

6
2ej

[Handwritten signature]

**Atomo en un campo magnético infinito:
Un modelo con regla de superselección**

**Tesis que para obtener el grado de
Doctor en Ciencias (Física)
Presenta
Alvaro Lorenzo Salas Brito**

**Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Marzo de 1990**

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Contenido

Introducción	1
Capítulo 1. Reglas de Superselección	4
1. Introducción	4
2. El principio de superposición y sus limitaciones	4
3. Reglas de superselección	6
4. Consecuencias de una regla de superselección.....	8
5. Las reglas de superselección más generales	9
6. Univalencia	11
7. Regla de superselección de Bargmann	12
8. Número de partículas.....	13
9. Propiedades macroscópicas	14
10. Moléculas jirales	14
Capítulo 2. Atomo en un campo magnético muy intenso	16
1. Introducción	16
2. Electrón en un campo magnético	17
3. Atomo en un campo magnético ultraintenso.....	18
4. Problemas con el modelo basado en el potencial unidimensional de Coulomb	19
5. Propiedades generales de los estados del hamiltoniano.....	21
6. El problema aproximado de un átomo en un campo magnético ultraintenso	23
7. El comportamiento límite cuando $\rho \rightarrow 0$	25
8. El problema del estado fundamental	25
9. Conclusión	27

Introducción

El estudio de átomos o sistemas hidrogenoides en campos magnéticos ha sido siempre un tema de gran interés. En la búsqueda de modelos resolubles para su estudio se ha introducido la aproximación de considerar campos magnéticos de intensidad infinita, de esta forma se ha simplificado el sistema a un modelo unidimensional efectivo al que también se conoce como átomo de hidrógeno unidimensional. Este nombre tiene su origen en la desaparición de dos de las dimensiones espaciales a que conduce tomar el límite $B \rightarrow \infty$, y a la forma del potencial de interacción que se obtiene. Sin embargo, aún este modelo, a pesar de su aparente simplicidad, ha generado polémicas que ya duran 30 años. Este sistema será el tema central de este trabajo.

Las polémicas que ha generado el modelo, se centran en las diferentes y muchas veces contradictorias propiedades que se han demostrado sobre él. A últimas fechas, los problemas encontrados para entenderlo lo han vuelto un sistema muy estudiado; sin embargo, muchos de estos estudios solo han contribuido a incrementar la confusión al respecto y, en algunos casos, son totalmente incorrectos.

En este trabajo, presentamos un análisis completo y detallado de las propiedades de un átomo en un campo magnético infinito. Como muchas de las dificultades encontradas en el problema tienen su origen en el proceso límite por el que se lo obtiene, analizamos con cierto detalle este proceso. Encontramos que todas las problemas que se han tenido para entender las propiedades de su solución, se deben a la ruptura espontánea de la simetría ante inversiones por el origen que ocurre en él. Esta inesperada propiedad nunca había sido tomada en cuenta al analizar los estados del sistema, y tiene una importancia decisiva, pues su origen se encuentra en una limitación a la superposición de estados. Esta limitación puede interpretarse como la manifestación de una regla de superselección dinámica inducida por la singularidad del hamiltoniano del problema. Resulta interesante hacer notar que esta regla de superselección tiene un origen análogo al de aquella que explica la aparición

de las moléculas jirales. Ello nos ha llevado a especular sobre la posibilidad de que las reglas de superselección dinámicas en la mecánica cuántica sean el resultado de singularidades especialmente graves en los modelos.

La organización del trabajo es la siguiente:

En el capítulo 1 discutimos la necesidad de integrar las reglas de superselección en el esquema teórico de la mecánica cuántica. Este capítulo no contiene nada nuevo, pero nos dá la oportunidad de presentar en una forma integrada lo que se sabe sobre las reglas de superselección y, en particular, sobre las reglas de superselección más generales que aparecen en la mecánica cuántica *arelativista*. Aquí introducimos la regla dinámica que explica la existencia de moléculas jirales. Por otra parte, lo aprovechamos para mencionar la creencia actual de que cualquier regla de superselección que tenga un origen puramente dinámico, debe aparecer en un sistema con un número infinito de grados de libertad. Parte de nuestro trabajo consistirá en mostrar que una simple generalización del hamiltoniano del átomo de hidrógeno unidimensional es capaz de presentar una regla de superselección dinámica.

En el capítulo 2 comenzamos con el análisis del problema. Mostramos como se le obtiene por un proceso de aproximación en la teoría de átomos en campos magnéticos ultraintensos. Estudiamos con cierto detalle las propiedades del espectro de energías y de las eigenfunciones del problema al pasar al límite $B \rightarrow \infty$. Uno de los resultados que se creen muy bien establecidos en este límite, es la existencia de un estado fundamental con energía de enlace infinita. Por ello, demostramos que no existe ningún estado con energía infinita en tal límite. De hecho, en particular exhibimos el origen de este punto de vista erróneo. Este comportamiento límite ilustra muy bien la singularidad del problema, pues no contradice el hecho de que la energía de enlace del estado fundamental de un átomo de hidrógeno, se incrementa logarítmicamente al aumentar la intensidad del campo magnético en que se encuentra inmerso.

Finalmente, en el capítulo 3, resolvemos completamente el problema de un

átomo de hidrógeno en una dimensión. Para ello primero, aplicando técnicas de regularización, estudiamos el hamiltoniano clásico, revelamos su simetría oculta y exhibimos la cantidad conservada asociada a ella. Después, analizamos el problema cuántico planteándolo en el espacio de los momentos; encontramos todas sus soluciones, y exhibimos la simetría oculta de los estados en el espectro discreto. Investigamos las propiedades de su solución y demostramos que sus curiosas propiedades pueden explicarse por la aparición inesperada de una limitación a la superposición de estados, la que produce una ruptura espontánea de la paridad. Mostramos como esta limitación puede interpretarse como una regla de superselección en un hamiltoniano generalizado, y encontramos que el operador que genera ésta, es la cantidad conservada clásica asociada a la simetría oculta del problema.

Capítulo 1

Reglas de superselección

1. Introducción.

En este capítulo mencionamos las limitaciones al principio de superposición de estados que pueden aparecer en la teoría cuántica, e introducimos las reglas de superselección en el contexto más general de ella (Roman 1964, Streater y Wightman 1964, Hughes 1989). Discutiremos las reglas de superselección más usuales en mecánica cuántica relativista: univalencia, masa, y número de partículas (Sudbery 1986). Mencionaremos otras, de aplicación más particular y cuyo origen no son las propiedades de transformación generales de la teoría (en este sentido tienen un origen puramente cinemático) sino características específicas de su hamiltoniano, i.e. tienen origen dinámico. Estas últimas permiten explicar la aparición de variables clásicas macroscópicas, como la temperatura o el potencial químico, cuando se toma el límite termodinámico en un sistema cuántico (Müller-Herold 1980, 1985, Putterman 1983). Finalmente, mencionaremos como la introducción de reglas de superselección inducidas por la dinámica, permite resolver ciertos problemas de la física atómica y molecular, como la así llamada "paradoja de los isómeros ópticos" (Pfeifer 1980). En este punto, haremos la conexión con el problema que es el motivo principal de este trabajo.

2. El principio de superposición y sus limitaciones.

La mecánica cuántica es una teoría completa. Una de sus bases fundamentales es el principio de superposición de estados: si un sistema físico puede estar en dos estados alternativos, cualquier superposición de éstos es otro estado posible para el sistema. El fotón proporciona un ejemplo clásico (Dirac 1958, Feynman 1965): se le puede encontrar con polarización circular dextrógira, con vector de

estado:

$$|\psi_D\rangle, \quad (1)$$

o levógira, con vector de estado:

$$|\psi_I\rangle; \quad (2)$$

pero, si esto es así, cualquier combinación lineal de estos vectores representa otro posible estado del fotón. Por ejemplo, las combinaciones:

$$|\psi_V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_D\rangle + i|\psi_I\rangle) \quad (3)$$

y

$$|\psi_H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_D\rangle - i|\psi_I\rangle) \quad (4)$$

describen fotones polarizados linealmente.

El principio de superposición se integra a la estructura matemática de la teoría requiriendo que los operadores asociados a cantidades físicas sean lineales (Dirac 1958, Roman 1964, Weissbluth 1978), i.e. que si H es un operador, éste cumpla que

$$H(a_1|1\rangle + a_2|2\rangle) = a_1H|1\rangle + a_2H|2\rangle. \quad (5)$$

donde a_1 y a_2 son números complejos arbitrarios, $|1\rangle$ y $|2\rangle$ son vectores cualesquiera en el espacio de estados del sistema.

A pesar de ser un requisito básico de la teoría, es fácil convencerse de que el principio de superposición de estados no puede ser válido en forma irrestricta. Para ello, pensemos en un sistema formado por electrones y fotones; los electrones son fermiones, partículas que se describen por vectores de estado, $|e\rangle$, que bajo rotaciones por 2π , representadas por el operador $R_{2\pi}$, no reproducen exactamente el estado inicial, sino que lo multiplican por un factor de fase -1 . Por otro lado los fotones son bosones, cuyo vector de estado $|f\rangle$ no cambia bajo el efecto de $R_{2\pi}$ (Kaempffer 1965, Sudbery 1986). Esta diferencia tiene una consecuencia muy importante: no permite la superposición de estados fotónicos con estados electrónicos. Si intentamos formar una superposición coherente de estos estados, por ejemplo:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_f|f\rangle + e_e|e\rangle), \quad (6)$$

es fácil darse cuenta que ésta no puede tener significado físico alguno. Consideremos, para ello, el comportamiento de Ψ bajo el operador $R_{2\pi}$ (el que no puede modificar la física descrita por (6)):

$$R_{2\pi}\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_f|f\rangle - c_e|e\rangle); \quad (7)$$

si, como corresponde, deseamos que $|\Psi|^2 = |R_{2\pi}\Psi|^2$, es menester que tengamos $c_f = 0$ o $c_e = 0$ (Wick *et al.* 1952). Dicho de otra forma, es imposible darle significado a superposiciones coherentes de estados fotónicos con estados electrónicos; toda superposición de la forma (6) solo puede ser interpretada como un estado impuro, una mezcla estadística. Ello quiere decir que la expresión (6) es indistinguible del correspondiente operador de densidad.

Así pues, hemos encontrado una limitación importante al principio de superposición; la que, para mantener la consistencia de la teoría cuántica, requiere de la imposibilidad de superponer entre sí ciertos estados. Es de notar que esta limitación no implica la pérdida de linealidad de los operadores. En este ejemplo, resulta claro el origen puramente cinemático de la limitación al principio de superposición de estados, pero ello no tiene que ser necesariamente así, hay limitaciones que son provocadas por características dinámicas específicas del hamiltoniano del sistema, como en el ejemplo de las moléculas jirales que discutiremos en la sección 10.

3. Reglas de superselección.

Cuando, como en el ejemplo de la sección anterior, se encuentra que el principio de superposición deja de ser válido en general y, por lo tanto, que ciertos vectores del espacio de Hilbert no son físicamente realizables, se habla de la existencia de una *regla de superselección* en la teoría (Wick *et al.* 1952, Kharatyan 1968, Piron 1969, Hughes 1989). En su forma más general, una *regla de superselección es cualquier restricción a la validez del principio de superposición de estados*, o, visto de otra forma, cualquier limitación de lo que puede considerarse un observable en la teoría. Si esta limitación no tiene causas puramente cinemáticas, se habla de *reglas de superselección inducidas por la dinámica* (Núñez Yépez *et al.* 1988, Martínez

y Romero *et al.* 1989b). En las siguientes secciones vamos a discutir con cierto detalle como se pueden integrar las reglas de superselección a la teoría cuántica y mencionaremos algunas de las reglas de superselección más generales que aparecen en ella.

La forma más restringida en que se manifiestan las reglas de superselección en la teoría cuántica, es la siguiente (Strocchi y Wightman 1974, Hughes 1989): Supongamos que existe un operador hermítico G que conmuta con cualquier observable O , de cierto sistema cuántico,

$$[G, O] = 0; \quad (8)$$

i.e. el observable G se conserva estrictamente en todo proceso concebible. En un sistema cuántico "normal", ello implicaría que G es un múltiplo de la identidad; pero, si ello no es así, diremos que en el sistema existen reglas de superselección (Roman 1964).

Supongamos que el operador G cumple:

$$G|g_i; \alpha_i\rangle = g_i|g_i; \alpha_i\rangle, \quad (9)$$

esto es, $|g_i; \alpha_i\rangle$ es una eigenfunción de G con eigenvalor g_i (α_i representa a todo el resto de números cuánticos que se requieran para especificar el estado). Dado un estado arbitrario del sistema $|S\rangle$, siempre es posible expresarlo como combinación lineal de los $|g_i; \alpha_i\rangle$:

$$|S\rangle = \sum_i \alpha_i |g_i; \alpha_i\rangle, \quad (10)$$

Dicho de otra forma, el espacio de Hilbert completo puede descomponerse en una colección de subespacios disjuntos y mutuamente ortogonales $H_i = \{|g_i; \alpha_i\rangle\}$, cada uno de los cuales se identifica con un eigenvalor diferente de G . A éstos se los llama los subespacios o sectores coherentes inducidos por la regla de superselección. La suma directa de todos los sectores constituye el espacio de Hilbert completo del sistema.

A los operadores que generan una regla de superselección se les llama los observables clásicos del sistema (Primas 1981). Como demostraremos a continuación,

si en una teoría aparecen reglas de superselección, no todo operador hermitico puede ser un observable, para serlo no debe inducir transiciones entre los diferentes sectores coherentes; por otra parte el principio de superposición deja de ser válido en general, su validez debe restringirse únicamente a estados dentro de un mismo sector coherente del espacio de Hilbert. Es importante hacer notar que no es posible especificar de antemano y en forma general a los observables clásicos, éstos dependen del sistema y, de cierta forma, reflejan un punto de vista experimental.

4. Consecuencias de una regla de superselección.

Probaremos que los elementos de matriz de cualquier observable O tomados entre estados pertenecientes a diferentes subespacios coherentes son siempre cero: Puesto que todo observable conmuta con el operador que genera a la regla de superselección G , todo eigenestado de éste será simultáneamente eigenestado de O ; así

$$\langle g_n | O | g_m \rangle = o \langle g_n | g_m \rangle = 0, \quad (11)$$

donde $|g_i\rangle$ es un estado que pertenece al sector H_i , y hemos suprimido, para simplificar la notación, la referencia a los otros números cuánticos. Este resultado prueba nuestra afirmación. Una de las consecuencias inmediatas de la ecuación (11) es que revela que un operador hermitico no tiene por que representar un observable físico. Ningún observable debe producir transiciones entre los sectores coherentes en que se divide el espacio de Hilbert.

Pasemos a demostrar que un vector del espacio de Hilbert que tenga componentes diferentes de cero en más de uno de los sectores coherentes, no representa un estado físicamente admisible del sistema. Enunciado de otra forma, este resultado afirma que superposiciones de los eigenestados del operador G con números cuánticos diferentes, no pueden ocurrir en la naturaleza. Para demostrarlo, supongamos que, por el contrario, el vector

$$|\Phi\rangle = \sum_i a_i |g_i; \alpha_i\rangle \quad (12)$$

representa un estado físicamente realizable. Como G conmuta con todo operador, el vector $|\Phi\rangle$ debe ser un eigenestado de todos los operadores que forman alguno

de los conjuntos completos de observables del sistema. Si representamos a éste por $\{O_s\}$, $s = 1, 2, \dots, N$. Así pues tendremos que

$$O_s|\Phi\rangle = o_s|\Phi\rangle, \quad s = 1, 2, \dots, N. \quad (13)$$

Ahora bien, ya que, debido a la regla de superselección, $|g_i; \alpha_i\rangle$ es un eigenestado de O_s , con un eigenvalor que denotaremos por o_i^s , podremos expresar el efecto de aplicar O_s a $|\Phi\rangle$, también en la forma

$$O_s|\Phi\rangle = \sum_i a_i o_i^s |g_i; \alpha_i\rangle; \quad (14)$$

como los vectores $|g_i; \alpha_i\rangle$ son todos independientes, las ecuaciones (12), (13), y (14) implican que $o_i^s = o_s$, para todo valor de i . Consideremos ahora al vector

$$|\Psi\rangle = \sum_j a_j \exp(i\delta_j) |g_j; \alpha_j\rangle, \quad (15)$$

que se obtiene de (13) al modificar arbitrariamente las fases en la superposición. Si aplicamos O_s a éste, obtenemos

$$O_s|\Psi\rangle = o_s \sum_j a_j \exp(i\delta_j) |g_j; \alpha_j\rangle = o_s|\Psi\rangle, \quad s = 1, 2, \dots, N. \quad (16)$$

Las ecuaciones (13) y (16) nos dicen que los estados $|\Phi\rangle$ y $|\Psi\rangle$ tienen exactamente los mismos números cuánticos y que, por lo tanto, son absolutamente indistinguibles físicamente. Ningún proceso físico puede determinar la fase relativa entre el estado (12) y el estado (16). Sin embargo, matemáticamente $|\Psi\rangle$ y $|\Phi\rangle$ son vectores diferentes en el espacio de Hilbert; la contradicción se evita exigiendo que superposiciones de estados pertenecientes a subespacios definidos por eigenvalores diferentes del operador G no tengan significado como estados puros. Las superposiciones $|\Psi\rangle$ y $|\Phi\rangle$ son de necesidad incoherentes.

5. Las reglas de superselección más generales.

La teoría cuántica debe formularse tomando en cuenta las reglas de superselección más generales que pueden ocurrir; hay, al menos, una por cada número cuántico discreto que se conserve absolutamente, y una adicional relacionada con el

espín de las partículas. Los observables que llevan a estas reglas de superselección son:

A) La carga eléctrica (Aharonov y Susskind 1967, Foldy 1953, Rolnick 1967, Mirman 1969, Emmerson 1972, Sudbery 1986). Es relativamente fácil dar argumentos que justifiquen heurísticamente la existencia de la regla asociada con la carga eléctrica. Si nos olvidamos de los problemas subyacentes, todo se reduce a una simple aplicación de la ley de Gauss (Strocchi y Wightman 1974):

Supongamos que O es un operador cualquiera definido en una región finita del espacio, lo que hay que probar es que éste siempre conmuta el operador de carga eléctrica Q . El operador de carga se define por

$$Q = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|\mathbf{r}| \leq R} \rho(\mathbf{r}, t) d^3r; \quad (17)$$

por lo que

$$[Q, O] = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|\mathbf{r}| \leq R} [\rho(\mathbf{r}, t), O] d^3r; \quad (18)$$

ahora, empleando la ley de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad (19)$$

se obtiene

$$[Q, O] = \lim_{R \rightarrow \infty} \int [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), O] \cdot d\mathbf{s}. \quad (20)$$

Como O se define únicamente en una región finita, eventualmente el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ se evaluará fuera de ella, y el conmutador de Q con cualquier observable O valdrá, obviamente, cero. Así, la carga eléctrica debe cumplir con una regla de superselección.

B) El número bariónico (Jauch y Misra 1961, Streater y Wightman 1964, Emmerson 1972, Sudbery 1986), y los tres números leptónicos L_e, L_μ y L_τ (Streater y Wightman, Emmerson 1972, Sudbery 1986). Hasta donde sabemos, estas reglas son hechos empíricos que no se deducen de ningún modelo dinámico.

C) Finalmente, está la regla de superselección asociada con la imposibilidad de superponer estados bosónicos con estados fermiónicos (Wick et al. 1952, Streater

y Wightman 1964, Hegerfeld *et al.* 1968, Sudbery 1986), llamada de univalencia. Discutiremos esta regla, dentro del marco de la teoría cuántica relativista, en la siguiente sección.

6. Univalencia.

Esta regla de superselección prohíbe superponer estados bosónicos con estados fermiónicos. Esbozamos una demostración de ella en la sección 2 siguiendo el ya clásico argumento de Wick *et al.* (1952). Aquí, rediscutiremos el origen de la regla de univalencia desde otro punto de vista; demostraremos que es consecuencia directa de la existencia de partículas cuánticas indistinguibles.

Consideremos un sistema formado por dos partículas cualesquiera que tengan el mismo espín. El estado del sistema queda descrito por el vector

$$|q_1, s_1; q_2, s_2\rangle, \quad (21)$$

en donde q_i representa la posición, y s_i la variable de espín de cada partícula. Introduzcamos el operador de permutaciones P , cuyo efecto es sobre el estado (21) es, simplemente, permutar el orden en que aparecen las partículas

$$P|q_1, s_1; q_2, s_2\rangle = |q_2, s_2; q_1, s_1\rangle. \quad (22)$$

Los eigenvalores de P son $+1$ y -1 ; los eigenvectores correspondientes son los estados bosónicos y los estados fermiónicos, respectivamente. Todo vector en el espacio de Hilbert puede clasificarse como fermiónico o como bosónico, según el espín que le corresponda al estado que describe.

Si las partículas que intervienen en cierto vector de estado son idénticas, ninguna conclusión que se obtenga acerca del sistema puede depender del orden en que aquellas aparezcan en aquel, *i.e.* todo observable del sistema O conmuta con P (Roman 1964). Por lo tanto el operador de permutaciones es un observable clásico y debe generar una regla de superselección. Según demostramos a continuación la regla que genera P es univalencia.

Introduzcamos proyectores sobre las eigenfunciones de P :

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm P), \quad (23)$$

de forma que $P_+|\Psi\rangle$ es un estado bosónico y $P_-|\Psi\rangle$ es un estado fermiónico. Los operadores P_{\pm} son los responsables de dividir el espacio de Hilbert H en los sectores coherentes, bosónico $H_- = P_-H$, y fermiónico $H_+ = P_+H$.

Si los vectores de estado $|\Phi_{\pm}\rangle$ pertenecen a H_{\pm} , y O es un observable, es evidente que

$$\langle\Phi_-|O|\Phi_+\rangle = -\langle\Phi_-|O|\Phi_+\rangle = 0. \quad (24)$$

Si aplicamos el operador de permutaciones a cualquier combinación lineal de fermiones con bosones:

$$P(a_+|\Phi_+\rangle + a_-|\Phi_-\rangle) = a_+|\Phi_+\rangle - a_-|\Phi_-\rangle, \quad (25)$$

obtenemos un vector estado que es linealmente independiente del anterior; pero, este estado debiera ser indistinguible del original. Por lo tanto, se cumple una regla de superselección entre estados fermiónicos y estados bosónicos (Hughes 1989, Müller-Herold 1985).

7. Regla de superselección de Bargmann.

En las aplicaciones de la mecánica cuántica a problemas atómicos o moleculares se trata a la masa como un parámetro estrictamente clásico: conmuta con toda otra cantidad física. A nadie se le ocurre preguntarse por estados que superpongan partículas de diferente masa. La masa parece cumplir una regla de superselección. El que ello sea así, según lo demostró Bargmann (1954), es una consecuencia de la invariancia galileana del espacio-tiempo usado en la física atómica y molecular.

Las transformaciones de Galileo se representan en mecánica cuántica por operadores unitarios U_g que actúan sobre las funciones de estado. El efecto de una traslación espacial sobre un vector de estado es (Kaempffer 1965)

$$U_r\Psi(\mathbf{q}) = \Psi(\mathbf{q} + \mathbf{r}), \quad (26)$$

una transformación de Galileo pura afecta al mismo estado en la forma

$$U_v\Psi(\mathbf{q}) = \exp(imv \cdot \mathbf{q})\Psi(\mathbf{q}), \quad (27)$$

donde m es la masa de la partícula y \mathbf{v} la velocidad relativa entre dos sistemas de referencia inerciales. Calculemos ahora el efecto combinado de una transformación de Galileo pura $U_{\mathbf{v}}$, una traslación $U_{\mathbf{r}}$, la transformación inversa de Galileo $U_{-\mathbf{v}}$, y, finalmente, la traslación inversa $U_{-\mathbf{r}}$; tal combinación es equivalente a la transformación identidad, por lo que nos debe llevar de vuelta, salvo por una fase, al estado inicial (Kaempfer 1965):

$$U_{-\mathbf{r}}U_{-\mathbf{v}}U_{\mathbf{r}}U_{\mathbf{v}}\Psi(\mathbf{q}) = \exp(i m \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\Psi(\mathbf{q}). \quad (28)$$

¿Cuáles son las implicaciones de este resultado para sistemas con partículas de masas diferentes? Una superposición de estados de partículas de diferente masa, $|\Psi\rangle = |m_1\rangle + |m_2\rangle$, se transforma como

$$|\Psi\rangle \rightarrow |\Psi'\rangle = \exp(i m_1 \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})|m_1\rangle + \exp(i m_2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})|m_2\rangle. \quad (29)$$

En este caso, si $\mathbf{r} \neq 0$ y $\mathbf{v} \neq 0$, los estados $|\Psi\rangle$ y $|\Psi'\rangle$ resultan independientes. Pero, como el efecto de la transformación identidad tiene que ser físicamente trivial, solo podemos concluir que no está permitido superponer estados correspondientes a partículas con masa diferente. La masa es, en efecto, un observable clásico en mecánica cuántica arelativista (Levy-Leblond 1963). La existencia de esta regla induce una descomposición del espacio de Hilbert en una suma directa de sectores que corresponden a los diversos valores que puede tomar la masa.

8. Número de partículas.

Como es intuitivamente obvio, el número de partículas es otro ejemplo de un observable clásico con el que hay una regla de superselección asociada (Galindo *et al.* 1962, Müller-Herold 1985). Esta regla casi puede considerarse un corolario a la de Bargmann. Veámoslo así: Si tenemos el estado, $|n\rangle$, de n partículas con la misma masa m ; éste se transforma bajo el operador identidad (considerado, como en la discusión anterior, como combinación de transformaciones de Galileo cuyos efectos se anulan) en la forma

$$|n\rangle \rightarrow \exp(i n m \mathbf{v} \cdot \mathbf{r})|n\rangle. \quad (30)$$

Es obvio ahora que combinaciones coherentes de estados de n partículas con estados de n' partículas no tienen significado físico alguno.

9. Propiedades macroscópicas.

Es claro el origen cinemático de las reglas de superselección anteriores. Pero existen otras que tienen un origen dinámico; surgen de introducir acoplamientos entre un sistema y su entorno. Por ejemplo, las porciones macroscópicas de materia adquieren propiedades clásicas conforme su tamaño y complejidad aumentan; en el límite termodinámico, aparecen la temperatura y el potencial químico, variables clásicas que tienen asociadas reglas de superselección. También se han encontrado variables clásicas en el comportamiento macroscópico de superconductores y superfluidos (Putterman 1983). Nótese que en estos casos las reglas de superselección surgen al tomar el límite de infinitos grados de libertad en el sistema y como resultado de interacciones entre éste y su entorno (Müller-Herold 1980, Pfeifer 1981, Zureck 1982).

10. Moléculas jirales.

Durante mucho tiempo la física molecular no pudo explicar la existencia de moléculas jirales, i.e. moléculas que nunca se observan en los que debieran ser los estados estacionarios del hamiltoniano de la molécula libre. Ejemplos de estas moléculas son la serina y el azúcar, que se encuentra en formas enantiométricas levógira y dextrógira. La existencia de estos isómeros ópticos, formas enantiométricas de la misma especie molecular, no se podía reconciliar con la mecánica cuántica (Hund 1927, Born y Jordan 1930, Wooley 1976, Davies 1979). A este problema se le conoce como la "paradoja de los isómeros ópticos".

El problema es que estas moléculas se presentan en dos clases de estados que no tienen las mismas propiedades de simetría que el hamiltoniano del sistema molecular: todos los estados estacionarios de estas moléculas son jirales y, por lo tanto, no son eigenestados del operador de paridad. En estos sistemas ocurre una ruptura espontánea de la paridad. La explicación que se dió para esto, implicó la introducción de una regla de superselección entre los dos tipos de estados.

La base de esta explicación está en la observación de que, en moléculas jirales, los estados con energía mas baja están casi degenerados; lo que los vuelve

extremadamente sensibles a perturbaciones externas. Por ello, es necesario incluir las interacciones con el campo de radiación que rodea a la molécula. Este acoplamiento se puede describir por un hamiltoniano modelo que incluye la parte transversal del campo de radiación (considerada como un sistema infinito de osciladores) acoplada a la molécula. Esta interacción produce una degeneración exacta (antes solo era aproximada) entre los estados, acompañada por una regla de superselección dinámica producida por la singularidad infraroja del campo de radiación (Pfeifer 1980, 1981, 1983). La variable clásica asociada a esta regla de superselección es la jiralidad de la molécula.

La regla de superselección dinámica que, según demostraremos en el capítulo 3, ocurre en un modelo para un átomo dentro de un campo magnético con intensidad infinita, muestra similitudes con la regla encontrada por Pfeifer. De cierta forma, se le puede considerar una versión "desnuda", esto es, despojada de toda complejidad innecesaria, del fenómeno que produce ésta: una regla de superselección producida por una singularidad en el hamiltoniano. Este resultado es muy interesante pues ocurre en un sistema con un número finito de grados de libertad y sin necesidad de invocar acoplamientos externos a sistemas con un número infinito de ellos.

Capítulo 2

Atomo en un campo magnético muy intenso

1. Introducción.

Las modificaciones que sufre la estructura de los átomos cuando se los sujeta a campos magnéticos siempre ha generado interés. En los primeros tiempos de la teoría cuántica se estudiaron y explicaron el efecto Zeeman normal y el efecto Zeeman anómalo; subproducto a estos estudios fué la introducción del espín como número cuántico extra que caracteriza al electrón. Con el descubrimiento de los pulsares, los que se cree que son estrellas de neutrones en rápida rotación en las que se producen campos magnéticos ultraintensos (Smith 1977, Goldrich y Julian 1969, Ruderman y Sutherland 1975), el interés en el estudio de átomos en campos magnéticos se reavivó (Guder 1967, Ruderman 1971, Surlmelian y O'Connell 1974, Avron *et al.* 1978, Freeman 1981, Rosen 1986, Chhajlany *et al.* 1988). Actualmente éste se debe también al interés en el estudio de estados de Rydberg en campos magnéticos (Gay 1986), a problemas de localización de las funciones de onda (Bivona *et al.* 1988), y al creciente interés en el caos, tanto a nivel clásico como cuántico (Lombardi *et al.* 1988, Friedrich y Wintgen 1989, Núñez Yépez *et al.* 1989b).

La diferencia fundamental de los nuevos estudios con las investigaciones anteriores es el orden de magnitud de las intensidades de los campos, mientras que en estudios del efecto Zeeman se puede tratar la interacción magnética como una perturbación a la interacción coulombiana con el núcleo (Bransden y Joachaim 1983), en el caso de un átomo de hidrógeno en el campo magnético de un pulsar, es la interacción coulombiana la que debe considerarse perturbación a la interacción magnética (para una mención de las intensidades de campo involucradas, ver la sección siguiente); a estas intensidades del campo magnético la estructura atómica se modifica grandemente (Zeldovich *et al.* 1983, Gay 1986). El interés en este problema llevó a considerar el caso extremo de un átomo en un campo magnético

con intensidad infinita. A este caso extremo se le conoce también como el problema del átomo de hidrógeno en una dimensión (Garstang 1977, Gesztesy 1980, Gomes y Zimmerman 1981, Tzara 1985, 1987, Davtyan *et al.* 1987, Núñez Yépez *et al.* 1987, Salas Brito *et al.* 1989), problema que ya había sido estudiado anteriormente en la teoría de excitones en campos magnéticos (Loudon 1959, Elliot y Loudon 1960).

En este capítulo discutiremos el límite de campo magnético con intensidad infinita dentro de la teoría de átomos inmersos en un campo magnético muy intenso, límite al que se comenzó a estudiar como una aproximación unidimensional al problema. Esta aproximación ha sido criticada por los problemas que introduce debido a su carácter singular (Moshinsky *et al.* 1984). Para analizar algunos de estos problemas, describiremos el bien conocido efecto de un campo magnético, B , actuando sobre un electrón, para después, incluir el campo electrostático de un núcleo como perturbación. Ello nos conducirá naturalmente al estudio de las funciones propias y del espectro de energías de la familia de potenciales $V_\rho(q) = -Z/(|q| + \rho)$, considerándolos como funciones de ρ ($\sim B^{-1/2}$); para, finalmente, investigar su comportamiento en el límite $\rho \rightarrow 0$. Mucho de nuestro interés en este capítulo estará enfocado al comportamiento del estado fundamental, puesto que su comportamiento, y aún su existencia misma, ha sido fuente de controversia.

2. Electrón en un campo magnético.

Comencemos por analizar el efecto de un campo magnético constante aplicado a un electrón que, excepto por esta interacción, se mueve libremente. Supondremos que el campo apunta en dirección z , y tiene magnitud B . Como es sabido, el movimiento del electrón se ve cuantizado en dirección perpendicular al campo, i.e. en la dirección $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$, en estados discretos que se conocen como niveles de Landau. Los eigenvalores de la energía están igualmente espaciados entre sí, y su espectro es (Landau y Lifshitz 1977)

$$E_{N,m} = \hbar\omega [N + (m + |m|)/2 + 1/2] + p_z^2/2m_e, \quad (1)$$

aquí, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$, es el número cuántico azimutal, m_e es la masa del electrón, $N = (0, 1, 2, \dots)$ es el número cuántico asociado con el movimiento en dirección ρ , y no incluimos el efecto del espín.

Cada nivel de Landau tiene una degeneración infinita, los orbitales correspondientes son

$$\psi(\mathbf{r}) = A_{N,m} e^{i(m\phi + p_x z/\hbar)} \exp(-\rho^2/2r_c^2) \rho^{|m|} M(-n, |m| + 1, \rho^2/2r_c^2), \quad (2)$$

donde $A_{N,m} = (|m| + N)^{1/2} (2\pi^{1/2} 2^{|m|} N!)^{-1/2} (r_c^{1+|m|} N!)^{-1}$ es un factor de normalización, $r_c = (2c\hbar/eB)^{1/2}$ es el radio ciclotrónico, $y_0 = -cp_x/eB$, y $M(a, b, c)$ es la función hipergeométrica (ver la ecuación (26) para su definición). Según esta ecuación, los orbitales están "concentrados" (en el mismo sentido en que un átomo de hidrógeno está concentrado dentro de una esfera con el radio de Bohr a_B) dentro de un cilindro de radio

$$\rho_m = (|m| + 1/2)^{1/2} r_c, \quad (3)$$

alrededor de las líneas de campo. Obviamente, mientras más intenso sea el campo magnético, más localizado estará el electrón alrededor de la línea de campo. Cuando $r_c \ll a_B$ se habla de campos magnéticos ultraintensos. Pongamos unos números para ilustrar el significado del término. Si pedimos que la interacción magnética sea del mismo orden de magnitud que la coulombiana, debemos tener que: $r_c = a_B$; esto se traduce en una intensidad del campo magnético de $B_c \approx 2.3 \times 10^9$ G. Un campo B ultraintenso debe cumplir que $B/B_c \gg 1$; por lo que, en este caso, $r_c \ll a_B$ y el electrón estará mucho más confinado. A guisa de ejemplo, mencionamos que el campo magnético típico en un pulsar es $B_{pulsar} \sim 10^{13}$ G (Shapiro y Teukolsky 1983, Zeldovich *et al.* 1983).

3. Atomo en un campo magnético ultraintenso.

Incluyamos ahora el efecto del campo coulombiano de un núcleo (al que, por simplicidad, supondremos de masa infinita) de carga Zc , localizado en algún punto sobre la línea de campo alrededor de la cual gira el electrón. Para campos magnéticos muy intensos, el campo coulombiano del núcleo se comporta como una perturbación que casi no afecta el movimiento transversal del electrón, y que solo es efectivo en la dirección z , la dirección del campo magnético. El efecto del núcleo es únicamente el de ligar al electrón alrededor de los niveles de Landau (Kadomsev y Kudryavtsev 1971, Garstang 1977, Skjervold y Ostgaard 1984). Se obtienen, así, un número infinito de niveles discretos de energía asociados a los niveles de Landau.

El campo eléctrico del núcleo contribuye a la energía potencial del electrón con el término

$$V(z) = -Ze^2/(\rho^2 + z^2)^{1/2}, \quad (4)$$

pero, debido a la acción de B , la posición transversal del electrón puede suponerse aproximadamente fija e igual a ρ_m ; entonces, con muy buena aproximación, se puede substituir (4) (Rau y Spruch 1976) por el potencial unidimensional efectivo:

$$V(z) = -Ze^2/(\rho_m + |z|). \quad (5)$$

En el límite $B \rightarrow \infty$, este potencial se convierte en el "potencial unidimensional de Coulomb" (Loudon 1959, Tzara 1985):

$$V(z) = -Ze^2/|z|; \quad (6)$$

lo que también se puede obtener directamente de (4). Los argumentos que se han dado para llegar a la expresión aproximada (6) no han dejado de causar controversia por la naturaleza singular del potencial que se obtiene. El llamarle "potencial de Coulomb en una dimensión" a este potencial es lo usual, y es la denominación que usaremos en este trabajo. Hacemos notar, sin embargo, que el potencial de Coulomb apropiado a una dimensión (i.e. él) que es solución de la ecuación de Poisson) debe ser $V(z) \propto |z|$, y no es de la forma (6).

4. Problemas con el modelo basado en el potencial unidimensional de Coulomb.

Es claro que tomar el límite $B \rightarrow \infty$ ha generado una singularidad, un polo en el término de energía potencial. Esta singularidad es de naturaleza más grave que la singularidad original en el potencial coulombiano del núcleo, ya que el efecto del campo magnético es la supresión efectiva de dos de las dimensiones espaciales del problema. Según se cree, la singularidad genera varias características problemáticas al modelo del átomo de hidrógeno unidimensional, que lo inutilizan como modelo aproximado del comportamiento de un electrón en un átomo sujeto a un campo magnético muy intenso (Moshinsky *et al.* 1984). Estas características son:

A) El átomo de hidrógeno en una dimensión tiene estados ligados degenerados, violándose así el resultado que asegura que los estados ligados de cualquier potencial

en una dimensión no pueden serlo (Loudon 1959, Haines y Roberts 1969, Davtyan *et al.* 1987). En el átomo de hidrógeno unidimensional los niveles están doblemente degenerados, como consecuencia de que su hamiltoniano es un operador par. Esta curiosa propiedad, que se ha interpretado de muchas formas (por ejemplo, como consecuencia de una simetría oculta $O(2)$ presente en el problema (Boya *et al.* 1988, Lutsenko *et al.* 1989)), es consecuencia directa de la limitación a la superposición de estados que existe en el sistema —o, si se quiere, de una regla de superselección— según lo demostraremos en la sección 12 del capítulo siguiente.

B) El estado fundamental del átomo de hidrógeno en una dimensión se encuentra completamente localizado en el origen (su función de onda, se cree, es una delta de Dirac) y corresponde a una energía de enlace infinita (Loudon 1959, Haines y Roberts 1969, Van Haeringen 1978, Zeldovich *et al.* 1983, Moshinsky *et al.* 1984, Imbo y Sukhatme 1985, Spector y Lee 1985, Davtyan *et al.* 1987). El argumento informal que usualmente se ofrece para sustentar la existencia de este estado es, esencialmente, el siguiente: Como el potencial del problema es $\sim -1/|z|$, el estado fundamental debe tener una energía

$$E_0 \sim - \int_0^\infty dz/z, \quad (7)$$

y esta integral diverge logarítmicamente. Entonces, como la energía de enlace es infinitamente grande, se argumenta que el electrón se debe encontrar confinado en $z = 0$, esto es, amarrado completamente al sitio del núcleo (Loudon 1959, Haymaker y Rau 1986, Davtyan *et al.* 1987).

C) Se afirma que los niveles de energía de los estados ligados con simetría par, forman un continuo de estados ligados (Haines y Roberts 1969). Así, este sistema sería en extremo peculiar, su espectro de energías “discreto” sería, en realidad, continuo.

CH) Por otra parte, el interés reciente en la aplicación de métodos supersimétricos a problemas de mecánica cuántica (Gedenstein y Krive 1985, Urrutia y Hernández 1983, Jauslin 1988), ha llevado a algunos autores a la conclusión de que la existencia de un espectro de niveles doblemente degenerado con un estado base que no lo es, es

indicación inequívoca de que el átomo de hidrógeno en una dimensión es un ejemplo típico de un sistema cuántico supersimétrico (Imbo y Sukhatme 1985, Haymaker y Rau 1986, Stedman 1985). Ello también ha llevado a que se considere —erróneamente (Martínez y Romero *et al.* 1989a, 1989b)— al potencial unidimensional de Coulomb como su propio compañero supersimétrico.

Todas las características mencionadas se atribuyen al efecto de la singularidad; su verdadero origen sería pues el proceso límite. Como la existencia de estas propiedades ha producido largas controversias sobre las propiedades del sistema, a continuación analizaremos el comportamiento de sus eigenestados durante el proceso de pasar del potencial (5) al potencial (6), i.e. al hacer que $\rho \rightarrow 0$; lo que es completamente equivalente a tomar el límite $B \rightarrow \infty$ (Avron *et al.* 1979).

5. Propiedades generales de los estados del hamiltoniano.

Para aclarar el proceso por el que se obtiene el hamiltoniano de átomo de hidrógeno unidimensional, estudiaremos a la familia de hamiltonianos (en unidades atómicas, $\hbar = m_e = e = 1$)

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \frac{Z}{|z| + \rho}. \quad (8)$$

Muchas propiedades generales de los estados de estos hamiltonianos se pueden deducir de transformaciones de redimensionamiento (Avron *et al.* 1979) según mostraremos en esta sección. Aunque nos interesa primordialmente la dependencia con ρ y, para mucho de lo que haremos basta tomar $Z = 1$, en esta sección consideraremos la dependencia tanto en ρ como en Z .

Si realizamos la transformación

$$p \rightarrow \lambda p, \quad z \rightarrow z/\lambda, \quad \lambda > 0 \quad (9)$$

el hamiltoniano (8) se transforma en

$$H \rightarrow H' = \lambda^2 \left(p^2/2 - \frac{(Z/\lambda)}{|z| + \lambda\rho} \right). \quad (10)$$

De aquí obtenemos que sus niveles de energía $E(Z, \rho)$ satisfacen

$$\lambda^2 E(Z/\lambda, \lambda\rho) = E(Z, \rho), \quad (11)$$

de donde

$$E(Z, \rho) = \rho^2 E(Z/\rho, \rho^2), \quad (12)$$

y

$$E(Z, \rho) = (1/\rho^2) E(Z\rho, 1). \quad (13)$$

Obviamente, el hamiltoniano (8) satisface también que

$$H(Z, \rho) > H(Z, 0), \quad (14)$$

por lo que, los niveles de energía asociados deben satisfacer la desigualdad

$$E_n(Z, \rho) > E_n(Z, 0); \quad (15)$$

y, ya que p^2 es un operador definido positivo, deben cumplir también que (Martínez y Romero *et al.* 1989a)

$$E_n(Z, \rho) > -\frac{Z}{\rho}. \quad (16)$$

Nótese que esta condición indica que no es razonable esperar un estado ligado con energía de enlace infinita. Sin embargo, a pesar de que este argumento es de naturaleza muy general, podría no considerarse del todo concluyente por la singularidad en $\rho = 0$. En el capítulo siguiente exhibiremos que si lo es.

Los niveles de energía, considerados como funciones de los parámetros Z y ρ , decrecen monotonamente con Z , y crecen monotonamente con ρ . Para demostrarlo, consideremos la ecuación de eigenvalores

$$H(Z, \rho)\psi(z; Z, \rho) = E(Z, \rho)\psi(z; Z, \rho) \quad (17)$$

y derivémosla respecto de ρ , con ello obtenemos

$$\partial H/\partial \rho \psi + H \partial \psi/\partial \rho = \partial E/\partial \rho \psi + E \partial \psi/\partial \rho, \quad (18)$$

ahora tomamos el producto interno de este resultado con ψ , y rearreglamos

$$\partial E/\partial \rho = Z \langle \psi | \frac{1}{(|z| + \rho)^2} | \psi \rangle, \quad (19)$$

lo que muestra que la derivada es siempre mayor que cero. Si derivamos (17) respecto a Z , podremos similarmente obtener que

$$\partial E/\partial Z = - \langle \psi | \frac{1}{|z| + \rho} | \psi \rangle, \quad (20)$$

i.e. esta derivada es menor que cero. Con los resultados (19) y (20) quedan demostradas nuestras afirmaciones.

6. El problema aproximado de un átomo en un campo magnético ultraintenso.

En esta sección estudiaremos los estados ligados del hamiltoniano aproximado (8). Los estados ligados deben satisfacer la ecuación

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 \psi}{dz^2} - \frac{Z}{|z| + \rho} \psi = E \psi, \quad (21)$$

con $E < 0$. Si hacemos el cambio de variable

$$y = \begin{cases} \sqrt{-8E}(z + \rho) & \text{si } z > 0, \\ \sqrt{-8E}(z - \rho) & \text{si } z < 0, \end{cases} \quad (22)$$

la ecuación (20) se transforma en

$$\frac{d^2 \psi}{dy^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{Z}{|y| \sqrt{-2E}} \right) \psi = 0. \quad (23)$$

Debemos notar que en esta ecuación la singularidad es aparente, puesto que el punto $y = 0$ está fuera del intervalo admisible de valores, pues la transformación (24) requiere que $-\infty < y \leq \sqrt{-8E}\rho$ o $\sqrt{-8E}\rho \geq y < \infty$.

Si consideramos primero la región $y > 0$, esta ecuación está en la forma de una ecuación hipergeométrica confluyente (Abramowitz y Stegun 1968); su solución general se puede escribir como

$$\psi(y) = y \exp(-y/2) \{A M(k, 2, y) + B U(k, 2, y)\}, \quad (25)$$

donde $k = 1 - Z/\sqrt{-2E}$, A y B son constantes, y las funciones M y U son las funciones hipergeométricas confluentes:

$$M(a, b, x) = 1 + \frac{a}{b} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (26)$$

$$U(a, 2, x) = \frac{1}{\Gamma(a)x} + \frac{1}{\Gamma(a-1)} [M(a, 2, x) \ln x + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(a)_s x^s}{(2)_s s!} \{\psi_{\Gamma}(a+s) - \psi_{\Gamma}(1+s) - \psi_{\Gamma}(2+s)\}], \quad (27)$$

donde usamos las definiciones:

$$(a)_s = a(a+1)\dots(a+s-1), \quad (a)_0 = 1, \quad (28)$$

y

$$\psi_\Gamma(a) = \frac{1}{\Gamma(a)} \frac{d\Gamma(a)}{da}. \quad (29)$$

El comportamiento asintótico (cuando $y \rightarrow \infty$) de la solución es (Abramowitz y Stegun 1968)

$$\psi(y) \sim y \exp(-y/2) \left(\frac{A \exp(y)y^{-k}}{\Gamma(k)} + B y^{-k} \right), \quad (30)$$

pero, si deseamos que nos represente estados ligados, es menester que $\psi(\infty) = 0$; de esta forma se requiere que $A = 0$. La solución aceptable para $y > 0$ es, por lo tanto

$$\psi(y) = B y \exp(-y/2) U(k, 2, y). \quad (31)$$

Esta función define precisamente a la función de Whittaker $W_{a,b}(z)$ (Abramowitz y Stegun 1968)

$$\psi_+(y) = B W_{1+k, 1/2}(y), \quad \text{si } y > 0. \quad (32)$$

La solución para $y < 0$ se puede obtener fácilmente de hacer $y \rightarrow -y$ en (32), con lo que se obtiene

$$\psi_-(y) = C W_{1+k, 1/2}(-y) \quad \text{si } y < 0. \quad (33)$$

Ahora, para obtener las eigenfunciones del sistema, es menester empatar las soluciones en $z = 0$ para formar tanto funciones pares como impares. Para estados impares pediremos que

$$\psi_+(\sqrt{-2E\rho}) = \psi_-(\sqrt{-2E\rho}) = 0, \quad (34)$$

mientras para los pares, pediremos que se cumpla

$$\frac{d}{dy} \psi_-(\sqrt{-2E\rho}) = \frac{d}{dy} \psi_+(\sqrt{-2E\rho}) = 0. \quad (35)$$

Si usamos las expresiones (32) y (33), estas condiciones quedan

$$W_{1+k, 1/2}(\rho\sqrt{-2E}) = 0, \quad \text{para estados impares,} \quad (36)$$

y

$$W'_{1+k,1/2}(\rho\sqrt{-2E}) = 0, \quad \text{para estados pares.} \quad (37)$$

Estas expresiones nos permiten, además, calcular los eigenvalores de la energía para los niveles pares y impares del problema. De las bien conocidas propiedades de las funciones de Whittaker, es claro que los niveles de energía son discretos.

7. El comportamiento límite cuando $\rho \rightarrow 0$.

Con ayuda de los resultados que obtuvimos en la sección anterior, podemos estudiar el comportamiento de las eigenfunciones y de los eigenvalores de la energía en el límite $\rho \rightarrow 0$. Podemos suponer que el espectro $E(\rho)$ no será muy diferente, en este caso, del espectro de un átomo de hidrógeno. Si se introduce el defecto cuántico δ , podremos suponer que $k \approx 1 - n + \delta$, y usar esta expresión para analizar el comportamiento de las ecuaciones (36) y (37) en este límite (Van Haeringen 1978, Gesztesy 1980). En estas condiciones para los niveles pares se obtiene

$$E_n \approx (-Z^2/2n^2)(1 + 2/(n \ln(2Z\rho))) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (38)$$

mientras que para los impares el resultado es

$$E_n \approx -Z^2/(2n^2)(1 - 4Z\rho/n). \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (39)$$

Obviamente estos estados están casi degenerados, degeneración que se vuelve exacta en el límite $\rho = 0$, y el espectro se vuelve idéntico al del átomo de hidrógeno tridimensional (ver la sección 3.7).

El estado base es un caso especial en que $1/E \approx 0$ (Avron *et al.* 1979), y resulta ser un estado par cuya energía se obtiene, en el límite $\rho \ll 1$, de la expresión (Van Haeringen 1978, Gesztesy 1980)

$$E_0 \approx -2Z^2 \ln^2(4Z\rho), \quad (40)$$

por lo que $E \rightarrow -\infty$ cuando $\rho \rightarrow 0$.

7. El problema del estado base.

El resultado anterior, ecuación (40), se ha usado en muchas ocasiones (Loudon 1959, Van Haeringen 1978, Gomes y Zimmerman 1981, Davtyan *et al.* 1987) para

respaldar la existencia del estado base con energía infinita, pero, dada la naturaleza singular del hamiltoniano que se obtiene en el límite, no constituye razón suficiente para ello. Para asegurar la existencia del estado es necesario investigar también el comportamiento de la función de onda del estado fundamental Ψ_0 , en el mismo límite.

Para llevar a cabo el análisis mencionado, emplearemos estrictamente el método que fué usado originalmente para concluir la existencia del estado (Loudon 1959, Elliot y Loudon 1960). Como mostramos a continuación, si el límite se toma apropiadamente, no se encuentra estado alguno que corresponda a una energía de enlace infinita.

Para encontrar la función de onda del estado base en el límite de campo magnético infinito, usaremos directamente el hamiltoniano (8) con $\rho = 0$. Si en la ecuación de Schrödinger (23) hacemos que $E \rightarrow -\infty$, según el análisis hecho por Loudon (1959), se obtiene la ecuación

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} - \frac{1}{4}\Psi = 0, \quad (41)$$

cuya solución nos permite calcular la función de onda del estado fundamental. Esta, ya normalizada, se puede poner en la forma (Núñez Yépez y Salas Brito 1987, Martínez y Romero *et al.* 1989b)

$$\Psi_0(z; 0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \Psi_\alpha(z; 0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\alpha)^{-1/2} \exp(-|z|/\alpha), \quad (42)$$

donde hemos introducido el parámetro $\alpha = (2E)^{-1/2}$.

Para obtener el estado fundamental, siguiendo con el método de Loudon, se requiere investigar el límite $\alpha \rightarrow 0$ en la expresión (40). El único problema es que éste no existe en el sentido usual; para evitarlo, podemos considerar al estado fundamental como una funcional —lo que siempre puede hacerse para cualquier estado cuántico (Messiah 1976)— y, así, definir al estado base como el límite

$$\Psi_0[f] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_\alpha(z; 0) f(z) dz, \quad (43)$$

donde, como corresponde a posibles estados de un sistema cuántico, $f(z)$ es una función de cuadrado integrable. Es muy fácil demostrar que este límite es siempre cero:

$$\Psi_0[f] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^{-1} \exp(-|z|/\alpha) f(z) dz = 0. \quad (44)$$

Como el límite vale cero para cualquier función de cuadrado integrable, la única conclusión posible es que el estado base sea idénticamente cero, i.e. que no exista dicho estado. Hemos demostrado, pues, que hay un error de principio en la manera como fué introducido originalmente este estado. Entonces, podemos afirmar que no existe un estado fundamental con energía de enlace infinita en el problema de un átomo en un campo magnético infinitamente intenso (Boya *et al.* 1988, Núñez Yépez *et al.* 1987, 1989a). Aunque, claro está, esto no contradice el bien conocido resultado que afirma que la energía del estado base de un átomo en un campo magnético ultraintenso se incrementa logarítmicamente (Zeldovich *et al.* 1983) con la intensidad del campo magnético, al menos mientras éste tenga intensidad finita.

8. Conclusión.

Hemos analizado los eigenestados del hamiltoniano aproximado para un átomo en un campo magnético ultraintenso y hemos mostrado que en el límite de intensidad infinita:

A) Todos los estados están doblemente degenerados. Nuestro análisis pareciera demostrar que los estados se pueden clasificar en pares e impares, pero esto no es así; como demostraremos en el próximo capítulo la paridad no es un buen número cuántico para el problema (Núñez Yépez *et al.* 1987, Martínez y Romero *et al.* 1989b). La paridad se rompe espontáneamente en el límite de intensidad de campo infinita. Esto nos muestra que, efectivamente, el teorema de falta de degeneración se viola en el sistema. El que esta propiedad no sea evidente en el proceso límite que analizamos aquí, es un defecto del método, que se tiene su origen en que no coinciden las condiciones de frontera que hay que imponer a los eigenestados del hamiltoniano (8), con las que se requieren en el caso del hamiltoniano del átomo

en el campo magnético infinito (Gesztesy 1980, Núñez Yépez *et al.* 1989a). Esto será claro de la discusión en el siguiente capítulo.

B) No existe el estado localizado en el origen y con energía de enlace infinita. La creencia en este estado se ha debido a un error de cálculo cometido originalmente por Loudon (1959) y, posteriormente, a la falta de un análisis detallado del proceso límite por el que se obtiene el hamiltoniano del átomo de hidrógeno en una dimensión (Núñez Yépez y Salas Brito 1987, Martínez y Romero *et al.* 1989a). Es más, según discutiremos en el próximo capítulo, tal estado es innecesario para la completez del conjunto de eigenfunciones del sistema.

C) El espectro de energías es discreto. De hecho, el sugerir que el espectro es continuo, como lo hicieron Haines y Roberts (1969), equivale a decir que el operador hamiltoniano no es hermítico (Andrews 1976, Núñez Yépez *et al.* 1987, 1988).

CH) La inexistencia de un estado fundamental sin degeneración se puede usar como contra argumento para la afirmación de que el problema tiene un espectro claramente supersimétrico (Núñez Yépez *et al.* 1988). Según lo demostramos recientemente, la extensión supersimétrica de el hamiltoniano del átomo de hidrógeno unidimensional es similar, pero no coincidente, con el hamiltoniano del problema original (Martínez y Romero *et al.* 1989a, b).

A pesar de lo que los resultados anteriores puedan querer decir del sistema descrito por (8) considerado como aproximación para el problema de un átomo en un campo magnético ultraintenso (Salas Brito *et al.* 1989), debe ser claro que el problema de un átomo en un campo magnético infinitamente intenso presenta mucho interés por sí. A este sistema le dedicamos el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Atomo de hidrógeno unidimensional

1. Introducción.

En el capítulo anterior, obtuvimos al potencial de Coulomb en una dimensión, y al átomo de hidrógeno en una dimensión como un efecto de "compactación dimensional" (en el sentido que se le dá al término en teoría de campos, ver, por ejemplo, Tosa 1984) producido por un campo magnético ultraintenso sobre un sistema atómico tridimensional. El átomo de hidrógeno en una dimensión ha sido empleado como modelo resoluble del comportamiento de excitones en campos magnéticos (Elliot y Loudon 1960, Spector y Lee 1985), y para aproximar la interacción entre partículas cargadas con la superficie del helio líquido (Cole and Cohen 1969). Sin embargo, el átomo de hidrógeno unidimensional ha sido mucho más difícil de entender que su contraparte tridimensional debido a las curiosas propiedades de su solución cuántica. Por ello, además del interés intrínseco en el comportamiento de sistemas unidimensionales (Lieb y Mattis 1966, Pérez-Alvarez y Rodríguez-Copola 1988, Harris *et al.* 1989), el problema del átomo de hidrógeno unidimensional se ha convertido en un modelo teórico muy estudiado (Andrews 1966, 1976, Van Haeringen 1978, Haines y Roberts 1968, Hammer y Weber 1988, Tzara 1985, 1987, Imbo y Sukhatme 1985, Núñez Yépez *et al.* 1987, 1988, 1989a, Núñez Yépez y Salas Brito 1987, Davtyan *et al.* 1987, Boya *et al.* 1988, Lutsenko *et al.* 1989, Salas Brito *et al.* 1989).

En este capítulo daremos una solución completa al problema del átomo de hidrógeno en una dimensión empleando la representación de los momentos. Antes de preocuparnos por su formulación cuántica, analizaremos la formulación clásica del problema, la regularizaremos, y exhibiremos su simetría oculta. Resolveremos el problema en la formulación cuántica y haremos la conexión con otras soluciones (incorrectas en su mayoría, puesto que no toman en consideración la posibilidad de

la existencia de variables clásicas y de limitaciones a la superposición de estados) propuestas recientemente a este problema, y, finalmente, demostramos que las curiosas propiedades de su solución se pueden explicar introduciendo apropiadamente una regla de superselección en el sistema, la que puede considerarse producida por la naturaleza singular del potencial unidimensional de Coulomb. La prueba de la existencia de una regla de superselección dinámica en un sistema con un solo grado de libertad puede considerarse una de las principales contribuciones de este trabajo. Estudiaremos el operador que genera dicha regla, los sectores coherentes en que se divide el espacio de Hilbert, y los operadores inobservables del problema. Concluiremos comparando la regla de superselección que encontramos con la regla de superselección que se ha propuesto para explicar la existencia de las moléculas jirales.

2. El problema clásico del átomo de hidrógeno en una dimensión.

En esta sección haremos uso de la formulación hamiltoniana clásica, puesto que deseamos exhibir la propiedad clásica que permanece aún en la descripción cuántica. En vez de resolver directamente el problema clásico, exhibiremos su simetría oculta. Para ello, usando un método propuesto por Moser (1980) para regularizar el problema de Kepler, demostraremos que el hamiltoniano clásico del átomo de hidrógeno en una dimensión es equivalente, para energías $E < 0$, al hamiltoniano que describe el movimiento libre de una partícula confinada a una circunferencia y, para energías $E > 0$, al hamiltoniano asociado al movimiento de una partícula confinada a una hipérbola.

El átomo de hidrógeno en una dimensión se describe por el hamiltoniano clásico

$$H = p^2/2m - Z/|q|, \quad (1)$$

si sobre éste realizamos una rotación de $\pi/2$ en el espacio de fases: $p \rightarrow q$, $q \rightarrow -p$, obtenemos

$$H = q^2/2m - Z/|p|. \quad (2)$$

Hacemos notar que en el caso cuántico, este paso corresponde a pasar de la representación de coordenadas a la representación de los momentos. Puesto que la

energía es una constante del movimiento, podemos reescribir lo anterior en la forma

$$\frac{|p|}{Z}(q^2/2mE - 1) = 1/E. \quad (3)$$

Al elevar al cuadrado esta expresión, podremos definir un nuevo hamiltoniano como (Boya *et al.* 1988, Moser 1980)

$$H' = \frac{|E|p^2}{2Z^2}(q^2/2mE - 1)^2. \quad (4)$$

3. Equivalencia al movimiento en una circunferencia.

Si en la ecuación (4) consideramos el caso $E < 0$, bastará hacer la proyección estereográfica:

$$\theta = 2 \arctan(q/2a), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad (5)$$

para obtener el hamiltoniano transformado

$$H' = P_\theta^2/2\mu a^2, \quad (6)$$

donde hemos definido $a = (m|E|/2)^{1/2}$ y $\mu = Z^2/2|E|$. Este resultado demuestra la conexión que hay entre el átomo de hidrógeno en una dimensión y la partícula moviéndose libremente en una circunferencia.

4. Equivalencia al movimiento en una hipérbola.

Consideremos, ahora, el caso $E > 0$ en (4). Para transformar el hamiltoniano al caso de una partícula libre moviéndose en una hipérbola, hay que realizar la transformación

$$q = 2a \operatorname{arctanh}(v/2) \quad \text{si } q \in (-1, +1), \quad (7)$$

o la transformación

$$q = -2a \operatorname{arccoth}(v/2) \quad \text{si } 1 \leq |q| < \infty. \quad (8)$$

La transformación (7) lleva a la rama superior, mientras la (8) lleva a la rama inferior de la hipérbola. Sin embargo, bajo cualquiera de ambas, el hamiltoniano H' se transforma en

$$H' = P_v^2/2a^2 \quad (9)$$

donde $a^2 = mE/2$.

5. La simetría oculta del problema en la formulación clásica.

Si pensamos en las orbitas confinadas, existen dos formas en que se puede dar el movimiento sobre la circunferencia de manera dextrógira o de manera levógira; estos dos movimientos corresponden, en el problema del átomo de hidrógeno, a una partícula confinada a moverse en el lado derecho, o en el izquierdo de la singularidad. Esta propiedad de la solución clásica fué demostrada recientemente (Boya *et al.* 1988): una partícula nunca puede cruzar el origen y cambiar el lado de la singularidad en que se está moviendo. En el átomo de hidrógeno unidimensional clásico, el signo de la coordenada q , $\text{sgn}(q)$, es una constante del movimiento. Esta constante es el análogo unidimensional del vector de Runge-Lenz, *i.e.* es la cantidad conservada extra asociada a la simetría oculta del problema, y como demostraremos posteriormente, está directamente relacionada con la aparición de una regla de superselección en el sistema.

El grupo dinámico de invariancia de los estados ligados del átomo de hidrógeno unidimensional resulta obvio al haberlo escrito en la forma (6), su simetría oculta, que es la misma que para la partícula moviéndose en la circunferencia, es $O(2)$. Este grupo incluye tanto rotaciones $\theta \rightarrow \theta + \theta_0$, $P_\theta \rightarrow P_\theta$, como reflexiones $\theta \rightarrow -\theta$, $P_\theta \rightarrow -P_\theta$. El generador de las rotaciones es proporcional a $\text{sgn}(q)$, puesto que, como lo mencionamos, ello es todo lo que sobrevive del vector de Runge-Lenz (en una dimensión, el momento angular no puede definirse).

Si la energía del sistema es mayor que cero se ha demostrado la equivalencia del movimiento del sistema con el movimiento libre en una hipérbola, ello nos dice que, aunque existe un grupo dinámico de simetrías, éste ya no es $O(2)$.

6. El problema cuántico del átomo de hidrógeno unidimensional.

En esta sección y las siguientes, trabajaremos en unidades atómicas: $\hbar = m = e = 1$, y usaremos $Z = 1$. Con estas convenciones el problema cuántico del

átomo de hidrógeno en una dimensión se puede escribir como

$$H\psi(q) = (p^2/2 - 1/|q|)\psi(q) = E\psi(q). \quad (10)$$

Las propiedades del átomo de hidrógeno en una dimensión son bastante más transparentes en la representación de momentos que en la de coordenadas (Núñez Yépez *et al.* 1987, Davtayan *et al.* 1987), por lo que trabajaremos en aquella. Un análisis del problema en esta representación ha sido llevado a cabo por Davtayan *et al.* (1987), empero hemos demostrado (Núñez Yépez *et al.* 1988) que su solución no es del todo correcta.

Para transformar la ecuación (10) a la representación de los momentos, podríamos tomar directamente su transformada de Fourier, como lo hicieron Davtayan *et al.* (1987), sin embargo es más adecuado a nuestros propósitos emplear la expresión para el operador q^{-1} en la representación de momentos (Constantinescu y Magyari 1971)

$$q^{-1} = -i \int_{-\infty}^k \dots dk'. \quad (11)$$

Si escribimos (10) separadamente para $q > 0$ y $q < 0$, entonces, usando la expresión (11), podemos escribir la ecuación de Schrödinger para el problema en la forma (Núñez Yépez *et al.* 1987, Salas Brito *et al.* 1989)

$$\frac{k^2}{2} \phi_+(k) + i \int_{-\infty}^k \phi_+(k') dk' = E \phi_+(k), \quad (12)$$

y

$$\frac{k^2}{2} \phi_-(k) - i \int_{-\infty}^k \phi_-(k') dk' = E \phi_-(k). \quad (13)$$

Así, hemos reducido el problema a la resolución de dos ecuaciones integrales del tipo de Volterra, las que resolveremos en las siguientes secciones.

Notemos que, en esta representación, la invariancia del problema bajo inversiones por el origen, se manifiesta como invariancia bajo transformaciones del tipo:

$$\phi_{\pm}(k) \rightarrow \phi_{\mp}^*(k), \quad (14)$$

las que dejan invariante las ecuaciones para nuestro problema.

7. Los estados ligados del átomo de hidrógeno unidimensional.

Como nos interesan los estados en el espectro discreto del problema, introduciremos el parámetro

$$\alpha^2 = -1/2E; \quad (15)$$

con ello las ecuaciones (12) y (13) toman la forma (Núñez Yépez *et al.* 1987)

$$(1 + \alpha^2 k^2) \phi_{\pm}(k) \pm i2\alpha^2 \int_{-\infty}^k \phi_{\pm}(k') dk' = 0. \quad (16)$$

Notemos que la ecuación (16) implica que no existe estado cuántico que corresponda al caso $\alpha = 0$, i.e., como argüimos en el capítulo anterior, no existe ningún estado con energía infinita —contra lo que se creyó durante mucho tiempo.

Para resolver las ecuaciones del problema, derivamos respecto a k , para obtener

$$\frac{d\phi_{\pm}}{dk} + \frac{2\alpha^2(k \pm i)}{(\alpha^2 k^2 + 1)} \phi_{\pm} = 0. \quad (17)$$

Las soluciones a estas ecuaciones son

$$\phi_{+}^{\alpha}(k) = \frac{\alpha^2 A_{+}}{(1 + \alpha^2 k^2)} \left(\frac{1 - i\alpha k}{1 + i\alpha k} \right)^{\alpha}, \quad (18)$$

y

$$\phi_{-}^{\alpha}(k) = \frac{\alpha^2 A_{-}}{(1 + \alpha^2 k^2)} \left(\frac{1 + i\alpha k}{1 - i\alpha k} \right)^{\alpha}, \quad (19)$$

en donde las A_{\pm} son factores de normalización.

Las funciones $\phi_{\pm}^{\alpha}(k)$ no son, en general, univaluadas para valores arbitrarios de α , por lo tanto, no pueden representar estados ligados del sistema. Sin embargo, si exigimos que los α sean enteros positivos, las funciones son univaluadas (Churchill 1960, Higgins 1977). Así obtenemos que es necesario que $\alpha = n$, con $n = 1, 2, 3, \dots$. Por lo tanto los niveles de energía del problema son

$$E_n = -\frac{1}{2n^2}, \quad (20)$$

los que coinciden con los niveles de energía del problema tridimensional de Coulomb (Bransden y Joachaim 1983).

Las funciones propias correspondientes, ya normalizadas, son (Núñez Yépez *et al.* 1987)

$$\phi_+^n(k) = (2n/\pi)^{1/2} (1 + n^2 k^2)^{-1} \left(\frac{1 - ink}{1 + ink} \right)^n, \quad (21)$$

y

$$\phi_-^n(k) = (2n/\pi)^{1/2} (1 + n^2 k^2)^{-1} \left(\frac{1 + ink}{1 - ink} \right)^n. \quad (22)$$

8. La simetría oculta en el espectro discreto.

Podemos investigar la simetría oculta del problema en la formulación cuántica. Si, en las ecuaciones (12) y (13), efectuamos la transformación estereográfica (Fock 1935, Davtayan *et al.* 1987)

$$k = \alpha^{-1} \tan(\theta/2), \quad (23)$$

e introducimos la nueva función $\psi(\theta)$ definida por:

$$\phi(k) = \alpha^2 \cos^2(\theta/2) \psi(\theta), \quad (24)$$

las ecuaciones para los estados ligados del átomo de hidrógeno en una dimensión toman la forma

$$\psi_{\pm}(\theta) \pm i\alpha \int_{\pi}^{\theta} \psi_{\pm}(\theta') d\theta' = 0. \quad ? \quad (25)$$

Esta ecuación es invariante bajo las transformaciones de coordenadas $\theta \rightarrow \theta + \theta_0$, $\theta' \rightarrow \theta' + \theta_0$, lo que corrobora la existencia de una simetría dinámica $O(2)$.

Evidentemente, el espectro discreto del átomo de hidrógeno en una dimensión está doblemente degenerado; el sistema viola el teorema de la falta de degeneración en estados ligados de sistemas unidimensionales (Landau y Lifshits 1977). Este resultado está relacionado con la simetría dinámica $O(2)$ del sistema (Davytan *et al.* 1987, Boya *et al.* 1988, Lutsenko *et al.* 1989), y, como demostraremos en la sección 10, es consecuencia directa de la existencia de limitaciones a la superposición de estados (Núñez Yépez *et al.* 1988, 1989a). Esta propiedad no tiene nada que ver con propiedades supersimétricas (Gedenstein y Krive 1985, Martínez y Romero *et al.* 1989a), contra lo que han afirmado recientemente algunos autores (Imbo y Sukhatme 1985, Stedman 1985, Haymaker y Rau 1986).

9. Los estados en el continuo.

Para estudiar los estados en el continuo ($E > 0$) introduzcamos el parámetro $k_0^2 = 2E$, con ello las ecuaciones (12) y (13) toman la forma

$$\frac{k^2}{2} \phi_{\pm}(k) \pm i \int_{-\infty}^k \phi_{\pm}(k') dk' = 0; \quad (26)$$

si derivamos éstas con respecto a k , obtenemos

$$\frac{d\phi_{\pm}(k)}{dk} = - \frac{2(k \pm i)}{k^2 - k_0^2} \phi_{\pm}(k), \quad (27)$$

cuyas soluciones son

$$\phi_{\pm}^{(k_0)}(k) = \begin{cases} A_{\pm} \frac{k_0^2}{k^2 - k_0^2} \exp\left(\pm \frac{2i}{k_0} \tanh^{-1}(k/k_0)\right) & \text{if } |k| < k_0, \\ A'_{\pm} \frac{k_0^2}{k^2 - k_0^2} \exp\left(\pm \frac{2i}{k_0} \coth^{-1}(k_0/k)\right) & \text{if } |k| > k_0. \end{cases} \quad (28)$$

Estas son las eigenfunciones para estados con energía positiva, es de notarse que son singulares en $k = k_0$.

Las funciones que describen estados en el continuo no son normalizables pero, como es usual, las podemos "normalizar" en el sentido de que cumplan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\pm}^{*(k_0)}(k) \phi_{\pm}^{(k_0)}(k) dk = 2\pi \delta(k_0 - k'_0), \quad (29)$$

para ello, como se puede corroborar, basta asignar los valores

$$A_{\pm} = k_0^{1/2} (1 + \exp(2\pi/k_0))^{-1/2}, \quad (30)$$

y

$$A'_{\pm} = \exp(2\pi/k_0) A_{\pm}, \quad (31)$$

a las constantes que aparecen en la expresión (28).

La simetría oculta de los estados en el espectro continuo del átomo de hidrógeno en una dimensión se puede evidenciar haciendo la proyección estereográfica (Fock 1935, Davtyan *et al.* 1987)

$$k = \begin{cases} k_0 \tanh(\nu/2) & \text{if } -k_0 \leq k \leq k_0, \\ -k_0 \coth(\nu/2) & \text{if } -\infty < k < -k_0 \text{ o } k_0 < k < \infty, \end{cases} \quad (32)$$

sobre las ecuaciones (26), de donde resultan ecuaciones, similares en estructura a las ecuaciones (25), que son invariantes bajo traslaciones en la variable ν .

10. Los estados con energía cero.

Cuando la energía vale cero, las ecuaciones integrales toman la forma

$$\phi_{\pm}(k) \pm \frac{2i}{k^2} \int_{-\infty}^k \phi_{\pm}(k') dk' = 0, \quad (33)$$

cuyas soluciones se pueden obtener fácilmente:

$$\phi_{\pm}(k) = \frac{A_{\pm}}{k^2} \exp(\pm 2i/k). \quad (34)$$

11. Propiedades de la solución.

Las soluciones que obtuvimos en las secciones anteriores, se pueden comparar a las obtenidas por Davtyan *et al.* (1987), por Boya *et al.* 1988), y, aunque las siguientes están en la representación de coordenadas, también con las obtenidas por Moss (1987) y Hammer y Weber (1987). Las diferencias más importantes estriban en que casi todas (excepto la de Boya *et al.*) incluyen el estado base de energía infinita, y no reconocen la ruptura espontánea de la paridad que ocurre en el sistema (Cf. ecuación 11). En este sentido, tales soluciones son incorrectas.

De las expresiones para los estados estacionarios del átomo de hidrógeno en una dimensión resulta claro que éstos no son estados propios del operador de paridad. De hecho, si π es el operador de paridad, los estados estacionarios del problema cumplen

$$\pi \phi_{\pm}(k) = \phi_{\mp}(k), \quad (35)$$

sin importar si las funciones corresponden a estados discretos o en el continuo. Como el hamiltoniano es un operador par, podríamos preguntarnos si ~~no~~ es posible obtener funciones que, además de representar estados estacionarios del problema, tuviesen paridad definida. Según demostraremos en la sección 10, la respuesta a esta pregunta es negativa. Como ya lo mencionamos, en el átomo de hidrógeno unidimensional ocurre una ruptura espontánea de la paridad.

Es fácil darse cuenta de que las eigenfunciones $\phi_{\pm}(k)$ satisfacen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\pm}(k) dk = 0, \quad (36)$$

esta condición es muy importante pues si no se cumpliera el hamiltoniano del problema no sería hermítico y, por tanto, sería difícil darle interpretación cuántica. Muchos de los problemas que ha acarreado el resolver e interpretar la solución de este problema, se deben a no haberle dado la debida importancia a este punto; por ejemplo, fué la causa de que se hubiese afirmado (Haines y Roberts 1969) la existencia de un continuo de estados ligados, cuyas funciones de onda no se anulaban en $z = 0$ (entre otras cosas, ello causaba que las supuestas eigenfunciones ni siquiera fuesen ortogonales). La existencia de un estado base con energía de enlace infinita fué otra de las conclusiones a las que se llegó por no considerar la restricción impuesta por (32). El que esta condición quede automáticamente asegurada es una de las características que hacen que trabajar en la representación de los momentos sea lo más conveniente para el problema.

En la representación de coordenadas la condición (36) afirma que todas las eigenfunciones deben hacerse cero en el origen:

$$\psi_{\pm}(x) |_{x=0} = 0. \quad (37)$$

Esta condición implica que el espacio de Hilbert de los estados del átomo de hidrógeno en una dimensión y, por lo tanto, el dominio de todo operador del sistema (Taylor 1972), es el conjunto de funciones de cuadrado integrable que se anulan en $x = 0$: al que llamaremos $L_0^2(R)$.

La ecuación (37) se puede interpretar como una condición de frontera para el problema en la representación de coordenadas y tiene una implicación muy importante, nos dice que el potencial de Coulomb —un potencial atractivo— actúa como una barrera que impide que las partículas pasen de un lado de la singularidad al otro. Formalmente esto se demuestra calculando el flujo

$$j(x) = i(\Phi \partial \Phi^* / \partial x - \Phi^* \partial \Phi / \partial x), \quad (38)$$

y evaluándolo en $x = 0$. Es fácil ver que, si $\Phi(x)$ es cualquier estado del sistema, entonces

$$j(x)|_{x=0} = 0. \quad (39)$$

Nótese la correspondencia que hay entre esta propiedad y la propiedad clásica, demostrada por Boya *et al.*, que mencionamos en la sección 2. Ahora es obvio que, para entender claramente el problema cuántico, era menester regularizarlo y aprender a tratar la singularidad del potencial en $x = 0$.

12. Limitaciones a la superposición de estados.

El que un potencial atractivo, como es el caso del potencial unidimensional de Coulomb, pueda actuar como una barrera impenetrable es curioso de por sí; una de las consecuencias de ello es más peculiar aún, pues, según demostramos en esta sección, impone limitaciones a la superposición de estados.

La hermiticidad de los operadores asociados con cantidades físicas es una hipótesis básica de la mecánica cuántica. En nuestro problema esto requiere que el hamiltoniano H , y por lo tanto, el término de energía potencial $V(q)$, lo sean. Ello implica que el valor esperado $\langle V \rangle$ sea siempre finito (al menos en cualquier estado normalizable), i.e. que, en la representación de las coordenadas, se cumpla

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(q)\psi(q)V(q) dq < \infty. \quad (40)$$

Como el potencial unidimensional de Coulomb es singular en $q = 0$, ello impone la condición (que coincide con (36))

$$\lim_{q \rightarrow 0} \psi(q) = 0, \quad (41)$$

para que el hamiltoniano del átomo de hidrógeno unidimensional sea hermítico. Este resultado se puede considerar también consecuencia de que H no es un operador acotado y que, por lo tanto, solo cuando se cumple la condición (36) se le puede considerar hermítico (Akhiezer y Glazman 1961).

Las limitaciones a la superposición de estados son una consecuencia de esta restricción en el dominio de hermiticidad de H (Núñez Yépez *et al.* 1988, 1989a).

Para demostrarlo, consideremos las eigenfunciones del problema en el espacio de las configuraciones

$$\langle q | \pm s \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle k | \pm s \rangle \exp(-ikq) dk, \quad (42)$$

si intentamos ^asuperposiciones coherentes de éstas, por ejemplo estados con paridad bien definida

$$\Psi_e(q) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle q | + s \rangle + \langle q | - s \rangle) \quad (43)$$

y

$$\Psi_o(q) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle q | + s \rangle - \langle q | - s \rangle), \quad (44)$$

estos estados no serían independientes, pues su wronskiano siempre valdrá cero:

$$W(\Psi_e, \Psi_o) = \Psi_e d\Psi_o/dq - \Psi_o d\Psi_e/dq = 0. \quad (45)$$

Esto muestra que la fase relativa entre ambos conjuntos de estados es físicamente irrelevante. La dependencia entre estados pares y estados impares se manifiesta en la igualdad de las densidades de probabilidad correspondientes

$$|\Psi_e(q)|^2 = |\Psi_o(q)|^2. \quad (46)$$

Obviamente, estas consideraciones son generalizables a cualquier combinación de estados ψ_+^+ con estados ψ_-^- e implica que una tal superposición solo se puede interpretar como una mezcla estadística (Núñez Yépez *et al.* 1988, 1989a). Con este resultado a la mano, se puede entender que los problemas de interpretación que ocasionaron las soluciones a este problema se debieron, al menos en parte, a no tomar en cuenta esta limitación al principio de superposición. Entonces, ninguno de los estados del átomo de hidrógeno en una dimensión es eigenestado del operador de paridad; todos son estados jirales y, por lo tanto, ocurre una ruptura espontánea de la paridad. Notemos que esta última conclusión implica (Núñez Yépez *et al.* 1987, 1988) que el espacio de las eigenfunciones del problema se puede considerar como la unión de los conjuntos \mathcal{F}^+ (de funciones que se anulan en y a la derecha de $x = 0$) y \mathcal{F}^- (de funciones que se anulan en y a la izquierda de $x = 0$). Las eigenfunciones del problema forman una base completa (Higgins 1977) para estos conjuntos de funciones. Este resultado está de acuerdo con la inexistencia del estado fundamental con ^eenergía infinita.

Según lo mencionamos en el Capítulo 1, basta la existencia de una limitación a la superposición de estados para hablar de una regla de superselección; en este sentido hemos establecido aquí la existencia de una en el átomo de hidrógeno unidimensional (Núñez Yépez *et al.* 1988, 1989a). En la siguiente sección mostraremos como se puede interpretar ésta, aún el sentido restringido de su significado.

24

13. Regla de superselección.

Según estableceremos en esta sección, las propiedades del átomo de hidrógeno en una dimensión se pueden explicar como consecuencia de una regla de superselección.

Dadas las limitaciones a la superposición de estados que ocurren en el sistema, conviene considerar las regiones a la derecha e izquierda de la singularidad como subsistemas separados; por ello, conviene redefinir los operadores básicos en la forma (Lubkin 1970, Wick *et al.* 1970):

$$O = O^+ + O^-, \quad (47)$$

donde

$$O^+ = o \times I^+ \quad \text{y} \quad O^- = o \times I^-. \quad (48)$$

En estas expresiones, o es la variable dinámica original, I^\pm es el operador identidad cuando opera sobre \mathcal{F}^\pm , y el operador cero en otro caso. Obviamente, esta redefinición solo es aplicable si el operador puede restringirse a actuar únicamente sobre \mathcal{F}^+ , o únicamente sobre \mathcal{F}^- .

Una vez redefinidos los operadores, las eigenfunciones se podrán considerar como vectores en un espacio bidimensional:

$$|+s\rangle = \begin{pmatrix} \psi_s^+ \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |-s\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_s^- \end{pmatrix}, \quad (49)$$

en que los únicos estados físicos corresponden a los subespacios "a lo largo de los ejes".

Para ilustrar la forma en que ahora quedan los operadores, representados en este espacio bidimensional, expresemos ahí al operador posición y al operador

momento:

$$Q = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}. \quad (50)$$

El hamiltoniano también se puede redefinir usando la misma receta,

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} p^2/2 - 1/q & 0 \\ 0 & p^2/2 + 1/q \end{pmatrix}; \quad (51)$$

obviamente, este hamiltoniano tiene el mismo espectro que (10), y sus eigenfunciones son de la forma (49).

Un operador que debe redefinirse de otra forma es el operador paridad π . Sin embargo, es fácil ver que su expresión en este espacio es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Mostraremos ahora que el sistema descrito por (51) admite una regla de superselección. Para ello consideremos al operador

$$G = \sum_s (|+s\rangle\langle +s| - |-s\rangle\langle -s|), \quad (53)$$

cuyo dominio es el espacio bidimensional ya mencionado, con componentes en $L_0^2(R)$; hemos representado al operador en la base de las eigenfunciones del problema, expresadas en la forma (49). Mediante un cálculo directo, es fácil ver que el operador G conmuta con todas las variables dinámicas del sistema:

$$[G, Q] = 0, \quad (54)$$

$$[G, P] = 0, \quad (55)$$

y

$$[G, \mathcal{H}] = 0. \quad (56)$$

Por lo tanto, G es una constante del movimiento y genera una regla de superselección. Todo operador que no conmute con G representa una variable inobservable. Como el operador de paridad no conmuta con G ,

$$[P, G] \neq 0, \quad (57)$$

no es posible observar la paridad de un estado, i.e. la paridad se rompe espontáneamente.

Es menester ahora encontrarle un significado al operador que genera a la regla de superselección, puesto que es la variable clásica de nuestro sistema. Ello es lo que haremos a continuación.

Si se aplica G a cualquier estado del sistema, se obtiene

$$G|\pm s\rangle = \pm|\pm s\rangle; \quad (58)$$

dada la forma en que obtuvimos las ecuaciones para los estados estacionarios del problema en la representación de los momentos, esta relación nos indica si el estado corresponde a una partícula confinada al lado derecho (estados $|+s\rangle$) o al lado izquierdo (estados $|-s\rangle$) de la singularidad. La variable clásica asociada al átomo de hidrógeno en una dimensión es el lado de la singularidad en que el electrón se mueve, i.e. es el "vector de Runge-Lenz" en una dimensión. Así, una propiedad puramente clásica del átomo de hidrógeno unidimensional permanece en la formulación cuántica del mismo (Núñez Yépez *et al.* 1989a). Los sectores coherentes en que se divide el espacio de los estados del sistema, corresponden al subespacio de los estados confinados al lado derecho y al subespacio de los estados confinados del lado izquierdo. Cada uno de estos subespacios es completo (Núñez Yépez *et al.* 1987). Las eigenfunciones (49) forman una base completa para los estados del átomo de hidrógeno unidimensional en cada uno de ellos (Higgins 1977).

14. Conclusión: moléculas jirales y el átomo de hidrógeno unidimensional.

De acuerdo con lo anterior, el origen de la regla de superselección es el polo en el potencial en $q = 0$; él que también es responsable de la ruptura espontánea de la paridad que ocurre en el sistema. Los puntos de contacto con la teoría de Pfeifer son ahora evidentes:

A) El hamiltoniano del átomo de hidrógeno en una dimensión tiene una singularidad infinita, lo mismo que el que propone Pfeifer. La singularidad, induce una regla de superselección en ambos problemas, la que resulta obvia de escribir el ha-

miltoniano como en la ecuación (50). La única diferencia de fondo, es que, en el caso de Pfeifer, la singularidad aparece al acoplar el sistema al campo electromagnético, mientras que, en nuestro caso, surge de la propia dinámica del problema.

B) El hamiltoniano del átomo de hidrógeno unidimensional es invariante bajo reflexiones por el origen, pero sus soluciones no lo son. Ocurre una ruptura espontánea de la paridad. Este es el mismo fenómeno que ocurre con las moléculas jirales y fue la causa de que, por mucho tiempo, el origen de la estructura de éstas fuese un misterio para la física molecular. En el caso del átomo de hidrógeno unidimensional, la insistencia en exigir soluciones con paridad definida, fue el origen de la controversia de 30 años sobre las propiedades de su solución.

Como en el caso de los sistemas moleculares estudiados por Pfeifer, todos los estados del átomo de hidrógeno en una dimensión son estados jirales. El operador que genera la regla de superselección G es el operador de jiralidad, y la jiralidad es una propiedad clásica del átomo de hidrógeno en una dimensión (Núñez Yépez *et al.* 1989a).

Conclusiones

En este trabajo hemos investigado un modelo para sistemas hidrogenoides en campos magnéticos ultraintensos conocido como átomo de hidrógeno unidimensional. Hemos discutido su origen e importancia en el contexto de sistemas atómicos. Parte de su importancia es que permite entender el porqué de la estructura casi coulombiana, al menos en primera aproximación, del espectro del hidrógeno que se observa en pulsares (sistemas en donde existen campos magnéticos con intensidad muy grande $\sim 10^{13}$ G).

Hemos analizado el modelo, tanto clásica como cuánticamente y hemos dado una solución a las dificultades que han impedido entenderlo por cerca de treinta años. Lo fundamental de esta explicación estriba en reconocer que la singularidad en el hamiltoniano del átomo de hidrógeno en una dimensión, introduce restricciones al principio de superposición de estados, y limita las eigenfunciones a aquellas que describen estados confinados a uno u otro lado de ella. Por ello, dado que la paridad se rompe espontáneamente en el sistema, todos los intentos de obtener soluciones pares o impares fueron erróneos desde el principio.

El resultado anterior nos llevo a considerar la existencia de una regla de superselección en el problema. Una simple generalización del hamiltoniano del átomo de hidrógeno unidimensional, nos bastó para demostrar su existencia y encontrar el operador que la genera. Curiosamente, este resulta ser el operador asociado a la constante del movimiento clásica correspondiente a la simetría oculta del problema. Este resultado es muy interesante, pues ofrece un ejemplo de un sistema finito en donde aparece una regla de superselección dinámica.

La similitud entre nuestro resultado y la manera en que se ha explicado la existencia de moléculas jirales, *i.e.* el hecho de que ambas requieran de una regla de

superselección producida por una singularidad, nos ha llevado a especular sobre la posibilidad de que muchas reglas de superselección dinámicas en mecánica cuántica, estén asociadas a singularidades. Aunque ello no se encuentra incluido en nuestro trabajo, hemos investigado esta supuesta conexión en problemas unidimensionales; todo parece indicar que, dado un potencial suficientemente singular, siempre existe una regla de superselección asociada (Martínez y Romero *et al.* 1989b).

Referencias.

- Aharonov Y, y Susskind L 1967 *Phys. Rev.* **155** 1428
- Akhiezer N I y Glazman M I 1961 *Theory of Linear Operators in Hilbert Space* vol 1 (New York: Ungar)
- Alicki R 1984 *Phys. Lett.* **103 A** 247
- Andrews M 1966 *Am. J. Phys.* **34** 1194
- Andrews M 1976 *Am. J. Phys.* **44** 1064
- Avron J E, Herbst I W, y Simon B 1979 *Phys. Rev. A* **20** 2287
- Bivona S, Schweizer W, O'Mahony P F, y Taylor K T 1988 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **21** 1617
- Bohm A 1979 *Quantum mechanics* (Berlin: Springer Verlag) capítulo 4
- Boya L J, Kmiecik M, y Bohm A 1988 *Phys. Rev. A* **37** 3567
- Bransden B H, y Joachaim C J 1983 *Physics of atoms and molecules* (Londres: Longman) capítulo 8
- Cole M W, y Cohen M H 1969 *Phys. Rev. Lett.* **23** 1238
- Constantinescu F, y Magyari E 1978 *Problems in quantum mechanics* (Oxford: Pergamon Press) capítulo 5
- Chhajlany S C, Mal'nev V N, y Kumar N 1988 *prepublicación IC/88/120 ICTP-Trieste*
- Churchill R V, 1960 *Complex variables and applications* (New York: Mc. Graw-Hill)
- Davies E B 1979 *Comm. Math. Phys.* **64** 191
- Davtyan L S, Pogossian G S, Sissakian A N, y Ter-Antonyan V M 1987 *J. Phys. A: Math. Gen.* **20** 2765

- Dirac P A M 1958 *The principles of quantum mechanics* (Oxford: Oxford University Press) capítulo 1
- Elliot R J, y Loudon R 1960 *J. Phys. Chem. Solids* **15** 196
- Emmerson J McL 1972 *Symmetry principles in particle physics* (Oxford: Oxford University Press) capítulo 3
- Feynman R P, Leighton R B, y Sands M 1965 *The Feynman Lectures on Physics Vol 9* (Reading: Addison Wesley)
- Fock V A 1935 *Z. Phys.* **98** 145
- Foldy L L 1954 *Phys. Rev.* **93** 1395
- Forster H, et al. 1984 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **17** 1301
- Freeman R R 1981 en *Atomic physics 7* eds Kleppner D, y Pipkin F M (New York: Plenum Press) 209
- Friedrich H and Wintgen D 1989 *Phys. Rep.* **183** 37
- Galindo A, Morales A, y Núñez-Lagos R 1982 *J. Math. Phys.* **3** 324
- Garstang R 1977 *Rep. Prog. Phys.* **40** 105
- Gay J C 1986 en *Atoms in unusual situations* ed Briand J P (New York: Plenum Press) 107
- Gesztesy F 1980 *J. Phys. A: Math. Gen.* **13** 867
- Gedenstein L E, y Krive I V 1985 *Sov. Phys. Usp.* **28** 645
- Goldrich P, y Julian W H 1969 *Ap. J.* **157** 869
- Gomes J F, y Zimmerman A H 1980 *Am. J. Phys.* **48** 579
- Guder S 1967 *J. Math. Phys.* **8** 2109
- Haines L K y Roberts D H 1969 *Am. J. Phys.* **37** 1145

- Hammer C L y Weber T A 1988 *Am. J. Phys.* 56 281
- Harris J J, Pals J A, and Woltjer R 1989 *Rep. Prog. Phys.* 52 1217
- Haymaker R W y Rau A R P 1986 *Am. J. Phys.* 54 928
- Hegerfeld G C, Kraus K, y Wigner E P 1968 *J. Math. Phys.* 9 2029
- Higgins J R 1977 *Completeness and basis properties of sets of special functions* (Cambridge: Cambridge University Press) capítulo 2
- Hughes R I G 1989 *The structure and interpretation of quantum mechanics*, (Cambridge EUA: Harvard University Press)
- Hund F 1927 *Z. Phys.* 43 805
- Imbo T D, y Sukhatme U P 1985 *Phys. Rev. Lett.* 54 2184
- Jauch J M, y Misra B 1961 *Helv. Phys. Acta* 31 699
- Jauslin H R 1988 *Helv. Phys. Acta* 61 901
- Kadomsev B B, y Kudryavtsev V S 1971 *Sov. Phys. Lett.* 13 9
- Kaempffer F A 1965 *Concepts in quantum mechanics* (New York: Academic Press) apéndice 7
- Kharatyan S G 1968 *Sov. Phys. Dokl.* 13 406
- Landau L, y Lifshitz E M 1977 *Quantum Mechanics* 3a. edición (Oxford: Pergamon Press) 460
- Levy-Leblond J M 1963 *J. Math. Phys.* 4 776
- Lieb E H, y Mattis D 1966 *Mathematical physics in one dimension* (New York: Academic Press)
- Lombardi M, Labastie P, Bordas M C, y Broyer M 1988 *J. Chem. Phys.* 89 3479
- Loudon R 1959 *Am. J. Phys.* 27 649

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

- Lubkin E 1970 *Ann. Phys.* **56** 69
- Lutsenko V, Mardoyan L G, Pogosyan G S, Sissakian A N, and Ter-Antonyan V M 1989 *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** 2739
- Martínez y Romero R, Núñez Yépez H N, Salas Brito A L, y Vargas C A 1989a *Rev. Mex. Fis.* **35** 617
- Martínez y Romero R, Núñez Yépez H N, y Salas Brito A L, 1989b por publicarse en *Phys. Lett. A*
- Messiah A 1976 *Quantum mechanics* (New York: John Wiley)
- Mirman R 1969 *Phys. Rev.* **186** 1380
- Moser J 1980 *Commun. Pure Appl. Math.* **23** 609
- Moshinsky M, Méndez N, Murow E, y Hughes J W 1984 *Ann. Phys. NY* **155** 231
- Moss R E 1987 *Am. J. Phys.* **55** 397
- Müller-Herold U 1980 *Lett. Math. Phys.* **4** 45
- Müller-Herold U 1985 *J. Chem. Educ.* **62** 379
- Nieto M M 1979 *Am. J. Phys.* **47** 1067
- Núñez Yépez H N, y Salas Brito A L 1987 *Eur. J. Phys.* **8** 307
- Núñez Yépez H N, Vargas C A, y Salas Brito A L 1987 *Eur. J. Phys.* **8** 189
- Núñez Yépez H N, Vargas C A, y Salas Brito A L 1988 *J. Phys. A: Math. Gen.* **21** L651
- Núñez Yépez H N, Vargas C A, y Salas Brito A L 1989a *Phys. Rev. A* **39** 4306
- Núñez Yépez H N, Salas Brito A L, Vargas C A, y Vicente Luis 1989b *prepublicación*
Facultad de Ciencias UNAM
- Pérez-Alvarez R, y Rodríguez-Copola H 1987 *prepublicación* IC/87/381 ICTP-

Trieste

Piron C 1969 *Helv. Phys. Acta* **42** 330

Pfeifer P 1980 *Chiral molecules: A superselection rule induced by the radiation field*
ETH Dissertation

Pfeifer P 1981 en *Quantum mechanics in mathematics, chemistry, and physics* ed
K E Gustafson y P Reinhardt (New York: Plenum) 255

Pfeifer P 1983 en *Energy storage and redistribution in molecules* ed J Hinze (New
York: Plenum) 315

Primas H 1981 en *Lecture Notes in Chemistry* **24** (Berlin: Springer Verlag)

Putterman S 1983 *Phys. Lett.* **98A** 324

Rau A R P, y Spruch L 1976 *Ap. J.* **207** 671

Rolnick W B 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19** 717

Rosen G 1986 *Phys. Rev. A* **34** 1556

Roman P 1964 *Advanced quantum mechanics* (Reading EUA: Addison Wesley)

Ruderman M 1971 *Phys. Rev. Lett.* **27** 1306

Ruderman M, y Sutherland P G 1975 *Ap. J.* bf **196** 51

Salas Brito A L, Martínez y Romero R P, Núñez Yépez H N, y Vargas C A, 1989
por publicarse en las *Memorias del Ser. Encuentro Latinoamericano de Colisiones
Atómicas y Moleculares*, ed Garibotti C

Shapiro S L, y Teukolsky S A 1983 *Black holes, white dwarfs, and neutron stars*
(New York: Wiley-Interscience) sección 10.5

Schiff L I, y Snyder H 1939 *Phys. Rev.* **55** 59

Skjervold J E, y Ostgaard E 1984 *Physica Scripta* **39** 448

- Spector H N, y Lee J 1985 *Am. J. Phys.* **53** 248
- Stedman G E 1985 *Eur. J. Phys.* **6** 225
- Streater R F, y Wightman A S 1964 *PCT, spin, statistics and all that* (New York: Benjamin)
- Sudbery A 1986 *Quantum mechanics and the particles of nature* (Cambridge: Cambridge University Press) capítulo 5
- Surmelian G L, y O'Connell R F 1974 *Ap. J.* **190** 741
- Strocchi F, y Wightman A S 1974 *J. Math. Phys.* **15** 2198
- Taylor J R 1972 *Scattering theory* (New York: John Wiley) capítulo 1.
- Tosa Y 1984 *Phys. Rev. D* **30** 339
- Tzara C 1985 *Phys. Lett.* **111A** 343
- Tzara C 1987 *prepublicación C.E.N. Saclay*
- Urrutia L F, y Hernández E 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 755
- Van Haeringen 1978 *J. Math. Phys.* **19** 2165
- Weissbluth M 1978 *Atoms and molecules* (New York: Academic press)
- Wick G C, Wightman A S, y Wigner E P 1952 *Phys. Rev.* **88** 189
- Wick G C, Wightman A S, y Wigner E P 1970 *Phys. Rev. D* **1** 3267
- Wooley R G 1978 *Adv. Phys.* **25** 27
- Zeldovich Ya B, Ruzmaikin A A, y Sokoloff D D 1983 *Magnetic Fields in Astrophysics* (New York: Gordon and Breach) cap. 17
- Zurek W H 1982 *Phys. Rev. D* **26** 1862

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a la Dra. Carmen Cisneros por aceptar supervisar este trabajo y, sobre todo, por su amistad y su paciencia. Mi agradecimiento al Laboratorio de Cuernavaca del Instituto de Física de la UNAM y, muy en especial, al Dr. Ignacio Alvarez por todo el apoyo que me ha brindado.

Por todo lo que he aprendido de ellos, tengo una enorme deuda de gratitud con mis profesores y amigos: Sergio Aburto, Darío Moreno y Rafael Montemayor.

A mis compañeros y amigos Javier Vitela, Carlos A. Vargas, H. Noemí Núñez Yépez, Luis Vicente, Berta Oda, Rodolfo Martínez y Romero, Francisco Cervantes, Arturo Sánchez, y Leticia Fuchs, debo agradecer la colaboración que me siempre me brindaron; sin su apoyo y amistad este trabajo nunca hubiera sido escrito. Agradezco también la gran ayuda que me proporcionaron F.C. Bonito, N. Humita, N. Marconi, F.D. Micha, G. Pinto, y K. Suri.

Un agradecimiento muy especial a: Minina (1 y 2), Pumita, Terek, Pardo, Lika (1 y 2), Arlequín, Tigre, Lince (1 y 2), Gris (1 y 2), Puma, Motita, Silvestre, Suridos, Tao, Blanco, León, y Suertudo.