] \cos(\omega t - kx)$$

donde

$$g'(ky) = \frac{dg}{d(ky)}$$

y el esfuerzo cortante en el mismo plano vale

$$\tau = -kG \left[f'(ky) + g(ky) \right] \sin(\omega t - ky)$$

Si igualamos estos esfuerzos con la condición

$$\sigma = a \rho v_p \dot{u} = a \rho v_p \omega f(ky) \cos(\omega t - kx)$$

$$\tau = b \rho v_s \dot{v} = -b \rho v_s \omega g(ky) \sin(\omega t - kx)$$

y despejamos a y b tendremos

$$a(ky) = \eta/s \left[1 - (1 - 2s^2) g(ky)/f(ky) \right]$$

$$b(ky) = \eta \left[1 + f'(ky)/g(ky) \right]$$

donde $\eta = v_s/v_R$, $s = \sqrt{\frac{1-2\xi}{2(1-\xi)}}$, $\xi = \text{módulo de Poisson.}$

En la ref. 38 se encuentran gráficas de las funciones $f(ky)$ y $g(ky)$ para diferentes valores del módulo de Poisson. Se observa que es pequeña la variación con respecto a este parámetro. Cuando $\xi = 0.25$ se tiene

$$f(ky) = R \left[\exp(0.8475 ky) - 0.5773 \exp(-0.3933 ky) \right]$$

$$g(ky) = R \left[-0.8475 \exp(-0.8475 ky) + 1.4679 \exp(-0.3933 ky) \right]$$

donde R es una constante.

Sabemos que $kL = 2\pi$, $kLy = 2\pi$ y. De aquí, $ky = 2\pi y/L$ donde $L =$ longitud de las ondas R de Rayleigh. Puede verse que para profundidades mayores de $L/2$ los parámetros a y b tienden a uno. Así en una frontera viscosa capaz de absorber ondas de Rayleigh los parámetros a y b son funciones de la frecuencia de las ondas y de la profundidad cuando $0 < y \leq L/2$; para $y > L/2$ la frontera absorbente se aproxima a la frontera viscosa estándar ($a = b = 1$).

Por depender a y b de la frecuencia en la vecindad de la superficie libre, este planteamiento puede emplearse para excitaciones armónicas estacionarias mas no en problemas transitorios.

3.4.3 Método de Robinson

Si analizamos la propagación unidimensional de ondas, observamos características que nos servirán para exponer el método propuesto por Robinson. Consideremos una barra recta y esbelta en que la velocidad de las ondas es c . Podemos representar una onda que viaja en el sentido positivo por $u = f_2(x-ct)$. Si en la vecindad de la frontera expresamos las derivadas $\frac{\partial u}{\partial x} = f_2'$, $\frac{\partial u}{\partial t} = -c f_2'(x-ct)$, donde aplicamos la definición $\frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, concluimos que $\frac{\partial u}{\partial x} = -1/c \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$. De manera similar, para una onda que viaja hacia la izquierda, $u = f_1(x-ct)$, en la vecindad de la frontera izquierda; $\frac{\partial u}{\partial x} = 1/c \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$ o sea $\epsilon_x = (1/c)\dot{u}$, $\epsilon_x = (E/c)\dot{u}$, de donde $\sigma_x = \rho c \dot{u}$, ya que $c = \sqrt{E/\rho}$ donde $\epsilon_x =$ deformación unitaria, $\rho =$ densidad de masa, $E =$ módulo de elasticidad, $A =$ área de la sección transversal de la barra. De la expresión $\sigma_x = \rho c \dot{u}$ notamos que la condición de frontera corresponde a un amortiguador de constante $\rho c = E/c$ por unidad de área y por otra parte $\frac{\partial u}{\partial x} = 1/c \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$ representa una relación en-

tre las derivadas espacial y temporal.

Considerando ahora el caso bidimensional, será necesario descomponer el campo en potenciales asociados a ondas P y S respectivamente y en_ contrar las direcciones de las normales a las superficies de las ondas. Para ello los componentes de desplazamiento deberán expresarse como $\vec{u} = \text{grad } \phi + \text{rot } \psi$, que escrito en forma escalar se reduce a

$$u_x = \partial\phi/\partial x - \partial\psi/\partial y$$

$$u_y = \partial\phi/\partial y + \partial\psi/\partial x$$

donde ϕ es el potencial escalar asociado a ondas dilatacionales y ψ es el potencial vectorial asociado a las distorsionales. La dilatación (igual a la divergencia) queda expresada por $\partial u_x/\partial x + \partial u_y/\partial y = \text{div } \vec{u} = \nabla^2 \phi = (1/c_p^2)(d^2\phi/dt^2)$ en términos del potencial ϕ (que sabemos debe cumplir con la ecuación de onda). Simi_ larmente para la rotación tendremos $\partial u_x/\partial y - \partial u_y/\partial x = 2\omega_z = \nabla^2 \psi = (1/c_s^2)(d^2\psi/dt^2)$ de modo que a partir de los gradientes de desplazamiento del campo es posible obtener las segundas derivadas de los potenciales con respecto al tiempo. Mediante doble integración en el tiempo, suponiendo, sin pérdida de generalidad, que para $t = 0$; $u_x = u_y = \phi = \psi = 0$; en la frontera artificial, obtenemos los potenciales ϕ y ψ .

Si consideramos que las superficies de las ondas son planas, en la venedad de la frontera podremos escribir

$$\phi = f_1(\lambda_1 x + m_1 y - c_p t), \quad \psi = f_2(\lambda_2 x + m_2 y - c_s t)$$

donde λ_i , m_i son los cosenos directores de las normales a las superficies de las ondas; considerando las ondas P tendremos

$$\partial\phi/\partial x = \lambda_1 f_1'(\lambda_1 x + m_1 y - c_p t), \quad \partial\phi/\partial y = m_1 f_1'(\lambda_1 x + m_1 y - c_p t)$$

$$\partial\phi/\partial t = -c_p f_1'(\lambda_1 x + m_1 y - c_p t)$$

de donde, $(\partial\phi/\partial x)/(\partial\phi/\partial y) = \lambda_1/m_1$, que determina la dirección de la normal, y

$(\partial\phi/\partial x)^2 + (\partial\phi/\partial y)^2 = (1/c_p^2)(\partial\phi/\partial t)^2$ representa la relación que necesitamos entre las derivadas espaciales y temporales. Haciendo lo propio con las ondas S tendremos finalmente las dos condiciones de frontera equivalentes a la del caso unidimensional.

Con objeto de mejorar los resultados cuando la frontera artificial está cerca de la fuente de las perturbaciones, Robinson extiende el planteamiento anterior considerando que las superficies de onda son cilíndricas, encontrando que las condiciones de frontera deben ser en este caso

$$\partial\phi/\partial R + \phi/2R = -(1/c_p) \partial\phi/\partial t, \quad \partial\psi/\partial R + \psi/2R = -(1/c_s) \partial\psi/\partial t$$

La implantación numérica de elementos finitos del método de Robinson está lejos de ser trivial. Tseng usa el método de Robinson encontrando mejores resultados al emplear la consideración de superficies de onda cilíndricas para un modelo con fronteras absorbentes cercanas y sensiblemente los mismos resultados con las consideraciones de superficies de onda planas y cilíndricas para modelos con las fronteras transmisoras lejanas.

Tseng hace la implantación numérica empleando diferencias finitas(36).

En el modelo construido por el autor para el estudio objeto de este trabajo se hace una combinación de las fronteras viscosas de Lysmer y las fronteras no reflejantes de Smith; para las fronteras horizontales se utiliza el método de Lysmer y para las verticales el de Smith. Justificaremos esta selección en los párrafos que siguen.

Podemos ordenar en forma creciente las fronteras mencionadas en este capítulo, tomando como marco de referencia el grado de dificultad en su implantación, el tiempo de computadora requerido para su empleo y su efi-

ciencia para absorber energía de la manera siguiente:

- a) Método de Lysmer
- b) " " Smith
- c) " " Robinson

Desde el punto de vista económico la solución sería emplear el Método de Lysmer pero desde el punto de vista de precisión este método es el menos eficiente. El costo del empleo del método de Smith aumenta en proporción de 2^n donde n es el número de fronteras, pues, como se mencionó, el número de soluciones independientes a calcular y promediar es 2^n , mientras que con el método de Lysmer sólo tenemos que calcular una solución, independientemente del número de fronteras.

El costo del empleo del método de Robinson es alto, debido a que se requiere calcular los gradientes de desplazamiento, doble integración de las segundas derivadas de las funciones potenciales con respecto al tiempo y calcular los gradientes de las propias funciones potenciales, además del cálculo de las direcciones de las normales a las superficies de onda, esto en cada punto de las fronteras transmisoras y en cada paso de integración de las ecuaciones de movimiento.

Mediante el empleo del método de Smith en una frontera vertical y el método de Lysmer en las otras dos fronteras artificiales de nuestro modelo logramos:

- a) Costo razonable, puesto que solamente será necesario promediar soluciones.
- b) Precisión razonable, ya que, la frontera de Smith elimina de manera exacta todo tipo de reflexiones incluyendo las de las ondas de superficie (Rayleigh).
- c) Facilidad de usar fronteras activas. Las dos fronteras restantes en que se emplea

el método de Lysmer pueden ser una activa y la otra absorbente o ambas activas. Como se verá adelante, el método de Lysmer es compatible con las fronteras activas que se proponen en el inciso siguiente.

d) La eliminación del problema de reflexiones múltiples que se presentaría si se empleara el método de Smith en todas las fronteras artificiales.

3.5 Fronteras activas

Las fronteras activas constituyen un caso más general que el de fronteras absorbentes, ya que las primeras, además de ser no reflejantes para las ondas que abandonan la región interior del modelo, permiten el paso de las perturbaciones que vienen de la región exterior. El objetivo que se persigue mediante el concepto de fronteras activas es introducir al modelo, de manera más realista, la excitación sísmica que frecuentemente se ha considerado como un movimiento de cuerpo rígido del estrato supuesto roca dura.

En el estudio del comportamiento sísmico de presas, la excitación es un parámetro importante del que falta mucho por conocer. Suponiendo por el momento que conocemos la excitación sísmica, nos abocamos al problema de introducir dicha perturbación al modelo cortina-agua-suelo de este estudio.

Consideremos nuevamente el problema unidimensional de propagación de ondas, gobernada por la ecuación $\frac{d^2 u}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 u}{dx^2}$, donde $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, y cuya solución puede escribirse en la forma

$$u = f_1(x+ct) + f_2(x-ct) = u_1 + u_2$$

donde el primer término del segundo miembro representa una onda viajando en

la dirección negativa x con velocidad c y el segundo término una onda que viaja en dirección positiva con la misma velocidad de propagación, de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= c f_1' (x + ct) - c f_2' (x - ct) = \dot{u}_1 + \dot{u}_2 = c [f_1' (x + ct) - f_2' (x - ct)] \\ &= c (u_1' - u_2') \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1' (x - ct) + f_2' (x - ct) = u_1' + u_2'$$

Combinando ambos renglones tendremos

$$(1/c) (\partial u / \partial t) = \partial u / \partial x - 2 u_2'$$

o en la forma

$$\partial u / \partial x = (1/c) \partial u / \partial t + 2 u_2'$$

que es lo mismo que

$$\mathbf{E}_x = (1/c) \dot{u} + 2 u_2'$$

Multiplicando ambos miembros por el módulo de elasticidad: $\mathbf{E} \mathbf{E}_x = E \dot{u} / c + 2 E u_2'$

resulta entonces $\sigma = E \dot{u} / c + 2 E u_2'$, donde $E/c = \rho c$ y $E u_2' = \rho c (c u_2') = -\rho c \dot{u}_2$

Por tanto: $\sigma = \rho c \dot{u} - 2 \rho c \dot{u}_2 = \rho c (\dot{u} - 2 \dot{u}_2)$.

la expresión $\sigma = \rho c (\dot{u} - 2 \dot{u}_2)$ sirve para simular una frontera activa en el extremo izquierdo del dominio que queremos estudiar, interpretando \dot{u}_2 como excitación que deseamos introducir al modelo.

La extrapolación de este concepto a ondas P y S es inmediata al observar que las ecuaciones que gobiernan estos casos tienen exactamente la forma de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = v_p^2 \nabla^2 \bar{E}$$

donde \bar{E} = dilatación, $v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}$ = velocidad de propagación de ondas P

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = v_s^2 \nabla^2 \bar{w}$$

donde $\bar{\omega}$ = rotación, $v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ = velocidad de propagación de ondas S.

La aplicación de la idea expuesta es fácil mediante el empleo de elementos finitos. Esta idea es similar a la de Lysmer pero más general, pudiendo bautizar a la frontera en que se aplique como frontera viscosa activa.

Por otra parte no es factible manejar el concepto de fronteras activas mediante el método de Smith ya que, en cada solución que es necesario superponer, cuando menos uno de los desplazamientos debe estar fija.

Ayala ref 39 es quien introdujo el concepto de fronteras activas. En su trabajo demuestra el buen funcionamiento de las fronteras viscosas activas para ondas S.

3.6 Solución del sistema de ecuaciones diferenciales de movimiento

Como se ha mencionado al principio de este capítulo, el problema planteado será convenientemente tratado mediante un esquema dinámico de elementos finitos. Por lo tanto será necesario encontrar la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = F(t) \quad (1)$$

donde K = matriz de rigideces de todo el ensamble de elementos finitos, C = matriz de amortiguamiento en la que se incluyen los amortiguadores de las fronteras viscosas y M = matriz de masas. El vector u contiene los desplazamientos de todos los puntos nodales del modelo; \dot{u} y \ddot{u} son los vectores de velocidad y ace-

lación respectivamente.

3. 6. 1 Método de matrices de transición

Se pensó en emplear el método de matriz de transición básicamente porque proporciona solución exacta, no existiendo problemas de inestabilidad o divergencia.

Con objeto de compactar la presentación partamos sin mayor trámite del teorema siguiente:

Si $\Phi(t, t_0)$ es la matriz de transición para

$\dot{\underline{x}}(t) = [A(t)] \underline{x}(t)$, entonces la solución única de $\dot{\underline{x}}(t) = [A(t)] \underline{x}(t) + \underline{f}(t)$,

con las condiciones iniciales $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ está dada por

$$\underline{x}(t) = \Phi(t, t_0) \underline{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \sigma) \underline{f}(\sigma) d\sigma \quad (2)$$

Para poner el sistema de ecuaciones diferenciales

(1) en la forma $\dot{\underline{x}}(t) = [A(t)] \underline{x}(t) + \underline{f}(t)$, hacemos $x_1 = \dot{u}$, $x_2 = u$ ∴

$$\ddot{u} + [M^{-1}][C] \dot{u} + [M^{-1}][K] u = [M^{-1}] \underline{f}(t)$$

Podemos escribir este sistema en la forma

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M^{-1}C & M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Entonces

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

y el sistema (1) está en la forma $\dot{\underline{x}}(t) = [A(t)] \underline{x}(t) + \underline{f}(t)$

En nuestro estudio, puesto que las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez son constantes, la matriz $[A(t)]$ será también constante y podemos calcular la matriz de transición mediante la serie infinita

$$\Phi(t, t_0) = I + A(t - t_0) + \frac{A^2 \cdot (t - t_0)^2}{2!} + \dots$$

Empleando las ecs 2 y 3 podemos valuar el vector de estado del sistema de las ecs 1 para un tiempo específico $t = t'$ valiéndonos de integración numérica para calcular la integral que aparece en el segundo miembro de la ec 2. Interesa conocer la historia de la respuesta del sistema, no solamente para un instante específico. Será necesario pues, valuar el vector de estado para una serie de puntos del eje coordenado del tiempo. Con objeto de evitar el cálculo de las matrices de transición para cada valor del tiempo, podemos proceder de la siguiente manera:

Haciendo $t_0 = 0$, $\Delta t = \text{constante}$, $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$
 para $t = \Delta t$, $\underline{x}(\Delta t) = \Phi(\Delta t, 0) \underline{x}_0 + \int_0^{\Delta t} \Phi(\Delta t, \sigma) \underline{f}(\sigma) d\sigma = \underline{x}_1$
 considerando \underline{x}_1 como el vector de estado inicial, para el paso siguiente, tendremos

$$\text{para } t = 2 \Delta t, \text{ tenemos } \underline{x}(2\Delta t) = \Phi(2\Delta t, \Delta t) \underline{x}_1 + \int_{\Delta t}^{2\Delta t} \Phi(2\Delta t, \sigma) \underline{f}(\sigma) d\sigma = \underline{x}_2$$

de igual forma,

$$\text{para } t = 3 \Delta t, \underline{x}(3\Delta t) = \Phi(3\Delta t, 2\Delta t) \underline{x}_2 + \int_{2\Delta t}^{3\Delta t} \Phi(3\Delta t, \sigma) \underline{f}(\sigma) d\sigma = \underline{x}_3$$

y así sucesivamente, de modo que

$$\Phi(\Delta t, 0) = \Phi(2\Delta t, \Delta t) = \Phi(3\Delta t, 2\Delta t) = \dots = I + A \Delta t + \frac{A^2 \Delta t^2}{2} + \dots$$

o sea que solamente calculamos una vez la matriz de transición, que llamaremos

Φ . Usando cuadratura de Gauss para las integrales podemos calcularlas como

$$\sum_{i=1}^n W_i \Phi_i \underline{f}_i$$

donde W_i = coeficientes de peso de la cuadratura de Gauss

ϕ_i = matriz de transición valuada para los puntos correspondientes de σ en el intervalo Δt (que será necesario calcular una vez solamente)

f_i = La excitación en el tiempo correspondiente

i = número del punto de integración

Una vez calculadas las matrices de transición ϕ y ϕ_i podemos conocer la historia de la respuesta avanzando en tiempo de la manera siguiente:

para $t = 0$, $x = x_0$

para $t = \Delta t$, $x_1 = \phi x_0 + \sum_{i=1}^n W_i \phi_i f_i(\sigma_i)$

para $t = 2 \Delta t$, $x_2 = \phi x_1 + \sum_{i=1}^n W_i \phi_i f_i(\Delta t + \sigma_i)$

para $t = 3 \Delta t$, $x_3 = \phi x_2 + \sum_{i=1}^n W_i \phi_i f_i(2\Delta t + \sigma_i)$

y así sucesivamente hasta cubrir el tiempo de interés en el estudio de la respuesta del sistema.

Se escribió el programa de computadora correspondiente para aplicación de este algoritmo. Se comprobó que funcionaba satisfactoriamente para cualquier tamaño del incremento de tiempo Δt . En esta etapa del trabajo se empleó un modelo de nueve elementos finitos (3x3) no teniendo problema con la capacidad de memoria de la computadora. Al tratar de aplicar el método de matrices de transición al modelo completo agua-suelo-cortina, en que se requiere un número grande de elementos finitos para una representación adecuada, se presentó de inmediato el problema de la capacidad de memoria en la computadora. Como puede verse la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ -I & O \end{bmatrix}$$

no presenta las ventajas de simetría y banda angosta y las matrices de transición $\Phi = I + A \Delta t + A^2 \Delta t^2 / 2 + \dots$ son llenas no existiendo posibilidad de ahorrar memoria. Además el orden de las matrices de transición es el doble que el del sistema de ecuaciones diferenciales lo cual cuadruplica los requisitos de memoria. Se hizo patente la necesidad de sacrificar precisión a fin de lograr un ahorro considerable en memoria, mediante el método que se describe en el inciso siguiente.

3.6.2 Método de Buturla

Por simplicidad en la presentación consideremos el sistema no amortiguado

$$\begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \end{Bmatrix} \quad (4)$$

de donde despejamos el vector de aceleración

$$\begin{Bmatrix} u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{-1} \end{bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} f(t) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \end{Bmatrix} \right] \quad (5)$$

Por otra parte, aplicando un esquema de diferencias centrales, por ejemplo, podemos expresar el vector de aceleración en el tiempo n como

$$\begin{Bmatrix} \ddot{u} \end{Bmatrix}_n = \left[\begin{Bmatrix} u \end{Bmatrix}_{n+1} - 2 \begin{Bmatrix} u \end{Bmatrix}_n + \begin{Bmatrix} u \end{Bmatrix}_{n-1} \right] / \Delta t^2 \quad (6)$$

despejando el vector de desplazamientos para el tiempo $n+1$ tendremos

$$\begin{Bmatrix} u \end{Bmatrix}_{n+1} = 2 \begin{Bmatrix} u \end{Bmatrix}_n - \begin{Bmatrix} u \end{Bmatrix}_{n-1} + \Delta t^2 \begin{Bmatrix} \ddot{u} \end{Bmatrix}_n \quad (7)$$

combinando las ecs 5 y 7 llegamos a

$$\left\{ u \right\}_{n+1} = 2 \left\{ u \right\}_n - \left\{ u \right\}_{n-1} + \Delta t^2 \left[M^{-1} \right] \left[\left\{ f(t) \right\}_n - \left[K \right] \left\{ u \right\}_n \right] \quad (8)$$

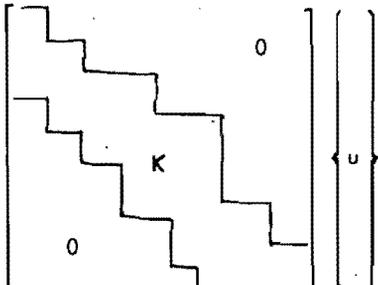
Al discretizar la masa considerándola concentrada en los puntos nodales sin acoplamiento podemos manejar la matriz $[M]$ como vector, con el correspondiente ahorro en memoria. El cálculo de la inversa de la matriz de masa pasa a ser trivial; la inversa puede manejarse igualmente como un vector, cosa que no hubiésemos podido hacer si hubiésemos empleado discretización de masa consistente. Esto no aparenta ser ninguna limitación pues varios autores han reportado que se obtiene mejor aproximación empleando masas concentradas en comparación al uso de masas consistentes.

Puede verse entonces en la ec 8 que el grueso del esfuerzo de cómputo para la integración de la ec 4 se encuentra en el producto $[K] \{u\}$.

Examinemos el ejemplo de una malla de elementos finitos cuadriláteros y triángulos planos con 1297 grados de libertad; la matriz $[K]$ será un arreglo de 1297×1297 elementos, mientras que el vector $\{u\}$ constará de 1297 elementos; por tanto, el producto $[K] \{u\}$ requerirá un total de $1297(1297 + 1) = 1,683,506$ palabras de memoria central. Tomando en cuenta que la matriz $[K]$ es simétrica con ancho de semibanda de 59 posiciones podemos obtener un ahorro considerable, reduciendo a 149,682 palabras de memoria requerida para multiplicar $[K] \{u\}$. Sin embargo esta cifra sigue siendo grande. Si empleamos un esquema de apuntadores, en el cual se almacenan únicamente los elementos diferentes de cero en cada renglón de la matriz de rigidez

y el número de la columna correspondiente, la capacidad requerida de memoria se reduce a 48,184 palabras. Usando un esquema más sofisticado como lo es el de Boole, en donde el mapeo de los renglones de la matriz $[K]$ se obtiene a través del sistema binario de ceros y unos, donde un cero indica que el término correspondiente de la matriz de rigidez es nulo mientras que un uno indica que el término es diferente de cero, así por ejemplo si la computadora utilizada es de 32 bits por palabra, podremos mapear 31 términos consecutivos de un renglón de la matriz con un solo número entero. En el ejemplo que estamos examinando esto reduce la memoria necesaria para el producto $[K] \{u\}$ a 29,048 palabras.

Buturla propone efectuar el producto de la manera siguiente:



$$\{u\} = [K_1] \{u_1\} + [K_2] \{u_2\} + \dots + [K_n] \{u_n\} \quad (9)$$

GLOBAL

LOCAL

donde los subíndices se refieren al número del elemento. Así por ejemplo $[K_i] \{u_i\}$ se refiere al producto de la matriz de rigidez del i ésimo elemento por los desplazamientos de los nudos que conecta dicho elemento. La ec 9 significa que efectuamos el producto $[K] \{u\}$ de todo el modelo, sin ensamblar la matriz glo-



DEPI

bal. El almacenar las matrices de cada elemento por separado requiere mayor memoria que la matriz ensamblada con todos los elementos, pero si observamos que la matriz de rigidez de todos los elementos con las mismas propiedades del material, las mismas dimensiones y la misma orientación, es exactamente igual, podemos escribir la ec 9 como

$$\left[K_1 \right] \left\{ u_1 \right\} + \left[K_2 \right] \left\{ u_2 \right\} + \dots + \left[K_n \right] \left\{ u_n \right\} = \left[K \right] \left\{ u_1 \right\} + \left[K \right] \left\{ u_2 \right\} + \dots + \left[K \right] \left\{ u_n \right\}$$

o sea que en lugar de almacenar n matrices individuales, necesitamos guardar solamente una matriz tipo. Lo más común es que existan varios tipos de elementos debido a cambios en el material, tamaño u orientación y necesitemos guardar en memoria varias matrices tipo. Aun así, el ahorro en capacidad requerida puede ser espectacular. Una meta al momento de construir la malla de un modelo deberá ser entonces, tener tantos elementos iguales como sea posible. En el caso del ejemplo que hemos venido examinando, en el que se tienen 97 tipos de elementos, dos cuadriláteros y 95 triángulos, la memoria requerida para efectuar el producto $\left[K \right] \left\{ u \right\}$ usando el método descrita, se reduce a 4843 palabras.

El método de Buturla no es en sí un método de integración sino un artificio para ahorrar memoria al efectuar el producto $\left[K \right] \left\{ u \right\}$, y puede ser compatible con cualquier método explícito de integración paso a paso. La limitación de que el método de integración sea explícito se debe a que cualquier método implícito como el beta de Newmark o el teta de Wilson invalida la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales para las variables de estado del modelo ensamblado, lo cual obliga a formar la matriz global $\left[K \right]$, que es lo que se trata de evitar al aplicar el presente método.

Para sistemas amortiguados podemos aplicar sin mayor problema el método de Buturla manejando la matriz de amortiguamiento a nivel de elemento y efectuando el producto $[C] \{\dot{u}\}$ sin ensamblar la matriz global de amortiguamiento.

En el presente trabajo para manejar el modelo completo agua-cortina-suelo de manera eficiente sin recurrir al uso de memoria periférica se emplea el método de Buturla combinado con un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden de la manera siguiente

$$\begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix}_n + h \left[\frac{1}{6} \begin{Bmatrix} \dot{u} + (h/2) G(t, u, \dot{u}) \\ G(t, u, \dot{u}) \end{Bmatrix}_n + \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} \dot{u} + (h/2) G(t, u, \dot{u}) \\ G(t, u, \dot{u}) \end{Bmatrix}_{t_n + h/2} + \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} \dot{u} + (h/2) G(t, u, \dot{u}) \\ G(t, u, \dot{u}) \end{Bmatrix}_{t_n + h} + \frac{1}{6} \begin{Bmatrix} \dot{u} + (h/2) G(t, u, \dot{u}) \\ G(t, u, \dot{u}) \end{Bmatrix}_{t_n + h} \right]$$

donde $h = \Delta t$, $G(t, u, \dot{u}) = M^{-1} [f(t) - Ku - C\dot{u}]$

$\begin{Bmatrix} n \\ t_n \end{Bmatrix}$ indica que u y \dot{u} están valuadas en el paso n ésimo y la excitación $f(t)$ está valuada en $t = t_n$

$\begin{Bmatrix} n^* + 1/2 \\ t_n + 1/2 h \end{Bmatrix}$ indica que u y \dot{u} están valuadas en el paso $n^* + 1/2$ y la excitación $f(t)$ lo está en $t = t_n + h/2$

y para valuar u y \dot{u} en $n^* + 1/2$ empleamos la expresión

$$\begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix}_{n^{**+1/2}} = \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix}_n + h/2 \begin{Bmatrix} \dot{u} + (h/2) G(t, u, \dot{u}) \\ G(t, u, \dot{u}) \end{Bmatrix}_{t_n}^n$$

$\left| \begin{array}{l} n^{**+1/2} \\ t_n + h/2 \end{array} \right.$ indica que u y \dot{u} están valuadas en el paso $n^{**+1/2}$ y $f(t)$ es-
tá en $t_n + h/2$

y para valuar u y \dot{u} en $n^{**+1/2}$ empleamos la expresión

$$\begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix}_{n^{**+1/2}} = \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix}_n + h/2 \begin{Bmatrix} \dot{u} + (h/2) G(t, u, \dot{u}) \\ G(t, u, \dot{u}) \end{Bmatrix}_{t_n + h/2}^{n^{**+1/2}}$$

$\left| \begin{array}{l} n^{*+1} \\ t_n + h \end{array} \right.$ indica que u y \dot{u} están valuadas en el paso n^{*+1} y $f(t)$ lo es-
tá en $t_n + h$

y para valuar u y \dot{u} en n^{*+1} empleamos la expresión

$$\begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix}_{n^{*+1}} = \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix}_n + h \begin{Bmatrix} \dot{u} + (h/2) G(t, u, \dot{u}) \\ G(t, u, \dot{u}) \end{Bmatrix}_{t_n + h/2}^{n^{**+1/2}}$$

Al valuar $G(t, u, \dot{u}) = M^{-1} [f(t) - Ku - C\dot{u}]$ efectuamos los productos Ku y $C\dot{u}$
sin ensamblar las matrices globales de rigidez y amortiguamiento.

IV COMPROBACION DEL MODELO

4.1 Comprobación del elemento finito de agua

Para comprobar el comportamiento de los elementos finitos de agua conviene plantear un sistema simple del cual sea factible obtener la solución exacta y comparar con los resultados obtenidos mediante elementos finitos. Emplearemos por tanto el problema resuelto por Chopra, Wilson y Farhoomand en la ref 28. Consiste en encontrar la variación con el tiempo de la presión hidrodinámica ejercida sobre una de las paredes por el agua contenida en un recipiente rectangular rígido de 300 pies de altura y 300 pies en la base, sujeto a una aceleración horizontal de una g aplicada en forma de función escalón (fig 11).

La respuesta exacta del sistema se obtiene, despreciando la disipación de energía debida a la viscosidad interna del agua y considerando que los desplazamientos están limitados a amplitudes pequeñas, de la solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = (w/gk) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$
 en términos del potencial de velocidad $\phi(x, y, t)$ tal que $du/dt = -\partial\phi/\partial x$, $dv/dt = -\partial\phi/\partial y$ y despreciando el efecto del oleaje superficial, sujeta a las condiciones de frontera siguientes

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(x, 0, t) = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(x, H, t) = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) (0, y, t) = \ddot{u}_g(t)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) (L, y, t) = \ddot{u}_g(t)$$

y considerando el vaso en reposo cuando se aplica el pulso, sujeta a las condiciones iniciales:

$$\phi(x, y, 0) = \partial\phi/\partial t(x, y, 0) = 0$$

La presión hidrodinámica esta dada por $p = (\omega/g) \partial\phi/\partial t$, y la velocidad del sonido en el agua esta dada por $c = \sqrt{gk/\omega}$.

Mediante la técnica de transformada de Laplace y separación de variables puede encontrarse la función de respuesta a un impulso unitario aplicado al sistema descrito, y se expresa como

$$h_{\phi}(x, y, t) = \frac{g}{\pi L} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(2m-1)(\alpha_n^2 + \beta_m^2)} \cos \beta_m y \cos \left\{ \frac{n\pi(L-x)}{L} \right\} \cos \omega_{mn} t$$

donde $\beta_m = [(2m-1)/(2H)]\pi$, $\alpha_n = n\pi/L$, $\omega_{mn} = c\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2}$

La función de respuesta correspondiente para la presión hidrodinámica será

$$h_p(x, y, t) = (\omega/g) \partial/\partial t \left[h_{\phi}(x, y, t) \right]$$

y la presión hidrodinámica debida a una excitación arbitrario puede obtenerse como la superposición de las respuestas a impulsos unitarios mediante la integral de convolución

$$p(x, y, t) = \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) h_p(x, y, t - \tau) d\tau$$

La resultante de la fuerza hidrodinámica sobre la pared izquierda, normalizada con respecto a la resultante hidrostática, será

$$F(t) = \frac{\omega H^2}{2} \int_0^H p(0, y, t) dy$$

Se obtuvo la fuerza hidrodinámica normalizada "exacta"

para el recipiente descrito; se muestran los resultados de este planteamiento en la fig 12.

El mismo sistema se modeló como un ensamble de 100 elementos finitos de agua, todos iguales y cuadrados de 30x30 pies. Los resultados obtenidos mediante elementos finitos se presentan en la fig 13 para distintos valores de Δt . En la formulación de los elementos finitos de agua la integración

$$K = \int B^T D B d(\text{vol})$$

para la definición de la matriz de rigidez se efectuó por doble cuadratura de Gauss con cuatro puntos. Posteriormente se utilizaron 36 puntos de integración, obteniéndose resultados idénticos a los calculados con cuatro puntos de integración

De la fig 13 se concluyó que el hecho de que la solución obtenida con elementos finitos no concordara con la solución exacta no se debía a inestabilidad en el método empleado para la integración en el tiempo de las ecuaciones diferenciales de movimiento y se optó por hacer una nueva formulación de los elementos finitos de agua basada en relaciones geométricas simples tomando como puntos de partida la ecuación

$$p = e m$$

donde p = presión, m = módulo de deformación volumétrica, e = divergencia =

$$E_x + E_y = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y = \Delta V / V,$$

donde ΔV = cambio de volumen, V = volumen inicial

Por medio de relaciones geométricas se calculó el volumen del elemento deformado al dar un desplazamiento unitario a cada uno de los grados de libertad obteniendo la expresión

$$e = (T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad T_4 \quad T_5 \quad T_6 \quad T_7 \quad T_8) \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

donde T_i , ($i = 1, 2, \dots, 8$) dependen únicamente de las coordenadas nodales.

La matriz de rigidez se obtiene entonces como

$$K_{ij} = T_i (m) T_j \text{ vol}$$

Al emplear esta formulación para los elementos finitos de agua en el problema de prueba se obtuvieron los resultados que muestra la fig 14.

Los cuales concuerdan razonablemente con la solución exacta, fig 12.

Para encontrar por qué no funcionaba bien la formulación de los elementos de agua que se desarrolló en el inciso 1 del cap III se usó la subrutina de elementos finitos para sólido elástico que se desarrolló en el inciso 2 del cap III, haciendo $\nu = 0.499$ y $E = 3(1 - 2\nu)(m)$, y se encontró que concordaban las dos formulaciones arrojando ambos los resultados de la fig 13.

Finalmente se encontró que las dos formulaciones mencionadas concuerdan con la formulación desarrollada en el presente inciso solamente si se emplea cuadratura de Gauss con un solo punto de integración, (contrariamente a la suposición de que a mayor número de puntos de integración se tiene mejor aproximación).

La explicación la podemos encontrar haciendo el planteamiento siguiente: Si hacemos la malla de elementos finitos cada vez mas fina, cada elemento tiende a una condición de deformación unitaria constante y la energía de deformación para un elemento adopta entonces la forma

$$1/2 \int_{\text{vol}} \{E\}^t [D] \{E\} dx dy = \int_{\text{vol}} (\text{constante}) \det J ds dt = (\text{constante}) \cdot \text{vol}$$

para un espesor constante del elemento plano. Por tanto en el límite la energía de deformación del modelo será calculada correctamente si lo está el volumen de cada elemento.

En la p 15 podemos observar que la formulación empleada para los elementos finitos de agua conduce a una expresión del determinante jacobiano que es lineal en s, t por lo que un solo punto de integración será suficiente para valuar correctamente el volumen de un elemento finito de agua, y por ende su matriz de rigidez, ya que la construcción de esta es esencialmente la misma que la integración de una expresión de energía de deformación.

Por otra parte si hacemos las cargas nodales de un elemento proporcionales al vector de desplazamientos

$$\{P\} = \lambda \{\delta\}$$

tendremos un problema de valores característicos

$$\left[K \right] \{\delta\} = \lambda \{\delta\}$$

Si cada modo característico se normaliza de manera que

$$\{\delta_i\}^t \{\delta_i\} = 1$$

entonces

$$\lambda_i = \{\delta_i\}^t \left[K \right] \{\delta_i\} = 2 U_i$$

lo que significa que cada valor característico es igual al doble de la energía de deformación del elemento bajo los desplazamientos nodales normalizados asociados.

En el elemento finito de agua al emplear un punto de integración gaussiana la matriz de rigidez resultante tiene siete valores característicos iguales a cero asociados a siete modos de desplazamiento que no producen ener-

gía de deformación (incluyendo los desplazamientos de cuerpo rígido), y un valor característico (λ_8) distinto de cero y positivo (Ver fig 15). Al aumentar el número de puntos de integración y calcular los valores característicos de la matriz de rigidez que resulta se obtienen cuatro valores característicos iguales a cero ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_7 = 0$) y cuatro valores característicos distintos de cero y positivos (Ver fig 15). Es evidente que los modos asociados a $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ deberían ocurrir sin que se presentara energía de deformación ya que la divergencia en ambos modos es cero. (Esto sí sucede al emplear un punto de integración gaussiana ya que en ese caso $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ valen cero y la configuración de los modos normalizados permanece igual a las anteriores).

Podemos concluir entonces que la solución deseada solo se obtiene empleando un punto de integración gaussiana, ya que el empleo de más puntos de integración hace que aumente el número de valores característicos diferentes de cero violando así la condición necesaria para que la solución sea correcta, de que solo debe existir un valor característico distinto de cero (λ_8).

4.2 Comprobación de los elementos finitos empleados para representar el suelo y la cortina

Como se mencionó en el capítulo II, se considerará que tanto cortina como suelo tienen comportamiento de sólido elástico lineal, que se discretizará mediante los elementos finitos desarrollados en el inciso 3. 2. Para asegurarse que el funcionamiento dinámico de dichos elementos es correcto, se seleccionó una región rectangular sobre la cual se propagó un pulso rectangular de desplazamiento. Se compararon las soluciones exacta y de elementos finitos, ambas sin amor-

tiguamiento. La solución exacta se obtiene mediante la teoría general de propagación de ondas.

En la fig 16 se muestran la región estudiada, su discretización de elementos finitos y los resultados obtenidos. Se confirma que el funcionamiento del modelo de elementos finitos para representar el suelo y la cortina es satisfactorio.

4.3 Comprobación del comportamiento de las interfases líquido-sólido

Las interfases líquido-sólido que se presentan en el vaso de una presa son el paramento mojado de la cortina y el suelo en el fondo del embalse.

Como se mencionó en el inciso 3.3, el desplazamiento tangencial del líquido sobre la interfase con el sólido se puede reproducir en el modelo de elementos finitos fácilmente cuando la interfase es un plano paralelo a cualquiera de los ejes del sistema de referencia global, mediante el empleo de nudos dobles, haciendo el número del grado de libertad en la dirección normal a la interfase igual en ambos nudos y el número del grado de libertad tangencial diferente en cada nudo. El imponer estas mismas condiciones (desplazamiento relativo tangencial a la superficie de interfase no restringido y desplazamiento relativo normal nulo) cuando la interfase está inclinada con respecto a los ejes de referencia hay necesidad de expresar los desplazamientos normal y tangencial en términos de las proyecciones de los desplazamientos globales y combinar en cada paso de integración en el tiempo el sistema de ecuaciones diferenciales de movimiento con el sistema de ecuaciones que gobiernan las condiciones de desplazamiento en las interfases. Desde el punto

de vista de la construcción de un programa de computadora esto representa una complicación seria. Si podemos manejar esta situación de una manera simple, demostrando que el error introducido por la simplificación es tolerable, será válido el empleo de la simplificación, tomando en cuenta el ahorro en tiempo de máquina que puede significar.

La simplificación propuesta consiste en considerar nulo el desplazamiento relativo tangencial en la interfase. Con objeto de evaluar esta simplificación utilizamos el modelo del inciso 5.1, fig 11 en el cual las interfases liquido - sólido son paralelas a los ejes de referencia global. En este modelo tomar en cuenta el desplazamiento tangencial no representó mayor problema, (mostrándose la respuesta en la fig 14). Bastará entonces con restringir los grados de libertad tangenciales en los nudos de interfase y comparar la respuesta con los resultados anteriores.

Después de hacer nulo el desplazamiento relativo tangencial en las interfases se obtuvieron los mismos resultados ya mostrados en la fig 14. Entonces podemos aseverar que la simplificación que se propone es aceptable, por lo que en el estudio de la interacción suelo-agua-cortina en presas durante sismo se considerará el agua fija a las interfases.

4.4 Comprobación de las fronteras absorbentes.

Si consideramos una región rectangular dentro de un semiespacio infinito definida por la superficie libre horizontal en la parte superior de la región y tres fronteras artificiales (dos verticales y una horizontal), y aplicamos una excitación sobre un punto de la superficie libre, en forma de

pulso, dicha perturbación debe propagarse en el semiespacio hasta que la energía se disipe por radiación.

En el modelo de elementos finitos la comprobación de que este comportamiento se reproduce, se efectúa graficando la variación con respecto al tiempo de los desplazamientos en varios puntos de control, dichas gráficas deben mostrar el paso de la perturbación por un punto de control en un tiempo determinado y posteriormente deberá permanecer inmovil dicho punto, ya que cualquier desplazamiento posterior al paso del pulso por ese punto significará que hubo reflexión en las fronteras artificiales.

Se comprobó que el comportamiento de fronteras absorbentes era satisfactoriamente reproducido por el modelo de elementos finitos.

V APLICACION A UN ESTUDIO PARAMETRICO

Para estudiar la influencia de los diferentes parámetros que intervienen en la interacción suelo-agua-cortina en presas sujetas a temblor se construyó un modelo de elementos finitos de 272 elementos con 606 grados de libertad (fig 17). El tamaño del modelo se seleccionó teniendo en cuenta que aunque desde el punto de vista de capacidad de memoria requerida era posible emplear un modelo más grande (del orden de 1000 a 2000 grados de libertad) la conveniencia de emplear un modelo reducido era evidente desde el punto de vista del tiempo de ejecución.

El modelo seleccionado es una presa de gravedad con tirante de agua de 100 m (330 pies) en el paramento mojado de la cortina. Las propiedades físicas de los elementos finitos fueron

Agua	$k = \text{mod. def. vol} = 2.1 \times 10^8 \text{ k/m}^2 \text{ (} 0.43 \times 10^8 \text{ lb/pie}^2 \text{)}$
	$w = 1000 \text{ k/m}^3 \text{ (} 62.4 \text{ lb/pie}^3 \text{)}$
	$p = 102 \text{ k seg}^2 / \text{m}^4 \text{ (} 1.94 \text{ lb seg}^2 / \text{pie}^4 \text{)}$
Concreto	$E = \text{mod. de Elast.} = 24.4 \times 10^8 \text{ k/m}^2 \text{ (} 5 \times 10^8 \text{ lb/pie}^2 \text{)}$
	$\nu = \text{mod. de Poisson} = 0.15$
	$\gamma = 2400 \text{ k/m}^3 \text{ (} 150 \text{ lb/pie}^3 \text{)}$
	$p = 245 \text{ k seg}^2 / \text{m}^4 \text{ (} 4.70 \text{ lb seg}^2 / \text{pie}^4 \text{)}$
Suelo	$E = 9.77 \text{ k/m}^2 \text{ (} 2 \times 10^8 \text{ lb/pie}^2 \text{)}$
	$\nu = 0.35$
	$\gamma = 2080 \text{ k/m}^3 \text{ (} 130 \text{ lb/pie}^3 \text{)}$
	$p = 210 \text{ k seg}^2 / \text{m}^4 \text{ (} 4.00 \text{ lb seg}^2 / \text{pie}^4 \text{)}$

El modelo descrito se estudió bajo la acción de una aceleración en forma de función escalón con amplitud de una vez la aceleración de la gravedad y con distintas condiciones de frontera. Se seleccionó la excitación como función escalón en vista de la facilidad de obtener la respuesta del sistema bajo una excitación arbitraria mediante la integral de convolución, se prefirió esta excitación contra un pulso unitario debido a la dificultad que involucra manejar numéricamente la delta de Dirac.

Para los objetivos de nuestro estudio se consideró como representativos de la respuesta del sistema: La fuerza hidrodinámica normalizada con respecto a la hidrostática actuando sobre la cortina de la presa, el momento hidrodinámico de volteo normalizado y la altura de la resultante normalizada con respecto a la altura de la cortina.

En la tabla 1 se sumarizan los diferentes casos estudiados; del análisis de los cuales podemos hacer las siguientes observaciones.

Al comparar los resultados mostrados en la fig 14 con los de la fig 18 y tomando en consideración que el volumen de agua es el mismo en ambos casos, vemos que la respuesta máxima se incrementa en un treinta por ciento aproximadamente debido a la flexibilidad conjunta de la cortina y el suelo, así mismo podemos notar un aumento en el periodo. En la fig 19 vemos que este efecto se contrarresta gracias a la disipación de energía a través de las fronteras absorbentes.

El incremento en la amplitud máxima de respuesta que se presenta en la fig 20 comparada con la fig 18 se debe a que la disipación de energía es pobre al presentarse reflexiones múltiples en las fronteras de Smith que no se eliminan.

TABLA 1

Modelo fig	FRONTERA			EXCITACION	Respuesta Fig
	Vertical Izquierda	Vertical Derecha	Horizontal (Base)	Aceleración en forma de función escalón	
11	Rigida	Rigida	Rigida	Horizontal	14
17	"	"	"	"	18
"	Viscosa	Viscosa	"	"	19
"	Smith	Smith	"	"	20
"	Viscosa	Viscosa	Activa	"	21
"	Smith	Smith	"	"	22
11	Rigida	Rigida	Rigida	Vertical	23
17	"	"	"	"	24
"	Viscosa	Viscosa	"	"	25
"	Smith	Smith	"	"	26
"	Viscosa	Viscosa	Activa	"	27
"	Smith	Smith	"	"	28
"	Activa	Viscosa	Viscosa	Horizontal	29
"	"	"	"	Vertical	30
"	Viscosa	Activa	"	Horizontal	31
"	"	"	"	Vertical	32
"	Activa	Viscosa	Smith	Horizontal	33
"	"	"	"	Vertical	34

La fig 21 nos indica que la respuesta se reduce a la mitad comparando con las figs 14 y 19 al considerar la excitación no como de base rígida sino introducida al sistema a través de una frontera horizontal activa; es interesante comprobar en la fig 21 que el efecto de la excitación en forma de función escalón tiende a desaparecer con el tiempo ya que la frontera activa no es capaz de transmitir carga estática. Lo mismo podemos apreciar en la fig 22 solo que en esta desaparece más lentamente debido a las reflexiones múltiples en las fronteras de Smith. La comparación de las figs 14 y 23 arroja que la respuesta a aceleración vertical del vaso con paredes rígidas es una vez y media mayor que la respuesta del mismo bajo aceleración horizontal de igual magnitud, y que el periodo se incrementa dos veces y cuarto. Pero mientras en la fig 14 la amplitud en el momento de volteo es mayor que la amplitud de la fuerza hidrodinámica en la fig 23 ambas amplitudes son iguales.

La fig 24 muestra que la respuesta se reduce a un noventa y cuatro por ciento de la respuesta en la fig 23, siendo también esta situación contraria a lo que ocurre bajo excitación horizontal.

En la fig 25 la respuesta se reduce aun más al introducir fronteras absorbentes verticales viscosas, tendiendo la respuesta a oscilar al rededor de la hidrostática. Lo mismo sucede al introducir fronteras verticales de Smith; salvo el efecto de las reflexiones múltiples (fig 26).

En el caso de aceleración vertical al excitar el sistema a través de la base activa y con fronteras verticales viscosas (fig 27) se obtiene una respuesta máxima igual a un veitiseis por ciento de la respuesta máxima del sistema con la frontera rígida (fig 24), evidenciándose una tendencia a desaparecer

del efecto de la excitación al crecer el tiempo; lo mismo podemos notar en el caso similar pero con fronteras verticales de Smith (fig 28).

El introducir excitación horizontal a través de una frontera activa vertical del lado de aguas abajo (fig 29) con las fronteras restantes viscosas produce una respuesta máxima igual a cuarenta y nueve por ciento la respuesta del sistema con frontera rígida (fig 18). El caso similar pero con excitación vertical (fig 30) tiene una respuesta máxima igual a un cincuenta y tres por ciento la respuesta del sistema con frontera rígida (fig 24).

Al hacer activa ahora la frontera de aguas arriba (fig 31) bajo excitación horizontal y las fronteras restantes viscosas obtenemos una respuesta igual a la obtenida excitando horizontalmente por el lado de aguas abajo (fig 29). De las figs 30 y 32 se desprende que en el caso de ondas de cortante con desplazamiento vertical propagándose en dirección horizontal, excitando el modelo a través de frontera activa vertical la respuesta máxima con la frontera activa del lado de aguas arriba es una vez y media mayor que con la frontera activa del lado de aguas abajo.

Comparando las figs 33 con 29 y 34 con 30 podemos decir que las respuestas son prácticamente iguales.

VI CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se ha desarrollado un programa de computadora que mediante el método de elementos finitos permite analizar modelos de presas sujetas a temblor incluyendo el agua, la cortina y el suelo. Puesto que dichos análisis, involucra la solución paso a paso de un sistema grande de ecuaciones diferenciales de segun-

do orden acopladas, el tiempo de máquina requerido para obtener la respuesta a través de varios segundos es elevado, esto hace que el empleo del programa sea costoso.

Sería costable su empleo para estudios de respuesta en proyectos específicos en donde se conozca la estratigrafía del suelo, el perfil del fondo del vaso, espectro de aceleraciones de la zona etc. de la presa que se va a construir, pudiendo obtener fuerzas y momentos hidrodinámicos de diseño bastante confiables. Para fines de investigación dicho programa de computadora es una herramienta muy costosa, ya que se requerirá de un número muy grande de corridas para poder proponer y respaldar conclusiones generales.

El programa desarrollado se empleó en un número limitado de corridas en base a las cuales es posible vislumbrar los siguientes puntos con respecto al estudio objeto de este trabajo.

El concepto de fronteras absorbentes y activas es de primordial importancia en la adecuada representación de la interacción agua-cortina-suelo. La influencia de la interacción en la respuesta máxima de la presa bajo temblor es hacia el lado de la seguridad o sea que el no considerar la interacción conduce a diseños conservadores, aceptando como definición que el no considerar interacción equivale a obtener la respuesta con la cortina y el fondo del vaso rígidos y el considerar interacción significa obtener la respuesta con la cortina y el fondo flexibles y con fronteras activas y absorbentes.

RECONOCIMIENTOS

Deseo hacer patente mi reconocimiento al Dr. Emilio Rosenblueth por la dirección de este trabajo. Al Dr. Gustavo Ayala, al Dr. Eduardo Rukos, al Dr. Isaias García Terrazas y al M. en I. Jorge López Ríos por sus críticas y sugerencias durante distintas etapas del mismo. Al Instituto de Ingeniería y al Centro de Servicios de Cómputo de la Universidad Nacional Autónoma de México por la ayuda económica y los servicios de cálculo electrónico respectivamente. Al M. en I. Gorgonio Inzunza de la División de Computación Electrónica del Instituto Mexicano del Petróleo por su valiosa colaboración en la depuración del programa de computadora.

Finalmente, pero no por eso menos encarecidamente, a mi esposa por su paciente labor de transcripción mecanográfica.

REFERENCIAS

1. Rosenblueth, E., "Presión Hidrodinámica por sismo en presas. Estado del arte" publicación No. 283 Instituto de Ingeniería, UNAM, México, (1971)
2. Rosenblueth, E., "Presión hidrodinámica en presas debida a aceleración vertical con refracción en el fondo", II Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Veracruz, (1963)
3. Zangar, C.N., "Hydrodynamic pressures on dams due to horizontal earthquake effect", Engineering Monographs No. II, US Dept. of the Interior, Bureau of Reclamation, Denver, Colorado, (1952)
4. Westergaard, H.M., "Water pressures on dams during earthquakes". Transactions ASCE, Volume 98, (1933)
5. Chopra, A.K., Perumalswani, P.R., "Dam foundation interaction during earthquakes". IV Congreso Mundial de Ingeniería Sísmica, Santiago, Chile (1969)
6. Chopra A.K., Wilson, E.L. Farhoomand, I., "Earthquake analysis of reservoir-dam systems", IV Congreso Mundial de Ingeniería Sísmica, Santiago, Chile (1969)
7. Chopra, A.K., Dibaj, M., Clough, R.W., Penzien, S., Seed, H.B., "Earthquake analysis of earth dams", IV Congreso Mundial de Ingeniería Sísmica, Santiago Chile (1969)
8. Rosenblueth, E., "Presión Hidrodinámica en cortinas de gravedad", III Simposio Panamericano de Estructuras, Caracas, Venezuela, (1967)
9. Chopra, A.K., "Hydrodynamic pressures on dams during earthquakes", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, vol. 93, No. EM6, (1967)
10. Chopra, A.K., "Earthquake behavior of reservoir-dam systems", Proc ASCE, 94 No. EM6, (1968)
11. Chopra, A.K., "Earthquake response of earth dams" Proc. ASCE, 93, No. SM2 (1967)
12. Wilson, E.L., "A method of analysis for the evaluation of foundation-structure interaction". IV Congreso Mundial de Ingeniería Sísmica, Santiago, Chile, (1969)
13. Kotsubo, S., "External forces on arch dams during earthquakes", Memoirs Faculty of Engineering, Kyushu University, Fukuoka, Japan (1961)

14. Katsubo, S., "Dynamic water pressure on dam due to irregular earthquakes" Memoirs Faculty of Engineering, Kyushu University, Fukuoka, Japan (1959)
15. Chopra, A. K., "The importance of the vertical component of earthquake motions" Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 56, No. 5, (1966)
16. Chopra, A.K., "Earthquake response of concrete gravity dams", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol 96, No. EM4, (1970)
17. Chopra, A.K., Chakrabarti, P., "A computer program for earthquake analysis of dams", Report No. EERC 70-5, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, (1970)
18. Chopra, A.K., Chakrabarti, P., "The koyna earthquake of december 11, 1967 and the performance of Koyna dam", Report No. EERC 71-1, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley (1971)
19. Flores Victoria, A., "Presión hidrodinámica durante sismos", Primer Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Guadalajara, Jalisco (1965)
20. Hatano, T., "An examination on the resonance of hydrodynamic pressures during earthquakes due to the elasticity of the water", Central Research Institute of Electrical Power Industry, Tokyo, Japan (1965)
21. Hatano, T., "Numerical solution of hydrodynamic pressures during earthquakes on arch dams", Central Research Institute Of Electrical Power Industry Tokyo, Japan (1966)
22. Wolffer, J.F., "Presiones hidrodinámicas en presas durante temblores debidas a aceleración vertical" Tesis Doctoral, División de estudios superiores, Fac. de Ing. UNAM, 1971
23. Wilson, E.L., "A computer program for the dynamic stress analysis of underground structures". Report No 68-1. Structural Engineering Laboratory, University of California, Berkeley, (1968)
24. Clough, R. W., "The finite element method in plane stress analysis," Proc., 2nd ASCE conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pennsylvania, September 1960.
25. Clough, R. W. and Chopra, A. K., "Earthquake stress analysis en earth dams," Structures and material research, Dept. of Civil Engineering, Report No. 65-8, July 1965.
26. Constantino, C. J., "Finite element approach to stress wave problems." Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 93, No EM2, April 1967.

27. Wilson, E. L. and Clough R. W., "Dynamic response by step-by-step matrix analysis," Symposium on Use of Computers in Civil Engineering, Laboratorio Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Portugal, October 1962.
28. Chopra, A. K., Wilson, E. L., and Farhoomand, I., "Earthquake Analysis of Reservoir-Dam Systems," Proceedings of the Fourth World Conference on Earthquake Engineering.
29. Kuhlemeyer, R. L., "Vertical Vibrations of Footings Embedded in Layered Media," thesis presented to the University of California, at Berkely, Calif., in 1969.
30. Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R. L., "Finite Dynamic Model for Infinite Media". Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, Vol. 95, No. EM4, August 1969.
31. Shipley, S. A., Leistner, H. G., and Jones, R. E., "Elastic Wave Propagation-A Comparison Between Finite Element Predictions And Exact Solutions," Proceedings, International Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials, University of New Mexico Press, Albuquerque, N. M., Aug., 1967.
32. Lysmer, J. and Drake, L. A., "A Finite Element Method for Seismology, in Seismology: Surface Waves and Earth Oscillations, Vol 11 of Methods of Computational Physics, Academic Press, New York and London, 1972.
33. Castellani, A., "Boundary Conditions to Simulate an Infinite Space," Meccanica, Vol. IX, N. 4, 1974.
34. Lysmer, J. and Waas, G., "Shear Waves in Plane Infinite Structures," Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, Vol. 98, No. EM1. February 1972.
35. Smith, W. D., "A Nonreflecting Boundary for Wave Propagation Problems," Journal of Computational Physics, Vol. 15, No. 4, August 1974.
36. Tseng, M. N., "A transmitting Boundary for Finite-Difference Analysis of Wave Propagation in Solids," Doctoral Dissertation, Graduate College, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1976.
37. Ewing, W. M., Jardetzky, W. S., Press, F., Elastic Waves in Layered media, Mc Graw - Hill, New York, 1957.
38. Richart F. E. Hall, J. R., Woods, R. D., Vibrations of Soils and Foundations, Pretice Hall, 1970.

39. Ayala G., Aranda, G. R., "Boundary Conditions in Soil Amplification Studies," Memoria VI Congreso Mundial de Ingeniería Sísmica, Nueva Delhi, India, 1977.
40. Clough, R. W., and Wilson, E. L., "Stress Analysis of a Gravity Dam by the Finite Element Method," RILEM Bulletin No. 19, June 1963.
41. Zienkiewicz, O. C., et al., "Analysis of Nonlinear Problems in Rock Mechanics with Particular Reference to Jointed Rock Systems," Proc. of 2nd. Conference of Int. Soc. for Rock Mech., Belgrade, 1970.
42. Ghaboussi, F., J. Isenberg and Wilson, E. L., "Finite Element for Rock Joints and Interfaces," J. of Soil Mech., ASCE, SM 10, October 1973.
43. Zienkiewicz, O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, Mc Graw-Hill, London, 1971.
44. Wilson, E. L., Farhoomand, I. and Bathe, K. J., "Nonlinear Dynamic Analysis of Complex Structures", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, pp. 241-252.
45. Chopra, A. K., and Gutierrez, J. A., "Earthquake Response Analysis of Multistory Buildings Including Foundation Interaction," International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 3 No. 1 July-September, 1974.
46. Lysmer, J., Udake, T., Seed, H. B., and Hwang, R., "LUSH-A Computer Program for Complex Response Analysis of Soil-Structure Systems," Report No. EERC 74-4, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, California, August 1975.
47. Rukos, E. A., "Earthquake Analysis of Interacting Ground-Structure Systems," Report No. UCSESM 71-9, Department of Civil Engineering, University of California, May 1971.
48. Noor, A. K., and Fulton, R. E., "Impact of CDC STAR-100 Computer on Finite Element Systems" J. of the Structural Division, ASCE, ST 4, April 1975.
49. Desai, C. S., and Abel, J. F., Introduction to the Finite Element Method, Van Nostrand Reinhold Co., Inc., New York, N. Y., 1972.
50. Graham, W. R., "The Impact of Future Developments in Computer Technology" Computers and Structures, Vol. 1, Nos 1/2, Aug., 1971.

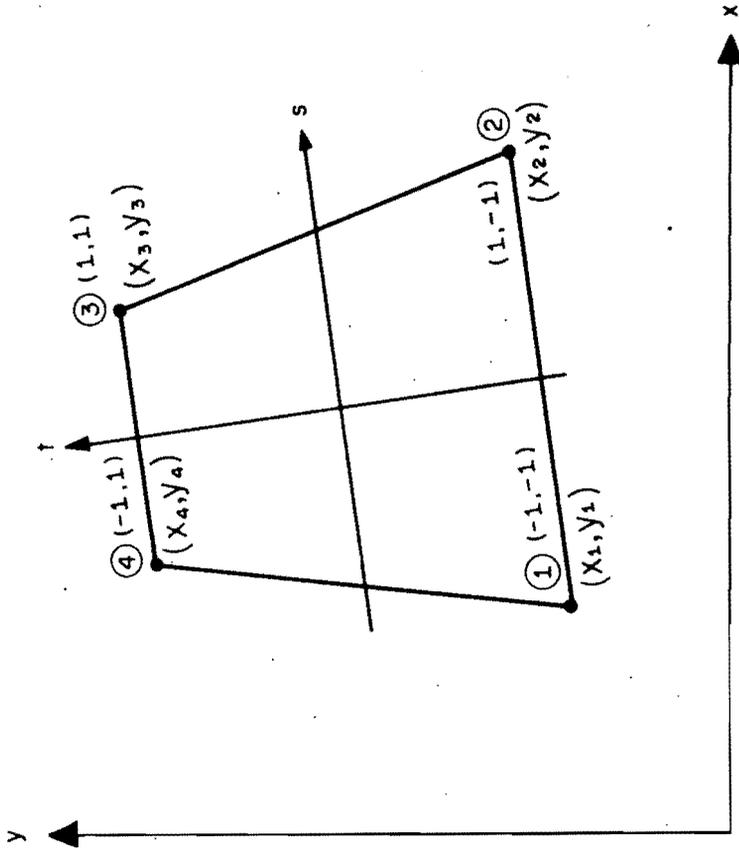


figura 1 Sistemas de coordenadas local y global.

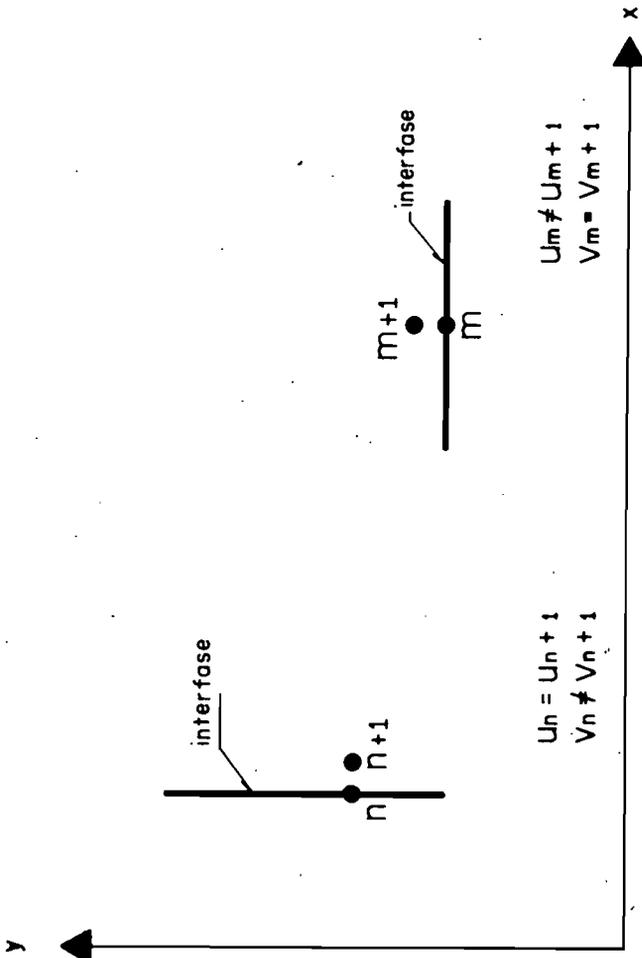


figura 2

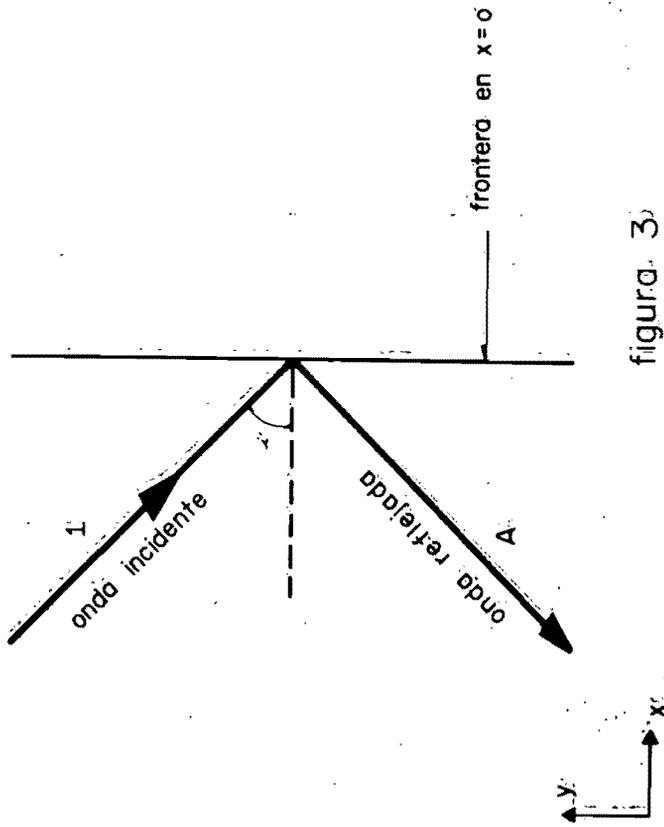


figura. 3

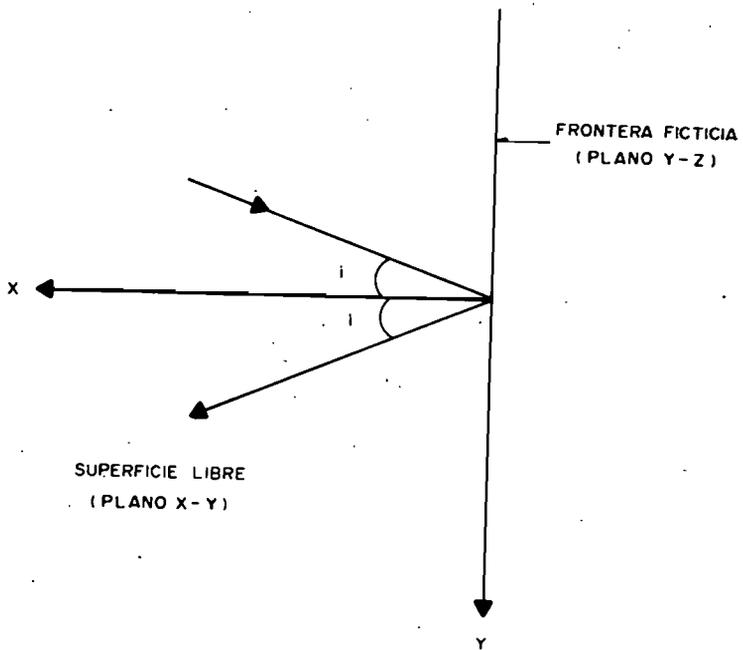


FIG. 4

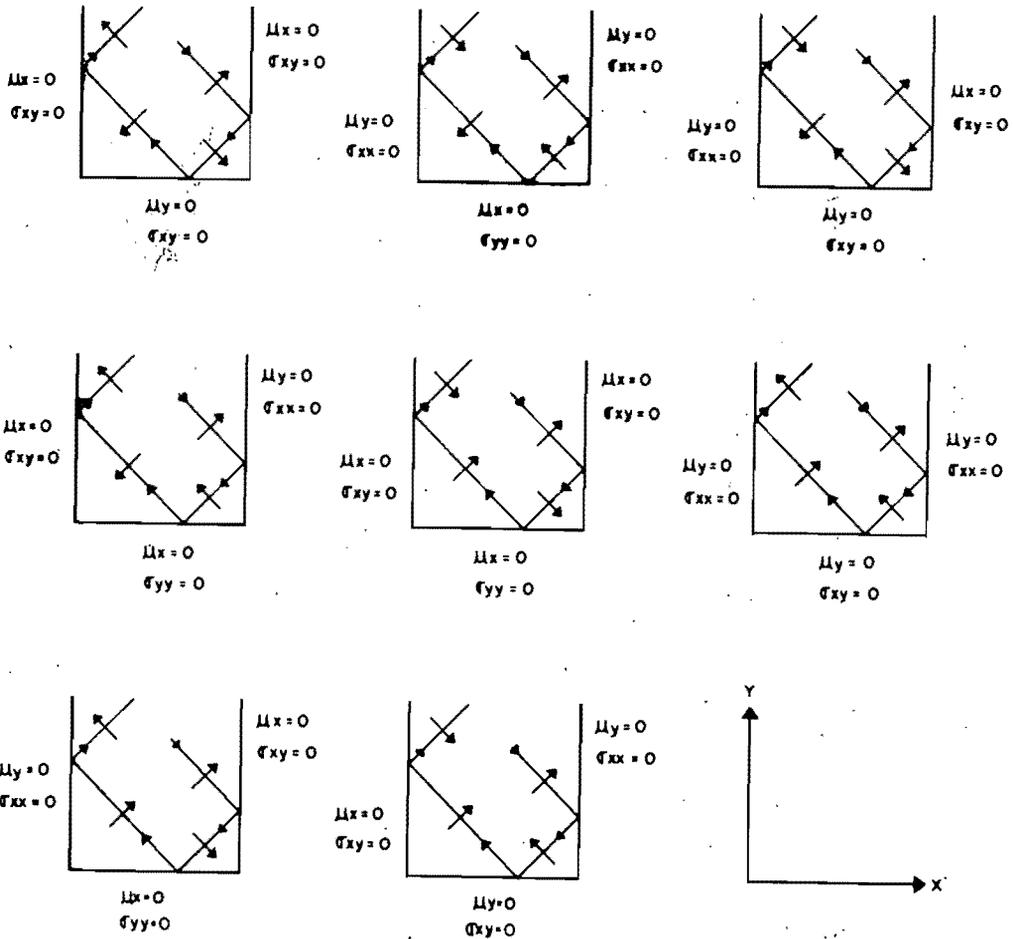


Fig. 5

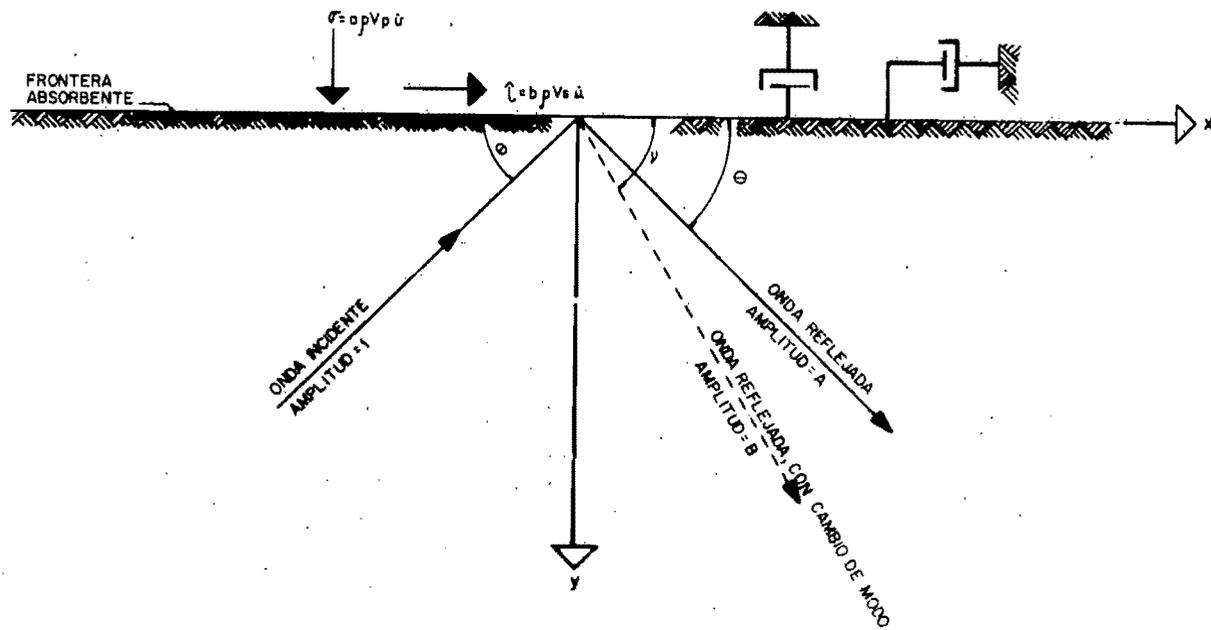
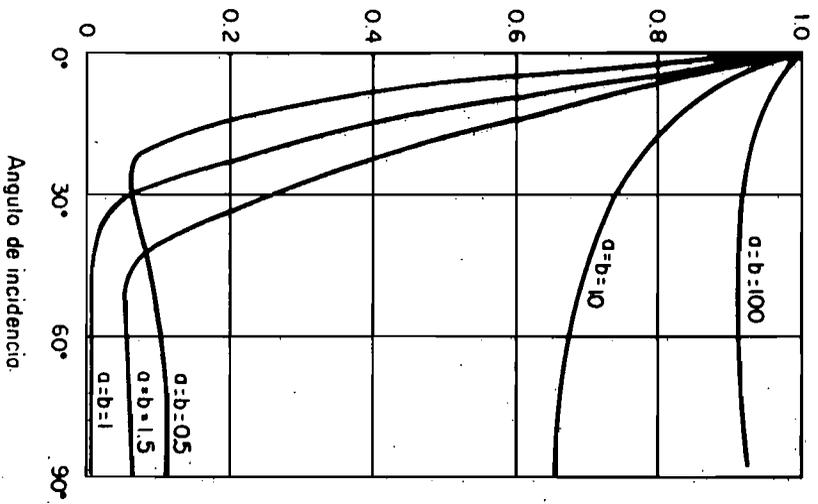


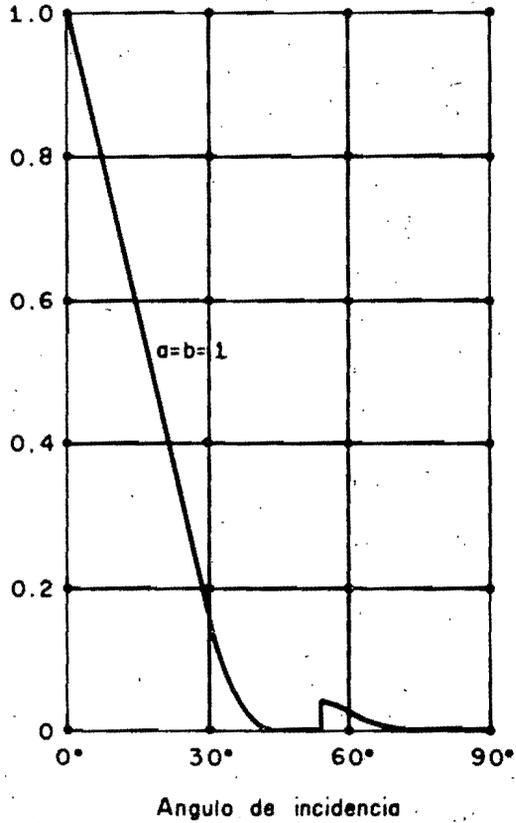
FIG. 6

Energía reflejada
Energía incidente



Razón de energía para onda P incidente
FIG. 7

$\frac{\text{Energía reflejada}}{\text{Energía incidente}}$



Razón de energía para onda S incidente

Fig. 8

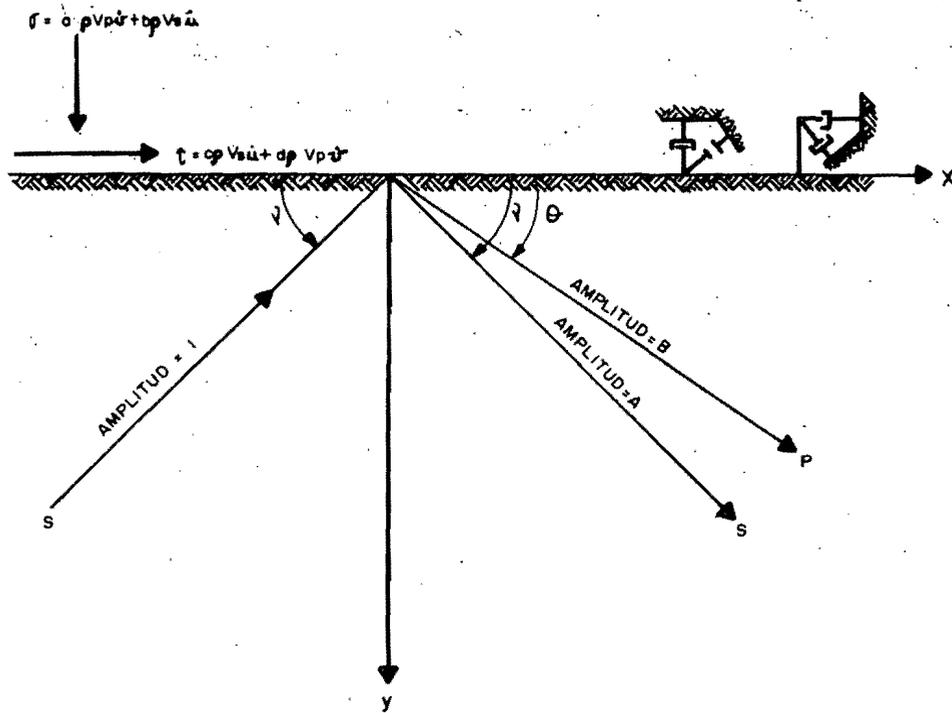


FIG. 10

PARED
RIGIDA

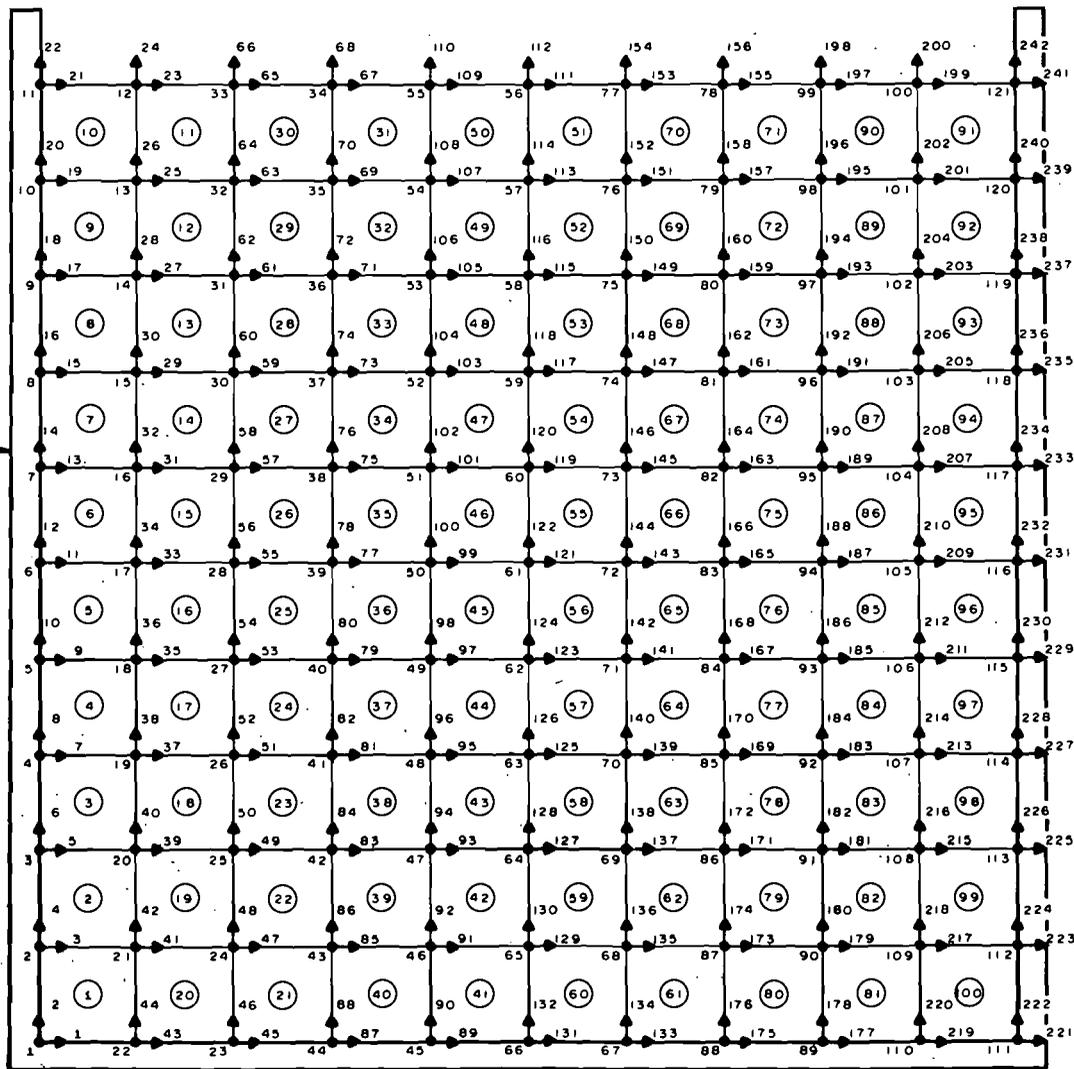
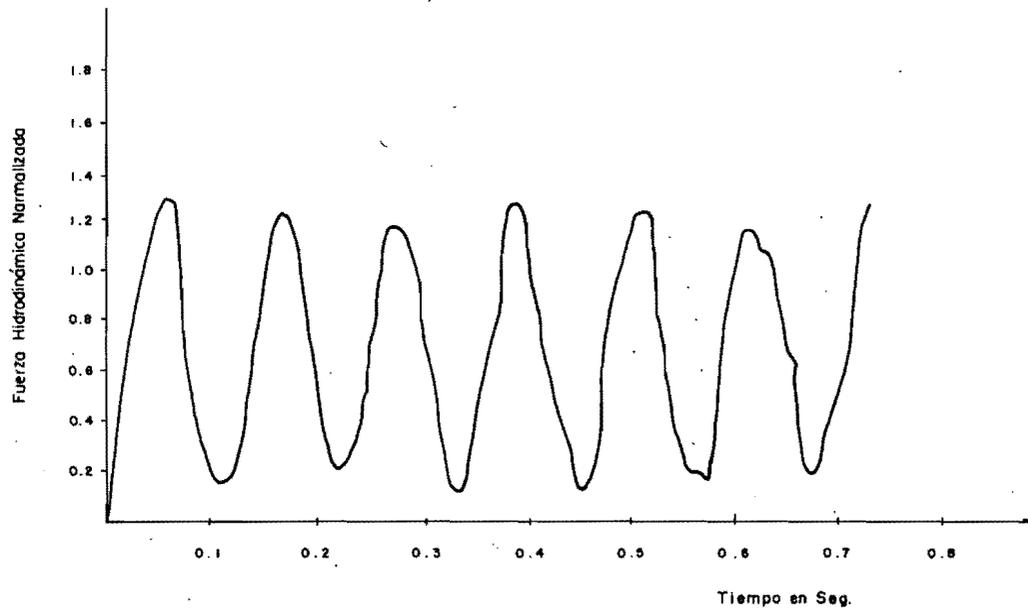


FIG 11



SOLUCION EXACTA

Fig. 12

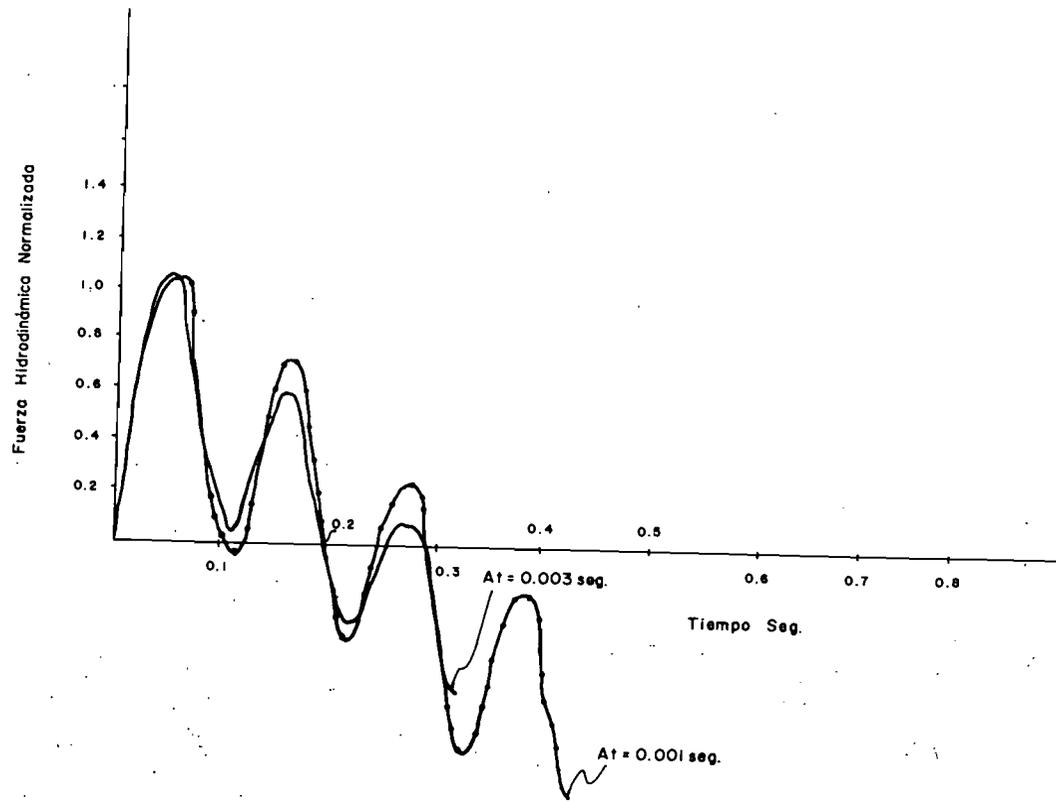


Fig. 13

FUERZA HIDRODINAMICA

NORMALIZADA CON LA HIDROSTATICA

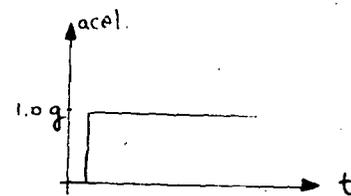
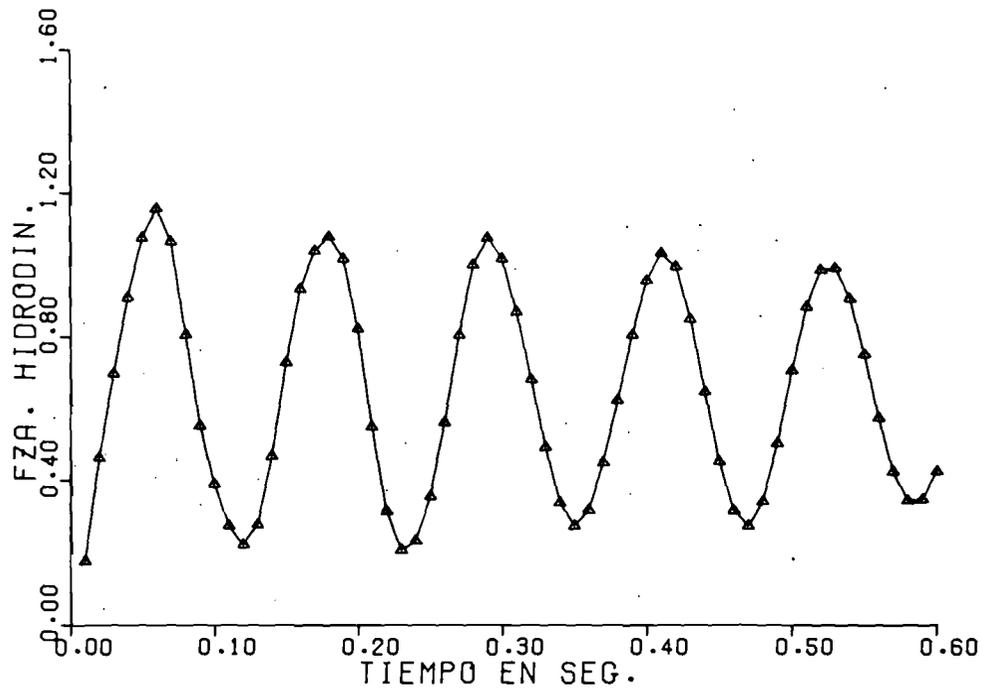
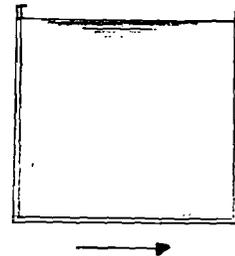


Fig 14 o

MOMENTO HIDRODINAMICO DE VOLTEO
NORMALIZADO CON EL HIDROSTATICO

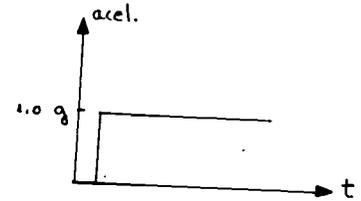
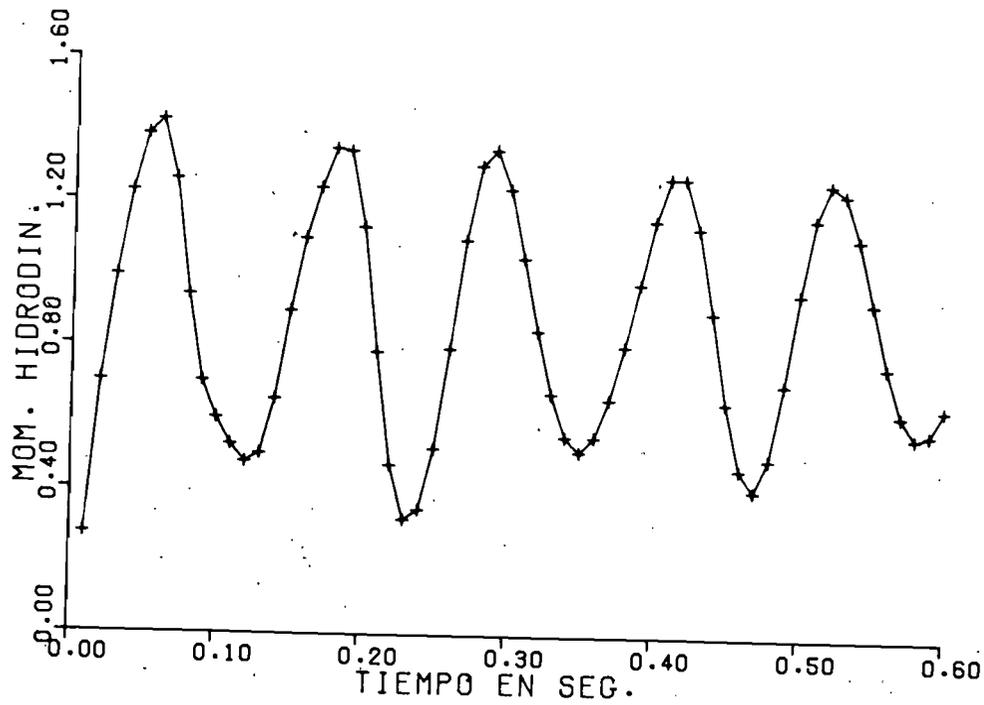
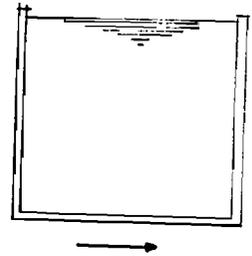


Fig 14 b

ALTURA DE LA RESULTANTE HIDRODINAMICA NORMALIZADA CON LA PROFUNDIDAD

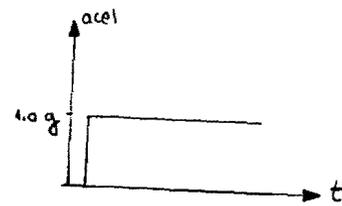
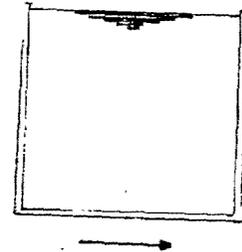
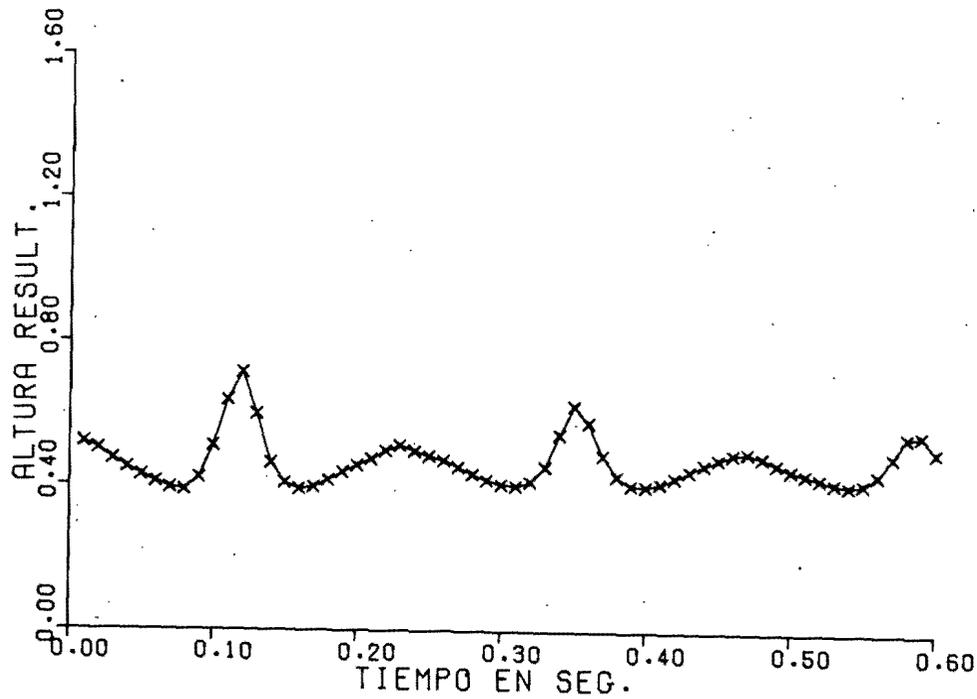


Fig 14 c

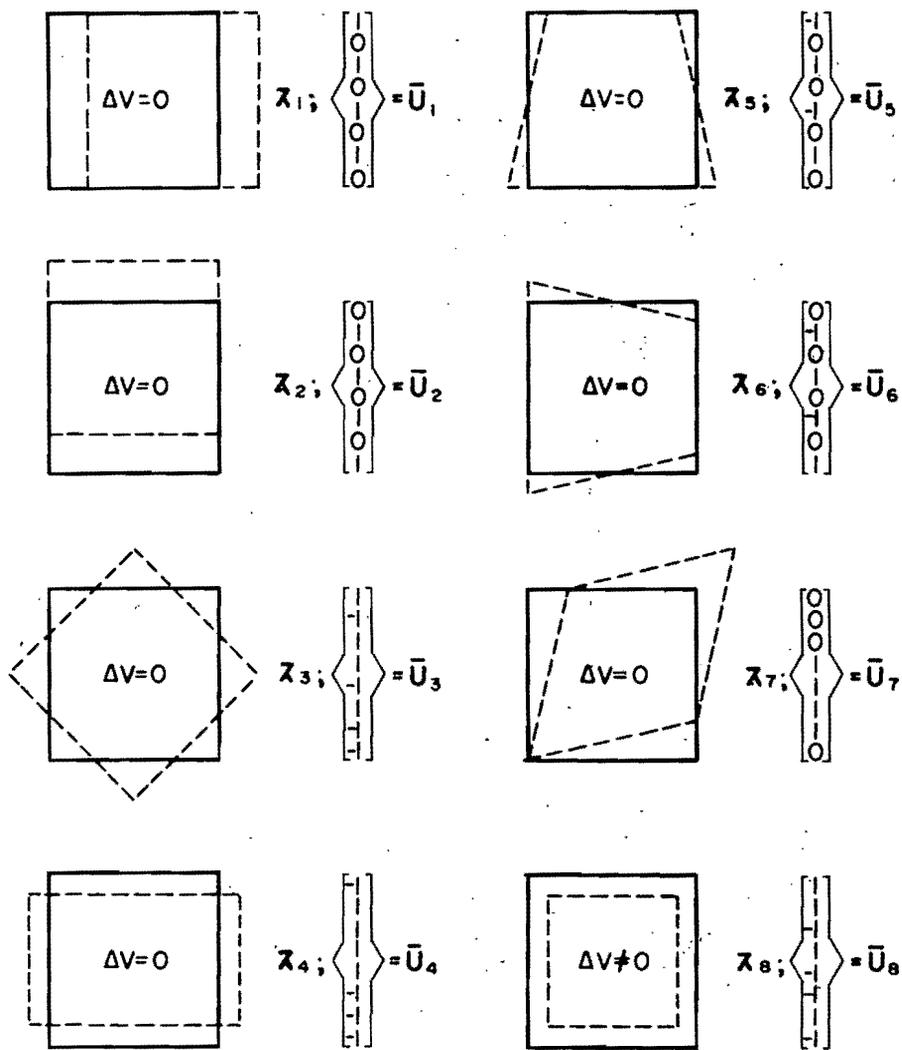


FIG.15 MODOS DE DEFORMACION DE LOS ELEMENTOS DE FLUIDO

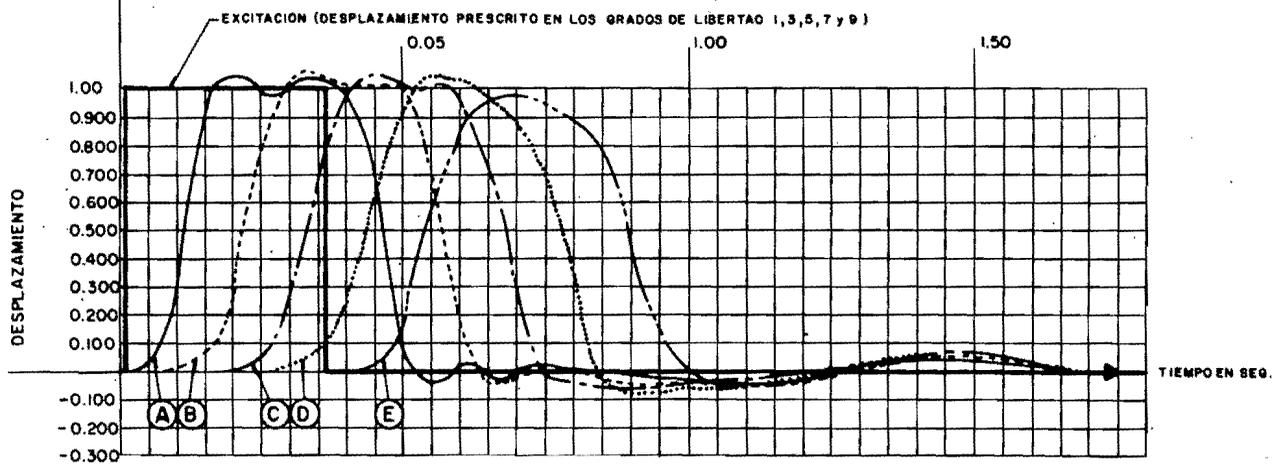
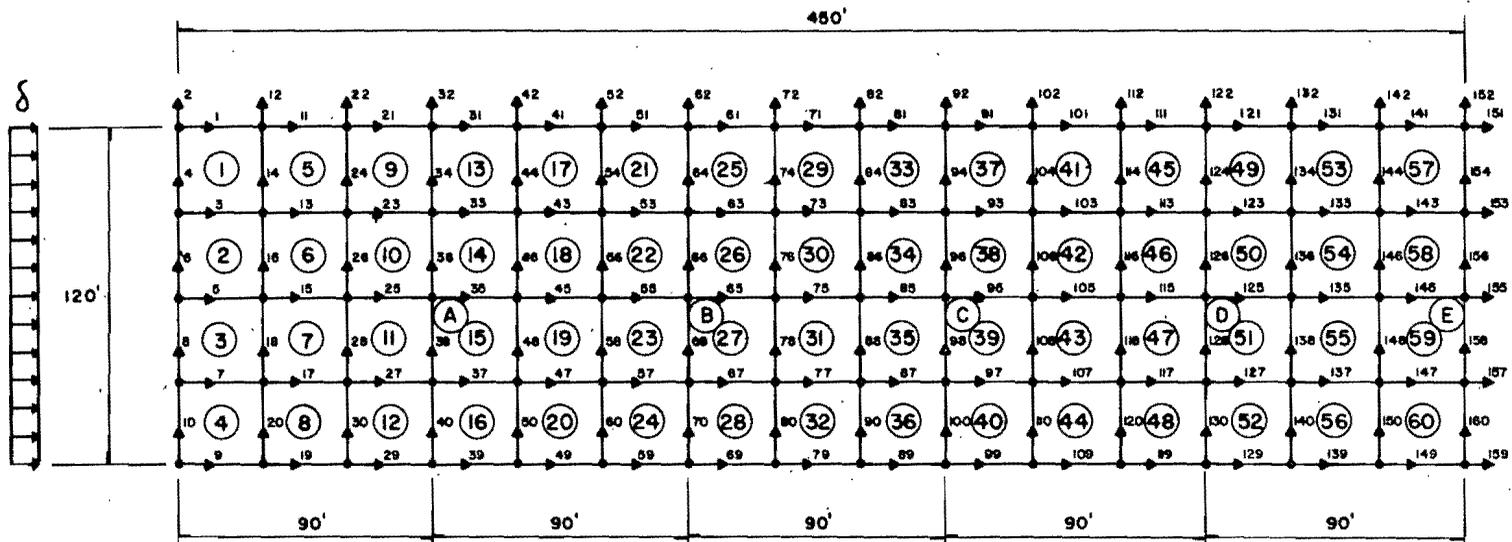


FIG. 16

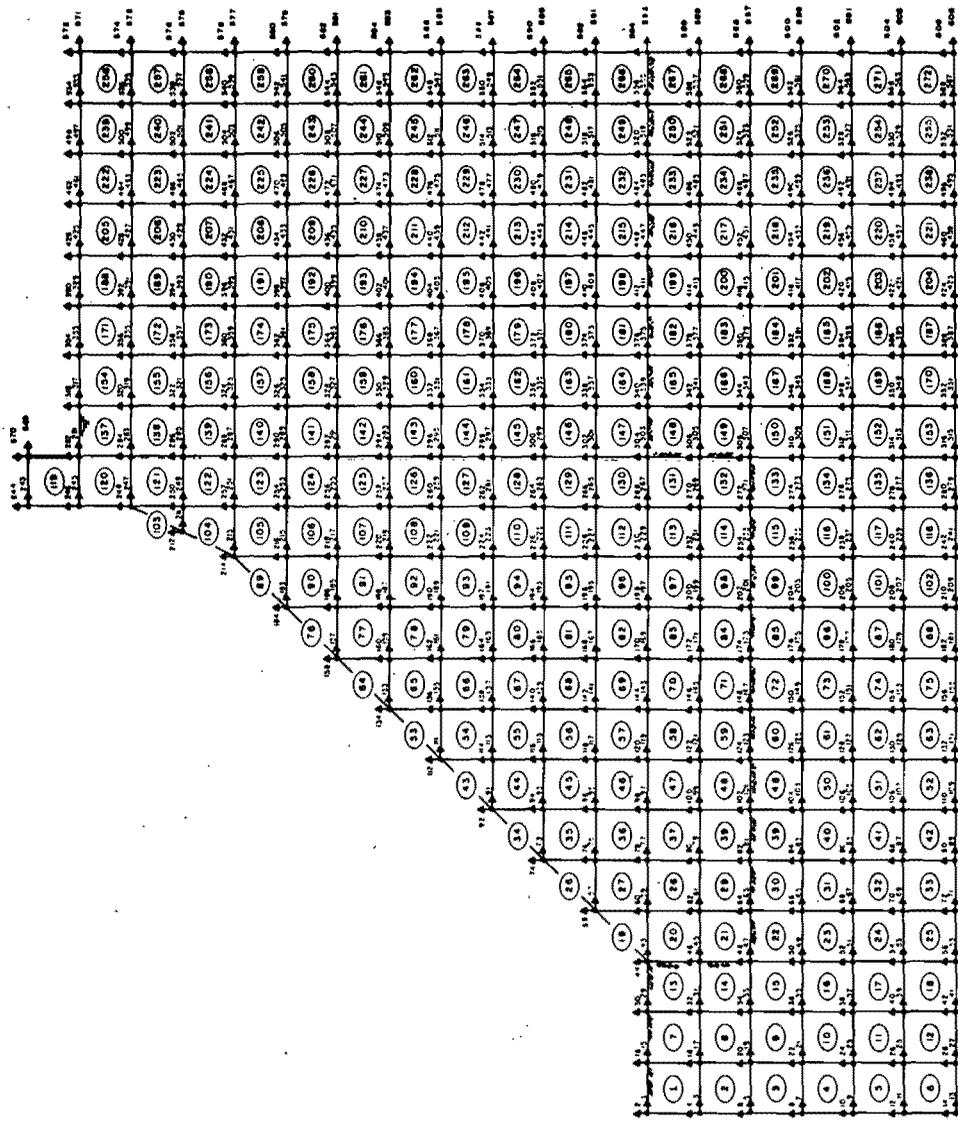
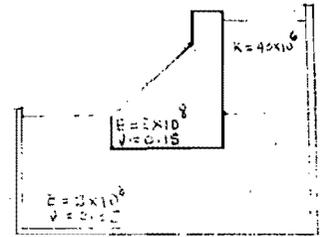
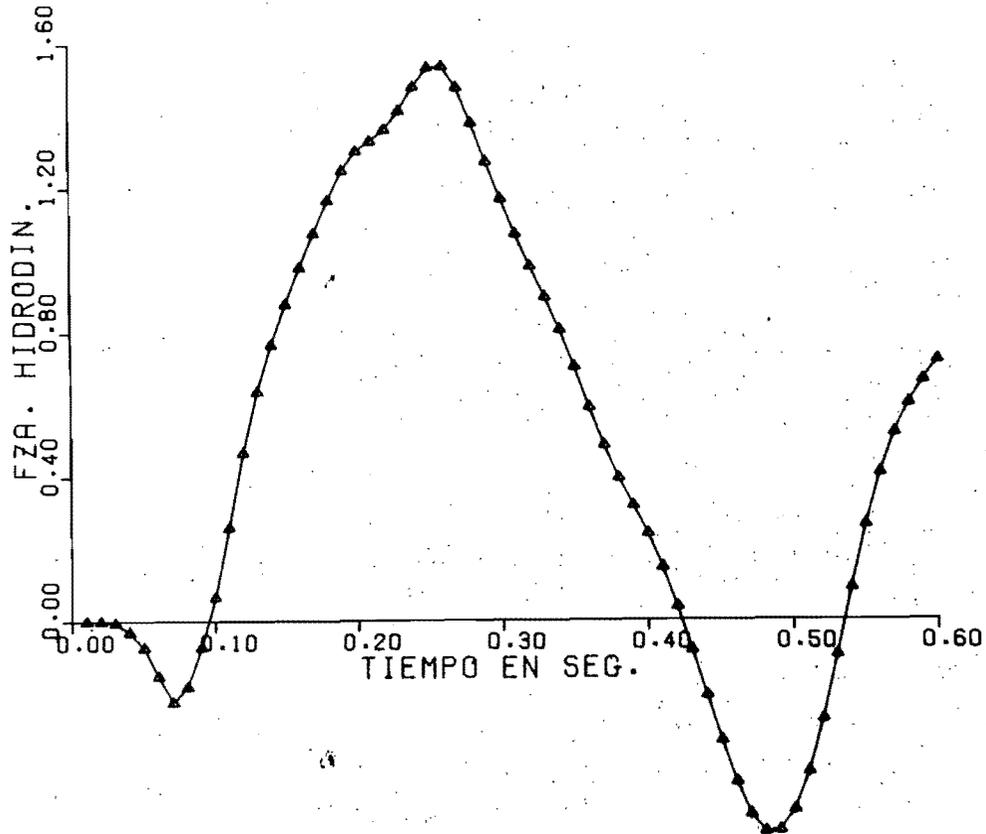


FIGURA 17.

FUERZA HIDRODINAMICA NORMALIZADA CON LA HIDROSTATICA



acel. horiz

1.0-g

Fig 18 a

MOMENTO HIDRODINAMICO DE VOLTEO

NORMALIZADO CON EL HIDROSTATICO

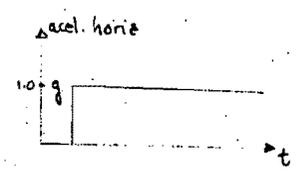
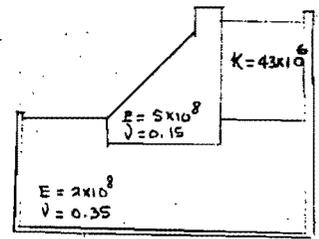
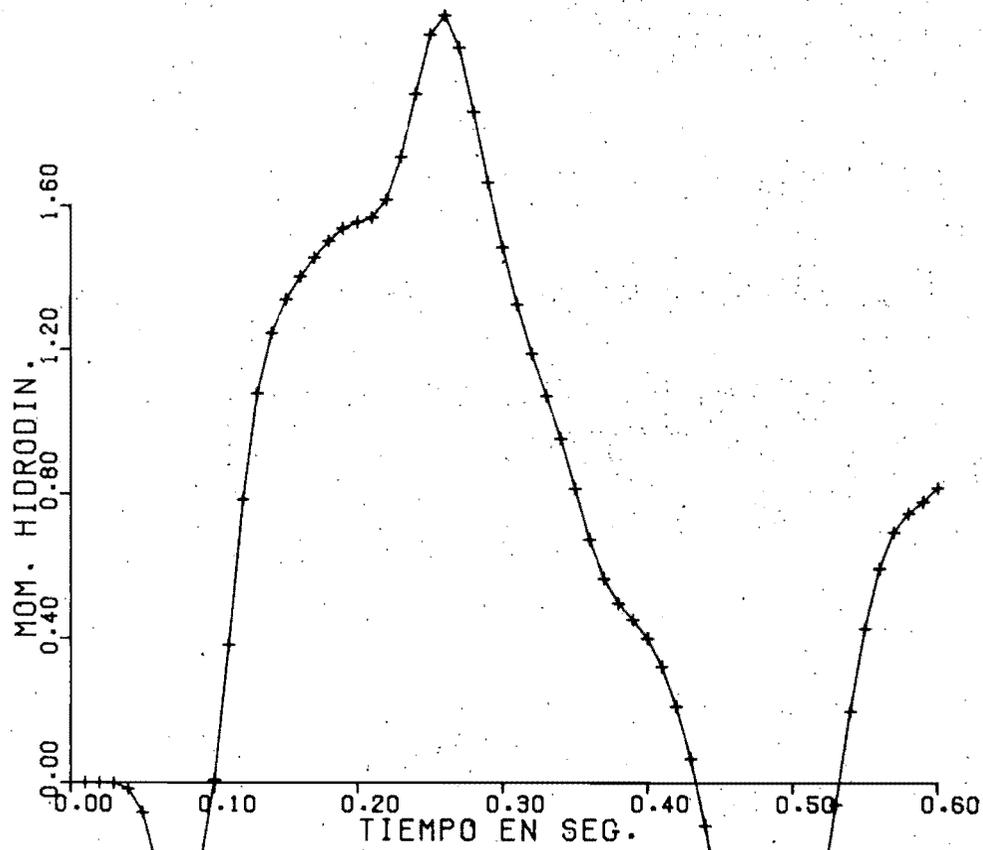


Fig 18 b

FUERZA HIDRODINAMICA
NORMALIZADA CON LA HIDROSTATICA

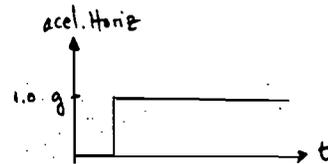
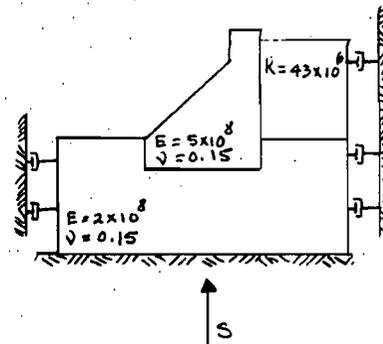
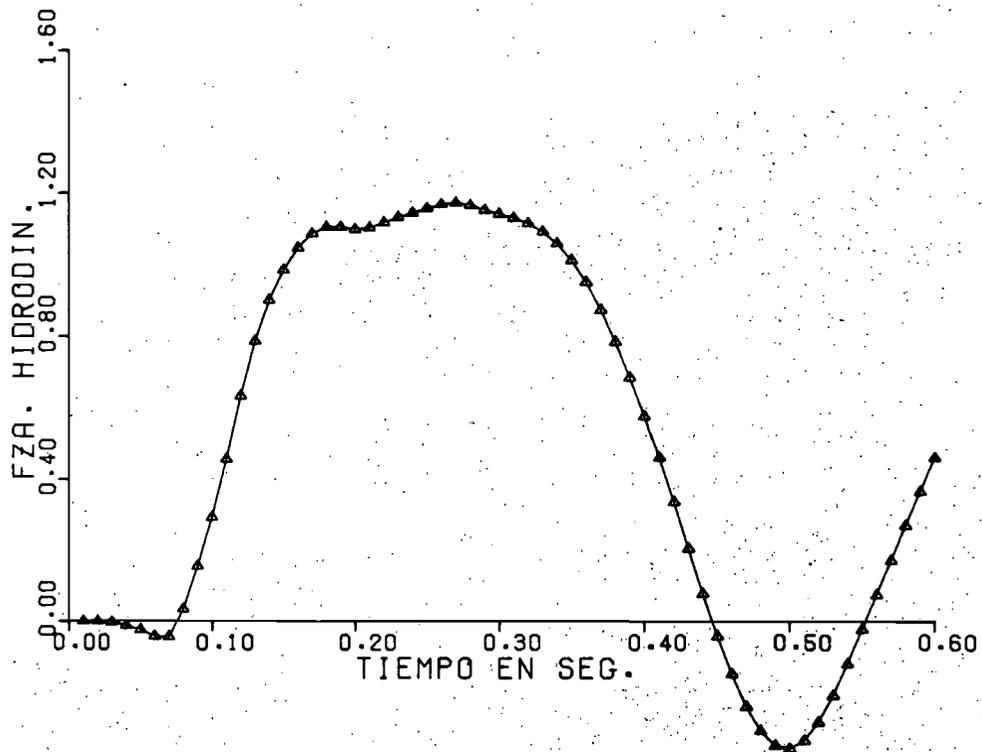


Fig 19 a

MOMENTO HIDRODINAMICO DE VOLTEO
 NORMALIZADO CON EL HIDROSTATICO

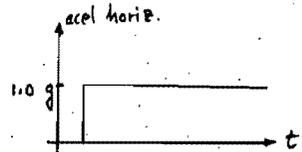
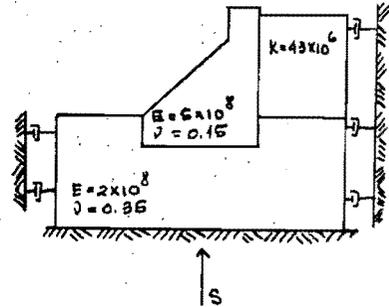
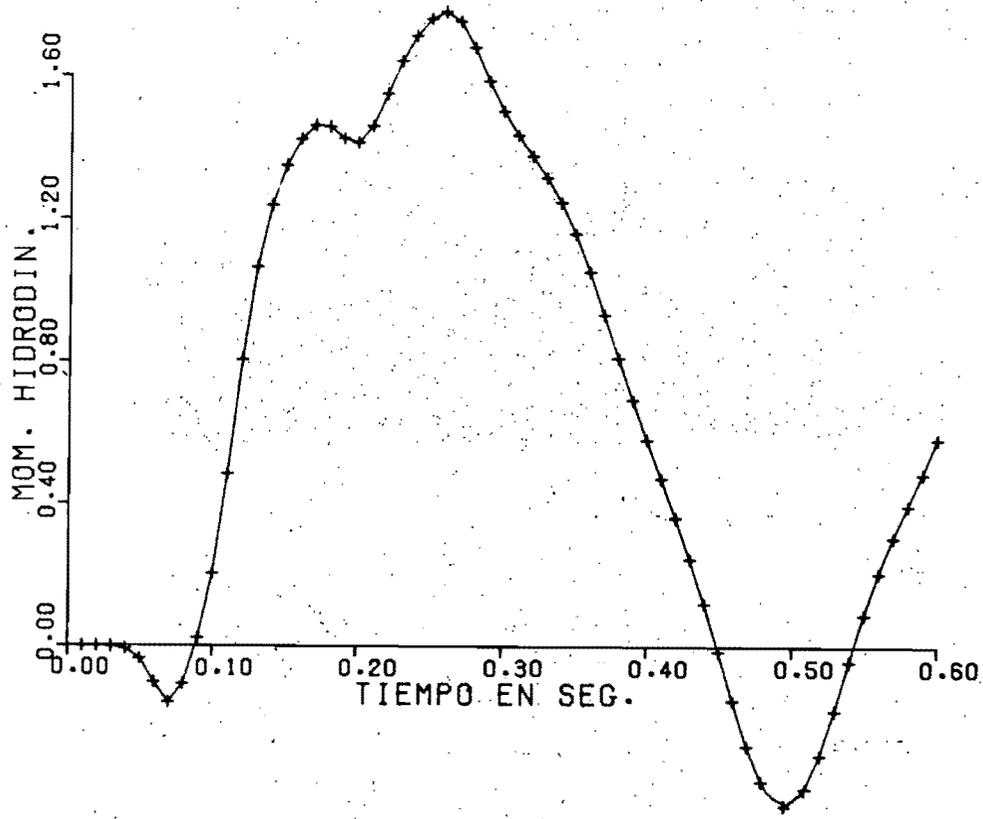


Fig 19 b

FUERZA HIDRODINAMICA
 NORMALIZADA CON LA HIDROSTATICA

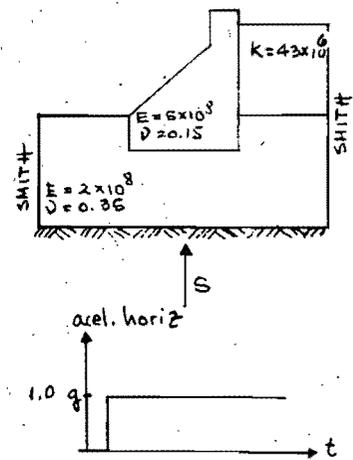
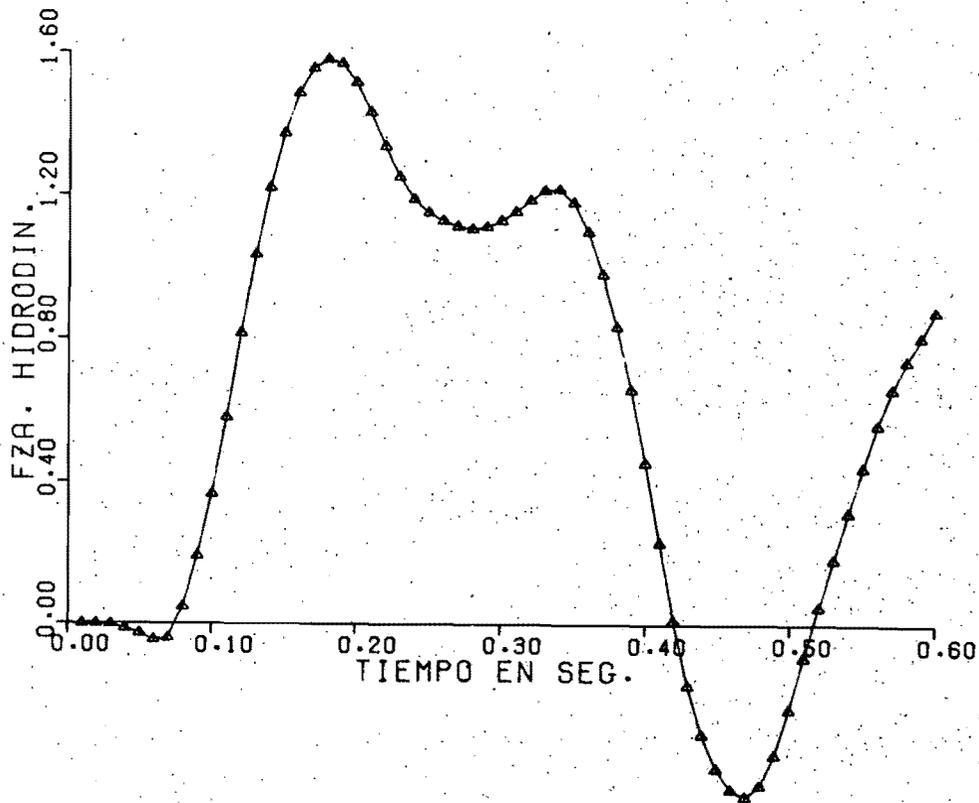


Fig 20.0

MOMENTO HIDRODINAMICO DE VOLTEO

NORMALIZADO CON EL HIDROSTATICO

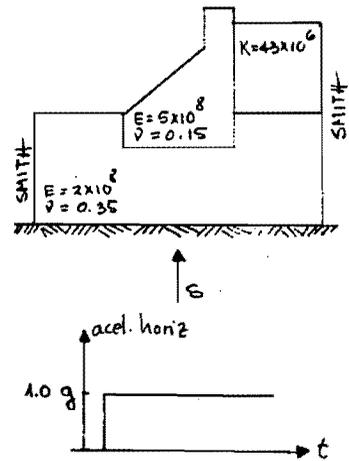
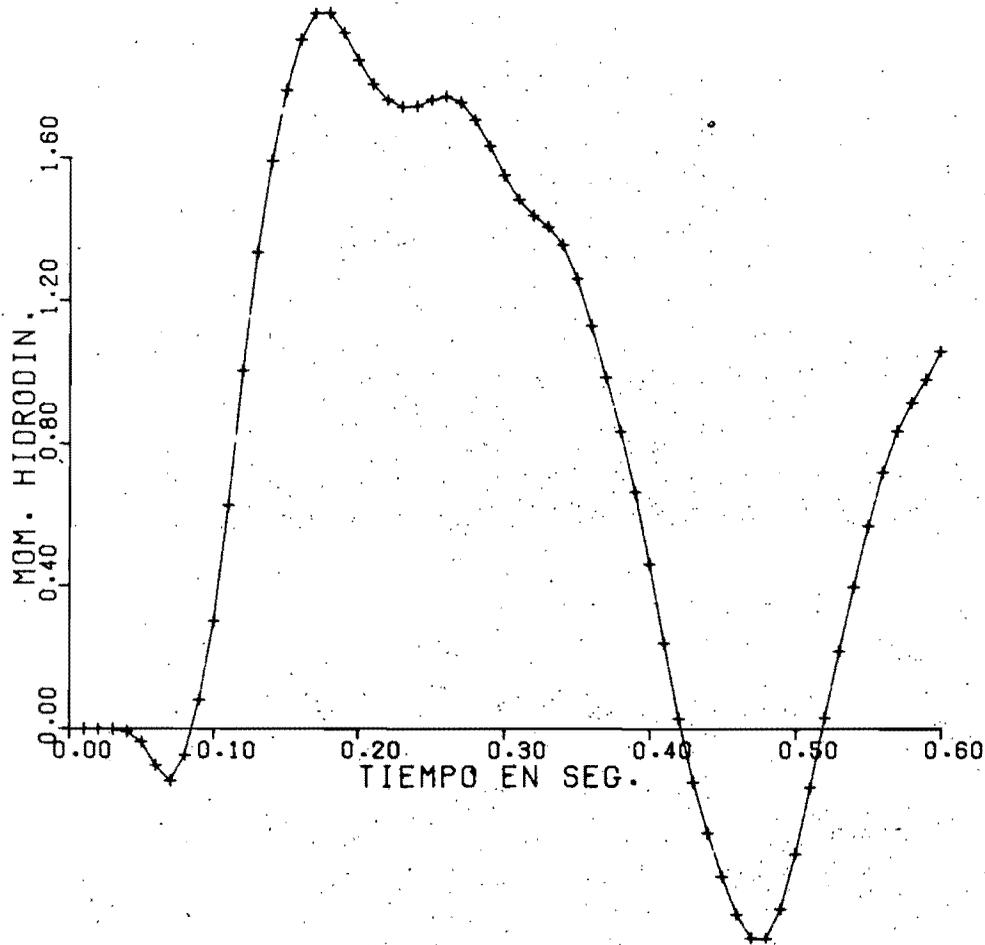


Fig 20 b

FUERZA HIDRODINAMICA

NORMALIZADA CON LA HIDROSTATICA

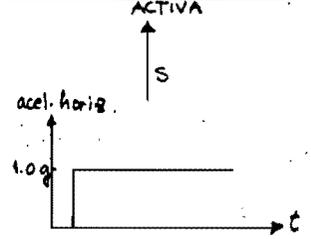
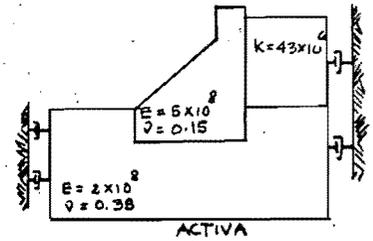
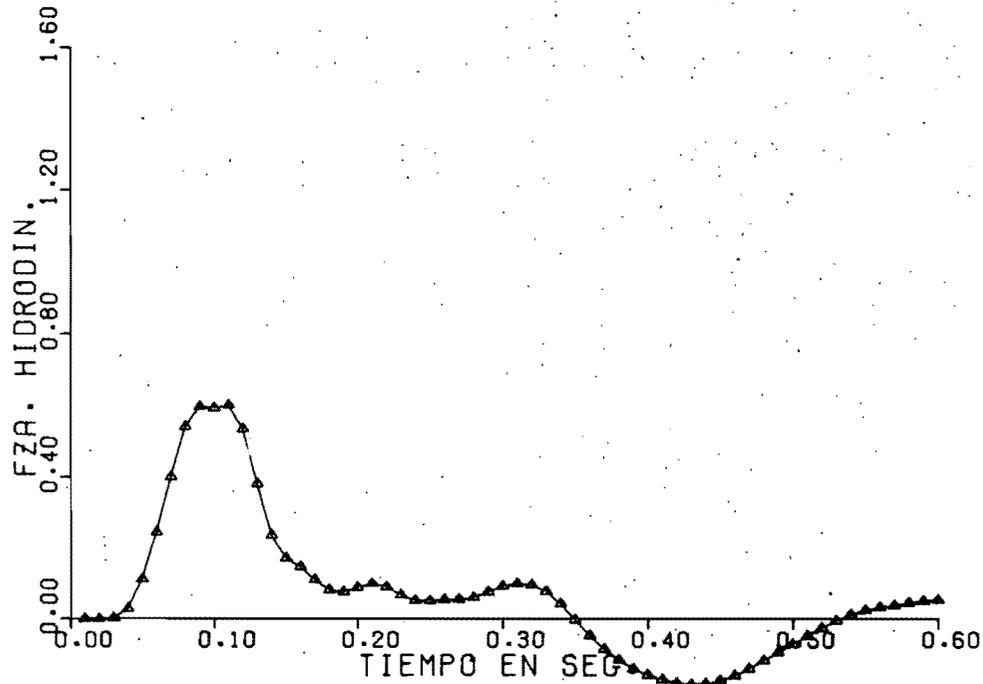


Fig 21 a

MOMENTO HIDRODINAMICO DE VOLTÉO
 NORMALIZADO CON EL HIDROSTATICO

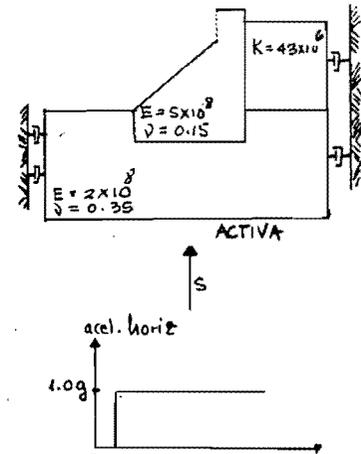
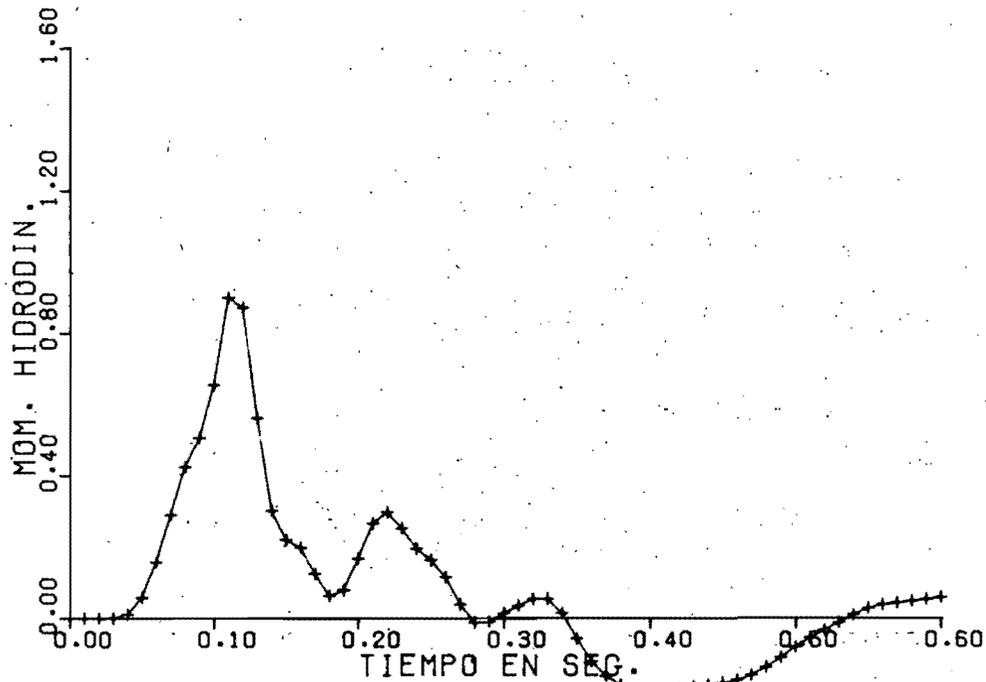


Fig 21 b

FUERZA HIDRODINAMICA
NORMALIZADA CON LA HIDROSTATICA

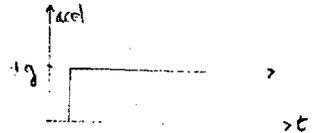
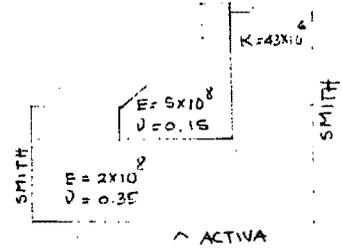
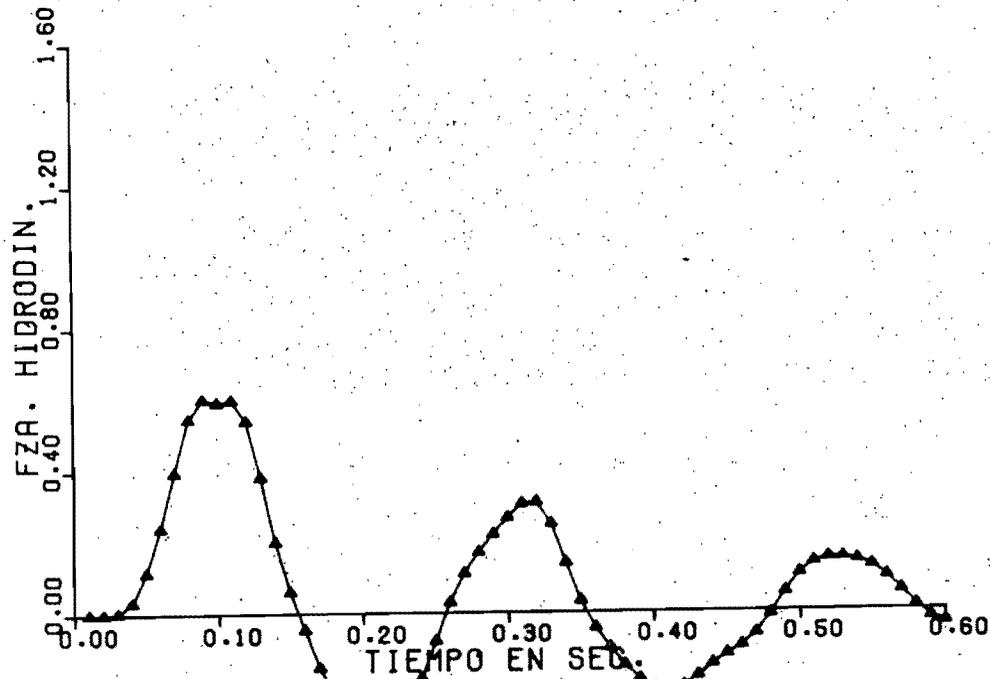


Fig 22 a

MOMENTO HIDRODINAMICO DE VOLTEO
 NORMALIZADO CON EL HIDROSTATICO

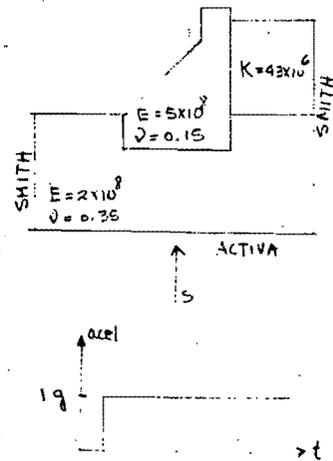
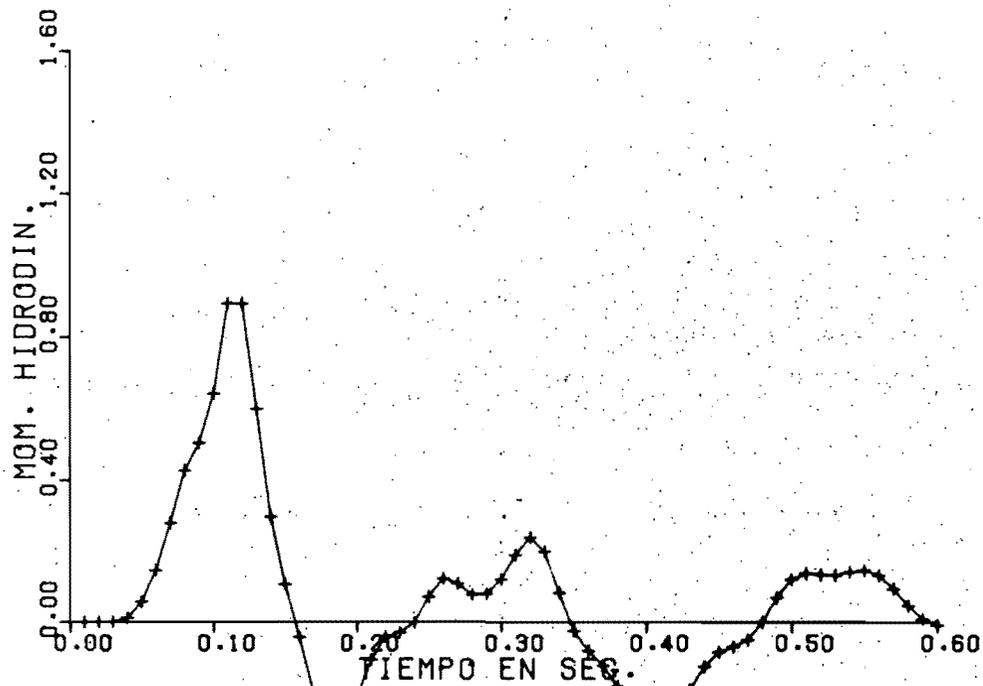


Fig 22 b

FUERZA HIDRODINAMICA

NORMALIZADA CON LA HIDROSTATICA

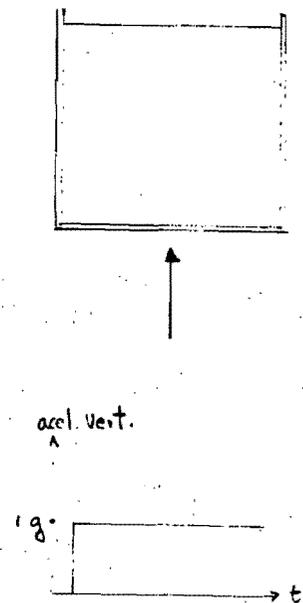
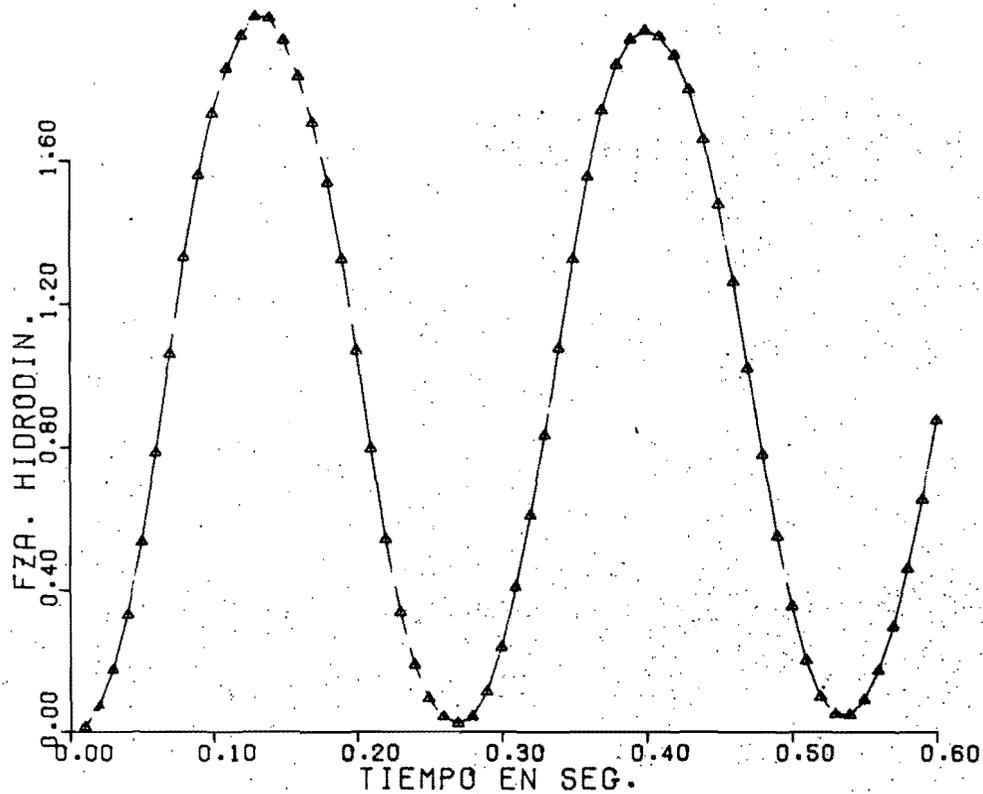


Fig 23 a

MOMENTO HIDRODINAMICO DE VOLTEO
NORMALIZADO CON EL HIDROSTATICO

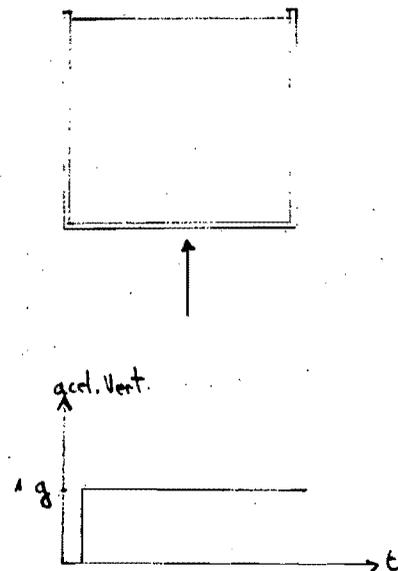
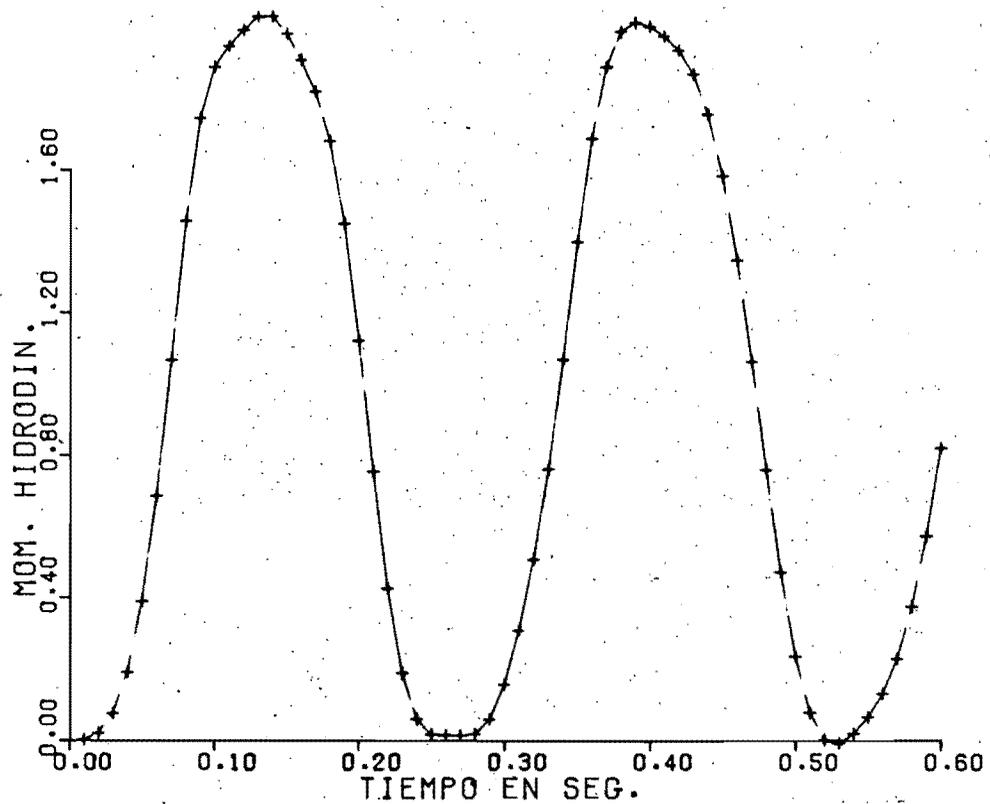


Fig 23 b

ALTURA DE LA RESULTANTE HIDRODINAMICA
NORMALIZADA CON LA PROFUNDIDAD

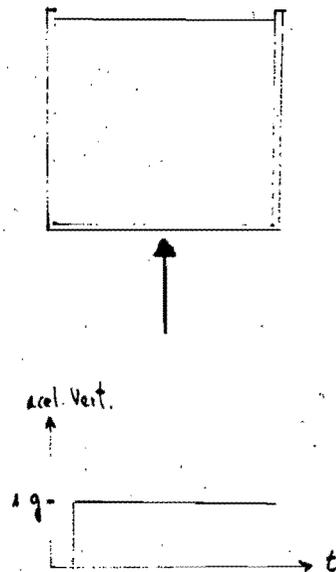
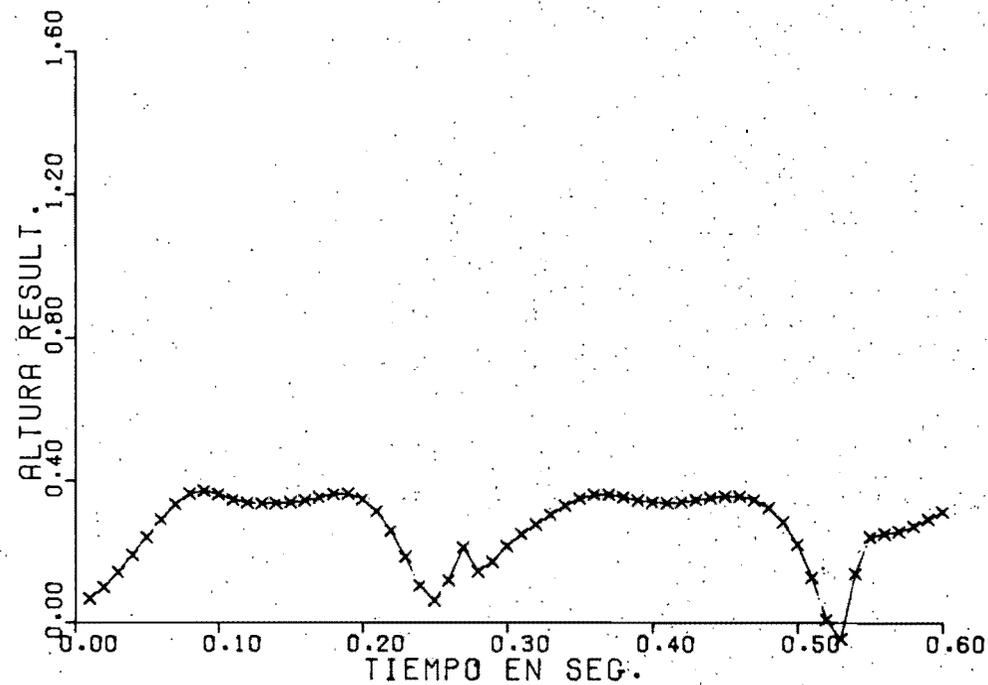


Fig 23 c

FUERZA HIDRODINAMICA
 NORMALIZADA CON LA HIDROSTATICA

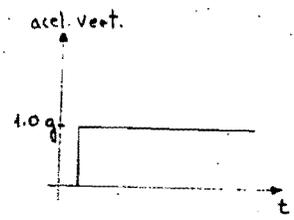
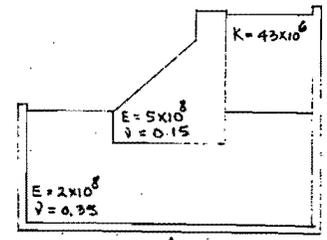
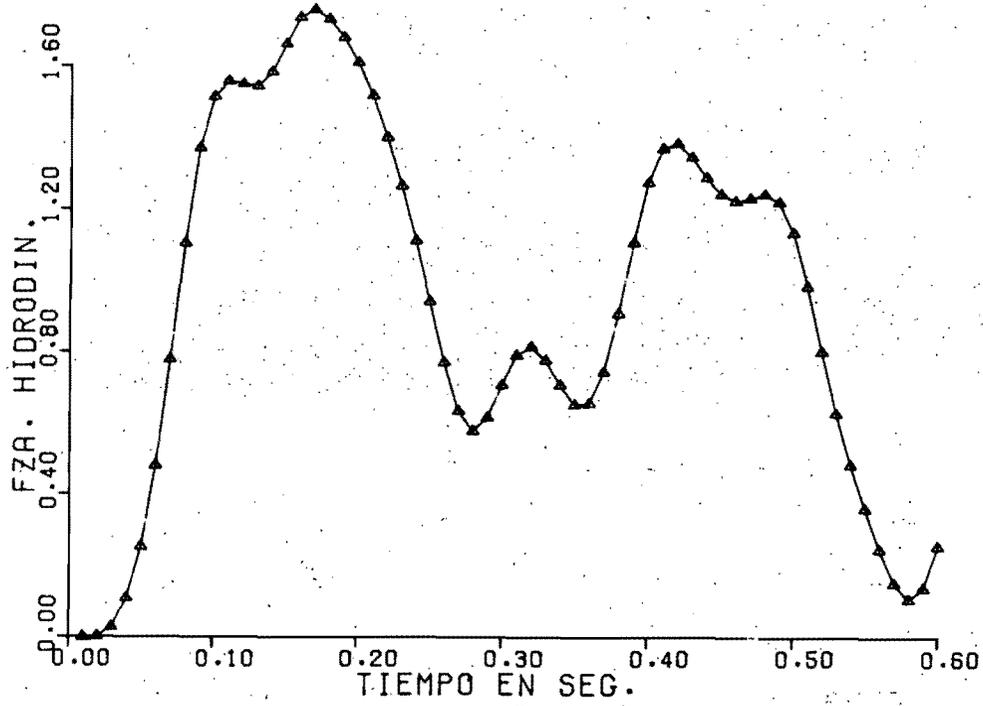


Fig 24 a

MOMENTO HIDRODINAMICO DE VOLTEO

NORMALIZADO CON EL HIDROSTATICO

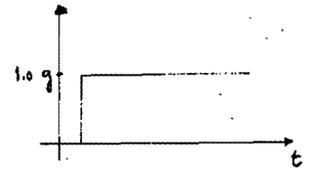
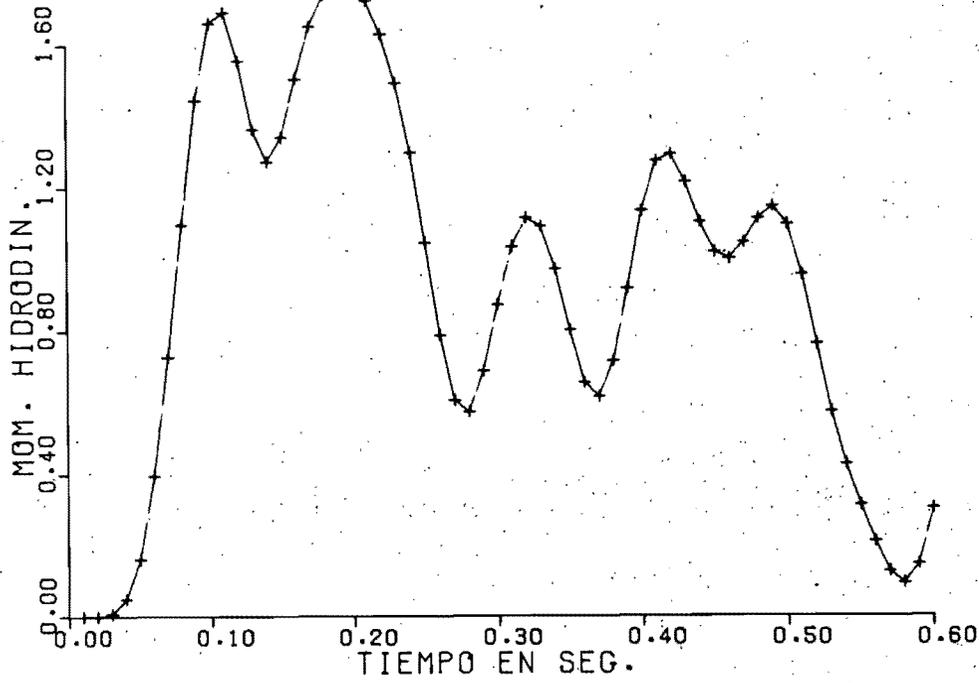
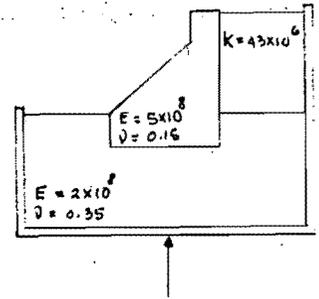


Fig 24 b

FUERZA HIDRODINAMICA

NORMALIZADA CON LA HIDROSTATICA

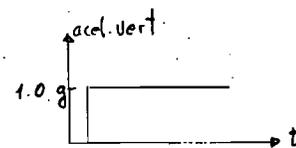
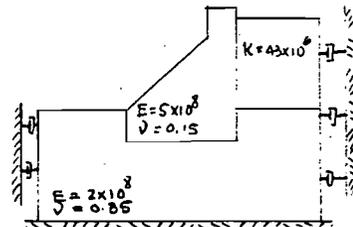
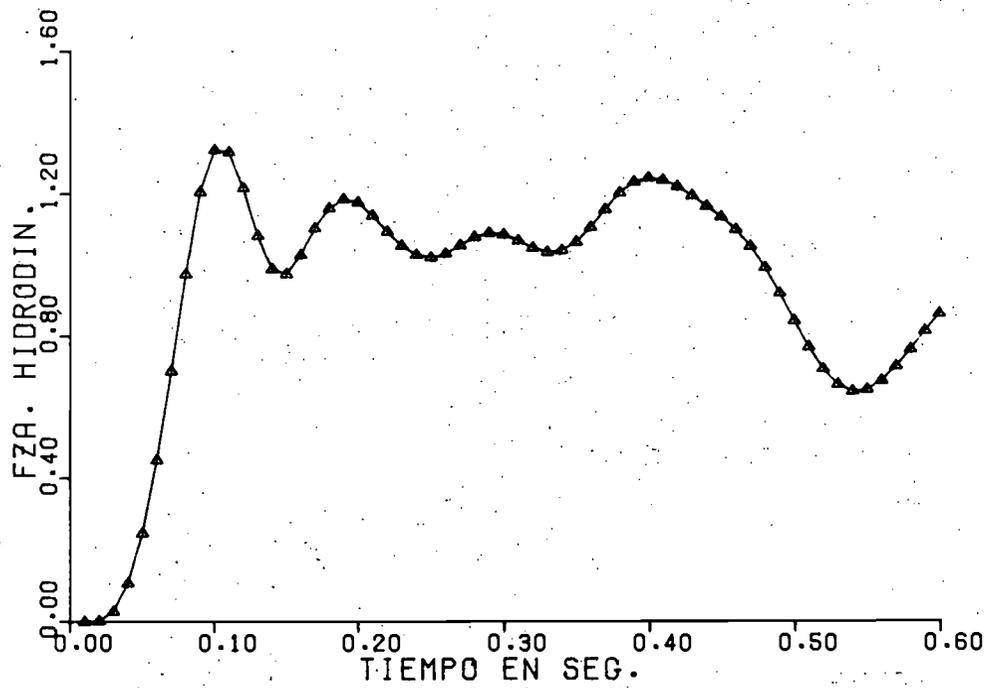


Fig 25 a

MOMENTO HIDRODINAMICO DE VOLTEO

NORMALIZADO CON EL HIDROSTATICO

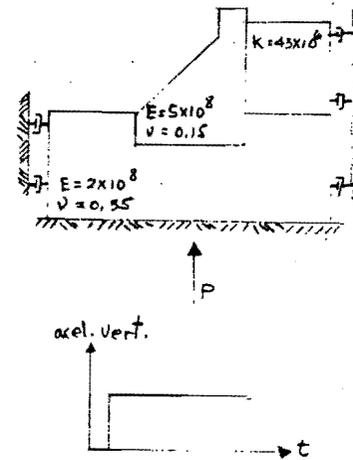
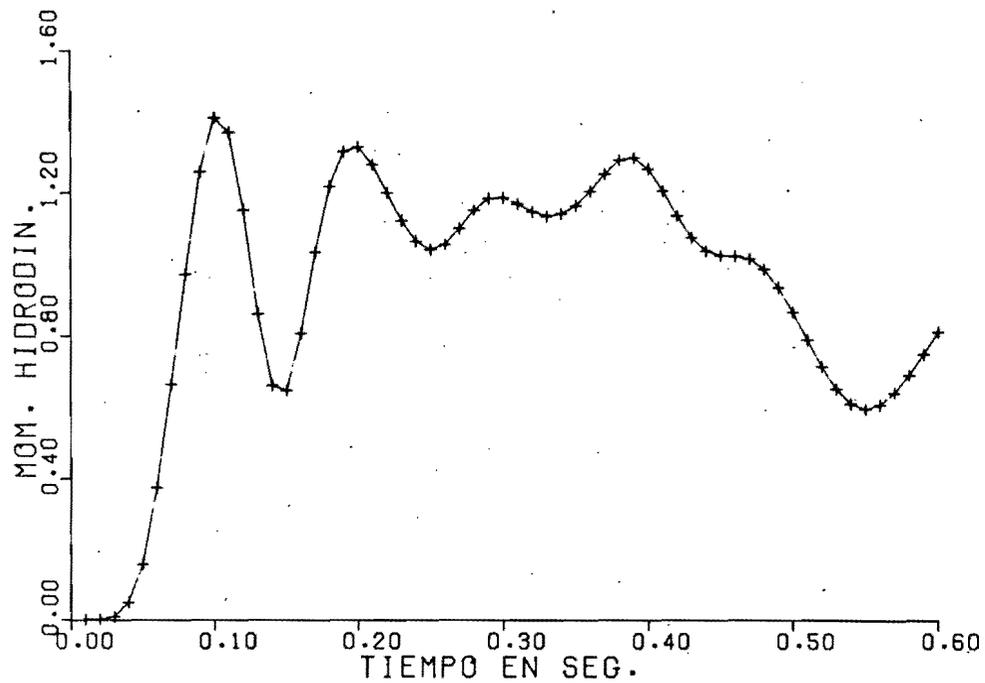
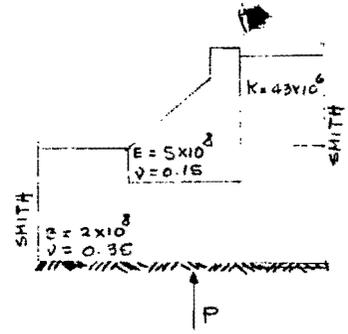
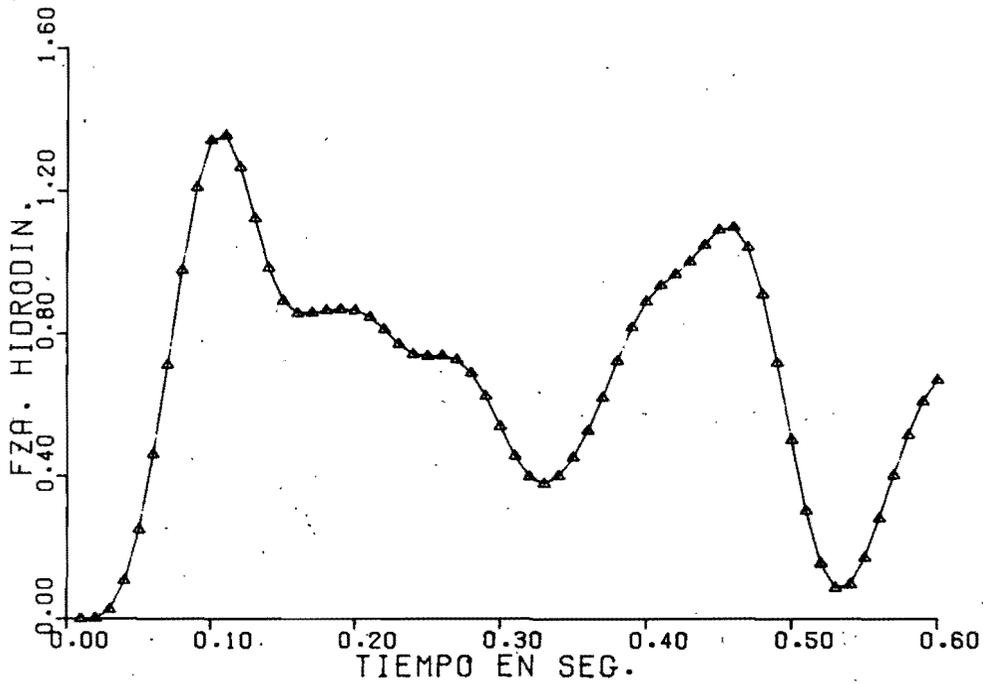


Fig 25 b

FUERZA HIDRODINAMICA
 NORMALIZADA CON LA HIDROSTATICA



▲ accel.
 'g
 t

Fig 26 a

MOMENTO HIDRODINAMICO DE VOLTEO

NORMALIZADO CON EL HIDROSTATICO

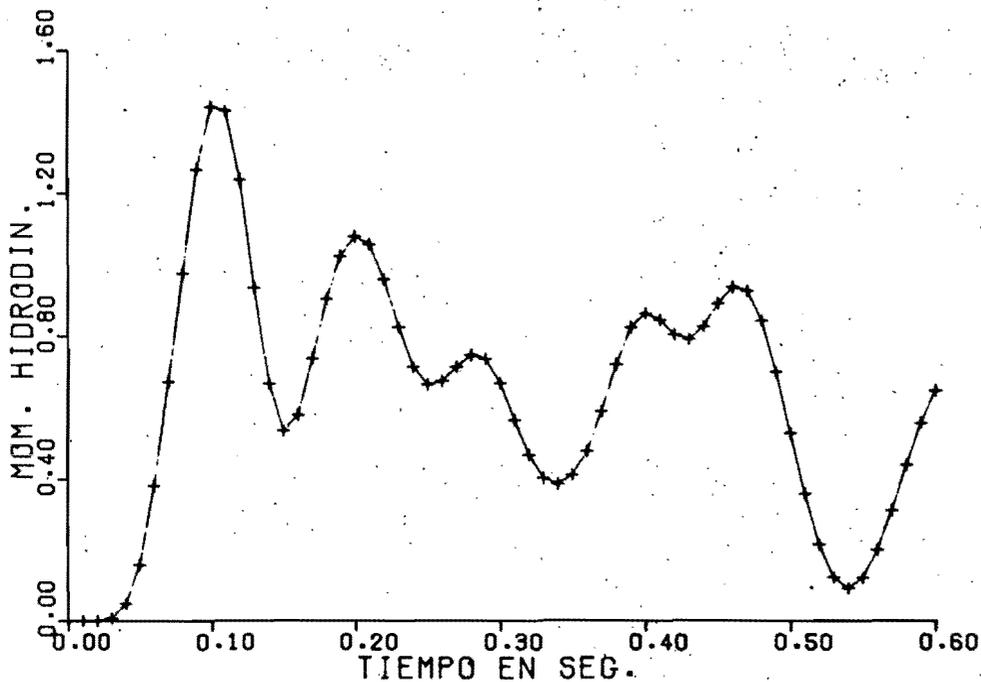
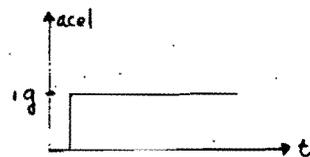
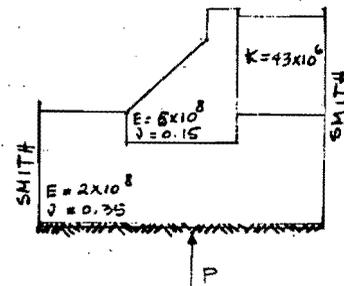


Fig 26 b

FUERZA HIDRODINAMICA

NORMALIZADA CON LA HIDROSTATICA

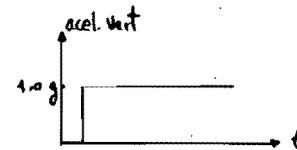
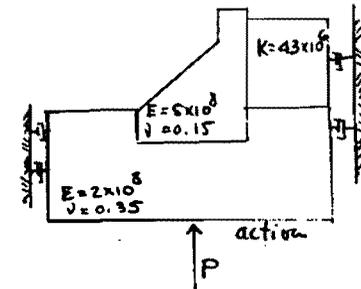
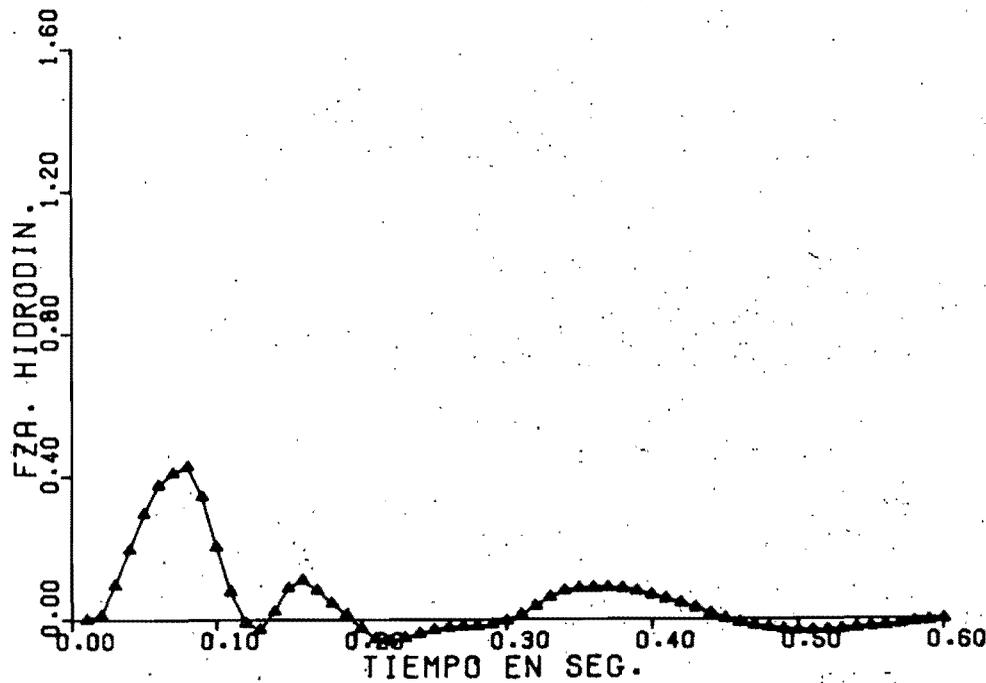


Fig 27 o

MOMENTO HIDRODINAMICO DE VOLTEO

NORMALIZADO CON EL HIDROSTATICO

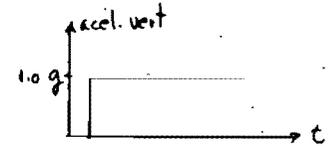
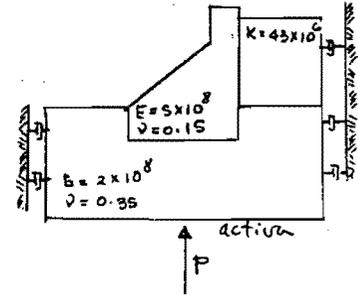
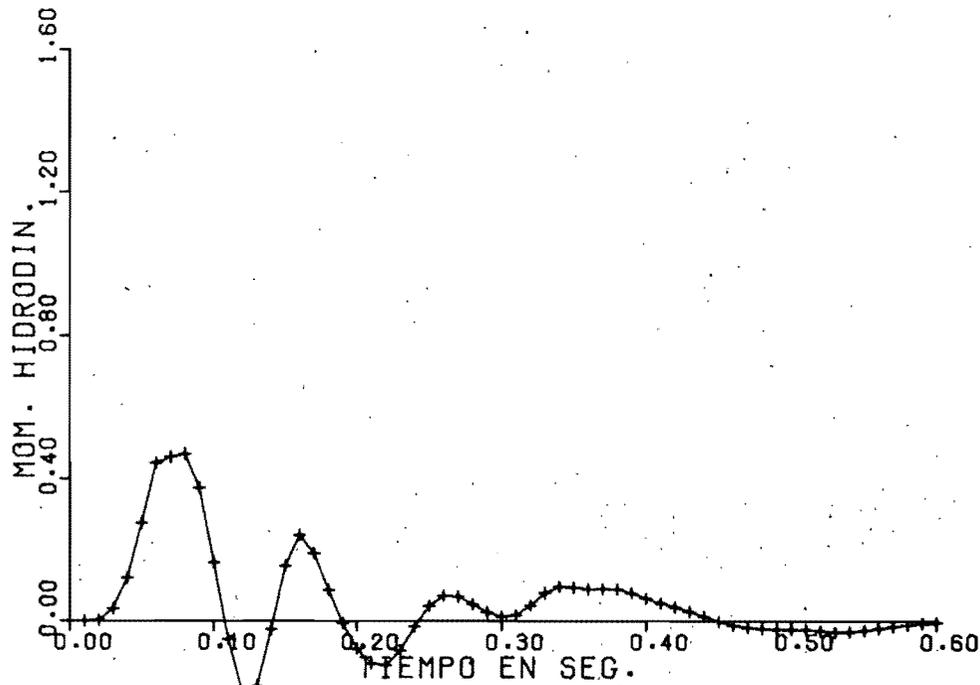


Fig 27 b

FUERZA HIDRODINAMICA

NORMALIZADA CON LA HIDROSTATICA

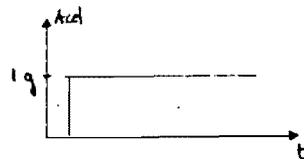
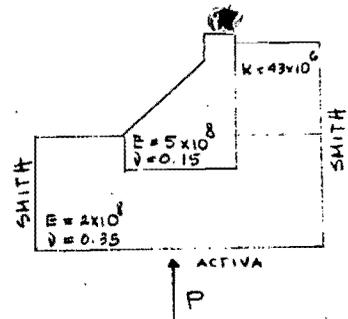
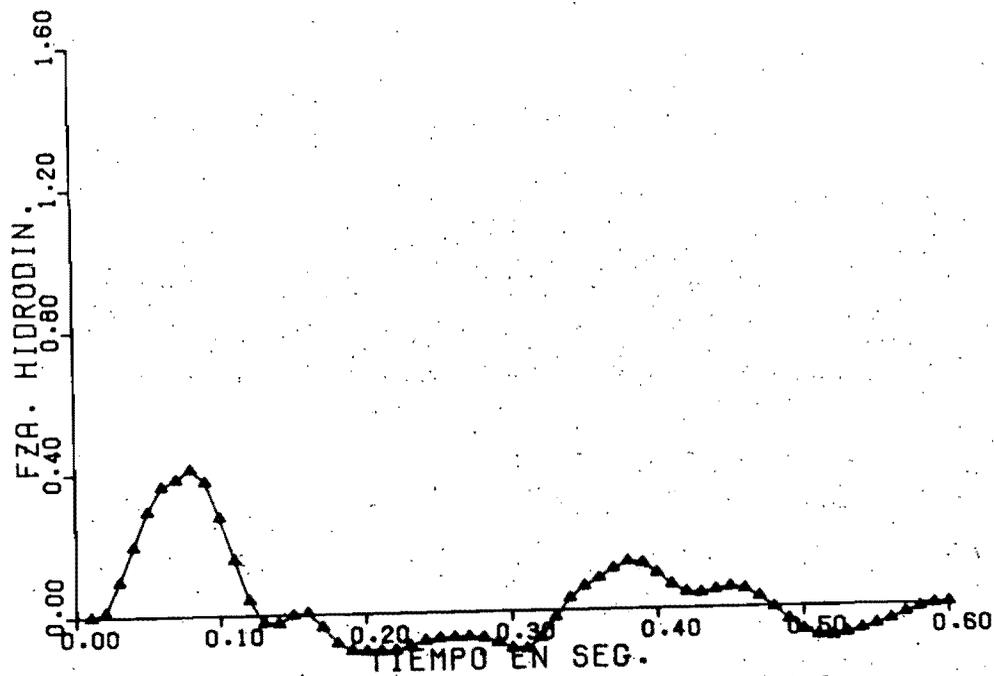


Fig 28 a

MOMENTO HIDRODINAMICO DE VOLTEO

NORMALIZADO CON EL HIDROSTATICO

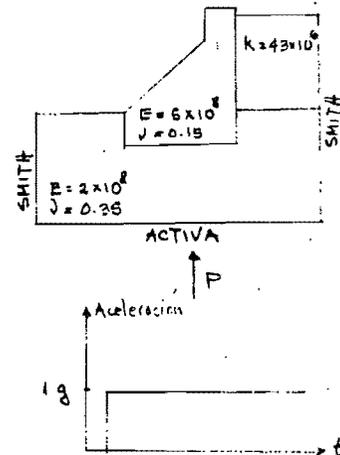
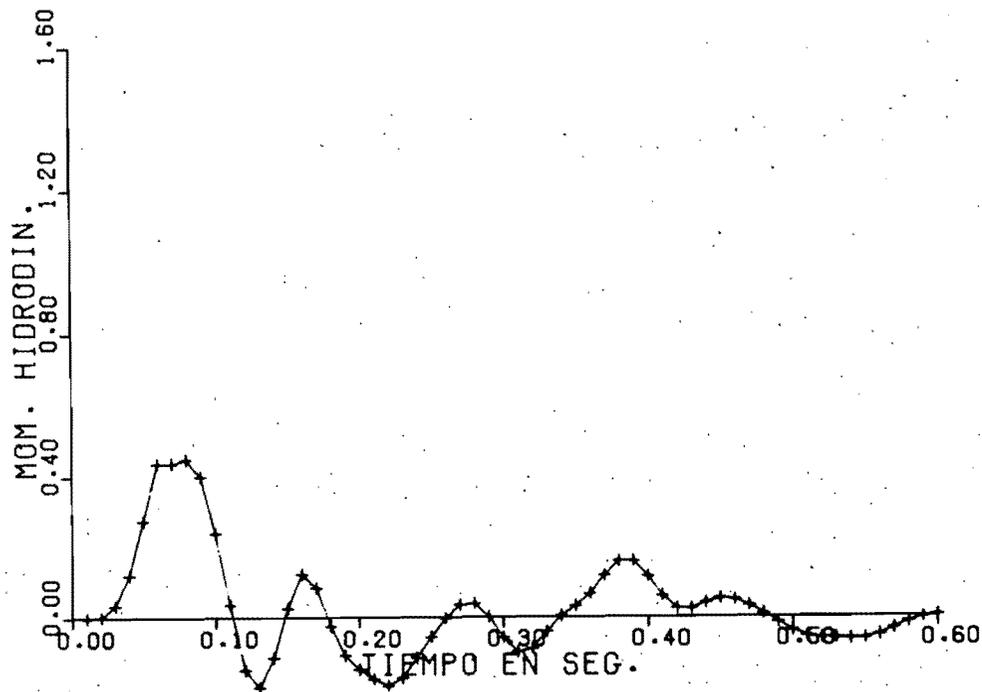


Fig 28 b

FUERZA HIDRODINAMICA

NORMALIZADA CON LA HIDROSTATICA

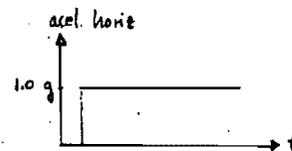
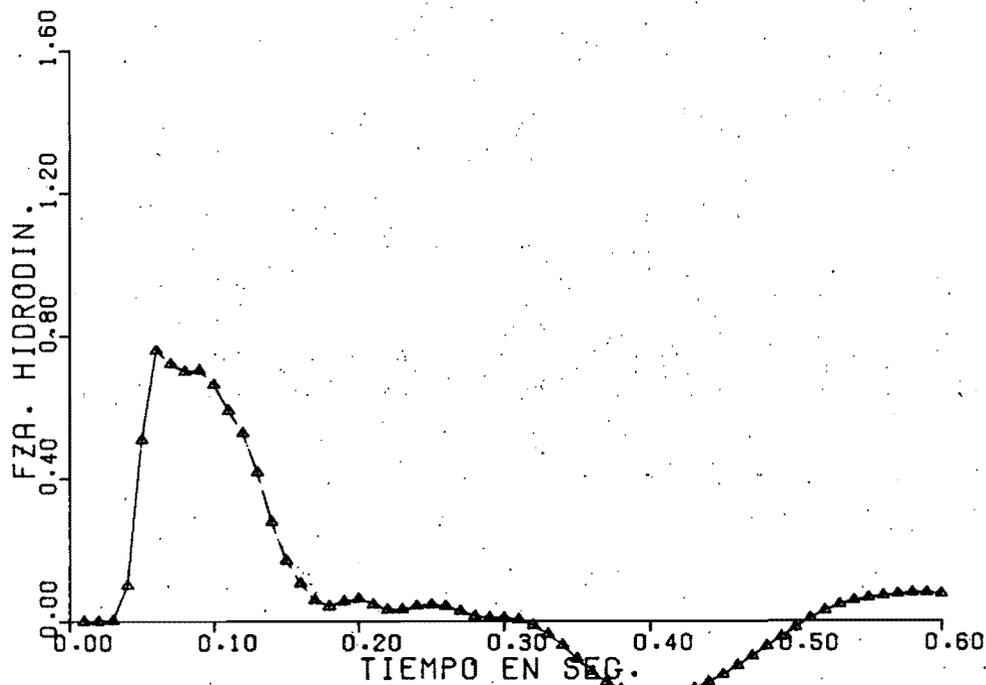
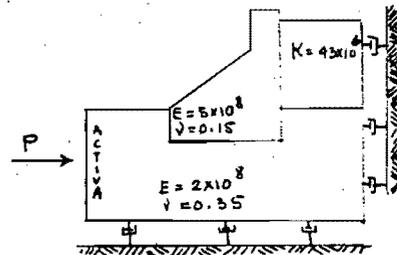


Fig 29 a

MOMENTO HIDRODINAMICO DE VOLTEO

NORMALIZADO CON EL HIDROSTATICO

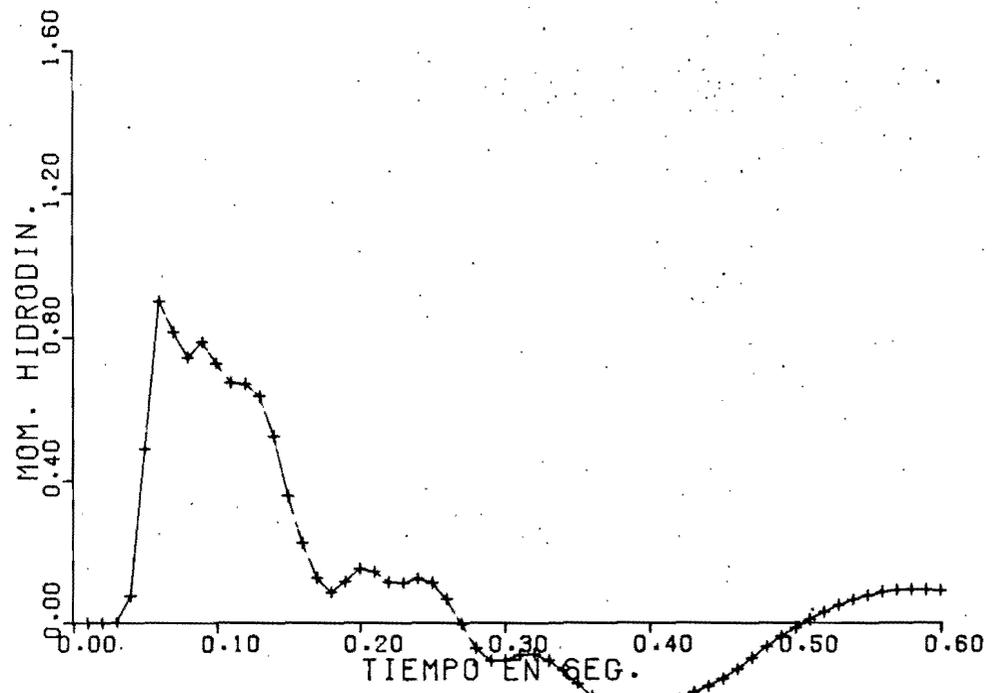
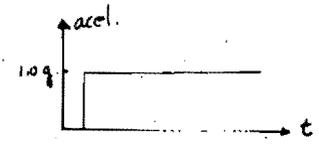
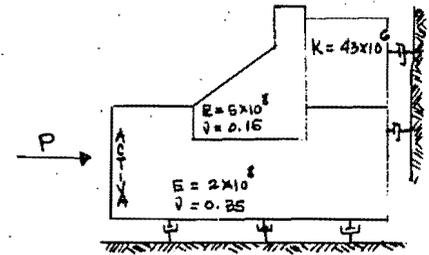


Fig 29 b

FUERZA HIDRODINAMICA

NORMALIZADA CON LA HIDROSTATICA

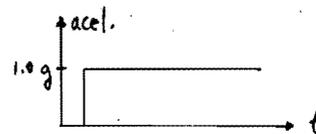
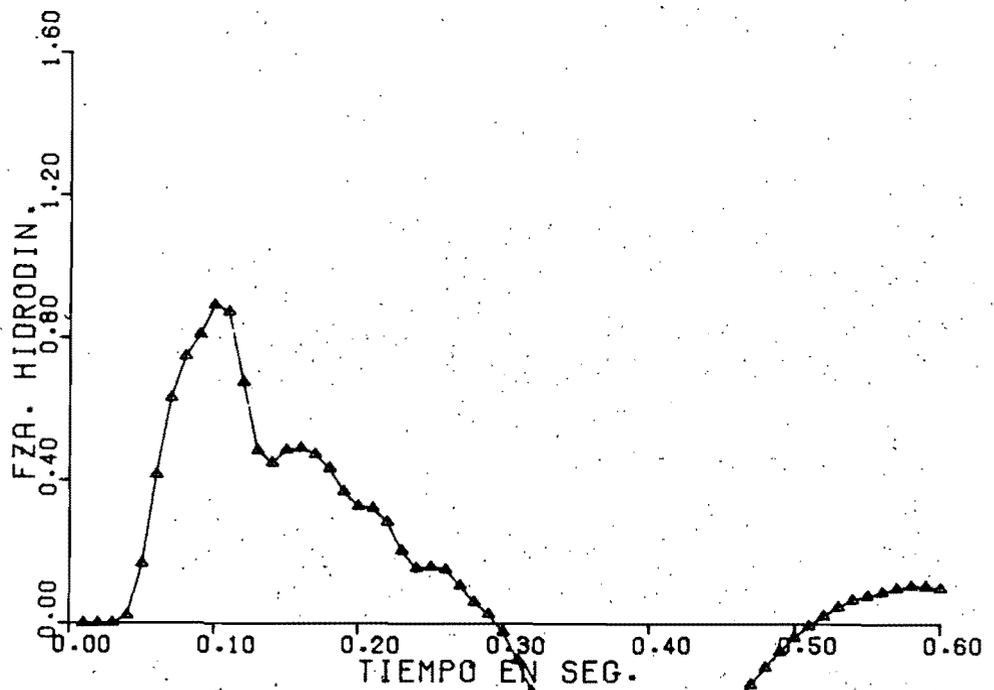
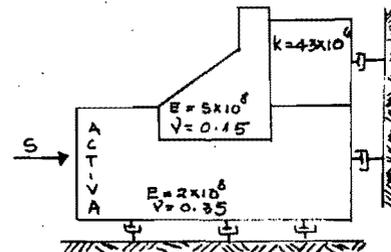


Fig 30 a

MOMENTO HIDRODINAMICO DE VOLTEO

NORMALIZADO CON EL HIDROSTATICO

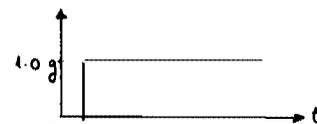
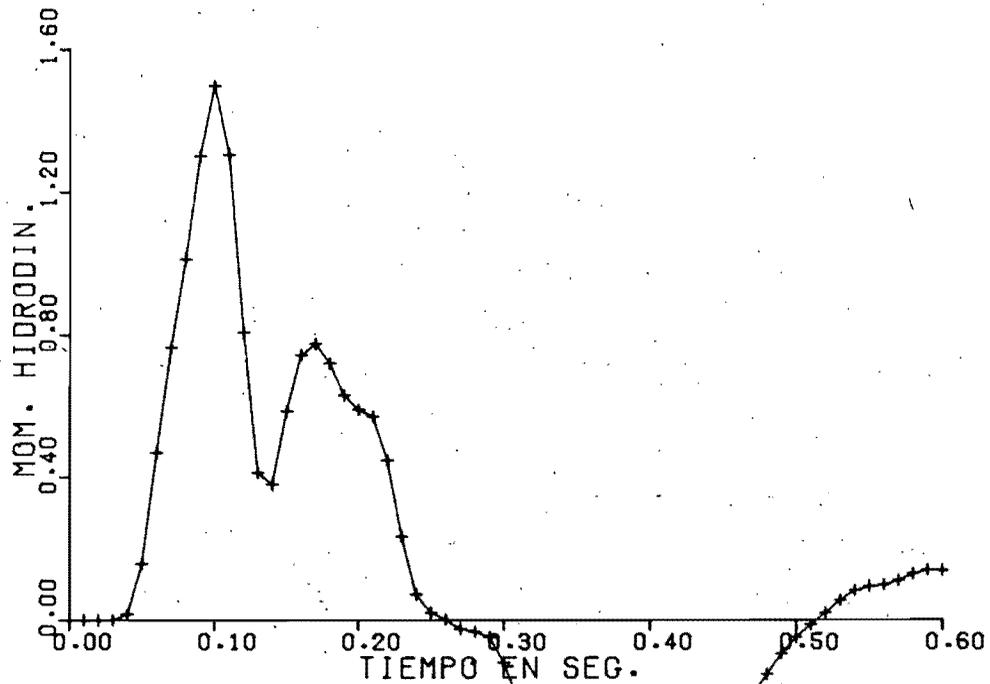
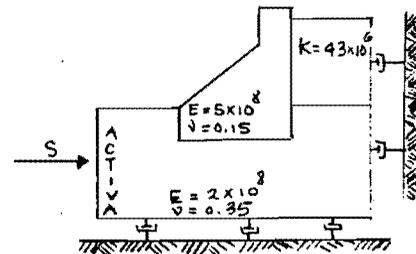


Fig 30 b

FUERZA HIDRODINAMICA

NORMALIZADA CON LA HIDROSTATICA

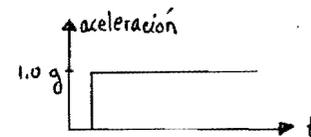
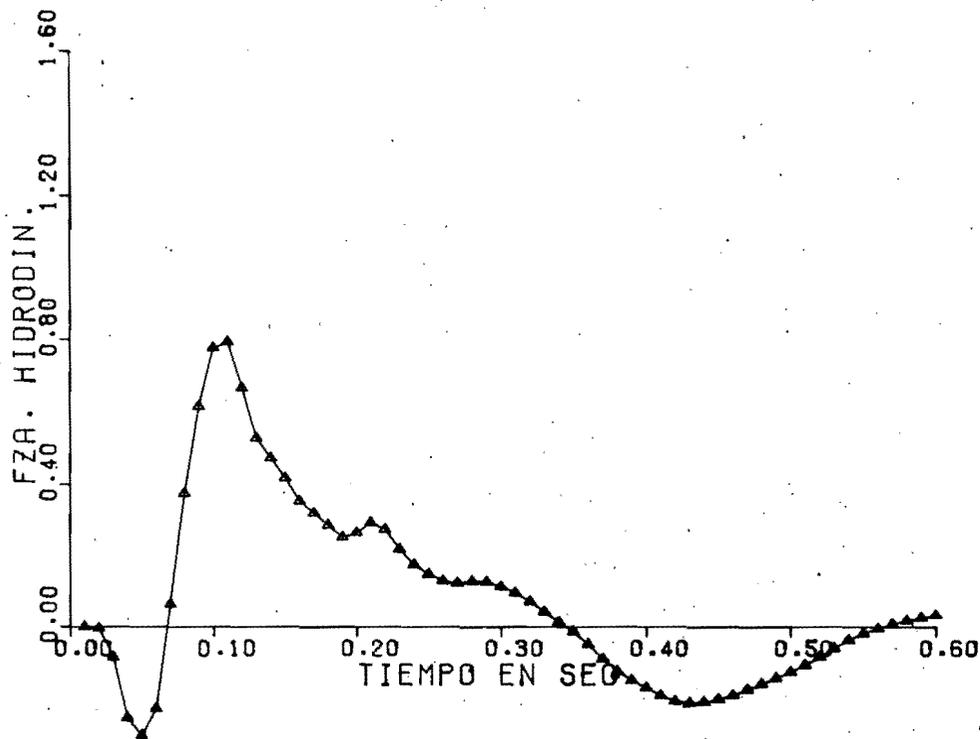
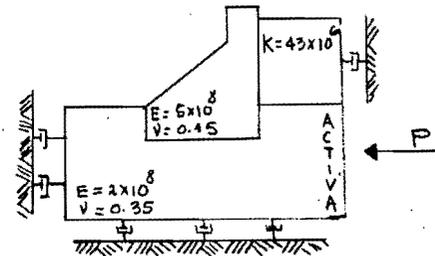


Fig 31 a

MOMENTO HIDRODINAMICO DE VOLTEO

NORMALIZADO CON EL HIDROSTATICO

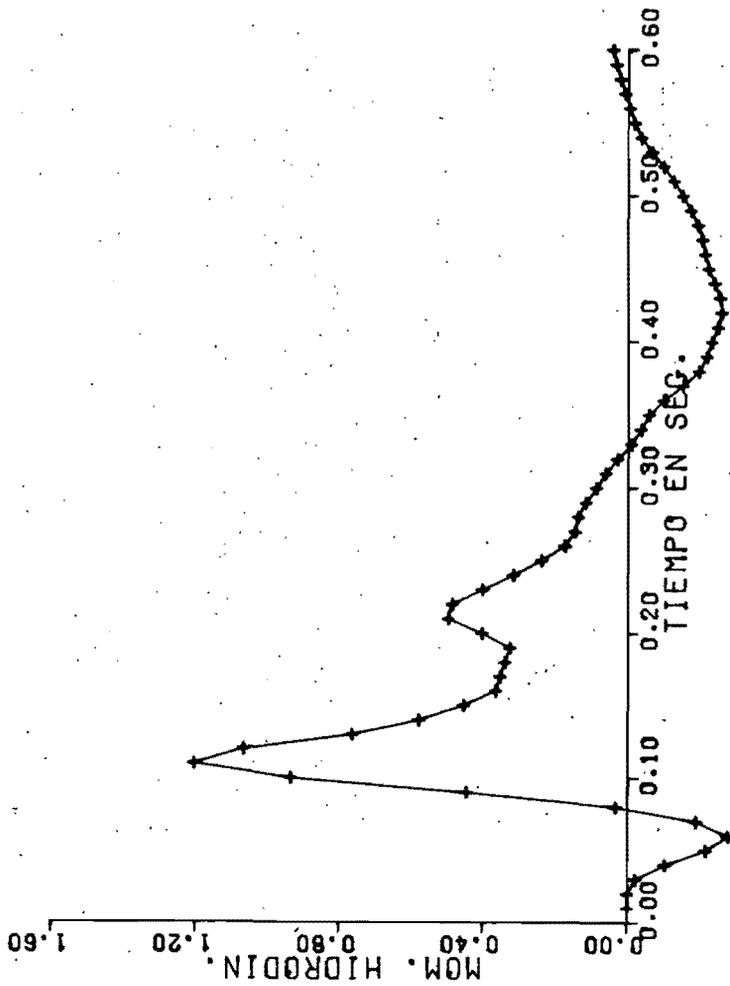
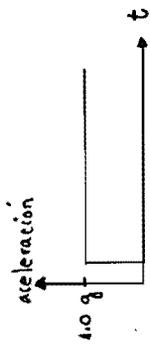
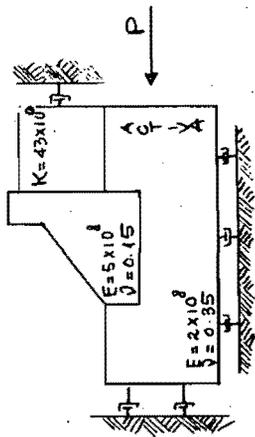


Fig 31 b

FUERZA HIDRODINAMICA NORMALIZADA CON LA HIDROSTATICA

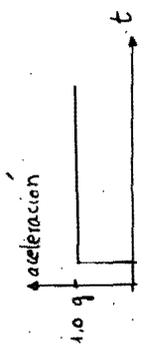
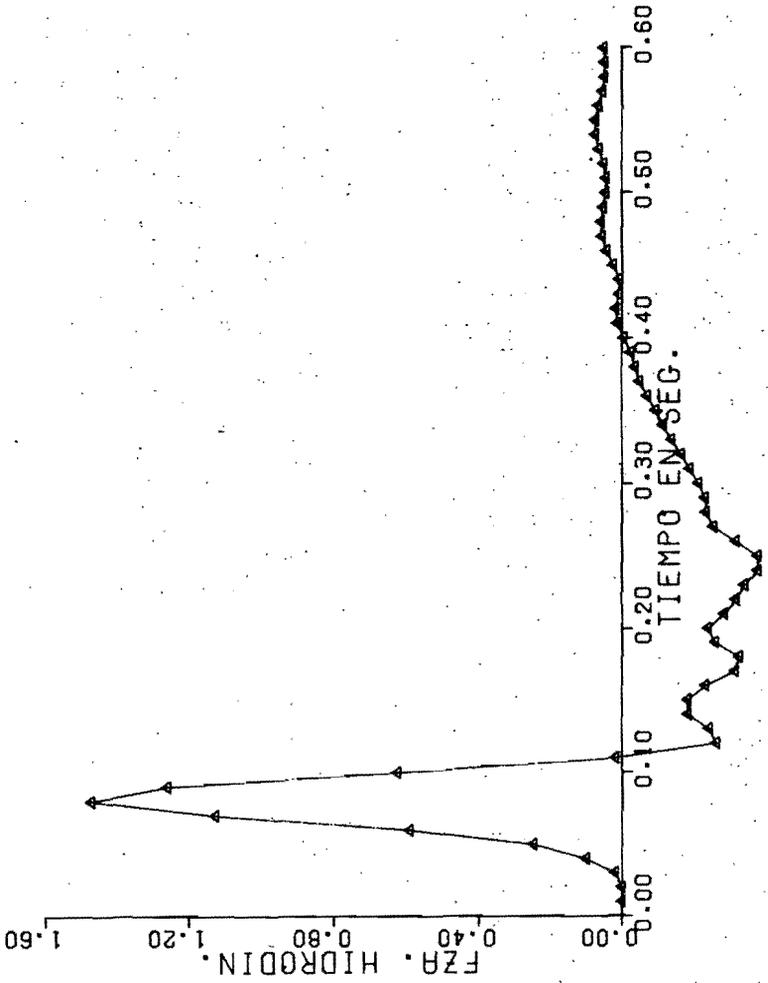
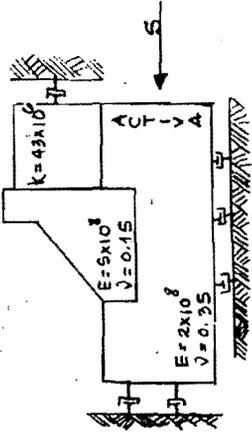


Fig 32 a

MOMENTO HIDRODINAMICO DE VOLTEO

NORMALIZADO CON EL HIDROSTATICO

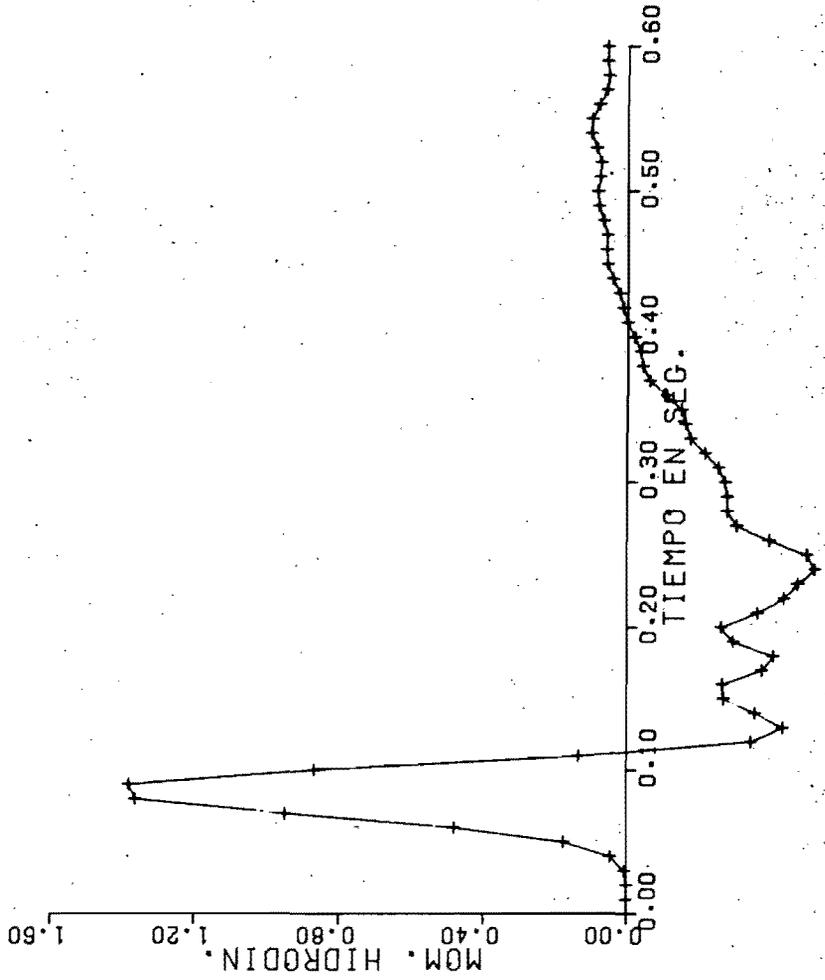
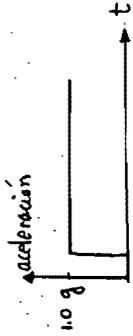
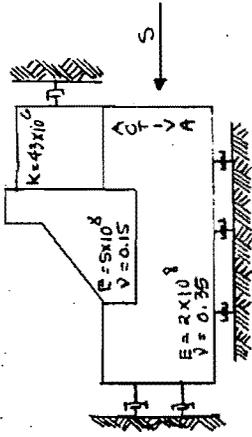


Fig 32 b

FUERZA HIDRODINAMICA
NORMALIZADA CON LA HIDROSTATICA

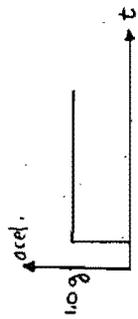
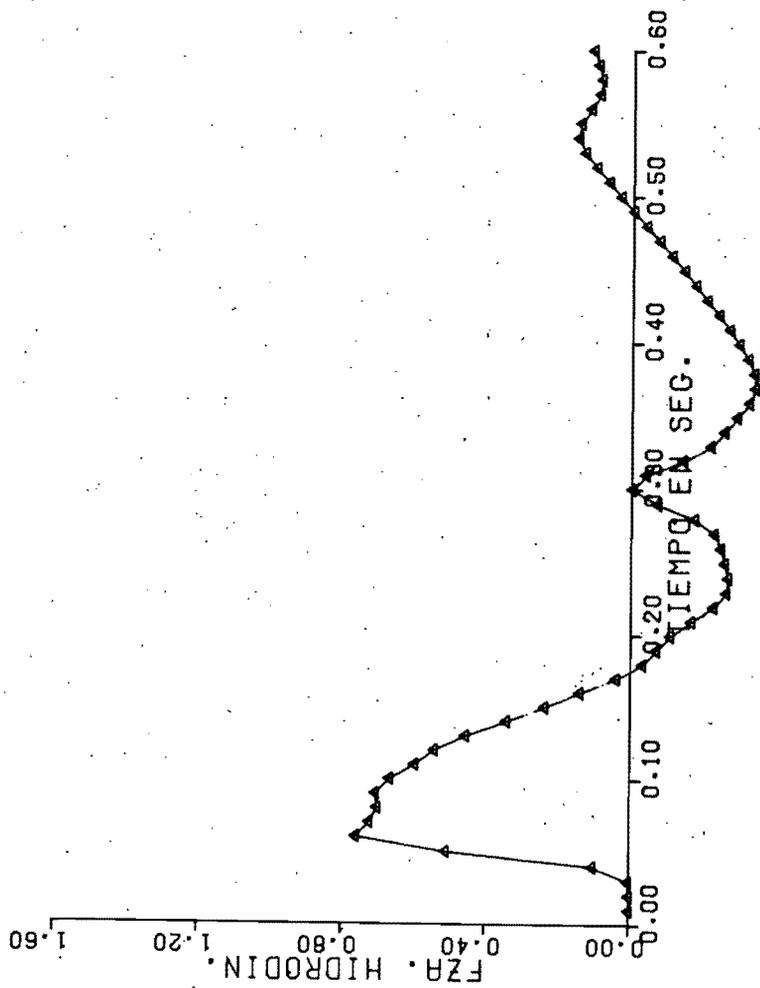
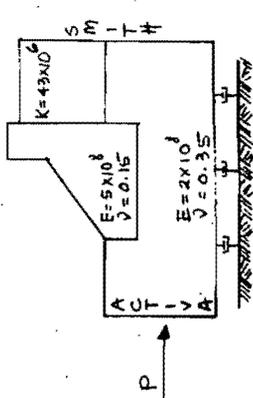


Fig 33 a

MOMENTO HIDRODINAMICO DE VOLTEO

NORMALIZADO CON EL HIDROSTATICO

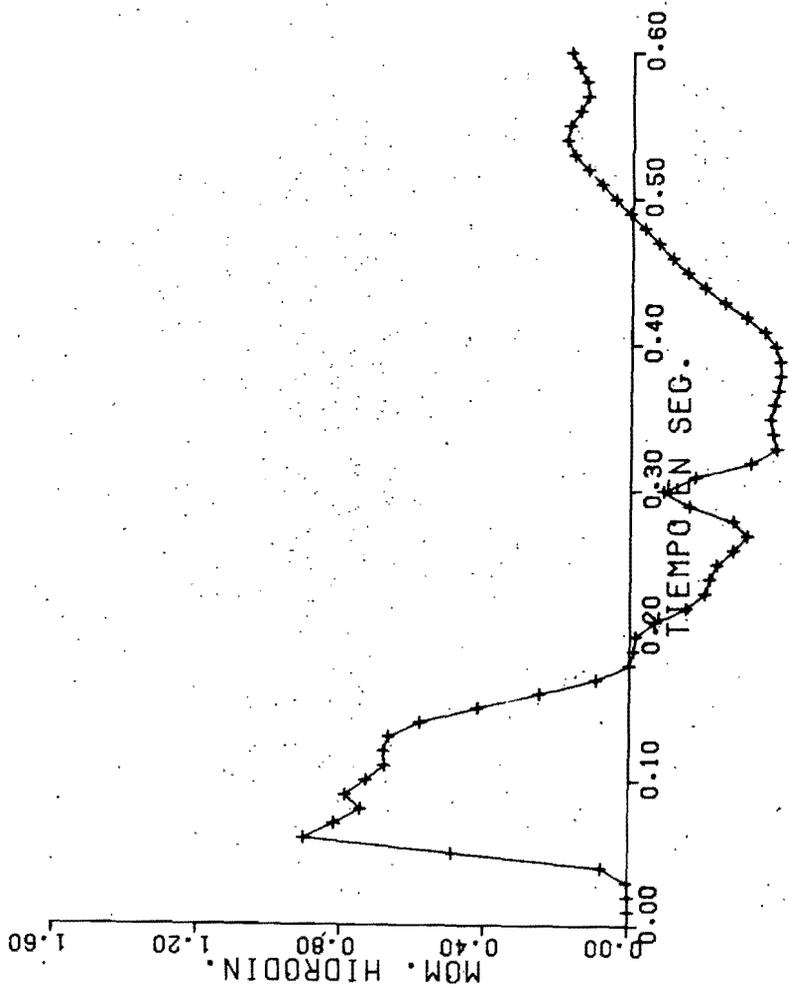
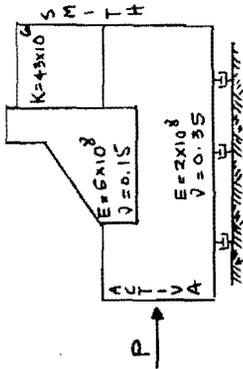


Fig 33 b

FUERZA HIDRODINAMICA

NORMALIZADA CON LA HIDROSTATICA

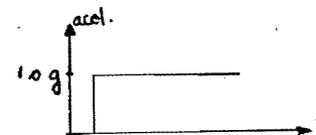
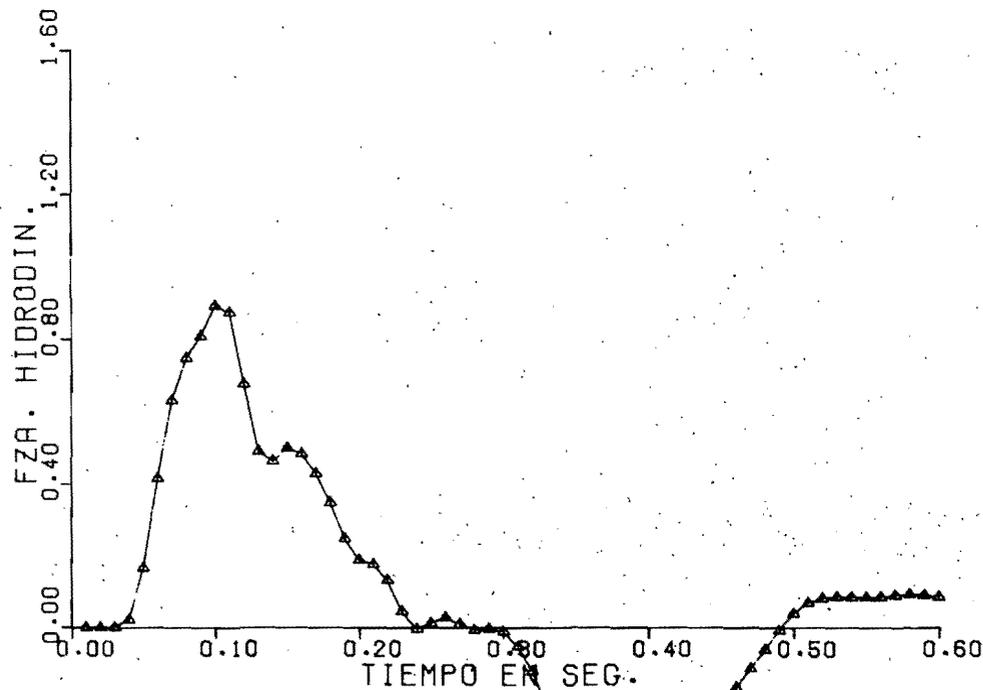
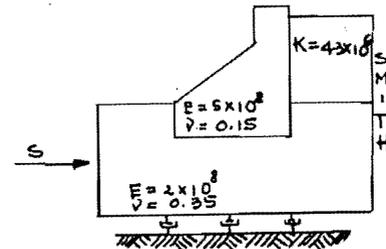


Fig 34 o

MOMENTO HIDRODINAMICO DE VOLTEO

NORMALIZADO CON EL HIDROSTATICO

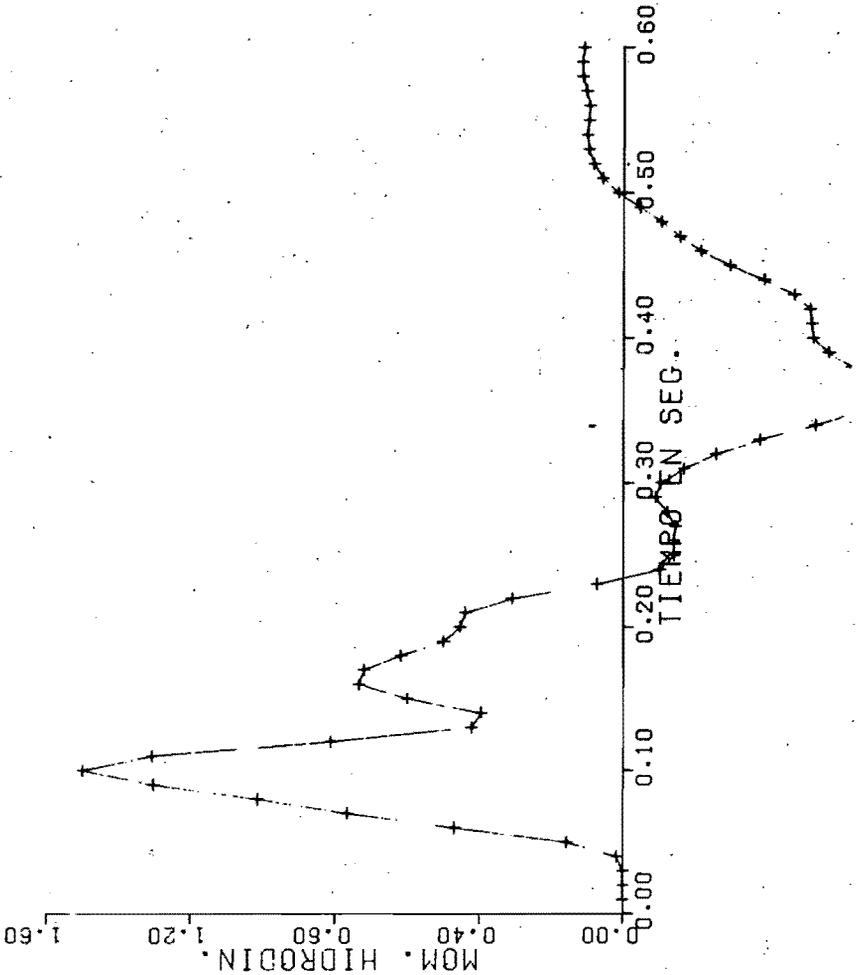
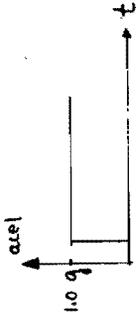
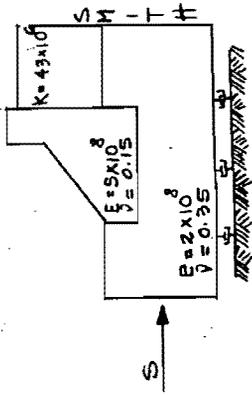


Fig 34 b