



23  
24

**EL ALGORITMO  
PRIMAL - DUAL  
ESPECIALIZADO  
A REDES**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
**LICENCIADO EN MATEMÁTICAS**

PRESENTA

**Saúl Salomón Pérez Gómez**

México, D.F.

1990





Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

	PAG.
INTRODUCCIÓN	1
<b>CAPÍTULO I. PROGRAMACION LINEAL Y TEORIA DE DUALIDAD</b>	<b>11</b>
1.1 El Problema de Programación Lineal	14
1.2 El Método Simplex	19
1.2.1 Soluciones Básicas	19
1.2.2 Condiciones de Optimalidad y Algoritmo Simplex.	25
1.2.3 Determinación de una solución Factible Básica	29
1.3 Dualidad	33
1.3.1 Problemas Lineales Duales	33
1.3.2 Teorema de Dualidad y Holgura Complementaria	37
1.3.3 Algoritmo Primal-Dual	45
1.4 Ejemplos Ilustrativos	51
<b>CAPÍTULO II. REDES DE FLUJO. PROBLEMAS BASICOS</b>	<b>67</b>
2.1 Conceptos Básicos de Redes	70
2.1.1 Gráficas	70
2.1.2 Redes y Redes de Flujo	72
2.1.3 Relación de la Programación Lineal y las Redes de Flujo	75

	PAG.
2.2 Los Problemas Clásicos en Redes	80
2.2.1 El Problema de Transporte (P.T.)	80
2.2.1.1 Factibilidad y Redundancia	84
2.2.1.2 Solución Factible Básica	86
2.2.1.3 Caracterización de la Base	91
2.2.1.4 Soluciones Enteras	96
2.2.2 Un Método Simplex para el P.T.: El Método de Multiplicadores	96
2.2.2.1 Multiplicadores Simplex	97
2.2.2.2 Cambio de Ciclo	100
2.2.2.3 Algoritmo de Transporte	102
2.2.2.4 Degeneración	106
2.2.3 El Problema de Asignación (P.A.)	107
2.2.4 El Problema de Flujo a Costo Mínimo (F.C.M.)	110
2.2.4.1 Estructura del Problema	111
2.2.4.2 Estructura de una Base	112
2.2.4.3 El Método Simplex	114
2.2.4.4 Comentarios Adicionales	116
2.2.5 El Problema de Flujo Máximo (F.M.)	117
2.2.5.1 Procedimiento del Arbol	117
2.2.5.2 Capacidad en Redes	120
2.2.5.3 El Problema de F.M.	121
2.2.5.4 Dualidad	129
2.2.6 El Problema de la Ruta Más Corta (R.C.)	131

	PAG.
CAPÍTULO III. METODOS PRIMALES DUALES: ANALISIS DE REDES DE FLUJO (Primera parte)	140
3.1 El Problema de Transporte	144
3.1.1 Forma del Arreglo	149
3.1.2 Algoritmo Primal-Dual	149
3.2 El Problema de Asignación	160
3.2.1 Algoritmo Primal-Dual (Método Húngaro)	161
3.3 El Problema de Flujo Máximo	168
3.3.1 Algoritmo de Ford y Fulkerson	172
3.4 El Problema de la Ruta más Corta	183
3.4.1 Algoritmo Primal-Dual	186
3.4.2 Algoritmo de Dijkstra	192
3.4.3 Ruta más Corta entre Todo par de Nodos (Algoritmo de Floyd)	201
 CAPÍTULO IV. METODOS PRIMALES DUALES: ANALISIS DE REDES DE FLUJO. (Segunda parte)	 214
4.1 El Problema de Flujo a Costo Mínimo	217
4.1.1 Algoritmo del Ciclo	219
4.1.2 Algoritmo Acumulativo	228
4.2 El Problema de Hitchcock	235
4.2.1 Algoritmo Alfabeta	242
4.3 La Transformación de Wagner	256

CONCLUSIONES	PAG.
	261
APÉNDICES	264
A. CONJUNTOS CONVEXOS	265
B. EL ALGORITMO SIMPLEX	269
C. ELEMENTOS DE TEORIA DE GRAFICAS	272
D. TEOREMA DEL FLUJO MAXIMO-CORTADURA MINIMA	277
E. CORTADURA EN UNA RED	280
BIBLIOGRAFÍA	281

[...], lo opuesto al individuo creativo es el pedante, el esclavo del hábito, cuyo pensamiento y comportamiento discurren por vías rígidas. Su equivalente biológico es el animal superespecializado. Tomemos, por ejemplo, a esa criatura encantadora y patética, el koala, que se especializa en comer hojas de una variedad particular de eucaliptos y nada más, y que tiene, en lugar de dedos garras con apariencia de garfios, ideales para colgarse de la corteza de este árbol... y para nada más. Algunos de nuestros departamentos de enseñanza superior parecen haber sido expresamente diseñados para criar koalas.

Arthur Koestler

## **Introducción**

El Método Simplex no es el único método que existe para resolver el problema de la Programación Lineal (P.P.L.). Cuenta con algunas deficiencias que raramente se presentan en la práctica. Sin embargo, se continúa trabajando sobre este tema confiando en poder contar algún día con un método que supere las deficiencias del Simplex y se preste, al mismo tiempo, para ser implantado en las computadoras de manera más eficiente que éste.

Ya se han conseguido algunos avances. No obstante, no se han obtenido resultados por completo satisfactorios. Esperemos estar al final de la brecha.

J.P.J. Fourier había ya enfrentado hacia el año de 1826 un problema de Programación Lineal (P.L.) y sugirió su solución por el descenso, vértice a vértice, hacia un mínimo: este principio subyace al Método Simplex desarrollado un siglo después.

Hasta antes de 1947 el trabajo realizado estuvo enfocado a la búsqueda de condiciones bajo las cuales se resuelve un sistema de desigualdades lineales homogéneas. De alguna u otra forma, todos aquellos resultados obtenidos expresan una relación entre el sistema original (llamado *primal*) y otro sistema (llamado *dual*) el cual usa las columnas de la matriz de coeficientes original para formar nuevas ecuaciones o desigualdades lineales siguiendo determinadas reglas.

No fue sino hasta 1939 cuando el matemático soviético *Kantorovich*, en su trabajo intitulado "Mathematical Methods in the Organization & Planning of Production", reconoció ciertas clases importantes de problemas de producción que tienen estructuras matemáticas susceptibles de evaluarse y resolverse numéricamente. En dicho trabajo *Kantorovich* llega a generalizar ciertos problemas equivalentes, matemáticamente, a un problema de P.L. Él esboza, mediante ejemplos, una manera de solucionarlos basada en el conocimiento de una solución inicial para el dual (obtenida fácilmente para el tipo de problemas que trabajó). La idea general era que los valores asignados a las variables duales (o "multiplicadores de resolución") asociados a recursos escasos pueden incrementarse de una manera tal que el exceso se cancela trasladándose a recursos sobrantes. No se dió ningún método computacional para este tipo específico de problemas de P.L.

Posteriormente se obtuvieron algunos resultados sobre el llamado *Modelo de Transporte*.

Como es bien sabido, es en 1947 cuando *G. Dantzig* concibe el modelo de la P.L. y desarrolla el *Método Simplex*, un método sistemático para resolverlo y cuya idea central es moverse sobre un poliedro convexo de un vértice a otro, a lo largo de la arista que los une, hasta alcanzar uno para el cual se obtiene el valor mínimo que toma una función lineal sobre el poliedro.

Algunos años después, C.E. Lemke descubre y da a conocer en su trabajo "The Dual Method of Solving the Linear Programming" el *Algoritmo Dual-Simplex*, algoritmo que reemplaza la resolución del problema primal por la de su dual. Dicho algoritmo requiere, para su aplicación, del conocimiento de una solución factible para el problema dual que satisfaga los criterios de optimalidad del Método Simplex y va calculando soluciones del dual que siempre satisfacen estos criterios y nos conducen hacia su solución óptima y, en consecuencia, a la solución óptima del primal debido a las relaciones que existen entre ambos problemas. El interés del algoritmo radica en su aplicación a *problemas de post-optimalidad*.

Otra idea para resolver el P.P.L. consiste en *utilizar simultáneamente el primal y su dual*. El algoritmo de interés en torno a esta idea es el *Algoritmo Primal-Dual (A.P-D.)* y es el objeto de estudio del presente trabajo.

El A.P-D. trabaja en esencia con el problema dual, pero utiliza, en cada iteración, un *subproblema del primal* cuya optimización permite mejorar la solución del dual. *El interés de este algoritmo está en su aplicación a problemas con estructuras particulares* (v.gr., el problema del transporte) en los cuales las optimaciones (u optimizaciones como comúnmente se dice) de los subprogramas primales *no requieren de la aplicación de Método Simplex*.

Se han desarrollado gran cantidad de algoritmos para resolver el P.P.L. algunos de los cuales, como los descritos en esta introducción, han probado su utilidad.

Para finalizar, y debido a su importancia teórica, mencionaremos al *Método Elipsoidal* y al *Método Proyectivo de Karmakar*. El primero de ellos, el método elipsoidal para optimización convexa, lo adaptó a la P.L. el matemático soviético L.G. Kachiyan en 1979, proporcionando un *algoritmo polinomial*, propiedad con la que no cuentan ninguno de los otros métodos desarrollados, y colocando el P.P.L. en la clase de equivalencia de los problemas para los que existen algoritmos polinomiales. El segundo método, el de Karmakar (1984), presenta otro algoritmo polinomial que algunos investigadores demuestran como caso particular de una familia de métodos de Newton con barrera y proyectados; otros lo interpretan además como una generalización del Método Simplex. Karmakar repetidamente ha dicho que su método es más rápido que el Simplex. Desafortunadamente, hasta este momento, el autor de este trabajo no tiene noticia de alguien que haya sido ya capaz de secundar la opinión vertida por el matemático hindú N. Karmakar.

Se puede decir que el Método Simplex, o más bien, algunas de sus variantes, han probado ser las más eficientes en la práctica al resolver un problema general de P.L. del cual

se conoce una estructura particular susceptible de serle implantado un algoritmo más eficiente. Es por esto que resulta interesante el estudio sobre *la manera* de implantarlo.

\* \* \*

Si bien es cierto que desde su creación los métodos generales de solución de la P.L. han tenido mucho auge, también lo es el desarrollo superlativo que han tenido los métodos particulares de solución que en años recientes se han popularizado, algunos más, otros menos.

Entre estos métodos particulares o básicos de solución, variantes del Método Simplex, se tienen los métodos "Primal" y "Primal-Dual".

La extensión de los métodos generales a ciertos problemas de P.L. con una estructura especial, particular, ha dado origen, precisamente, a métodos básicos que no son más que especializaciones de los métodos generales de solución, decíamos, a los problemas de estructura especial. Tal es el caso, por ejemplo, de los problemas básicos de redes como 'Ruta más Corta', 'Flujo Máximo' y 'Transporte', en otros, que se han estudiado y resuelto por métodos ajenos a la P.L. y que recientemente se ha probado su equivalencia con los métodos Primales y Primales-Duales.

Por otra parte, la especialización de los métodos Primal-Duales a problemas básicos de redes como tal, es, en oposición a los métodos Primal, menos conocida en la literatura actual. Sólo algunos textos especializados abordan el tema de manera más o menos exhaustiva.

El presente trabajo se ha abocado al estudio del *Algoritmo Primal-Dual especializado a redes*, título del mismo. Pretende la síntesis y unificación de diversos métodos de solución de problemas de redes, explicados como casos particulares en la especialización del Método Primal-Dual.

El trabajo se compone de dos partes. Cada parte abarca dos capítulos. La Parte Uno presenta los conceptos y resultados más importantes de la P.L. incluyendo los aspectos básicos de la Teoría de Dualidad y una descripción temprana del Algoritmo Primal-Dual (capítulo 1), además, los conceptos básicos de la Teoría de Redes y una descripción detallada de los problemas clásicos en dicha teoría: los problemas de Transporte, de Asignación, de Flujo a Costo Mínimo, de Flujo Máximo y de la Ruta más Corta (capítulo 2). La Parte Dos, por su lado, desarrolla los algoritmos Primal-Duales para cada uno de los problemas arriba señalados y para un nuevo problema, el de Hitchcock, relacionado con uno de ellos. Presenta (capítulo 3) el Método Primal-Dual como un algoritmo general para resolver problemas de P.L., para describir enseguida la especiali-

zación del método a cada uno de los problemas de redes (el de Transporte, de Asignación, de Flujo Máximo y de la Ruta más Corta) e implantar su algoritmo Primal-Dual. La misma política se sigue con los problemas de Flujo a Costo Mínimo, generalización de todos los problemas antes estudiados, y con el problema de Hitchcock (capítulo 4).

\* \* \*

Es oportuno mencionar que este trabajo es de carácter antológico e intenta ser práctico y útil. Los temas abordados en sus capítulos y apéndices están autocontenidos.

Aunque riguroso, el presente trabajo es no formal. Los ejemplos presentados después de cada algoritmo le dan su sentido práctico. Esto no quiere decir, según el autor, que haya poca seriedad y superficialidad sino, al contrario, que se pretende que la obra sea didáctica. El autor está consciente de la responsabilidad que implica escribir un trabajo de carácter antológico. Son varios los puntos o temas que merecen especial atención. Esto sugiere que algunos temas se analicen, se propongan sus algoritmos de solución y se codifiquen, dichos algoritmos, en algún lenguaje de computadora.

El autor agradece al M. en C. Agustín Cano Garcés la sugerencia antes mencionada. También agradece, muy especialmen-

te, al Dr. Sergio Fuentes Maya la sugerencia del tema de te  
sis y, sobre todo, sus valiosos consejos y palabras de estímulo en momentos en que, extenuado por problemas personales y por otras ocupaciones, llegó a pensar que sería más sensato abandonar el proyecto. La devoción a la enseñanza y la entre  
ga total al trabajo que caracterizan al "DOCTOR" son en verdad contagiosas y, francamente, de su amistad el autor ha aprendido mucho del difícil arte de trabajar incansablemente, del placer por el trabajo y "de la vida".

Por último, el autor agradece también el empeño y la excelente labor mecanográfica de la Sra. Basilisa Arroyo G.

Creo que podría transformarme y vivir  
con los animales. ¡Son tan tranquilos y  
mesurados!

Me complace observarlos largamente.  
No se afanan ni se quejan de su suerte.  
No se despiertan en la noche con el  
remordimiento de sus culpas.

No me aburren discutiendo sus deberes  
para con Dios.

Ninguno está descontento, a ninguno  
le enloquece la manía de poseer cosas.

Ninguno venera a los otros, ni a su  
especie, que cuenta miles de años de  
existencia.

Ninguno es respetable ni desgraciado  
en toda la ancha Tierra.

Walt Whitman

PARTE UNO

# capítulo 1

# CAPITULO 1

## PROGRAMACIÓN LINEAL Y TEORÍA DE DUALIDAD

El éxito y la popularidad de la *Programación Lineal* (P.L.) se deben fundamentalmente por un lado, a su flexibilidad para modelar diversas situaciones problemáticas y por otro lado, al desarrollo de sus métodos generales de solución a problemas de óptimo. Algunas veces la naturaleza misma de los problemas los hace fácilmente expresables como modelos lineales. Sin embargo, otras veces se hace necesario reestructurar su planteamiento o modelo original con el propósito de darles una forma lineal. Todo con el fin último de poder "hechar mano" de la fuerza de la P.L. en el análisis de esos modelos ya modificados.

En este primer capítulo se describen los conceptos y resultados básicos de la P.L., así como los resultados básicos de la Teoría de Dualidad que requieren los diferentes métodos de solución de la P.L. Se enfatiza, por completez solamente, en el *Método Simplex*, y por su aplicación posterior a problemas de redes, en el *Método Primal-Dual*.

El capítulo se desarrolla como sigue. En la primera sección se define el problema de P.L., mientras que en la segunda se presentan las ideas teóricas fundamentales que subyacen al método simplex. En estas dos secciones se exponen las definiciones y la notación manejadas a lo largo de todo el trabajo.

En la tercera sección se define el *problema dual* asociado a un problema de P.L. dado y se da la manera mecánica de obtenerlo. También se presentan los teoremas de *Dualidad* y de *Holgura Complementary* que caracterizan la solución óptima de los problemas lineales duales y al final se describe el método primal-dual. Varios ejemplos que ilustran éste método se presentan en la cuarta y última sección.

## 1.1 EL PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL.

Un *Problema de Programación Lineal* (P.P.L.) es un problema de optimización (de dimensión finita) en el que la función objetivo y las restricciones están especificadas por funciones lineales. Las restricciones consisten de igualdades y/o desigualdades en las mismas variables. La forma de estas restricciones puede cambiar de un problema a otro, pero cualquier P.P.L. podrá reducirse siempre a la *Forma Estándar*:

$$\min c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

sujeto a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (1)$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

donde las  $a_{ij}$ 's,  $b_i$ 's y  $c_j$ 's son números reales *fijos* y las  $x_i$ 's son números reales *por determinar*. (Asumimos que cada ecuación ha sido multiplicada por  $-1$ , en caso necesario, para que cada  $b_i$  sea *no negativa*.)

La forma estándar reescrita matricialmente, quedaría así:

$$\min c^t x$$

sujeta a

(2)

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

donde  $x = (x_1, \dots, x_n)^t$  es un vector columna n-dimensional, el vector de costos  $c^t = (c_1, \dots, c_n)$  es un vector fila n-dimensional,  $b = (b_1, \dots, b_m)^t$  es un vector columna m-dimensional y  $A = (a_{ij})$  es la matriz de coeficientes, de orden  $m \times n$ . ( $x \geq 0$  significa que cada una de las n componentes del vector x es no negativa.)

Veamos algunos ejemplos de problemas lineales convertidos a la forma estándar.

Ejemplo 1. Consideremos el problema

$$\min c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

sujeta a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

En este caso el espacio de restricciones está determinado por las  $m$  desigualdades lineales, además de las  $x_i \geq 0$  ( $i=1, \dots, n$ ). Al sumar la variable  $y_i \geq 0$  al lado izquierdo de la  $i$ -ésima desigualdad ( $i=1, \dots, m$ ), el problema quedaría expresado en forma estándar como:

$$\min c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

sujeta a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + y_m = b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0.$$

Las nuevas variables no negativas  $y_i$ , introducidas para transformar las  $m$  desigualdades en igualdades, son llamadas *variables de holgura*. Tenemos ahora  $n+m$  variables:  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$ . La nueva matriz de orden  $m \times (n+m)$  que describe las, ahora, restricciones de igualdad, es de la forma  $[A, I]$ . lo cual indica que sus columnas pueden "partirse" (o particionarse) en dos conjuntos: el primer conjunto con las  $n$  columnas de la matriz  $A$  y el segundo, que formaría la matriz

identidad  $m \times m$ , con las  $m$  columnas restantes.

Ejemplo 2. Si en el ejemplo 1 las desigualdades estuvieran en sentido contrario, es decir, si tuviéramos  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), restaríamos ahora al lado izquierdo la variable  $y_i \geq 0$ . Las igualdades resultantes quedarían de la forma  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - y_i = b_i$ . Las variables no negativas  $y_i$  son llamadas, en este caso, variables de exceso.

Ejemplo 3. Si un P.P.L. se da en forma estándar, excepto por que una o más de sus variables son no restringidas, el problema puede transformarse a la forma estándar usando dos técnicas simples. Para describir la primera supongamos que en (1) la restricción  $x_1 \geq 0$  por ejemplo, no se presenta. Esto querría decir que  $x_1$  es libre -tiene libertad- de tomar cualquier valor, sea este positivo o negativo. Podemos escribir entonces

$$x_1 = u_1 - v_1 \quad (3)$$

en donde  $u_1 \geq 0$  y  $v_1 \geq 0$ . Así pues, sustituyendo  $u_1 - v_1$  por  $x_1$  en (1), la linealidad de las restricciones se conserva y todas las variables ahora involucradas son no negativas. Observamos que en este caso se agrega una variable más por cada variable libre y en consecuencia, se está en un espacio de dimensión mayor que para el problema original. El problema se expresa en términos de las  $n+1$  variables  $u_1, v_1, x_2, \dots, x_n$ .

Aunque con esta técnica se introduce cierto grado de redundancia en el sentido de que el valor de  $x_1$  no estaría unívocamente determinado por  $u_1$  y  $v_1$  en (3), no cambiaría, de ninguna manera, la solución del método simplex.

Por otra parte, la segunda técnica para convertir el problema a la forma estándar cuando  $x_1$  es no restringida consiste en eliminar  $x_1$  junto con una de las  $m$  restricciones con coeficiente diferente de cero para  $x_1$ . Supongamos que se trata de la  $i$ -ésima restricción:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad (4)$$

con  $a_{i1} \neq 0$ . Entonces  $x_1$  puede expresarse como una combinación lineal de las demás variables, más una constante. Si esta expresión se sustituye por  $x_1$  en (1), tendremos un nuevo problema exactamente de la misma forma pero expresado sólo en términos de las variables  $x_2, x_3, \dots, x_n$ . Además, la  $i$ -ésima ecuación (4) utilizada para determinar  $x_1$  es idénticamente cero y, por ende, puede eliminarse. Aún cuando no lo parezca, este esquema de sustitución es válido debido a que cualquier combinación de las variables no negativas  $x_2, x_3, \dots, x_n$  deja a  $x_1$  factible en (4) ya que  $x_1$  es no restringida. Con esta simplificación obtenemos un programa lineal en forma estándar en una variable y en una restricción menos:  $n-1$  variables y  $m-1$  restricciones. El valor de la variable  $x_1$  puede determinarse después de su solución a través de (4).

## 1.2 EL MÉTODO SIMPLEX,

El *Método Simplex* es un procedimiento claro y sencillo dado por George Dantzig en 1947 para hallar una solución óptima al P.P.L. (2). Este método, en lugar de "probar" todos los puntos extremos (todas las soluciones factibles básicas) de la región de factibilidad, inicia con un punto extremo cualquiera (e.g., el más accesible computacionalmente) y pasa, mediante transformaciones elementales de fácil control, a otros puntos extremos más eficientes desde el punto de vista de la optimización deseada. En nuestro caso, trataríamos de ir decrementando el valor de la función objetivo en (2) hasta alcanzar el mínimo.

### 1.2.1 SOLUCIONES BASICAS

Un vector que satisface  $Ax = b$  y  $x \geq 0$  en (2) se llama *solución factible*, y una solución factible de costo mínimo se llama *solución óptima*. Al conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$  se le llama *región factible* y es un conjunto convexo (ver Apéndice A).

Un sistema  $A'x = b'$  se dice que es *equivalente* al sistema (o conjunto de igualdades)  $Ax = b$  si sus conjuntos solución son iguales. El método simplex adapta la teoría clásica al tomar en cuenta las restricciones de no negatividad  $x \geq 0$  y al seleccionar una solución de costo mínimo de entre las soluciones factibles.

Sea  $B$  una submatriz no singular de la matriz de coeficientes  $A$ ; sin pérdida de generalidad, podemos asumir que hemos reordenado las columnas de  $A$  (algunas veces llamadas *actividades*) de tal manera que  $A = (B, N)$ . La matriz  $B$  se llama base. Sea el vector  $x$  particionado de manera similar como  $x = (x_B, x_N)$ ; las variables  $x_B$  se llaman *variables básicas* y las  $x_N$  *variables no-básicas*. Una caracterización de las soluciones del sistema  $Ax = b$  (o, equivalentemente,  $Bx_B + Nx_N = b$ ) está dado por los vectores  $(x_B, x_N)$  en  $\mathbb{R}^n$ , donde  $x_N$  es cualquier vector en  $\mathbb{R}^{n-m}$  y

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \quad (5)$$

Con esta notación tenemos:

Definición. La solución  $(x_B, x_N) = (B^{-1}b, 0)$  recibe el nombre de *solución básica* (o *solución factible básica*) (abreviando: s.f.b.).

Debe ser claro que una s.f.b. es única ya que  $B$  es una matriz no singular. Una base  $B$  se llama *base factible* si  $B^{-1}b \geq 0$ .

Definición. Decimos que una s.f.b. es *degenerada* si una o más componentes  $\bar{b}_i$  del vector  $\bar{b} = B^{-1}b$  son cero. Si todas las componentes  $\bar{b}_i$  son positivas entonces la s.f.b. es *no degenerada*.

Se hace necesario estudiar detalladamente el proceso mediante el cual  $Ax = b$  se transforma, mediante una base inversa, a la forma equivalente (5). Específicamente, deseamos estudiar

las operaciones elementales por medio de las cuales el sistema de igualdades original

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (6)$$

se transforma al sistema (de igualdades) básico

$$x_i + \sum_{j=m+1}^n \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (7)$$

Las  $\bar{a}_{ij}$ 's son elementos de la matriz  $B^{-1}N$  de orden  $m \times (n-m)$  y las  $\bar{b}_i$ 's son elementos del vector  $m$ -dimensional  $B^{-1}b$ .

La transformación de (6) a (7) puede llevarse a cabo por una serie *operaciones pivote*, las cuales definimos enseguida.

Definición. Una *operación pivote* sobre un sistema lineal consiste de  $m$  operaciones elementales que transforman el sistema a uno equivalente en el que una determinada variable tiene coeficiente '1' en una ecuación y '0' en las demás. Las operaciones especificadas son:

1. Seleccionar un término  $a_{rs} \neq 0$  en el sistema (6). Este término se llama *pivote*.
2. Reemplazar la ecuación  $r$  por la ecuación  $r$  multiplicada por  $(1/a_{rs})$ .
3. Para  $i=1,2,\dots,m$ , excepto para  $i=r$ , reemplazar la ecuación  $i$  por la suma de la ecuación  $i$  y la ecuación reemplazada  $r$  multiplicada por  $(-a_{is})$ .

La transformación de (6) al sistema básico (7) se lleva a cabo mediante una secuencia de  $m$  pivotes. El primer pivote puede ser cualquier  $a_{rs} \neq 0$ . Después de que se han completado las primeras operaciones pivote, se selecciona el segundo pivote usando un elemento diferente de cero de cualquier ecuación, excepto la  $r$ ; digamos la ecuación  $r^1$ . Después de que se ha completado la segunda operación pivote se selecciona el tercer pivote de cualquier ecuación del sistema resultante, excepto la  $r$  y la  $r^1$ . La operación pivote general es idéntica al pivote elegido de las ecuaciones que no corresponden a las ecuaciones seleccionadas previamente. Por simplicidad, supondremos en este momento que se llegó a (7) sin inter cambiar filas o columnas.

Una propiedad fundamental del método simplex en la transformación de un sistema básico a otro, que es el resultado de reemplazar una variable básica por una no básica. Esto se lleva a cabo seleccionando cualquier elemento  $\bar{a}_{rs} \neq 0$  en (7) y pivoteándolo. El resultado es

$$x_i + \frac{(-\bar{a}_{is})}{\bar{a}_{rs}} x_r + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq s}}^n \left( \bar{a}_{ij} - \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}} \bar{a}_{is} \right) x_j = \bar{b}_i - \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} \bar{a}_{is} \quad (i=1, \dots, r-1, r+1, \dots, m) \quad (8)$$

$$\frac{1}{\bar{a}_{rs}} x_r + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq s}}^n \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}} x_j + x_s = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} \quad (i=r)$$

La solución básica indicada que se obtiene al hacer cero las variables no básicas en (8) es

$$x_i = \bar{b}_i - \frac{\bar{b}_r}{a_{rs}} \bar{a}_{is} \quad (i=1, \dots, r-1, r+1, \dots, m) \quad (9)$$

$$x_s = \frac{\bar{b}_r}{a_{rs}}$$

Para ver que ésta operación pivote es equivalente a sustituir la columna  $a_s$  por la columna  $a_r$  en la base, sean

$$B_0 = (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r, a_{r+1}, \dots, a_m)$$

y

$$B_1 = (a_1, \dots, a_{r-1}, a_s, a_{r+1}, \dots, a_m).$$

Podemos verificar fácilmente que

$$B_1^{-1} = E B_0^{-1} \quad (10)$$

donde



Para completar el argumento notemos que (7) puede expresarse como

$$B_0^{-1}(Ax) = B_0^{-1}b$$

y (8) como

$$EB_0^{-1}(Ax) = EB_0^{-1}b,$$

que se puede verificar por cálculos directos. Así pues, ya que  $B_1^{-1} = EB_0^{-1}$ , el pivotar sobre  $\bar{a}_{rs}$  en (7) para obtener (8) es equivalente a cambiar la representación de  $Ax = b$  con respecto a la base  $B_0$  a una con respecto a la base  $B_1$ .

### 1.2.2 CONDICIONES DE OPTIMALIDAD Y ALGORITMO SIMPLEX.

Sea el vector  $c$  particionado como  $(c_B, c_N)$  de acuerdo con el vector  $x = (x_B, x_N)$ . El resultado que sigue es una prueba de optimalidad de la s.f.b.

Lema 1. Una s.f.b.  $(x_B, x_N) = (B^{-1}b, 0)$  para el P.P.L. (2) es una solución de costo mínimo si

$$\bar{c}_N = c_N - c_B B^{-1}N \geq 0 \quad (11)$$

Prueba. Usamos (5) para sustituir las variables básicas en la función objetivo:

$$Z = cx = c_B x_B + c_N x_N = c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N = c_B B^{-1}b + \bar{c}_N x_N.$$

El costo de la s.f.b. con  $x_N = 0$  es  $c_B B^{-1}b$ . Si  $c_N - c_B B^{-1}N \geq 0$  entonces  $cx \geq c_B B^{-1}b$  para cualquier solución factible  $(x_B, x_N)$ .

El lema 1 nos da una condición suficiente para la optimalidad de una s.f.b. Los coeficientes

$$\bar{c}_j = c_j - c_B B^{-1}a_j \quad (j=1, \dots, n)$$

se llaman *coeficientes de costo reducido*; notemos que el coeficiente de costo reducido de una variable básica es 0 ya que  $B^{-1}a_j$  es simplemente un vector unitario que selecciona el coeficiente  $c_j$  del vector  $c_B$ . Si definimos el vector  $m$ -dimensional  $u = c_B B^{-1}$ , entonces cada coeficiente de costo reducido  $\bar{c}_j$  se deriva del coeficiente de costo original  $c_j$  restando la cantidad  $\sum_{i=1}^m u_i a_{ij}$ .

Si se tiene la condición (11), queda indicada una solución factible con costo mínimo. De manera específica, habrá que suponer que la s.f.b.  $(x_B, x_N) = (B^{-1}b, 0)$  tiene la propiedad de que  $\bar{c}_s < 0$  para alguna actividad no básica  $a_s$ .

Lema 2. Si para un sistema factible básico hay una variable no básica  $x_s$  con las propiedades  $\bar{c}_s < 0$  y  $\bar{a}_{is} \leq 0$  para  $i=1, 2, \dots, m$ , entonces la función objetivo del P.P.L (2) puede irse a  $-\infty$

Prueba. De (7) tenemos la siguiente relación entre las variables básicas dependientes  $x_i$  y las variables básicas independientes  $x_s$ :

---

\* En Economía, a los números  $u_i$  se les llama *Precios Sombra*.

$$x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{is}x_s \quad (i=1, \dots, m)$$

Si  $\bar{a}_{is} \leq 0$  para toda  $i$ , entonces  $x_s$  puede incrementarse sin límite desde cero y la  $x_i$  permanecerá no negativa ya que  $\bar{c}_s < 0$ , la función objetivo  $z = c_B B^{-1}b + \bar{c}_s x_s$  se va a  $-\infty$  cuando  $x_s$  se va a  $+\infty$ . ■

Lema 3. Si, para un sistema factible básico no degenerado hay una variable no básica  $x_s$  con  $\bar{c}_s < 0$  y  $\bar{a}_{is} > 0$  para alguna  $i$ , entonces puede construirse una nueva s.f.b. con costo estrictamente menor de la función objetivo.

Prueba. La nueva solución con valor menor se construye incrementando  $x_s$  tanto como sea posible y manteniendo la factibilidad, esto es, manteniendo  $x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{is}x_s \geq 0$  para toda  $i$ . Esto se lleva a cabo haciendo  $x_s = \theta_s$ , donde

$$\theta_s = \min_{\bar{a}_{is} > 0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} > 0 \quad (12)$$

Por la hipótesis de no degeneración,  $\bar{b}_i > 0$  para toda  $i$ . De aquí se sigue que  $\theta_s > 0$  y la función objetivo tiene un decremento estricto en el valor  $(-\bar{c}_s)\theta_s > 0$ .

La nueva solución obtenida es básica. En efecto, esto es cierto ya que la variable no básica  $x_s$ , por como se eligió  $\theta_s$ , se ha sustituido en la base por la variable básica  $x_r$ .

Específicamente hablando, la nueva solución es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{is} \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} \quad (i=1,2,\dots,r-1, r+1,\dots,m) \\ \bar{x}_r = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_s = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \theta_s \\ \bar{x}_j = 0 \quad (j=m+1,\dots,s-1,s+1,\dots,n) \end{array} \right.$$

Esta solución es precisamente la única s.f.b. (9) que resultaría si pivotamos sobre  $\bar{a}_{rs}$  en el sistema básico (7). ■

Resumamos enseguida el método simplex indicado por los lemas 1, 2 y 3 anteriores; el Algoritmo Simplex\* quedaría así:

Paso 1. Determine si hay una actividad no básica  $a_j$  en un sistema factible básico con coeficiente de costo reducido  $\bar{c}_j < 0$ .

Paso 2. Si todo  $\bar{c}_j \geq 0$ , pare; la s.f.b. es óptima [por el lema 1].

Paso 3. Si la s.f.b. no satisface las condiciones de optimalidad, seleccione una actividad no básica  $a_s$  tal que  $\bar{c}_s < 0$ , por ejemplo,

---

\*Es costumbre llamar *algoritmo simplex* a la búsqueda del óptimo a partir de una solución básica factible y llamar *Método simplex* a la aplicación secuencial del algoritmo simplex.

$$\bar{c}_s = \min \bar{c}_j < 0 \quad (13)$$

La actividad  $a_s$  deberá entrar a la base.

Paso 4. Si  $\bar{a}_{is} < 0$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) entonces el costo de la función objetivo es  $-\infty$  (el problema es no acotado) [por el lema 2] y el método termina. De otra manera, determine la actividad  $a_r$  que será reemplazada por la actividad  $a_s$  por medio de la regla

$$\theta_s = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min_{\bar{a}_{is} > 0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}}$$

Paso 5. Pivotee sobre el término  $\bar{a}_{rs}$  dando lugar a una nueva s.f.b., la cual, salvo degeneración, tendrá un costo menor de la función objetivo [de acuerdo al lema 3]. Regrese al paso 2.

### 1.2.3. DETERMINACION DE UNA SOLUCION FACTIBLE BASICA.

Teorema. Empezando con una s.f.b. no degenerada y asumiendo la no degeneración en cada iteración, el algoritmo simplex, en un número finito de iteraciones, o (1) descubrirá que el costo de la función objetivo puede irse a  $-\infty$ , o (2) terminará con una s.f.b. óptima.

Prueba. Si el algoritmo simplex no termina en un número finito de iteraciones es necesario repetir alguna s.f.b. ya que el número de bases distintas es finito. Una cota superior para éste número es  $\binom{n}{m}$ . Como las soluciones básicas son únicas, la repetición implicaría que la función objetivo tiene el mismo costo al comienzo de dos diferentes iteraciones. Pero esto es imposible por el lema 3 (de la subsección anterior) y por nuestra suposición de no degeneración. ■

Consideremos brevemente la, así llamada, fase uno del procedimiento de la P.L. para encontrar una s.f.b. inicial para (2)\*. Sin pérdida de generalidad podemos suponer, como ya lo hemos señalado al principio de esta sección, que el vector columna b del lado derecho en (2) es no negativo. La fase uno del procedimiento consiste en la introducción de un vector W m-dimensional de vectores artificiales y de la solución del P.P.L.

$$\min \phi = \sum_{i=1}^m w_i$$

sujeta a

(14)

$$A_x + I_w = b$$

$$x \geq 0, w \geq 0$$

---

\* Este procedimiento recibe el nombre de "Metodo de Dos Fases"

Claramente, el P.P.L. (2) tiene una solución factible si y sólo si el valor mínimo de la función objetivo del problema (14) es cero.

La s.f.b. inicial para (14) es  $w = b$ ,  $x = 0$  y el método simplex procede como antes se describió. Si el valor mínimo de la función objetivo en la fase uno es cero, entonces tenemos una s.f.b.  $x \geq 0$ ,  $w \geq 0$  para  $Ax + Iw = b$  con  $w = 0$ , es decir, una solución factible  $x \geq 0$  para  $Ax = b$ . Sin ninguna de las variables artificiales permanece en la base en este punto, tendremos el comienzo de la s.f.b. deseada. En este caso la fase dos del procedimiento para encontrar una solución óptima al problema original (2) se inicia simplemente su primiendo las  $w_{i,s}$  y reinstalando la función objetivo  $c^t x$ . Sin una o más de las  $w_{i,s}$  están en la base de la fase uno de optimalidad con  $\phi = 0$ , es necesario entonces garantizar que  $\phi$  permanece idénticamente igual a cero durante la fase dos cuando la función objetivo  $c^t x$  ya se reinstaló. El paso correcto se hace evidente si consideramos la fase uno de optimalidad de la función objetivo como una función de las variables

$$\phi = \sum_{j=1}^n \bar{d}_j x_j + \sum_{i=1}^m \bar{f}_i w_i$$

donde  $\bar{d}_j$  y  $\bar{f}_i$  son los coeficientes de costo reducido de la fase uno y son iguales a cero para las variables  $x_j$  y  $w_i$ , que son básicas. Ya que se obtuvo la fase uno de optimalidad,

todas las  $\bar{d}_j$ 's  $f_i$ 's son no negativas. Así, si suprimimos de la fase dos del problema todas las variables  $x_j$  con  $d_j > 0$  y todas las variables no básicas  $w_i$ , entonces la función objetivo de la fase uno permanece idénticamente igual a cero a lo largo de la fase dos.

La experiencia computacional nos indica que el número total de iteraciones en las fases uno y dos es una función lineal del número de filas: aproximadamente  $2m$  iteraciones para un problema típico, no obstante la magnitud de  $m$  y  $n$ . En el Apéndice B. se describe la diferencia entre el Algoritmo y el Método Simplex.

### 1.3 DUALIDAD

Con la idea de resolver un P.P.L., en esta sección formulamos, con los mismos datos del problema original, un nuevo P.P.L. (llamado *Problema Dual (D)*). Resolviendo el problema dual (D) es posible obtener soluciones del *Problema Primal (P)*.

Desarrollamos, además, algunas propiedades importantes del modelo dual.

#### 1.3.1 PROBLEMAS LINEALES DUALES

Asociado a todo P.P.L. existe su correspondiente P.P.L. dual. Ambos problemas se construyen con los mismos coeficientes de costo y las mismas restricciones, pero con la diferencia de que si uno de ellos es de minimización (maximización) el otro lo será de maximización (minimización). Si los valores óptimos de las funciones objetivo correspondientes son finitos, entonces coinciden. Las variables de (D) pueden interpretarse como precios asociados con las restricciones de (P) y vía esta asociación, es posible dar una interpretación económica al problema dual.

Definimos la dualidad a través del par de problemas:

Primal (P):

$$\begin{array}{l} \min c^t x \\ \text{s.a. } Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}$$

Dual (D):

$$\begin{array}{l} \max \lambda^t b \\ \text{s.a. } \lambda^t A \leq c^t \\ \lambda \geq 0 \end{array} \quad (15)$$

Aquí  $A$  es una matriz de orden  $m \times n$ ,  $x$  es un vector columna  $n$ -dimensional,  $b$  es un vector columna  $m$ -dimensional,  $c^t$  es un vector fila  $n$ -dimensional y  $\lambda^t$  es un vector fila  $m$ -dimensional. El vector  $x$  es la variable del problema primal (P) y  $\lambda$  del problema dual (D) (s.a. significa "sujeta a".)

Al formato (15) se le conoce como *forma simétrica* (o *forma canónica*) de dualidad. Esta puede usarse para definir el dual de un P.P.L. Es importante observar que (P) y (D) pueden invertirse mutuamente, es decir, al estudiar en detalle el proceso mediante el cual se obtiene (D) de (P) (intercambiando el vector de costos por el de restricciones, trasponiendo la matriz de coeficientes, invirtiendo el sentido de las desigualdades y cambiando la minimización por la maximización) vemos que el mismo proceso aplicado a (D) da (P). De otra manera: si el dual se transforma multiplicando la función objetivo y las restricciones por una unidad negativa, entonces tendrá la estructura del primal (expresado en términos de  $\lambda$ ) y su correspondiente dual sería equivalente al primal original.

---

\* Otros autores escriben (D) como:  $\max b^t \lambda$ , s.a.  $A^t \lambda \leq c$  con  $\lambda \geq 0$

El dual de cualquier P.P.L. se puede obtener convirtiéndolo primeramente a la forma (P) de (15). Así por ejemplo, el P.P.L.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ \text{s.a.} \quad & Ax \geq b \\ & -Ax \geq -b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

que tiene la forma (P) de (15), con la matriz de coeficientes

$$\begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix}.$$

Haciendo uso del vector dual particionado como  $[u, v]$ , su dual (D) sería

$$\begin{aligned} \max \quad & u^t b - v^t b \\ \text{s.a.} \quad & u^t A - v^t A \leq c^t \\ & u \geq 0 \\ & v \geq 0. \end{aligned}$$

Ahora, haciendo  $\lambda = u - v$ , se puede simplificar la representación del problema (D), obteniéndose así el par de problemas:

<i>Primal:</i> $\min c^t x$ s.a. $Ax = b$ $x \geq 0$	<i>Dual:</i> $\max \lambda^t b$ s.a. $\lambda^t A \leq c^t$ $\lambda$ <u>no</u> restringida	(16)
---	--	------

Esta es la forma asimétrica (o forma estándar) de dualidad.

En general, si algunas de las desigualdades lineales en el problema (P) de (15) se cambian a igualdades, las componentes correspondientes de  $\lambda$  en (D) se convierten en variables libres. Si algunas de las componentes de  $x$  en (P) son variables libres, entonces las desigualdades correspondientes  $\lambda^t A \leq c^t$  se cambian a igualdades en (D). Estas no son reglas arbitrarias sino consecuencia directa de la definición (15) de las equivalencias entre los P.P.L..

Ejemplo 4. (El problema de la Dieta). Este problema lo planteó un dietista al tratar de seleccionar una combinación de alimentos con ciertos requerimientos nutricionales, a costo mínimo. El problema planteado tiene la forma

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ \text{s.a.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

por lo que cae en el formato (P) de (15). Una interpretación de su dual sería la siguiente. Imagine que una compañía farmacéutica que produce cápsulas que contienen cada uno de los nu-

trientes considerados por el dietista. Dicha compañía trata de convencer al dietista de comprar las pastillas, y suplir así a los nutrientes, en vez de comprar varios alimentos. El problema al que se enfrenta la compañía es el de determinar los precios -por unidad positiva- de los nutrientes, así como el de maximizar los ingresos a la vez que compite con los alimentos. Para poder competir con los alimentos, el costo por unidad del alimento sintético  $i$  no debe exceder a  $c_i$ , el precio del alimento natural en el mercado. Así pues, denotando por  $a_i$  al  $i$ -ésimo alimento, la compañía debe cumplir con que  $\lambda^t a_i \leq c_i$  para cada  $i$ . Esto equivale matricialmente a que  $\lambda^t A \leq c^t$ . Debido a que se comprarán  $b_j$  unidades del  $j$ -ésimo nutriente, el problema del farmacéutico queda como:

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda^t b \\ \text{s.a.} \quad & \lambda^t A \leq c^t \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

que es el problema dual (D).

### 1.3.2. TEOREMAS DE DUALIDAD Y HOLGURA COMPLEMENTARIA.

Consideremos el problema primal (P) en forma estándar

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{17}$$

y su correspondiente dual (D).

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda^t b \\ \text{s.a.} \quad & \lambda^t A \leq c^t \\ & \lambda \text{ no restringida.} \end{aligned}$$

Recordemos que la matriz A no necesariamente es de rango completo, esto es, puede suceder que  $r(A) < m$ . Pues bien, el siguiente lema nos da una relación importante entre los dos problemas duales anteriores. Veamos.

Lema. (Dualidad débil de la P.L.). Si  $x$  y  $\lambda$  son soluciones factibles para (17) y (18) respectivamente, entonces  $c^t x \geq \lambda^t b$ .

Prueba. Como  $x$  y  $\lambda$  son soluciones factibles en (17) y (18) respectivamente,  $Ax = b$ ,  $x \geq 0$  y  $\lambda^t A \leq c^t$ . Multiplicando ambos lados de  $Ax = b$  por  $\lambda^t$ , obtenemos  $\lambda^t Ax = \lambda^t b$ . De manera similar, si multiplicamos ambos lados de  $\lambda^t A \leq c^t$  por el vector no negativo  $x$ , obtenemos  $\lambda^t Ax \leq c^t x$ . Combinando ambos resultados se llega a  $\lambda^t b = \lambda^t Ax \leq c^t x$ .

El lema anterior nos proporciona un nuevo mecanismo para probar la optimalidad. En efecto, nos señala que cualquier vector factible de cada uno de los problemas (17) y (18) nos da una cota del valor del otro problema: los valores (objetivo) asociados al problema primal son "más grandes" que los valores asociados al dual. Ahora, como el problema primal busca el mínimo y el dual el máximo, cada uno intenta alcanzar al otro.

Por ello tenemos el corolario que sigue:

Corolario. Si  $x_0$  y  $\lambda_0$  son soluciones factibles para (17) y (18) respectivamente, y  $c^t x_0 = \lambda_0^t b$ , entonces  $x_0$  y  $\lambda_0$  son óptimos en (P) y (D), respectivamente.

Prueba. Por supuesto, es inmediato del lema anterior.

El corolario nos muestra que si puede encontrarse un par de vectores factible para los que el problema primal y el dual tengan valores objetivo iguales, entonces ambos vectores son óptimos. Es interesante observar por otra parte, que aunque el algoritmo simplex no hace uso de este resultado para probar la optimalidad, al encontrar una s.f.b. óptima  $x = (x_B, x_N) = (B^{-1}b, 0) \geq 0$  produce, simultáneamente, una solución óptima dual  $\lambda$  con  $c^t x = \lambda^t b$ . En realidad,  $\lambda$  es  $c_B B^{-1}$ , como se podría probar.

El siguiente teorema (dualidad fuerte de la P.L.) dice que cuando existan soluciones factibles para los problemas (17) y (18), se obtendrán la soluciones del corolario anterior. En ese sentido, el resultado es más general. Aunque el teorema se puede probar de manera constructiva haciendo uno del algoritmo simplex, daremos una demostración alternativa basada en el argumento de separación, por un hiperplano, de conjuntos convexos. Veamos.

**Teorema de Dualidad de la P.L.** Si alguno de los problemas (17) o (18) tiene una solución óptima finita, lo mismo sucede con el otro problema y, además, los correspondientes valores de sus funciones objetivo son iguales. Si uno de los problemas tiene un valor objetivo no acotado, el otro no tiene solución factible.

Prueba. Notemos en primera instancia que la segunda afirmación del teorema es consecuencia inmediata del lema de dualidad débil. En efecto, si el primal es no acotado y  $\lambda$  es una solución factible del dual, se debe tener que  $\lambda^t b \leq -M$  para  $M$  arbitrariamente grande, lo cual es imposible. Notemos ahora que aunque el primal y el dual no estén escritos en forma simétrica es suficiente, al probar la primera afirmación, asumir que el primal tiene una solución óptima finita, y mostrar así, que el dual tiene una solución con exactamente el mismo valor. Esto se sigue del hecho que cualquier problema puede convertirse a la forma estándar y de que tanto el primal como el dual son, de alguna manera, inversos.

Bien, supongamos ahora que (17) tiene una solución óptima finita con valor  $z_0$ . Definamos en el espacio  $E^{m+1}$ , al conjunto convexo

$$C = \{(r, w) \mid r = tz_0 - c^t x, w = tb - Ax, x \geq 0, t \geq 0\}$$

y verifiquemos que se trata de un cono convexo cerrado. Para

ello observamos que el punto  $(1,0)$  no está en  $C$ : si  $w = t_0 b - Ax_0 = 0$  con  $t_0 > 0$  y  $x_0 > 0$ , entonces  $x = x_0/t_0$  es factible para (17) y  $r/t_0 = z_0 - c^t x \leq 0$ , lo cual significa que  $r \leq 0$ . Si  $w = -Ax_0 = 0$  (siendo  $t_0 = 0$ ) con  $x \geq 0$  y  $cx_0 = -1$ , y si  $x$  es cualquier solución factible para (17), entonces  $x + \gamma x_0$  es factible para  $\gamma \geq 0$  y da arbitrariamente valores objetivo pequeños conforme  $\gamma$  crece. Esto contradice al hecho de que existe un óptimo finito, por lo que concluimos que  $x_0$  no exis te; por tanto,  $(1,0) \notin C$ .

Una vez sabiendo que  $C$  es un conjunto convexo cerrado, podemos asegurar (ver teorema, Apéndice A) que hay un hiperplano separante entre  $C$  y punto  $(1,0)$ . De este modo, existe un vector  $(s, \lambda) \in E^{m+1}$  diferente de cero y una constante  $c$  de manera que

$$s < c = \inf \{ sr + \lambda^t w \mid (r, w) \in C \}.$$

Ahora, como  $C$  es un cono,  $c \geq 0$ . Si hubiera un  $(r, w) \in C$  tal que  $sr + \lambda w < 0$ , entonces  $\gamma(r, w)$ , para  $\gamma$  grande, podría violar la desigualdad del hiperplano. Por otro lado, puesto que  $(0,0) \in C$ , debemos tener que  $c \leq 0$ . De esta manera  $c = 0$  y consecuentemente,  $s < 0$ , por lo que, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $s = -1$ .

Hasta este momento hemos establecido la existencia de  $\lambda \in E^m$  de tal suerte que  $-r + \lambda^t w \geq 0$  para todo  $(r, w) \in C$ . De

manera equivalente, haciendo uso de la definición de  $C$ , se tiene que  $(c - \lambda^t A)x - tz_0 + t \lambda^t b \geq 0$  para toda  $x \geq 0$  y toda  $t \geq 0$ . Poniendo  $t = 0$ ,  $x^t A \leq c^t$ , lo que señala que  $\lambda$  es factible para el dual. Poniendo  $x = 0$  y  $t = 1$ ,  $\lambda^t b \geq z_0$ , lo cual, por el lema de dualidad débil y el corolario anterior, mostramos finalmente que  $\lambda$  es óptimo para el dual. ■

Una manera de probar la optimalidad de  $x$  (y la de  $\lambda$ ) es ver que  $c^t x = \lambda^t b$ ; esto, hechando mano del lema de dualidad débil y de su corolario. Sin embargo, hay otra manera completamente equivalente de probarla conocida como *holgura complementaria* y que es particularmente útil en el diseño de otros algoritmos para resolver P.P.L. En lugar de verificar que  $c^t x = \lambda^t b$  vale, podemos reemplazar  $b$  por  $Ax$  (ya que  $x$  es factible ¿ono?) para obtener  $c^t x = \lambda (Ax)$  o, de manera equivalente,  $(c^t - \lambda^t A) x = 0$ . Esto es entonces una tercera forma de probar la optimalidad. Enseguida establecemos este resultado de una forma un poco diferente, como lo muestran los dos teoremas alternativos que siguen:

Teorema. (de Holgura Complementaria / forma asimétrica).

Sean  $x$  y  $\lambda$  soluciones factibles para los problemas primal y dual en (16), respectivamente. Una condición necesaria y suficiente para que ambas sean soluciones óptimas es que, para toda  $i$ ,

1)  $x_i > 0$  implica que  $\lambda^t a_i = c_i$

2)  $x_i = 0$  es implicado por  $\lambda^t a_i < c_i$

Prueba. Si las condiciones establecidas se cumplen, entonces  $(c^t - \lambda^t A)x = 0$ . Así pues,  $c^t x = \lambda^t b$  y por el corolario del lema débil de dualidad, las dos soluciones son óptimas. Recíprocamente, si las dos soluciones son óptimas, se cumple, por el teorema de dualidad, que  $c^t x = \lambda^t b$  y que  $(c^t - \lambda^t A)x = 0$ . Puesto que cada componente de  $x$  es no negativa y cada componente de  $c^t - \lambda^t A$  es no positiva, las condiciones 1) y 2) se cumplen. ■

Como se dijo antes, una presentación alternativa de este resultado -para el caso de problemas lineales duales-, se tiene a continuación.

Teorema, (de Holgura Complementaria / forma simétrica).

Sean  $x$  y  $\lambda$  soluciones factibles para los problemas primal y dual en (15), respectivamente. Una condición necesaria y suficiente para que ambas sean soluciones óptimas es que, para toda  $i$  y toda  $j$ ,

- 1)  $x_i > 0$  implica que  $\lambda^t a_i = c_i$
- 2)  $x_i = 0$  es implicado por  $\lambda^t a_i < c_i$
- 3)  $\lambda_j > 0$  implica que  $a^j x = b_j$
- 4)  $\lambda_j = 0$  es implicado por  $a^j x > b_j$

donde  $a^j$  es el  $j$ -ésimo renglón de  $A$ .

Prueba. Supongamos que  $x$  y  $\lambda$  son soluciones factibles de (P) y (D), respectivamente. Sean también  $\alpha = \lambda^t (Ax-b) \geq 0$  y  $\beta = (c^t - \lambda^t A)x \geq 0$ . Por las condiciones 1) y 2),  $\beta = 0$  y por las condiciones 3) y 4),  $\alpha = 0$ , lo que implica que  $\alpha + \beta = c^t x - \lambda^t b = 0$ . Ahora bien,  $x$  y  $\lambda$  son soluciones óptimas si y sólo si  $c^t x = \lambda^t b$ , que equivale a  $\alpha = \beta = 0$ . Recíprocamente, si las dos soluciones son óptimas, entonces  $c^t x = \lambda^t b$ ; por tanto,  $c^t x - \lambda^t b = \lambda^t (Ax-b) + (c^t - \lambda^t A)x = 0$ , lo que implica que  $\lambda^t (Ax-b) = 0$  y las condiciones 3) y 4) se cumplen y  $(c^t - \lambda^t A)x = 0$ . Las condiciones 1) y 2) también se cumplen. ■

Las condiciones del teorema de holgura complementaria afirman que si una variable en uno de los problemas es positiva, entonces la restricción correspondiente en el otro problema es sin holgura, y si una restricción en uno de los problemas es con holgura, entonces la variable correspondiente en el otro problema es cero.

Una interpretación económica de este resultado es la que sigue: si en el problema

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ \text{s.a.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

se tiene la restricción activa  $a^j x = b_j$ , el precio al que se compraría una unidad adicional del recurso  $j$  es igual a  $\lambda_j$ , mientras que si se tiene la restricción no activa  $a^j x > b_j$ , el precio al que se compraría la unidad adicional de recurso es igual a cero. Lo anterior justifica que los elementos  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  se denominen *precios sombra* o *precios de oportunidad*, según sea el caso.

### 1.3.3. ALGORITMO PRIMAL-DUAL.

Describiremos un procedimiento para resolver P.P.L. trabajando simultáneamente con los problemas primal y dual: el *Algoritmo Primal-Dual*. Este algoritmo comienza con una solución factible para el dual, que se mejora en cada paso y que optimiza un problema *primal restringido* asociado. El algoritmo trata de alcanzar las condiciones de holgura complementaria en condiciones óptimas. Se desarrolló originalmente para resolver una clase especial de P.P.L. emanados de problemas en *redes de flujo*. Posteriormente se extendió y se hizo más eficiente su procedimiento.

Aquí se describirá la versión generalizada del algoritmo.

Consideremos el problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (19)$$

y su correspondiente dual

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda^t b \\ \text{s.a.} \quad & \lambda^t A \leq c^t \\ & \lambda \text{ no restringida} \end{aligned} \quad (20)$$

Dada una solución factible  $\lambda$  para el problema dual definamos al subconjunto  $P$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  por  $i \in P$  si  $\lambda^t a_i = c_i$ , donde  $a_i$  es la  $i$ -ésima columna de  $A$ . Así pues, ya que  $\lambda$  es dual factible, se sigue que  $i \notin P$  implica que  $\lambda^t a_i < c_i$ . Para  $\lambda$  y  $P$  definimos el *primal restringido* como:

$$\begin{aligned} \min \quad & I^t y \\ \text{s.a.} \quad & Ax + y = b \\ & x \geq 0, \quad x_i = 0 \text{ para } i \in P \\ & y \geq 0 \end{aligned} \quad (21)$$

donde  $I^t$  es el vector  $m$ -dimensional  $(1, 1, \dots, 1)$ . El dual de este primal restringido se llama *dual restringido*. Así,

$$\begin{aligned} \max \quad & v^t b \\ \text{s.a.} \quad & v^t a_j \leq 0, \quad j \in P \\ & v \leq I \end{aligned} \quad (22)$$

La condición de optimalidad del método primal-dual se expresa en el siguiente teorema.

Teorema. (*Primal-Dual de Optimalidad*). Supongamos que  $v$  es factible para el dual y que  $x$ , además de  $y = 0$ , es factible (y desde luego, óptimo) para el primal restringido. Entonces  $x$  e  $v$  son óptimos para los problemas originales primal y dual, respectivamente.

Prueba. Claramente  $x$  es factible para el primal y  $c^t x = v^t A x$  debido a que  $v^t A$  es idéntico a  $c^t$  en las componentes correspondientes a los elementos diferentes de cero de  $x$ . Así,  $c^t x = v^t A x = v^t b$  y la optimalidad se sigue del lema de dualidad débil visto en la sección anterior.

El método primal-dual comienza con una solución factible para el dual y entonces optimiza el primal restringido. Si la solución óptima para este primal restringido es no factible para el primal, la solución factible para el dual se mejora, determinándose así un nuevo primal restringido. Dicho método se describe de manera detallada en la página 47. Para probar su convergencia primero verificamos la afirmación hecha en el paso 3 de que  $v_0^t a_j \leq 0$  para toda  $j$  implica que el primal no tiene

solución factible. El vector  $\lambda_\epsilon = \lambda_0 + \epsilon \mu_0$  es factible para el problema dual, para todo  $\epsilon$  positivo, ya que  $\mu_0^t A \leq 0$ . Además,  $\lambda_\epsilon^t b = \lambda_0^t b + \epsilon \mu_0^t b$  y puesto que  $\mu_0^t b = I^t y > 0$ , al incrementarse  $\epsilon$  se obtiene una solución no acotada para el dual. Por el teorema de dualidad, esto implica que no existe solución para el primal.

Supongamos que en el paso 3 se da  $\mu_0^t a_j > 0$ , para al menos una  $j$ . Definamos nuevamente la familia de vectores  $\lambda_\epsilon = \lambda_0 + \epsilon \mu_0$ . Puesto que  $\mu_0$  es solución de (22) se tiene que  $\mu_0^t a_i \leq 0$  para  $i \in P$  y, para  $\epsilon$  pequeña y positiva, el vector  $\lambda_\epsilon$  es factible para el dual. Incrementemos  $\epsilon$  al primer punto en donde una de las desigualdades  $\lambda_\epsilon^t a_j < C_j$  ( $j \notin P$ ) se convierta en igualdad. Esto determina  $\epsilon_0 > 0$  y  $k$ . El nuevo vector  $\lambda$  corresponde a un valor incrementado de la función objetivo dual  $\lambda^t b = \lambda_0^t b + \epsilon_0 \mu_0^t b$ . Además, el nuevo conjunto correspondiente  $P$  incluye al índice  $k$ . Algún otro índice  $i$  que correspondió a un valor positivo de  $x_i$  en el primal restringido está en el nuevo conjunto  $P$ , debido a que por holgura complementaria,  $\mu_0^t a_i = 0$  para alguna  $i$ , y así,  $\lambda^t a_i = \lambda_0^t a_i + \epsilon_0 \mu_0^t a_i = c_i$ . Esto significa que la solución óptima anterior es factible para el nuevo primal restringido y que  $a_k$  puede pivotarse para entrar a la base. Ya que  $\mu_0^t a_k > 0$ , pivotando sobre  $a_k$  se decrementará el valor del primal restringido. En resumen, se ha mostrado que en cada paso se produce una mejora en el primal o se detecta una condición de no factibilidad. Suponiendo la no degeneración, esto implica

que esa base del primal no se repite y puesto que sólo hay un número finito de bases posibles, la solución se alcanza en un número finito de pasos.

Así las cosas, describimos a continuación, en forma sistemática y resumida, el algoritmo primal-dual. Lo hicimos así con el algoritmo simplex y así lo haremos con los algoritmos que se abordarán después en este trabajo.

ALGORITMO. *Primal-Dual*

PROPOSITO. *Resolver el P.P.L. cuando se tiene una solución dual factible.*

#### DESCRIPCION

Paso 1. Dada una solución factible  $\lambda_0$  para el problema dual (20), determine el primal restringido de acuerdo a (21).

Paso 2. Optimice el primal restringido. Si el valor mínimo de este problema es cero, por el teorema primal-dual de optimalidad, la correspondiente solución es óptima para el problema primal original.

Paso 3. Si el valor mínimo del primal restringido es estrictamente positivo, obtenemos del último tableau simplex del primal restringido la solución  $\mu_0$  del dual restringido (22). Si no existe  $j$  tal que  $\mu_0^t a_j > 0$  concluimos que no tiene soluciones factibles. Si por el contrario, existe al menos una  $j$  tal que

$\mu_0^t a_j > 0$ , definimos el nuevo vector factible

$$\lambda = \lambda_0 + \epsilon_0 \mu_0$$

donde

$$\epsilon_0 = \frac{c_k - \lambda_0^t a_k}{\mu_0^t a_k} = \min_j \left\{ \frac{c_j - \lambda_0^t a_j}{\mu_0^t a_j} \mid \mu_0^t a_j > 0 \right\}.$$

Regresamos al paso 1 usando ésta  $\lambda$ .

## 1.4 EJEMPLOS ILUSTRATIVOS.

El objetivo en esta pequeña sección es la de presentar cuatro ejemplos de aplicación del método primal-dual. En cada uno de ellos se trata de ilustrar el método implementándolo en una tabla\*, tal y como se hace con el método simplex. (Ver apéndice B.)

1.4.1. Ejemplo 5. Consideremos el P.P.L.

$$\min \quad 2x_1 + x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.a.} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Como todos los coeficientes en la función objetivo son no negativos,  $\lambda = (0,0)$  es un vector factible para el dual, el cual toma la forma:

$$\max \quad 3\lambda_1 + 5\lambda_2$$

$$\text{s.a.} \quad \lambda_1 + \lambda_2 \leq 2$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$$

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 \leq 4$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \quad \text{no restringidas}$$

---

\* o también llamado : "tableau"

La tabla queda entonces de la siguiente manera:

Primera iteración.

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	.	.	b
1	1	1	2	1	0	3
2	1	1	3	0	1	5
0	0	0	0	1	1	0

Para formar este tableau tuvimos que agregar variables artificiales:

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	.	.	b
1	1	1	2	1	0	3
2	1	1	3	0	1	5
-3	-2	-2	-5	0	0	-8

$$c_i - \lambda^t a_i \rightarrow 2 \quad 1 \quad 4 \quad . \quad . \quad .$$

El tercer renglón de los coeficientes de costos del problema primal, el renglón podría ser usado como en el procedimiento de la fase I. En el cuarto renglón están los  $c_i - \lambda^t a_i$  para  $\lambda$ . Las columnas consideradas en el primal restringido están determinadas por lo ceros en el último renglón.

Como no hay ceros en el último renglón no podemos mejorar el primal restringido y por lo tanto la solución original  $x_1 = x_2 = x_3 = 0, y_1 = 3, y_2 = 5$  es óptima para  $\lambda$ . La solución  $\nu_0$  para el dual restringido es  $\nu_0 = (1,1)$ , puesto que el primal y dual restringidos son:

$$\min \quad y_1 + y_2$$

$$\max \quad 3\nu_1 + 5\nu_2$$

$$\text{s.a. } y_1 = 2$$

$$\text{s.a. } \nu_1 \leq 1$$

$$y_2 = 5$$

$$\nu_2 \leq 2$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

$\nu_1, \nu_2$  no restringidas

$y = (3, 5)$ ; y como  $y_1, y_2 > 0 \Rightarrow \lambda^t a_i = c_i$  por holgura complementaria. Los números  $-\nu_0^t a_i, i = 1, 2, 3$  son iguales a los tres primeros elementos en el tercer renglón. Así, calculando  $\epsilon_0$  tenemos que

$$\epsilon_0 = \min \{2/3, 1/2, 4/5\} = 1/2$$

Ahora los nuevos valores para el cuarto renglón son sumando  $\epsilon_0$  veces los tres primeros elementos del tercer renglón al cuarto renglón, tenemos:

Segunda iteración:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	.	.	b
1	1	2	1	0	3
2	1	3	0	1	5
-3	2	-5	0	0	-8
$1/2$	0	$3/2$	.	.	.

minimizando el nuevo primal restringido por el pivote indicado obtenemos:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	.	.	b
1	1	2	1	0	3
1	0	1	-1	1	2
-1	0	-1	2	0	-2
$1/2$	0	$3/2$	.	.	.

Calculando  $\epsilon_0 = \min \{1/2, 3/2\} = 1/2$  y sumando este múltiplo del tercer renglón al cuarto, obtenemos el siguiente tableau:

Tercera iteración:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	.	.	b
1	1	2	1	0	3
1	0	1	-1	1	2
0	0	1			

Optimizando el nuevo primal restringido obtenemos:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	.	.	b
0	1	1	2	-1	1
1	0	1	-1	1	2
0	0	0	1	1	0
0	0	1	.	.	.

habiendo obtenido factibilidad en el primal, concluimos que la solución también es óptima:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 0$ . El valor de la función objetivo es  $x_0 = 5$ .

1.4.2 Ejemplo 6. Consideremos ahora el siguiente problema:

$$\min \quad 9x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 6x_5 + 10x_6$$

$$\text{s.a.} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 5$$

$$x_1 + x_4 = 6$$

$$x_2 + x_5 = 4$$

$$x_3 + x_6 = 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$$

Como todos los coeficientes en la función objetivo son no negativos,  $\lambda = (0, 0, 0, 0, 0)$  es un vector factible para el dual, el cual es;

$$\max \quad 8\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 + 4\lambda_4 + 3\lambda_5$$

$$\text{s.a.} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 9$$

$$\lambda_1 + \lambda_4 \leq 7$$

$$\lambda_1 + \lambda_5 \leq 4$$

$$\lambda_2 + \lambda_3 \leq 2$$

$$\lambda_2 + \lambda_4 \leq 6$$

$$\lambda_2 + \lambda_5 \leq 10$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  y  $\lambda_5$  no restringidas

Entonces la solución, vía el método primal-dual, se calcula como sigue:

Primera iteración:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	.	.	.	.	.	b
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	8
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	5
1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	6
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0

Tuvimos que agregar variables artificiales. El sexto renglón nos dará los coeficientes de costos del primal.

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	.	.	.	.	.	b
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	8
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	5
1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	6
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3
$c_i - \lambda^t a_j$	-2	-2	-2	-2	-2	-2	0	0	0	0	-26
	9	7	4	2	6	10	.	.	.	.	.

En el séptimo renglón están los  $c_i - \lambda^t a_j$  para  $\lambda$ .

Las columnas consideradas para el primal restringido están determinadas por los ceros en el último renglón. La solución  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$  y  $y_1 = 8, y_2 = 5, y_3 = 6, y_4 = 4, y_5 = 3$  es óptima para  $\lambda$ . La solución  $\mu_0$  para el dual restringido es  $\mu_0 = (1, 1, 1, 1, 1)$  y los números  $-\mu_0^t a_i, i=1, 2, 3, 4, 5$  son iguales a los seis primeros elementos del sexto renglón. Calculando  $\epsilon_0$  tenemos que

$$\epsilon_0 = \min \{9/2, 7/2, 2, 1, 3, 5\} = 1$$

Los nuevos valores para el séptimo renglón son sumando  $\epsilon_0$  veces los seis primeros elementos del renglón sexto al séptimo.

Segunda iteración:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	.	.	.	.	.	b
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	8
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	5
1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	6
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3
-2	-2	-2	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	-26
7	5	2	0	4	8	.	.	.	.	.	.

Minimizando el nuevo primal restringido obtenemos:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_4$	$a_6$	.	.	.	.	.	b
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	8
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	5
1	0	0	0	-1	-1	0	-1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3
-2	-2	-2	0	0	0	0	2	0	0	0	-16
7	5	2	0	4	8	.	.	.	.	.	.

Calculando  $c_0 = \min \{7/2, 5/2, 1\} = 1$

Tercera iteración:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	.	.	.	.	.	b
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	8
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	5
1	0	0	0	-1	-1	0	-1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3
-2	-2	-2	0	0	0	0	2	0	0	0	-16
5	3	0	0	4	8	.	.	.	.	.	.

minimizando el nuevo primal restringido:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	.	.	.	.	.	b
1	1	0	0	0	-1	1	0	0	0	-1	5
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	5
1	0	0	0	-1	-1	0	-1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3
-2	-2	0	0	0	2	0	2	0	0	-2	-10
5	3	0	0	4	8	.	.	.	.	.	.

Calculando  $\epsilon_0 = \min \{5/2, 3/2\} = 3/2$

Cuarta iteración:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	.	.	.	.	.	b
1	1	0	0	0	-1	1	0	0	0	-1	5
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	5
1	0	0	0	-1	-1	0	-1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3
-2	-2	0	0	0	2	0	2	0	0	2	-10
2	0	0	0	4	11	.	.	.	.	.	.

minimizando el nuevo primal restringido:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	.	.	.	.	.	b
1	0	0	0	-1	-1	1	0	0	-1	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	5
1	0	0	0	-1	-1	0	-1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	4
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	3
-2	0	0	0	2	2	0	2	0	2	0	-2
2	0	0	0	4	4	.	.	.	.	.	.

Calculando  $r_0 = \min (1) = 1$ .

Quinta iteración:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	.	.	.	.	.	b
1	0	0	0	-1	-1	1	0	0	-1	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	5
1	0	0	0	-1	-1	0	-1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3
-2	0	0	0	2	2	0	2	0	2	0	-2
0	0	0	0	8	15	.	.	.	.	.	.

minimizando el nuevo primal restringido:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	.	.	.	.	.	b
0	0	0	0	0	0	1	1	-1	-1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	5
1	0	0	0	-1	-1	0	-1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3
0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0	0
0	0	0	0	0	15						

Habiendo obtenido factibilidad en el primal, concluimos que la solución también es óptima:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 4$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_4 = 5$ ,  $x_5 = 0$ ,  $x_6 = 0$ . El valor óptimo de la función objetivo es  $x_0 = 59$ .

1.4.3. Ejemplo 7. Consideremos el siguiente problema:

$$\min \quad x_1 \quad x_2 + 2x_3 - x_4$$

$$\text{s.a.} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 6$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Reescribimos el problema anterior en la forma estándar como:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 \quad \quad \quad 2x_3 - x_4 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ & -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 - x_6 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

La tabla queda así:

Primera iteración:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	.	$b$
1	1	1	1	1	0	0	6
-2	1	-3	3	0	-1	1	5
0	0	0	0	0	0	1	0

Agregando solo una variable artificial y usando el procedimiento de la fase I para obtener los coeficientes de costos del problema primal, tenemos:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	.	$b$
1	1	1	1	1	0	0	6
-2	1	-3	3	0	-1	1	5
2	-1	3	-3	0	1	0	-5
$c_i = \lambda^t a_i \rightarrow 1$	0	2	-1	0	0	.	.

Las columnas consideradas en el primal restringido están determinadas por los ceros en el último renglón. Como aparece el coeficiente  $c_i - \lambda^t a_i$  de la cuarta columna negativo, primero debemos buscar una solución factible, esto es:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	.	b
$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	2	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$
$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
0	0	0	0	0	0	1	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	0	0	1	1

Habiendo obtenido factibilidad en el primal, concluimos que la solución también es óptima,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = \frac{5}{3}$ ,  $x_5 = 1\frac{2}{3}$ ,  $x_6 = 0$ . El valor óptimo de la función objetivo es  $x_0 = -\frac{5}{3}$ .

1.4.4. Ejemplo 8. Consideremos el problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 6x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Transformándolo primeramente a la forma estándar el problema queda como:

$$\begin{aligned}
 & \min \quad -x_1 - 6x_2 \\
 \text{sujeto a} \quad & \text{s.a.} \quad x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\
 & \quad \quad x_1 + 3x_2 + x_4 = 3 \\
 & \quad \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

La tabla queda como sigue:

Primera iteración:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	.	b
1	1	-1	0	1	2
1	3	0	1	0	3
0	0	0	0	1	0

Agregando una variable artificial y usando el procedimiento de la fase I para obtener los coeficientes de costo del problema primal, tenemos:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	.	b
1	1	-1	0	1	2
1	3	0	1	0	3
-1	-1	1	0	0	-2
$c_i - \lambda^t a_i$	-1	-6	0	0	.

Como podemos observar los  $c_i - \lambda^t a_i$  son negativos, debemos primero buscar una solución factible; escogiendo la segunda columna tenemos que:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	.	$b$
$\frac{2}{3}$	0	-1	$-\frac{1}{3}$	1	1
$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	1
$-\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	-1
$c_1 - \lambda^t a_1 + 1$	0	0	2	.	.

Las columnas consideradas en el primal restringido están determinadas por los ceros en el último renglón. En este caso no podemos mejorar el primal restringido por lo que calculamos  $\epsilon_0$ , esto es,

$$\epsilon_0 = \min \left\{ \frac{3}{2} \right\} = \frac{3}{2}$$

Segunda iteración:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	.	$b$
$\frac{2}{3}$	0	-1	$-\frac{1}{3}$	1	1
$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	1
$-\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	-1
0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	.	.

minimizando el nuevo primal restringido:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	.	b
1	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0	1	0
0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	.	.

Habiendo obtenido factibilidad en el primal, concluimos que la solución también es óptima:  $x_1 = \frac{3}{2}$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 0$ .  
 El valor óptimo de la función objetivo es  $x_0 = \frac{9}{2}$ .

## capítulo 2

## CAPITULO 2

### REDES DE FLUJO. PROBLEMAS BÁSICOS

Muchos problemas prácticos pueden plantearse como *problemas de Redes de Flujo*\*. Los problemas surgidos al estudiar los sistemas de carreteras, los sistemas de líneas aéreas, los sistemas de navegación, los sistemas ferroviarios, y en general, todos los problemas surgidos en la planeación del transporte, son problemas de redes. También lo son los problemas de distribución de flujo del gas natural, de petróleo crudo, de agua o de cualquier otro fluido. En la red de teléfonos, por su parte, se estudiaría el flujo de llamadas telefónicas y los modelos económicos pueden tratarse también como modelos de redes.

Los problemas de redes de flujo pueden formularse como problemas lineales. En efecto, los problemas de redes de flujo son una clase importante de problemas que poseen una *estructura especial* que nos permite ejecutar los pasos del algoritmo simplex (y/o de sus variantes) sin multiplicaciones o divisiones. Debido a esto, es posible resolver problemas de redes en un tiempo de computadora razonablemente bueno.

Y es precisamente a esa estructura especial, que se han desarrollado un número suficiente de algoritmos y de elegantes teoremas que garantizan el estudio separado de dichos problemas.

---

\* Podría ser más correcto decir "Los problemas de Flujo en Redes", sin embargo, adoptaremos el término coloquial *Redes de flujo*.

En la mayoría de los casos las soluciones óptimas son siempre números enteros, un hecho que no vale, en general, para programas lineales.

En la primera sección de este capítulo definiremos los conceptos Gráfica y de Red de Flujo\*\* y la relación entre la programación lineal y las redes flujo. En la segunda sección describiremos los clásicos problemas de redes, desarrollando también algunos ejemplos.

Y una cosa muy importante. Al describir con detalle cada uno de esos problemas se irán vertiendo los conceptos de mayor peso para el desarrollo de sus métodos primales.

---

\*\* O de flujo en una Red.

## 2.1 CONCEPTOS BÁSICOS DE REDES.

En esta primera sección definiremos de manera no formal, lo que se entiende por gráfica y daremos algunas definiciones asociadas a la estructura de una gráfica. Se enfatizará en el concepto de red como una gráfica dirigida con cierta característica distintiva, además de extender el concepto al de red de flujo. Al final de la sección presentaremos de manera general la característica que hace que cada problema de red de flujo pueda formularse como un P.P.L.

### 2.1.1 GRAFICAS.

Definiremos primeramente lo que es una gráfica. Una gráfica consiste de un conjunto de *nodos* (vértices, puntos) y un conjunto de *arcos* (aristas, ligas, líneas, ramas) que conectan a estos nodos. (Supondremos siempre en este trabajo que el número de nodos y arcos es finito) (Ver apéndice C)

Si un arco tiene dirección se le llama *arco dirigido*; en caso contrario se le llama *arco no dirigido*. Se usan círculos para representar los nodos, líneas con flecha para representar los arcos dirigidos y líneas sin flecha para representar arcos no dirigidos. En la figura 1 está representada una gráfica con cinco nodos y cinco arcos. Los nodos de una gráfica generalmente se numeran:  $1, 2, 3, \dots, n$ . Un arco entre los nodos  $i$  y  $j$  se representa por el par  $(i, j)$ .

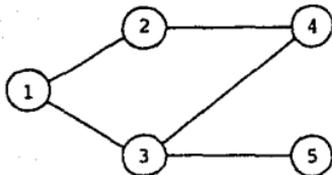


Figura 1.

Hay otras definiciones elementales asociadas a la estructura de una gráfica. Se llama *cadena* entre los nodos  $i$  y  $j$  a una secuencia arcos que los conectan; esa secuencia debe tener la forma  $(i, k_1), (k_1, k_2), \dots, (k_m, j)$ . En la figura 1.  $(1, 2), (2, 4), (4, 3)$ , es una cadena entre los nodos 1 y 3. Si se especifica una dirección a lo largo de una cadena entre los nodos  $i$  y  $j$  se tendrá entonces una *ruta* de  $i$  a  $j$ . Se tiene en la figura 2 de la siguiente subsección la ruta de 1 a 3 siguiente:  $(1, 2), (2, 4), (4, 3)$ . Por otro lado, un *ciclo* es una cadena que empieza y termina en un nodo cualquiera de la gráfica, y paralelamente, un *ciclo dirigido* es una ruta que empieza y termina en un nodo cualquiera. La cadena  $(1, 2), (2, 4), (4, 3), (3, 1)$  es un ciclo en la gráfica de la figura 1, y la ruta  $(2, 4), (4, 2)$  es un ciclo dirigido en la gráfica de la figura 2. Una *cadena simple* es una cadena que no contiene ciclos.

Se dice que una gráfica es *conexa* si hay una cadena entre cada par de nodos. Así, la gráfica de la figura 1 es conexa. Ahora, una gráfica que sea conexa y que no tenga ciclos se le

llama *árbol*. Eliminando alguno de los arcos (1,2), (1,3), (2,4) o (2,4), podríamos transformar la gráfica de la figura 1 en un árbol. Algunas veces, dada una gráfica G, podemos construir un árbol de algún subconjunto de sus arcos. Si tal árbol toca todos los nodos de G, entonces se le llama *árbol de expansión*.

Una *trayectoria*, al igual que una cadena, es también una secuencia de arcos conectados, pero los arcos pueden ser dirigidos en cualquiera de las direcciones o pueden ser no dirigidos. Por ejemplo, en la figura 2, (1,2), (2,3), (4,3) es una trayectoria. Si el arco (4,3) se reemplaza por el arco (3,4), se tiene entonces una ruta de 1 a 4.

### 2.1.2 REDES Y REDES DE FLUJO.

Nuestro interés se centra principalmente en las *gráficas dirigidas* en las que en cada uno de sus arcos existe un sentido de orientación\*. En tal caso, cualquier arco se considera un par ordenado (i,j) y se dice que va del nodo i al nodo j, y no al revés. Al nodo i se le llama nodo inicial del arco y al nodo j, nodo final. La gráfica de la figura 2 es una *gráfica dirigida*.

Cuando trabajamos con *gráficas dirigidas* (ver figura 2) algunos pares de nodos pueden tener arcos en cada una de las direcciones. Ambos arcos equivaldrán a un arco no dirigido.

---

\* Esto es, *gráficas con arcos dirigidos*.

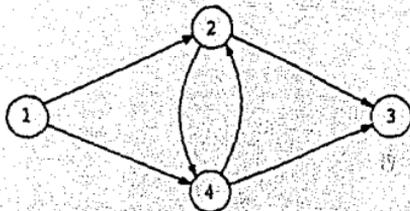


Figura 2.

En resumen, se dice que el nodo  $j$  es alcanzable al  $i$  si existe una ruta del nodo  $i$  al nodo  $j$ .

Una gráfica es una manera efectiva de representar la comunicación estructurada entre nodos; precisamente hasta aquí, la definición de red es justamente la definición de gráfica. Sin embargo, cuando exista la posibilidad de considerar flujos en los arcos de una gráfica dirigida nos estaremos refiriendo a una red. Esto es, se usa la palabra "red" al asociársele números a los arcos.

Cada arco  $(i, j)$  de la red tiene asociado un número  $b_{ij} > 0$ , llamado *capacidad del arco*. Hay dos nodos especiales en una red: el *nodo fuente* que es nodo inicial de cualquier arco con el que esté conectado, y el *nodo sumidero* que es nodo final, también de cualquier arco con el que esté conectado.

Podemos considerar a una red como un sistema de distribución de agua en cierta región donde los arcos representan precisamente a las tuberías que conectan una presa o un vaso con otra (u otro). El nodo fuente es la entrada del agua al sistema, el nodo sumidero es la salida y los otros nodos son las uniones entre las tuberías. Se puede considerar que la capacidad de cada arco indica el área del corte transversal de la tubería o el número de metros cúbicos de agua que corre por la tubería por segundo. En tal sistema de distribución de agua nos puede interesar, por ejemplo, el flujo máximo de agua que puede correr de la fuente al sumidero.

Los flujos en los arcos de la red deben articularse de tal manera que satisfagan un *criterio de conservación* en cada nodo. Específicamente, a menos que se trate de un nodo fuente o un nodo sumidero, el flujo no se podrá crear ni perder en cualquier nodo; el flujo total que entra en un nodo debe ser igual al flujo total que sale de él. Así pues, en cada nodo

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{k=1}^n x_{ki} = \begin{cases} -v, & \text{si } j = s \\ 0, & \text{si } j \neq s, t \\ v, & \text{si } j = t \end{cases} \quad (1)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq b_{ij} \quad (2)$$

(para toda  $i, j$ )

donde  $x_{ij}$  es el flujo del arco dirigido  $(i, j)$ . La primera suma es el flujo total de  $i$ , y la segunda, el flujo total a  $i$ .

(desde luego que  $x_{ij}$  no existe si no hay arco de  $i$  a  $j$ ). Para que existan flujos diferentes de cero en una red sin nodo fuente o sumidero, ésta debe tener un ciclo.

En muchas aplicaciones a los nodos fuente y sumidero se les llama nodos oferta y demanda, respectivamente. El flujo neto fuera de un nodo fuente debe ser positivo, y el nivel de su flujo neto puede ser fijo o bien, variable, dependiendo de la aplicación. De manera similar, el flujo neto dentro de un nodo sumidero debe ser positivo.

### 2.1.3 RELACION DE LA PROGRAMACION LINEAL Y LAS REDES DE FLUJO.

Como habíamos dicho antes, un árbol es una gráfica no dirigida, conexa y que no contiene ciclos. Por tanto, para cualesquiera dos nodos del árbol, existe una única cadena que los une. Así pues, para una gráfica de  $n-1$  nodos, nos servirá de definición de árbol cualesquiera dos condiciones que tomemos de las tres dadas enseguida:

- i) Es conexa
- ii) No tiene ciclos
- iii) El número de arcos es  $n-1$

Habíamos dicho también que un árbol de expansión de una gráfica  $G$  es una subgráfica de  $G$  de tal manera que cada nodo de  $G$  está en el árbol. Si  $G$  es una gráfica de  $n$  nodos, un árbol con  $n$  nodos es un árbol de expansión.

Ahora, si asociamos a cada arco de la gráfica o de la red un número  $d_{ij}$ , tendremos entonces el concepto de máximo o mínimo de un árbol de expansión. Un máximo (o mínimo) de un árbol de expansión de una red es un árbol de expansión tal que la suma de los  $d_{ij}$  de los arcos de árbol sea máxima (o mínima) con respecto a todos los árboles de expansión de la red.

Consideremos el problema de calcular el valor del flujo máximo en la red dada por la figura 2 de la subsección anterior. Para ello asumamos que cada arco de la red tiene capacidad de una unidad. Entonces el conjunto  $x_{12} = 1$ ,  $x_{24} = 1$ ,  $x_{ij} = 0$  en otro lado, es un conjunto de enteros no negativos que satisfacen (1) y (2). Pero cualquier líquido en un sistema de tuberías semejante al de la figura 2 tendrá que  $x_{13} \neq 0$  si  $x_{12} = 1$ . Pensemos también que el sistema de tuberías tiene en cada nodo muchas válvulas que pueden retener el líquido que va a cualquiera de los arcos que inciden en ese nodo.

Encontrar el flujo máximo en cualquier red es, obviamente, un P.L. con la función objetivo  $v = \sum_j x_{sj}$  y las restricciones (1) y (2). Sin embargo, como es un caso especial de P.L., se han desarrollado algoritmos más eficientes que el método simplex, que es para programas lineales de tipo general. Por cierto, muchos algoritmos de la teoría de redes de flujo también utilizan los conceptos de dualidad de la programación lineal.

En la red de la figura 2 tenemos seis variables  $x_{s_2}$ ,  $x_{s_3}, \dots, x_{st}$ , los flujos de los arcos. Aunque  $v = x_{s_2} + x_{s_3}$ , trataremos a  $v$  como una variable. El problema de flujo máximo puede formularse como P.P.L. así:

$$\max z = cx$$

s.a

$$Ax = 0$$

$$A'x \leq b$$

$$x \geq 0,$$

donde  $x = (v, x_{s_2}, x_{s_3}, x_{23}, x_{32}, x_{2t}, x_{3t})^t$ ,  $C = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ [A es de orden } n \times (m+1)\text{]}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ [A' es de orden } m \times (m+1)\text{]}$$

$b = (b_{s_2}, b_{s_3}, b_{23}, b_{32}, b_{2t}, b_{3t})^t$ ,  $n$  el número de nodos y  $m$  el número de arcos.

De particular interés es la estructura de la matriz  $A$ . Si la observamos podremos constatar que cada columna de  $A$  tiene dos entradas no cero,  $+1$  y  $-1$ , y debido a esa estructura, su rango es  $n$ . La matriz  $A$  recibe el nombre de *matriz de incidencia*. Cada renglón de  $A$  corresponde, físicamente, a la ecuación de conservación de flujo en cierto nodo. El balance de flujo en  $n-1$  nodos más el conocer que lo que entra es igual a lo que sale, implica el balance de flujo en el nodo restante.

Otra propiedad de la matriz  $A$  que no se aprecia de primera intención es que cada subdeterminante de ella tiene el valor  $\pm 1$  ó  $0$ . Esto se le conoce como propiedad de *unimodularidad total*. Esta propiedad garantiza una solución óptima entera si las componentes del vector son todas números enteros.

Las variables asociadas con algunas de las columnas de la matriz restricción  $A'$  se llaman variables no básicas o variables independientes debido a que sus valores se asignan de manera arbitraria. Los valores de las variables básicas están determinados de forma única por las variables no básicas. Si asignamos arbitrariamente en una red los flujos de arcos sin restricciones de capacidad, entonces puede no satisfacerse

la ecuación de conservación en cada nodo. Por lo tanto, entre todos los arcos que inciden a un nodo, el flujo en un arco puede no asignarse arbitrariamente pero se determina por la ecuación de conservación. Si consideramos todos los arcos cuyos flujos los determinan de manera única los demás flujos, todos esos arcos formarán un árbol de expansión. Para ver que es un árbol de expansión razonamos como sigue: de entre todos los flujos que inciden a un nodo, debe fijarse uno de ellos a fin de satisfacer la ecuación de conservación de flujo en ese nodo. Ya que hay  $n-1$  ecuaciones de conservación de flujo independientes, hay también  $n-1$  de tales arcos. Esos  $n-1$  arcos no pueden formar ningún ciclo porque uno puede agregar flujos en el ciclo sin violar las ecuaciones de conservación de flujo de los nodos en el ciclo. Esto contradiría que los valores de esos  $n-1$  arcos están unívocamente determinados. Por tanto, para una red sin capacidades de arco, los flujos en un árbol de expansión son las variables básicas.

Regresaremos al problema del flujo máximo en la subsección 2.2.5 de la sección que sigue.

## 2.2 LOS PROBLEMAS CLASICOS EN REDES.

Existe un número bastante considerable de P.P.L. que poseen una estructura matemática especial, a saber, los problemas de *transporte*, *asignación*, *ruta más corta* y *flujo máximo*.

Estos problemas son importantes tanto por su aplicación como por la teoría que subyace a ellos. En efecto, aún cuando se pueden resolver por el método simplex, las características que los hacen especiales han conducido al desarrollo de algoritmos de solución más sencillos, tanto en su estructura como en su manejo.

Describimos aquí dichos problemas de la manera más clara posible, hechando mano de los conceptos introducidos en la sección 2.1, con el fin de preparar el terreno para que, en los siguientes dos capítulos, se desarrolle el método primal-dual para su solución.

Al presentar cada uno de los problemas se formularán algunos ejemplos.

### 2.2.1 EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE (P.T.)

Supongamos que las cantidades  $a_1, a_2, \dots, a_m$  de cierto producto se transportan de  $m$  localidades a  $n$  destinos cuyas demandas son  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Supongamos además que existe un costo  $c_{ij}$  asociado a cada unidad de producto embarcada o

enviada del origen  $i$  al destino  $j$ . Se desea determinar el patrón de embarques origen-destino que minimice el costo total por transporte.

Para formular este problema como un P.P.L. consideremos el arreglo

$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1n}$	$a_1$
$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2n}$	$a_2$
.	.		.	.
.	.		.	.
$x_{m1}$	$x_{m2}$	...	$x_{mn}$	$a_m$
$b_1$	$b_2$	...	$b_n$	

donde el  $i$ -ésimo renglón define las variables asociadas al  $i$ -ésimo origen, mientras que la  $j$ -ésima columna define las variables asociadas al  $j$ -ésimo destino. La variable de decisión  $x_{ij}$  representa la cantidad transportada, o el flujo, del origen  $i$  al destino  $j$ . Asimismo,  $a_i$  es igual a la suma del  $i$ -ésimo renglón,  $b_j$  a la suma de la  $j$ -ésima columna y

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

a la suma total del costo de transporte por minimizar. Entonces el modelo de P.L. equivalente está dado como:

$$\min \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

s. a.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i=1,2,\dots,m \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j=1,2,\dots,n \quad (4)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1,\dots,m; j=1,\dots,n$$

Para que las restricciones (3) y (4) sean consistentes hemos de suponer que

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j,$$

es decir, que la oferta en todos los orígenes (oferta total) debe igualar a demanda de todos los destinos (demanda total). Si esto sucede se dice que el modelo del transporte está balanceado; en caso contrario, es decir, cuando la oferta disponible es menor o mayor que la demanda, el modelo *no está balanceado*.

Así pues, el P.T. tiene  $mn$  variables. Las ecuaciones (3) y (4) pueden combinarse y expresarse en la forma:

$$\begin{array}{rcccc}
 x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} & & & & = a_1 \\
 & x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} & & & = a_1 \\
 & & \cdot & & \cdot \\
 & & \cdot & & \cdot \\
 & & & x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} & = a_m \quad (5) \\
 x_{11} & & + x_{21} & & + x_{m1} & = b_1 \\
 & x_{12} & & + x_{22} & & + x_{m2} & = b_2 \\
 & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
 & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
 & & & x_{1n} & & x_{2n} & & x_{mn} = b_n
 \end{array}$$

de tal manera que la matriz resultante (de orden  $(m+n) \times (mn)$ ) consistirá de coeficientes cero o uno.

En la práctica no es necesario escribir las restricciones del P.T. en la forma (5). Específicamente, un P.T. se define como:

$$\begin{array}{l}
 a^t = (a_1, a_2, \dots, a_m)^t \\
 b^t = (b_1, b_2, \dots, b_n)^t
 \end{array}
 \quad C = \begin{bmatrix}
 c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\
 c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\
 \cdot & \cdot & & \cdot \\
 \cdot & \cdot & & \cdot \\
 c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn}
 \end{bmatrix}$$

La solución se puede representar en un arreglo de  $m \times n$  y los cálculos puede realizarse en un arreglo similar.

Ejemplo 1. Un P.T. con 3 orígenes y 4 destinos lo definimos, entonces, como

$$\begin{array}{l}
 a^t = (20, 6, 9)^t \\
 b^t = (5, 20, 5, 5)^t
 \end{array}
 \quad
 \begin{bmatrix}
 20 & 30 & 40 & 20 \\
 60 & 30 & 50 & 40 \\
 20 & 10 & 40 & 70
 \end{bmatrix}$$

Observe que se satisfacen los requerimientos puesto que tanto la oferta como la demanda totales son iguales a 35.

#### 2.2.1.1 Factibilidad y Redundancia.

Lo primero que hay que hacer al estudiar la estructura del P.T. es mostrar que siempre existe una solución factible; esto establecería que el problema está bien definido. Para encontrar una solución factible podemos distribuir los embarques origen-destino en proporción a la oferta y a la demanda. De manera específica, sea  $S$  la oferta total (que es igual a la demanda total). Entonces  $x_{ij} = a_i b_j / S$  para  $i=1,2,\dots,m$  y  $j=1,2,\dots,n$ . Las soluciones son acotadas ya que cada  $x_{ij}$  es acotada por  $a_i$  (y por  $b_j$ ). Así pues, como cualquier problema de optimización acotado tiene óptimo, el P.T. siempre tiene una solución óptima.

Enseguida, lo que hay que hacer al estudiar la estructura del P.T. es examinar las restricciones. Existen  $m$  ecuaciones que corresponden a las restricciones de oferta y  $n$  ecuaciones que corresponden a las restricciones de demanda; un total de  $m+n$  restricciones. Además, observamos que la suma de las ecuaciones de la oferta es:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n = \sum_{i=1}^m a_i \quad (6)$$

y la suma de las ecuaciones de la demanda es:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m = \sum_{j=1}^n b_j \quad (7)$$

Se observa por un lado que, bajo el supuesto de que el modelo está balanceado, los lados derechos de (6) y (7) son iguales y las ecuaciones son consistentes. Por otro lado, observamos que los lados izquierdo de (6) y (7) son también iguales, ya que como dichas ecuaciones son combinaciones lineales de las ecuaciones (3) y (4) del sistema original, éstas no son independientes. Es por ello que el sistema original es redundante, lo que significa que una de las restricciones puede eliminarse sin alterar el espacio de las soluciones factibles. Las dos observaciones anteriores se resumen entonces, en el siguiente teorema.

Teorema. Cualquier P.T. tiene siempre una solución factible y tiene exactamente una restricción de igualdad redundante. Cuando alguna de las restricciones se elimina, el sistema de  $m + n - 1$  restricciones es linealmente independiente.

Prueba. Supongamos que se elimina una ecuación, por ejemplo la última. Con ello suponemos que hubo una combinación lineal de las  $m + n - 1$  ecuaciones anteriores que fue cero. Sean  $\alpha_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) y  $\beta_j$  ( $j=1,2,\dots,n-1$ ). En base a (5) observamos que cada  $x_{in}$ , para  $i=1,2,\dots,m$ , aparece en la  $i$ -ésima ecuación. Esto es,  $\alpha_i = 0$  para  $i=1,2,\dots,n$ . El resto de las ecuaciones  $x_{ij}$  aparece en una ecuación y  $\beta_j = 0$  para  $j=1,2,\dots,n-1$ . De aquí que la combinación lineal que da cero es la combinación cero y, por tanto, el sistema de ecuaciones es linealmente independiente. ■

Así pues, una base para el P.T. consiste de  $m+n-1$  vectores y una s.f.b. no degenerada consiste de  $m+n-1$  variables. La solución que se encontró antes no es una solución básica.

#### 2.2.1.2 Solución Factible Básica.

Existen varios métodos para encontrar una s.f.b. inicial en el P.T. Se discute en esta parte sólo uno de ellos, a saber, el "Método de la Esquina Noroeste". Este método es rápido y nos introduce al proceso computacional que es fundamental para

la solución general basada en la técnica del método simplex.

El Método de la Esquina Noroeste.

Supongamos, antes que nada, que tenemos el siguiente arreglo:

$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	...	$x_{1n}$	$a_1$
$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	...	$x_{2n}$	$a_2$
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
$x_{m1}$	$x_{m2}$	$x_{m3}$	...	$x_{mn}$	$a_m$
$b_1$	$b_2$	$b_3$	...	$b_n$	

(8)

en donde los elementos del arreglo aparecen en celdas y representan una solución cualquiera. Además, si hay alguna celda vacía, ésta denota el valor cero.

Empezando con las celdas vacías, el procedimiento del método es así:

Paso 1. Situar en la celda de la esquina superior izquierda.

Paso 2. Asignar el máximo factible que corresponde al renglón y columna de los requerimientos involucrados en la celda. (Al menos uno de ellos habrá de satisfacerse.)

**Paso 3.** Moverse una celda a la derecha si hay algún requerimiento en el renglón. En otro caso nos movemos una celda hacia abajo. Si todos los requerimientos se satisfacen, *alto*. De otra manera, regresar al paso 2.

El método se llama de la 'esquina noroeste' porque en cada paso selecciona una celda de la esquina superior izquierda del subarreglo, tomando en cuenta los requerimientos diferentes de cero, por renglón y por columna. Una ilustración gráfica del cómo el método asigna valores (con  $m = 4$  y  $n = 5$ ) es:

B	+	B				$a_1$							
		+	B	+	B	+	B		$a_2$				
							+	B		$a_3$			
								+	B	+	B		$a_4$
$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$									

Dicho método (en ausencia de degeneración) producirá exactamente  $m+n-1$  números  $x_{ij}$  positivos (las "B" del esquema anterior). Cada vez que a cada  $x_{ij}$  se le asigna un valor positivo, se satisface una restricción de oferta o de demanda. Cuando se asignen valores positivos a  $m+n-1$  variables, se habrán satisfecho  $m+n-1$  restricciones. Ver (8).

**Ejemplo 2.** Una s.f.b. construida por el método de la esquina noroeste para el ejemplo 1 es la dada por la tabla que sigue:

	1	2	3	4
1	5	15		20
2		5	1	6
3			4	5
	5	20	5	5

(9)

En la esquina superior izquierda podemos asignar un máximo de 5 unidades, las requeridas por la columna 1. Así en el renglón 1 fueron requeridas  $20 - 5 = 15$  unidades que se asignan a la segunda celda del primer renglón. Una vez que se satisfacen los requerimientos del renglón 1 se hace necesario moverse al segundo renglón, y así sucesivamente hasta que se satisfagan todos los requerimientos. La solución básica resultante se da en (9). Las variables básicas son, entonces,  $x_{11}=5$ ,  $x_{12}=15$ ,  $x_{22}=5$ ,  $x_{23}=1$ ,  $x_{33}=4$  y  $x_{34}=5$ . Las variables restantes son no básicas. Esta solución se ilustra gráficamente en la figura 3.

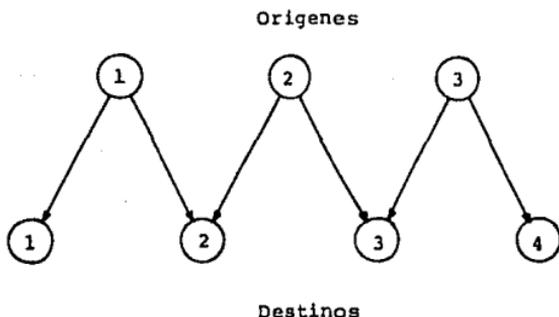


Figura 3.

Ejemplo 3. Una s.f.b. construída por la regla de la esquina noroeste para un nuevo problema es:

10	20				30
	30	20	30		80
			10		10
			40	20	60
10	50	20	80	20	

Nótese que en el ejemplo anterior el mínimo requerido de variables básicas es  $6 = m + n - 1$ , mientras que en este ejemplo es 8. Las celdas en blanco corresponden a variables no básicas: dichas variables tienen valor cero.

Existe la posibilidad de que tanto un renglón como una columna se satisfagan simultáneamente. Este caso se analizará en la subsección 2.2.2.4.

La regla de la esquina noroeste puede usarse para obtener diferentes s.b.f. simplemente con permutar los renglones y las columnas del arreglo antes de aplicar el procedimiento. La regla de la esquina noroeste siempre proporciona el número adecuado de variables básicas. Existen, además otros métodos no tratados aquí, como, por ejemplo, el método del costo mínimo y el método de aproximación de Vogel. Este ejemplo se usará en ejemplos posteriores.

### 2.2.1.3 Caracterización de la Base.

Una propiedad importante del P.T. es la triangularización de la base. Sabemos del Algebra Lineal que dicha propiedad simplifica el proceso de solución de un sistema de ecuaciones cuyos coeficientes corresponden a una base, permitiendo con eso una implementación eficiente del Método Simplex.

#### Matrices Triangulares.

Definición. Toda matriz cuadrada no singular  $M$  se dice triangular si permutando sus renglones y columnas se transforma en una matriz triangular inferior.

De la definición se sigue que toda matriz triangular inferior no singular es triangular. De la misma manera, toda matriz triangular superior no singular es triangular puesto que al invertir el orden de sus renglones y columnas se convierte en triangular inferior.

Un procedimiento simple para determinar si una matriz  $M$  es triangular, o no lo es, se da enseguida:

Paso 1. Encontrar un renglón con exactamente un elemento diferente de cero.

Paso 2. Formar una submatriz de la matriz del paso 1, cruzando el renglón y la columna que corresponden al elemento diferente de cero en ese renglón. Regrese al paso 1 con la submatriz así formada.

Si el procedimiento lo podemos continuar hasta que todos los renglones hayan sido eliminados, la matriz resultante será triangular. Dicha matriz la podemos poner explícitamente en forma de triangular inferior, reorganizando sus renglones y sus columnas estrictamente en el orden que el procedimiento marcó.

Ejemplo 3. Sea la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \end{matrix}$$

3   2   5   1   6   4

Al aplicarle a M el procedimiento antes descrito en el orden indicado (ver números adyacentes a la matriz M), se transforma en la matriz triangular inferior

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

La importancia de la triangularización estriba en el método de sustitución regresiva asociado al sistema de triangular de ecuaciones. Supongamos nuevamente que  $M$  es triangular. Una permutación de renglones es una reordenación simple de las ecuaciones (equivalente a multiplicar  $M$  por matrices de permutación a la izquierda) y una permutación de columnas es una reordenación simple de las variables (equivalente a multiplicar  $M$  por matrices de permutación a la derecha). Así, después de una reordenación apropiada, el sistema de ecuaciones  $Mx = d$  toma la forma triangular inferior que puede resolverse por sustitución directa.

El método puede aplicarse también a sistemas de la forma  $\lambda^t M = c^t$ . En este caso se utilizaría la sustitución regresiva.

Un aspecto importante del P.T. lo describe el siguiente:

Teorema de triangularización de Bases. Cada una de las bases del P.T. es triangular.

Prueba. Supongamos que invertimos los signos de la mitad de los coeficientes de (5). Entonces la matriz de dichos coeficientes consiste en "más unos", "menos unos" y "ceros". Por el teorema de la subsección 2.2.1.1, prescindimos de una de las ecuaciones para eliminar redundancia. Con los coeficientes de la matriz resultante formamos una base  $B$ , seleccionando un subconjunto no singular de  $m + n - 1$  columnas.

Cada columna de  $B$  contiene a lo más dos elementos diferentes de cero,  $+1$  y  $-1$ . Entonces hay a lo más  $2(m+n-1)$  elementos diferentes de cero en la base. Sin embargo, si cada columna contiene dos elementos diferentes de cero, entonces la suma de todos los renglones sería cero, contradiciendo la no-singularidad de  $B$ . De este modo, al menos una columna de  $B$  contiene solamente un elemento diferente de cero. Esto significa que el número total de elementos diferentes de cero en  $B$  es menor que  $2(m+n-1)$ .

Existe entonces un renglón con un elemento diferente de cero; si cada renglón tiene dos o más elementos diferentes de cero, el número total podría ser al menos  $2(m+n-1)$ . Esto significa que el primer paso del procedimiento para verificar la triangularidad se satisface. Un argumento similar puede aplicarse a la submatriz de  $B$  obtenida al cruzar el renglón y la columna correspondiente a estos elementos. Esta submatriz debe contener también un renglón con un elemento diferente de cero. El argumento anterior establece que la base  $B$  es triangular. ■

Ejemplo 4. Como ilustración del teorema de triangularización de bases considere la base seleccionada por la regla de la esquina noroeste del ejemplo 3. En esta base solamente las variables básicas son indicadas, no así sus valores.

x	x				30
	x	x	x		80
			x		10
			x	x	60
10	50	20	80	20	

Un renglón en una matriz básica corresponde a una ecuación en el sistema original y está asociada con una restricción sobre el total de un renglón o una columna. En este ejemplo la ecuación correspondiente a la suma de la primera columna contiene solamente una variable básica  $x_{11}$ . El valor de esta variable lo podemos encontrar rápidamente, es 10. La siguiente ecuación corresponde a la suma del primer renglón. La variable es  $x_{12}$ , la cual tiene valor de 20 ya que  $x_{11}$  es conocida. Este procedimiento es equivalente a la sustitución regresiva.

Ejemplo 5. Representemos otra base para el ejemplo 3. Busquemos sobre los renglones y las columnas para encontrar una variable básica. El valor de esta variable podemos encontrarlo fácilmente. Tales renglones o columnas siempre existen, ya que toda base es triangular. Entonces este renglón o columna es cruzado y el procedimiento se repite. Los números en las celdas indican un orden aceptable para su cálculo, aunque por supuesto, hay otros.

$x^1$		$x^5$	1	$x^6$	30
	$x^2$		$x^3$		80
		$x^4$			10
			$x^8$	$x^7$	60
10	50	20	80	20	

#### 2.2.1.4 Soluciones Enteras.

Como cualquier matriz básica es triangular y todos sus elementos diferentes de cero son iguales a uno (o "menos uno", si se cambia el signo de algunas ecuaciones), la sustitución regresiva implicará sumas y restas del total de los renglones y columnas. La multiplicación no se requiere. Por lo tanto, si el total de renglones y columnas originales es un entero, los valores de todas las variables básicas son también enteras. Esto es un resultado importante, el cual se resume en el siguiente corolario de triangularidad de bases.

Corolario. Si el total de los renglones y columnas de un problema de transporte es entero, entonces las variables básicas en cualquier solución básica son enteras.

#### 2.2.2 UN METODO SIMPLEX PARA EL P.T.: EL METODO DE MULTIPLICADORES.

La aplicación directa del algoritmo simplex, tal como se ha desarrollado en las cuatro subsecciones anteriores, se

vuelve demasiado grande para valores de tamaños razonables de  $m$  orígenes y  $n$  destinos.

Observando la estructura especial del P.T. y habiendo de mostrado que una solución básica tiene una estructura de matriz triangular, se desarrolla una versión computacionalmente eficiente del algoritmo simplex. Este método está basado en la Teoría de Dualidad.

#### 2.2.2.1 *Multiplicadores Simplex.*

Los multiplicadores simplex están asociados con las restricciones. En este caso, particionamos el vector de multiplicadores como  $\lambda = (\mu, \nu)$ . Aquí  $\mu_i$  representa los multiplicadores asociados al  $i$ -ésimo renglón y  $\nu_j$  representa los multiplicadores asociados a la  $j$ -ésima columna. Ya que una de las restricciones es redundante, debe asignarse un valor arbitrario a uno de los multiplicadores. Para simplificar la notación,  $\nu_n = 0$ .

Dada una base  $B$ , los multiplicadores simplex se encontrarán en la ecuación  $\lambda^t B = C^t B$ . Para determinar la forma explícita de estas ecuaciones, nos referiremos al sistema original de restricciones (5). Si  $x_{ij}$  es básica, entonces la correspondiente columna de  $A$  será incluida en  $B$ . Esta columna tiene dos elementos "+1": uno en la  $i$ -ésima posición y otro en la  $j$ -ésima. Esta columna genera los multiplicadores simplex de la ecuación  $\mu_i + \nu_j = c_{ij}$ , ya que  $\mu_i$  y  $\nu_j$  son las componentes co-

respondientes del vector de multiplicadores. Las ecuaciones de los multiplicadores simplex son:

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

para toda  $i, j$ , para los cuales  $x_{ij}$  es básica. La matriz de coeficientes de este sistema es la transpuesta de la matriz básica y, por tanto, es triangular. De este modo el sistema puede ser resuelto por sustitución regresiva. Esto es similar al procedimiento para encontrar los valores de las variables básicas; por consiguiente, tenemos otro corolario del teorema de triangularización de bases para los multiplicadores simplex.

COROLARIO. Si los costos  $c_{ij}$  de un problema de transporte son enteros, entonces los multiplicadores simplex asociados con cada base también son enteros.

Una vez que los multiplicadores simplex se conocen, los coeficientes de costo relativo para las variables no básicas pueden encontrarse usualmente como  $r_D^t = c_D^t - \lambda^t D$ . En este caso los coeficientes de costo relativo son

$$r_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j, \quad \begin{array}{l} j=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n \end{array}$$

Esta relación es válida para variables básicas con costo relativo cero.

Dada una base, el cálculo de los multiplicadores simplex es similar a calcular los valores de las variables básicas. Los cálculos son fácilmente ejecutados sobre un arreglo de la siguiente forma, donde los elementos en círculo corresponden a la posición de las variables básicas en la base.

$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	...	$c_{1n}$	$\mu_1$
$c_{21}$	$c_{22}$	$c_{23}$	...	$c_{2n}$	$\mu_2$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
$c_{m1}$	$c_{m2}$	$c_{m3}$	...	$c_{mn}$	$\mu_m$
$v_1$	$v_2$	$v_3$	...	$v_n$	

En este caso la parte principal del arreglo con los coeficientes  $c_{ij}$  permanece fijo y calculamos las columnas y renglones correspondientes a  $\mu$  ó  $v$ .

El procedimiento para calcular los multiplicadores simplex es:

Paso 1. Asignar un valor arbitrario a uno de los multiplicadores.

Paso 2. Buscar en los renglones y en las columnas del arreglo hasta encontrar un elemento  $c_{ij}$  en círculo tal que  $\mu_i$  ó  $v_j$  (no ambos) se haya determinado.

Paso 3. Calcular  $\mu_i$  o  $v_j$  de la ecuación  $c_{ij} = \mu_i - v_j$ . Si todos los multiplicadores se determinan, pare. En caso contrario regrese al *paso 1*.

La triangularización de la base garantiza que este procedimiento determina *todos* los multiplicadores simplex.

#### 2.2.2.2 Cambio de ciclo.

De acuerdo al procedimiento general del simplex, si una variable no básica tiene asociado un coeficiente de costo relativo negativo, entonces ésta variable es un candidato para entrar a la base. Como el valor de esta variable se incrementa gradualmente, los valores de las variables básicas cambiarán continuamente para mantener la factibilidad. Entonces, el valor de la nueva variable se incrementa, mientras que una de las variables básicas se hace cero.

Si el nuevo vector básico es  $d$ , entonces el cambio en las otras variables está dado por  $-B^{-1}d$ , donde  $B$  es la base.

TEOREMA. Sea  $B$  una base de  $A$  (ignorando un renglón) y sea  $d$  un vector columna. Entonces las componentes del vector  $y=B^{-1}d$  son 0, +1, ó -1.

Prueba. Sea  $y$  la solución de la ecuación  $By = d$ . Entonces  $y$  es la representación de  $d$  en términos de la base. Esta ecuación se puede resolver por la regla de Cramer, esto es,

$$y_k = \frac{\det B_k}{\det B}$$

donde  $B_k$  es la matriz obtenida al reemplazar la  $k$ -ésima columna de  $B$  por  $d$ .  $B$  y  $B_k$  son submatrices de la matriz de restricciones original  $A$ . La matriz  $B$  podemos ponerla en la forma triangular de todos los elementos iguales a  $+1$  en la diagonal. Por tanto, considerando el cambio del signo que resulta de intercambiar los renglones y las columnas,  $\det B = +1$  ó  $-1$ . Asimismo, podemos mostrar que  $\det B_k = 0, +1, \text{ ó } -1$ . Concluimos, pues, que cada componente de  $y$  es  $0, +1$  ó  $-1$ .

Lo que el anterior resultado implica es que cuando una nueva variable se añade a la solución en una unidad, las variables básicas cambiarán a  $+1, -1$  ó  $0$ . Si las nuevas variables tienen el valor de  $\theta$ , entonces las variables básicas cambian a  $+\theta, -\theta$  ó  $0$ , respectivamente. Por lo tanto, es necesario determinar los signos de cambio para cada variable básica.

La determinación de estos signos es una búsqueda sobre los renglones y las columnas. Operacionalmente, una asignación "+" a la celda de la variable que entra representa un cambio  $+\theta$ , que será determinada. Entonces  $+, -$  y  $0$  se asignan uno por uno a las celdas de algunas variables básicas, indicando cambios de  $+\theta, -\theta$  ó  $0$  para mantener una solución factible. Después de cada paso habrá una ecuación que determine el signo asignado a la variable básica. El resultado será una se

cuencia de "+" y "-" asignados a las celdas que forman un ciclo, primero la celda de la variable que entra. En esencia, el cambio es parte de un ciclo de redistribución del flujo en un sistema de transporte.

Una vez que la secuencia de +, - y 0 se determina, la nueva s.f.b. se encuentra colocando el nivel de cambio  $\theta$ , es decir, poniendo una de las variables básicas en cero. Debemos examinar las variables básicas para las cuales se ha asignado un signo menos; para estas, son los unos los que se decrementarán cuando la nueva variable entre. Entonces  $\theta$  es igual a la magnitud más pequeña de estas variables. Este valor se suma a todas las celdas que tengan asignado "+" y se resta de todas las celdas que tengan asignado "-". El resultado será la nueva s.f.b.

### 2.2.2.3 Algoritmo de Transporte.

Es posible reunir todo lo desarrollado hasta aquí en forma de un procedimiento *simplex revisado* para el P.T.

#### DESCRIPCION

- Paso 1. Calcular una s.f.b., usando la regla de la esquina noroeste, o algún otro método.
- Paso 2. Calcular los multiplicadores *simplex* y los coeficientes de costo relativo. Si todos los coeficientes de

costo relativo son negativos, paramos; la solución es óptima. En otro caso ir al paso 3.

Paso 3. Seleccionar una variable no básica correspondiente a un coeficiente de los costos negativos, para entrar a la base (generalmente el que tiene el coeficiente de costo más negativo). Calcular el ciclo de cambio, y sea  $\theta$  igual a la variable básica más pequeña con signo menos asignado. Ir al paso 2.

Ejemplo 6. Resolvamos completamente el problema del ejemplo 3. Los requerimientos y una s.f.b. obtenida por medio de la regla de la esquina noroeste son los que siguen:

10	20				30
	30	20	30		80
			10		10
			40	20	60
10	50	20	80	20	

(Los coeficientes encerrados en un círculo corresponden a las variables básicas). Los multiplicadores simplex calculados por la búsqueda de renglones y columnas son los siguientes:

				$\mu_i$		
	(3)	(4)	6	8	9	5
	2	(2)	(4)	(5)	5	3
	2	2	2	(3)	2	1
	3	3	2	(4)	2	2
$v_j$	-2	-1	1	(2)	0	

Los coeficientes de costo relativo se calculan restando

$\mu_i + v_j$  de  $C_{ij}$ :

			0	1	4
1					2
3	2		0		1
3	2		-1		

En este caso, resulta negativa sólo la celda (4,3); así, la variable  $x_{43}$  entrará a la base. Un signo "+" se escribe en la celda del arreglo original, y se determina el ciclo de 0, +1 y -1. (No es necesario continuar con la búsqueda una vez que el ciclo está determinado):

10	20				30
	30	$20^-$	$30^+$		80
			$10^0$		10
		+	$40^0$	$20^0$	60
10	50	20	80	20	

La variable básica con signo menos, más pequeña, es 20, que se suma o resta de los elementos del ciclo como indican los signos. La nueva s.f.b. es

10	20				30
	30		50		80
			10		10
		20	20	20	60
10	50	20	80	20	

Los nuevos multiplicadores simplex correspondientes a la nueva base se calculan y los costos del arreglo se revisan:

					$u_i$	
	3	4	6	8	9	5
	2	2	4	5	5	3
	2	2	2	3	2	1
	3	3	2	4	2	2
$v_j$	-2	-1	0	2	0	

Así pues, los coeficientes de costo relativo son:

		1	1	4
1		1		2
3	2	1		1
4	2			

En este caso todos los coeficientes de costo relativo son positivos, indicando con ello que la solución es óptima.

#### 2.2.2.4 Degeneración

Todo problema de programación lineal degenerado tiene variables básicas con valor cero. Esto puede ocurrir en el P.T. Si hay degeneración en el procedimiento simplex, podemos introducir el método estándar de perturbación. En este método a la variable básica con valor cero se le asigna el valor  $\epsilon$  y se continúa de manera usual. Si deja la base, entonces  $\epsilon$  puede eliminarse.

Ejemplo 7. Para ilustrar la degeneración, consideremos una modificación al ejemplo 6: en el cuarto renglón, 60 por 20, y en la cuarta columna, 80 a 40. Con estos cambios la s.f.b. por la regla de la esquina noroeste es degenerada. Se escribe una  $\epsilon$  en el lugar de la variable básica con valor cero del arreglo:

10	20				30
	30	20	30		80
			10		10
				20	20
10	50	20	40	20	

10	20				30
	30	$20^-$	$30^+$		80
			$10^0$		10
			$\epsilon^-$	$20^0$	20
10	50	20	40	20	

Los coeficientes de costo relativo son los mismos que en el ejemplo 6,  $x_{43}$  es el candidato a entrar en la base, y el cambio de ciclo es el mismo. En este caso, sin embargo, el cambio es sólo  $\epsilon$  y la variable  $x_{44}$  sale de la base.

10	20				30
	30	20	30		80
			10		10
				20	20
10	50	20	40	20	

Al igual que los multiplicadores simplex correspondientes a la nueva base, se calculan los coeficientes de costo relativo:

						$u_i$		
	(3)	(4)	6	8	9	6		
	2	(2)	(4)	(5)	5	4	1	
	2	2	2	(3)	2	2	3	2
	3	3	2	4	(2)	2	4	3
$v_j$	-3	-2	0	1	0			

Los nuevos coeficientes de costo relativo son positivos, indicando con ello que la nueva solución es óptima. La  $e$  puede eliminarse en la solución final.

### 2.2.3 EL PROBLEMA DE ASIGNACION (P.A.)

El problema de asignación es un caso particular del problema de transporte. El ejemplo clásico del P.A. es optimizar la asignación de  $n$  trabajadores a  $n$  empleos. Si el trabajador  $i$  es asignado al empleo  $j$ , hay un beneficio de  $c_{ij}$ . Cada

trabajador debe ser asignado a un empleo, y viceversa. Hay que maximizar el valor total de la asignación.

La formulación general del problema de asignación es encontrar  $x_{ij}$  ( $i=1, \dots, n$ ;  $j=1, \dots, n$ ) para:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n \\ & x_{ij} \geq 0, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \tag{10}$$

Se requiere que cada una de las variables tome el valor de cero o uno, en otro caso la solución no tiene sentido ya que no es posible hacer asignaciones fraccionarias.

**TEOREMA.** Una s.f.b. de P.A. tiene todas las  $x_{ij}$  igual a cero o uno.

**Prueba.** De acuerdo al corolario del Teorema de triangularización de bases, todas las variables básicas de cualquier solución básica son enteras. Las variables no pueden exceder a uno porque el lado derecho de las restricciones son uno. Por lo tanto, todas las variables deben ser cero, o bien uno. ■

Se sigue que hay al menos  $n$  variables básicas que tienen el valor de 1 porque debe haber un 1 en cada renglón (y en cada columna). En un P.T. de esta dimensión, una solución básica no degenerada podría tener  $2n-1$  variables positivas. De esta manera, las s.f.b. para el P.A. son altamente degeneradas, con  $n-1$  variables básicas iguales a cero.

El P.A. puede resolverse por el algoritmo de transporte, pero es poco tedioso. Un algoritmo más eficiente para el P.A. lo desarrollaron dos matemáticos húngaros. Dicho algoritmo fue generalizado a la forma del *Método Primal-Dual* para la P.L.

#### 2.2.4 EL PROBLEMA DE FLUJO A COSTO MINIMO (F.C.M.)

Esta sección considera el problema básico de *Flujo a Costo Mínimo* que generaliza el P.T. Su objetivo principal es desarrollar una interpretación algebraica de los conceptos de redes para el P.T.

Consideremos, pues, una red con  $n$  nodos y hagámosle corresponder a cada nodo  $i$  el número  $b_i$ , la oferta disponible\*. Supondremos también que la red está balanceada en el sentido que

$$\sum_{i=1}^n b_i = 0$$

Asociado a cada arco  $(i,j)$  hay un número  $C_{ij}$  que representa la unidad de costo por flujo para el arco. El problema de F.C.M. está determinado por los flujos  $x_{ij} \geq 0$  en cada arco de la red; así, el flujo neto en cada nodo  $i$  es  $b_i$ , mientras se minimiza el costo total. Matemáticamente, el problema se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{ij} C_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{k=1}^n x_{ki} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11) \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

---

\* Si  $b_i < 0$ , entonces hay un requerimiento demandado.

Como podemos observar, el P.T. es un caso particular del problema de F.C.M. en el que le corresponde una red con arcos que van sólo en la dirección del nodo de oferta al de demanda y que refleja precisamente esa restricción en los embarques. El problema más general permite configuraciones de redes más complicadas pues el flujo en el nodo oferta puede ir, antes de alcanzar su destino, a nodos intermedios.

#### 2.2.4.1 Estructura del problema.

El problema (11) es un P.P.L. La matriz de coeficientes A de las restricciones del flujo, es la *matriz de incidencia nodos-arcos* de la red. La columna correspondiente al arco (i, j) tiene entrada '+1' en el renglón i y '-1' en el renglón j. Ya que la suma de todos los renglones es el vector cero, la matriz A tiene rango menor o igual a  $n-1$ , y alguno de sus renglones puede eliminarse para obtener una matriz de coeficientes de rango igual al de la original. Mostremos enseguida haciendo uso de los conceptos, que el rango de la matriz de coeficientes es, en efecto,  $n-1$ , bajo un simple supuesto sobre la red. Para establecer el supuesto definamos la gráfica G de la red. Cada arco de la red está incluido en G, independientemente de su dirección\*. Debemos suponer que G es conexa, lo que necesariamente implica que contiene al menos un árbol de expansión.

---

\* La orientación de los arcos no se considera pues sólo nos interesan las propiedades lineales de A.

Mostremos, pues, que  $r(A) = n-1$ . Seleccionemos para ello un renglón que será removido de  $A$ , dando lugar a una nueva matriz,  $\bar{A}$ . Consideremos ahora el árbol de expansión  $T$  en la gráfica  $G$  que consistirá de  $n-1$  arcos sin ciclos. Sea  $A_T$  submatriz de  $A$  de orden  $(n-1) \times (n-1)$  que consiste de  $n-1$  columnas que corresponden a los arcos en el árbol. Al menos dos nodos del árbol deben tener un solo arco de  $T$ , y al menos uno de estos no es raíz. Lo anterior significa que el renglón correspondiente de  $A_T$  tiene una entrada diferente de cero. Si imaginamos que cruzamos el renglón y columna correspondientes a dicha entrada, esto correspondería, en términos del árbol, a eliminar el nodo y arco tocados. Los  $n-2$  arcos restantes de  $T$  forman un árbol para la red reducida de  $n-1$  nodos, incluyendo la raíz. El procedimiento se repite consecutivamente, eliminando todos los nodos, excepto la raíz, hasta que todos los renglones de  $A_T$  sean también eliminados.

Es claro que este procedimiento es equivalente al de la triangularización de la subsección 2.2.1.3. En otras palabras,  $A_T$  es una submatriz triangular no singular de  $(n-1) \times (n-1)$ . Por lo tanto,  $r(A) = n-1$ .

#### 2.2.4.2 Estructura de una Base.

Hemos visto que un árbol de expansión  $T$  de la gráfica  $G$  corresponde a una base pues define a la submatriz no

singular  $\bar{A}$ . Como ya sabemos, una base corresponde a escoger  $n-1$  columnas linealmente independientes de  $A$ . Ahora, cada columna corresponde, a su vez, a un arco de la red; así, la selección de una base es equivalente a seleccionar  $n-1$  arcos. Mostremos que esos arcos forman un árbol de expansión.

Para lo anterior, supongamos que la colección de arcos correspondientes a la base contiene un ciclo de  $m$  arcos. Cuando ellos están colocados en ciclo tienen la forma  $(n_1, n_2)$ ,  $(n_2, n_3)$ ,  $(n_3, n_4)$ , ...,  $(n_m, n_1)$ . En este orden algunos arcos pueden invertirse. Por otro lado, haciendo la combinación lineal de las columnas  $a_1, a_2, \dots, a_m$  de  $A$  notamos que los coeficientes de dicha combinación son positivos si la orientación del arco es la misma en el ciclo que en la gráfica original y es negativo si no lo es. La  $i$ -ésima columna de la combinación corresponde al arco  $(n_i, n_{i+1})$  del ciclo y tiene '+1' en el renglón que corresponde a  $n_i$  y '-1' en el renglón que corresponde a  $n_{i+1}$ . Entonces los '+1' y '-1' se cancelan en la combinación dando lugar al vector cero, y contradiciendo así, la supuesta independencia lineal de las columnas de  $A$ . Por lo tanto, queda establecido que la colección de arcos correspondientes a la base no contiene ciclos puesto que hay  $n-1$  arcos y  $n$  nodos. Se concluye entonces que los arcos forman un árbol de expansión.

Podemos decir ahora que existe una correspondencia uno-a-uno entre los arcos (columnas) en una base y el árbol de

expansión y que la base es triangular y, por tanto, unimodular. Las características del P.T. nos llevan al Problema General de Flujo a Costo Mínimo.

Dada una base, la solución básica que le corresponde se encuentra por sustitución regresiva, aprovechando la estructura triangular. La ecuación que tenga una variable básica indeterminada le corresponde un arco de flujo indeterminado  $x_{ij}$ . Dicha ecuación se resuelve para  $x_{ij}$ . En términos de redes lo anterior significa que se parte del final del árbol de expansión que corresponde a la base, esto es, se encuentra un nodo que toque sólo un arco del árbol. El flujo en ese arco lo determina la oferta (o demanda) del nodo. Con la sustitución regresiva se resuelven los flujos de los arcos del árbol de expansión, empezando por el último, eliminando arcos de manera sucesiva.

#### 2.2.4.3 El Método Simplex.

Para generalizar el problema de F.C.M. puede aplicarse el método simplex revisado. Se describirán enseguida los pasos del algoritmo, enfatizando su interpretación en redes.

PROPOSITO. Determinar el flujo a costo mínimo en una red.

#### DESCRIPCION

Paso 1. Empezar con una s.f.b.

Paso 2. Calcular los multiplicadores simplex  $x_i$  para cada nodo  $i$ . Resolver las ecuaciones

$$\lambda_i - \lambda_j = C_{ij}$$

para cada  $i, j$  correspondientes a un arco básico. Esto se sigue porque el arco  $(i, j)$  corresponde a una columna de  $A$ , con '+1' en el renglón  $i$  y '-1' en el renglón  $j$ . Las ecuaciones se resuelven colocando el valor de alguno de los multiplicadores. Se calcula la ecuación con un sólo multiplicador indeterminado y este, a su vez, determina otro, y así sucesivamente.

Los coeficientes de costo relativo para los arcos no básicos son:

$$r_{ij} = C_{ij} - (\lambda_i - \lambda_j)$$

Si todos los coeficientes de costo relativo son no negativos, parar: la solución es *óptima*. En otro caso, ir al paso 3.

Paso 3. Seleccionar un flujo no básico con coeficientes de costo relativo negativo para entrar a la base. Añadiendo este arco al árbol de expansión de la base anterior, tendremos un ciclo como lo muestra la figura 4.

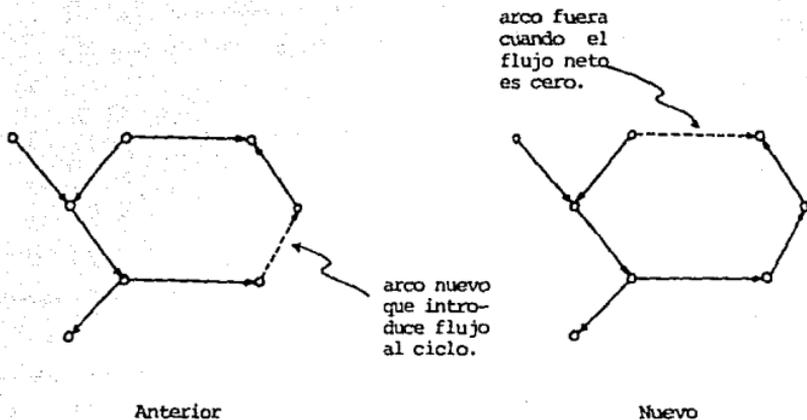


Figura 4. Base de un árbol de expansión.

Introducir un flujo positivo a este ciclo de  $\theta$ . Como  $\theta$  se incrementa, algún flujo anterior se decrementará. Así,  $\theta$  se escoge del valor más pequeño del flujo neto de uno de los arcos básicos iguales a cero. Esta variable sale de la base. El nuevo árbol de expansión se obtiene añadiendo un arco para formar un ciclo, y eliminando el otro arco del ciclo.

#### 2.2.4.4 Comentarios Adicionales

Es posible incorporar características adicionales como en otras aplicaciones del método simplex. Por ejemplo, si existe una s.f.b. puede buscarse usando *variables artificiales* en el procedimiento de la fase I. Esto puede realizarse introduciendo un nodo adicional con oferta cero y con un arco conexo

(dirigido al nodo con demanda y lejos del nodo con oferta). Se construye una solución básica inicial con el flujo del nodo artificial. Durante la fase I, el costo del arco artificial es igual a la unidad, y los demás iguales a cero. Si el costo total se reproduce a cero, se obtiene una s.f.b. para el problema original.

Una extensión importante sería el incluir límites superiores (*capacidades*) sobre las magnitudes de flujo tolerables en un arco.

#### 2.2.5 EL PROBLEMA DE FLUJO MAXIMO (P.M.)

En esta sección se discutirá un tipo de problemas de flujo diferente: aquel que determina el flujo máximo posible de un nodo fuente a uno nodo destino, bajo arcos con capacidad restringidas.

Antes que nada, se describe el problema de determinar una trayectoria de un nodo a otro en una gráfica dirigida.

##### 2.2.5.1 *Procedimiento del Arbol.*

En una gráfica dirigida, hay una ruta del nodo *i* al nodo *j* cuando *j* es alcanzable por *i*. El inspeccionar la 'alcanzabilidad' en una gráfica simple es una tarea fácil, no así en una gráfica compleja. En ellas se utiliza un proceso sistemático

que consiste en la búsqueda y etiquetación de nodos. Este procedimiento, llamado "de árbol", es base de muchos métodos que resuelven gráficas complejas y problemas de redes.

Así pues, supongamos que queremos determinar si existe alguna ruta del nodo 1 al nodo  $m$ . En cada paso del algoritmo ningún nodo se etiqueta, los nodos se etiquetan sin que haya búsqueda o se etiquetan habiendo búsqueda.

Paso 1. Etiquetar el nodo 1. Los demás nodos no se etiquetan.

Paso 2. Para algún nodo etiquetado sin búsqueda del nodo  $i$ , encontrar todos los nodos alcanzables a  $i$  sin que estos estén etiquetados. Etiquetar esos nodos con el número  $i$ .

Paso 3. Si el nodo  $m$  se etiqueta, parar: existe una ruta. Si hay nodos no etiquetados que no pueden etiquetarse, parar: no existe una ruta conexa. En otro caso, ir al paso 2.

La figura 5 ilustra, mediante un ejemplo, el Procedimiento (de búsqueda) del Árbol. En ella podemos observar que se encuentra una de las rutas del nodo 1 al nodo 10. Los nodos se han etiquetado y la búsqueda se ha realizado en el orden 1, 2, 3, 5, 6, 8, 4, 7, 9, 10. Las etiquetas se indican próximas a los nodos. Los arcos que se usaron en el proceso de búsqueda se indican con

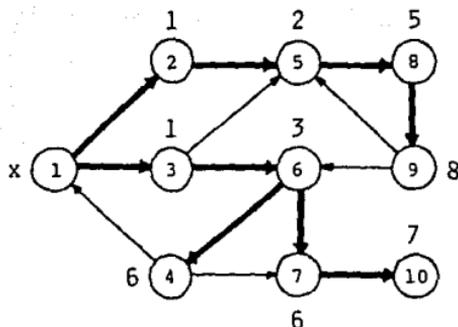


Figura 5. El procedimiento de búsqueda

flechas más gruesas. Notemos que la colección de nodos y arcos seleccionada por el proceso, considerada como una gráfica no dirigida, forma un árbol (sin ciclos, por supuesto).

Si estamos interesados en determinar solamente si existe alguna ruta conexa y no en encontrarla, las etiquetas necesitan tener una marca sencilla en el nodo índice. Sin embargo, si los nodos índices se usan como etiquetas, entonces después de terminar el algoritmo la ruta conexa actual puede encontrarse trazando hacia atrás el nodo  $m$ , siguiendo las etiquetas. En la figura 5 ilustrada arriba, comenzamos en el nodo 10 y nos movemos al nodo 7, después al 6, al 3 y al 1. La ruta sigue la inversa de esta secuencia.

Se prueba con facilidad que el algoritmo resuelve la existencia de una ruta conexa. En cada paso del proceso, se etiqueta un nodo nuevo, se etiqueta el nodo  $m$  y el proceso termina, o bien, es imposible continuar. Es claro que dicho proceso puede continuar para al menos  $n-1$  pasos, donde  $n$  es el número de nodos en la gráfica. Supongamos que en algún paso es imposible continuar. Sea  $S$  el conjunto de los nodos etiquetados en este paso y sea  $\bar{S}$  el conjunto de los nodos no etiquetados. De manera clara el nodo  $l$  está en  $S$  y el nodo  $m$  en  $\bar{S}$ . Si hubiese una ruta conexa entre los nodos  $l$  y  $m$ , debería haber un arco, en esa ruta, de un nodo  $k \in S$  a un nodo en  $\bar{S}$ . Esto podría implicar, sin embargo, que el nodo  $k$  no se buscó, lo cual es una contradicción. Si el algoritmo continúa hasta alcanzar el nodo  $m$ , entonces puede construirse una ruta conexa hacia atrás.

#### 2.2.5.2 Capacidad en Redes.

En algunas aplicaciones en redes es común suponer un límite superior para el flujo tolerable en los arcos. Esto motiva los conceptos de red con capacidad y de capacidad de un arco.

Definición. A una red se le llama red con capacidad si a algunos de sus arcos se les asignan capacidades no negativas, definiéndose el flujo máximo tolerable en esos arcos. La capacidad del arco  $(i, j)$  se denota  $k_{ij}$  y se indica en la gráfica por

$k_{ij}$  adyacente al arco en cuestión.

En esta sección supondremos que todas las capacidades son enteras no negativas. La figura 6 muestra una red con capacidad. En dicha red, la capacidad del nodo 1 al nodo 2 es 12, mientras que del nodo 2 al nodo 1 es 6.

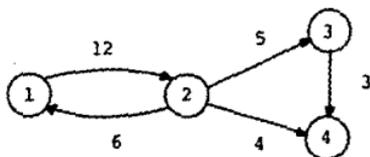


Figura 6. Red con capacidad

### 2.2.5.3 El problema de F.M.

Consideremos una red con capacidad en la que los nodos fuente y sumidero se distinguen fácilmente: son los nodos 1 y  $m$ , respectivamente. Los demás nodos deben satisfacer los requerimientos, es decir, el flujo neto en ellos debe ser igual a cero. Sin embargo, el nodo fuente debe tener una salida de flujo neto y el nodo sumidero una entrada de flujo neto: dichas salida y entrada deben ser iguales como consecuencia de la conservación de los otros nodos. A un conjunto de arcos con flujo que satisfacen estas condiciones se le llama flujo en la red con valor  $f$ . El problema de F.M. está determinado por el flujo máximo que puede pasar en una red y mate-

máticamente lo expresamos como:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad f \\
 & \text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n x_{1j} - \sum_{j=1}^n -f = 0 \\
 & \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1}^n j_i = 0, \quad i \neq 1, m \quad (12) \\
 & \quad \sum_{j=1}^n x_{mj} - \sum_{j=1}^n x_{jm} + f = 0 \\
 & \quad 0 \leq x_{ij} \leq k_{ij}, \quad \forall i, j
 \end{aligned}$$

donde los pares  $i, j$  corresponden a los arcos permitidos.

El problema puede reescribirse en forma más compacta, en términos de la matriz de incidencia nodos-arcos. Sean  $A$  la matriz de incidencia,  $x$  el vector con flujos  $x_{ij}$  y  $e$  un vector con dimensión igual al número de nodos, que tiene '+1' en la componente del nodo 1, '-1' en la componente del nodo  $m$  y '0' en las demás componentes. Así, el problema de F.M. queda expresado como

$$\begin{aligned}
 & \max \quad f \\
 & \text{s.a.} \quad Ax - fe = 0 \quad (13) \\
 & \quad 0 \leq x \leq k
 \end{aligned}$$

La matriz de coeficientes es, ahora, igual a la matriz de incidencia nodos-arcos con una columna adicional para la

variable de flujo  $f$ . Alguna base de esta matriz de coeficientes deberá ser triangular. El método simplex podrá emplearse entonces. Sin embargo, en lugar de utilizar dicho método tal cual, podemos utilizar un algoritmo más eficiente basado en el procedimiento del árbol.

La estrategia básica de ese algoritmo sería muy simple. Admitamos primero que es posible enviar un flujo diferente de cero del nodo  $l$  al nodo  $m$ , sólo si el nodo  $m$  es alcanzable al nodo  $l$ . El procedimiento del árbol puede usarse para determinar si  $m$  es alcanzable, y si lo es, el algoritmo producirá una ruta de  $l$  a  $m$ . Al examinar los arcos de esta ruta podremos determinar su capacidad entre el nodo  $l$  y el  $m$ , lo cual nos dará un flujo inicial positivo (y entero).

Posteriormente habrá de considerarse la naturaleza de la red en este punto en términos del flujo adicional que deberá asignarse. Si en el arco  $(i, j)$  hay un flujo  $x_{ij}$ , sin capacidad se reduce a  $k_{ij} - x_{ij}$  ya que este es el flujo máximo adicional que puede asignarse a él. Por otra parte, la capacidad inversa en el arco  $(i, j)$  se incrementa a  $k_{ij} + x_{ij}$  puesto que un incremento pequeño hacia atrás del flujo se realiza actualmente como una reducción en el flujo enviado a través del arco. Una vez que se han llevado a cabo los cambios anteriores, el procedimiento del árbol puede usarse de nuevo para encontrar una ruta del nodo  $l$  al nodo  $m$  con el flujo adicional asig

nado, quedando una ruta aumentada. Por cierto, si  $m$  no es alcanzable al nodo  $l$ , no puede haber flujo adicional asignado, completándose así el procedimiento.

Como lo hemos señalado, el método se basa en las aplicaciones repetidas del procedimiento del árbol, el cual se implementa por etiquetas y búsquedas. En vez de reexaminar los arcos después de la ruta encontrada, se determina, durante la búsqueda inicial, el arco con capacidad mínima de la ruta aumentada, llevando consigo más información en las etiquetas del algoritmo del árbol. En efecto, la etiqueta del nodo  $i$  tiene la forma  $\{k, C_i\}$ , donde  $k$  denota un precursor del nodo y  $C_i$  es el flujo máximo que debe enviarse del nodo fuente al nodo  $i$  a través de la ruta producida con las etiquetas y la búsqueda. El procedimiento es el que sigue:

ALGORITMO. *Flujo Máximo*

PROPOSITO. *Determinar el flujo máximo en una red con nodo fuente "1" y nodo sumidero "n".*

#### DESCRIPCION

Paso 0. Hacer  $x_{ij} = 0$  ( $\forall_{i,j}$ ) y  $f = 0$

Paso 1. Etiquetar el nodo  $l$  con  $(-, \infty)$ . Los demás nodos no se etiquetan.

Paso 2. Seleccionar alguna etiqueta del nodo  $i$  para la búsqueda:  $(k, C_i)$ . Para todos los nodos  $j$  no etiquetados tales que  $(i, j)$  es un arco con  $x_{ij} < k_{ij}$ , asignar la etiqueta  $(i, C_j)$ , donde  $C_j = \min \{C_i, k_{ij} - x_{ij}\}$ . Para todos los nodos  $j$  no etiquetados tales que  $(j, i)$  es un arco con  $x_{ij} > 0$ , asignar la etiqueta  $(i, C_j)$ , donde  $C_j = \min \{C_i, x_{ij}\}$ .

Paso 3. Repetir el paso 2 hasta que se etiquete el nodo  $m$  o hasta que no se puedan asignar más etiquetas. En tal caso la solución es *óptima*.

Paso 4. (Aumento). Si se etiqueta el nodo  $m$   $\{(i, C_m)\}$ , entonces incrementamos  $f$  y el flujo sobre el arco  $(i, m)$  estará dado por  $C_m$ . Continuar hacia atrás en la ruta aumentada por los nodos, incrementando el flujo, en cada arco de la ruta, en  $C_m$ . Regresar al paso 1.

La validación del algoritmo debiera ser evidente.

Sin embargo, la prueba completa se considera hasta después de ver el Teorema del Flujo Máximo-Cortadura Mínima\*. No obstante, establecemos enseguida la convergencia del algoritmo.

Proposición. El algoritmo del F.M. converge en un número finito de iteraciones.

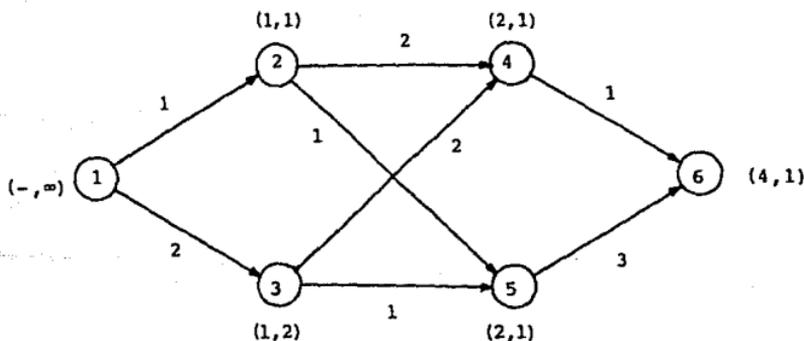
Prueba. Recordemos, antes que nada, que todas las capacidades

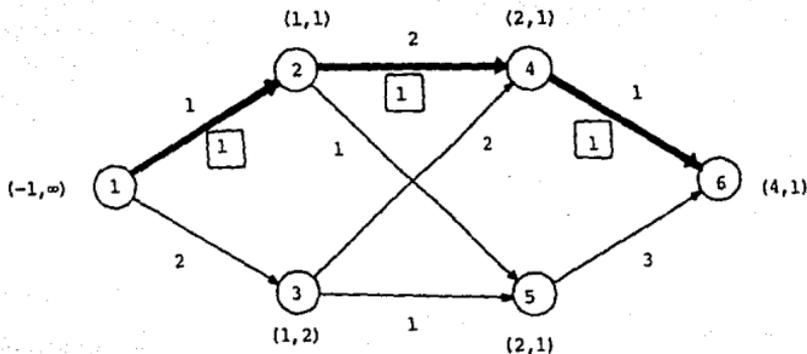
---

\* Ver la demostración en el apéndice D.

son enteras y no negativas. Además, al menos por la suma de las capacidades, el flujo está acotado. Así pues, comenzando con flujo cero, la capacidad mínima disponible en toda la fase será un entero y, según el flujo, se aumentará -en todo paso- por un entero. Este proceso debe terminar en un número finito de pasos puesto que el flujo es acotado. ■

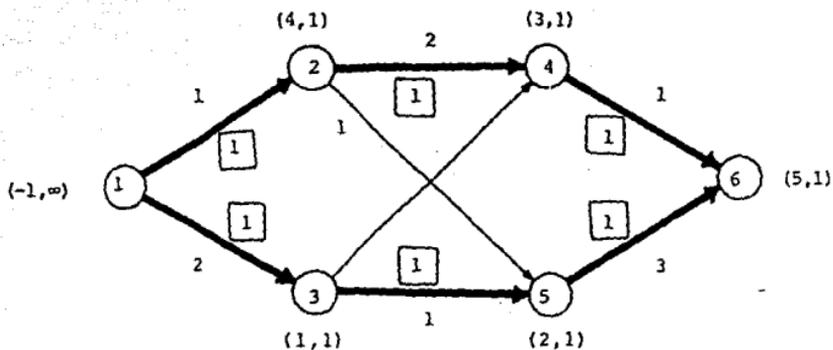
Ejemplo 8. En la figura que sigue se ilustra el procedimiento. El nodo 1 es el fuente y el 6 el sumidero. Las capacidades se muestran sobre los arcos y también la etiqueta inicial que se obtiene por medio procedimiento. En este caso, el nodo sumidero se etiqueta, indicando un flujo de una unidad.



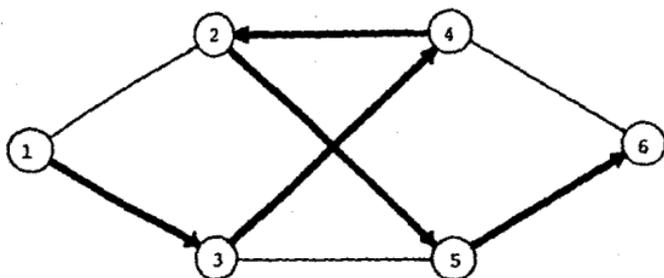


Los números en los cuadros de la figura anterior indican los flujos totales en esos arcos. Las nuevas etiquetas se encuentran y añaden. Notemos que el nodo 2 no puede etiquetarse a partir del nodo 1 puesto que no existe capacidad en esa dirección. El nodo 2 puede etiquetarse a partir del nodo 4 ya que el flujo existe, dando una capacidad inversa de una unidad. Volvemos a etiquetar el nodo sumidero y puede construirse una unidad más de flujo.

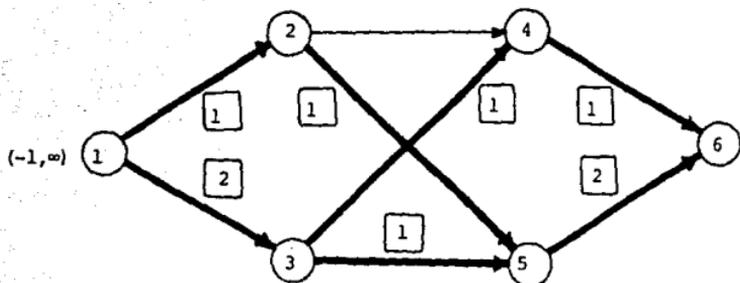
Ahora la ruta aumentada es:



A esta red se le añade una nueva etiqueta. Se etiqueta el nodo sumidero y una unidad adicional de flujo puede enviarse del nodo fuente al nodo sumidero. La ruta de esta unidad es:



Notemos que se incluye un flujo del nodo 4 al nodo 2; sin embargo, un flujo igual no se permitió en esa dirección en la red original. Este flujo se permite porque ya hay un flujo en la dirección opuesta. El flujo total es:



Los niveles de flujo aparecen en los cuadritos. Este es el flujo máximo, ya que puede etiquetarse sólo el nodo fuente. Para obtener algunos resultados adicionales a partir del concepto de *cortadura en una red*, ver el Apéndice E.

#### 2.2.5.4 Dualidad.

El "Teorema de Flujo Máximo-Cortadura Mínima" sugiere una conexión con el *Teorema de Dualidad*. En efecto, el problema de F.M. es el P.P.L. (13), cuyo P.P.L. dual es:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & w^t k \\
 \text{s.a.} \quad & \mu^t A = w^t \\
 & \mu^t e = 1 \\
 & w \geq 0
 \end{aligned} \tag{14}$$

Reescribiendo el dual con detalle, tenemos:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{ij} w_{ij} k_{ij} \\ \text{s.a.} \quad & \mu_i - \mu_j = w_{ij} \\ & \mu_1 - \mu_m = 1 \\ & w_{ij} \geq 0 \end{aligned} \tag{15}$$

El par  $i, j$  se incluye sólo si  $(i, j)$  es un arco en la red. Una solución factible del problema dual puede encontrarse en términos de un conjunto cortadura  $(S, \bar{S})$ . En particular, es fácil ver que

$$\begin{aligned} \mu_i &= \begin{cases} 1, & \text{si } i \in S \\ 0, & \text{si } i \in \bar{S} \end{cases} \\ w_{ij} &= \begin{cases} 1, & \text{si } (i, j) \in (S, \bar{S}) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

es una solución factible. El valor del P.P.L. dual que corresponde a esta solución es la capacidad de cortadura. Si tomamos al conjunto cortadura en lugar del determinado por el procedimiento de etiquetas del algoritmo de flujo máximo, podremos ver que la optimalidad se verifica por la condición de holgura complementaria. El valor mínimo del dual coincide con la capacidad de la cortadura mínima.

## 2.2.6 EL PROBLEMA DE LA RUTA MAS CORTA (R.C.)

Supóngase que tenemos una red  $G$  con  $m$  nodos,  $n$  arcos y, asociado a cada arco  $(i,j)$  en  $G$ , un costo  $C_{ij}$ . El problema de la ruta más corta se expresa como "encontrar la ruta (menos costosa) más corta del nodo 1 al nodo  $m$  en  $G$ ". El costo de la ruta es la suma de los costos sobre los arcos en la ruta.

Podemos pensar en el problema de la R.C. dentro del contexto del flujo en una red si se diseña una red en la que se desee enviar una sola unidad de flujo del nodo 1 al nodo  $m$  a un costo mínimo. Luego,  $b_1 = 1$ ,  $b_m = -1$  y  $b_i = 0$  para  $i \neq 1$  ó  $m$ . La formulación matemática vendría a ser, pues,

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m C_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{j=1}^m x_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 1 \\ 0, & \text{si } i = 1 \text{ ó } m \\ -1, & \text{si } i = m \end{cases} \quad (16) \\ & x_{ij} = 0 \text{ ó } 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

en donde las sumas y los requerimientos 0 y -1 se toman sobre arcos existentes en  $G$ . Las restricciones  $x_{ij} = 0 \text{ ó } 1$  indican que cada arco está en la ruta, o no está.

Ignorando las restricciones 0 y -1 se encuentran de nuevo las ecuaciones usuales de conservación de flujo. La matriz de

incidencia nodos-arcos asociada a las ecuaciones de conservación de flujo es totalmente unimodular. Por lo tanto, si reemplazamos  $x_{ij} = 0$  ó  $1$  por  $x_{ij} \geq 0$ , y si existe una solución óptima, entonces del método simplex se obtendría aún una solución óptima entera en la que el valor de cada variable es 'cero' o 'uno'. Así pues, se puede resolver como un P.P.L.:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^m x_{ij} = \sum_{k=1}^m x_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 1 \\ 0, & \text{si } i = 1 \text{ ó } m \\ -1, & \text{si } i = m \end{cases} \quad (17) \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Debido a que el problema de la R.C. es un problema de F.M. en una red, podemos resolverlo por alguno de los métodos descritos en la sección anterior.

Consideremos el dual del problema de la R.C.:

$$\begin{aligned} \max \quad & w_1 - w_m \\ \text{s.a.} \quad & w_1 - w_j \leq c_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (18) \\ & w_i \text{ no restringido } i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Es conveniente hacer la sustitución  $w'_i = w_i$ . Como veremos en la solución óptima,  $w'_i - w'_j$  es la distancia más corta del nodo

l al nodo i. Por lo tanto, podemos obtener la distancia más corta del nodo l a todos los nodos de la red.

Existen varios métodos para encontrar la ruta más corta: algunos consideran sólo costos no negativos, otros costos negativos y otros costos arbitrarios. Veremos a continuación un algoritmo que considera costos arbitrarios utilizando etiquetas.

Supóngase para ello que con cada nodo j se asocia una etiqueta  $(i, w_j^i)$ , donde la primera componente i da el nodo inmediato anterior al nodo j en la ruta y la segunda componente,  $w_j^i$ , indica el costo (longitud) de la "mejor" ruta actual del nodo l al nodo j. Sea  $c_0 = \sum_{c_{ij} < 0} c_{ij}$ . El algoritmo de etiquetado resulta como sigue:

ALGORITMO. Ruta más corta

PROPOSITO. Obtener la ruta más corta en una red que admite cualquier costo.

#### DESCRIPCION

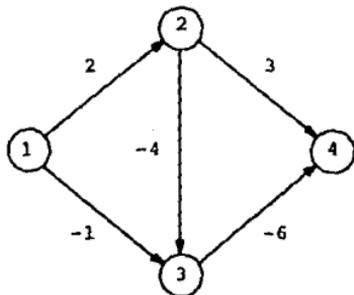
Paso 1. Etiquetar el nodo l como  $(-, 0)$  y el nodo i como  $(-, \infty)$ , para  $i=2, \dots, m$ .

Paso 2. Si  $w_j^i \leq w_i^i + c_{ij}$  para  $i, j=1, \dots, m$  terminar; se ha obtenido la solución óptima. En caso contrario, se selecciona  $(p, q)$  tal que  $w_q^i > w_p^i + c_{pq}$  y el nodo q se

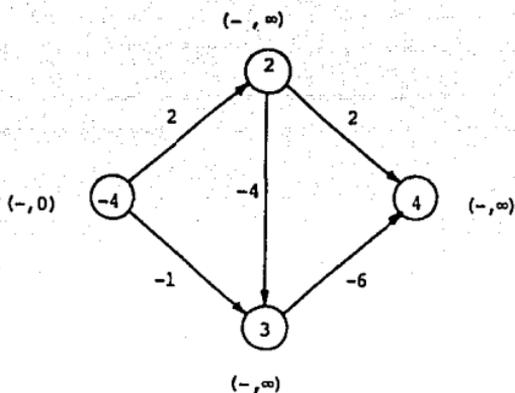
hace  $(P, w'_q = w'_p + c_{pq})$ . Si  $w'_q < c_0$ , terminar; hay un circuito negativo en  $G$ . En caso contrario, se repite el paso 2.

Para identificar los arcos en la ruta más corta, se empieza en el nodo  $m$ . Si la segunda componente  $w'_m$  en el nodo  $m$  es  $\infty$ , entonces no existe una ruta del nodo 1 al  $m$  en  $G$ . En caso contrario, la primera componente en el nodo  $m$ , por ejemplo  $k$ , da el nodo anterior en la ruta más corta. Se busca hacia atrás el nodo  $k$  y se repite el proceso hasta alcanzar el nodo 1.

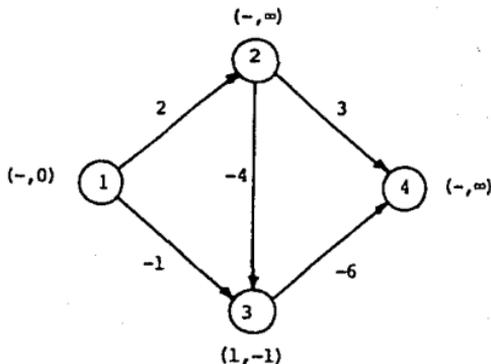
Ejemplo 9. Considere la red de la siguiente figura, en la que se desea encontrar la ruta más corta del nodo 1 al 4.



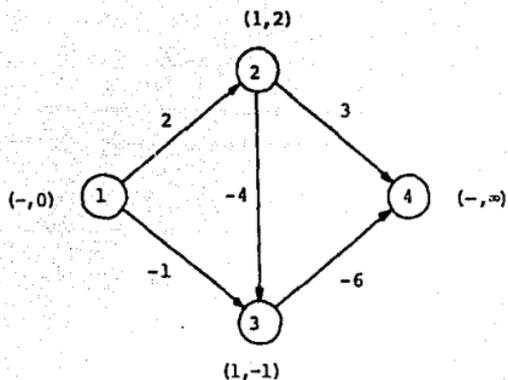
No hay un orden requerido en el que se deban considerar los arcos para que el algoritmo converja. Primero empezamos con  $c_0 = -1 - 4 - 6 = -11$ . Etiquetando los nodos tenemos:



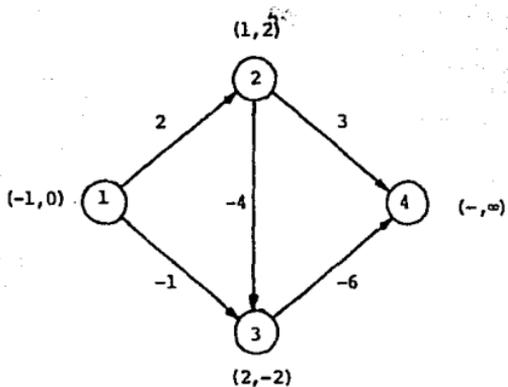
seleccionamos el arco  $(1,3)$  tal que  $w_3^i > w_1^i + c_{13}$ ,  $\infty > -1$ , por lo tanto la etiqueta del nodo 3 queda  $(1,-1)$ :



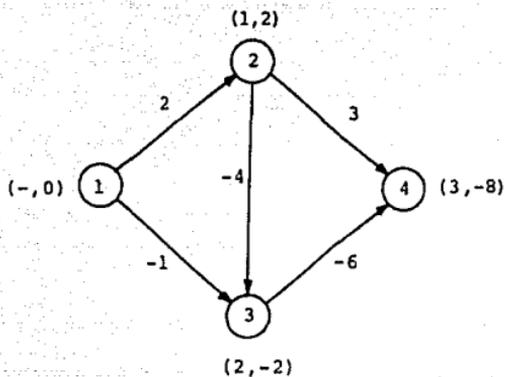
Seleccionamos el arco  $(1,2)$  tal que  $w_2^i > w_1^i + c_{12}$ ,  $\infty > 2$ , por lo tanto la etiqueta del nodo 2 es  $(1,2)$ :



Seleccionamos el arco (2,3) tal que  $w_3^1 > w_2^1 + c_{23}$ ,  $-1 > -2$ , por lo tanto la etiqueta del nodo 3 es (2, -2):



seleccionamos el arco (3,4) tal que  $w_4^1 > w_3^1 + c_{34}$ ,  $\infty > -8$ , por lo tanto la etiqueta del nodo 4 es (3, -8):



Todo  $w_j^i \leq w_j + c_{ij}$ , verificando tenemos que:

$$-2 = w_2^1 \leq w_1 + c_{11} = 2$$

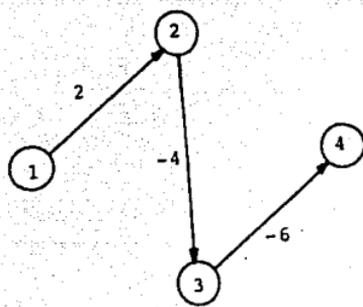
$$-2 = w_3^1 \leq w_1 + c_{13} = -1$$

$$-2 = w_3^2 \leq w_2 + c_{23} = -2$$

$$-8 = w_4^2 \leq w_2 + c_{24} = 6$$

$$-8 = w_4^3 \leq w_3 + c_{34} = -8$$

Por lo tanto es óptimo, lo que implica que existe una ruta más corta con longitud  $-8$ , la ruta es  $(1,2)$ ,  $(2,3)$  y  $(3,4)$  siguiendo la trayectoria hacia atrás, es decir, a partir del nodo final, en este caso el nodo 4.



Ni una máquina para ahorrar el trabajo,  
Ni un descubrimiento he dejado,  
Ni podré legar una suma para fundar un  
hospital o una biblioteca,

Ni la memoria de una hazaña por América,  
Ni un éxito literario o intelectual, ni  
un libro para los anaqueles,

Sólo unas pocas melodías quedarán  
vibrando en el aire,

Para camaradas y amantes.

Walt Whitman

PARTE DOS

## capítulo 3

## CAPITULO 3

### MÉTODOS PRIMALES DUALES; ANÁLISIS DE REDES DE FLUJO

(Primera parte)

El Algoritmo Primal-Dual es un algoritmo general para resolver P.P.L. Se desarrolló a partir de un algoritmo menos general utilizado en ciertos problemas de redes y ha proporcionado las ideas claves para generar algoritmos especializados en problemas de redes.

La idea central del Método Primal-Dual es la siguiente: se parte de una solución factible del problema dual (que se propone como aproximación a la solución óptima) y se genera después un, así llamado, problema primal restringido cuya solución proporciona uno de los siguientes resultados:

- i) La solución óptima del problema primal
- ii) Una solución del dual del primal restringido, que mejora la solución factible del problema dual original.

En el primer caso el proceso termina, mientras que en el segundo caso se mejora la solución factible del problema dual, y el proceso se repite.

Un aspecto importante del proceso efectuado por el método primal-dual es que termina en un número finito de iteraciones. El proceso de terminación equivale a que las soluciones primal y dual sean factibles y satisfagan las condiciones de holgura complementaria de la programación lineal. Un esquema del proceso primal-dual se da en la figura 1.

Se considera al algoritmo primal-dual en sí mismo como un algoritmo dual, puesto que se parte de una  $\lambda$  factible en el problema dual y se mantiene siempre la factibilidad dual.

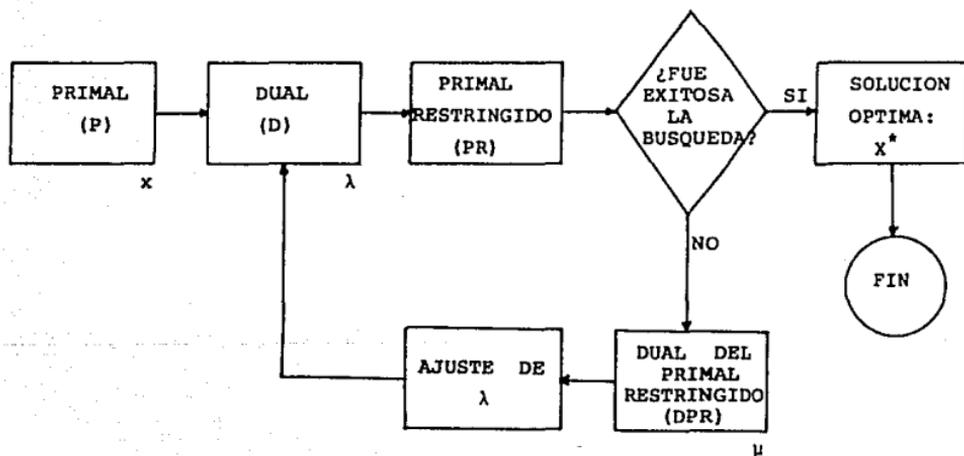


FIGURA 1.

En caso de que  $c \geq 0$ , se puede tomar  $\lambda = 0$  como solución inicial dual factible. Cuando  $c$  es no negativa, sin embargo, puede encontrarse una  $\lambda$  factible.

En este capítulo se lleva a cabo la especialización del método primal-dual para los problemas de transporte, de asignación, de ruta más corta y de flujo máximo.

### 3.1 EL PROBLEMA DE TRANSPORTE.

Considere el problema de transporte en la forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i=1, \dots, m \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j=1, \dots, n \\ & x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \end{aligned} \quad (1)$$

donde suponemos que  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$  y  $c_{ij} \geq 0$ . También suponemos que las  $a_i$  y  $b_j$  son enteros no negativos. El correspondiente problema dual es:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^m u_i a_i + \sum_{j=1}^n v_j b_j \\ \text{s.a.} \quad & u_i + v_j \leq c_{ij} \end{aligned} \quad (2)$$

El algoritmo primal-dual se inicia con una solución factible para el dual (toda  $u_i = 0$  y  $v_j = 0$  son adecuadas). De acuerdo a este algoritmo, correspondiente a la solución dual factible se dice que el par  $(i, j)$  pertenece al conjunto admisible S si la  $(i, j)$ -ésima restricción dual se satisface con

igualdad, esto es, el par  $(i, j)$  es admisible si  $v_i - v_j = c_{ij}$ . En este caso el problema primal restringido se define en términos de los índices admisibles. De manera específica, la definición general del problema es:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i=1}^m y_i + \sum_{j=1}^n z_j \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i = a_i, \quad i=1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^m x_{ij} + z_j = b_j, \quad j=1, \dots, n \\
 & x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \\
 & y_i \geq 0 \quad \forall i \\
 & z_j \geq 0 \quad \forall j \\
 & x_{ij} = 0 \quad \text{para } i, j \notin S
 \end{aligned} \tag{3}$$

Debido a la condición de balance se tiene que  $\sum_{i=1}^m y_i = \sum_{j=1}^n z_j$  en alguna solución. Alternativamente, el problema puede ponerse en forma de un problema de flujo máximo. La función objetivo la reescribiremos como:

$$\sum_{i=1}^m (a_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}) + \sum_{j=1}^n (b_j - \sum_{i=1}^m x_{ij})$$

de la cual se ve que un problema equivalente es maximizar  $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij}$  sujeto a las restricciones en (3). Este es un problema de flujo máximo sobre la red siguiente:

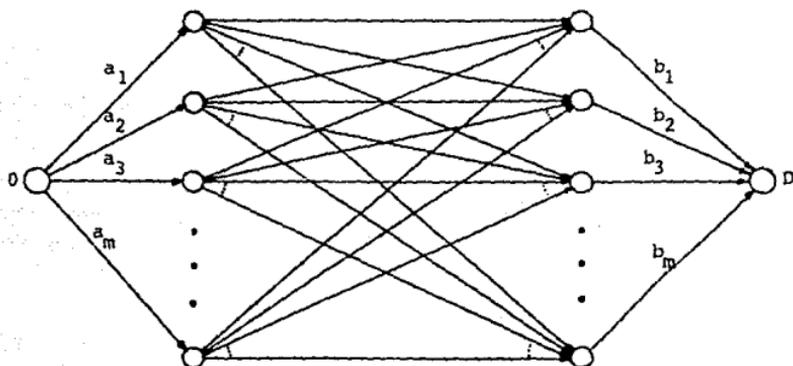


Figura 2. El problema de transporte en una red de flujo.

En la figura 2 el flujo va del nodo fuente 0 al nodo sumidero D. Las  $a_i$ 's y las  $b_j$ 's indican las capacidades de los arcos origen y terminales, respectivamente. Los arcos centrales tienen una capacidad infinita de envío (la cual puede ser representada por un número entero muy grande), pero tal arco se presenta en la red solo si corresponde a un par  $(i, j)$ , admisible. Si  $x_{ij}$  denota el flujo en el arco  $(i, j)$ -ésimo, entonces  $\sum_{j=1}^n x_{ij}$  es el flujo total que deja el nodo i.

Este también es el flujo de entrada del nodo  $i$  a la izquierda y este flujo no debe ser más grande que  $a_i$ . El flujo total que deja el nodo 0 es  $f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}$ . El problema primal restringido maximiza este flujo. El problema puede ser resuelto por el algoritmo de flujo máximo. Si el resultado es factible para el problema original, también es óptimo. De otro modo, se hace necesario cambiar las variables duales y empezar de nueva cuenta.

La solución del problema dual asociada al problema primal restringido (3) determina la manera en que la solución dual inicial debe cambiarse. Dicho dual es, específicamente, el problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_i a_i r_i + \sum_j b_j s_j \\ \text{s.a.} \quad & r_i + s_j \leq 0 \quad i, j \in S \\ & r_i \leq 1 \\ & s_j \leq 1 \end{aligned} \tag{4}$$

La solución para este dual puede determinarse directamente de la etiqueta final del algoritmo de flujo máximo. Específicamente,

$$r_i = \begin{cases} +1 & \text{si el nodo } i \text{ está etiquetado} \\ -1 & \text{si el nodo } i \text{ no está etiquetado} \end{cases}$$

(5)

$$s_j = \begin{cases} -1 & \text{si el nodo } j \text{ está etiquetado} \\ +1 & \text{si el nodo } j \text{ no está etiquetado} \end{cases}$$

De acuerdo con el algoritmo general primal-dual, la solución dual factible original es actualizada al añadir un múltiplo de la solución dual restringida. El múltiplo se determina introduciendo uno o más arcos admisibles. Para encontrar el múltiplo apropiado, sean I y J los conjuntos de etiquetas para los nodos de oferta y demanda respectivamente. Entonces definimos:

$$h = \min_{\substack{i \in I \\ j \notin J}} (c_{ij} - \mu_i - v_j) > 0 \quad (6)$$

De acuerdo al método general primal-dual,  $h/2$  veces la solución (5) debería sumarse a la solución factible original del dual. Sin embargo, primero sumamos  $h/2$  a todas las  $\mu_i$ 's y sustraemos  $h/2$  de todas las  $v_j$ 's (una operación que no altera la factibilidad o la admisibilidad del arco). La forma actualizada toma la forma:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_i &= \mu_i + h, & i \in I \\ \hat{\mu}_i &= \mu_i, & i \notin I \\ \hat{v}_j &= v_j - h, & j \in J \\ \hat{v}_j &= v_j, & j \notin J \end{aligned} \quad (7)$$

Esta es la fórmula convencional usada para el problema de transporte. El algoritmo continua buscando los arcos admisibles y el flujo máximo.

### 3.1.1 FORMA DEL ARREGLO

Todos los cálculos requeridos para el algoritmo primal-dual pueden realizarse sobre arreglos solución y coeficientes de costos como en el método simplex para el problema de transporte. No es necesario construir la red explícitamente.

### 3.1.2 ALGORITMO PRIMAL-DUAL

**PROPOSITO.** Resolver el P.T. cuando se tiene una solución dual factible.

#### DESCRIPCION

Paso 1. (Inicialización). Primero, del arreglo de coeficientes encontrar una solución dual factible. Un procedimiento común es que  $u_i = \min c_{ij}$  para el renglón  $i$  y  $v_j = \min (c_{ij} - u_i)$  para la columna  $j$ . Esto garantiza que  $c_{ij} = u_i + v_j$ , se obtenga al menos una vez en cada renglón y columna. Enseguida establecemos un tableau solución en donde los requerimientos  $a_i$  y  $b_j$  están en una columna y renglón extras, respectivamente. En las celdas con círculo se da la igualdad  $c_{ij} = u_i + v_j$  para las  $i, j$  correspondientes. El tableau es el siguiente



la etiqueta  $(s, c_i)$ , donde  $c_i$  es el excedente en el renglón.

b) En cada renglón etiquetado  $i$ , vea las celdas con círculo. Si tal celda ocurre en la columna  $j$ , etiquete la columna con  $(i, c_j)$  donde  $c_j = c_i$ . Si una columna con excedente es etiquetada, una trayectoria existe, ir al paso (e).

c) En cada columna etiquetada  $j$ , vea las celdas con círculo para las cuales  $x_{ij} > 0$ . Si tal celda se encuentra y el renglón  $i$  no ha sido etiquetado, etiquete el renglón con  $(j, c_i)$ , donde  $c_i = \min(c_j, x_{ij})$ .

d) Repita el paso (b) y (c) hasta encontrar la trayectoria o demostrar que no es posible etiquetar más renglones o columnas. En el primer caso ir al paso (e). En el segundo caso pare, el flujo es máximo.

(e) Suponga que la trayectoria existe en la columna  $k$ . Sea  $f$  el mínimo de  $c_k$  y el excedente en la columna  $k$ . Entonces, si el excedente en la columna  $k$  es  $(\mu, c_k)$ , modifique el flujo a  $\hat{x}_{uk} = x_{uk} + f$ . Si la etiqueta es el renglón  $\mu$  es  $(j, c_u)$ , sea  $\hat{x}_{uj} = x_{uj} - f$ . Continúe hacia atrás a través de la cadena, incrementando y decrementando alternativamente los flujos, hasta que un renglón alcance la etiqueta  $s$  del nodo fuente. Quite todas las etiquetas y regrese al paso (a).

Paso 3. Las variables duales actualizadas. Si el flujo máximo que se encontró en el paso 2 no tiene excedente, entonces tenemos una solución factible para el problema original y por tanto es óptima. Si por el contrario hay excedentes, las variables duales son actualizadas de acuerdo a (7). Haga un círculo al nuevo espacio de celdas admisibles, borre las etiquetas y regrese al paso 2.

Ejemplo 1. Consideremos el P.T. del también ejemplo 1 del capítulo anterior. Resolvámoslo usando este método.

El arreglo de los coeficientes es, pues, el siguiente:

	$\mu_i$					
	3	4	6	8	9	3
	2	2	4	5	5	2
	2	2	2	3	2	2
	3	3	2	4	2	2
$v_j$	0	0	0	1	0	

S.D.F. del ciclo 1

Como ya sabemos, sus renglones y columnas muestran la solución factible inicial, para el dual (D), obtenida en el paso 1.

Los círculos indican en dónde  $C_{ij} = \mu_i + v_j$ .

>Iteración 1. El tableau solución se construye con círculos colocados en las mismas celdas correspondientes. Debido al excedente en todos los renglones y columnas, al principio el procedimiento de etiquetas es trivial y nos conduce a repetir la trayectoria. Esta fase es una modificación de la regla de la esquina noroeste, restringida a las celdas admisibles. De esta fase resulta la solución

10					30
	50				50
		10			10
		10		20	60
10	50	20	80	20	

S.D.F. del ciclo 1

Para llevar a cabo el procedimiento de etiquetas, se etiquetan primeramente los renglones con oferta excedente. En nuestro caso, etiquetamos los renglones 1, 2 y 4. La etiqueta es  $(s, c)$ , donde  $s$  denota al nodo fuente y  $c$  es la cantidad excedente. Posteriormente etiquetamos las columnas 1, 2, 3 y 5, pues contienen círculos en las celdas de los renglones etiquetados:

	(1, 20)	(2, 30)	(4, 30)	(3, 20)	(4, 30)	
(s, 20)	10					30
(s, 30)		50				80
(s, 10)			10			10
(s, 30)			10		20	60
	10	50	20	80	20	

S.D.F. del ciclo 1

Observemos que el renglón 3 lo hemos etiquetado porque contiene una celda con flujo positivo en la columna ya etiquetada. En este caso,  $c=10$ , debido a que dicho flujo es menor que la etiqueta  $c$  de 30 de la tercer columna. Por último, etiquetamos la columna 4 porque tiene un círculo en la celda del renglón 3. Esta es una trayectoria pues se tiene un excedente en la columna 4.

El flujo se ajusta siguiendo la ruta hacia atrás: + 10 en la celda (3,4); -10 en la (3,3) y +10 en la (4,3). La ruta termina en el renglón 4 pues se etiqueta el "nodo fuente". Posteriormente, ajustamos el tableau y recalculamos las etiquetas, dando por resultado:

	(1,20)	(2,30)	(4,20)	(4,20)	
(S,20)	10				30
(S,30)		50			80
				10	10
(S,20)			20		20
	10	50	20	80	20

Solución primal óptima en el ciclo 1

En este caso no hay trayectoria; el flujo es máximo. De cualquier forma, debe actualizarse, y empezarse con ello un nuevo ciclo. El valor de  $h$  es:

$$h = \min (c_{ij} - u_i - v_j),$$

para  $i = 1, 2, 3$  y  $j = 4$ . El mínimo ocurre para  $i=4$ ;  $h=1$ .

Las variables duales se revisan de acuerdo a (7).

>Iteración 2. Los nuevos valores, así como los coeficientes de costo, son:

				$u_1$		
	3	4	6	8	9	4
	2	2	4	5	5	3
	2	2	2	3	2	2
	3	3	2	4	2	3
$v_j$	-1	-1	-1	1	-1	

S.D.F. del ciclo 2

Hemos de notar que existen ya, menos celdas admisibles que en el caso original. Sin embargo, todas las celdas que actualmente se usan en el flujo son aún admisibles, apareciendo una nueva celda admisible en el lugar (4,4).

En el paso siguiente los valores del flujo modifican el tableau solución, actualizando, claro está, los lugares de las celdas que corresponden a los lugares admisibles. Entonces, para este nuevo conjunto de celdas admisibles, encontramos el flujo máximo. Veamos:

(1,20) (2,30)

(S,20)	(10)					30
(S,30)	( )	(50)				80
				(10)		10
		(20)	(20)	(20)		60
	10	50	20	80	20	

Solución Primal *óptima* en el ciclo 2.

Etiquetamos los renglones con excedente, a saber, los renglones 1 y 2. Enseguida etiquetamos las columnas 1 y 2 ya que contienen círculos en las celdas de los renglones etiquetados.

Como ya no podemos etiquetar más renglones y columnas, el flujo es *máximo*. Actualizamos entonces el dual (D) para los índices  $i = 1, 2$  y  $j = 3, 4, 5$ . El *mínimo* ocurre para

$i = 2$  y  $j = 4$ ;  $h = 1$ .

De nueva cuenta revisamos, de acuerdo a (7), las variables duales.

>Iteración 3. Los nuevos valores, así como los coeficientes de costo, son ahora:

				$\mu_i$		
	(3)	4	6	8	9	5
	(2)	(2)	4	(5)	5	4
	2	2	2	(3)	2	2
	3	3	(2)	(4)	(2)	3
$v_j$	-2	-2	-1	1	-1	

S.D.F. del ciclo 3

Notemos que en el lugar (2,4) aparece una nueva celda admisible. En el paso que sigue los valores del flujo modifican el tableau solución, actualizando los lugares de las celdas -con círculo- que corresponden a los lugares admisibles. Entonces para este nuevo conjunto de celdas admisibles, encontramos el flujo máximo. Veamos:

		(1, 20)				
(s, 20)	10					30
		50		30		80
				10		10
			20	20	20	60
	10	50	20	80	20	

Solución Primal óptima en el ciclo 3.

Etiquetamos los renglones con excedente, es decir, sólo el renglón 1. Etiquetamos enseguida la columna 1 ya que contiene un círculo en la celda del renglón etiquetado.

Como ya podemos más renglones y columnas, el flujo es máximo. Actualizamos el dual (D) para  $i=1$ , y  $j=2,3,4,5$ . El mínimo ocurre para  $i=1$ , y  $j=2$ ;  $h=1$ .

Revisamos, de acuerdo a (7), las variables duales.

>Iteración 4. Los nuevos valores, así como los coeficientes de costo, son:

					$u_1$	
	3	4	6	8	9	6
	2	2	4	5	5	4
	2	2	2	3	2	2
	3	3	2	4	2	3
$v_j$	-3	-2	-1	1	-1	

S.D.F. del ciclo 4

Nuevamente notemos que en el lugar (1,2) aparece. En el siguiente paso los valores del flujo modifican el tableau solución, actualizando los lugares de las celdas -con círculo- que corresponden a los lugares admisibles. Así pues, para este nuevo conjunto de celdas admisibles, encontramos el flujo máximo. Es:

10	20				30
	30		50		80
			10		10
		20	20	20	60
10	50	20	80	20	

Solución Primal *óptima* en el ciclo 4

Como el flujo máximo no tiene excedentes, la solución es factible para el problema original y, por tanto, es óptima. La solución óptima es:  $x_{11}=10$ ,  $x_{12}=20$ ,  $x_{22}=30$ ,  $x_{24}=50$ ,  $x_{34}=10$ ,  $x_{43}=20$ ,  $x_{44}=20$ ,  $x_{45}=20$  y cero para las restantes  $x_{ij}$ . con lo anterior,  $x_0=610$ .

### 3.2 EL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN.

Consideremos el P.A. en la forma que sigue:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i=1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j=1, \dots, n \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i, j=1, \dots, n \end{aligned} \tag{8}$$

Es requisito indispensable que cada una de las variables tomen los valores 0 ó 1; en cualquier otro caso la solución no tendría sentido pues no es posible hacer asignaciones fraccionarias. El problema dual (D) que le corresponde es:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n \mu_i + \sum_{j=1}^n \nu_j \\ \text{(D) s.a.} \quad & \mu_i + \nu_j \leq c_{ij} \end{aligned} \tag{9}$$

$\mu_i$  y  $\nu_j$  no restringidas

El P.A. es un caso particular del P.T. y su estructura permite una mayor eficiencia en la aplicación del A.P-D. Dicho procedimiento puede llevarse a un arreglo y el proceso de eti

quetas simplificarse. Lo que resulta es el Método Húngaro, primera forma del A.P.-D.

### 3.2.1 ALGORITMO PRIMAL-DUAL (Método Húngaro)

PROPOSITO. Resolver el P.A.

#### DESCRIPCION

Paso 1. (Inicialización). Del arreglo de coeficientes de costos encontrar primeramente una solución dual factible (S. D.F.). Encontrar las  $\mu_i$ 's como  $\mu_i = \min c_{ij}$  para el  $i$ -ésimo renglón; entonces los coeficientes de costo se modifican por  $c_{ij} - \mu_i$ . Después  $v_j = \min(c_{ij} - \mu_i)$  para la  $j$ -ésima columna; entonces los coeficientes del arreglo estarán formados por  $c_{ij} - \mu_i - v_j$ . Los coeficientes cero representan las celdas admisibles. Así, el problema original se transforma en uno equivalente, fácil de resolver. Restando una constante de algún renglón o columna de la matriz de coeficientes no cambiará la solución óptima porque cualquier solución debe tener  $x_{ij} = 1$  en tal renglón o columna.

Paso 2. (Encontrar el flujo máximo). El flujo máximo se asigna a los coeficientes con cero que representan las celdas admisibles. El flujo se encuentra por el procedimiento de etiquetas; en este caso, la etiqueta sólo necesita el índice apropiado del renglón o columna; no se requiere capacidad de

de la etiqueta ya que siempre es igual a la unidad.

- a) Etiquetar todos los renglones donde no hay celda asignada. Si el renglón  $i$  es tal renglón, ponga  $s$ .
- b) En cada renglón etiquetado  $i$  ver los coeficientes con valor cero (es decir, las celdas admisibles). Si ocurre en la columna  $j$ , etiquetar la columna  $j$  por  $i$ . Si una columna con excedente se etiqueta (es decir, si se etiqueta una columna sin celda), ir a (e).
- c) En cada columna etiquetada  $j$  ver los coeficientes asignados para los cuales  $x_{ij} = 1$ . Si tal celda se encuentra y el renglón  $i$  no se ha etiquetado, etiquetarlo con  $j$ .
- d) Repita el paso (b) y (c) hasta encontrar la trayectoria (es decir, hasta que pueda etiquetar una columna sin celda asignada), o no es posible etiquetar más renglones o columnas. En el primer caso, ir a (e). En el segundo, para el flujo es máximo.
- e) Suponga que la trayectoria ocurre en la columna  $k$ . Entonces modifique el flujo. Si la etiqueta en el renglón  $\mu$  es  $j$ , continuar hacia atrás a través de la cadena, incrementando y decrementando alternativamente los flujos, hasta que un renglón alcance la etiqueta  $s$  del nodo fuente. Quite todas las etiquetas; regresar al

paso (a).

Paso 3. (Las variables duales actualizadas). Si se encuentra que el flujo máximo no tiene excedentes, esto es, si se completa una asignación, la solución factible para el problema original y, por tanto, es *óptima*. La solución óptima es aquella en la que  $x_{ij} = 1$  si la celda  $(i,j)$  se asigna, y  $x_{ij} = 0$  para las celdas restantes. Si por el contrario, hay excedente, es decir, no se completa una asignación, las variables duales se actualizan. Hacemos una búsqueda sobre todas las celdas correspondientes a los renglones etiquetados y columnas no etiquetadas para el valor mínimo de  $c_{ij} - u_i - v_j$  en el arreglo. Se actualizan, entonces, los coeficientes de costo del arreglo restando este valor de todos los renglones etiquetados y sumando este valor a las columnas etiquetadas; borrar las etiquetas y regresar al paso 2.

Ejemplo 2. Consideremos el P.A. con los siguientes coeficientes de costo:

12	7	6	5	10
8	5	9	6	8
6	13	9	6	10
10	5	8	9	12
11	12	5	6	3

Encontramos las variables duales por el procedimiento antes descrito. Encontramos primeramente las  $\mu_i$ 's vfa la expresión  $\mu_i = \min c_{ij}$  en el  $i$ -ésimo renglón. Modificamos entonces los coeficientes de costo del arreglo con  $c_{ij} - \mu_i$ , los cuales nos dan la:

>Iteración 1.

7	2	1	0	5
3	0	4	1	3
0	7	3	0	4
5	0	3	4	7
8	9	2	3	0

Posteriormente, y a partir de este arreglo, encontramos los  $v_j$ 's vfa la expresión  $v_j = \min(c_{ij} - \mu_i)$ . Entonces, los coeficientes del arreglo los formamos con  $c_{ij} - \mu_i - v_j$ , que resultan ser:

7	2	0	0	5
3	0	3	1	3
0	7	2	0	4
5	0	2	4	7
8	9	1	3	0

No es necesario que recordemos los valores de  $\mu_i$  y  $v_j$ . Solamente los coeficientes de costo son necesarios. Los coeficientes cero representan las celdas admisibles.

Una interpretación útil de este procedimiento de inicialización es que el problema original se transforma en uno equivalente, más fácil de resolver. Restando una constante de algún renglón o columna de la matriz de coeficientes, la solución óptima no cambia ya que cualquier solución debe tener  $x_{ij}=1$  en tal renglón o columna. Así, la función objetivo se decrementará (por el valor restado), pero la solución no cambiará. En términos del nuevo arreglo, es claro que podríamos hacer asignaciones en las posiciones que tienen valor cero. Si después de este procedimiento de sustracción, podemos producir una asignación completa sobre los elementos cero, dicha asignación podría ser la óptima.

El paso que sigue en el procedimiento es maximizar el flujo usando el método de etiquetas. En este caso, la etiqueta sólo necesitará del índice apropiado del renglón o columna; no se requerirá la capacidad de la etiqueta puesto que siempre será igual a la unidad. El resultado de maximizar el flujo es el siguiente (indicando con un cuadro los lugares asignados):

		4			
	7	2	0	0	5
2	3	0	3	1	3
	0	7	2	0	4
5	5	0	2	4	7
	8	9	1	3	0

La solución obtenida no completa una asignación, así la variables duales (o equivalentemente el arreglo de costo modificado) debe actualizarse. Hacemos esta búsqueda sobre todas las celdas que corresponden a los renglones etiquetados y columnas no etiquetadas para el valor mínimo de  $c_{ij} - u_i - v_j$  en el arreglo. En este caso el valor mínimo es uno. Actualizamos entonces los coeficientes de costo del arreglo restando este valor de todos los renglones etiquetados y sumandoselo a las columnas etiquetadas. El resultado da lugar a la:

>Iteración 2.

		4		2	
	7	3	0	0	5
2	2	0	2	0	2
	0	8	2	0	4
5	4	0	1	3	6
	8	10	1	3	0

Iniciamos la rutina de flujo máximo sobre el nuevo arreglo, el cual etiquetamos. La trayectoria ocurre en la columna 4. La nueva asignación, encontrada "hacia atrás", es la que sigue:

7	3	0	0	5
2	0	2	0	2
0	8	2	0	4
4	0	1	3	6
8	10	1	3	0

Es una asignación completa y, por tanto, *óptima*. La solución óptima es:  $x_{13} = x_{24} = x_{31} = 42 = x_{55} = 1$  y las  $x_{ij} = 0$  restantes. Así pues,  $x_0 = 26$ .

### 3.3 EL PROBLEMA DE FLUJO MÁXIMO

El problema de F.M. puede plantearse como un flujo de valor  $v$  que corre del nodo fuente al nodo sumidero y definido como:

$$\max v$$

$$\text{s.a}$$

$$Af = \begin{cases} +v & \text{nodo fuente} \\ -v & \text{nodo final} \\ 0 & \text{otros} \end{cases} \quad (10)$$

$$f \leq b$$

$$f \geq 0$$

donde  $A$  es la matriz de incidencia nodos-arcos de una gráfica dirigida y  $f, b \in \mathbb{R}^m$  son los vectores de flujo y capacidad, respectivamente.

Podemos reescribir (10) usando el vector  $d \in \mathbb{R}^n$  definido como:

$$d = \begin{cases} -1, & i = 1 \quad (\text{nodo fuente}) \\ +1, & i = n \quad (\text{nodo sumidero}) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El P.P.L. es, entonces,

$$\begin{aligned}
 \max \quad & v \\
 \text{Af} + dv & \leq 0 \\
 f & \leq b \\
 -f & \leq 0
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

La reformulación anterior se parece al dual de un problema estándar de P.L. La idea es encontrar, directamente de (11), el dual del primal restringido (D.P.R.) sin pasar por el primal restringido. De acuerdo al procedimiento definido para la obtención del dual restringido, podemos observar las reglas siguientes:

- reemplazar el vector del lado derecho por cero.
- eliminar los renglones que no están en P.
- agregar las restricciones  $f \leq 1$  y  $v \leq 1$ .

Así pues, el dual restringido queda como:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & v \\
 \text{s.a. } & \text{Af} + dv \leq 0, \text{ para todos los renglones} \\
 & f \leq 0, \text{ para renglones con } f = b \text{ en (11)} \\
 & -f \leq 0, \text{ para renglones donde } f = 0 \text{ en (11)} \\
 & f \leq 1 \\
 & v \leq 1
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Una interpretación de (12) es la siguiente: encontrar una trayectoria del nodo fuente al nodo sumidero -para un flujo de valor 1- que use los arcos en la forma que sigue: *arcos saturados* en dirección inversa, *arcos con flujo cero* en dirección hacia adelante y *todos los demás arcos* en cualquier dirección.

El paso que sigue en el A.P-D es encontrar una trayectoria aumentada, que corresponda a aumentar un flujo  $f$  tan grande como sea posible, es decir, hasta atravesar un arco en dirección inversa quedando sin flujo (se cancela todo flujo), o bien, hasta atravesar un arco saturado en dirección hacia adelante.

Hemos de apreciar que la solución al dual restringido, de acuerdo al procedimiento anterior, no requiere el uso del simplex. Una vez que se encuentra la solución al dual restringido, se procede a actualizar el dual (que corresponde directamente al problema de F.M.) agregándole el flujo encontrado en la trayectoria aumentada. Por último, se procede a resolver de nuevo, a partir del dual actualizado, el dual restringido, hasta que no se pueda definir una trayectoria aumentada desde el nodo fuente hasta el nodo sumidero, en cuyo caso el flujo definido (11) es *máximo*.

El anterior procedimiento puede ser más eficiente al establecerse como *algoritmo de Ford-Fulkerson* que consiste en lo siguiente: se inicia con un flujo factible cualquiera. Se

etiqueta primeramente el nodo fuente con  $[s, \infty]$ , indicando con ello que en ese nodo se dispone de una cantidad ilimitada de flujo. Después, si  $j$  es un nodo ya etiquetado, y puede enviarse flujo de  $j$  a  $i$ ,  $i$  recibe dos etiquetas:  $[+j, f(i)]$ .

La primera etiqueta será de la forma  $+j$  si  $i \in \Gamma^+(j)$ ; es decir, si puede aumentarse el flujo a través del arco  $(j, i)$ ; será de la forma  $-j$  si  $i \in \Gamma^-(j)$ , es decir, si puede disminuirse el flujo a través del arco  $(i, j)$ . La segunda etiqueta es la cantidad de flujo que puede enviarse de  $j$  a  $i$  y se calculará como el mínimo entre  $f(j)$  y  $h$ , donde:

$$h = \begin{cases} q_{ij} - f_{ji}, & \text{si } i \in \Gamma^+(j) \\ f_{ij}, & \text{si } i \in \Gamma^-(j) \end{cases}$$

Debemos observar que si  $h = 0$ , podrá enviarse flujo de  $j$  a  $i$ , por lo que no se etiquetará  $i$  con  $[\pm j, f(i)]$ .

Este proceso de asignación de etiquetas a nodos se repetirá mientras sea posible. Si el nodo sumidero  $n$  recibe etiquetas, entonces, dado el modo de etiquetar, existe una cadena aumentante del nodo fuente al nodo sumidero con capacidad incremental igual a  $f(n)$  y, por tanto, se procederá a determinar ésta con la ayuda de la primera etiqueta, actualizándose el flujo a través de ella. Si, por el contrario, el nodo sumidero  $n$  no recibe etiqueta alguna, entonces se habrá determinado

el flujo máximo.

Para justificar esto último consideremos el conjunto de arcos que tienen extremo inicial etiquetado y extremo final no etiquetado; este conjunto forma una cortadura de capacidad igual al valor del último flujo definido y, por tanto, es máximo. En efecto, nótese la similitud de este algoritmo con la demostración del teorema flujo máximo cortadura mínima. Por esta razón, la justificación de la optimalidad y la convergencia del algoritmo la da ese teorema. Además de la manera de etiquetar los nodos, el algoritmo servirá también en casos donde sea de interés el determinar la cortadura de capacidad mínima.

Es importante observar que el algoritmo converge sólo si las capacidades para el flujo en los arcos son enteras; sin embargo, en casos donde las capacidades sean racionales, éstas pueden transformarse en enteras al multiplicarlas por la potencia de diez adecuada. Así pues, el algoritmo puede utilizarse también en esos casos.

### 3.3.1 ALGORITMO DE FORD Y FULKERSON

PROPOSITO. *Determinar el flujo máximo entre el nodo fuente y el nodo sumidero de una red.*

#### DESCRIPCION

Paso 1. Iniciar con cualquier flujo factible  $f$ .

Paso 2. Etiquetar el nodo fuente con  $[s, \infty]$ .

Paso 3. Elegir un nodo etiquetado y no examinado; sea  $j$  éste nodo y sean  $[k, f(j)]$  sus etiquetas.

- A todo  $i \in \Gamma^+(j)$  que no esté etiquetado y tal que

$f_{ji} < q_{ij}$  asignar la etiqueta  $[+j, f(i)]$ , donde

$$f(i) = \min \{f(j), q_{ji} - f_{ji}\}.$$

- A todo  $i \in \Gamma^-(j)$  que no esté etiquetado y tal que

$f_{ij} > 0$  asignar la etiqueta  $[-j, f(i)]$ , donde

$$f(i) = \min \{f(j), f_{ij}\}.$$

Se dice que el nodo  $j$  se ha examinado.

Paso 4. Repetir el paso 3 hasta que suceda i) ó ii):

i) El nodo final  $n$  no tiene etiqueta y todos los nodos etiquetados se han examinado. Terminar, ya que el flujo factible  $f$  es máximo.

ii) El nodo sumidero  $n$  se etiqueta. Ir al paso 5.

Paso 5. Sea  $x = n$ .

-Si la etiqueta de  $x$  es de la forma  $[+z, f(x)]$  hacer

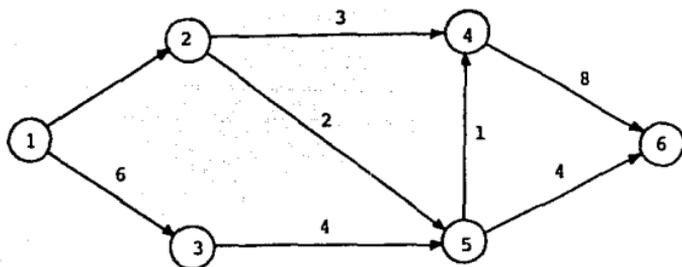
$$f_{zx} = f_{zx} + f(n).$$

-Si la etiqueta de  $x$  es de la forma  $[-z, f(x)]$  hacer

$$f_{xz} = f_{xz} - f(n).$$

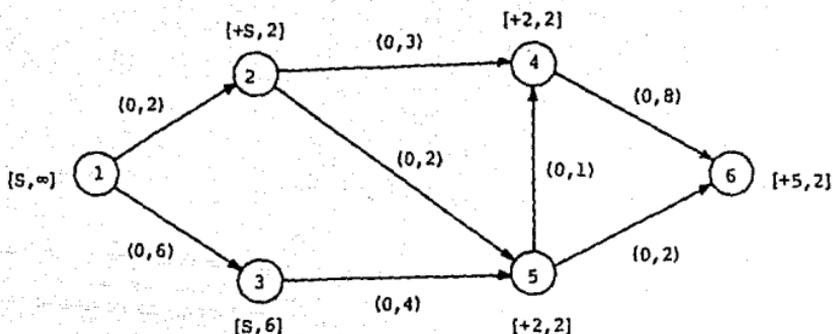
Paso 6. Si  $z = s$  borrar todas las etiquetas y regresar al paso 2. Si  $z \neq s$ , hacer  $x = z$  y regresar al paso 5.

Ejemplo 5. Determinése el flujo máximo del nodo fuente al nodo sumidero en la siguiente red mediante el algoritmo de Ford y Fulkerson. En número asociado a cada arco representa su capacidad.



Aplicaremos el algoritmo utilizando al principio un flujo igual a cero a través de todos los arcos de la red.

> *Iteración 1.* A continuación se muestran las etiquetas asignadas a los nodos durante esta iteración. Los números asociados a cada arco son el flujo a través de él y su capacidad.



Al principio se etiquetó el nodo 1 con  $[s, \infty]$ ; después se calcularon las otras etiquetas conforme a los pasos 3 y 4 del algoritmo.

Se elige después el nodo 1 puesto que está etiquetado pero no examinado. Los sucesores no etiquetados  $i$  del nodo 1 tales que  $f_{1i} < q_{1i}$  son 2 y 3, por lo que:

2 recibe etiqueta  $[+s, \min\{\infty, 2\}]$

3 recibe etiqueta  $[+s, \min\{\infty, 6\}]$

Se elige el nodo 2 puesto que está etiquetado pero no examinado. Los sucesores no etiquetados  $i$  de 2 tales que

$f_{2i} < q_{2i}$  son 4 y 5, por lo que:

4 recibe etiqueta  $[+ 2, \min \{2, 3\}]$

5 recibe etiqueta  $[+ 2, \min \{2, 2\}]$

El nodo 2 se ha examinado.

Se elige el nodo 5. El sucesor no etiquetado  $i$  de 5 tal que  $f_{5i} < q_{5i}$  es 6, de donde:

6 recibe etiqueta  $[+ 5, 2]$

El nodo 5 se ha examinado.

Puesto que el nodo  $n = 6$  recibió su etiqueta existe una cadena aumentante del nodo fuente al nodo sumidero, es decir, del nodo 1 al 6. Se determinará ésta y se actualizarán el flujo a través de ella en los pasos 5 y 6 del algoritmo:

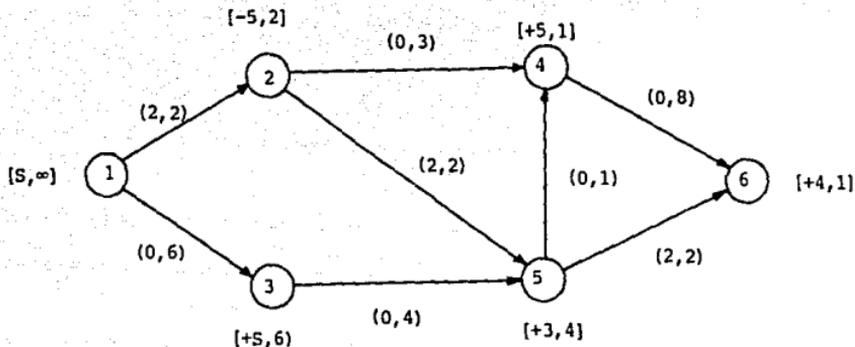
$x = 6$ , su etiqueta es  $[+5, 2]$ , entonces  $f_{5t} = 2$

$x = 5$ , su etiqueta es  $[+2, 2]$ , entonces  $f_{24} = 2$

$x = 2$ , su etiqueta es  $[+s, 2]$ , entonces  $f_{s1} = 2$

Con este nuevo flujo de valor 2 se realizará la siguiente iteración.

> *Iteración 2.* Las etiquetas que resultan de esta iteración se muestran en la siguiente red:



De nueva cuenta etiquetamos con  $[s, \infty]$  al nodo fuente. Después:

Se elige el nodo 1. El vecino  $i$  no etiquetado de 1 tal que  $f_{1i} < q_{1i}$  es 3, de donde:

3 recibe la etiqueta  $[+s, \min\{\infty, 6\}]$

El nodo 1 se ha examinado.

Se elige el nodo 3. El único sucesor no etiquetado de 3 es 5 y  $f_{35} < q_{35}$ , por lo que:

5 recibe la etiqueta  $[+3, \min\{6, 4\}]$

El nodo 3 se ha examinado.

Se elige el nodo 5. El sucesor  $i$  no etiquetado de 5 tal que  $f_{5i} < q_{5i}$  es 4, de donde:

4 recibe la etiqueta  $[+ 5, \min \{4, 1\}]$

El predecesor no etiquetado es 5 es 2 y  $f_{25} > 0$ ,

de donde:

2 recibe la etiqueta  $[- 5, \min \{4, 2\}]$

El nodo 5 se ha examinado.

Se elige el nodo 4. El sucesor no etiquetado de 4 es 6 y  $f_{46} < q_{46}$ , de donde:

6 recibe la etiqueta  $[+ 4, \min \{1, 8\}]$

El nodo 4 se ha examinado.

Puesto que 6 recibió una etiqueta, existe una cadena aumentante de 1 a 6 con capacidad incremental igual a 1. Se determina ésta y se actualiza el flujo a través de ella:

$x = 6$ , su etiqueta es  $[+4, 1]$ , entonces  $f_{46} = 1$ ;

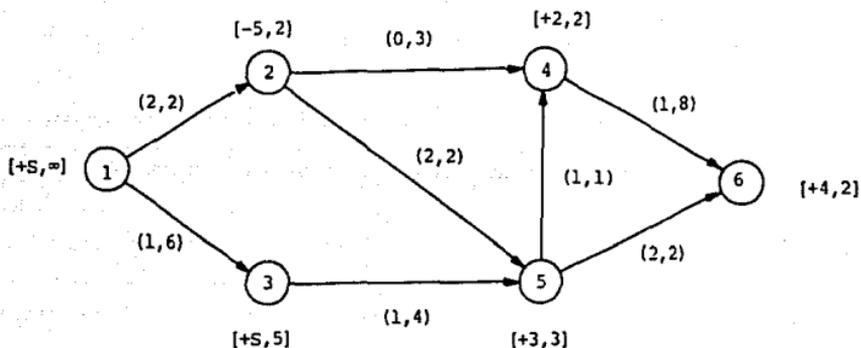
$x = 4$ , su etiqueta es  $[+5, 1]$ , entonces  $f_{54} = 1$ ;

$x = 5$ , su etiqueta es  $[+3, 4]$ , entonces  $f_{35} = 1$ ;

$x = 3$ , su etiqueta es  $[+5, 6]$ , entonces  $f_{13} = 1$ .

Con este nuevo flujo factible de valor 3 realizamos otra iteración.

> *Iteración 3.* De nuevo, las etiquetas asignadas se muestran en la red que sigue:



De nuevo, etiquetamos con  $[s, \infty]$  al nodo 1. Luego:

Se elige el nodo 1. El sucesor no etiquetado del 1 es 3 y  $f_{13} < q_{13}$ , entonces:

3 recibe la etiqueta  $[+s, \min\{\infty, 6-1\}]$

El nodo 1 se ha examinado.

Se elige el nodo 3. El sucesor no etiquetado de 3 es 5 y

$f_{35} < q_{35}$ , entonces:

5 recibe la etiqueta  $[+3, \min\{5, 4-1\}]$

El nodo 3 se ha examinado.

Se elige el nodo 5. El predecesor no etiquetado de 5 es 2 y  $f_{25} > 0$ , luego:

2 recibe la etiqueta  $[-5, \min\{3, 2\}]$

El nodo 5 se ha examinado.

Se elige el nodo 2. El sucesor no etiquetado de 2 es 4 y  $f_{24} < q_{24}$ , por tanto:

4 recibe la etiqueta  $[+2, \min\{2, 3\}]$

El nodo 2 se ha examinado.

Se elige el nodo 4. El sucesor no etiquetado de 4 es 6 y  $f_{46} < q_{46}$ , por tanto:

6 recibe la etiqueta  $[+4, \min\{2, 8-1\}]$

El nodo 4 se ha examinado.

Puesto que el nodo 6 recibió una etiqueta, existe una cadena aumentante de capacidad incremental 2. Se determina ésta y se actualiza el flujo:

$x = 6$ , su etiqueta es  $[+4, 2]$ , entonces  $f_{46} = 1 + 2 = 3$ ;

$x = 4$ , su etiqueta es  $[+2, 2]$ , entonces  $f_{24} = 2$

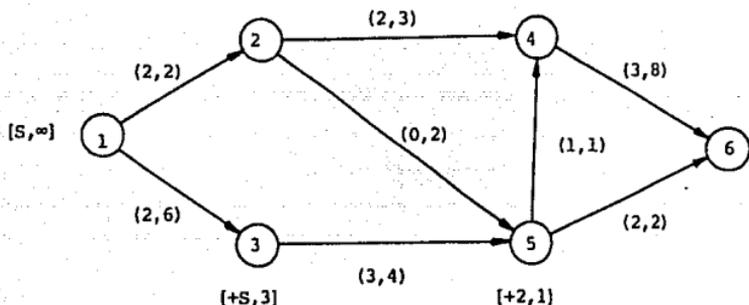
$x = 2$ , su etiqueta es  $[-5, 2]$ , entonces  $f_{25} = 2 - 2 = 0$ ;

$x = 5$ , su etiqueta es  $[+3, 3]$ , entonces  $f_{35} = 1 + 2 = 3$ ;

$x = 3$ , su etiqueta es  $[+5, 5]$ , entonces  $f_{13} = 1 + 2 = 3$ ,

Con este nuevo flujo factible de valor 5 realizamos otra iteración.

> *Iteración 4.* Las etiquetas, hasta ahora asignadas, se muestran en la siguiente red:



Etiquetamos de nuevo el nodo 1 con  $[s, \infty]$ , después:

Se elige el nodo 1. El sucesor  $i$  no etiquetado de 1 tal que  $f_{1i} < q_{1i}$  es 3, por tanto:

3 recibe la etiqueta  $[+s, \min \{\infty, 6-3\}]$ .

El nodo 1 se ha examinado

Se elige el nodo 3. El sucesor no etiquetado de 3 es 5 y  $f_{35} < q_{35}$ , de donde:

5 recibe la etiqueta  $[+2, \min \{3, 4-3\}]$

El nodo 3 se ha examinado.

Se elige el nodo 5. Ningún vecino de 5 puede recibir, en es  
te momento, etiqueta alguna.

Todos los nodos etiquetados se han examinado y 6 no re-  
cibió etiqueta. Por tanto, el último flujo es *máximo*.

Por otra parte, el conjunto de nodos etiquetados es {1,  
3,5}; por lo tanto, la cortadura mínima es {(1,2) (5,4), (5,6)}.  
Observemos que su capacidad es  $2 + 1 + 2 = 5$ , que coincide con  
el valor del flujo máximo.

### 3.4 EL PROBLEMA DE LA RUTA MAS CORTA.

Consideremos el problema de la ruta más corta en la forma que sigue:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{k=1}^m x_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 1 \\ 0, & \text{si } i = 1 \text{ ó } m \\ -1, & \text{si } i = m \end{cases} \quad (12) \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Este es un problema de flujo con costo mínimo en una red, cuyo correspondiente dual es:

$$\begin{aligned} \max \quad & w_1 - w_m \\ \text{s.a.} \quad & w_i - w_j \leq c_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, m \quad (13) \\ & w_i, w_j \quad \text{no restringida } i, j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Conviene que hagamos la sustitución  $w_i^t = -w_i$ , pues en la solución óptima  $w_i^t - w_1^t$  es la distancia más corta entre los nodos "1" e "i". Por consiguiente, podemos obtener la distancia más corta del nodo 1 a todos los nodos de la red.

Por otro lado, con el fin de aplicar el Método Primal-Dual al problema de la R.C. reescribimos (12):

$$\begin{aligned}
 & \min c^t f \\
 & \text{s.a } Af = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 1 \\ 0, & \text{si } i = 1 \text{ ó } m \end{cases} \quad (14) \\
 & f \geq 0,
 \end{aligned}$$

donde A es la matriz de incidencia nodos-arcos de una gráfica dirigida con m nodos y n arcos, donde hemos eliminado el renglón correspondiente al nodo final y donde f tiene componentes 0 ó 1 y c es el vector de costos. El dual que corresponde a (14) es, entonces,

$$\begin{aligned}
 & \max \lambda_1 \\
 & \text{s.a } \lambda_i - \lambda_j \leq c_{ij} \\
 & \lambda_i \text{ no restringida } \forall i \\
 & \lambda_m = 0
 \end{aligned} \quad (15)$$

Hacemos  $\lambda_m = 0$  pues omitimos su renglón. Y de acuerdo al procedimiento antes definido, el conjunto de arcos admisibles es

$$P = \{ \text{arcos } (i, j) \mid \lambda_i - \lambda_j = c_{ij} \}$$

Ahora, el problema primal restringido (P.P.R.) es:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & I^t y \\
 \text{s.a.} \quad & Af + y = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 0, & i \neq 1 \text{ } \delta \text{ } m \end{cases} \quad (16) \\
 & f \geq 0 \\
 & f_i = 0, \quad i \notin P \\
 & j \geq 0
 \end{aligned}$$

donde  $I = (1, 1, \dots, 1)$  es un vector renglón de dimensional  $m-1$ .

El problema dual restringido (P.D.R.\*) es, por su parte,

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \mu_1 \\
 \text{s.a.} \quad & \mu_i - \mu_j \leq 0, \quad \text{para todos los arcos } (i, j) \in P \\
 & \mu_i \leq 1, \quad \forall i \quad (17) \\
 & \mu_i \quad \text{no restringida}
 \end{aligned}$$

Proponemos iterar sobre el P.P.R. con el objeto de ir mejorando la solución. En este caso, es más fácil encontrar la solución vía el P.D.R. debido a que:

---

\* o Dual del Primal Restringido (D.P.R.)

$$\mu_0 = \begin{cases} 1, & \text{para los nodos alcanzables con trayectorias} \\ & \text{desde el nodo fuente, usando arcos de } P \text{ (por la} \\ & \text{propagación de } \mu_1 = 1 \text{ con arcos en } P \text{).} \\ 0, & \text{para los nodos desde los cuales el nodo sumide-} \\ & \text{ro es alcanzable, usando los arcos de } P \text{ (por la} \\ & \text{propagación de } \mu_m = 0 \text{ con arcos en } P \text{)} \\ -1, & \text{para los otros nodos } (\mu_i - \mu_j \leq 0) \end{cases}$$

Tendríamos que calcular, entonces,

$$\epsilon_0 = \min_{\substack{\text{arcos} \\ (i,j) \notin P}} \{c_{ij} - (\lambda_i - \lambda_j) \mid \mu_i - \mu_j > 0\},$$

y actualizar  $\mu$  y  $P$ , y con resolver el P.D.R.

Si tenemos una trayectoria del nodo fuente al nodo sumidero (esto es, del nodo 'l' al nodo 'm') que incluya los arcos de  $P$ ,  $\mu_1 = 0$ , entonces se alcanza el óptimo pues tanto el mínimo como el máximo son iguales a cero. En particular, para alguna trayectoria del nodo fuente al sumidero que incluya los arcos en  $P$ , ésta es óptima. Así pues, el A.P-D. simplifica el problema de la R.C.

### 3.4.1 ALGORITMO PRIMAL-DUAL

PROPOSITO. Resolver el problema de la R.C. cuando tiene una S.D.F.

## DESCRIPCION

**Paso 1.** (Inicialización). Dadas las soluciones iniciales factibles  $\lambda_0 = (0, 0, \dots, 0)$  para el PD (15) y  $\mu_0 = (1, 1, \dots, 1)$  para el DPR (17),  $\mu_1 = 0$  y  $P = \emptyset$ .

**Paso 2.** Calcular

$$\varepsilon_0 = \min_{(i,j) \notin P} \{C_{ij} - (\lambda_i - \lambda_j) \mid \mu_i - \mu_j > 0\}$$

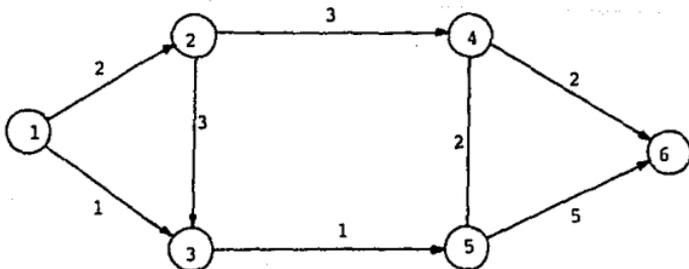
**Paso 3.** Calcular

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon_0 \mu_0$$

y hacer  $\mu_i = 0$  para la  $\mu_i$  que determina  $\varepsilon_0$ .

**Paso 4.** Si  $\mu_i \neq 0$  para alguna  $i$ , regresar al paso 2. En caso contrario,  $P$  será el conjunto de los arcos considerados en trayectoria más corta, del nodo 1 al nodo  $m$ .

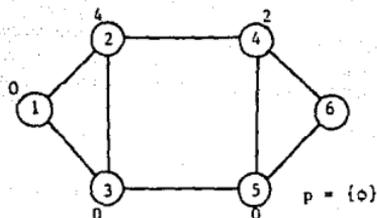
**Ejemplo 3.** Consideremos la red.



con la capacidad máxima indicada sobre los arcos.

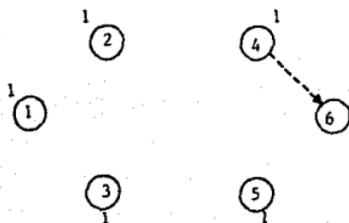
> Iteración 1. Como los costos son no-negativos, podemos empezar con  $\lambda = (0,0,0,0,0)$

DUAL



$\mu_0 = (0,0,0,0,0)$  solución inicial factible

DUAL RESTRINGIDO



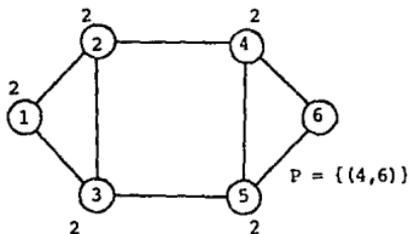
$\mu_0 = (1,1,1,1,1)$  solución inicial factible  $\mu_i - \mu_j \leq 0$

para los arcos (4,6):  $2 - (0 - 0) = 2$

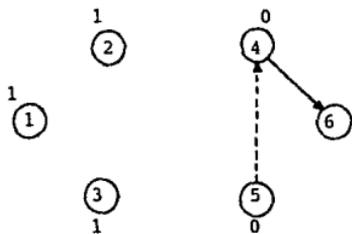
(5,6):  $5 - (0 - 0) = 5$

$\therefore \epsilon_0 = 2$  para el arco (4,6)

> Iteración 2.



(propagación de  $\mu_1 = 0$ )

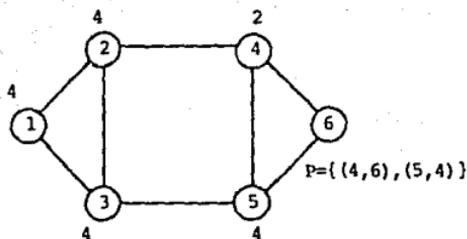


$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon_0 u_0$$

$$= (0, 0, 0, 0, 0) + 2(1, 1, 1, 1, 1)$$

$$= (2, 2, 2, 2, 2)$$

> Iteración 3.

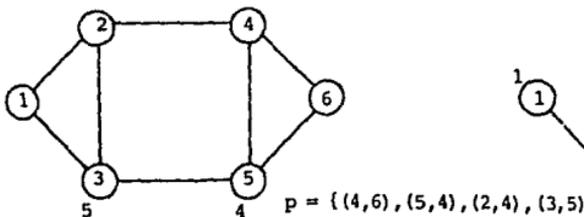


$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon_0 u_0$$

$$= (2, 2, 2, 2, 2) + 2(1, 1, 1, 0, 1)$$

$$= (4, 4, 4, 2, 4)$$

> Iteración 4.

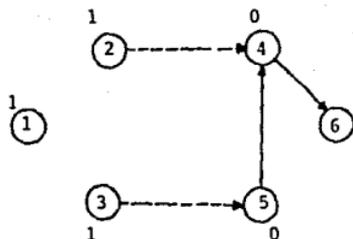


$$u_0 = (1, 1, 1, 0, 1)$$

para los arcos (5,4):  $2 - (2-2) = 2$

(2,4):  $3 - (2-2) = 3$

$\therefore \varepsilon_0 = 2$  para el arco (5,4).

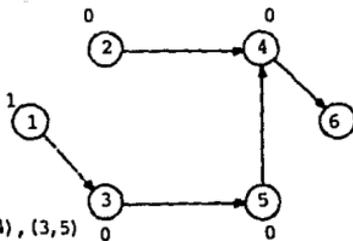


$$u_0 = (1, 1, 1, 0, 0)$$

para los arcos (2,4):  $3 - (4-2) = 1$

(3,5):  $1 - (4-4) = 1$

$\therefore \varepsilon_0 = 1$  para los arcos (2,4) y (3,5).



$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon_0 \mu_0$$

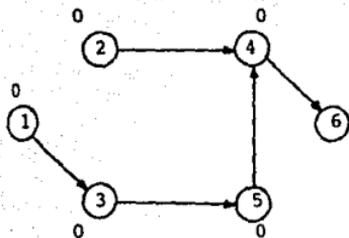
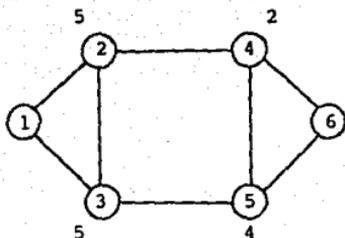
$$\mu_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$$

$$= (4, 4, 4, 2, 4) + 1(1, 1, 1, 0, 0) \quad \text{para los arcos } (1,2): 2 - (5-5) = 2$$

$$= (5, 5, 5, 2, 4) \quad (1,3): 1 - (5-5) = 1$$

$$\therefore \varepsilon_0 = 1 \text{ para el arco } (1,3).$$

> Iteración 5.



$$p = \{(4,6), (5,4), (2,4), (3,5), (1,3)\}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon_0 \mu_0$$

$$\mu_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$$

$$= (5, 5, 5, 2, 4) + 1(1, 0, 0, 0, 0)$$

$$= (6, 5, 5, 2, 4)$$

Finalmente, después de cinco iteraciones con el método Primal-Dual, alcanzamos el óptimo para  $\lambda = (6, 5, 5, 2, 4)$  y el correspondiente conjunto P, el cual contiene la trayectoria óptima. Cualquier trayectoria del nodo fuente al sumidero en el conjunto de arcos admisibles final satisface la holgura complementaria y, por tanto, es óptima; en este caso la trayectoria es (1,3), (3,5), (5,4), (4,6) con costo igual a seis.

El ejemplo anterior nos permite visualizar el algoritmo partiendo directamente del procedimiento primal-dual, cuya primera instancia sería para  $c_{ij} > 0$ .

El algoritmo de Dijkstra, por su parte, es una aplicación eficiente del A.P-D para el problema de la R.C. Se supone que los costos en los arcos son no-negativos. Este método se basa en la asignación de etiquetas "permanentes" a los nodos para los cuales ya se conocen las longitudes de las rutas más cortas del nodo fuente a ellos. Sea S este conjunto de nodos permanentes. Las etiquetas de los nodos de S representan precisamente las longitudes de las rutas más cortas buscadas. Los nodos restantes se etiquetan "temporalmente" con una cota superior de la longitud más corta del nodo fuente al nodo etiquetado. En la primera iteración el conjunto S contendrá únicamente el nodo fuente, es decir, el nodo uno es tará etiquetado permanentemente. Las etiquetas temporales se mejoran continuamente y en cada iteración se agrega exacta-

mente un nodo  $i$  a  $S$ ; este nodo será aquél tal que la longitud desde el nodo fuente es la más corta posible.

Dado que todos los arcos tienen costos no-negativos, siempre podemos encontrar una ruta más corta del nodo fuente al nodo  $i$  que pase sólo por nodos de  $S$ ; en este caso, la etiqueta  $i$  representa la longitud de la ruta más corta correspondiente. Una vez que todos los nodos estén en  $S$ , las etiquetas de todos los nodos serán las correspondientes a las longitudes más cortas desde el nodo fuente y, por tanto, habremos encontrado la solución deseada. En el caso que se de see sólo la ruta más corta entre dos nodos específicos, se obtendrá la solución cuando se etiquete "permanentemente" el nodo final del camino buscado.

### 3.4.2 ALGORITMO DE DIJKSTRA.

PROPOSITO. *Obtener la trayectoria de la ruta más corta en una red con costos no negativos en los arcos.*

#### DESCRIPCION

Paso 1. (Inicialización de etiquetas). Sea  $d(i)$  una etiqueta asociada al nodo  $i$ , para todo  $i$ . Sea  $d(1) = 0$  (nodo fuente) y marcar ésta etiqueta como permanente. Sea  $d(i) = \infty$  para  $i=2, \dots, m$  y considerar estas etiquetas como temporales. Sea  $a(i)$  una etiqueta asociada al nodo  $i$  para  $i \neq 1$  (nodo fuente) y sea  $d(i, j)$  la longitud del arco  $i, j$ . Sea  $k = 1$

(nodo fuente).

Paso 2. (Actualización de etiquetas.) Para toda icf que tenga etiqueta temporal, actualizar etiquetas de acuerdo a:

$$d(i) = \min\{d(i), d(k) + d(k+i)\}.$$

Si  $d(i)$  se modificó, hacer  $a(i) = p$ . Sea  $i^*$  tal que  $d(i^*) = \min\{d(i) \mid d(i) \text{ es temporal}\}$ . Si  $d(i^*) = \infty$ , *terminar*; en este caso no existe trayectoria alguna. En otro caso, ir al *paso 3*.

Paso 3. (Etiquetación permanente.) Marcar la etiqueta  $d(i^*)$  como permanente. Sea  $k = i^*$ .

Paso 4. (i) Si sólo se desea la ruta del nodo fuente al nodo sumidero: Si  $k = m$ , *terminar*;  $d(k)$  es la longitud del camino más corto. Si  $k \neq m$ , ir al *paso 2*. (ii) Si se desea la trayectoria: Si todos tienen etiquetas permanentes, *terminar*; ésta es la longitud del camino deseado y el conjunto de arcos  $(a(i), i)$  forman la trayectoria de caminos más cortos. En otro caso ir al *paso 2*.

Debemos observar que el algoritmo termina en un número finito de iteraciones, ya sea en el paso 2 ó en el paso 4, puesto que el número de nodos es finito. Justifiquemos enseguida la optimalidad del algoritmo.

Nótese que si el algoritmo termina en el paso 4, la gráfica generada tendrá  $n-1$  arcos y al nodo fuente como raíz; por esta razón, dicha gráfica será una trayectoria. Por otro lado, se tiene que, por construcción,  $d(i)$  es la longitud del único camino del nodo fuente a  $i$  en esa trayectoria. Ahora probemos que la trayectoria generada es la ruta más corta. Para ello demostraremos, por inducción sobre el número de iteraciones, que las etiquetas permanentes de los nodos son las longitudes de las rutas más cortas del nodo fuente a  $i$ , para toda  $i$ . Esto es claro en la primera iteración. Sean  $S$  el conjunto de nodos con etiquetas permanentes y  $\bar{S}$  el conjunto de nodos con etiquetas temporales en la iteración  $k$ . Al final del paso 2 de la iteración  $k+1$  la etiqueta temporal  $d(i)$ , para  $i \in \bar{S}$ , es la longitud de una ruta más corta del nodo fuente a  $i$  que contiene solamente nodos de  $S$ .

En efecto en cada iteración, sólo se etiqueta permanentemente un nodo, por ello sólo es necesaria la comparación efectuada en el paso 2. En particular, ésto sucede para  $i^*$  (nodo con la mínima etiqueta temporal). Supóngase ahora que la ruta más corta de la raíz (nodo fuente) a  $i^*$  no contiene sólo nodos de  $S$ . Sea  $j$  primer nodo en el camino más corto del nodo fuente a  $i^*$  que no esté en  $S$ . Puesto que los costos en los arcos son no negativos, entonces la longitud de la porción del camino del nodo fuente a  $i^*$ , que une a  $j$  con  $i^*$ , es no negativa. Sea  $D$  esta longitud. Note que la porción del camino

del nodo fuente a  $i^*$ , que une al nodo fuente con  $j$ , es un camino que contiene solamente nodos de  $S$ . Pero  $d(j)$  es la longitud de una ruta más corta que contiene todos sus nodos en  $S$ , luego:

$$d(j) + D < d(i^*)$$

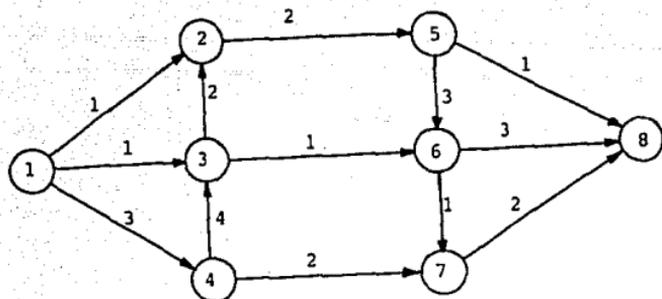
lo que implica:

$$d(j) < d(i^*) - D < d(i^*),$$

lo que es una contradicción puesto que  $d(i^*)$  es el mínimo de las etiquetas temporales. Se concluye, entonces, que la ruta más corta del nodo fuente a  $i^*$  contiene sólo nodos de  $S$ , y por ende,  $d(i^*)$  es su longitud. Por tanto, la etiqueta permanente de  $i$  es igual a la longitud de la ruta más corta del nodo fuente a  $i$  en la iteración  $k+1$ .

Observemos finalmente que si  $d(i^*) = \infty$  (paso 2) en alguna iteración, entonces existe algún nodo ( $i^*$  y todos los que tienen etiqueta temporal) para el cual no existe ruta alguna desde el nodo fuente; podemos entonces concluir que el problema no tiene solución puesto que, en este caso, el nodo fuente no es raíz de la red.

Ejemplo 4. Considere la red:



con la capacidad máxima sobre los arcos. Determinaremos la trayectoria de ruta más corta usando el algoritmo de Dijkstra.

> Iteración 1.  $d(1) = 0$ , etiqueta permanente;  $d(i) = \infty$  para  $i=2, \dots, 8$ , etiquetas temporales.  $K=1$ .

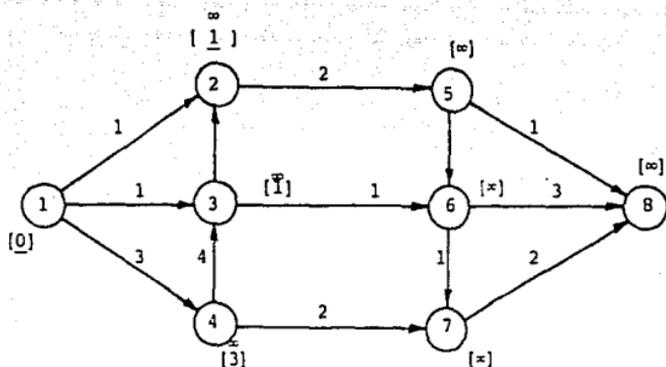
Actualización de etiquetas:  $\Gamma(k) = \{2,3,4\}$ ,

$$d(2) = \min \{\infty, 1\} = 1 \text{ y } a(2) = 1,$$

$$d(3) = \min \{\infty, 1\} = 1 \text{ y } a(3) = 1,$$

$$d(4) = \min \{\infty, 3\} = 3 \text{ y } a(4) = 1,$$

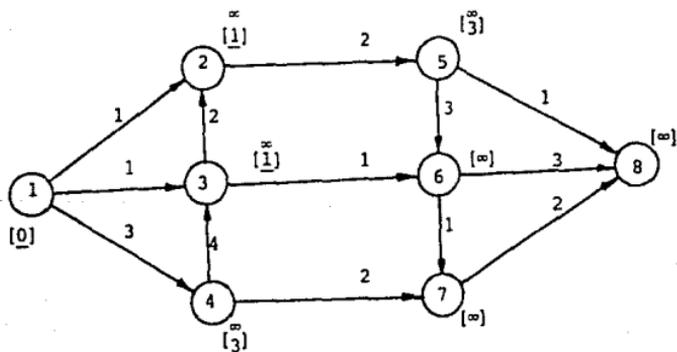
de donde  $i^* = 2$  dado que es el nodo con mínima etiqueta temporal (los empates se rompen arbitrariamente). Se marca  $d(2)$  como permanente;  $k = 2$  ( $k \neq m = 8$ )



> Iteración 2. Actualización de etiquetas:  $\Gamma(k) = \{5\}$ ,

$$d(5) = \min \{\infty, 3\} = 3 \text{ y } a(5) = 2,$$

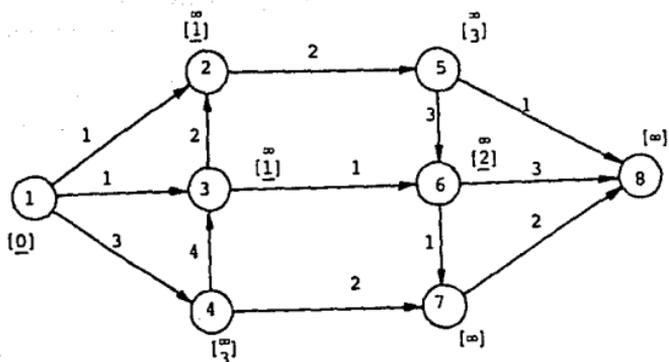
donde  $i^* = 3$  nodo con mínima etiqueta temporal. Se marca  $d(3)$  como permanente;  $k = 3$  ( $k \neq m = 8$ ).



> Iteración 3. Actualización de etiquetas:  $\Gamma(k) = \{6\}$ ,

$$d(6) = \min \{\infty, 2\} = 2 \text{ y } a(6) = 3,$$

donde  $i^* = 6$  nodo con mínima etiqueta temporal. Se marca  $d(6)$  como permanente.  $K = 6$  ( $k \neq m = 8$ ).

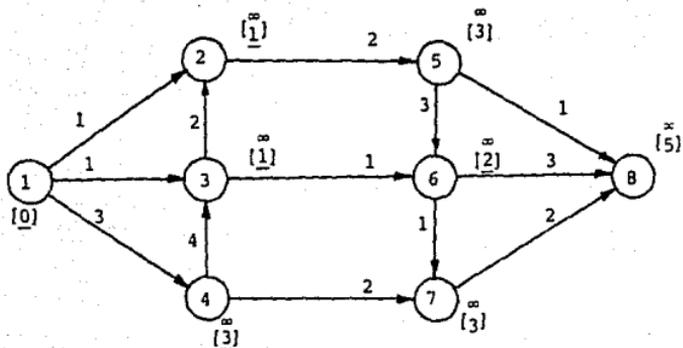


> Iteración 4. Actualización de etiquetas:  $\Gamma(k) = \{7, 8\}$

$$d(7) = \min \{\infty, 3\} = 3 \text{ y } a(7) = 6,$$

$$d(8) = \min \{\infty, 5\} = 5 \text{ y } a(8) = 6,$$

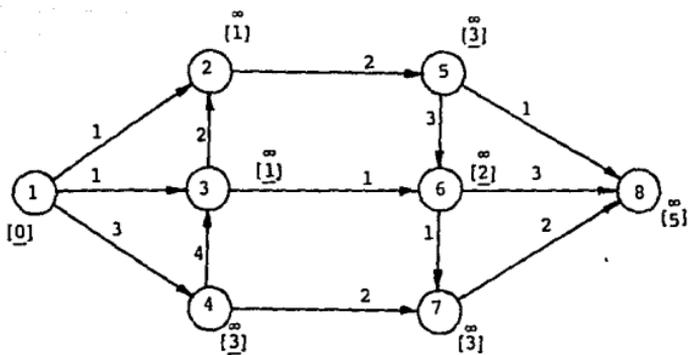
donde  $i^* = 4$ . Se marca  $d(4)$  como permanente.  $K = 4$   
 ( $k \neq m = 8$ ).



> Iteración 5. Actualización de etiquetas:  $\Gamma(k) = \{7\}$ ,

$d(7) = \min \{3, 5\} = 3$ ,  $a(7)$  no se modifica,

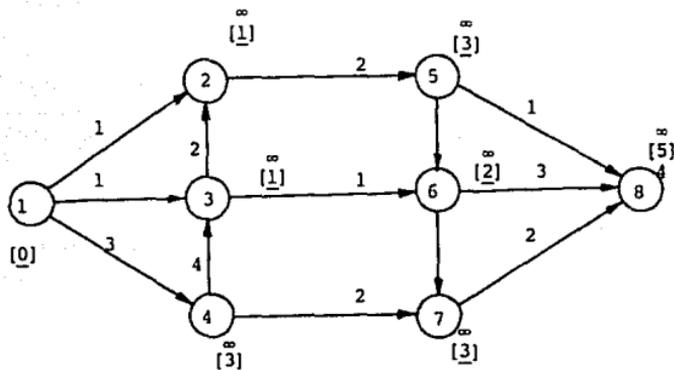
e  $i^* = 5$ . Se marca  $d(5)$  como permanente.  $K = 5$ , ( $K \neq m = 8$ )



> Iteración 6. Actualización de etiquetas:  $\Gamma(k) = \{8\}$ ,

$$d(8) = \{5,4\} = 4 \text{ y } a(8) = 5,$$

donde  $i^* = 7$ . Se marca  $d(7)$  como permanente.  $K = 7$ , ( $k \neq m = 8$ )

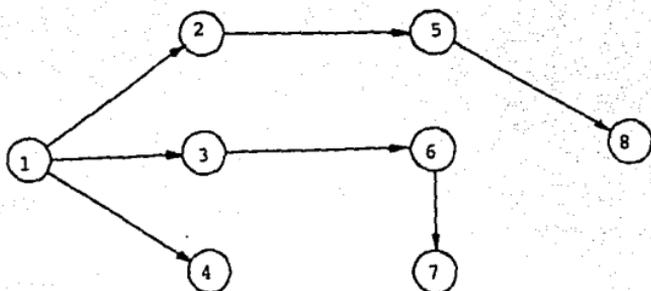


> Iteración 7. Actualización de etiquetas:  $\Gamma(K) = \{8\}$ ,

$$d(8) = \{4,5\} = 5 \text{ y } a(8) \text{ no se modifica}$$

Todos los nodos tienen etiqueta permanente. *Parar.*

La trayectoria de ruta más corta con raíz en el nodo uno, está formada por el conjunto de arcos  $(i, a(i))$ . Esta trayectoria es:



### 3.4.3. RUTA MAS CORTA ENTRE TODO PAR DE NODOS (Algoritmo de Floyd).

Este procedimiento, desarrollado por R.W. Floyd en 1962, se aplica a redes que admiten cualquier costo en sus arcos. En el algoritmo de Floyd supondremos una numeración de los nodos de la red  $(1, 2, \dots, n)$  y utilizaremos una matriz  $C$ , de  $n \times n$ , para calcular las longitudes de las rutas más cortas entre todo par de nodos; al terminar de aplicar el algoritmo, la longitud, de la ruta más corta entre los nodos  $i$  y  $j$  estará dada por el elemento  $(i, j)$  de  $C$ . En la  $k$ -ésima iteración se calcula la longitud de la ruta más corta, entre  $i$  y  $j$ , que puede admitir a los primeros  $k$  nodos, o algunos de ellos,

como nodos intermedios; este número se almacena en la entrada  $(i,j)$  de la matriz  $C$ . Al principio se asigna el costo del arco  $(i,j)$  al elemento  $(i,j)$  de la matriz  $C$ , si  $i \neq j$ ; si este arco no existe, entonces se asigna  $\infty$ . Los valores de la diagonal serán cero. Con esto quedan calculadas las longitudes de las rutas más cortas entre todo par de nodos  $i,j$  que no contengan ningún nodo como nodo intermedio. Al principio de la  $k$ -ésima iteración, la entrada  $(i,j)$  de  $C$  es igual a la longitud de la ruta más corta, entre  $i$  y  $j$ , que contiene a los primeros  $k-1$  nodos, o alguno de ellos, como nodos intermedios, entre  $i$  y  $k$ , y  $k$  y  $j$ . De esta manera se obtiene la ruta más corta, entre  $i$  y  $j$ , que contiene a los primeros  $k$  no dos, o alguno de ellos, como nodos intermedios. Procediendo de este modo se tendrá que, al final de la  $n$ -ésima iteración, la entrada  $(i,j)$  de  $C$  es la longitud de la ruta más corta, en tre  $i$  y  $j$ , que contiene a los primeros  $n$  nodos como nodos intermedios, o algunos de ellos; es decir, se habrá calculado la longitud de la ruta más corta entre  $i$  y  $j$ .

Debemos observar, sin embargo, que si al finalizar de aplicar el algoritmo, alguna entrada de  $C$  es igual a  $\infty$ , ésto querrá decir que no existe ruta alguna entre los nodos correspondientes.

Por otra parte, si algún elemento de la diagonal de  $C$ , supóngase el  $(i,j)$ , es menor que cero en alguna iteración, se

habrá encontrado una ruta de  $i$  a  $i$  de longitud negativa (es decir, un circuito negativo). Luego, el problema no tiene solución. Así pues, el algoritmo será de gran utilidad en problemas de detección de circuitos negativos.

ALGORITMO. De Floyd

PROPOSITO. Obtener las rutas más cortas entre todo par de nodos en una red con  $n$  nodos.

#### DESCRIPCION

Paso 1. Construir la matriz  $C$   $n \times n$  de elementos  $c_{ij}$ , donde

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j \\ \infty, & \text{si } (i,j) \notin A \\ d(i,j), & \text{si } (i,j) \in A \end{cases}$$

y donde  $A$  es el conjunto de arcos de la red. Hacer  $k = 0$ .

Paso 2. Hacer  $k = k+1$ . Para todo  $i \neq k$  tal que  $c_{ij} \neq \infty$ , y para todo  $j \neq k$  tal que  $c_{kj} \neq \infty$ , hacer:

$$c_{ij} = \min\{c_{ij}, c_{ik} + c_{kj}\}$$

Paso 3. (i) Si  $c_{ii} < 0$  para alguna  $i$ , terminar. En este caso existe un circuito negativo que contiene al nodo  $i$ , por lo que no hay solución.

(ii) Si  $c_{ij} \geq 0$ , para toda  $i$ , y  $k = n$ , *terminar*,  $c_{ij}$  es la longitud del camino más corto de  $i$  a  $j$ .

(iii) Si  $c_{ij} \geq 0$ , para toda  $i$ , y  $k < n$ , ir al paso 2.

Para recuperar las rutas más cortas puede construirse una matriz  $A$  de dimensión  $n \times n$ ; el elemento  $a_{ij}$  de esta matriz será el predecesor del nodo  $j$  en la ruta de  $i$  a  $j$  encontrada en cada iteración. Dada la definición de  $A$ , sus entradas se inicializarán  $a_{ij} = i$ , para todo par de nodos  $i, j$ .  $A$  se modificará en el paso 2 de la  $k$ -ésima iteración de acuerdo con:

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{kj}, & \text{si } c_{ik} + c_{kj} < c_{ij} \\ \text{no cambia,} & \text{si } c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj} \end{cases}$$

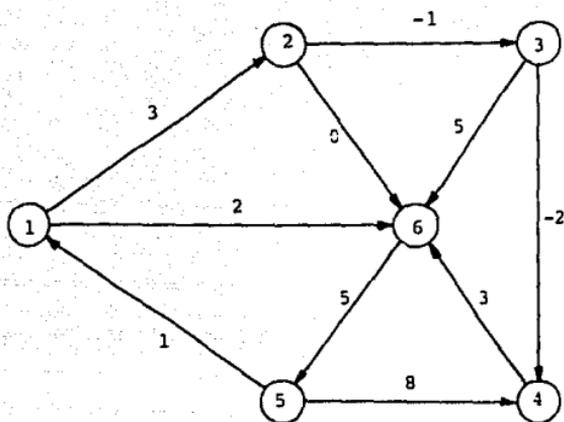
El algoritmo de Floyd *termina exactamente en  $n$  iteraciones*, donde  $n$  es el número de nodos de la red, a menos que termine en el inciso (i) del paso 3; en este último caso, se terminará en menos de  $n$  iteraciones. Mostraremos *enseguida* su optimalidad, por inducción sobre el número de *iteraciones*.

Al principio de la iteración 1 (paso 1) la entrada ( $i$ ,  $j$ ) de la matriz representa la longitud de la ruta más corta, que no contiene ningún nodo intermedio, entre los nodos  $i$  y  $j$ .

Durante el paso 2 de esta iteración se realiza una comparación entre dicha longitud ( $c_{ij}$ ) y la de aquella ruta formada por la unión de la ruta entre  $i$  y  $l$  y la ruta entre  $l$  y  $j$  ( $c_{il} + c_{lj}$ ); de este modo se obtiene la longitud de la ruta más corta, entre los nodos  $i$  y  $j$ , que no contiene ningún nodo intermedio o que contiene al nodo  $l$  como intermedio. Supóngase que al final de la iteración  $k-1$ ,  $c_{ij}$  representa la longitud de la ruta más corta entre  $i$  y  $j$ , que contiene a los primeros  $k-1$  nodos como nodos intermedios, o a algunos de ellos. Durante el paso 2 de la iteración  $k$  se realiza la comparación entre esta última longitud ( $c_{ij}$ ) y la de aquella ruta formada por la unión de las rutas más cortas, que admiten a los primeros  $k-1$  nodos como nodos intermedios, entre  $i$  y  $k$ , y entre  $k$  y  $j$  ( $c_{ik} + c_{kj}$ ); entonces, al final de la  $k$ -ésima iteración,  $c_{ij}$  es igual a la longitud de la ruta más corta entre  $i$  y  $j$ , que contiene a los primeros  $k$  nodos como intermedios, o a algunos de ellos.

De lo anterior, concluimos que al final de la iteración  $n$ ,  $c_{ij}$  es la longitud de la ruta más corta entre los vértices  $i$  y  $j$ .

Ejemplo 5. Consideremos la siguiente red:



con la capacidad máxima sobre los arcos. Determinaremos las rutas más cortas entre todo par de nodos mediante el algoritmo de Floyd.

> Iteración 1. Las matrices C y A resultantes son:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 0 & -1 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & 0 & -2 & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ 1 & \infty & \infty & 8 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Se asigna  $k = 1$  y se actualizan las matrices  $C$  y  $A$ :

$$c_{52} = \min \{\infty, 1+3\} = 4, a_{52} = a_{12} = 1$$

$$c_{56} = \min \{\infty, 1+2\} = 3, a_{56} = a_{16} = 1$$

Estos son los únicos elementos que se modifican puesto que  $c_{ii} = \infty$ , para  $i = 2, 3, 4, 6$  y  $c_{ij} = \infty$  para  $j = 3, 4, 5$ . Las matrices resultantes son:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 0 & -1 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & 0 & -2 & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ 1 & 4 & \infty & 8 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 5 & 5 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

puesto que  $k < n = 6$ ,  $c_{ii} = 0$  para todo  $i$ , aún no se han revisado las rutas y se lleva a cabo la siguiente iteración.

> Iteración 2. Se asigna  $k = 2$  y se actualizan los elementos:

$$c_{13} = \min \{\infty, 3-1\} = 2, a_{13} = a_{23} = 2$$

$$c_{53} = \min \{\infty, 4-1\} = 3, a_{53} = a_{23} = 2$$

$$c_{16} = \min \{2, 3+0\} = 2, \text{ no se modifica } a_{16}$$

$$c_{56} = \min \{3, 4+0\} = 3, \text{ no se modifica } a_{56}$$

Las matrices resultantes en esta iteración son:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 0 & -1 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & 0 & -2 & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 8 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

puesto que  $k = 2 < n = 6$  y  $c_{ii} = 0$  para todo  $i$ , se realiza otra iteración.

> *Iteración 3.* Se asigna  $k=3$  y se actualizan los elementos:

$$c_{14} = \min \{\infty, 2-2\} = 0, a_{14} = a_{34} = 3$$

$$c_{16} = \min \{2, 2+5\} = 2, \text{ no se modifica } a_{16}$$

$$c_{24} = \min \{\infty, -1-2\} = -3, a_{24} = a_{34} = 3$$

$$c_{26} = \min \{0, -1+5\} = 0, \text{ no se modifica } a_{26}$$

$$c_{54} = \min \{8, 3-2\} = 1, a_{54} = a_{34} = 3$$

$$c_{56} = \min \{3, 3+5\} = 3, \text{ no se modifica } a_{56}.$$

Las matrices que resultan de esta iteración son:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & \infty & 2 \\ \infty & 0 & -1 & -3 & \infty & 0 \\ \infty & \infty & 0 & -2 & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

como  $k < n$ ; aún no se tiene la solución.

> Iteración 4. Se asigna  $k = 4$  y se actualizan los elementos:

$$c_{16} = \min \{2, 0+3\} = 2, \text{ no se modifica } a_{16}$$

$$c_{26} = \min \{0, -3+3\} = 0, \text{ no se modifica } a_{26}$$

$$c_{36} = \min \{5, -2+3\} = 1, \quad a_{36} = a_{46} = 4$$

$$c_{56} = \min \{3, 1+3\} = 3, \text{ no se modifica } a_{56}$$

En base a lo anterior se tienen las siguientes matrices:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & \infty & 2 \\ \infty & 0 & -1 & -3 & \infty & 0 \\ \infty & \infty & 0 & -2 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$k < n$ ; aún no se determina la solución.

Iteración 5. Se asigna  $k = 5$  y se actualiza los elementos:

$$c_{61} = \min \{\infty, 1+5\} = 6, \quad a_{61} = a_{51} = 5$$

$$c_{62} = \min \{\infty, 4+5\} = 9, \quad a_{62} = a_{52} = 1$$

$$c_{63} = \min \{\infty, 3+5\} = 8, \quad a_{63} = a_{53} = 2$$

$$c_{64} = \min \{\infty, 1+5\} = 6, \quad a_{64} = a_{54} = 3$$

$$c_{66} = \min \{0, 3+5\} = 0, \quad \text{no se modifica } a_{66}.$$

Tenemos entonces que las nuevas matrices son:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & \infty & 2 \\ \infty & 0 & -1 & -3 & \infty & 0 \\ \infty & \infty & 0 & -2 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 6 & 9 & 8 & 6 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$k < n$ ; realizamos, entonces, una nueva iteración.

Iteración 6. Se asigna  $k = 6$ . Se actualizan los elementos:

$$c_{11} = \min \{0, 6+2\} = 0, \quad \text{no se modifica } a_{11}$$

$$c_{12} = \min \{3, 9+2\} = 3, \quad \text{no se modifica } a_{12}$$

$c_{13} = \min \{2, 8+2\} = 2$ , no se modifica  $a_{13}$   
 $c_{14} = \min \{0, 6+2\} = 0$ , no se modifica  $a_{14}$   
 $c_{15} = \min \{\infty, 5+2\} = 7$ ,  $a_{15} = a_{65} = 6$   
 $c_{21} = \min \{\infty, 6+0\} = 6$ ,  $a_{21} = a_{61} = 5$   
 $c_{22} = \min \{0, 9+0\} = 0$ , no se modifica  $a_{22}$   
 $c_{23} = \min \{-1, 8+0\} = -1$ , no se modifica  $a_{23}$   
 $c_{24} = \min \{-3, 6+0\} = -3$ , no se modifica  $a_{24}$   
 $c_{25} = \min \{\infty, 5+0\} = 5$ ,  $a_{25} = a_{65} = 6$   
 $c_{31} = \min \{\infty, 6+1\} = 7$ ,  $a_{31} = a_{61} = 5$   
 $c_{32} = \min \{\infty, 9+1\} = 10$ ,  $a_{32} = a_{62} = 1$   
 $c_{33} = \min \{0, 8+1\} = 0$ , no se modifica  $a_{33}$   
 $c_{34} = \min \{-2, 6+1\} = -2$ , no se modifica  $a_{34}$   
 $c_{35} = \min \{\infty, 5+1\} = 6$ ,  $a_{35} = a_{65} = 6$   
 $c_{41} = \min \{\infty, 6+3\} = 9$ ,  $a_{41} = a_{61} = 5$   
 $c_{42} = \min \{\infty, 9+3\} = 12$ ,  $a_{42} = a_{62} = 1$   
 $c_{43} = \min \{\infty, 8+3\} = 11$ ,  $a_{43} = a_{63} = 2$   
 $c_{44} = \min \{\infty, 5+3\} = 8$ ,  $a_{45} = a_{65} = 6$   
 $c_{51} = \min \{1, 6+3\} = 1$ , no se modifica  $a_{51}$   
 $c_{52} = \min \{4, 9+3\} = 4$ , no se modifica  $a_{52}$   
 $c_{53} = \min \{3, 8+3\} = 3$ , no se modifica  $a_{53}$   
 $c_{54} = \min \{1, 6+3\} = 1$ , no se modifica  $a_{54}$   
 $c_{55} = \min \{0, 5+3\} = 0$ , no se modifica  $a_{55}$

De lo anterior resultan las siguientes matrices C y A:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & 7 & 2 \\ 6 & 0 & -1 & -3 & 5 & 0 \\ 7 & 10 & 0 & -2 & 6 & 1 \\ 9 & 12 & 11 & 0 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 6 & 9 & 8 & 6 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 3 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 3 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Puesto que  $k = n = 6$ , la última matriz es la matriz de longitudes más cortas entre todo par de nodos.

Para recuperar las rutas se utiliza la matriz A. Por ejemplo, la ruta de 1 a 1 se obtiene de la siguiente manera: el predecesor de 1 en la ruta 1 a 1 es 1; es decir se tiene la ruta vacía de longitud cero. La ruta entre los nodos 3 y 1 se obtiene del modo siguiente: el predecesor de 1 en la ruta de 3 a 1 es  $a_{31} = 5$ ; el predecesor de 5 en la ruta de 3 a 5 es  $a_{35} = 6$ ; el predecesor de 6 en la ruta de 3 a 6 es  $a_{36} = 4$ ; el predecesor de 4 en la ruta de 3 a 4 es  $a_{34} = 3$ . Entonces, la ruta entre los nodos 3 y 1 es 3, 4, 6, 5, 1 de longitud  $c_{31} = 7$ . Para encontrar la ruta de 6 a 5 se tiene que el predecesor de 5 en la ruta de 6 a 5, es 6; entonces la ruta más corta entre los nodos 6 y 5 es 6, 5, de longitud  $c_{65} = 5$ . De manera análoga obtenemos las demás rutas.

## capítulo 4

## CAPITULO 4

### MÉTODOS PRIMALES DUALES II: ANÁLISIS DE REDES DE FLUJO

(Segunda parte)

En este capítulo continuamos con la especialización del Método Primal-Dual (MP-D) a problemas de redes de flujo. Parte medular es el ya mencionado *Problema de Flujo a Costo Mínimo* (F.C.M.), que es una generalización de todos los problemas tratados en el capítulo anterior. Uno de los aspectos más interesantes es la unificación de los métodos clásicos de ciclo negativo y ruta más corta-flujo máximo como casos especiales de la especialización del MP-D. Para el caso del método de ciclo negativo, se demuestra que la búsqueda de dicho ciclo equivale a la solución del primal restringido cuyo resultado es la solución óptima del problema original o bien, a través del correspondiente dual restringido, un mejoramiento de la solución dual factible disponible. Para el caso del método de ruta más corta-flujo máximo se hace algo semejante.

En la segunda mitad del capítulo se describe el *Problema de Hitchcock* y enseguida se resuelve haciendo uso del MP-D.

Se discute, obviamente, su equivalencia con el problema de flujo a costo mínimo y se da un ejemplo al final.

En ese sentido, en la primera sección definiremos el F.C.M. En las segunda y tercera secciones daremos dos opciones para aplicar el MP-D en la solución del F.C.M. En la cuarta sección veremos el MP-D para el problema de Hitchcock -que puede particularizarse al P.A.- y en la quinta y última sección aplicaremos una transformación -debida a Wagner- del problema de flujo a costo mínimo a uno de Hitchcock.

#### 4.1 EL PROBLEMA DE FLUJO A COSTO MÍNIMO.

El Problema de Flujo a Costo Mínimo (F.C.M.) se define como sigue.

Sea  $G = (V, A)$  la gráfica dirigida asociada a una red de flujo  $N$ , donde se distingue la presencia de un nodo fuente "1", un nodo sumidero "n" y un flujo  $v_0 \geq 0$ . Asimismo, para todo arco  $(i, j) \in A$ , existen  $b(i, j)$ ,  $c(i, j) \in \mathbb{R}^+$  que representan, respectivamente, la cota superior y el costo por unidad de flujo en el arco  $(i, j)$ . El problema consiste entonces en determinar un flujo factible del nodo fuente al nodo sumidero de valor  $v_0$  que tenga costo mínimo\*. Expresado en forma de P.P.L. queda como:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t f \\ \text{s. a} \quad & Af = -v_0 d \\ & f \leq b, \quad \text{para cada arco} \\ & f \geq 0, \quad \text{para cada arco} \end{aligned} \tag{1}$$

donde  $A$  es la matriz de incidencia nodos-arcos y

$$d_i = \begin{cases} -1, & i = 1 \text{ (nodo fuente)} \\ 1, & i = n \text{ (nodo sumidero)} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \tag{2}$$

---

\* Otra forma de escribirlo es: "determinar un 1-n flujo factible de valor  $v_0$  y que tenga costo mínimo".

Por cierto, hacemos notar que el problema de F.C.M. requiere, decíamos, de un flujo de valor fijo ( $v_0$ ) que es el más barato entre todos los flujos de ese mismo valor, a diferencia del problema de F.M. que sólo requiere encontrar el mayor flujo entre el nodo 1 (fuente) y el 2 (sumidero).

En esta sección aplicaremos el Algoritmo Primal-Dual (A. P-D) al problema de F.C.M. Contamos para ello con dos opciones:

- Opción No. 1. Considerando al problema original como el dual (D) y reduciendo las complicaciones del vector del lado derecho, de tal manera que la solución iterativa transfiere a subproblemas de F.C.M.
  
- Opción No. 2. Considerando al problema original como el primal (P) y reduciendo las complicaciones del vector de costos.

Desarrollaremos primeramente la opción 1 (6 Algoritmo del ciclo), la cual mantiene una solución factible al problema original (D) en todas las iteraciones y no trata explícitamente con el primal (P) o su restricción. Posteriormente desarrollaremos la opción 2 (6 Algoritmo Acumulativo o de Construcción) en la cual será necesario efectuar algunos cambios al problema original (P) que nos permitan llegar a un algoritmo que evite al problema dual.

#### 4.1.1. EL ALGORITMO DEL CICLO.

Para comenzar, escribimos el problema de F.C.M. como el dual de un problema primal en forma canónica. Queda como

$$\begin{aligned} \max \quad & -c^t f \\ \text{s.a.} \quad & Af \leq -v_0 d \\ & f \leq b, \text{ para cada arco} \\ & -f \leq 0, \text{ para cada arco} \end{aligned} \tag{3}$$

Hagamos la siguientes observaciones:

- a) Hemos transformado las ecuaciones de conservación de flujo en desigualdades, ya que un déficit en la ecuación de balance de algún nodo implica un exceso en la ecuación de balance de algún otro nodo. Por lo tanto, para cualquier flujo factible, el primer grupo de desigualdades se cumplirá como igualdad.
- b) Para encontrar el flujo factible inicial de valor  $v_0$  en (D) se puede hacer uso del algoritmo de Ford y Fulkerson visto en la sección 3.3 del capítulo anterior.

Pues bien, el dual del primal restringido (DPR) podemos deducirlo por inspección, con lo que tendríamos

$$\begin{aligned} \max \quad & -c^t f \\ & Af = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(DPR)} \quad & f \leq 0 \text{ para arcos saturados} & (4) \\
 & f = 0 \text{ para arcos vacíos} \\
 & f \geq -1 \text{ para todos los arcos (ya que } -c \leq 0)
 \end{aligned}$$

Notemos que  $Af \leq 0$  en (3) se reemplazó por  $Af = 0$  en (4), de acuerdo a la justificación dada antes en la observación a). Recobramos entonces la idea de conservación de flujo en cada nodo. Un flujo factible que satisface  $Af = 0$  tendrá un significado especial para nosotros, tan particular que se distingue por su nombre.

Definición. Un flujo factible  $f$  que satisface  $Af = 0$  recibe el nombre de circulación. Su costo es  $c^t f$ .

Observemos entonces que la solución óptima para el DPR es una circulación de una clase especial, pues debe cumplir:

- i) No tener flujo positivo sobre un arco saturado.
- ii) No tener flujo negativo sobre un arco vacío.
- iii) El flujo que recorre cualquier arco no debe ser menor que -1.

Así pues, dadas las condiciones anteriores, resulta de interés incorporarlas en una nueva red capacitada y con costos. Para ello, se hará uso del concepto de red incremental cuya definición se da enseguida.

Definición. Dado un flujo factible  $f$  en la red  $N$  con gráfica asociada  $G = (V,A)$ , definimos la red incremental  $N'(f)$  como sigue: (i)  $N'$  tendrá el mismo conjunto de nodos que  $N$ ; (ii) para cada arco  $(i,j) \in A$  con flujo  $v$  ( $f(i,j)=v$ ), capacidad de  $(i,j)=d$  y costo  $c$  ( $c(i,j)=c$ ) se proponen dos arcos en  $N'$ : un arco  $(i,j)$  con capacidad  $d-v \geq 0$ ; y otro arco  $(j,i)$  con capacidad  $v \geq 0$  y costo  $-c$ . En particular, se omiten todos aquellos arcos con capacidad cero, (ver figura 1).

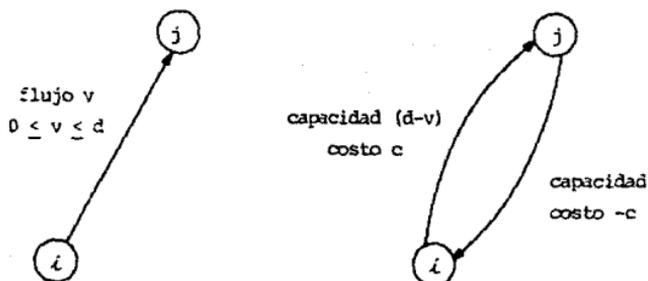


Figura 1. Un arco en una red de flujo, y los arcos correspondientes en la red incremental  $N'(f)$

De la definición anterior se sigue que una trayectoria del nodo  $i$  (fuente) al nodo  $n$  (sumidero) en  $N'(f)$ , y con peso  $X$ , determina un aumento (una cadena aumentante -ver apéndice C-) del nodo  $i$  al nodo  $n$  en  $N(f)$ , y que un incremento de una

unidad en el valor del flujo  $f$  del nodo  $1$  al nodo  $n$  a lo largo de esta trayectoria resulta en un incremento en el costo total del flujo en  $X$  unidades. De la misma manera, una circulación  $\bar{f}$  en  $N'(f)$  de costo  $X$  determina un nuevo flujo  $f + \bar{f}$  del nodo  $1$  al nodo  $2$  en  $N$  del mismo valor, con un incremento de costo de  $X$  unidades.

Ahora bien, el A.P-D indica que el flujo es óptimo si y sólo si la solución óptima al (DPR) tiene costo cero, lo que equivale a que no haya circulaciones de costo negativo en  $N'(f)$ . Pero la red incremental  $N'(f)$  tiene una circulación de costo negativo si y sólo si tiene un ciclo de costo negativo.

La condición para la optimalidad en (DPR) se exhibe en el siguiente teorema.

Teorema. Un flujo del nodo fuente al nodo sumidero es un flujo óptimo de costo mínimo si y sólo si no hay ciclos con costo negativo en  $N'(f)$ .

El A.P-D puede implementarse después de haberse obtenido un flujo  $f$  de valor  $v_0$  y usando, como ya lo mencionamos, el algoritmo de Ford y Fulkerson, y buscar por ciclos de costo negativo en la red incremental asociada, por ejemplo, mediante el algoritmo de Floyd y Warshall.

Si  $N'$  no contiene más ciclos negativos, se finaliza con el flujo óptimo en la red  $N$ . En caso contrario, sea  $C'$  el ci-

clo negativo en  $N'(f)$ ; la parte iterativa del A.P-D procede a realizar los cambios pertinentes en la red  $N$ , hasta encontrar el nuevo flujo  $f + \bar{f}$  del mismo valor pero de menor costo. El proceso para realizar los cambios es el siguiente:

- Sea

$$s = \min \{b(i,j) \mid (i,j) \in C'\} \quad (5)$$

el máximo flujo permitido en el ciclo  $C'$  de  $N$ .

- Con esta información, un flujo de  $s$  unidades puede "viajar" a través de  $C'$ , de donde un flujo  $\bar{f}$  del mismo número de unidades circula a través del ciclo  $C$  en  $N$  asociado a éste. Se ha obtenido una circulación  $\bar{f}$  de costo negativo. De esta forma, se determina un nuevo flujo  $f + \bar{f}$  en  $N$  del mismo valor, pero con un decremento en costo.
- Es en base al nuevo flujo  $(f + \bar{f})$  que se forma la nueva red incremental y se repite el proceso hasta que no existan ciclos negativos en  $N'$ . Por último, no es ocioso comentar que, una vez encontrado el flujo de  $v_0$ , el algoritmo del ciclo mantiene su factibilidad hasta encontrar la solución óptima.

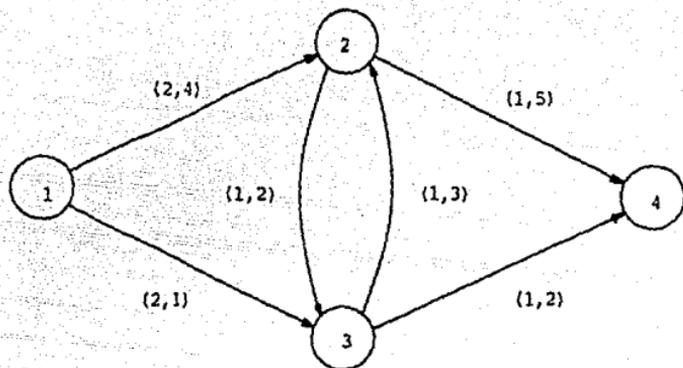
ALGORITMO. *Del Ciclo*

PROPOSITO. *Determinar el flujo a costo mínimo de valor  $v_0$  en una red.*

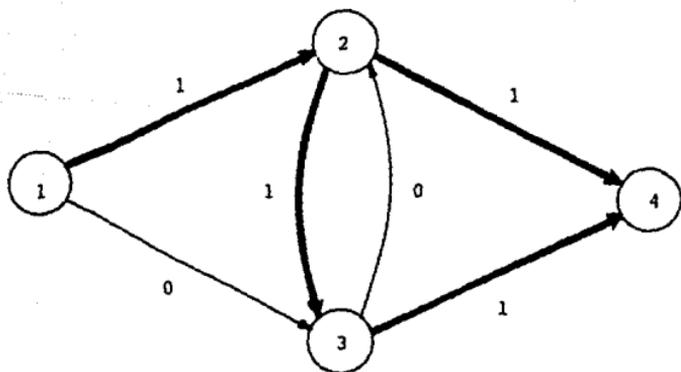
## DESCRIPCION

- Paso 1. Usar el algoritmo de flujo máximo de Ford y Fulkerson para encontrar un flujo de valor  $v_0$ . Si se encuentra dicho valor ir al paso 2; en caso contrario el problema es infactible. Terminar.
- Paso 2. Diseñar la red incremental  $N'$  asociada al flujo  $f$ :  $N'(f)$ .
- Paso 3. Identificar, mediante algún algoritmo de ruta más corta, algún ciclo con costo negativo  $c$  en  $N'(f)$ . Si no existen ciclos con costo negativo, terminar; el flujo actual  $f$  es el requerido. En caso contrario, sea  $C'$  el ciclo con costo negativo. Ir al paso 4.
- Paso 4. Calcular  $\delta$  y aumentar el flujo sobre  $C'$ , sin sobrepasar su capacidad. Ir al paso 2.

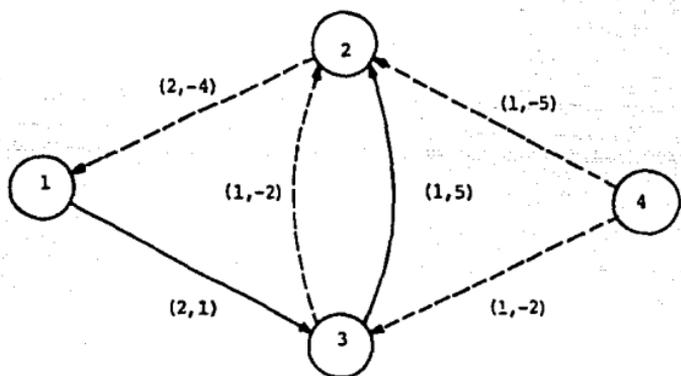
Ejemplo 1. Consideremos la red  $G(V,A)$  con cuatro nodos y seis arcos ilustrada abajo. El problema de F.C.M. es encontrar un flujo de valor 2 del nodo fuente al nodo sumidero, a costo mínimo. (Los números en el paréntesis indican la capacidad y el costo, respectivamente.)



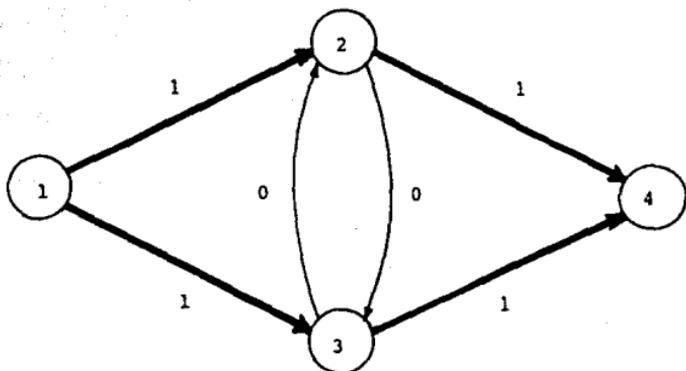
Suponga que hay un flujo de una unidad en las trayectorias (1,2), (2,4) y (1,2), (2,3), (3,4), con un costo total de 17.



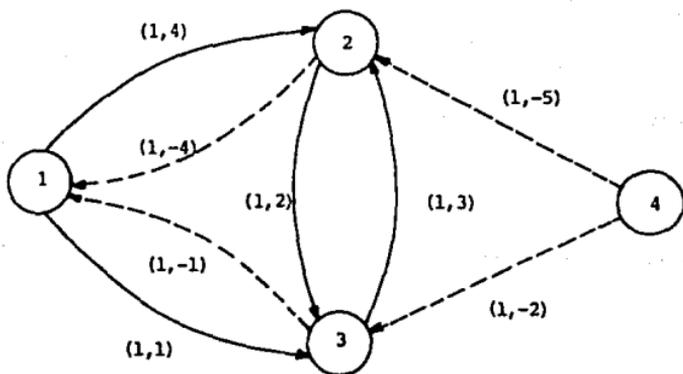
La red incremental  $G'$  es la siguiente:



Notemos que el ciclo con costo negativo  $(1,3), (3,2), (2,1)$  es una circulación  $\bar{f}$  de costo  $-5$ . Podemos sumar una unidad de la circulación  $\bar{f}$  para la  $f$  original, produciendo un flujo de una unidad en  $(1,2), (2,4)$  y  $(1,3), (3,4)$ , con un costo total de  $7 - 5 = 12$ .



La nueva red incremental  $G'$  es la que sigue:



La red incremental  $G'$  no tiene ciclos con costo negativo; por lo tanto, el flujo es óptimo.

#### 4.1.2 ALGORITMO ACUMULATIVO.

Como se indicó al principio de la sección, la opción 2 consiste en aplicar el A.P-D. al problema de F.C.M., considerando este problema como un primal (P). De esta manera se reduciría el trabajo de manejar el costo. Esto se complica dado que, por ejemplo, se debiera tratar con el correspondiente dual (D) para encontrar las columnas admisibles.

Es conveniente, por tanto, colocar el problema original en términos ligeramente diferentes: primeramente, se introduce el valor del flujo  $v$  como una variable explícita del problema. En segundo lugar, en vez de minimizar la función  $c^t f$ , se maximiza  $p v - c^t f$ , donde  $p$  puede pensarse como un parámetro que consecutivamente asume valores  $0, 1, 2, \dots$ . De esta forma se obtiene una sucesión de flujos de valor creciente, cada uno de costo mínimo. El efecto de este desarrollo es obtener un algoritmo que evite al dual (D).

El fundamento de dicho algoritmo viene dado por el teorema siguiente.

Teorema. Sea  $f_1$  un flujo óptimo de valor  $v$  en un problema de flujo a costo mínimo. Sea  $f_2$  un flujo de valor  $1$  en una trayectoria aumentada  $P$  del nodo fuente al nodo sumidero en  $N'(f_1)$  de costo mínimo. Entonces  $f_1 + f_2$  es un flujo óptimo de valor  $v + 1$ .

Prueba. Si  $f_1 + f_2$  no es óptimo, entonces, por el teorema anterior, hay un ciclo de costo negativo  $C'$  en la red incremental  $N'(f_1 + f_2)$ .

Ahora, debido a que el flujo de valor  $v$  era óptimo,  $N'(f_1)$  no contenía ciclos negativos. Luego, el ciclo apareció en la red incremental cuando el flujo incrementó su valor. Observemos que el flujo  $f_1 + f_2$  se diferencia de  $f_1$  sólo en aquellos arcos que forman la trayectoria  $P$  en  $N$ , correspondiente al camino  $P'$  en  $N'(f_1)$ .

Sea  $A(P) = \{(i,j) \mid (i,j) \in P\}$ . Entonces, al construir la red incremental asociada al flujo  $f_1 + f_2$ ,  $N'(f_1 + f_2)$ , tenemos que para cada  $(i,j) \in A(P)$ , sus arcos asociados en  $N'(f_1 + f_2)$  son idénticos a los asociados en  $N'(f_1)$ , o bien, para cada  $(i,j) \in A(P)$ , sus arcos asociados en  $N'(f_1 + f_2)$  son diferentes a los asociados en  $N'(f_1)$ . Luego,  $C'$  tiene un arco  $e = (i,j)$  de costo  $-c$  correspondiente a un arco  $(j,i)$  sobre  $P$ , como se muestra en la figura 2.

Ahora bien, reemplácese el arco  $(j,i)$  en  $P'$  por  $c' - (e)$  y llámese  $P''$  a esta nueva trayectoria entre los nodos fuente y sumidero. Nótese además que

$$-c + (\text{costo del resto de } C') = \text{costo de } C' < 0,$$

de donde  $(\text{costo del resto de } C') < c$ . Así pues, en  $N'(f_1)$ ,  $P'$  no es la trayectoria de costo mínimo de los nodos fuente al

sumidero, contradicción que prueba que  $f_1 + f_2$  es óptima. ■

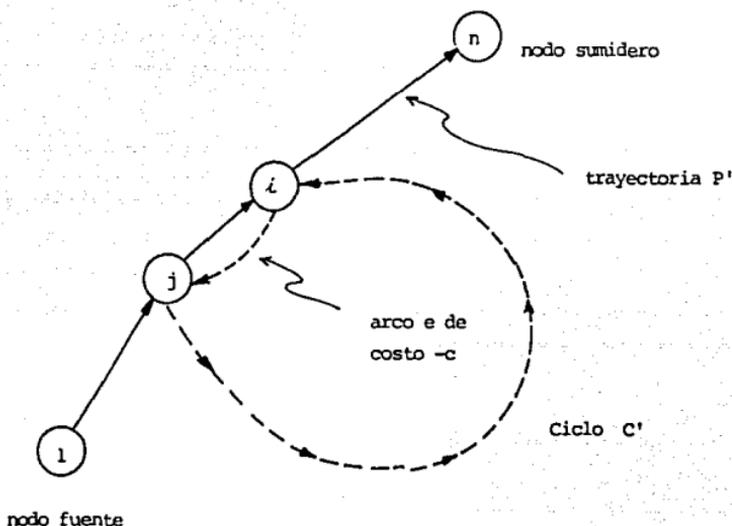


Figura 2. Visualización de la trayectoria  $P'$  y del ciclo  $C'$ .

A partir de este teorema, se pueden ir acumulando (o construyendo) los flujos óptimos paso por paso tras agregar flujo a lo largo de trayectorias aumentantes 1 a n de costo mínimo en  $N'$ . El proceso de búsqueda de trayectorias 1 a n más cortas nos lleva a 2 casos:

- i) Se encuentra una trayectoria aumentante de costo mínimo  $P'$  en  $N'$ ; entonces se aumenta el flujo en  $P$  hasta que el flujo alcanza el valor  $v_0$ , o bien, hasta que  $P$  no sea más grande que la trayectoria aumentante de costo mínimo porque uno de estos arcos desaparece debido a la saturación o es vacío el arco correspondiente a  $N$ .
- ii) No existe una trayectoria  $l$  a  $n$  y el problema no tiene solución.

El investigar trayectorias de costo mínimo de  $l$  a  $n$  en  $N'$  equivale a buscar rutas  $l$  a  $n$  más cortas. Luego, se puede implantar un algoritmo que resuelva dicho problema, simplemente con observar que algunos arcos de  $N'$  pueden tener costo negativo y el algoritmo (de rutas más cortas) debe enfrentar este problema. Un hecho agradable es que, en cualquier etapa, siempre se tiene un flujo óptimo de algún valor  $f < v_0$  por lo que, por el teorema de la opción 1, no hay ciclos de costo negativo en  $N'$ .

ALGORITMO. *Acumulativo.*

PROPOSITO. *Determinar el flujo a costo mínimo de valor cero en la red.*

#### DESCRIPCION

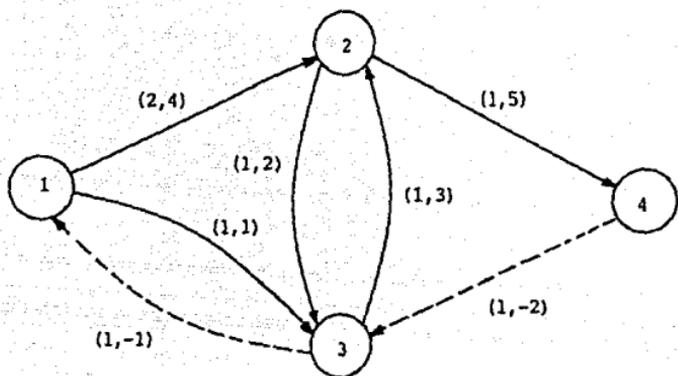
- Paso 1. Determinar un flujo factible  $f$  de costo mínimo de valor cero en la red.
- Paso 2. Construir la red incremental con respecto a  $f: N'(f)$ .
- Paso 3. Encontrar, si el flujo  $f < v_0$ , una trayectoria de ruta más corta  $P$  del nodo fuente al nodo final en  $N'$ .
- Paso 4. Hacer

$$d = \min_{(i,j) \in P} \{ \text{capacidad de los arcos } N'(f) \}$$

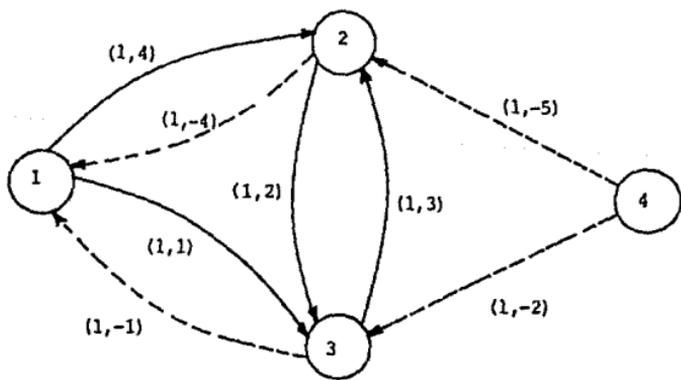
Aumentar el flujo a lo largo de  $P$  hasta alcanzar  $v_0$  o hasta que  $P$  no sea más grande que la trayectoria aumentante de costo mínimo.

En contraposición al algoritmo del ciclo, el algoritmo acumulativo no produce un flujo factible de valor  $v_0$  hasta que termina; si ese no es el caso, diremos que se trata de un algoritmo de problema-infactible.

Ejemplo 2. Consideremos nuevamente la red  $G$  del ejemplo 1. Si definimos el flujo igual a cero a través de todos los arcos de la red, obtendremos un flujo de costo mínimo de valor cero puesto que la red incremental, con respecto a este flujo, coincide con la original y no existen en ella ciclos con costo negativo. El costo mínimo del nodo 1 al nodo 4 es la trayectoria  $(1,3)$ ,  $(3,4)$ , y el aumento a lo largo de esta trayectoria produce un flujo de valor 1 y costo 3. La red incremental  $N'$  es:



Una trayectoria de costo mínimo del nodo fuente al nodo sumidero en la red incremental  $N'$  es  $(1, 2)$ ,  $(2, 4)$ , con flujo 1 y costo 9. La nueva red incremental  $N'$  es:



De este modo, obtenemos el flujo a costo mínimo de valor  $v = 2$ . Observemos que da el mismo flujo óptimo de valor 2 y costo 12 del algoritmo del ciclo.

## 4.2 EL PROBLEMA DE HITCHCOCK.

El *Problema de Hitchcock* (P.H.), que es un caso particular del problema de F.C.M., lo revisamos en esta sección. Dicho problema viene motivado por la siguiente situación. Supóngase que se tienen  $m$  nodos fuente, cada uno de los cuales tiene una oferta de  $a_i$  unidades ( $i=1, \dots, m$ ), y  $n$  nodos sumidero, cada uno de los cuales tiene una demanda de  $b_j$  unidades ( $j=1, \dots, n$ ). Supóngase además que el costo por unidad, del nodo  $i$  al  $j$ , es  $c_{ij}$ . El problema consiste en *satisfacer la demanda a un costo mínimo*. Expresado en forma de P.P.L. queda como:

$$\min \sum_{ij} c_{ij} f_{ij}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n f_{ij} = a_i, \quad i=1, \dots, m \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^m f_{ij} = b_j, \quad j=1, \dots, n \quad (7)$$

$$f_{ij} \geq 0$$

donde

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

(En lugar de las igualdades (6) y (7) anteriores, podríamos haber utilizado las desigualdades

$$\sum_{j=1}^n f_{ij} \leq a_i \quad (i=1, \dots, m) \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^m f_{ij} \geq b_j \quad (j=1, \dots, n)$$

donde  $a_i$  está disponible como oferta y  $b_j$  es la demanda por encontrarse. Sin embargo, (6) y (7) pueden usarse sin pérdida de generalidad ya que siempre podemos introducir un nodo sumidero ficticio "n+1" con demanda

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$$

y costos

$$c_{i, n+1} = 0, \quad i=1, \dots, m).$$

Cuando todas las  $a_i$ 's y todas las  $b_j$ 's son iguales a uno, el P.H. recibe el nombre de P.A.

Nuestra estrategia será la de cambiar los costos en el P.H. y examinar, explícitamente, (D), su dual. Así pues, asignando las variables  $\alpha_i$  y  $\beta_j$  a (6) y (7), respectivamente, llegamos al dual:

$$\begin{aligned} \max w &= \sum_{i=1}^m a_i \alpha_i + \sum_{j=1}^n b_j \beta_j \\ \text{s.a. } \alpha_i + \beta_j &\leq c_{ij} \quad \begin{matrix} (i=1, \dots, m; \\ j=1, \dots, n) \end{matrix} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\alpha_i, \beta_j \text{ no restringidas}$$

Una solución factible inicial para (D) puede escribirse de manera inmediata:

$$x_i = 0 \text{ y } \beta_j = \min_{1 \leq i \leq m} \{c_{ij}\}$$

Enseguida definimos el conjunto admisible IJ de índices de las variables en el primal restringido por las parejas (i,j) para las cuales se cumple la igualdad en el dual (8):

$$IJ = \{(i,j) \mid \alpha_i + \beta_j = c_{ij}\}$$

El primal restringido (PR) lo definimos como:

$$\min \xi = \sum_{i=1}^{m+n} y_i$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_j f_{ij} + y_i = a_i, \quad i=1, \dots, m$$

$$\sum_i f_{ij} + y_{m+j} = b_j, \quad j=1, \dots, n$$

(PR)

$$y_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m+n$$

$$f_{ij} \geq 0, \quad (i,j) \in IJ$$

$$f_{ij} = 0, \quad (i,j) \notin IJ$$

(9)

donde hemos representado por  $y_i$  a las variables artificiales.

El costo en el (PR) puede escribirse como:

$$\xi = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j - 2 \sum_{(i,j) \in IJ} f_{ij}$$

Por tanto, minimizar  $\xi$  equivale a maximizar el flujo total sobre los arcos admisibles. Podemos entonces reescribir el (PR) sin variables artificiales, pero con restricciones de desigualdad, como:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{(i,j) \in IJ} f_{ij} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_j f_{ij} \leq a_i \quad i=1, \dots, m \\ & \sum_i f_{ij} \leq b_j \quad j=1, \dots, n \\ & f_{ij} \geq 0 \quad (i,j) \in IJ \\ & f_{ij} = 0 \quad (i,j) \notin IJ \end{aligned} \tag{10}$$

Este es el problema de F.M. que se muestra en la figura 3. Se crearon un *super-nodo fuente*  $f$  y un *super-nodo sumidero*  $s$ ; del nodo  $f$  a cada uno de los nodos fuente se crearon  $m$  arcos, cada uno con capacidad  $a_i$  ( $i=1, \dots, m$ ), y de cada uno de los nodos sumidero al nodo  $s$  se crearon, también,  $n$  arcos, cada uno con ca

pacidad  $b_j$  ( $j=1, \dots, n$ ). Además, del nodo fuente  $i$  al nodo su

midero  $j$  se creó el arco  $(i,j)$  con capacidad infinita, exacta

mente cuando  $(i,j) \in IJ$ , lo cual asegura que la variable  $f_{ij}$  pue

de ser mayor que cero sólo cuando la pareja  $(i,j)$  es admisible.

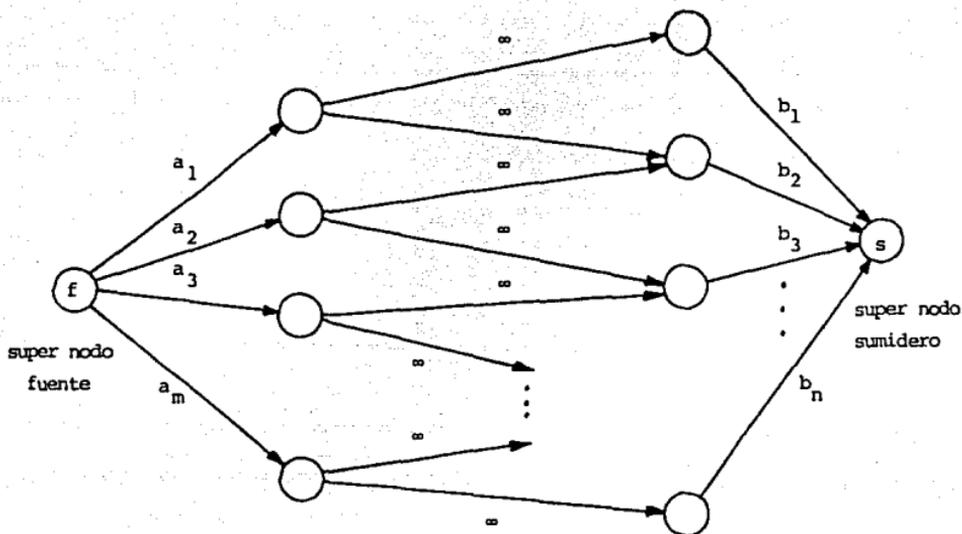


Figura 3. Problema de F.M. equivalente a un problema (PR) de Hitchcock; los arcos de capacidad infinita  $\infty$  corresponden a índices admisibles en el dual.

El A.P-D mejora la s.d.f.  $(\alpha, \beta)$ , con la solución óptima del (DPR),  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ .

Requerimos en este momento de cierta terminología para discutir la aplicación del algoritmo de etiquetas para el (PR) en (9), decimos que se tiene una *no penetración*. En no penetración, sean

$$I^* = \{i \mid \text{nodo fuente } i \text{ está etiquetado}\}$$

$$J^* = \{j \mid \text{nodo sumidero } j \text{ está etiquetado}\}$$

Se está, entonces, en condiciones de proponer una solución óptima al (DPR).

**Teorema.** En no penetración, una solución óptima al problema (DPR) está dada por:

$$\bar{\alpha}_i = 1, \quad i \in I^*$$

$$\bar{\alpha}_i = -1, \quad i \notin I^*$$

$$\bar{\beta}_j = -1, \quad j \in J^*$$

$$\bar{\beta}_j = 1, \quad j \notin J^*$$

**Prueba.** A partir de (PR), por inspección se escribe el (DPR):

$$\max \sum_{i=1}^m a_i \alpha_i + \sum_{j=1}^n b_j \beta_j$$

$$(DPR) \quad \text{s.a.} \quad \alpha_i + \beta_j \leq 0, \quad (i,j) \in IJ$$

$$\alpha_i \leq 1$$

$$\beta_i \leq 1$$

$$\alpha_i, \beta_j \text{ sin restricción}$$

Ahora bien, podemos demostrar que:

- 1)  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  es una solución factible del (DPR)
- 2) El costo de  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  es óptimo en (DPR).

Para los detalles de la prueba, ver el apéndice E.

Como mencionamos anteriormente, si  $\xi = 0$  es no penetra-

ción, se ha alcanzado una solución óptima a nuestro problema original con un flujo de valor

$$\sum_{(i,j) \in IJ} f_{ij} = \sum_i a_i = \sum_j b_j$$

Por otra parte, si  $\xi > 0$  tenemos 2 casos en el A.P-D, a saber,

Caso 1.  $\bar{a}_i + \bar{b}_j \leq 0 \quad \forall (i,j) \notin IJ$

Caso 2.  $\alpha_i + \beta_j > 0$  para algún  $(i,j) \notin IJ$ .

El caso 1 implica que el primal fue infactible (no tiene solución), lo cual es imposible porque nuestra formulación del primal siempre una solución factible. Por lo tanto, el caso 2 es el único posible y calculamos:

$$\theta_1 = \min_{\substack{i,j \\ \text{tal que} \\ \bar{a}_i + \bar{b}_j > 0 \\ \text{y } (i,j) \in IJ}} \left[ \frac{c_{ij} - \alpha_i - \beta_j}{\bar{a}_i + \bar{b}_j} \right] \quad (11)$$

$$= \min_{\substack{i \in I^* \\ j \notin J^*}} \left[ \frac{c_{ij} - \alpha_i - \beta_j}{2} \right]$$

De la ecuación anterior se sigue que  $\bar{a}_i + \bar{b}_j$  puede exceder a cero solo cuando  $i \in I^*$  y  $j \notin J^*$ , en tal caso es igual a 2;

en este caso hemos asegurado que  $(i, j) \notin IJ$ , en otro caso  $j$  podría haber sido etiquetada. La nueva solución dual  $\Pi$  se obtiene por:

$$\alpha_i^* = \begin{cases} \alpha_i + \theta_1, & i \in I^* \\ \alpha_i - \theta_1, & i \notin I^* \end{cases} \quad \text{y} \quad \beta_j^* = \begin{cases} \beta_j - \theta_1, & j \in J^* \\ \beta_j + \theta_1, & j \notin J^* \end{cases} \quad (12)$$

Un arco que no lleve flujo puede hacerse inadmisibile, justo como una columna no básica puede hacerse inadmisibile en el A.P-D. Esto nos capacita para continuar etiquetando en el algoritmo de Ford-Fulkerson del flujo que fue óptimo en la no penetración anterior. Esto determina completamente el algoritmo para que alcancemos el flujo máximo  $\sum a_i = \sum b_j$ . El A.P-D para el P.H., llamado *algoritmo alfabeta*, es el siguiente:

**ALGORITMO.** *Alfabeta*

**PROPOSITO.** *Determinar el flujo a costo mínimo en un P.H.*

#### DESCRIPCION

Paso 1. Escoger  $\alpha$  y  $\beta$  factibles para (D) en (8).

Paso 2. Resolver el problema de F.M. del (PR) en (9), usando solamente los arcos admisibles.

Paso 3. Encontrar los renglones y columnas etiquetados en no

penetración, es decir  $I^*$  y  $J^*$ .

Paso 4. Calcular  $\theta_1$  y actualizar  $a$  y  $z$  ((11) y (12)). Si el flujo es máximo para  $x$ . En caso contrario ir al paso 2.

Combinando los costos en el P.H. se da el flujo máximo como subproblema. El flujo máximo se resuelve, a su vez, combinando las capacidades, dando un subproblema para encontrar un flujo en la trayectoria aumentante. Hemos usado, así, la idea de primal-dual en una anidación para reemplazar los dos vectores de datos, costos y capacidades, por dos lazos anidados en un problema combinado simple, como se muestra en la figura 4.

Si hacemos uso de una versión Dijkstra que maneje arcos con costos negativos, resolvemos los subproblemas por ciclo o construcción, aplicando la misma interpretación para estos algoritmos.

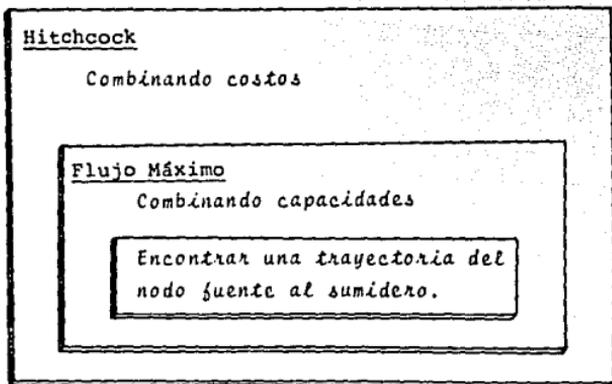
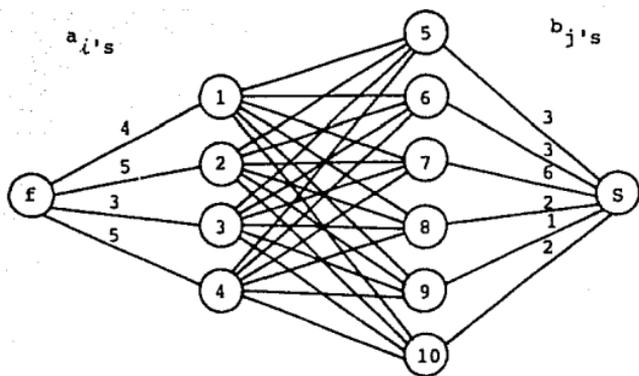


Figura 4. Una representación esquemática del algoritmo alfabeta como dos lazos anidados.

Ejemplo 3. Considere el siguiente P.H. Se desea resolverlo usando el A.P -D.

$a_i \backslash b_j$	3	3	6	2	1	2
4	5	3	7	3	8	5
5	5	6	12	5	7	11
3	2	8	3	4	8	2
5	9	6	10	5	10	9

Las entradas de la matriz son los costos  $c_{ij}$ . Gráficamente:



Una solución factible inicial para (D), el problema dual, es:

$$\alpha_i = 0, \quad i = 1, \dots, 4$$

$$\beta_j = \min_{1 \leq i \leq m} \{C_{ij}\} \quad j = 1, \dots, 6$$

El conjunto admisible de índices IJ de las variables en el primal restringido, son los pares (i,j) para los cuales se obtienen la igualdad en el problema dual:

$$\begin{aligned} IJ &= \{(i,j) \mid \alpha_i + \beta_j = c_{ij}\} \\ &= \{(3,1), (1,3), (3,3), (1,4), (2,5), (3,6)\} \end{aligned}$$

De donde

	5	(3)	7	(3)	8	5	0
	5	6	12	5	(7)	11	0
	(2)	8	(3)	4	8	(2)	0
	9	6	10	5	10	9	0
$B_j$	2	3	3	3	7	2	

Solución dual factible.

El tableau solución se construye con círculos en las mismas celdas correspondientes. Se procederá a encontrar la solución primal factible y el flujo máximo como se hizo en el ejemplo 1 de la subsección 3.1.1 del capítulo 3. La solución resultante es:

		(3)		(1)			$a_i$
					(1)		4
						(1)	5
	(3)		( )			( )	3
							5
$b_j$	3	3	6	2	1	2	

Solución primal factible

Para el algoritmo de etiquetas, los renglones con oferta excedente se etiquetan primero; en este caso los renglones 2 y 4. La etiqueta es  $(s,c)$ , donde  $s$  denota el nodo fuente y  $c$  es

igual al excedente de flujo. Después, la columna 5 será etiquetada porque contiene un círculo en la celda del renglón etiquetado:

		(2,4)				$a_i$	
		3		1		4	
(s,4)				1		5	
		3				3	
(s,5)						5	
$b_j$		3	3	6	2	1	2

#### Solución primal óptima

En este caso no existe trayectoria, por lo que el flujo es máximo. De cualquier modo, debe actualizarse y empezarse con otra iteración. Así,  $I^* = \{2,4\}$ ,  $\bar{I}^* = \{1,3\}$ ,  $J^* = \{5\}$ ,  $\bar{J}^* = \{1,2,3,4,6\}$ .

Calculamos el valor de  $\theta_1$ :

$$\theta_1 = \min \left\{ \frac{c_{ij} - \alpha_i - \beta_j}{2} \mid i \in I^*, j \notin J^* \right\}$$

$$= \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 1, \frac{9}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 1, \frac{7}{2} \right\} = 1;$$

el mínimo se obtiene en las celdas 2,4 y 4,4. Entonces actualizamos las variables duales y añadimos un círculo en dichas celdas quedando:

						$a_i$	
	5	(3)	7	(3)	8	5	-1
	5	6	12	(5)	(7)	11	1
	(2)	8	(3)	4	8	(2)	-1
	9	6	10	(5)	10	9	1
$b_j$	3	4	4	4	6	3	

Solución dual factible

En el siguiente paso el tableau solución se modifica con los valores del flujo, pero actualizando los lugares de las celdas que corresponden a los lugares admisibles. Entonces encontramos el flujo máximo para este nuevo conjunto de celdas admisibles:

		(1,1)		(2,3)	(2,3)		$a_i$
(4,1)		(3)		(1)			4
(s,3)				(1)	(1)		5
	(3)		( )			( )	3
(s,5)			( )				5
$b_j$	3	3	6	2	1	2	

Solución primal óptima

Se etiquetan los renglones con excedente; en este caso los renglones 2 y 4. Después, las columnas 4 y 5 se etiquetan porque contienen círculos en las celdas de los renglones etiquetados. El renglón uno se etiqueta porque contiene una celda con flujo positivo en la columna etiquetada; en este caso  $c=1$ , ya que el flujo 1 es menor que la etiqueta  $c$  de 3 en la cuarta columna. Finalmente, la columna 2 se etiqueta porque tiene un círculo en la celda del renglón uno. Como ya no se pueden etiquetar más renglones y columnas, el flujo es máximo. Actualizamos entonces el dual para  $I^* = \{1,2,4\}$  y  $J^* = \{1,3,6\}$ ; el mínimo ocurre para  $i=2$ , y  $j=1$ , por lo que  $\theta_1 = \frac{1}{2}$ . Las variables duales se revisan de acuerdo a:

$$\alpha_i^* = \begin{cases} \alpha_i + \theta_1, & i \in I^* \\ \alpha_i - \theta_1, & i \notin I^* \end{cases}$$

$$\beta_j^* = \begin{cases} \beta_j - \theta_1, & j \in J^* \\ \beta_j + \theta_1, & j \notin J^* \end{cases}$$

Los nuevos valores, junto con los coeficientes de costo, son:

	$\alpha_j$						
	5	3	7	3	8	5	-0.5
	5	6	12	5	7	11	1.5
	2	8	3	4	8	2	-1.5
	9	6	10	5	10	9	1.5
$\beta_j$	3.5	3.5	4.5	3.5	5.5	3.5	

Solución dual factible

Notemos que hay una nueva celda admisible que aparece en el lugar 2,1. En el siguiente paso el tableau solución se modifica con los valores de flujo, pero actualizando los lugares de las celdas con círculo que corresponden a los lugares admisibles. Entonces, encontramos el flujo máximo para este nuevo conjunto de celdas admisibles:

	(2,1)	(1,1)		(4,5)	(2,1)		$a_i$
(4,1)		3		1			4
(4,1)	3			1	1		5
			3				3
(s,5)							5
$b_j$	3	3	6	2	1	2	

Solución primal óptima.

Se etiqueta el renglón 4 que es el único que tiene excedente. La columna 4 se etiqueta por que contiene un círculo en la celda del renglón etiquetado. Los renglones 1 y 2 se etiquetan porque contienen una celda con flujo positivo en la columna etiquetada; en ambos  $c=1$  ya que el flujo 1 es menor que la etiqueta  $c$  de 5 en la cuarta columna. Finalmente, las columnas 1 y 2 se etiquetan porque contienen un círculo en la celda de los renglones 1 y 2. Como ya no se pueden etiquetar más renglones y columnas, el flujo es máximo. Entonces actualizamos el dual para  $I^* = \{1,2,4\}$  y  $J^* = \{3,6\}$ ; el mínimo ocurre

para  $i=1$ , y  $j=6$ , por lo que  $\theta_1=1$ . Los nuevos valores, junto con los coeficientes de costo, son:

						$\alpha_i$	
	5	(3)	7	(3)	8	(5)	.5
	(5)	6	12	(5)	(7)	11	2.5
	2	8	(3)	4	8	(2)	-2.5
	9	6	10	(5)	10	9	2.5
$\beta_j$	2.5	2.5	5.5	2.5	4.5	4.5	

**Solución dual factible**

Notemos ahora que hay una nueva celda admisible en el lugar 1,6 y que perdemos una en el lugar 3,1. En el siguiente paso el tableau solución se modifica con los valores del flujo, pero actualizando los lugares de las celdas en círculo que corresponden a los lugares admisibles. Entonces encontramos el flujo máximo para este nuevo conjunto de celdas admisibles:

		(2,1)	(1,1)		(4,5)	(2,1)	(1,1)	$\alpha_i$
(4,1)			(3)		(-1)		(+)	4
(4,1)	(3)				(1)	(1)		5
			(3)				( )	3
(5,5)					(+)			5
$\beta_j$	3	3	6	2	1	2		

**Solución primal factible**

Se etiquetan renglones y columnas como hasta ahora lo hemos hecho. Esta es una trayectoria porque la columna 6 tiene un excedente. El flujo se ajusta siguiendo la trayectoria hacia atrás: +1 en la celda 1,6 -1 en la celda 1,4 y +1 en la 4,4. La trayectoria termina en el renglón 4 ya que el nodo fuente se etiqueta.

Se ajusta posteriormente el tableau y las etiquetas se recalculan. El resultado es:

	(2,1)		(4,4)	(2,1)		$a_i$
		3			1	4
(4,1)	3		1	1		5
		3				3
(s,4)			1			5
$b_j$	3	3	6	2	1	2

#### Solución primal óptima

En este caso no hay trayectoria; el flujo es máximo. De cualquier modo debe actualizarse y empezarse con otra iteración. Entonces actualizamos el dual para  $I^* = \{2,4\}$  y  $J^* = \{2,3,6\}$ ; el mínimo ocurre para  $i = 2,4$  y  $j=2$ , por lo que  $\theta_1 = \frac{1}{2}$ . Los nuevos valores, junto con los coeficientes de costo, son:

						$a_i$	
	5	3	7	3	8	5	0
	5	6	12	5	7	11	3
	2	8	3	4	8	2	-3
	9	6	10	5	10	9	3
$b_j$	2	3	6	2	4	5	

Solución dual factible.

En el siguiente paso el tableau solución se modifica con los valores del flujo. Entonces encontramos el flujo máximo para este nuevo conjunto de celdas admisibles:

		(2,1)	(4,4)		(4,4)	(2,1)	(1,3)	$a_i$
(2,3)			-3				+1	4
(4,1)	3				1	1		5
				3				3
(s,4)					1			5
$b_j$	3	3	6	2	1	2		

Solución primal factible

Esta es una trayectoria porque la columna 6 tiene un excedente. El flujo se ajusta siguiendo la trayectoria hacia atrás: +1 en la celda 1,6; -1 en la celda 1,2 y +1 en la celda 4,2. La trayectoria termina en el renglón 4 ya que se etiqueta el nodo fuente.

Después el tableau se ajusta y las etiquetas se recalculan.

El resultado es:

	(2,1)	(4,3)		(4,3)	(2,1)	(1,2)	$a_i$
(2,2)		2				2	4
(4,1)	3			1	1		5
			3				3
(s,3)		1		1			5
$b_j$	3	3	6	2	1	2	

Solución primal óptima

En este caso no hay trayectoria; el flujo es máximo. Actualizamos entonces el dual para  $I^* = \{1,2,4\}$  y  $\bar{J}^* = \{3\}$ ; el mínimo ocurre para  $i = 1,4$   $j=3$ , por lo que  $\theta_1 = \frac{1}{2}$ . Los nuevos valores, junto con los coeficientes de costo, son:

						$a_i$	
	5	3	7	3	8	5	.5
	5	6	12	5	7	11	3.5
	2	8	3	4	8	2	-3.5
	9	6	10	5	10	9	3.5
$B_j$	1.5	2.5	6.5	1.5	3.5	4.5	

Solución dual factible

En el siguiente paso el tableau solución se modifica con los valores de flujo. Entonces encontramos el flujo máximo para este nuevo conjunto de celdas admisibles:

						$a_i$
	2	0			2	4
3	0		1	1		5
		3				3
	1	3	1			5
$b_j$	3	3	6	2	1	2

Solución primal óptima

Como el flujo máximo no tiene excedente, la solución que se tiene es factible para el problema original y, por tanto, es *óptimo*.

### 4.3 LA TRANSFORMACIÓN DE WAGNER.

El P.H. es un caso especial del problema de F.C.M. Esto se sigue de manera inmediata de la construcción con todos los arcos admisibles dada en la figura 3. Simplificamos la oferta de todos los nodos fuentes con un nodo super-fuente y la demanda de todos los nodos sumideros con un nodo super-sumidero. Esto significa que dado un ejemplo de flujo a costo mínimo, podemos construir un ejemplo de Hitchcock que tenga la misma solución\*. La herramienta que nos auxilia es precisamente la Transformación de Wagner. Veamos:

Dado un caso de problema de F.C.M. en una red  $N$  con gráfica asociada  $G=(V,A)$ , se deberá construir un caso del P.H. de acuerdo a la siguiente correspondencia:

Flujo a costo mínimo	Hitchcock
arco $(i,j)$	nodo fuente $ij$
nodo $i$	nodo terminal $i$
costo $c_{ij}$	arco $(ij,j)$ con costo $c_{ij}$ y capacidad infinita
-----	arco $(ij,i)$ con costo cero y capacidad infinita
capacidad $b_{ij}$	Oferta $b_{ij}$ al nodo fuente $ij$

\* Más en general, dado un caso de problema de F.C.M. se puede construir un caso de P.T. que tenga la misma solución.

Para especificar las demandas, necesitamos en primera instancia la notación

$$b_{iv} = \sum_{\substack{\text{todo } j \\ \text{tal que} \\ (i,j) \in A}} b_{ij}, \quad (13)$$

donde A es el conjunto de arcos en la red N del problema de F.C.M. y  $b_{iv}$  es la capacidad "exterior" total del nodo i. De esta forma, la demanda en el destino i es:

$$\begin{aligned} b_{iv} - v_0, & \quad i = f \\ b_{iv} + v_0, & \quad i = s \\ b_{iv}, & \quad i \neq f, s \end{aligned} \quad (14)$$

La construcción se ilustra en la figura 5. El P.H. consiste en encontrar un flujo  $f_{ij,k}$  tal que

$$f_{ij,j} + f_{ij,i} = b_{ij} \quad (15)$$

(se usa completamente la oferta en el nodo ij);

$$\sum_j (f_{ij,i} + f_{ji,i}) = \begin{cases} b_{iv} - v_0, & i = f \\ b_{iv} + v_0, & i = s \\ b_{iv}, & i = f, s \end{cases} \quad (16)$$

(está completamente satisfecha la demanda en el nodo i); y

$$f_{ij,k} \geq 0, \forall i,j,k$$

para

$$\min \sum_{\substack{\text{todos los} \\ \text{nodos fuente} \\ ij}} f_{ij,j} c_{ij,j}$$

Notemos que en Hitchcock la oferta total es igual a la demanda total.

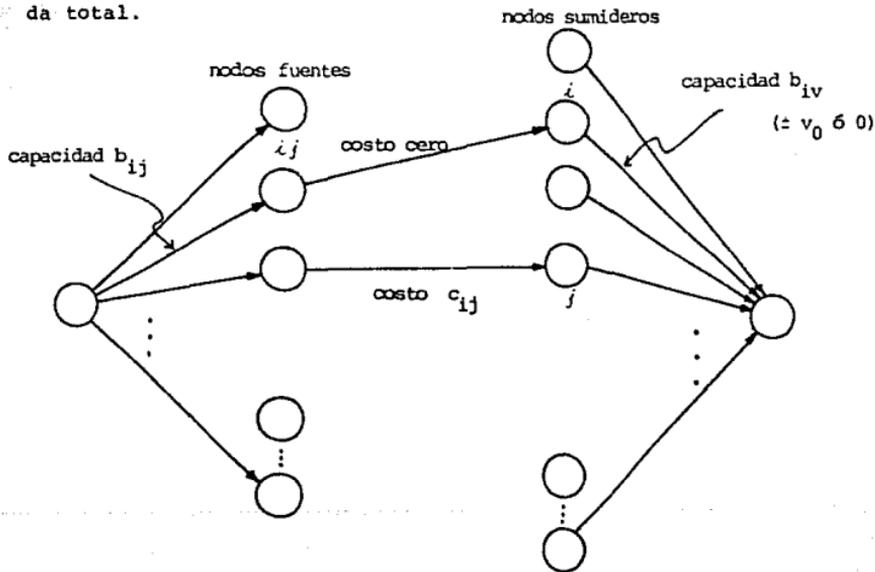


Figura 5. El P.H. construido a partir del P.F.C.M.

Lema. El problema original de flujo a costo mínimo y el problema construido de Hitchcock son equivalentes en el sentido de que un flujo factible en cualquiera de los dos corresponde

a un flujo factible en el otro, con el mismo costo.

Prueba. Sea  $f_{ij}$  un flujo factible en el problema de F.C.M.

Entonces, en el P.H., si tomamos:

$$f_{ij,j} = f_{ij} \geq 0 \quad (17)$$

$$f_{ij,i} = b_{ij} - f_{ij} \geq 0 \quad (18)$$

estos flujos satisfacen la ecuación (13). Sustituyendo en la ecuación (14), obtenemos:

$$\sum_j (b_{ij} - f_{ij} + f_{ji}) = b_{iv} + \sum_j (f_{ji} - f_{ij})$$

$$= \begin{cases} b_{iv} - v_0 & i = s \\ b_{iv} + v_0 & i = t \\ b_{iv} & i \neq s, t \end{cases}$$

así requerido.

Luego, suponemos que tenemos un flujo factible  $f_{ij,k}$  en el P.H. Este es diferente de cero sólo cuando  $k=i \neq j$ . En el problema original de F.C.M. definimos:

$$f_{ij} = f_{ij,j} \quad (19)$$

Entonces  $0 \leq f_{ij} \leq b_{ij}$  por la oferta en el nodo fuente  $ij$ .

También, el flujo neto fuera del nodo  $i$  en el problema de P.

C.M. es:

$$\sum_j f_{ij,j} - \sum_j f_{ji,i} = \sum_j (b_{ij} - f_{ij,i}) - \sum_j f_{ji,i}$$

$$= b_{iv} - \sum_j (f_{ij,i} + f_{ji,i})$$

$$= \begin{cases} v_0, & i = f \\ -v_0, & i = s \\ 0, & i \neq f, s \end{cases}$$

en donde utilizamos las ecuaciones (15) y (16); por tanto, todas las restricciones se satisfacen. Finalmente, es fácil ver que los costos de los flujos, los cuales corresponden a las ecuaciones (17) y (19), son iguales en sus respectivos problemas.

## **conclusiones**

Una de las líneas de mayor interés en la Investigación de Operaciones es, sin duda alguna, aquélla que tiene que ver con las estructuras especiales de la Programación Lineal.

La programación en redes de flujo, es decir, los problemas lineales susceptibles de ser representados y analizados en términos de redes conforman una de esas estructuras especiales.

En este trabajo, ya por concluir, se han analizado las bases generales de la Programación Lineal. En particular, se han descrito dos métodos básicos de solución, a saber, el método Primal y el Primal-Dual, y su consecuente especialización a los problemas clásicos de redes de flujo, especialización que redundará en nuevos y eficientes métodos de análisis, y que en la actualidad empiezan a ganar popularidad.

El trabajo se ha centrado en torno a la especialización de los métodos primales-duales a problemas básicos de redes, fundamentalmente porque es poco conocida en la literatura. No obstante, también se describe, aunque de manera breve, la especialización de los métodos primales.

En ese sentido, la contribución del presente trabajo de tesis es la unificación y comparación de los métodos primales-duales especializados a problemas básicos de redes, dándole un sentido antológico, directo, accesible, riguroso e

informal. Si cumple con el sentido didáctico que el autor intento darle, su razón de ser se habrá cumplido.

De manera más implícita, se ha intentado mostrar y demostrar al lector que los métodos clásicos de solución, como los de ciclo negativo y ruta más corta-flujo máximo, son casos particulares de la especialización del método primal-dual y que su convergencia es fácil de demostrarse sin recurrir a la teoría de gráficas.

Este trabajo puede tomarse como punto de partida en la tarea de construir códigos de los algoritmos aquí desarrollados, ya que no representan dificultades teóricas y sí una gran importancia práctica.

## apéndices

## A.

## CONJUNTOS CONVEXOS

Sean  $x_1, \dots, x_k$  vectores en  $\mathbb{R}^n$ , y  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  números reales (o escalares). La combinación lineal

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$$

es una *combinación convexa* de los vectores  $x_1, \dots, x_k$  si los coeficientes  $\alpha_i$  son tales que

$$\alpha_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, k) \quad \text{y} \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1.$$

La combinación convexa

$$(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

se llama el *segmento* que une a  $x_1$  y  $x_2$ .

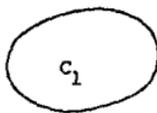
Un subconjunto  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  es *convexo* si el segmento que une a cualesquiera dos puntos en  $C$  también está en  $C$ ; es decir, si  $x_1$  y  $x_2$  son puntos en  $C$ , entonces

$$(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 \in C \quad \text{para todo} \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

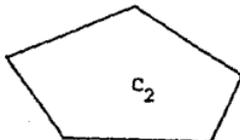
Por ejemplo, los conjuntos  $C_1$  y  $C_2$  en la siguiente figura son convexos, pero  $D$  lo es:



NO CONVEXO



CONVEXO



[POLIEDRO] CONVEXO

La intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

El conjunto de puntos (o vectores)  $x = (x_1, \dots, x_n)^t$  en  $\mathbb{R}^n$  (el superíndice  $t$  denota "traspuesta") que satisfacen una ecuación de la forma

$$a^t x = \beta, \text{ i.e., } a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = \beta,$$

en donde  $a = (a_1, \dots, a_n)^t \in \mathbb{R}^n$  y  $\beta$  es un número real, se llama un *hiperplano* en  $\mathbb{R}^n$ . Por otra parte, una desigualdad de la forma

$$a^t x \leq \beta \text{ ó } a^t x \geq \beta$$

define un *semi-espacio*. Es claro que los semi-espacios son conjuntos convexos, de manera que la intersección de semi-espacios es también un conjunto convexo. En particular, la intersección de un número finito de semi-espacios, si es acotada, se llama un *poliedro convexo*.

La *envolvente convexa* de un subconjunto  $Q$  de  $\mathbb{R}^n$  se define como la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a  $Q$ ; es decir, la envolvente convexa de  $Q$  es el 'mínimo' conjunto convexo que contiene a  $Q$ . La envolvente convexa de un conjunto finito de puntos  $x_0, x_1, \dots, x_k$  en  $\mathbb{R}^n$  es un poliedro convexo. En particular, si los vectores  $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_k - x_0$  son linealmente independientes, el poliedro convexo se llama un *simplex* o *simplejo*. (De aquí se

deriva el nombre, sugerido a Dantzig por T. Motzkin, del "método simplex" que se estudia en programación lineal, porque en esencia el método, que estudiaremos en capítulos anteriores, se puede describir como un movimiento de un simplex a otro.) Nótese que un simplex en  $\mathbb{R}^n$  sólo puede tener a lo más  $n+1$  vértices.

Sea  $C$  un conjunto convexo y  $x$  un punto en  $C$ . Decimos que  $x$  es un punto extremo de  $C$  si no existen dos puntos distintos en  $C$  tales que  $x$  es un punto "interior" del segmento que los une, es decir, no existen puntos distintos  $x_1$  y  $x_2$  en  $C$  tales que  $x$  se pueda escribir en la forma  $x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$  para algún  $0 < \alpha < 1$ . En otras palabras, si  $x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$  con  $x_1$  y  $x_2$  en  $C$  y  $0 < \alpha < 1$ , entonces  $x = x_1 = x_2$ . (Equivalentemente,  $x$  es un punto extremo de  $C$  ssi existe un hiperplano que intersecta a  $C$  únicamente en el punto  $x$ .) Por ejemplo, el conjunto  $C_1$  en la figura anterior tiene un número infinito de puntos extremos, mientras que  $C_2$  tiene sólo cuatro puntos extremos, (Estamos suponiendo que los conjuntos  $C_1$  y  $C_2$  son cerrados.) Nótese que los puntos extremos de un poliedro convexo son sus vértices. Por otra parte, es claro (al menos intuitivamente) que si  $C$  es un conjunto convexo compacto, entonces cualquier punto en  $C$  se puede representar como una combinación convexa de los puntos extremos de  $C$ . Esto no se cumple si  $C$  es no acotado. Por ejemplo, el

"octante" no negativo de  $\mathbb{R}^n$  definido como el conjunto  $C^+$  de todos los vectores  $x$  en  $\mathbb{R}^n$  tales que  $x \geq 0$ , es un conjunto convexo, cerrado, y sólo tiene un punto extremo, el origen, de manera que no puede ser que cualquier vector  $x$  en  $C^+$  se pueda escribir como una combinación convexa de los puntos extremos de  $C^+$ .

## B.

### EL ALGORITMO SIMPLEX

El método simplex presupone la existencia de una s.f.b. inicial. Encontrar tal solución es equivalente a resolver otro problema de programación lineal. En efecto, basta aplicar el mismo método simplex al problema auxiliar

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min } e_1 t_1 + e_2 t_2 + e_3 t_3 & \\
 \text{s.a. } A_1 x - t_1 \leq b_1 & (b_1 \geq 0) \\
 (A) \quad A_2 x + t_2 \geq b_2 & (b_2 \geq 0) \\
 A_3 x + t_3 = b_3 & (b_3 \geq 0) \\
 t_1, t_2, t_3 \geq 0 & 
 \end{array}$$

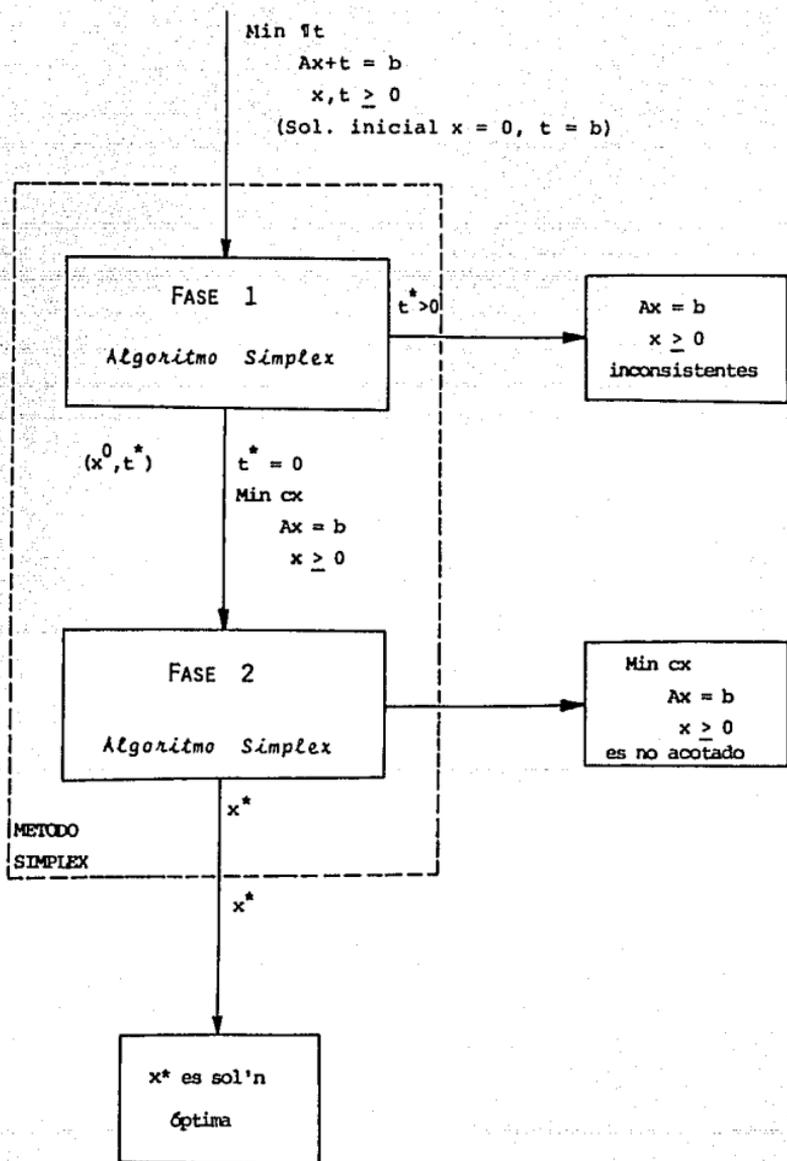
donde  $e_1, e_2, e_3$  son vectores cuyas entradas son 'unos' solamente y  $t_1, t_2, t_3$  son vectores de variables auxiliares de dimensiones apropiadas. Para este problema auxiliar se conoce una s.f.b. y existe siempre una solución óptima.

Al aplicar el método simplex a tal problema se obtiene una solución básica óptima  $(x_0, t_0)$  para él. Si en tal solución las variables artificiales  $t_0$  son cero,  $x_0$  es una s.f.b. para el problema

$$\begin{aligned} & \text{Min } cx \\ (B) \quad & \text{s.a. } Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

donde  $A_{m \times n}$  de rango  $m$  y  $b \geq 0$ . Esta s.f.b. puede usarse como solución inicial.

Es costumbre llamar *algoritmo simplex* a la búsqueda del óptimo a partir de una s.f.b., usando el método descrito aquí, y llamar *método simplex* a la aplicación secuencial del algoritmo simplex a los problemas (A) y (B) antes descritos. Su aplicación a (A) se conoce como Fase uno y a (B) como Fase Dos. La fase 1 determina una s.f.b. o prueba que  $Ax = b$  y  $x \geq 0$  en (B) es inconsistente. La fase 2 determina una solución óptima factible o bien prueba que el problema es no acotado. La figura que sigue muestra esquemáticamente el método simplex y sus posibles resultados.



## C.

### ELEMENTOS DE TEORÍA DE GRÁFICAS

Una *gráfica* (o bien, *gráfica no dirigida*\*)  $G = (V(G), A(G), \psi_G)$  consta de dos conjuntos y una función. Al conjunto  $V(G)$  se le llama conjunto de *vértices* (*nodos*, *puntos*) de  $G$  y este es no vacío,  $A(G)$  es el conjunto de *aristas* (*líneas*, *lados*, *ramas*) de  $G$  y a  $\psi_G: A(G) \rightarrow \{(i, j) \mid i, j \in V(G)\}$  es la función que a cada arista le asocia sus extremos.

Equivalentemente, una *gráfica dirigida*\*\* (o *digráfica*) consiste en un conjunto  $V(G)$  de *vértices* (*nodos*, *puntos*), un conjunto  $A(G)$  de *arcos* y una función  $\psi_G: A(G) \rightarrow \{(i, j) \mid i, j \in V(G)\}$  que a cada arco le asocia también sus extremos, pero de una forma ordenada. En efecto, mientras que en una digráfica  $G$  los elementos de  $A(G)$  son pares ordenados  $(i, j)$ , es decir, tienen una dirección, en una gráfica no dirigida los elementos de  $A(G)$  no son pares ordenados, son simplemente conjuntos de la forma  $\{i, j\}$  donde el orden no importa.

Algunos autores, como es el caso en este trabajo, prefieren llamarles arcos y arcos dirigidos a los elementos de  $A(G)$  de una *gráfica no dirigida* y una *digráfica*, respectivamente.

---

\* Muchas veces, y de acuerdo al autor, se cambia el término *gráfica* por el de grafo.

\*\* También llamada grafo dirigido o digrafo.

A los vértices se les representa por puntos o bien círculos pequeños y a las aristas y los arcos por líneas - rectas o curvas, según el dibujo - que unen los vértices, aunque para estos últimos su orientación se representa mediante la cabeza de una flecha. Precisamente, el vértice o extremo inicial del arco se le llama *cola* del arco y al vértice o extremo final se le llama *cabeza* del arco.

En general se tocan aquí sólo algunos tipos de (di)gráficas en donde  $V$  y  $A$  son finitos y en donde no aparecen lazos (un lazo es una arista -o arco- cuyos extremos coinciden) ni aristas -o arcos- múltiples o paralelos, es decir, con extremos iguales. Las (di)gráficas sin lazos y sin aristas (o arcos) múltiples se llaman *(di)gráficas simples*.

Dos vértices son *adyacentes* si existe una arista (un arco) que los tenga como extremos. Dos aristas (arcos) son *incidentes* si tienen un extremo en común. El *grado o valencia de un vértice* es el número de aristas que lo tienen como extremo. Se denota por  $gr(i)$  o  $v(i)$ , donde  $i \in V$ .

Existen ciertos subconjuntos de gráficas que son de utilidad. Dada un (di)gráfica  $G$ , una *gráfica parcial* de  $G$  es la (di)gráfica  $G_p = (V(G), A(G_p))$ , donde  $A(G_p) \subseteq A(G)$ ; es decir, es una (di)gráfica constituida por todos los vértices y algunas aristas o arcos de  $G$ . Una *subgráfica*  $H$  de  $G$  es una (di)gráfica tal que  $V(H) \subseteq V(G)$ ,  $A(H) \subseteq A(G)$  y  $\psi_H = \psi_G|_{A(H)}$

$\{O H = (V(H), A(H), \psi_H)\}$ ; esto es, es una (di)gráfica que consta de un subconjunto de los vértices de  $G$  y todas las aristas o arcos de  $G$  que unen los vértices de tal subconjunto.

Sea  $G$  una digráfica. Un camino es una sucesión de arcos en la cual el vértice final de uno es el vértice inicial del que le sigue en la sucesión. Se representa por la sucesión de arcos que lo forman o por la sucesión de vértices extremos de estos arcos o por la sucesión alternada de vértices y arcos. Si  $a_1, a_2, \dots, a_q \in A(G)$ , un camino simple o paseo en una gráfica  $G$ , es un camino que no repite aristas, esto es, dado el camino  $a_1, a_2, \dots, a_q$ ,  $a_i \neq a_j$  si  $i \neq j$ . Si  $i_1, i_2, \dots, i_q$  (sucesión de vértices), un camino elemental o trayectoria es un paseo que no repite aristas, es decir,  $i_j \neq i_k$  si  $j \neq k$ .

Sea  $G$  ahora una (di)gráfica. Una cadena es una sucesión de arcos (o aristas)  $a_1, a_2, \dots, a_q$  donde toda  $a_i$  está conectada a  $a_{i-1}$  por un extremo y a  $a_{i+1}$  por el otro. Cadenas simples y elemental se definen de manera análoga a como se definieron camino simple y elemental.

En una digráfica, un circuito es un camino 'cerrado' es decir, un camino donde coinciden vértices inicial y final. Un circuito simple es un circuito con todos sus arcos distintos. Un circuito elemental es un circuito con todos sus vértices, excepto el inicial, distintos. Un ciclo es una cadena  $i_1, i_2, \dots, i_q$  donde  $i_1 = i_q$ .

Cabe señalar que en este trabajo se han utilizado los términos *ruta* y *ciclo dirigido* como sinónimos de camino y circuito, respectivamente.

Si existe un camino del vértice  $i$  al vértice  $j$ , se dice que  $j$  es alcanzable desde  $i$ , o como lo hemos redactado en este texto,  $j$  es alcanzable al  $i$ .

Por otro lado, un concepto muy utilizado en el texto es el de *conexidad*. Una gráfica  $G$  es *conexa* si para todo par de vértices  $i, j \in V(G)$  existe una cadena que los une.

Una digráfica es *fuertemente conexa* si existe un camino entre cualesquiera dos vértices de la gráfica.

Un *árbol dirigido* es una digráfica simple en la que existe un único camino entre cada par de vértices; en otras palabras, es una digráfica acíclica (sin ciclos) que satisface las siguientes propiedades:

- a) Hay exactamente un vértice, llamado *raíz*, al cual no entran arcos.
- b) Cada vértice, excepto la raíz, tiene exactamente un arco entrando a él.
- c) Existe un camino (el cual se puede probar que es único) de la raíz a cada uno de los vértices.

A un árbol dirigido también se le llama *arborescencia*. Un

bosque es una colección de árboles.

Un árbol no dirigido es una gráfica no dirigida, conexa y acíclica.

Las (di)gráficas pueden representarse algebraicamente por medio de matrices al hacer uso de alguna computadora. La matriz de adyacencia de una (di)gráfica  $G$  es una matriz  $B_{n \times n}$ , donde  $n$  es el número de vértices de  $G$ , de componentes

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (i,j) \in A(G) \\ 0, & \text{si } (i,j) \notin A(G) \end{cases}$$

La matriz de incidencia de  $G$  es una matriz  $M_{n \times m}$ , donde  $n$  y  $m$  son el número de vértices y de arcos de  $G$ , respectivamente, de elementos:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \text{ es extremo inicial del arco } a_j \\ -1, & \text{si } i \text{ es extremo final del arco } a_j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por último, se define el concepto de red. Una red  $R=(V(R), A(R), f(\psi_R))$  es una gráfica ponderada; es decir, es una gráfica  $G = (V(G), A(G), \psi_G)$  con una función real definida sobre sus arcos o aristas o sobre sus vértices o sobre ambos.

## D.

## TEOREMA DEL FLUJO MÁXIMO-CORTADURA MÍNIMA

Antes de demostrar el Teorema del Flujo Máximo-Cortadura Mínima se ha de demostrar, con el teorema que sigue, que la capacidad de cualquier cortadura es siempre mayor que o igual al valor de cualquier flujo.

Teorema. Sea  $f$  un flujo en  $G$  y sea  $(S, \bar{S})$  una cortadura de  $G$ . Entonces, la capacidad de  $(S, \bar{S})$  es mayor o igual al valor de  $F$ ; esto es,

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} c_{ij} \geq \sum_i f_i \quad (*)$$

Prueba. Obsérvese que

$$\sum_{j \in S} \sum_{i \in S} f_{ji} = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} f_{ij},$$

puesto que cualquier lado de la ecuación es solamente la suma de  $f_{ij}$  sobre todo  $i, j \in S$ . Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\sum_i f_{1i} &= \sum_{j \in S} \sum_{i \in S} f_{ji} - \sum_{j \in S} \sum_{i \in \bar{S}} f_{ij} \\
&= \sum_{j \in S} \sum_{i \in S} f_{ji} + \sum_{j \in S} \sum_{i \in \bar{S}} f_{ji} - \sum_{j \in S} \sum_{i \in \bar{S}} f_{ij} \\
&\quad - \sum_{j \in S} \sum_{i \in \bar{S}} f_{ij} \\
&= \sum_{j \in S} \sum_{i \in \bar{S}} f_{ji} - \sum_{j \in S} \sum_{i \in \bar{S}} f_{ij} \\
&\leq \sum_{j \in S} \sum_{i \in \bar{S}} f_{ji} - \sum_{j \in S} \sum_{i \in \bar{S}} c_{ji}
\end{aligned}$$

Una cortadura mínima es una cortadura que tiene capacidad mínima.

Teorema del Flujo Máximo - Cortadura Mínima. Sea  $f$  un flujo en  $G$  y sea  $(S, \bar{S})$  una cortadura en  $G$ . Si se cumple la igualdad en (#), entonces el flujo es máximo y la cortadura es mínima. Por otra parte, la igualdad se cumple en (#) si y sólo si

$$(a) \quad f_{ij} = c_{ij}, \text{ para } i \in S, j \in \bar{S}$$

y

$$(b) \quad f_{ij} = 0, \text{ para } i \in \bar{S}, j \in S$$

(El teorema se llama también "de Maxiflujo y Minicorte".)

Prueba. El primer enunciado es inmediato. La demostración del teorema anterior indica que la igualdad se verifica precisamente cuando

$$\sum_{j \in S} \sum_{i \in \bar{S}} f_{ij} = 0$$

y

$$\sum_{j \in S} \sum_{i \in \bar{S}} f_{ji} = \sum_{j \in S} \sum_{i \in \bar{S}} c_{ji};$$

por consiguiente, el último enunciado es también verdadero. ■

## E.

### CORTADURA EN UNA RED

Sea  $G$  una red y considérese el flujo  $f$  a la terminación del algoritmo correspondiente al problema de F.M. Algunos vértices están etiquetados en tanto que otros no lo están. Sea  $S(\bar{S})^*$  el conjunto de los vértices etiquetados (no etiquetados). Entonces el nodo fuente está en  $S$  y el nodo sumidero en  $\bar{S}$ . Al conjunto de los lados  $(v,w)$ , con  $v \in S$  y  $w \in \bar{S}$  se le llama *cortadura* y a la suma de las capacidades de los lados *capacidad de la cortadura*. Esta cortadura tiene capacidad mínima y, dado que una cortadura con capacidad mínima corresponde a un flujo máximo ("Teorema del Flujo Máximo - Cortadura Mínima" - Apéndice D.), entonces el flujo  $f$  es máximo.

La definición formal de cortadura en una red es la que sigue: Una coertadura  $(S, \bar{S})$  en una red  $G$  consiste en un conjunto  $S$  de vértices y de su complemento  $\bar{S}$  de  $S$ , con  $l \in S$  y  $n \in \bar{S}$ , siendo  $l$  y  $n$  los nodos fuente y sumidero, respectivamente.

La capacidad del corte  $(S, \bar{S})$  es el número  $C(S, \bar{S}) =$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} c_{ij}$$

---

\* Recuérdese que  $\bar{S}$  denota el complemento de  $S$ .

## **bibliografía**

1. BAZARAA, M.S. y JARVIS, J.J. Programación Lineal y Flujo en Redes. Limusa, México. 1981.
2. CALVILLO, G. Métodos de la Programación Lineal. V Coloquio del Departamento de Matemáticas, CINVESTAV, IPN. Pátzcuaro, Michoacán. Agosto de 1987.
3. FORD, L.R. y FULKERSON, D.R. Flow in Networks. Princeton. 1962.
4. LUENBERGER, D.G. Linear and Nonlinear Programming. Addison-Wesley. Massachusetts, EUA. 2nd. edition. 1984.  
  
[Desde fines de 1989 existe ya una traducción al español de la 2a. edición. Dicha versión fué realizada por - - Addison-Wesley Iberoamericana y SITESA].
5. MURTY, K.G. Linear and Combinatorial Programming. John Wiley and Sons. 1976.
6. PAPANIMITROU, C.H. and STEIGLITZ, K. Combinatorial Prentice-Hall, Inc. 1982.
7. SHAPIRO, J. Mathematical Programming (Structures and Algorithms). John Wiley and Sons. 1979.