

DESCARTE

~~2071~~
2070

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

ESCUELA DE INGENIERIA EN COMUNICACIONES ELECTRONICAS

875

DESACOPPLAMIENTO DE UN SISTEMA DE CONTROL: MESA VIBRADORA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO MECANICO ELECTRISISTA
PRESENTA:

GUILLERMO REBOLLEDO CORTIZO

MEXICO, D.F., FEBRERO 1974



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Quiero agradecer a mi director de tesis, Dr. Roberto Canales Ruíz, la invaluable ayuda que me brindó, no sólo en la elaboración de este trabajo, sino a lo largo de la segunda mitad de mi carrera, contribuyendo de manera decisiva en mi formación profesional.

Guillermo Rebolledo Cortizo

México D. F., febrero de 1974

C O N T E N I D O

	Página
RESUMEN INTRODUCTORIO	
I. Antecedentes	1
II. Descripción del funcionamiento del sistema y características generales del mismo	5
III. Descripción del subsistema actuador hidráulico-masa y planteamiento de su modelo matemático	10
IV. Descripción física del acoplamiento	24
V. Modelo matemático del sistema acoplado	26
VI. Comprobación matemática del acoplamiento	35
VII. Simulación del sistema acoplado	36
VIII. Análisis de la desacoplabilidad del sistema	41
IX. Desacoplamiento del sistema	44
IX.1. Desacoplamiento inestable	44
IX.2. Desacoplamiento estable	48
X. Interpretación del proceso de desacoplamiento	53
XI. Comparación del patrón de polos y ceros del sistema de malla abierta con el correspondiente de malla cerrada	55
XII. ¿Por qué realimentación de estados?	57
CONCLUSIONES	59
RECOMENDACIONES	60

RESUMEN INTRODUCTORIO

En este trabajo es analizado y resuelto un problema de Ingeniería de Control presente en un sistema lineal e invariable con el tiempo.

El problema es el de acoplamiento entre las diversas entradas del sistema y el sistema es una *Mesa Vibradora* utilizada para pruebas sísmicas.

Se define en primer lugar el acoplamiento en un sistema, haciéndose mención a los resultados teóricos obtenidos por Falb y Wolovich relativos al desacoplamiento de sistemas lineales e invariables con el tiempo (Sección I). A continuación se presenta una descripción del sistema y de los diversos dispositivos y subsistemas de que consta, analizando a cada uno de ellos con una profundidad proporcional a su importancia en la dinámica del sistema global (II y III). Después de describir físicamente en qué consiste el acoplamiento en el sistema, se determina un modelo matemático del mismo y, utilizando un simulador digital desarrollado en el Instituto de Ingeniería, se simula aquél, con el objeto de observar su comportamiento (IV a VII). Hecho esto se procede a analizar la desacoplabilidad del sistema y a desacoplarlo (VIII y IX); con el objeto de ilustrar las diversas opciones que ofrece el método utilizado para desacoplar el sistema, el desacoplamiento es realizado atendiendo a dos de tales opciones, indicándose las ventajas de una sobre la otra y llevándose a

cabo las simulaciones del sistema desacoplado en ambos casos. En seguida es presentada en forma diagramática la forma en que físicamente el desacoplamiento es realizado (X), haciéndose una comparación, a continuación, del patrón de polos y ceros del sistema antes y después de desacoplar (XI). Por último, explicando otro posible método de desacoplamiento, se justifica el utilizado en este trabajo (XII), mencionando sus ventajas. Son presentadas también algunas conclusiones y recomendaciones de importancia.

Ciudad Universitaria, México, D.F.

febrero, 1974

I. Antecedentes

El objetivo de este trabajo es el desacoplamiento de un sistema. La teoría que se utiliza para tal propósito es la desarrollada por Falb y Wolovich en 1967¹ de la cual se dá una síntesis.

Definición: un sistema lineal e invariable con el tiempo representado por*:

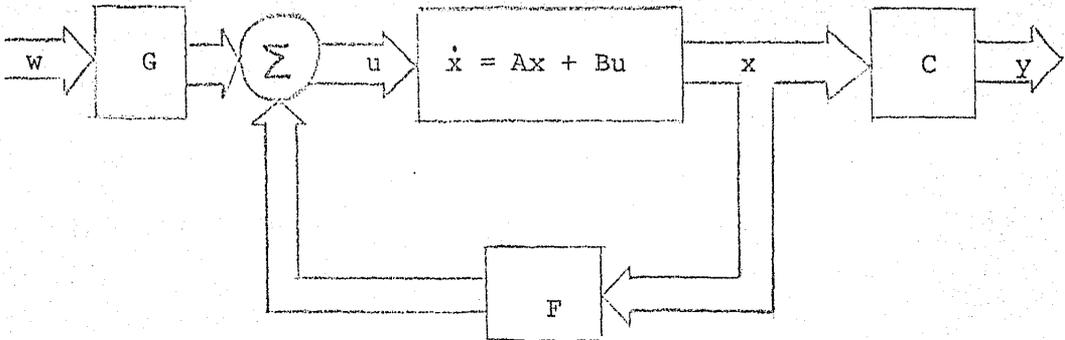
$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{B}u(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\underline{x}(t)$$

en donde \underline{x} es el vector estado de dimensión n , \underline{u} el vector entrada de dimensión m , \underline{y} el vector salida de dimensión m ($m \leq n$) y \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} , son matrices constantes de dimensiones apropiadas, está desacoplado si su matriz de transferencia $\underline{C}(\underline{I}s - \underline{A})^{-1}\underline{B}$ es diagonal y no singular.

Falb y Wolovich demostraron que es posible desacoplar un sistema como el anterior mediante realimentación de estados y transformación no singular de la entrada (ver diagrama siguiente):

* Todas las matrices y vectores serán representados mediante literales subrayadas.



REALIMENTACION DE ESTADOS Y TRANSFORMACION
NO SINGULAR DE LA ENTRADA EN UN SISTEMA LI
NEAL E INVARIABLE CON EL TIEMPO.

Si la matriz

$$\underline{B}^* = \begin{bmatrix} \underline{C}_1 \underline{A}^{d_1} \underline{B} \\ \underline{C}_2 \underline{A}^{d_2} \underline{B} \\ \vdots \\ \underline{C}_m \underline{A}^{d_m} \underline{B} \end{bmatrix}$$

es no-singular, en donde \underline{C}_i es el i -ésimo renglón de la matriz

\underline{C} y

$$d_i = \min \left\{ j : \underline{C}_i \underline{A}^j \underline{B} \neq 0, j = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

$$d_k = n-1 \quad \text{si} \quad \underline{C}_k \underline{A}^j \underline{B} = 0 \quad \text{para toda } j$$

Demostraron además que si la matriz de realimentación es

$$\underline{F} = -\underline{B}^{*-1} \underline{A}^*, \quad \text{en donde}$$

$$\underline{A}^* = \begin{bmatrix} \underline{C}_1 \underline{A}^{d_1+1} \\ \underline{C}_2 \underline{A}^{d_2+1} \\ \vdots \\ \underline{C}_m \underline{A}^{d_m+1} \end{bmatrix}$$

y la matriz de transformación de la entrada es $\underline{G} = \underline{B}^{*-1}$, el sistema resultante

$$\dot{\underline{x}}(t) = (\underline{A} + \underline{B}\underline{F}) \underline{x}(t) + \underline{B}\underline{G} \underline{w}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\underline{x}(t)$$

en donde $\underline{w}(t)$ es el nuevo vector entrada, está desacoplado.

Con el objeto de poder variar la localización de los polos del sistema desacoplado, fué propuesta por ellos una familia de matrices \underline{F} de realimentación de la siguiente forma:

$$\underline{F} = \underline{B}^{*-1} \left(\sum_{k=0}^s \underline{M}_k \underline{C} \underline{A}^k - \underline{A}^* \right)$$

$$\underline{M}_k = \text{diag} (m_{k1}, m_{k2}, \dots, m_{km}), \text{ y}$$

$$\delta = \max d_i$$

La manera de ver cómo se pueden variar los polos del sistema des acoplado es observando que la (d_i+1) -ésima derivada del i-ési¹mo elemento del vector de salidas y se puede escribir como :

$$y_i^{(d_i+1)} = m_{0i} y_i + m_{1i} \dot{y}_i + \dots + m_{d_i i} y_i^{(d_i)} + w_i$$

en donde w_i es el i-ésimo elemento del vector w.

De lo anterior resulta evidente que dando valores a $m_{0i}, m_{1i}, \dots, m_{d_i i}$ se tendrán ciertos grados de libertad en la ubicación de los polos del sistema de malla cerrada. El número de grados de libertad, o número de polos que pueden ser variados es $m + \sum_{i=1}^m d_i$

Es precisamente la anterior familia de matrices F la que se utilizará para el desacoplamiento del sistema, siguiendo el criterio de que el sistema resultante sea estable.

II. Descripción del funcionamiento del sistema y características generales del mismo.

Una *Mesa vibradora* es un sistema de control cuyo propósito es someter a pruebas vibratorias a cargas inerciales. Encuentra su mayor aplicación en la simulación de sismos, en cuyo caso la carga podría ser el modelo de alguna estructura o el de alguna cortina de presa. Generalmente es capaz de generar movimiento senoidal, ondas cuadradas, diente de sierra y aleatorio, en la dirección horizontal (eje X), expandible a movimiento horizontal biaxial (ejes X-Y) y vertical (eje Z) simultáneamente. El rango de frecuencia de operación es por lo común entre 0.1 y 100 Hz.

El sistema que se considera en este trabajo está implementado a base de dispositivos eléctricos y servohidráulicos y consta junto con el equipo periférico de:

{	Equipo electrónico de control (compensadores eléctricos)	}	subsistemas actuador hidráulico-masa
	Actuadores hidráulicos		
	Mesa vibradora		
	Fuente hidráulica de potencia		
	Apoyo o base de reacción		

La figura 1 muestra el dibujo de uno de estos sistemas.

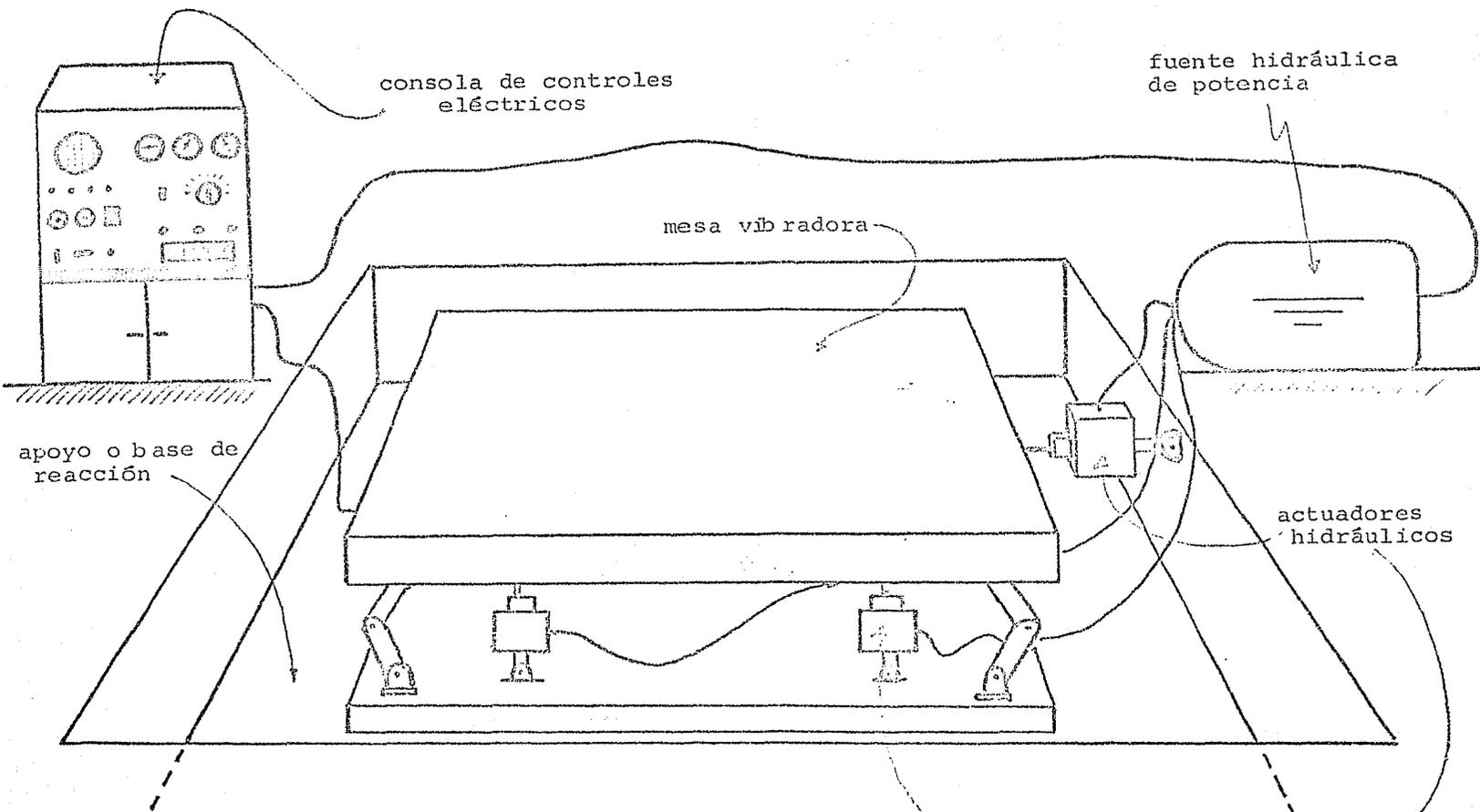


FIGURA 1

Las entradas al sistema son señales eléctricas almacenadas en cintas magnéticas u obtenidas de generadores de funciones o, en el caso mas elaborado y complejo, de alguna computadora. Estas señales eléctricas son transformadas (interviniendo la mayor parte del equipo electrónico en esta labor) en señales de desplazamiento de tal forma que estas últimas tengan efecto a la entrada de los actuadores hidráulicos, que a su vez harán desplazarse a la mesa en la(s) dirección(es) de interés. Este o estos desplazamientos, medidos con respecto a algún punto de la mesa, originalmente en reposo, son las salidas del sistema.

La *fuerza hidráulica de potencia* es un dispositivo que mantiene a muy alta presión, en ciertos recipientes, el fluido utilizado por los actuadores hidráulicos. Este fluido es comunmente algún tipo de aceite sometido a filtrados severos para obtener un desempeño óptimo de dichos actuadores.

El *apoyo o base de reacción* es opcional y su utilización dependerá de las características del subsuelo en el que se ubique la mesa, rango de los pesos de las cargas que se vayan a manejar, características de las instalaciones o equipo ajeno a la mesa, pero cercano a ella, en el lugar en que se ubique (en este caso podría suceder que las vibraciones causadas por las pruebas con la mesa vibradora dañaran algunos otros sistemas cercanos, haciendo esto impositiva la instalación de una base de reacción), etc.

Es importante anticipar al lector que de las cinco clases de constituyentes del sistema, mencionadas con anterioridad, dos son las que fundamentalmente determinarán la dinámica del mismo: Los *actuadores hidráulicos* y la *mesa* con su carga. Esto es debido a que el comportamiento del subsistema eléctrico (equipo electrónico) es aproximadamente algebraico para el rango de frecuencias de operación. Por lo tanto serán los subsistemas actuador hidráulico-masa (siendo esta masa la de la mesa con su carga) a los que se les dé la mayor importancia.

En un sismo son generalmente dos los movimientos de interés a saber: el vertical y uno de los dos horizontales. Por esta razón, el análisis subsiguiente versará sobre una mesa vibradora capaz de producir estos dos movimientos. Se tendrán entonces dos entradas y dos salidas.

La figura 2 muestra conceptualmente mediante bloques, una mesa vibradora y los principales dispositivos de que consta. La masa de la mesa y la de la carga se han representado mediante un bloque de masa M , cuyo centro de gravedad es el punto C . A todos los sistemas eléctricos y electrónicos involucrados en la tarea de procesar y transformar señales eléctricas en movimientos (a la entrada de los actuadores hidráulicos) se les ha representado mediante bloques denominados *compensadores eléctricos*.

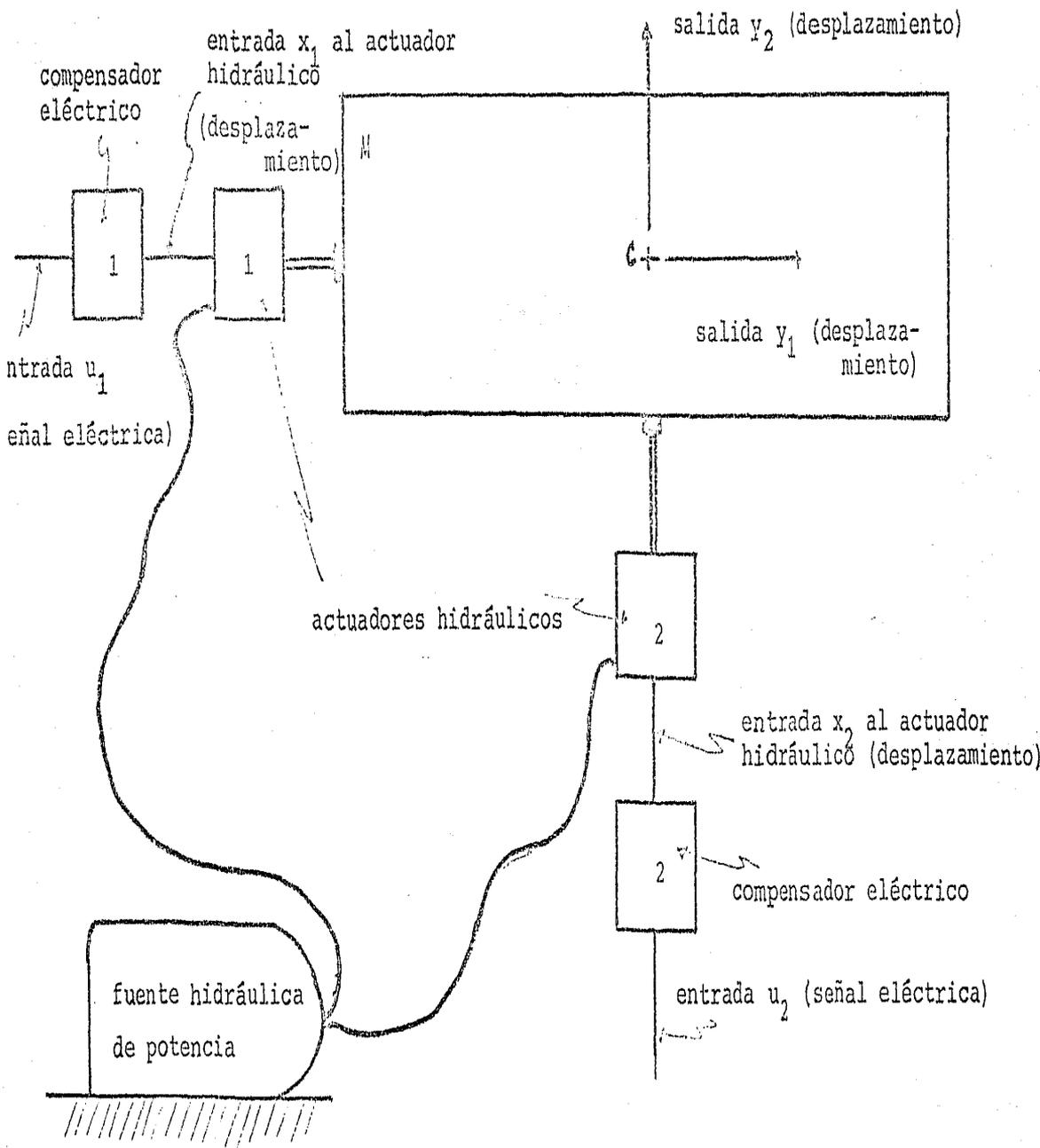
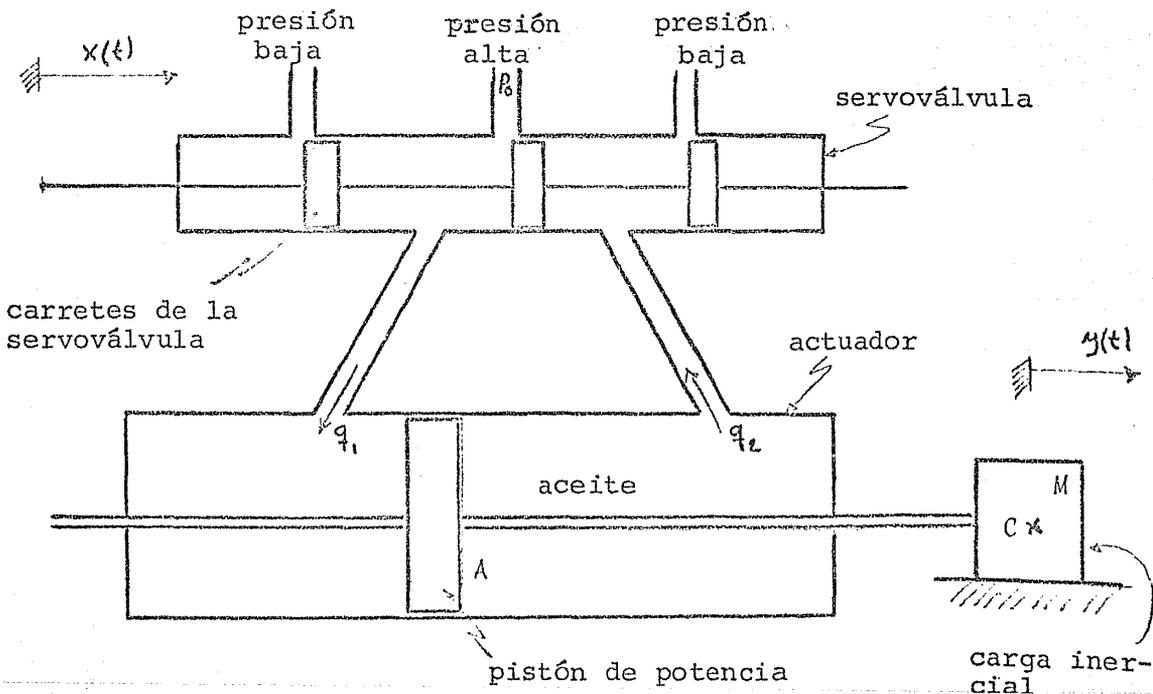


FIGURA 2

III. Descripción del subsistema actuador hidráulico-masa y planTEAMIENTO de su modelo matemático.

Puesto que, como ya se mencionó, el comportamiento dinámico de importancia del sistema completo está determinado por los subsistemas actuador hidráulico-masa presentes, se describirá a continuación el funcionamiento de uno de estos subsistemas actuando aisladamente y se determinará su modelo matemático.

La figura 3 muestra un bosquejo del sistema físico, el cual consta de tres partes o secciones fundamentales: una *servoválvula* (que es un amplificador hidráulico), un *actuador* y una *carga inercial* o masa M .



La entrada al subsistema es el desplazamiento $x(t)$ del eje que contiene a los carretes de la servoválvula y la salida es el desplazamiento $y(t)$ del centro de gravedad C de la masa M , que es el desplazamiento de todos los puntos de la masa pues no se consideran movimientos angulares.

La manera como funciona es la siguiente: la apertura central de la servoválvula está conectada a un recipiente que contiene aceite a una presión P_0 , que es precisamente la que mantiene la fuente hidráulica de potencia. Al moverse los carretes de la servoválvula hacia la derecha ($x(t) > 0$) la cámara izquierda del cilindro que contiene al pistón de potencia del actuador se llena con el fluido a una presión P_0 , mientras que la cámara del lado derecho queda a una presión que puede considerarse nula. La diferencia de presiones a los dos lados del pistón de potencia hace que sobre éste se ejerza una fuerza proporcional a su área A , desplazándose entonces hacia la derecha ($y(t) > 0$) junto con la masa M .

Se pueden plantear para dicho sistema las siguientes relaciones:²

$$Q(t) = k_1 x(t) - k_2 p(t) \quad (1)$$

$$Q(t) = A \dot{y}(t) + \frac{V}{4B} \dot{p}(t) \quad (2)$$

$$A p(t) = M \ddot{y}(t) \quad (3)$$

En donde:

$$Q(t) = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

q_1 = gasto de aceite hacia la cámara izquierda del actuador

q_2 = gasto de aceite desde la cámara derecha del actuador

A = área de las caras del pistón de potencia

V = volumen total de aceite contenido en la servoválvula y actuador

β = compresibilidad del aceite

M = masa de la carga inercial

k_1, k_2 = constantes de proporcionalidad

$p(t)$ = Diferencia de presiones a los lados del pistón de potencia

$y(t)$ = desplazamiento del centro de gravedad C de la masa.

Manipulando las relaciones 1, 2 y 3 se pueden obtener las siguientes ecuaciones:

$$\dot{p}(t) = -\frac{k_2}{k_3} p(t) - \frac{A}{k_3} v(t) + \frac{k_1}{k_3} x(t) \quad (4)$$

$$\dot{v}(t) = \frac{A}{M} p(t) \quad (5)$$

$$\dot{y}(t) = v(t) \quad (6)$$

en donde:

$$k_3 = V/4\beta$$

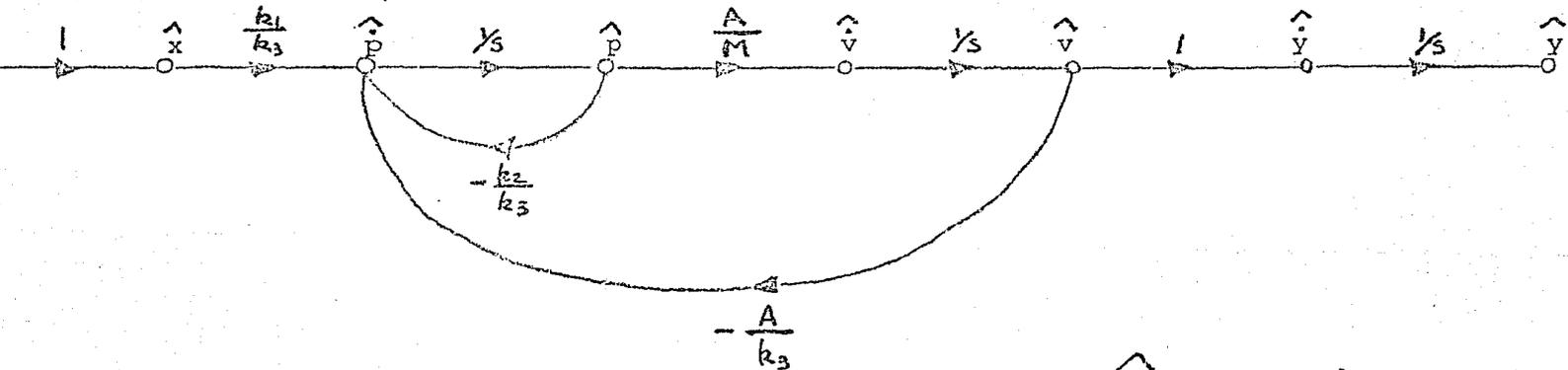
y

$v(t)$ = velocidad del centro de gravedad C de la masa M .

4, 5 y 6 son las ecuaciones de estado del subsistema actuador hidráulico-masa, y por tanto describen totalmente su comportamiento dinámico.

Nótese que las ecuaciones 4 y 6 son independientes de la carga en el actuador.

Es posible, de lo anterior, obtener una representación matemática de todo el sistema para el caso particular en que se considera solamente uno de los dos movimientos. La figura 4 muestra un reograma que cumple con tal función. Nótese que el compensador eléctrico, cuya entrada es la señal eléctrica $u(t)$ (que es entrada al sistema global) y cuya salida es el desplazamiento $x(t)$ de los carretes de la servoválvula (que es entrada al subsistema actuador hidráulico-masa) se ha representado con una función de transferencia igual a 1; esto es debido, como ya se mencionó, a que su comportamiento es algebraico.



$$\hat{f} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

FIGURA 4

La función de transferencia $h(s)$ de este subsistema, que consta de un solo actuador hidráulico, es:

$$h(s) = \frac{\kappa_1}{s^3 + \kappa_2' s^2 + \kappa_3 s}$$

en donde:

$$\kappa_1 = \frac{k_1}{k_3} \frac{A}{M}$$

$$\kappa_2' = \frac{k_2}{k_3}$$

$$\kappa_3 = \frac{A^2}{k_3 M}$$

El patrón de polos y ceros correspondiente, tendrá un polo en el origen, cualesquiera que sean los valores de los parámetros. Consecuentemente el subsistema es siempre inestable.

Si $\kappa_3 > \kappa_2'^2 / 4$, tal como sucede en la realidad, dicho patrón de polos y ceros aparece en la figura 5.

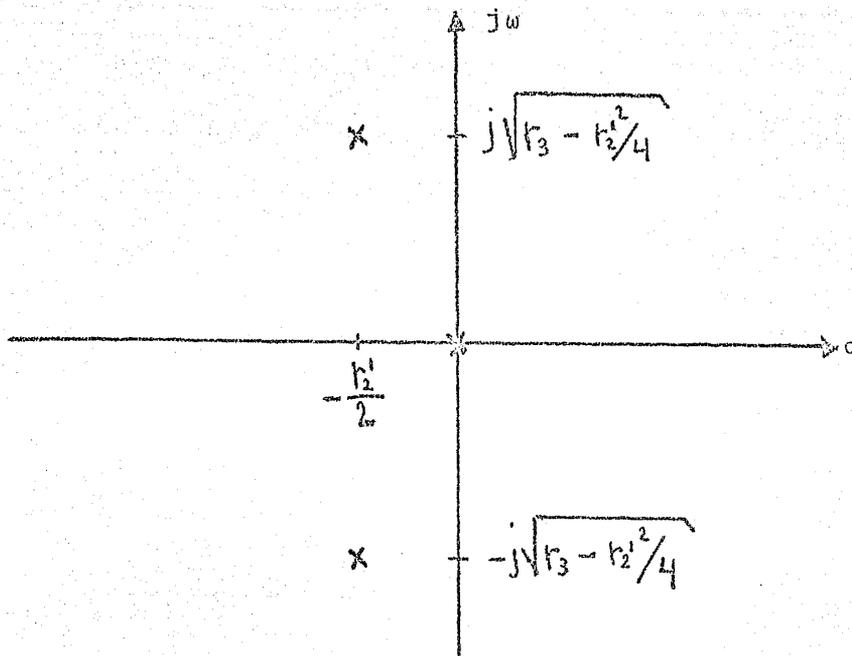


FIGURA 5

La manera usual de diseñar los sistemas que constan de varios subsistemas interactuando, es haciendo que cada uno de éstos, funcionando aisladamente, sea estable. Esto, no obstante, no asegura que el sistema global sea estable. Por esta razón, y en virtud de que el sistema global que ocupa al presente trabajo constará de varios subsistemas del tipo actuador hidráulico-masa (tres como se verá a continuación) es necesario diseñar a cada uno de éstos de forma que sea estable.

Puesto que todos los actuadores hidráulicos se considerarán similares (existiendo diferencia sólomente en el valor de algunos de sus parámetros) se analizará la manera de implementar dicha estabilidad para uno solo de estos subsistemas.

La forma entonces de hacer estable al subsistema actuador hidráulico-masa, descrito por sus ecuaciones de estado 4, 5 y 6, es realimentando negativamente la salida $y(t)$ con ganancia k' . Esta realimentación, aparte de implementar estabilidad, disminuye el factor de amortiguamiento, por lo cual es necesario realimentar también la diferencia de presiones $p(t)$ negativamente con k'' . El reograma de la figura 6 ilustra lo anterior. Y las ecuaciones de estado del subsistema así realimentado se transforman en:

$$\dot{p}(t) = -\left(\frac{k_2}{k_3} + \frac{k_1}{k_3} k''\right) p(t) - \frac{A}{k_3} v(t) - \frac{k_1}{k_3} k' y(t) + \frac{k_1}{k_3} u(t) \quad (7)$$

$$\dot{v}(t) = \frac{A}{M} p(t) \quad (8)$$

$$\dot{y}(t) = v(t) \quad (9)$$

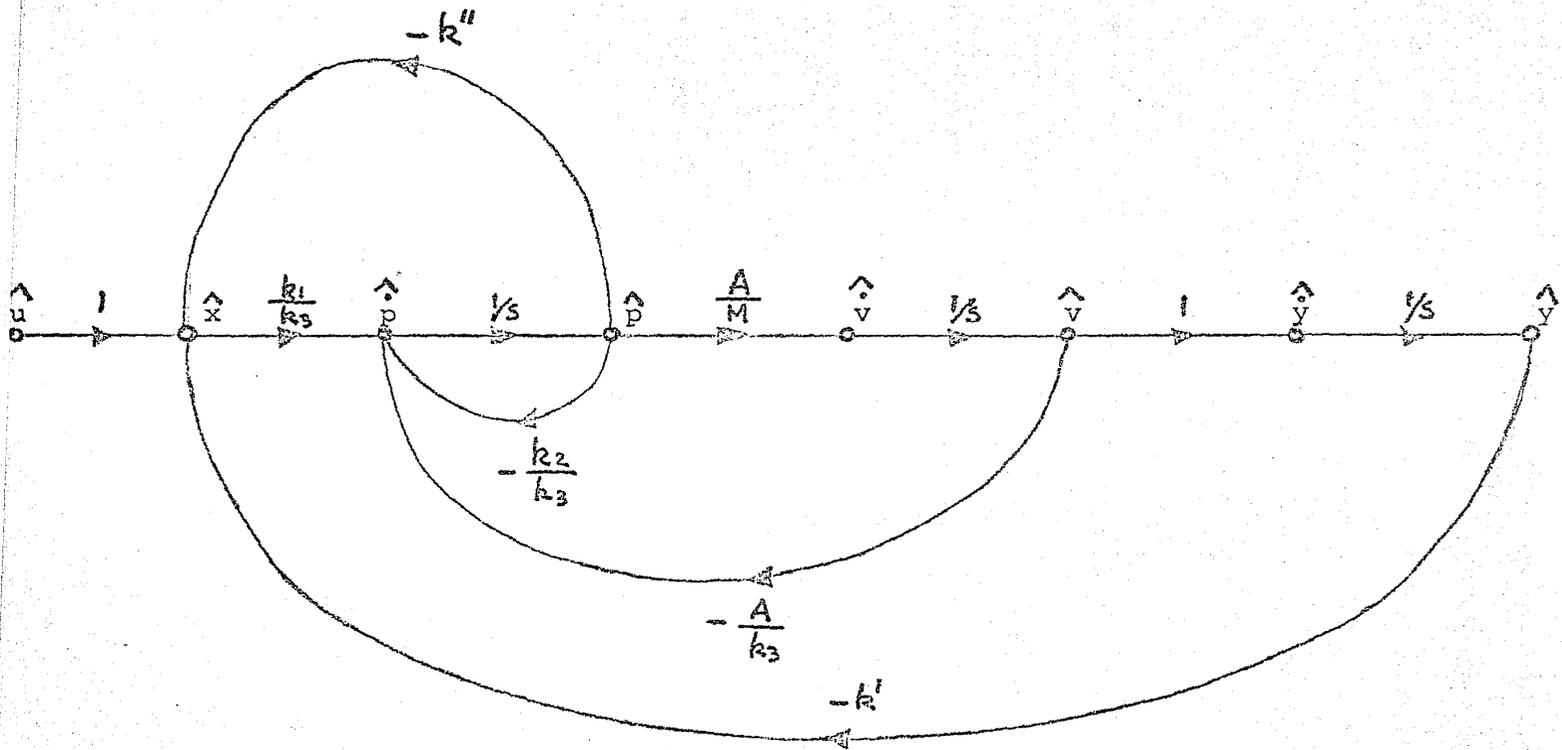
y la correspondiente función de transferencia $h_n(s)$ es:

$$h_n(s) = \frac{\kappa_1}{s^3 + \kappa_2 s^2 + \kappa_3 s + \kappa_4}$$

en donde:

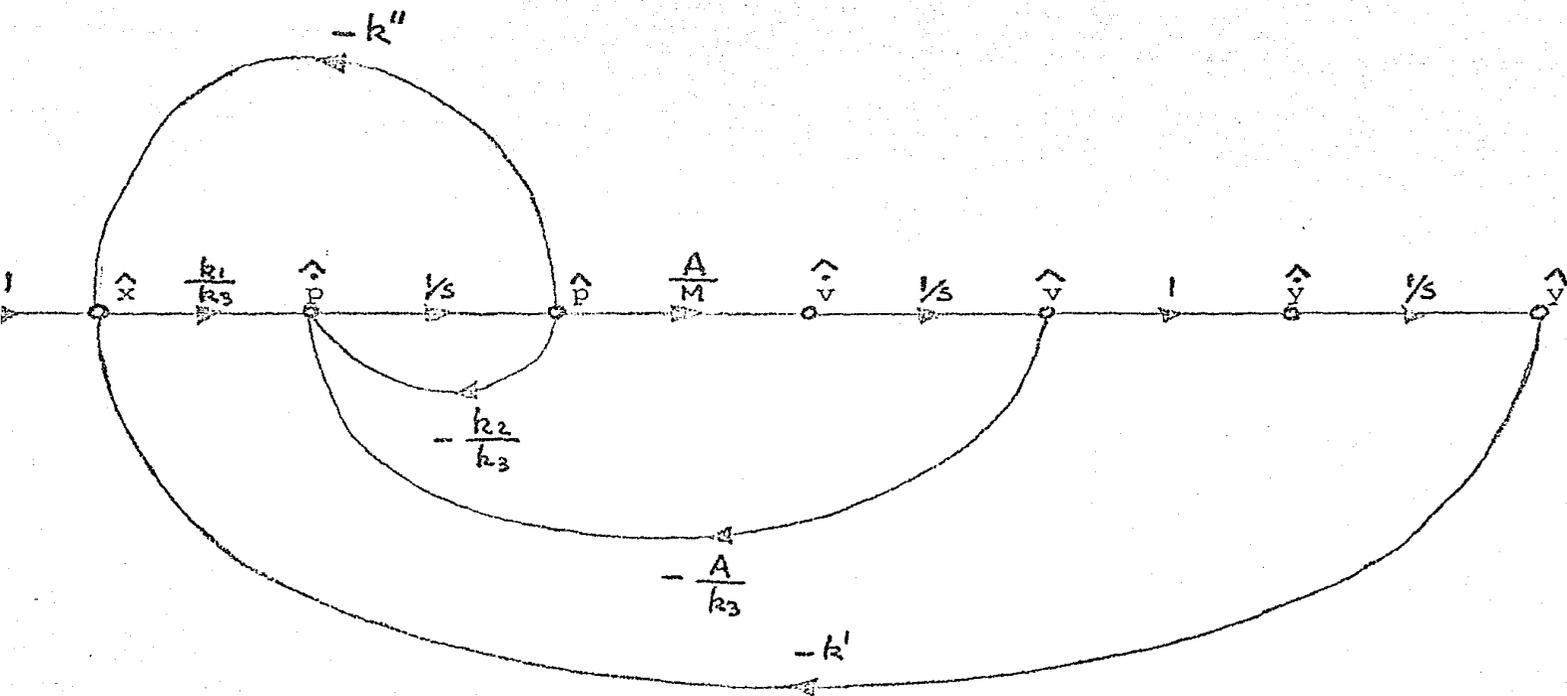
$$\kappa_2 = k'' \frac{k_1}{k_3} + \frac{k_2}{k_3} = k'' \frac{k_1}{k_3} + \kappa_2'$$

$$\kappa_4 = k' \frac{k_1}{k_3} \cdot \frac{A}{M} = k' \kappa_1$$



$$\hat{f} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

FIGURA 6



$$\hat{f} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

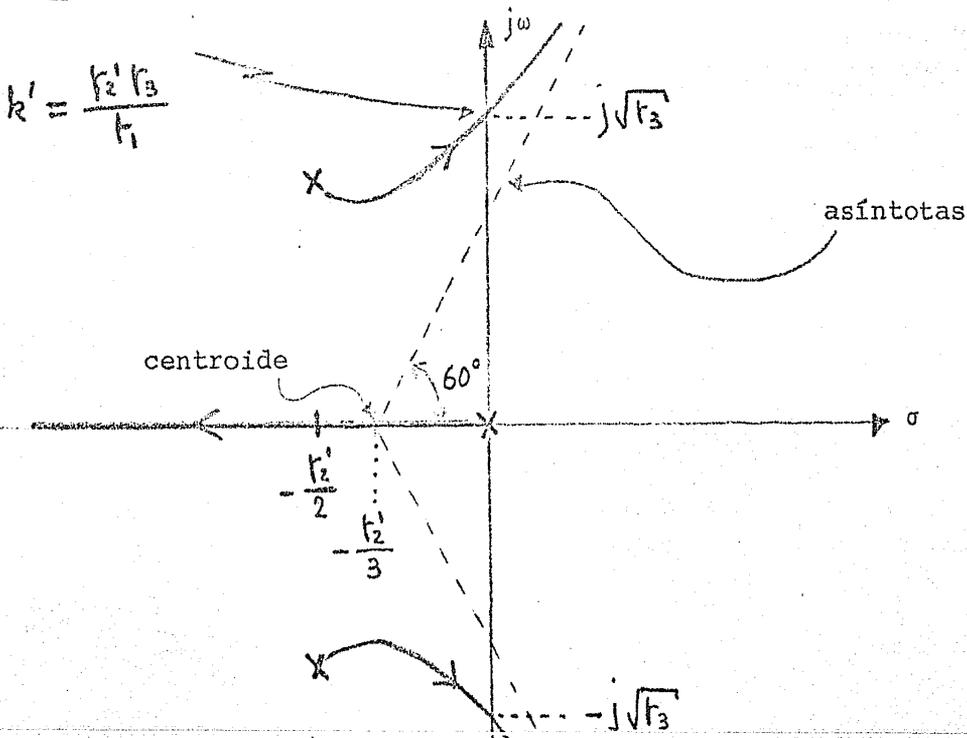
FIGURA 6

Es necesario conocer ahora la forma en que estas dos realimentaciones afectan al patrón de polos y ceros del subsistema que se considera. Con este objeto se establecerá el *lugar geométrico positivo* de las raíces del denominador de $h_n(s)$ para k' cuando $k'' = 0$ y para k'' cuando $k' = 0$.

Considérese entonces el denominador de $h_n(s)$, primeramente cuando $k'' = 0$.

$$s^3 + n_2' s^2 + n_3 s + k' n_1$$

El lugar geométrico de las raíces de dicho polinomio para $0 < k' < \infty$ se indica en la figura 7.

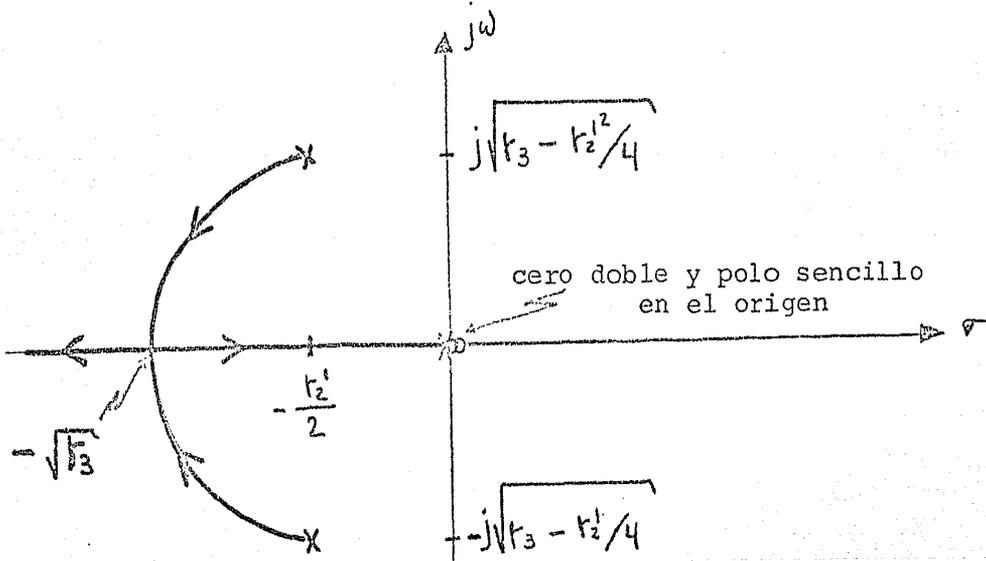


Es evidente entonces que el subsistema es estable para $0 < k' < \kappa_2' \kappa_3 / \kappa_1$ si $k'' = 0$, y que al crecer k' , el factor de amortiguamiento correspondiente a los polos complejos disminuye.

Considérese ahora el denominador de $h_{\kappa}(s)$ para $k' = 0$ escrito de la siguiente forma.

$$s^3 + \kappa_2' s^2 + \kappa_3 s + k'' \frac{\kappa_1}{\kappa_3} s^2$$

La figura 8, muestra el lugar geométrico de las raíces de este polinomio para $0 \leq k'' < \infty$, e ilustra claramente que el propósito de realimentar la diferencia de presiones $p(t)$ con valores de k'' en el intervalo $\left[0, \frac{\kappa_3}{\kappa_1 \kappa_3} (\kappa_2' \kappa_3 - 2\kappa_3)\right]$, para el cual 2 polos son complejos, es aumentar el factor de amortiguamiento y el rango de valores de k' que garantizan estabilidad, así como el de disminuir la frecuencia natural.



Para hacer más completo el análisis del efecto de k' y k'' sobre el patrón de polos y ceros del subsistema bajo estudio, se ilustrará por último el lugar geométrico de las raíces del denominador de $k_1(s)$ para $J_2 k' \ll \infty$ suponiendo dos valores de k'' en el intervalo $\left(\frac{k_3}{k_1 k_2} (\alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_3), \infty \right)$, para el cual todos los polos son reales.

Considérese entonces nuevamente el denominador de $k_1(s)$ para

$$k'' = k_1''$$

$$s^3 + \alpha_{21} s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4$$

en donde

$$\alpha_{21} = k_1'' \frac{k_1}{k_3} + \frac{k_2}{k_3}$$

y para

$$k'' = k_2''$$

$$s^3 + \alpha_{22} s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4$$

en donde

$$\alpha_{22} = k_2'' \frac{k_1}{k_3} + \frac{k_2}{k_3}$$

los lugares geométricos correspondientes para $0 < k' < \infty$ se muestran en las figuras 9 y 10.

Es evidente entonces que conforme k'' es mayor, el rango de valores de k' que mantienen al sistema estable sigue aumentando. Además, no será posible ubicar los polos complejos fuera del semicírculo de radio $\sqrt{k_3}$, indicado en las figuras anteriores, en el semiplano complejo izquierdo. Esta restricción matemática se puede interpretar físicamente observando que $k_3 (=4EA^2/VM)$ es una función del área del pistón del actuador, de la compresibilidad del aceite, del volumen de éste y de la masa de la carga, siendo éstos, parámetros que no pueden ser alterados mediante realimentación.

FIGURA 9

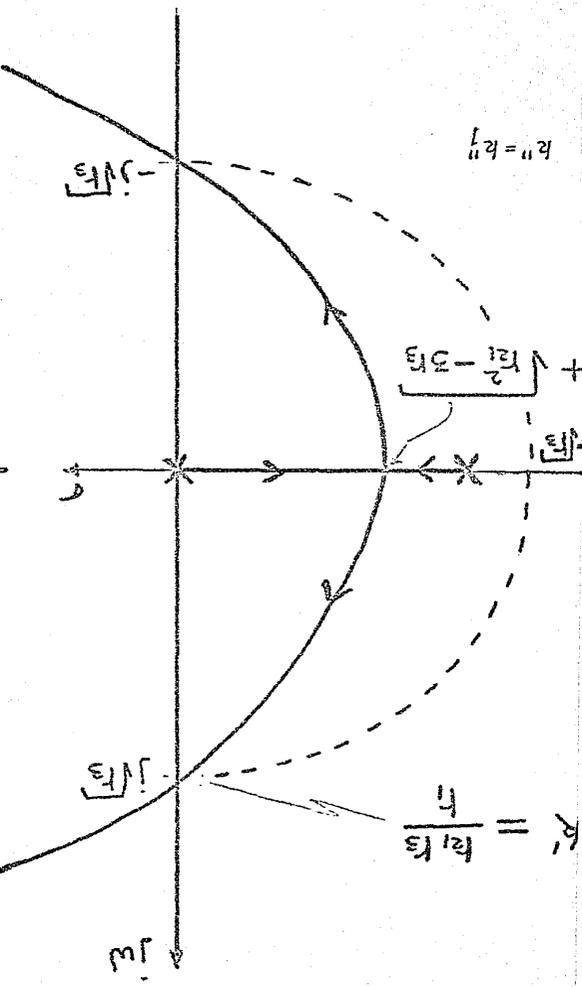
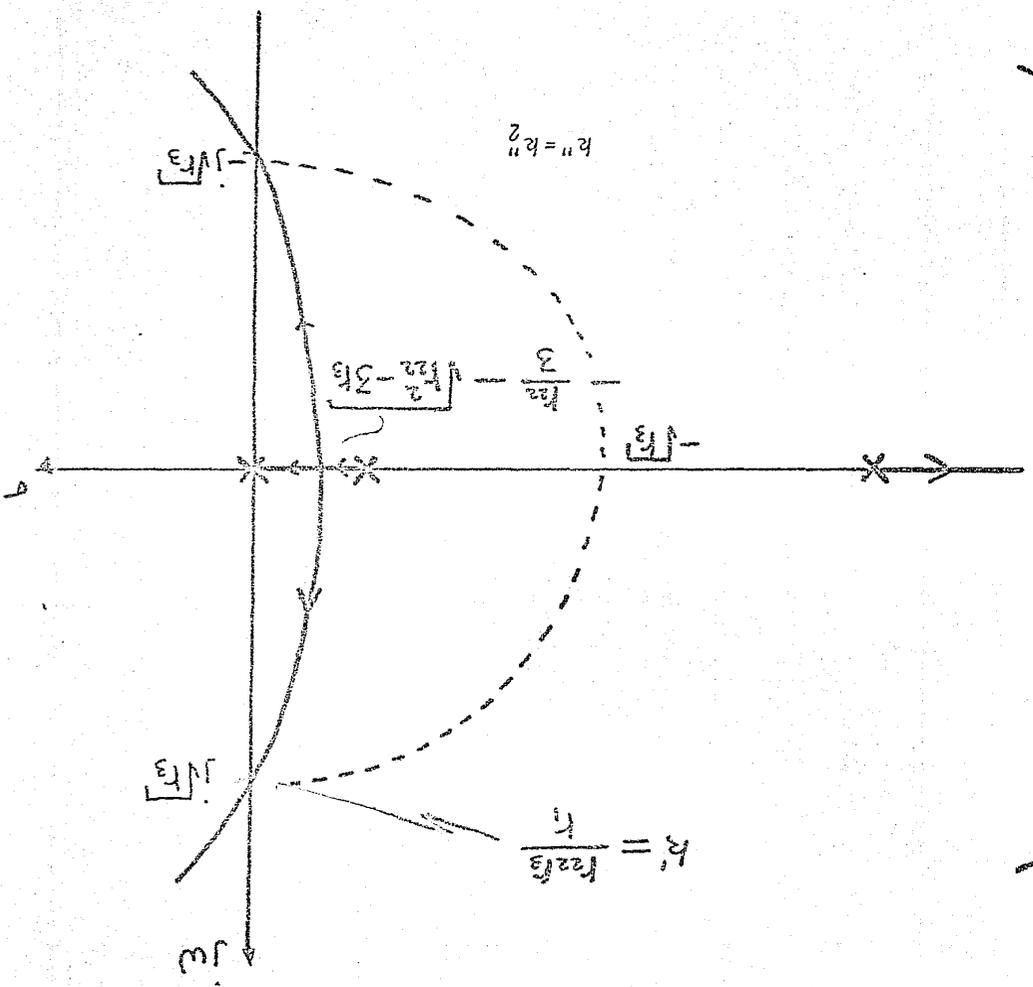


FIGURA 10



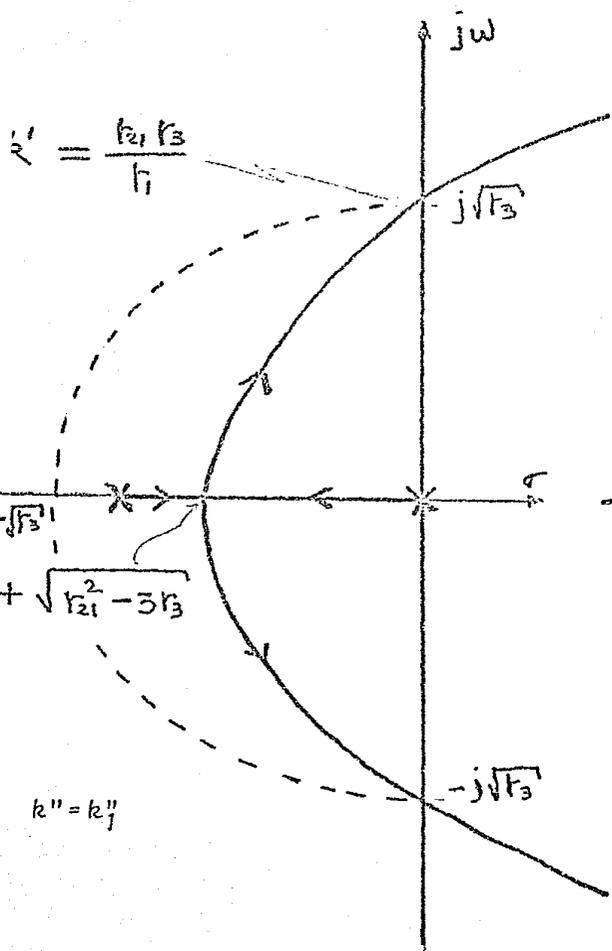


FIGURA 9

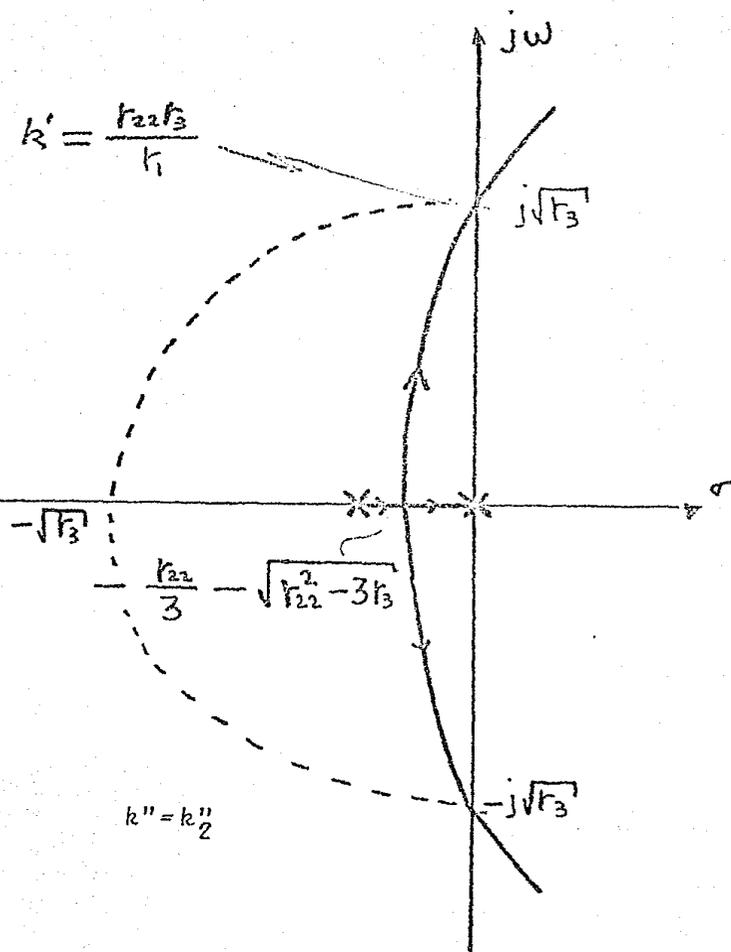
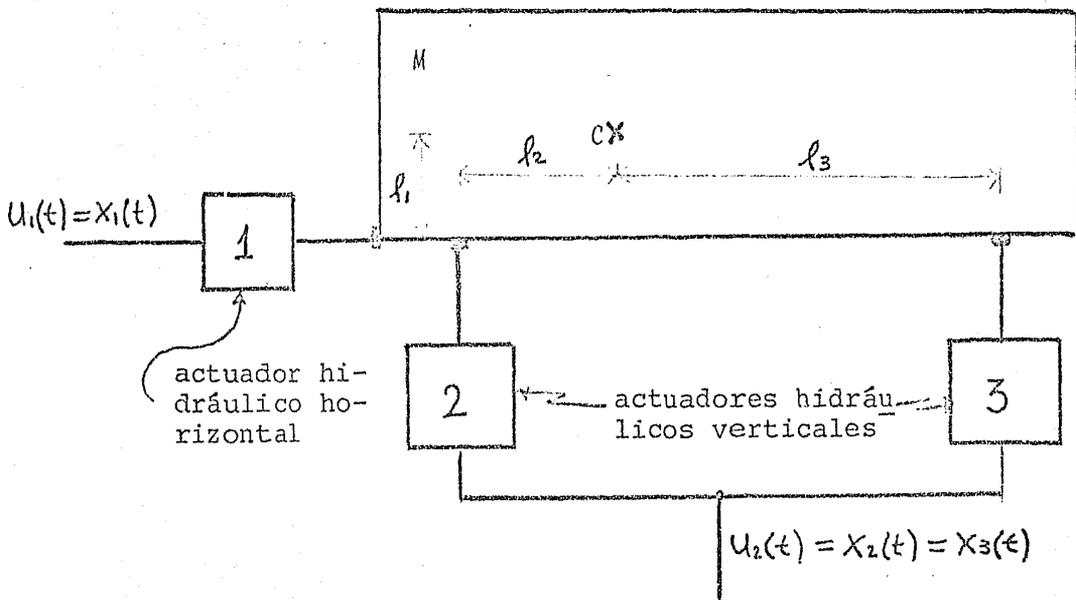


FIGURA 10

IV. Descripción física del acoplamiento.

En esta sección se analizará y describirá la forma en que en un caso real cada una de las entradas tiene efecto sobre todas las salidas, o sea, la manera en que el sistema está acoplado físicamente.

La figura 11 muestra el sistema que será objeto del mencionado análisis. En ella se indica la manera como en realidad se tienen que implementar y adaptar los diversos dispositivos de que se ha hablado para lograr el objetivo deseado. Como se puede apreciar, para generar el movimiento vertical se utilizan dos actuadores hidráulicos separados una cierta distancia ($l_2 + l_3$), en vez de uno, debido a problemas de equilibrio estático.



El fenómeno físico que hace que el sistema esté acoplado se puede explicar, haciendo referencia a la figura anterior, de la siguiente forma:

En general, los cuerpos sobre los cuales se desea simular el sismo son de geometría complicada; por esta razón, el centro de gravedad C de la carga, quedará ubicado en puntos muy diversos para cada caso. Será entonces poco probable que la línea de acción del actuador horizontal 1 contenga a dicho punto C . Por otro lado se va a tener también en general, que éste quedará ubicado a distancias desiguales de los puntos de aplicación 2 y 3 de los actuadores verticales 2 y 3. Esta situación da como resultado que la fuerza producida por cada uno de los tres actuadores, contribuya a dar origen a un par de acoplamiento T_c con respecto al centro de gravedad C de la carga, obteniéndose a su vez, como resultado de esto, movimientos angulares en ésta última.

Si las entradas al sistema son entonces la señal eléctrica $u_1(t)$ a la entrada del compensador eléctrico 1, correspondiente al movimiento horizontal, y la señal eléctrica $u_2(t)$ a las entradas de los compensadores eléctricos 2 y 3, correspondientes ambos al movimiento vertical, y se consideran como salidas el desplazamiento horizontal $y_1(t)$ de la cabeza del actuador 1 y el desplazamiento vertical $y_3(t)$ de la cabeza del actuador 3, es evidente que las dos salidas serán afectadas por las dos entradas, debido a que estas dos contribuyen con el par de acoplamiento T_c .

V. Modelo matemático del sistema acoplado.

El sistema que se analizará entonces es el bosquejado en la figura 11 en el que se considerará que la única diferencia entre los actuadores es que el área A_1 del pistón del actuador horizontal 1 es mayor que las áreas A_2 y A_3 de los pistones de los actuadores 2 y 3, siendo estas dos últimas iguales ($A_2 = A_3$). La razón de esto es que las aceleraciones verticales en un sismo son en general menores que las horizontales.

Ya se explicó en la sección anterior cómo al estar operando un actuador cualquiera, en los otros dos se percibirá una respuesta (desplazamiento de sus cabezas) aún cuando no estén siendo excitados. Esto conduce entonces a remodelar cada actuador, formando parte ya del sistema global, incluyendo en este nuevo modelo el efecto de la acción de los demás actuadores. Esto se hará paralelamente para los tres actuadores, obteniéndose finalmente el modelo matemático del sistema global.

Considérese entonces el diagrama de cuerpo libre de la carga en la figura 12.

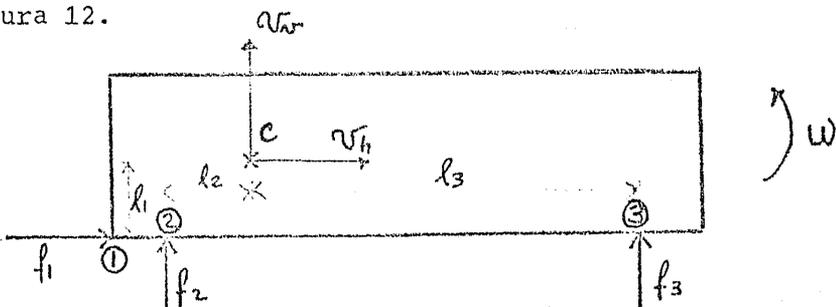


FIGURA 12

Aplicando el principio de D'Alembert de equilibrio dinámico correspondiente a cada uno de los tres modos energéticos del sistema:

$$\begin{aligned} \Sigma \text{ fuerzas horizontales} &= 0 \\ \Sigma \text{ fuerzas verticales} &= 0 \\ \Sigma \text{ momentos con respecto al centro de gravedad} &= 0 \end{aligned}$$

se obtienen tres ecuaciones diferenciales:

$$J\dot{\omega}(t) = l_1\delta_1(t) - l_2\delta_2(t) + l_3\delta_3(t) \quad (10)$$

$$M\dot{v}_v(t) = \delta_2(t) + \delta_3(t) \quad (11)$$

$$M\dot{v}_h(t) = \delta_1(t) \quad (12)$$

En donde:

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$ = fuerzas ejercidas por los actuadores 1, 2 y 3 respectivamente.

J = momento de inercia de la masa M con respecto a su centro de gravedad C .

ω = velocidad angular de la masa M con respecto a su centro de gravedad C .

v_v, v_h = componentes vertical y horizontal de la velocidad absoluta del centro de gravedad C.

Se sabe además que:

$$\delta_1(t) = A_1 p_1(t) \quad (13)$$

$$\delta_2(t) = A_2 p_2(t) \quad (14)$$

$$\delta_3(t) = A_3 p_3(t) \quad (15)$$

En donde:

A_1, A_2 y A_3 = áreas de los pistones de los actuadores 1, 2 y 3 respectivamente.

Por lo tanto, substituyendo 13, 14 y 15 en 10, 11 y 12 se obtiene:

$$\dot{\omega}(t) = \frac{l_1 A_1}{J} p_1(t) - \frac{l_2 A_2}{J} p_2(t) + \frac{l_3 A_3}{J} p_3(t)$$

$$\dot{v}_v(t) = \frac{A_2}{M} p_2(t) + \frac{A_3}{M} p_3(t) \quad (\alpha)$$

$$\dot{v}_h(t) = \frac{A_1}{M} p_1(t)$$

Puesto que las ecuaciones 7 y 9 correspondientes a un actuador son independientes de la carga inercial que se tenga, no es necesario modificarlas, por lo que, considerándolas aplicadas a cada uno de los tres actuadores se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= -D_1 p_1(t) - D_2 v_1(t) - D_3 y_1(t) + D_4 u_1(t) \\ \dot{p}_2(t) &= -D_1 p_2(t) - D_2' v_2(t) - D_3 y_2(t) + D_4 u_2(t) \end{aligned} \quad (\beta)$$

$$\dot{p}_3(t) = -D_1 p_3(t) - D_2'' v_3(t) - D_3 y_3(t) + D_4 u_2(t)$$

$$\dot{y}_1(t) = v_1(t)$$

$$\dot{y}_2(t) = v_2(t) \quad (\gamma)$$

$$\dot{y}_3(t) = v_3(t)$$

En donde se han asociado subíndices a las variables para identificarlas con sus correspondientes actuadores,

$$D_1 = \frac{k_2}{k_3} + \frac{k_1}{k_3} k''$$

$$D_2 = \frac{A_1}{k_3}, \quad D_2' = \frac{A_2}{k_3}, \quad D_2'' = \frac{A_3}{k_3}$$

$$D_3 = \frac{k_1}{k_3} k'$$

$$D_4 = \frac{k_1}{k_3}$$

α , β y γ constituyen un conjunto de nueve ecuaciones diferenciales con doce variables incógnitas. Se pueden eliminar w , v y v_h encontrando una matriz \underline{T} de transformación de forma que

$$\underline{V} = \underline{T} \underline{W} \quad (16)$$

en donde:

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{Y} \quad \underline{W} = \begin{bmatrix} w \\ v_v \\ v_h \end{bmatrix}$$

para esto considérese la figura 13 en la que aparece nuevamente la carga del sistema moviéndose angularmente y en las dos direcciones lineales de interés (horizontal y vertical).

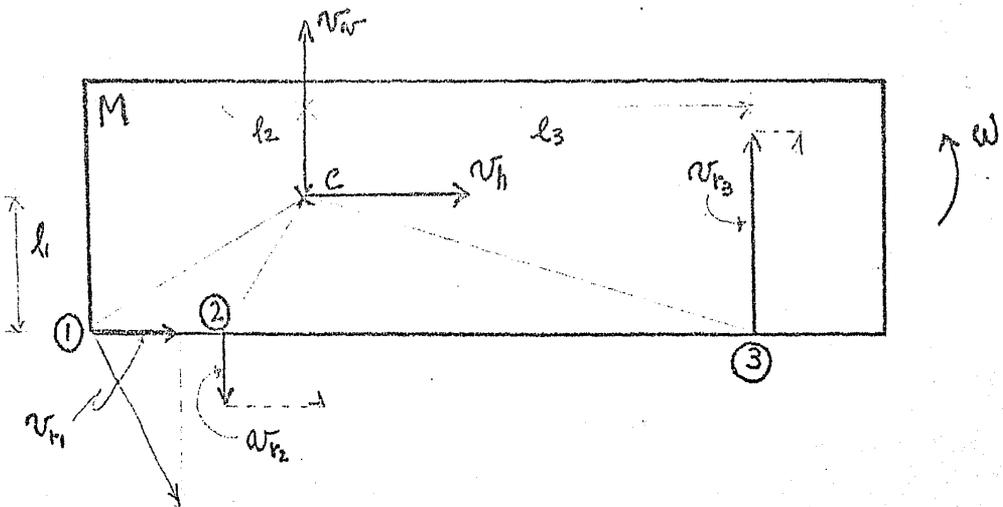


FIGURA 13

La velocidad horizontal absoluta v_1 , del punto 1 (cabeza del actuador 1) es la suma de v_h mas la componente horizontal v_{h1} de la velocidad de dicho punto 1 con respecto al centro de gravedad C:

De forma similar, las velocidades verticales absolutas v_1 y v_3 de los puntos 2 y 3 (cabezas de los actuadores 2 y 3) respectivamente son:

$$v_2 = v_v - v_{h2}$$

$$v_3 = v_v + v_{h3}$$

Suponiendo que los movimientos angulares son pequeños, se pueden linealizar las tres ecuaciones anteriores, para finalmente obtener:

$$v_1 = v_h + l_1 w$$

$$v_2 = v_v - l_2 w$$

$$v_3 = v_v + l_3 w$$

De donde se obtiene que la matriz \underline{I} es:

$$\underline{I} = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & 1 \\ -l_2 & 1 & 0 \\ l_3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, el conjunto de ecuaciones α se pueden escribir en forma matricial:

$$\dot{\underline{W}} = \underline{N} \underline{P} \quad (17)$$

en donde

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad \underline{N} = \begin{bmatrix} \frac{\ell_1 A_1}{J} & -\frac{\ell_2 A_2}{J} & \frac{\ell_3 A_3}{J} \\ 0 & \frac{A_2}{M} & \frac{A_3}{M} \\ \frac{A_1}{M} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Derivando ambos miembros de 16,

$$\dot{\underline{V}} = \underline{T} \dot{\underline{W}} \quad (18)$$

y substituyendo 17 en 18:

$$\dot{\underline{V}} = \underline{T} \underline{N} \underline{P} \quad (19)$$

La ecuación matricial 19 representa la transformación de variables que se deseaba hacer, por lo que ésta junto con β y γ constituyen el modelo matemático del sistema descrito en forma de variables de estado. Este es, entonces:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{C} \underline{x}(t) \end{aligned} \quad (S)$$

en donde

$$x' = \left[y_1, y_2, y_3, v_1, v_2, v_3, p_1, p_2, p_3 \right]$$

es el vector estado transpuesto

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{es el vector entrada}$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad \text{es el vector salida}$$

Y,

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & -a'_2 & a'_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_2 & a_4 & a'_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_5 & a_6 \\ -D_3 & 0 & 0 & -D_2 & 0 & 0 & -D_1 & 0 & 0 \\ 0 & -D_3 & 0 & 0 & -D'_2 & 0 & 0 & -D_1 & 0 \\ 0 & 0 & -D_3 & 0 & 0 & -D''_2 & 0 & 0 & -D_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ D_4 & 0 \\ 0 & D_4 \\ 0 & D_4 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y a su vez:

$$a_1 = \frac{l_1^2 A_1}{J} + \frac{A_1}{M}$$

$$a'_2 = \frac{l_1 l_2 A_2}{J}$$

$$a_2 = \frac{l_1 l_2 A_1}{J}$$

$$a'_3 = \frac{l_1 l_3 A_3}{J}$$

$$a_3 = \frac{l_1 l_3 A_1}{J}$$

$$a'_5 = -\frac{l_2 l_3 A_3}{J} + \frac{A_3}{M}$$

$$a_4 = \frac{l_2^2 A_2}{J} + \frac{A_2}{M}$$

$$a_6 = \frac{l_3^2 A_3}{J} + \frac{A_3}{M}$$

VI. Comprobación matemática del acoplamiento.

Por la forma como se plantearon las ecuaciones y por la presencia del par de acoplamiento T_c es evidente que el sistema está acoplado, y que tal acoplamiento se presenta de forma que ambas entradas afectan a ambas salidas, en el caso más general. A continuación se demostrará matemáticamente la existencia del acoplamiento. La manera directa de hacerlo consiste en verificar si por lo menos una de las siguientes matrices (en función de las cuales se puede expandir la matriz de transferencia del sistema S) es no-diagonal:

$$\underline{CB}, \underline{CAB}, \underline{CA^2B}, \dots, \underline{CA^7B}, \underline{CA^8B}$$

De ser así se puede asegurar que el sistema está acoplado.

Es fácil entonces calcular que

$$\underline{CB} = \underline{0}$$

$$\underline{CAB} = \underline{0}$$

$$\underline{CA^2B} = \begin{pmatrix} k_4 a_1 & k_4 (a'_3 - a'_2) \\ k_4 a_3 & k_4 (a_5 + a_6) \end{pmatrix}$$

$\underline{CA^2B}$ es una matriz no diagonal, por lo tanto el sistema está acoplado.

VII Simulación del sistema acoplado.

Habiendo supuesto algunos valores reales para los parámetros del sistema acoplado, se expondrán a continuación los resultados gráficos de la simulación del mismo. La manera como se realizó tal simulación fue obteniendo cuatro gráficas correspondientes a las combinaciones de las dos entradas con las dos salidas, considerando *condiciones iniciales nulas* y *entrada escalón unitario*.

Los valores que se dieron a los parámetros en los que el área A_1 fué considerada dos veces mayor que las áreas A_2 y A_3 , fueron los siguientes:

$$A_1 = 18 \text{ in}^2 = 1.8 \times 10^3 \text{ (décimas de in)}^2$$

$$A_2 = A_3 = 9 \text{ in}^2 = 9 \times 10^2 \text{ (décimos de in)}^2$$

$$V = 100 \text{ in}^3 = 1 \times 10^5 \text{ (décimos de in)}^3$$

$$l_1 = 6 \text{ ft} = 7.2 \times 10^2 \text{ décimos de in}$$

$$l_2 = 0.5 \text{ ft} = 60 \text{ décimos de in}$$

$$l_3 = 14 \text{ ft} = 1.68 \times 10^3 \text{ décimos de in}$$

$$B = 2 \times 10^5 \text{ lb}_f/\text{in}^2 = 2 \times 10^3 \text{ lb}_f/\text{(décimo de in)}^2$$

$$M = 3 \times 10^4 \text{ lb} = 7.75 \text{ lb}_f \cdot \text{seg}^2 / (\text{décimo de in})$$

$$J = 1.02 \times 10^8 \text{ lb} \cdot \text{in}^2 = 2.64 \text{ lb}_f \cdot \text{seg}^2 \cdot \text{décimos de in}$$

$$k_1 = 140 (\text{décimos de in})^2 / \text{seg}$$

$$k_2 = 170 (\text{décimos de in})^5 / \text{lb}_f \cdot \text{seg}$$

$$k' = 20 \quad \text{y} \quad k'' = 2$$

Habiendo considerado como unidades de fuerza: libra fuerza (lb_f);
de longitud: décimo de pulgada; y de tiempo: segundo,

las matrices A y B de las ecuaciones de estado del sistema S resultaron con los siguientes valores:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 591 & -15 & 418 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30 & 117 & 81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 836 & 81 & 698 \\ -224 & 0 & 0 & -144 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 \\ 0 & -224 & 0 & 0 & -72 & 0 & 0 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & -224 & 0 & 0 & -72 & 0 & 0 & -36 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 11 & 0 \\ 0 & 11 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$$

y las gráficas de la simulación, hechas a diferente escala, se

muestran en las figuras 14 y 15.

De ellas se puede concluir que el comportamiento del sistema es el esperado y que el acoplamiento es mucho mas severo entre u_1 y y_3 que entre u_2 y y_1 debido esto a los valores numéricos dados a los parámetros geométricos y a las áreas de los pistones de los actuadores, pues como $A_1 = 2 A_2 = 2A_3$ el actuador 1 es "mas duro" (mas difícil de ser movida su cabeza) que los actuadores 2 y 3.

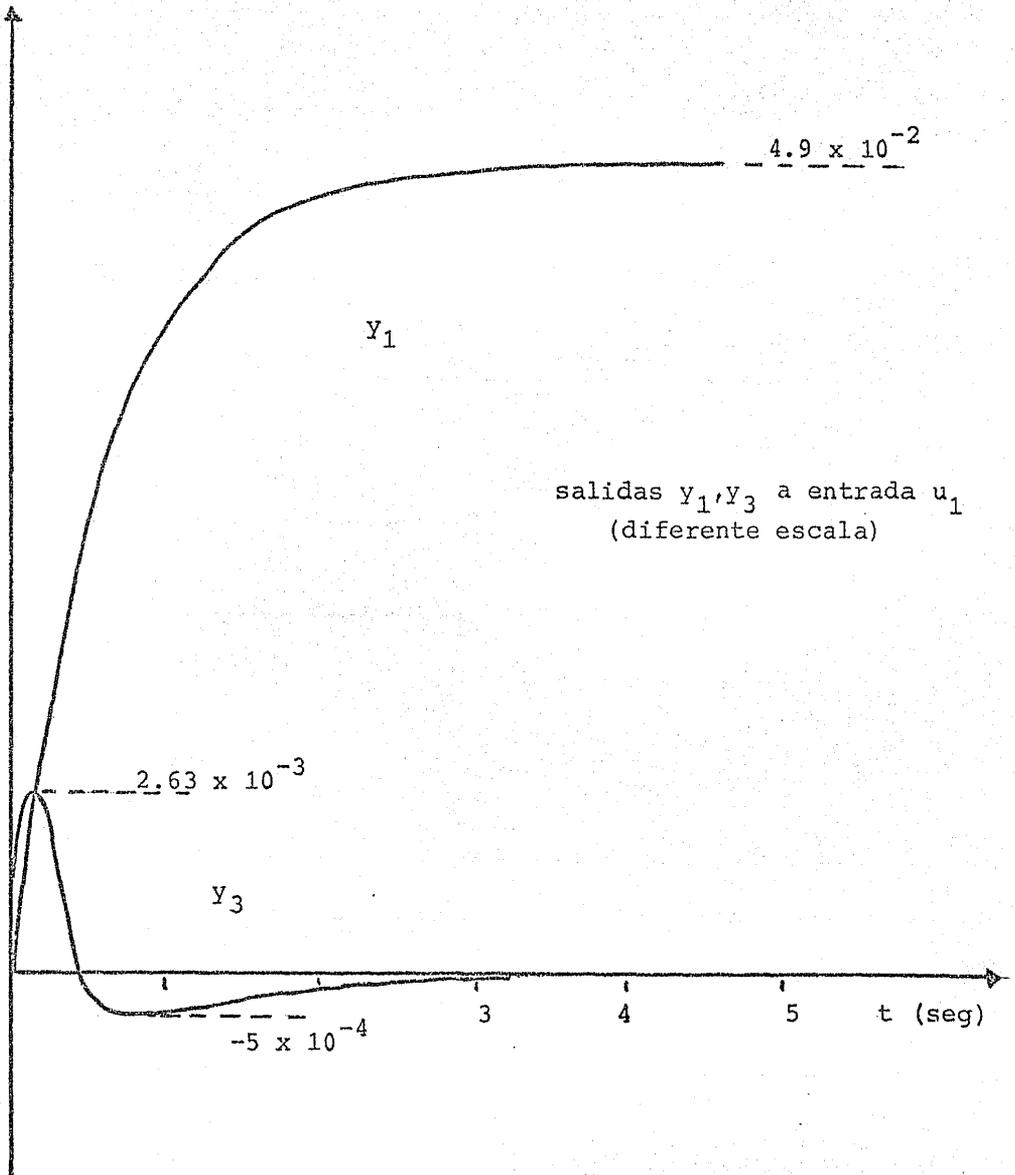


FIGURA 14

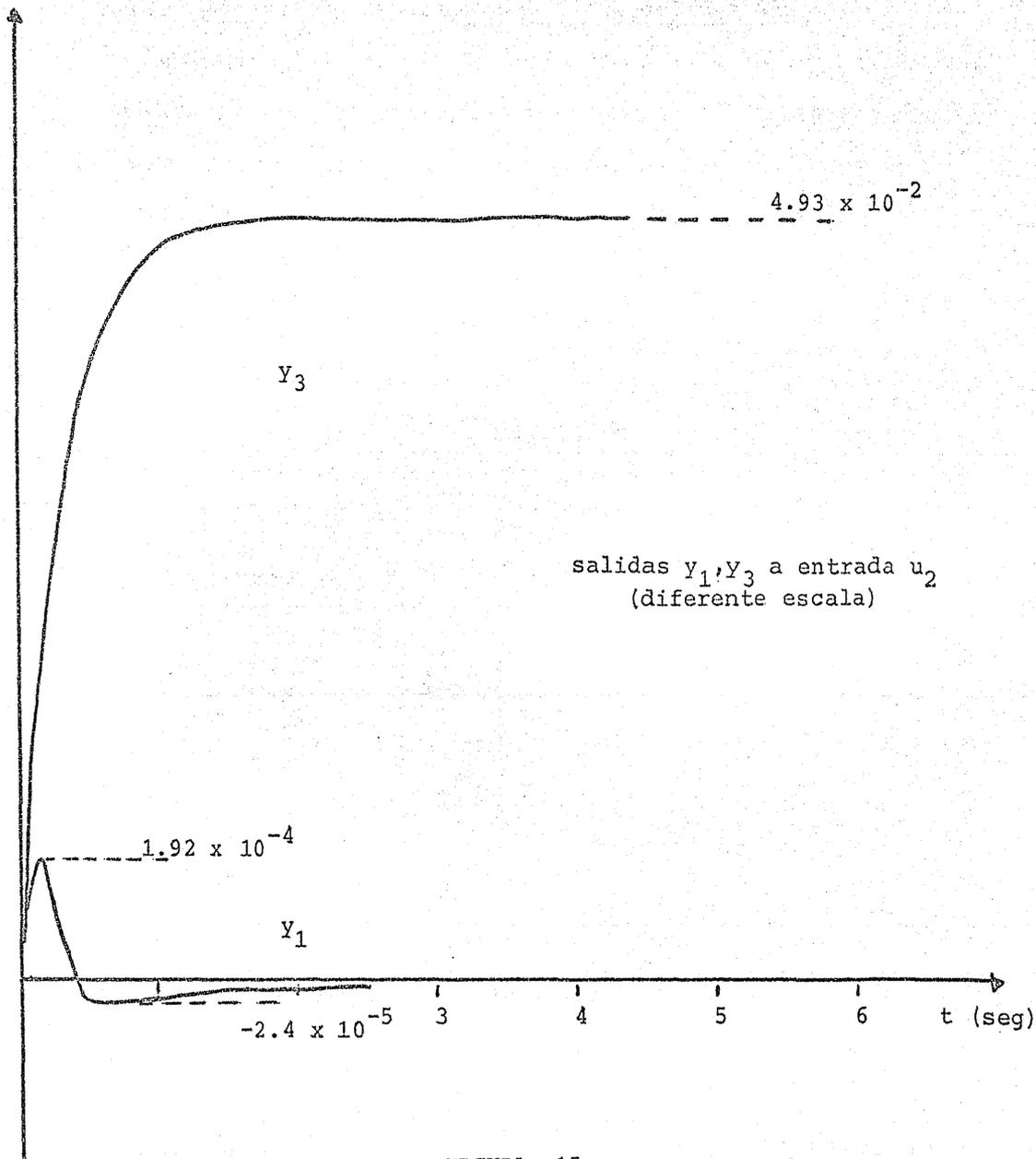


FIGURA 15

VIII Análisis de la desacoplabilidad del sistema.

Se determinará la matriz B^* definida en I y en base a ella se analizarán las posibilidades de desacoplar el sistema mediante realimentación de estado, acompañando a esto una breve interpretación física.

Es fácil encontrar que, para este caso:

$$d_1 = 2$$

$$d_2 = 2$$

Por lo tanto:

$$\underline{B}^* = \begin{bmatrix} \underline{C}_1 \underline{A}^2 \underline{B} \\ \underline{C}_2 \underline{A}^2 \underline{B} \end{bmatrix} = \underline{CA}^2 \underline{B}$$

Recordando que en este caso $A_2 = A_3 = cA_1$, en donde $c < 1$, y substituyendo los parámetros originales:

$$\underline{B}^* = A_1 \frac{k_1}{k_3} \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{M} + \frac{\ell_1^2}{J} & c \frac{\ell_1}{J} (\ell_3 - \ell_2) \\ \hline \frac{\ell_1 \ell_3}{J} & c \left(\frac{2}{M} + \frac{\ell_3}{J} (\ell_3 - \ell_2) \right) \end{array} \right]$$

Puesto que el momento de inercia J es una función lineal de la masa M .

$$J = l_e^2 M$$

en donde l_e es una longitud equivalente, la matriz anterior se puede escribir así:

$$\underline{B}^* = \frac{4A_1 k_1 \beta}{MV} \begin{pmatrix} 1 + l_1^2/l_e^2 & c l_1 (l_3 - l_2)/l_e^2 \\ \frac{l_1 l_3}{l_e^2} & c \left[2 + l_3 (l_3 - l_2)/l_e^2 \right] \end{pmatrix}$$

De lo anterior, a primera vista se puede deducir que la desacoplabilidad del sistema depende únicamente de su geometría, pues el rango de \underline{B}^* es independiente de los demás parámetros.

Con el objeto de extender más el estudio de la desacoplabilidad del sistema, se analizará el determinante de \underline{B}^* .

$$\det \underline{B}^* = \left(1 + \frac{l_1^2}{l_e^2} \right) \left[2 + \frac{l_3}{l_e^2} (l_3 - l_2) \right] - \frac{l_1^2 l_3}{l_e^4} (l_3 - l_2)$$

que finalmente se puede escribir como:

$$\det \underline{B}^* = \frac{1}{l_e^2} (1 + 2l_1^2) + 2$$

expresión que depende únicamente de l_2 y l_1 .

Se sabe, como se mencionó en la sección I, que el sistema es no-desacoplable para el caso en que los valores de sus parámetros sean tales que el determinante de B^* sea cero. Observando la última expresión, es evidente que esto nunca va a suceder.

Se puede concluir entonces que la desacoplabilidad del sistema es independiente de los valores que posean sus parámetros o, lo que es lo mismo, que *el sistema es siempre desacoplable*.

IX. Desacoplamiento del sistema.

El siguiente paso, después de haber analizado el comportamiento del sistema acoplado por medio del simulador digital, es desacoplarlo utilizando realimentación de estados y transformación no singular de la entrada. Se tiene que encontrar entonces, como se justificó en la sección I, un par de matrices, \underline{F} , \underline{G} de forma que el sistema

$$\dot{\underline{x}}(t) = (\underline{A} + \underline{B} \underline{F}) \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{G} \underline{w}(t) \quad (S')$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x}(t)$$

en donde $\underline{w}(t)$ es la nueva entrada, esté desacoplado.

Existe además el compromiso de que simultáneamente sea estable, por lo cual no cualquier matriz \underline{F} que lo desacople va a ser de utilidad.

IX.1. Desacoplamiento inestable (Integrador desacoplado),

Si se escogen las matrices \underline{F} y \underline{G} de desacoplamiento como inicialmente propusieron Falb y Wolovich:

$$\underline{F} = - \underline{B}^{*-1} \underline{A}^*$$

$$\underline{G} = \underline{B}^{*-1}$$

Se puede demostrar que el sistema está desacoplado y es inestable

o, más específicamente, que es, como lo llamó Gilbert³, un *integrador desacoplado*.

La demostración para el presente caso en que $d_1 = d_2 = 2$ y

$$\underline{F} = - \underline{B}^{*-1} \underline{CA}^3 = - (\underline{CA}^2 \underline{B})^{-1} \underline{CA}^3$$

$$\underline{G} = \underline{B}^{*-1} = (\underline{CA}^2 \underline{B})^{-1}$$

se expone a continuación:

La matriz de transferencia $\underline{H}'(s)$ del sistema S' se puede expresar de la siguiente forma:

$$\underline{H}'(s) = \underline{C} \underline{B} \underline{G} \frac{1}{s} + \underline{C} (\underline{A} + \underline{B} \underline{F}) \underline{B} \underline{G} \frac{1}{s^2} + \underline{C} (\underline{A} + \underline{B} \underline{F})^2 \underline{B} \underline{G} \frac{1}{s^3} + \dots$$

Por las propiedades de los números d_i 's es fácil ver que:

$$\underline{C} \underline{B} \underline{G} = \underline{0}$$

$$\underline{C} (\underline{A} + \underline{B} \underline{F}) \underline{B} \underline{G} = \underline{C} \underline{A} \underline{B} \underline{G} + \underline{C} \underline{B} \underline{F} \underline{B} \underline{G} = \underline{0}$$

$$\begin{aligned} \underline{C} (\underline{A} + \underline{B} \underline{F})^2 \underline{B} \underline{G} &= (\underline{C} \underline{A} + \underline{C} \underline{B} \underline{F}) (\underline{A} + \underline{B} \underline{F}) \underline{B} \underline{G} \\ &= \underline{C} \underline{A}^2 \underline{B} \underline{G} = \underline{I} \text{ (matriz identidad)} \end{aligned}$$

También se puede demostrar que para toda $n > 3$ $\underline{C} (\underline{A} + \underline{B} \underline{F})^n \underline{B} \underline{G} = 0$, escribiendo esta expresión de la siguiente forma y considerando asimismo las propiedades de los números d_i 's.

$$\begin{aligned}
\underline{C}(\underline{A}+\underline{BF})^n \underline{BG} &= (\underline{CA}+\underline{CBF}) (\underline{A}+\underline{BF})^{n-1} \underline{BG} \\
&= \underline{CA}(\underline{A}+\underline{BF}) (\underline{A}+\underline{BF})^{n-2} \underline{BG} \\
&= \underline{CA}^2 (\underline{A}+\underline{BF}) (\underline{A}+\underline{BF})^{n-3} \underline{BG} \\
&= (\underline{CA}^3+\underline{CA}^2 \underline{BF}) (\underline{A}+\underline{BF})^{n-3} \underline{BG} \\
\text{pero } \underline{CA}^2 \underline{BF} &= (\underline{CA}^2 \underline{B}) (-\underline{CA}^2 \underline{B})^{-1} \underline{CA}^3
\end{aligned}$$

por lo tanto: $\underline{C}(\underline{A}+\underline{BF})^n \underline{BG} = 0$ para $n \geq 3$

La matriz de transferencia correspondiente es entonces:

$$\underline{H}'(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^3} \end{bmatrix}$$

Lo cual demuestra que el sistema está desacoplado y es inestable, justificándose también con ello el nombre dado de integrador desacoplado.

Escogiendo de esta forma las matrices \underline{F} y \underline{G} para los valores de los parámetros considerados anteriormente, éstas resultan ser:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 20.363 & -7.31 & 7.31 & 13.09 & -2.349 & 2.349 & 3.27 & -1.17 & 1.17 \\ 0 & 9.962 & -10.4 & 0 & 3.202 & 3.343 & 0 & 1.601 & 1.671 \end{bmatrix}$$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 5.73514 \times 10^4 & -2.96696 \times 10^4 \\ -6.15478 \times 10^4 & 4.35105 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

Con el objeto de ilustrar la forma de comportarse de este nuevo sistema, se realizó su simulación de igual forma que con el sistema S acoplado. Las gráficas de dicha simulación se muestran a continuación en las figuras 16 y 17 las cuales confirman que el sistema es inestable, pudiéndose concluir también que su matriz de transferencia $\underline{H}'(s)$ es del tipo:

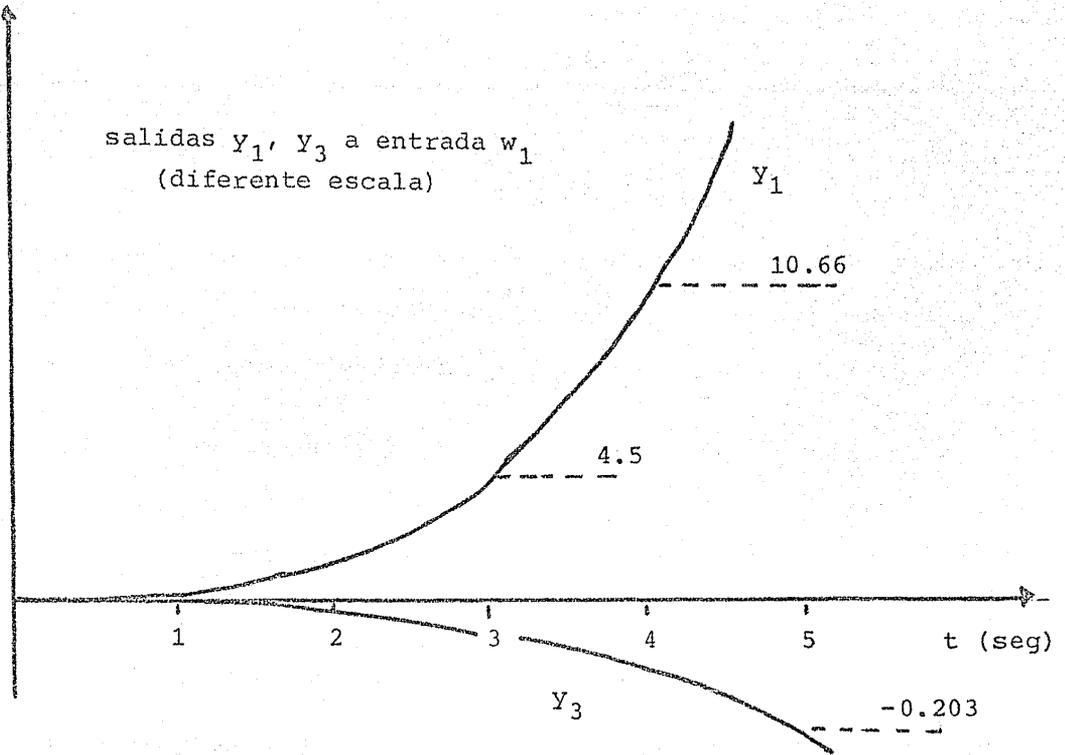


FIGURA 16

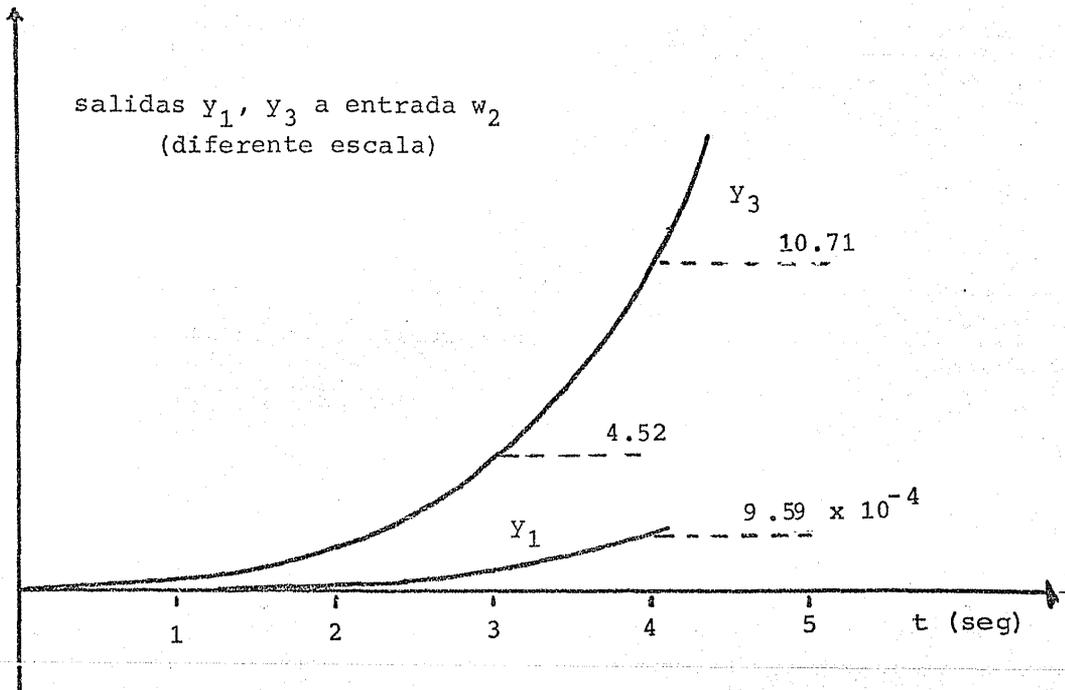


FIGURA 17

$$\underline{H}'(s) = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 1 & \epsilon \\ \eta & 1 \end{bmatrix}$$

en donde ϵ y η son números muy pequeños pero diferentes de cero por lo que su contribución en la salida del sistema va a ser eventualmente considerable por ser éste inestable.

Este sistema es entonces muy mal comportando, siendo necesario encontrar otra matriz \underline{F} de forma que el sistema S' este desacoplado y sea estable.

IX.2 Desacoplamiento estable.

En la sección I se describió una familia de matrices \underline{F} de desacoplamiento propuesta por Falb y Wolovich en la que se tienen ciertos grados de libertad para mover los polos del sistema desacoplado, teniendo acceso con esto a hacerlo estable. Se puede obtener esta familia para el presente caso:

$$\underline{F} = \underline{B}^{*-1} \left[\underline{M}_0 \underline{C} + \underline{M}_1 \underline{CA} + \underline{M}_2 \underline{CA}^2 - \underline{CA}^3 \right]$$

en donde

$$\underline{M}_0 = \text{diag} (-m_{01}, -m_{02})$$

$$\underline{M}_1 = \text{diag} (-m_{11}, -m_{12})$$

$$\underline{M}_2 = \text{diag} (-m_{21}, -m_{22})$$

Los parámetros m_{01} , m_{02} , m_{11} , m_{12} , m_{21} , m_{22} representan los 6 grados de libertad con que se cuenta. Si además, con el propósito de escalar las entradas, se escoge a \underline{G} de la siguiente forma ¹:

$$\underline{G} = \text{diag} (\lambda_1, \lambda_2) \underline{B}^{*-1}$$

en donde λ_1, λ_2 son constantes, se puede escribir para el sistema S' (ver sección I):

$$\ddot{y}_1 + m_{21} \ddot{y}_1 + m_{11} \dot{y}_1 + m_{01} y_1 = \lambda_1 \omega_1$$

$$\ddot{y}_3 + m_{22} \ddot{y}_3 + m_{12} \dot{y}_3 + m_{02} y_3 = \lambda_2 \omega_2$$

es evidente entonces que, haciendo

$$m_{01} < m_{11} m_{21}$$

y

$$m_{02} < m_{12} m_{22}$$

el sistema va a ser estable y desacoplado.

Sin violar la restricción anterior, se pueden escoger valores para las m 's de forma que la matriz \underline{F} sea lo más rala posible. Esto es con el objeto de que se tenga que realimentar un mínimo de estados lo cual hace más fácil y menos costoso el desacoplamiento.

Puede verse entonces que, escogiendo:

$$m_{01} = 35,506.7 \quad m_{02} = 23,904.8$$

$$m_{11} = 22,925.7 \quad m_{12} = 7,683.7$$

$$m_{21} = 36 \quad m_{22} = 36$$

para los datos seleccionados en la sección VII, la matriz \underline{F} resulta:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -7.31 & 14.402 & 0 & -2.349 & 4.629 & 0 & 0 & 0 \\ 21.853 & 9.962 & 0 & 14.048 & 3.202 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si además $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^4$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 5.73514 & -2.96696 \\ -6.15478 & 4.35105 \end{bmatrix}$$

Las gráficas de la simulación del sistema S' con el anterior par de matrices $\underline{F}, \underline{G}$ aparecen en las figuras 18 y 19. Ellas muestran el resultado esperado de que el sistema está desacoplado y es estable simultáneamente.

Se afirma que el sistema está desacoplado, aún cuando se tenga cierta respuesta en las salidas y_1 y y_3 a las entradas u_2 y u_1 respectivamente debido a que tales respuestas han sido reducidas aproximadamente 10 000 veces en comparación con las obtenidas en las gráficas de la simulación del sistema acoplado (figuras 14 y 15); comparando también con esas gráficas éstas últimas, puede verse que la rapidez con que responden y_1 y y_3 u_1 y u_2 respectivamente es prácticamente la misma habiendo diferencias considerables solamente en los factores de amplificación, lo cual no representa mayor problema puesto que pueden ser modificados escalando las entradas.

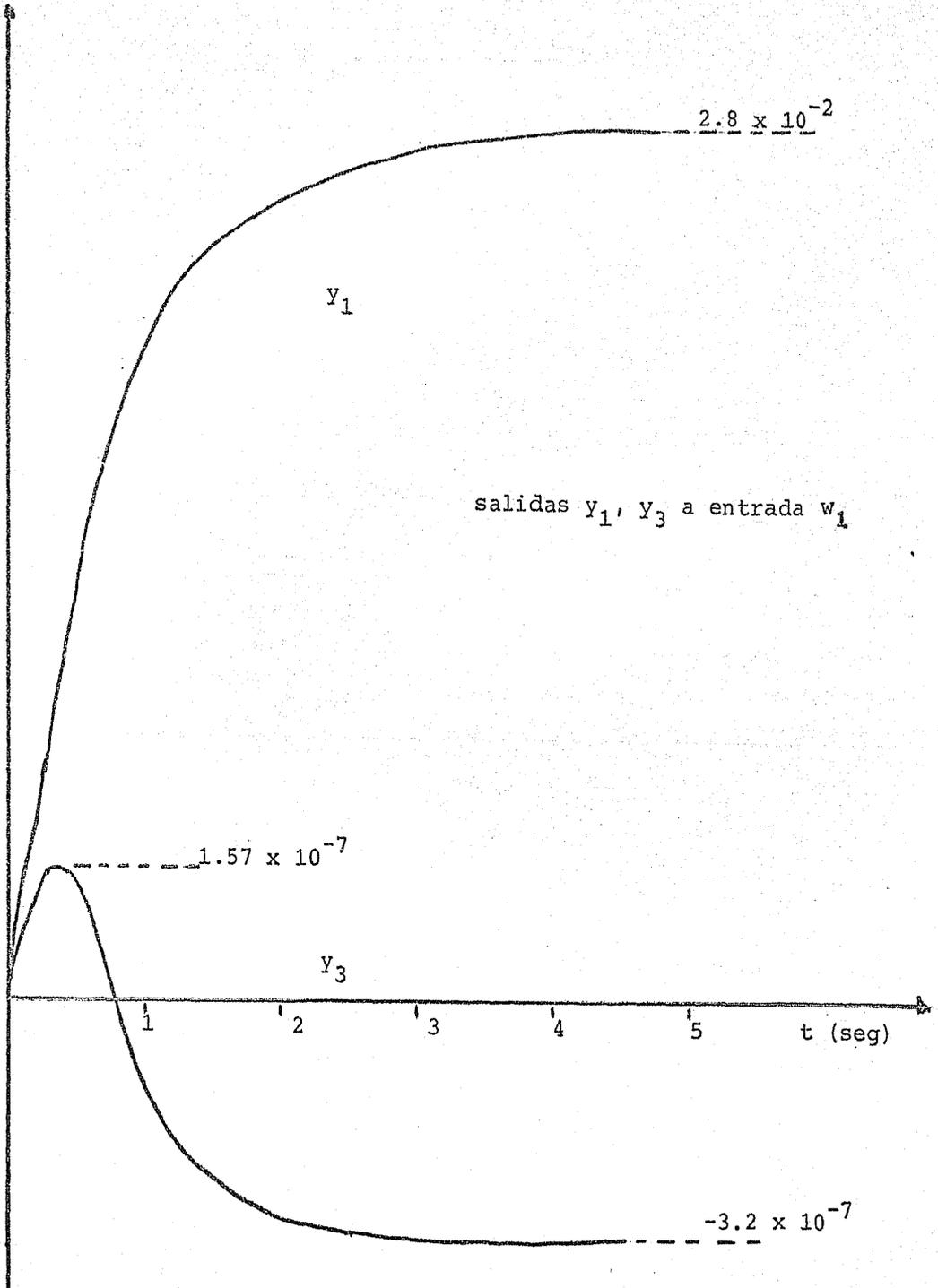


FIGURA 18

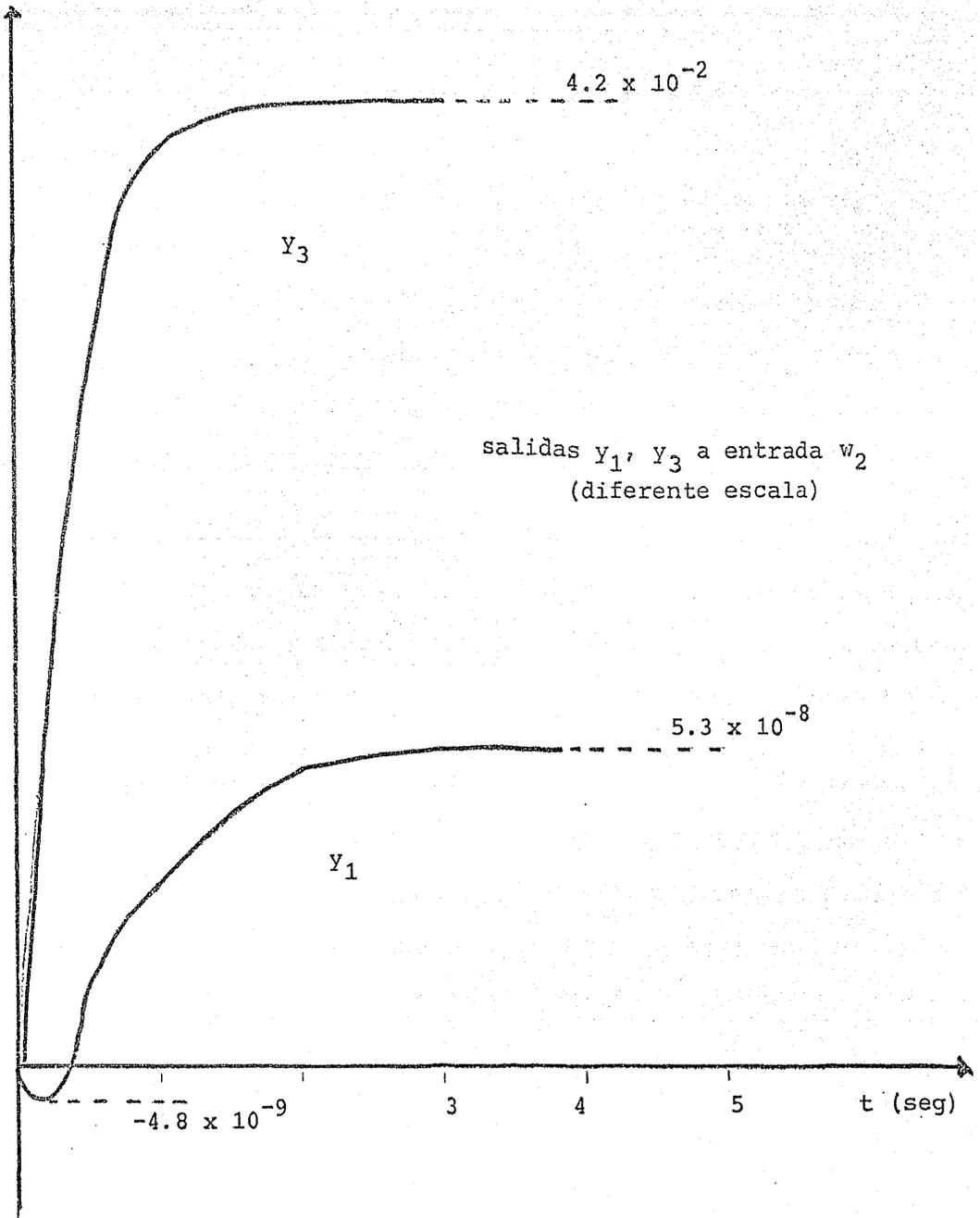


FIGURA 19

X. Interpretación del proceso de desacoplamiento.

Es interesante analizar la manera en que físicamente se tienen que transformar las entradas y realimentar los estados en el sistema con el objeto de que la entrada ω_1 afecte sólo la salida y_1 y la entrada ω_2 a la salida y_3 . Con tal propósito, considérese la figura 20 la cual muestra esquemáticamente el proceso de desacoplamiento para las matrices \underline{F} y \underline{G} consideradas en la sección IX.2 las cuales condujeron a un sistema desacoplado y estable.

Puede observarse en dicha figura que no fué necesario realimentar los estados que ya estaban realimentados (ver modelo del sub sistema actuador hidráulico-masa en la sección III) con excepción del desplazamiento y_2 de la cabeza del actuador 2, por haber tenido que ser realimentado al actuador 3.

Otra cosa importante que mencionar es que la familia de matrices \underline{F} escogida para el desacoplamiento, no permitió evitar la realimentación de las velocidades v_1 , v_2 y v_3 . Representando esto un pequeño problema, pues en general éstas no son fáciles de medir.

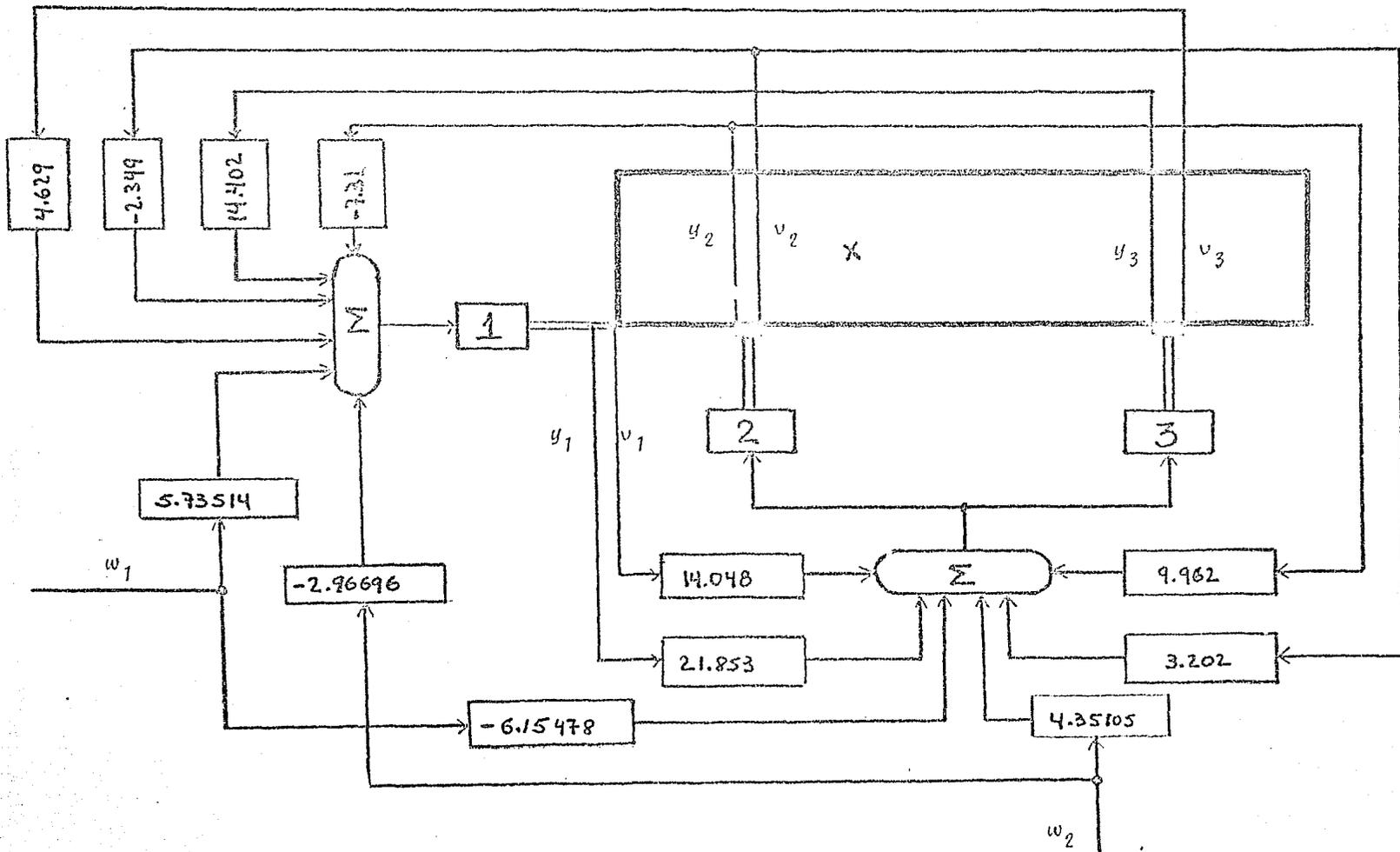


FIGURA 20

XI. Comparación del patrón de polos y ceros del sistema de malla abierta con el correspondiente de malla cerrada.

Con el propósito de visualizar más profundamente las alteraciones en el comportamiento dinámico del sistema, originadas por la realimentación de estados, se muestra continuación el patrón de polos y ceros correspondiente cada una de las dos funciones de transferencia $\frac{y_1(s)}{w_1(s)}$, $\frac{y_3(s)}{w_2(s)}$ del sistema desacoplado (figuras 21 y 22) precedidos del patrón de polos y ceros del sistema de malla abierta en el cual se consideró que $l_1 = 0$ y $l_2 = l_3$, o sea, que estaba desacoplado. Como las áreas A_2 y A_3 de los pistones de los actuadores verticales 2 y 3 son iguales entre sí y dos veces menores que el área A_1 del pistón del actuador horizontal 1, se pueden considerar los dos actuadores verticales reemplazados por uno con área de pistón igual a A_1 , ubicado sobre la línea vertical que contiene al centro de gravedad de la carga. Con esto se tiene entonces que el patrón de polos y ceros correspondientes a las dos funciones de transferencia $\frac{y_1(s)}{u_1(s)}$, $\frac{y_3(s)}{u_2(s)}$ es el mismo. Éste aparece en la figura 20.

Estos patrones muestran que la realimentación de estados trajo como consecuencia la disminución de la frecuencia natural en ambos casos, siendo en el modo vertical más severa dicha disminución. Puede observarse también que en el modo horizontal el factor de amortiguamiento permaneció casi invariable, habiéndose incrementado un tanto en el modo vertical. Es por esta razón que el tiempo de levantamiento es un poco más rápido en este último modo, tal y como lo mostraron las figuras 18 y 19.

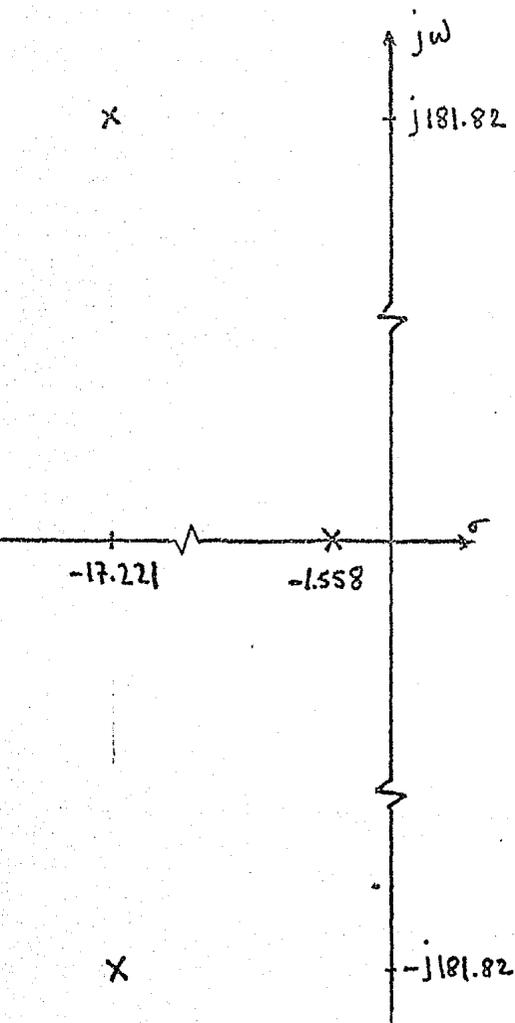


FIGURA 20

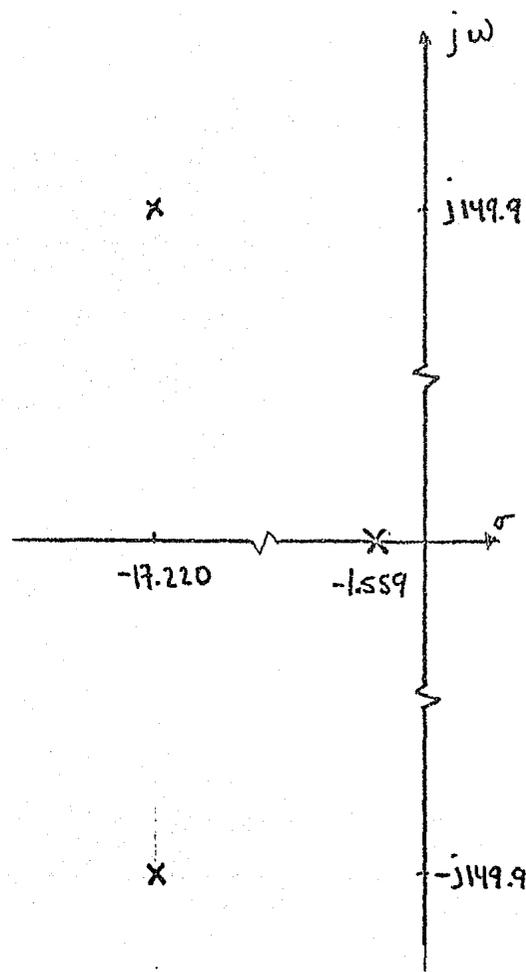


FIGURA 21

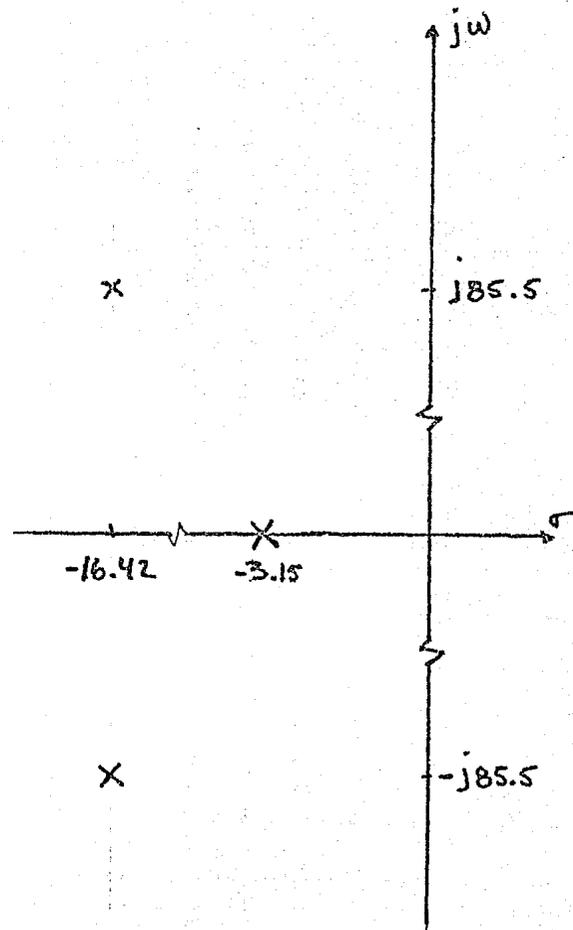


FIGURA 22

XII. ¿Por qué realimentación de estados?

Al cabo de todo lo anteriormente expuesto, se podría preguntar el lector si la mejor manera de desacoplar al sistema es realimentando los estados y transformando la entrada. Se explicará entonces de qué otra forma se hubiera podido desacoplar aquél y las ventajas del método utilizado.

Considérese el diagrama de bloques reducido de alguno de los tres subsistemas actuador hidráulico-masa incorporado al sistema global, como aparece en la figura 23. $F_1(s)$ y $F_2(s)$ son el resultado de la reducción (o absorción de nodos) y f_e es una fuerza equivalente atribuida a los otros dos actuadores.

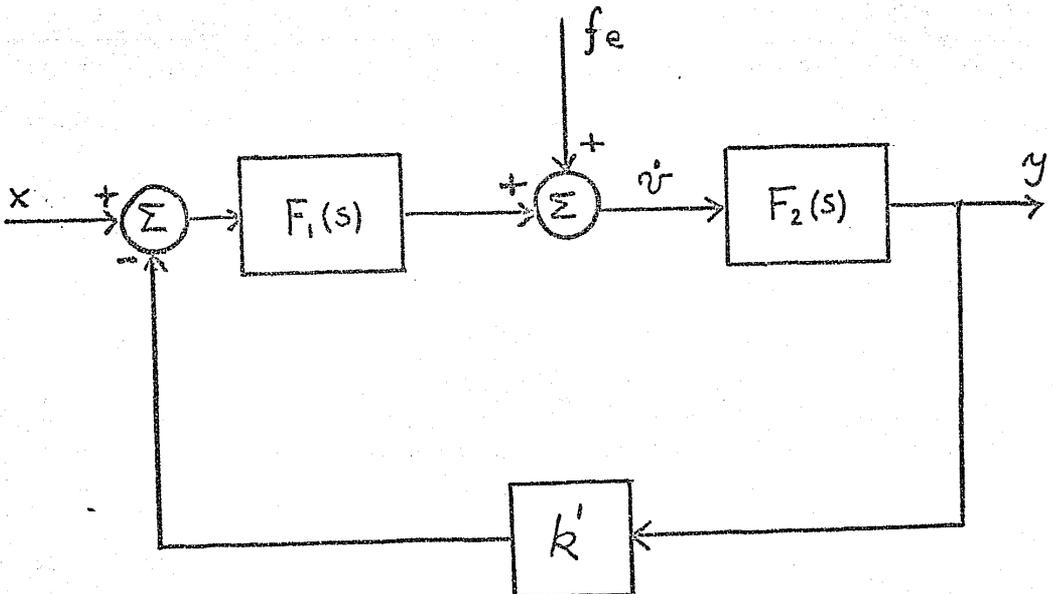


FIGURA 23

Este subsistema, como ya se justificó, responde a dos entradas: una debida al desplazamiento de los carretes de la servoválvula (x) y otra a las presiones en los otros dos actuadores (p_e). Esta última es precisamente la que origina el acoplamiento y cuyo efecto se desea hacer despreciable.

Considérese entonces en ese diagrama de bloques la transmisión de δ_e a y .

$$\frac{y}{\delta_e} = \frac{F_2(s)}{1 + k' F_1(s) F_2(s)}$$

Se desea entonces que y/δ_e sea despreciable y la manera de hacerlo es haciendo crecer k' (que equivale a "endurecer" el actuador) con lo cual el efecto de acoplamiento sería despreciable. Pero si k' llega a ser demasiado grande, el subsistema se vuelve inestable (sección III), siendo ésta una situación también indeseable. Por tanto, esta alternativa para desacoplar el sistema tiene limitaciones muy fuertes. Otra manera de "endurecer" el actuador es haciendo muy grande el área de su pistón de potencia, pero esto eleva su costo. Los inconvenientes de los métodos anteriores, relativos a estabilidad y costo del sistema, conducen al desacoplamiento mediante realimentación de estados y transformación no-singular de la entrada. Esto responde a la pregunta inicialmente planteada en esta sección.

CONCLUSIONES

De todo lo anterior se puede concluir que:

1. Es evidente la comodidad que ofrece el método de *variables de estado* utilizado, tanto en el análisis y solución del problema, como en la interpretación física de la realimentación para desacoplar el sistema. Respecto a éste último punto, es fácil ver que si se hubiera utilizado otro método que involucrara un menor número de ecuaciones diferenciales pero de orden mayor que el primero, las variables por realimentar serían también derivadas de orden superior, obscureciendo esto su interpretación física.

El uso de la computadora digital, para llevar a cabo las simulaciones del sistema, fué facilitado grandemente también por el hecho de haber utilizado el método de variables de estado.

2. Las consideraciones económicas que surjan, relacionadas con el desacoplamiento, pueden ser hechas fácil y directamente de la interpretación física que de éste se tiene.

3. Fué mostrada la aplicación de conceptos puramente teóricos de la Ingeniería de Control al análisis y solución de un problema real.

R E C O M E N D A C I O N E S

- 1a. La familia de matrices \underline{f} que se utilizó para el desacoplamiento del sistema es sólo un subconjunto de toda la clase ϕ de matrices que lo desacoplan. Es por esto que se tuvo una restricción fuerte cuando se intentó evitar la realimentación de velocidades, las cuales, como ya se mencionó no son fáciles de medir.

- 2a. El tiempo de levantamiento de la respuesta a escalón, tanto en el sistema acoplado como en el desacoplado, fueron mayores de lo que en la realidad tienen que ser debido a que las ganancias de realimentación k' y k'' asociados a cada actuador hidráulico fueron muy pequeñas.

- 3a. No fué considerado el efecto no-lineal de saturación presente en cada actuador, hidráulico. Esto es que habrá una presión p_ℓ , una velocidad v_ℓ y un desplazamiento y_ℓ límites en cada actuador, por arriba de los cuales el modelo encontrado del sistema no es válido.

- 4a. El rango de frecuencias de operación para este diseño es bastante menor que el inicialmente mencionado (.1 a 100 Hz.) por la misma razón de haber considerado las ganancias de realimentación k' y k'' demasiado pequeñas.

R E F E R E N C I A S

- 1) P. L. Falb y W. A. Wolovich, "Decoupling in the design of multivariable systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol AC-12, pp. 651-659, dic. 1967.
- 2) M. Guillon, "Hidraulic Servo Systems," analysis and design, pp. 153-158, London Butterworths 1969.
- 3) E. G. Gilbert, "The decoupling of multivariable systems by state feedback," SIAM J. Contr., vol. 7, pp. 50-64, feb. 1969.