UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CATEGORIAS DERIVADAS DE ALGEBRAS DE DIMENSION FINITA.

T E S I S

Que para obtener el Titulo de

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a

CARRILLO PACHECO JESUS

México, D. F. 1990

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INTRODUCCION.

Categorías Derivadas de álgebras de dimensión finita.

Este trabajo tiene como finalidad dar una introducción autocontenida del concepto de categoría derivada y de las aplicaciones que ha encontrado recientemente esta teoría en Representaciones de Algebras..

El concepto de categoría derivada fue sugerido por Grothendieck. El desarrollo axiomático del concepto de categoría triangulada y las localizaciones de ellas (en particular, las categorías derivadas) fue dado en Verdier [V] y casi independientemente por Hartshorne [H$_2$]

En el capítulo I se introduce axiomaticamente el concepto de categoría triangulada. Ejemplos importantes de categorías trianguladas son: la categoría de complejos acotados $K^b(\Omega)$ donde Ω es una categoría abeliana; dada una categoría triangulada C y un sistema multiplicativo S compatible con la triangulación, la localización C_S es también categoría triangulada. El ejemplo más importante es el de categoría derivada $D^b(\Omega)$ que se obtiene como la localización $K^b(\Omega)_S$ donde S es el conjunto de casi-isomorfismos en $K^b(\Omega)$.

Como categoría abeliana Ω podemos elegir la categoría de A-mod de A-módulos izquierdos sobre una k-álgebra de dimensión finita A. Nuestro principal objeto de estudio será la categoría derivada $D^b(A) = D^b(A\text{-mod})$.

Sea A una k-álgebra de dimensión finita básica e indescomponible y supongamos que el campo k es algebraicamente cerrado. En el capítulo II se estudia la categoría derivada $D^b(A)$ desde el punto de vista de la teoría de Representaciones de Algebras. Estas consideraciones fueron recientemente desarrolladas principalmente en el trabajo de Happel [H], [H4].

Se demostrará que la categoría $D^b(A)$ tiene triángulos de Auslander-Reiten. Con ello puede definirse el carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(D^b(A))$ asociado a la categoría derivada $D^b(A)$. Para un álgebra hereditaria A, se describe completamente el carcaj $\Gamma(D^b(A))$.

El punto central del trabajo es la relación de las categorías derivadas $D^b(A)$ con la teoría de tilteo (ver [Ri6]).

El principal resultado muestra que un álgebra de dimensión global finita B tiene una categoría derivada $D^b(B)$ que es equivalente triangular a la categoría derivada $D^b(A)$ de una k-álgebra hereditaria A de tipo Dynkin si y solamente si existe una familia de algebras $A=A_0, A_1, \dots, A_n=B$ y módulos de tilteo ${}_{A_i}M_i$ de forma que $A_{i+1}=End_{A_i}(M_i)$ y la teoría de torsión en A_{i+1}-mod asociada se escinde. Esto a su vez es equivalente a la existencia de una isometría entre grupos de Grothendieck $K_0(A)$ y $K_0(B)$.

El capítulo I está basado en los trabajos de Hartshorne Verdier [V]. El capítulo II en el trabajo de Happel [H], salvo el teorema principal cuyo contenido se prueba parcialmente en los artículos [H3] y [H].

Nuestra aportación consiste en dar pruebas completas autocontenidas de todos los resultados.

Los conceptos elementales de álgebras que usamos pueden consultarse en [G2] ó [Rt]. Sobre álgebra homológica pueden verse [Rt] y sobre teoría de representaciones de álgebras [Ri6] encuentra dividida entre los trabajos [H], [H3] (ver también [H4]).

<u>Teorema</u>: Sea A una k-álgebra de dimensión finita y $\vec{\Delta}$ un carcaj de tipo Dynkin. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $D^b(A)$ es equivalente triangular a $D^b(k\vec{\Delta})$
ii) A es un álgebra Dynkin de tipo $\vec{\Delta}$.
iii) A es una $\vec{\Delta}$-álgebra raíz simplemente conexa
iv) A es un álgebra iterada de tilteo de tipo $\vec{\Delta}$
v) A y $k\vec{\Delta}$ son equivalentes por tilteo.

Los conceptos necesarios para la comprensión del teorema se encuentran también desarrollados en este capítulo.

§ 1. Categorías trianguladas.

1.1 Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva. Sea $T:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ un isomorfismo aditivo. Diremos que T es una <u>translación</u>. El inverso de T se denotará por T^{-}.

Decimos que (X,Y,Z,u,v,w) es una <u>séxtupla</u> en $\mathcal{C}$ si X,Y,Z están en $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ y u,v,w son morfismos $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}TX$ en $\mathcal{C}$.

Un <u>morfismo de séxtuplas</u> de (X,Y,Z,u,v,w) a (X',Y',Z',u',v',w') es una terna (f,g,h) de morfismos de $\mathcal{C}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & TX \arrow[d, "Tf"'] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX'
\end{tikzcd}$$

Una <u>categoría triangulada</u> es una terna $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$, donde:

a) $\mathcal{C}$ es categoría aditiva
b) T es una translación
c) $\mathcal{T}$ es una colección de séxtuplas llamadas <u>triángulos</u> sujetas a las siguientes axiomas:

Un triángulo (X,Y,Z,u,v,w) también se denota por

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "w"'] & \\
X \arrow[rr, "u"] & & Y \arrow[ul, "v"']
\end{tikzcd}$$

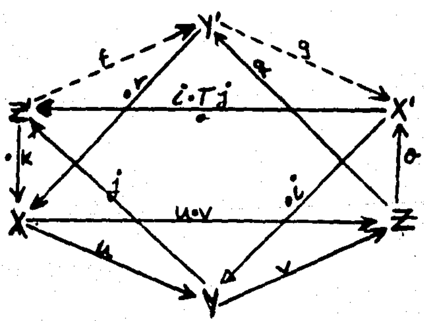
El punto sobre la flecha $Z \overset{\cdot}{\longrightarrow} X$ significa que en realidad termina en TX.

(TR1) Cada séxtupla (X, Y, Z, u, v, w) isomorfa a un triángulo es un triángulo. Cada morfismo $u: X \to Y$ forma parte de un triángulo (X, Y, Z, u, v, w). La séxtupla $(X, X, 0, 1_X, 0, 0)$ es un triángulo.

(TR2) (X, Y, Z, u, v, w) es un triángulo si y sólo si $(Y, Z, TX, v, w, -Tu)$ es un triángulo.

(TR3) Dados dos triángulos (X, Y, Z, u, v, w) y (X', Y', Z', u', v', w') y morfismos $f: X \to X'$ y $g: Y \to Y'$ tales que $u \cdot g = f \cdot u'$, existe un morfismo $h: Z \to Z'$ (no necesariamente único) tal que $(f, g, h): (X, Y, Z, u, v, w) \to (X', Y', Z', u', v', w')$ es un morfismo de triángulos.

(TR4) (Axioma del octaedro).



entonces existen morfismos $f: Z' \to Y'$ y $g: Y' \to X'$ tal que $(Z', Y', X', f, g, i \circ Tj)$ es un triángulo y hacen conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
T^{-1}Y' \arrow[r, "T^{-1}r"] \arrow[d, "T^{-1}j"'] & X \arrow[r, equal] \arrow[d, "u"] & X \arrow[d, "u \circ v"] & & \\
T^{-1}X' \arrow[r, "T^{-1}i"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "j"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "q"] & X' \arrow[r, "i"] \arrow[d] & TY \arrow[d, "Tj"] \\
& Z' \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "k"] & Y' \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, "r"] & X' \arrow[r, "i \circ Tj"] & TZ' \\
& TX \arrow[r, equal] & TX & &
\end{tikzcd}$$

1.1.2 Sean $\mathcal{C} := (\mathcal{C}, T, \mathcal{J})$ y $\mathcal{C}' := (\mathcal{C}', T', \mathcal{J}')$ dos categorías trianguladas. Sea $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un funtor aditivo tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "T"'] & \mathcal{C}' \arrow[d, "T'"] \\
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] & \mathcal{C}'
\end{tikzcd}$$

Se dice que $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ es un <u>∂-funtor</u> si manda triángulos en triángulos (i.e. la séxtupla (FX, FY, FZ, Fu, Fv, Fw) es un triángulo en $\mathcal{C}'$ si (X, Y, Z, u, v, w) es un triángulo en $\mathcal{C}$.)

Un funtor aditivo contravariante $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ es un <u>∂-funtor</u> si $TF = FT^{-1}$ y para cada triángulo (X, Y, Z, u, v, w) la séxtupla $(T^{-1}FX, FZ, FY, Fw, Fv, Fu)$ es un triángulo en $\mathcal{J}'$.

c) Sean (X, Y, Z, u, v, w) y (X', Y', Z', u', v', w') triángulos en $\mathcal{T}$. Sea $(f, g, h) : (X, Y, Z, u, v, w) \longrightarrow (X', Y', Z', u', v', w')$ un morfismo de triángulos. *Entonces* si f y g son isomorfismos, también lo es h.

Demostración

a) Sea (X, Y, Z, u, v, w) un triángulo, probaremos que $u \cdot v = 0$.

Por (TR1) $(X, X, 0, Id_X, 0, 0)$ es un triángulo. Por (TR3) existe un morfismo $h : 0 \longrightarrow Z$ tal que la terna $(Id_X, u, h) : (X, X, 0, Id_X, 0, 0) \longrightarrow (X, Y, Z, u, v, w)$ es morfismo, esto es, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "Id_X"] \arrow[d, "Id_X"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"'] & TX \arrow[d, "Id_{TX}"'] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & TX
\end{tikzcd}$$

Se sigue que $u \cdot v = 0$. *Análogamente*, por (TR2) $(Y, Z, TX, v, w, -Tu)$ es triángulo, luego $v \cdot w = 0$

b) Sea M en $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ y sea (X, Y, Z, u, v, w) un triángulo. Para demostrar que $Hom_{\mathcal{C}}(M, -)$ es un funtor cohomológico, por (TR2) es suficiente demostrar que la sucesión

$$Hom_{\mathcal{C}}(M, X) \xrightarrow{u_*} Hom_{\mathcal{C}}(M, Y) \xrightarrow{v_*} Hom_{\mathcal{C}}(M, Z)$$

es exacta (donde $u_* = Hom_{\mathcal{C}}(M, u)$, etc.)

Por el inciso (a) sabemos que la composición es cero. Por tanto supongamos que $g \in Hom_{\mathcal{C}}(M,Y)$ es tal que $V_*(g) = g \cdot v = 0$. Aplicando el axioma (TR3) y el (TR2) a los triángulos $(M, M, 0, Id_M, 0, 0)$ y (X, Y, Z, u, v, w) y los morfismos $g: M \to Y$ y $0: 0 \to Z$; concluimos que existe $f: M \to X$ tal que $f \cdot u = g$.

Una prueba similar demuestra que $Hom_{\mathcal{C}}(-,M)$ es un funtor cohomológico

c) Sean (X, Y, Z, u, v, w) y (X', Y', Z', u', v', w') triángulos y supongamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & TX \arrow[d, "Tf"'] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX'
\end{tikzcd}$$

Aplicando el funtor cohomológico $Hom_{\mathcal{C}}(Z',-)$ al diagrama anterior obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{C}}(Z',X) \arrow[r, "u_*"] \arrow[d, "f_*"] & Hom_{\mathcal{C}}(Z',Y) \arrow[r, "v_*"] \arrow[d, "g_*"] & Hom_{\mathcal{C}}(Z',Z) \arrow[r, "w_*"] \arrow[d, "h_*"] & Hom_{\mathcal{C}}(Z',TX) \arrow[r, "(Tu)_*"] \arrow[d, "(Tf)_*"] & Hom_{\mathcal{C}}(Z',TY) \arrow[d, "(Tg)_*"] \\
Hom_{\mathcal{C}}(Z',X') \arrow[r, "u'_*"] & Hom_{\mathcal{C}}(Z',Y') \arrow[r, "v'_*"] & Hom_{\mathcal{C}}(Z',Z') \arrow[r, "w'_*"] & Hom_{\mathcal{C}}(Z',TX') \arrow[r, "(Tu')_*"] & Hom_{\mathcal{C}}(Z',TY')
\end{tikzcd}$$

(donde $f_* := Hom_{\mathcal{C}}(Z',f)$, etc). Ahora, dado que f y g son isomorfismos en $\mathcal{C}$, se sigue que f_*, g_*, $(Tf)_*$, $(Tg)_*$ son isomorfismos de grupos abelianos. De aquí, por el lema del cinco h_* es isomorfismo; concluimos que existe $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(Z',Z)$ tal que $h_*(\varphi) = \varphi\circ h = Id_{Z'}$. Similarmente, usando el funtor cohomológico $Hom_{\mathcal{C}}(-,Z')$, encontramos que existe un $\psi \in Hom_{\mathcal{C}}(Z,Z')$ tal que $h\circ\psi = Id_Z$. Se sigue que h es un isomorfismo.

1.3 Sea $\mathcal{C}=(\mathcal{C},T,\mathcal{T})$ una categoría triangulada. Se dice que $\mathcal{D}=(\mathcal{D},T',\mathcal{T}')$ es <u>subcategoría triangulada</u> de $\mathcal{C}$ si $\mathcal{D}$ es categoría triangulada y el funtor inclusión $i:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ es un ∂-funtor.

<u>Observación</u>: Sea $\mathcal{C}=(\mathcal{C},T,\mathcal{T})$ una categoría triangulada y $\mathcal{D}$ una subcategoría aditiva de $\mathcal{C}$ tal que:

1) $\mathcal{D}$ es subcategoría plena de $\mathcal{C}$;
2) $\mathcal{D}$ es T-<u>invariante</u> (i.e. $T\mathcal{D}=\mathcal{D}$);
3) cada morfismo $u:X\to Y$ en $\mathcal{D}$ forma parte de un triángulo $(X,Y,Z,u,v,w)\in\mathcal{T}$ con $Z\in Ob\,\mathcal{D}$.

Entonces $\mathcal{D}$ hereda de $\mathcal{C}$ una estructura $(\mathcal{D},T',\mathcal{T}')$ de subcategoría triangulada donde: T' es la restricción de T a $\mathcal{D}$ y $\mathcal{T}'=\{(X,Y,Z,u,v,w)\in\mathcal{T} \mid X,Y,Z\in\mathcal{D}\}$.

§2 K(A) es categoría triangulada.

Sea A una categoría aditiva. En esta sección construiremos la categoría de complejos módulo homotopía $K(A)$ y las subcategorías plenas de $K(A)$, $K^+(A)$, $K^-(A)$ y $K^b(A)$ que juegan un papel importante en la construcción de las categorías derivadas.

2.1 Sea A una categoría aditiva.

Un <u>complejo</u> $X^\cdot := (X^n, \partial_X^n)$ con $n \in \mathbb{Z}$ es una colección de objetos $\{X^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de A, y una colección de morfismos $\{\partial_X^n : X^n \longrightarrow X^{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $\partial_X^n \circ \partial_X^{n+1} = 0$ para todo $n\in\mathbb{Z}$.

Los morfismos ∂_X^n se denominan <u>operadores frontera</u>. Un complejo también lo representamos por diagramas de la siguiente forma:

$$X^\cdot : \cdots \longrightarrow X^m \xrightarrow{\partial_X^m} X^{m+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{\partial_X^{n-1}} X^n \longrightarrow \cdots$$

Un <u>morfismo</u> $f : X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot$ entre complejos $X^\cdot$ y $Y^\cdot$ es una familia $f := \{f^n : X^n \longrightarrow Y^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de morfismos en A tal que $\partial_X^n \circ f^{n+1} = f^n \circ \partial_Y^n$ para todo $n\in\mathbb{Z}$.

La colección de complejos y morfismos de complejos forman una categoría aditiva que denotamos por $C(A)$. Denotamos por $Hom_A(X^\cdot, Y^\cdot)$ la colección de morfismos de $X^\cdot$ a $Y^\cdot$ en $C(A)$.

Dos morfismos $f, g : X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot$ en $C(A)$, son <u>homotópicos</u> si existe una colección de morfismos

$$\{k^n : X^n \longrightarrow Y^{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

tal que satisfacen las siguientes relaciones:

$$f^n - g^n = k^n \circ \partial_Y^{n-1} + \partial_X^n \circ k^{n+1} \quad \text{para todo } n\in\mathbb{Z}.$$

cual es su inverso. *El funtor T será nuestra traslación en $K(A)$. T^i denotará la composición de i-veces el funtor T.* T se restringe de manera obvia a automorfismos $T: K^+(A) \longrightarrow K^+(A)$, $T: K^-(A) \longrightarrow K^-(A)$ y $T: K^b(A) \longrightarrow K^b(A)$.

2.1.1 Dado un morfismo $u: X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot$ en $C(A)$ se define el <u>cono</u> de u como el complejo

$$C^\cdot(u) = (C^\cdot(u)^p, \partial^p_{C^\cdot(u)})$$

donde

$$C^\cdot(u)^p := (TX^\cdot)^p \oplus Y^p$$

y

$$\partial^p_{C(u)} := \begin{pmatrix} (T\partial_X)^p & (Tu)^p \\ 0 & \partial^p_Y \end{pmatrix}$$

Dado un morfismo $u: X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot$ en $C(A)$ y su cono existen morfismos $V_u: Y^\cdot \longrightarrow C^\cdot(u)$ y $W_u: C^\cdot(u) \longrightarrow TX^\cdot$ dados por $V_u(b) = (0, b)$ y $W_u(a,b) = a$ respectivamente.

2.1.2 Las sextuplas isomorfas en $K(A)$ a *sextuplas* de la forma $(X^\cdot, Y^\cdot, C^\cdot(u), u, V_u, W_u)$ (con u, V_u, W_u definidos como antes) serán nuestros triángulos (en $C^\cdot(A)$) Denotemos por Δu a los triángulos $(X^\cdot, Y^\cdot, C^\cdot(u), u, v, w)$. Denotemos este conjunto por $J_{K(A)}$ o simplemente por J cuando no exista *ambigüedad.*

<u>Teorema</u> : $(K(A), T, J_{K(A)})$ es una categoría triangulada.

La demostración nos ocupa el resto de esta sección.

2.2 Sea $Z^\cdot \in C(A)$ que satisfaga $Z^i=0$ para $i<0$. Denotemos por $Z'^\cdot$ el <u>complejo truncado</u> asociado a $Z^\cdot$ que se define por $Z'^i=0$ para $i\leq 0$ y $Z'^i=Z^i$ para $i>0$ y $\partial^i_{Z'^\cdot}=\partial^i_{Z^\cdot}$ para $i\geq 1$.

2.2.1 *Existe una inmersión plana de A en $C(A)$* que asigna a cada objeto X un complejo concentrado a nivel cero y a cada morfismo $f\in Hom_A(X,Y)$ en un morfismo $\bar f$ en $C(A)$ tal que $\bar f^i=0$ si $i\neq 0$ y $\bar f^0=f$ (que también denotamos X y f respectivamente). **Esta inmersión la denotamos por i_A.** Luego, un complejo concentrado a nivel i es de la forma T^iX con X en A. Un complejo concentrado a nivel cero también lo denotamos por $^\circ X^\cdot$.

2.2.2 Sea $X^\cdot=(X^n, \partial^n_X)_{n\in\mathbb{Z}}\in C(A)$ con $X^n=0$ si $n<0$ y $X^0\neq 0$. Definimos el <u>morfismo inducido por $\partial^0_{X^\cdot}$</u>, como el morfismo de complejos

$$\overline{\partial^0_{X^\cdot}} : T^{-0}X^\cdot \longrightarrow X'^\cdot \quad \text{tal que}$$
$$(\overline{\partial^0_{X^\cdot}})^n=0 \quad \text{si } n\neq 1$$
$$\text{y} \quad (\overline{\partial^0_{X^\cdot}})^n=\partial^0_{X^\cdot} \quad \text{si } n=1$$

Al triángulo $(T^{-0}X^\cdot, X'^\cdot, C^\cdot(\overline{\partial^0_X}), \overline{\partial_X}, V_{\overline{\partial_X}}, W_{\overline{\partial_X}})$ lo llamaremos <u>triángulo inducido por ∂_X</u>.

<u>Lema</u>: Los complejos $C^\cdot(\overline{\partial^0_{Z^\cdot}})$ y $Z^\cdot$ son isomorfos.

<u>Demostración</u>

Consideramos el siguiente isomorfismo de complejos.

Sea $(a,b)\in X^{i+1}\oplus X^{i}$. Entonces

$$(a,b)\begin{pmatrix}-\partial_X^{i+1} & Id_{X^{i+1}}\\ 0 & \partial_X^{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ Id_X^{i+1} & 0\end{pmatrix}=(-\partial_X^{i+1}(a),\ a+\partial_X^{i}(b))\begin{pmatrix}0 & 0\\ Id_{X^{i+1}} & 0\end{pmatrix}=$$

$$=(a+\partial_X^{i}(b),\ 0) \quad \text{y}$$

$$(a,b)\begin{pmatrix}0 & 0\\ Id_X^{i} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\partial_X^{i} & Id_{X^{i}}\\ 0 & \partial_X^{i-1}\end{pmatrix}=(b,0)\begin{pmatrix}-\partial_X^{i} & Id_{X^{i}}\\ 0 & \partial_X^{i-1}\end{pmatrix}=(-\partial_X^{i}(b),\ b)$$

Por tanto $Id_{C^\cdot(Id_{X^\cdot})}\sim 0$.

2.3.1 *En esta sección demostramos la proposición 2.3.* Para lograr esto probaremos que las sextuplas, $(X^\cdot, X^\cdot, 0, Id_{X^\cdot}, 0, 0)$ y $(X^\cdot, X^\cdot, C^\cdot(Id_{X^\cdot}), Id_{X^\cdot}, V_{Id_{X^\cdot}}, W_{Id_{X^\cdot}})$ son isomorfas en $k(A)$.

Afirmamos que la clase de la terna

$$(Id_{X^\cdot}, Id_{X^\cdot}, 0) : (X^\cdot, X^\cdot, 0, Id_{X^\cdot}, 0, 0)\longrightarrow(X^\cdot, X^\cdot, C^\cdot(Id_{X^\cdot}), Id_{X^\cdot}, V_{Id_{X^\cdot}}, W_{Id_{X^\cdot}})$$

es un isomorfismo de sextuplas en $k(A)$.

Como antes vimos $Id_{C^\cdot(Id_{X^\cdot})}\sim 0$, luego
$V_{Id_X} = V_{Id_X}\circ Id_{C^\cdot(Id_X)} \sim V_{Id_X}\circ C \equiv 0$.

De lo que se sigue que la terna $(Id_X; Id_{X^\bullet}, 0)$ es un morfismo de séxtuplas.

Similarmente la clase de la terna

$$(Id_{X^\bullet}, Id_{X^\bullet}, 0) : (X^\bullet, X^\bullet, C^\bullet(Id_{X^\bullet}), Id_{X^\bullet}; V'_{Id_X}, W_{Id_X}) \longrightarrow (X^\bullet; X^\bullet; 0, Id_{X^\bullet}, 0, 0)$$

es un morfismo de séxtuplas pues el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "Id_{X^\bullet}"] \arrow[d, "Id_{X^\bullet}"'] & X^\bullet \arrow[r, "V'_{Id_{X^\bullet}}"] \arrow[d, "Id_{X^\bullet}"'] & C^\bullet(Id_{X^\bullet}) \arrow[r, "W_{Id_{X^\bullet}}"] \arrow[d] & TX^\bullet \arrow[d, "TId_{X^\bullet}"'] \\
X^\bullet \arrow[r, "Id_{X^\bullet}"] & X^\bullet \arrow[r] & 0 \arrow[r] & TX^\bullet
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Claramente el morfismo de séxtuplas $(Id_X; Id_X; 0)$ es inverso del morfismo $(Id_{X^\bullet}; Id_{X^\bullet}; 0)$, entonces la séxtupla $(X^\bullet, X^\bullet; 0, Id_{X^\bullet}; 0, 0)$ es isomorfa al triángulo $(X^\bullet, X^\bullet, C^\bullet(Id_{X^\bullet}), Id_{X^\bullet}, V_{Id_{X^\bullet}}, W_{Id_{X^\bullet}})$ y así también la séxtupla $(X^\bullet, X^\bullet, 0, Id_{X^\bullet}, 0, 0)$ es triángulo.

2.4 Demostración de que TR2) se satisfacen en $K(A)$.

2.4.1 Sea $(X^\bullet, Y^\bullet, Z^\bullet, u^\bullet, v^\bullet, w^\bullet)$ un triángulo en $K(A)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $Z^\bullet = C^\bullet(u^\bullet)$ $v = V_{u^\bullet}$, $w = W_{u^\bullet}$, y recordamos que V_u, W_u están definidos en 2.1.1.

En esta sección denotamos a V_u por α. Por demostrar que $\Delta' = (Y^\bullet, C^\bullet(u), TX^\bullet, \alpha', W_u, -Tu)$ es triángulo.

Veremos que $\Delta' \cong \Delta_\alpha$.

Consideremos los morfismos de complejos

$$\begin{aligned}
\psi^\cdot : C^\cdot(\alpha) &\longrightarrow TX^\cdot \\
\psi^i : Y^{i+1} \oplus (X^{i+1} \oplus Y^i) &\longrightarrow X^{i+1} \\
(b,(a,b')) &\longmapsto a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi^\cdot : TX^\cdot &\longrightarrow C^\cdot(\alpha) \\
\varphi^i : X^{i+1} &\longrightarrow Y^{i+1} \oplus (X^{i+1} \oplus Y^i) \\
a &\longmapsto (-u^{i+1}(a),(a,0)).
\end{aligned}$$

y los diagramas siguientes

$$\begin{tikzcd}
Y^\cdot \arrow[r, "\alpha^\cdot"] \arrow[d, "Id_{Y^\cdot}"'] & C^\cdot(u) \arrow[r, "V_\alpha^\cdot"] \arrow[d, "Id_{C^\cdot(u)}"'] & C^\cdot(\alpha) \arrow[r, "W_\alpha^\cdot"] \arrow[d, "\psi^\cdot"'] & TY^\cdot \arrow[d, "TId_{Y^\cdot}"'] \\
Y^\cdot \arrow[r, "\alpha^\cdot"] & C^\cdot(u) \arrow[r, "W_u^\cdot"] & TX^\cdot \arrow[r, "-Tu^\cdot"] & TY^\cdot
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Y^\cdot \arrow[r, "\alpha^\cdot"] \arrow[d, "Id_{Y^\cdot}"'] & C^\cdot(u) \arrow[r, "W_u^\cdot"] \arrow[d, "Id_{C^\cdot(u)}"'] & TX^\cdot \arrow[r, "-Tu^\cdot"] \arrow[d, "\varphi^\cdot"'] & TY^\cdot \arrow[d, "TId_{Y^\cdot}"'] \\
Y^\cdot \arrow[r, "\alpha^\cdot"] & C^\cdot(u) \arrow[r, "V_\alpha^\cdot"] & C^\cdot(\alpha) \arrow[r, "W_\alpha^\cdot"] & TY^\cdot
\end{tikzcd}$$

por construcción $V_\alpha^\cdot \psi^\cdot = W_u^\cdot$ y $-Tu^\cdot = \varphi^\cdot W_\alpha^\cdot$.

Las siguientes colecciones de morfismos

$\Sigma_1 := \{\Sigma_1^i : Y^{i+1} \oplus (X^{i+1} \oplus Y^i) \longrightarrow Y^i\}$ con $\Sigma_1^i(a,(b,c)) = c$

$\Sigma_2 := \{\Sigma_2^i : X^{i+1} \oplus Y^i \longrightarrow Y^i \oplus (X^i \oplus Y^{i-1})\}$ con $\Sigma_2^i(a,b) = (b,(0,0))$

son tales que $W_\alpha^i - \overline{\psi}^i \cdot (-T(u^i)) = \partial_{C(\alpha)}^i \cdot \Sigma_1^{i+1} + \Sigma_1^i \cdot \partial_Y^{i-1}$ y

$V_\alpha^i - W_u^i \varphi^i = \partial_{C(u)}^i \cdot \Sigma_2^{i+1} + \Sigma_2^i \partial_{C'(\alpha)}^{i-1}$

es decir $W_\alpha = \psi \cdot (-Tu^\cdot)$ y $V_\alpha = W_u \cdot \varphi$ en $K(A)$.

Estas consideraciones prueban que las ternas.

$(Id_{Y^\cdot}, Id_{C(u)}, \psi) : (Y^\cdot; C(u), C(\alpha), \alpha; V_\alpha^\cdot, W_\alpha^\cdot) \longrightarrow (Y^\cdot; C(u), TX^\cdot; \alpha; W_u, -Tu)$.

$(Id_{Y^\cdot}, Id_{C(u)}, \varphi) : (Y^\cdot; C(u), TX^\cdot; \alpha, W_u, -Tu) \longrightarrow (Y^\cdot; C(u), C(\alpha), \alpha, V_\alpha, W_\alpha)$.

son morfismos de sextuplas.

Además por construcción

$(Id_{Y^\cdot}, Id_{C(u)}, \varphi) \cdot (Id_{Y^\cdot}, Id_{C(u)}, \psi) = (Id_{Y^\cdot}, Id_{C(u)}, Id_{TX})$.

Se afirma que $\psi \cdot \varphi = Id_{C(\alpha)}$

Para probar esto sea Σ la colección de morfismos

$\Sigma := \{\Sigma^i : Y^{i+1} \oplus (X^{i+1} \oplus Y^i) \longrightarrow Y^i \oplus (X^i \oplus Y^{i-1})\}$ con

$\Sigma^i : (b,(a,b')) = (b',(0,0))$.. La cual satisface que

$\psi^i \cdot \varphi^i - Id_{C'(\alpha)} = \Sigma^i \cdot \partial_{C(\alpha)}^{i-1} + \partial_{C(\alpha)}^i \Sigma^{i+1}$

lo que prueba que

$(Id_{Y^\cdot}, Id_{C(u)}, \psi) \cdot (Id_{Y^\cdot}, Id_{C(u)}, \varphi) = (Id_{Y^\cdot}, Id_{C(u)}, Id_{C(\alpha)})$

Así hemos probado que $(Id_{Y^\cdot}, Id_{C^\cdot(u)}, \Psi^\cdot)$ es un isomorfismo de sextuplas y en consecuencia $(Y, C^\cdot(u), TX^\cdot, \alpha^\cdot, W_u, -Tu^\cdot)$ es triángulo.

2.4.2. Para demostrar el converso se procede de manera similar: Si $\Delta = (X^\cdot, Y^\cdot, Z^\cdot, u, v, w) \in \mathcal{T}_{K(A)}$ entonces se prueba que la sextupla (TZ, X, Y, Tw, u, v) es isomorfa a $\Delta_{Tw} \in \mathcal{T}_{K(A)}$ (ver notación en (2.1.2)). $\square$.

2.5 <u>En esta sección demostraremos que $K(A)$ satisface el axioma (TR3).</u>

Sean $(X^\cdot, Y^\cdot, Z^\cdot, u^\cdot, v^\cdot, w^\cdot)$ y $(X'^\cdot, Y'^\cdot, Z'^\cdot, u'^\cdot, v'^\cdot, w'^\cdot)$ dos triángulos y sean $f^\cdot: X \to X'$ y $g^\cdot: Y \to Y'$ morfismos tales que hacen conmutar el cuadro ①

$$\begin{tikzcd}
X^\cdot \arrow[r, "u^\cdot"] \arrow[d, "f^\cdot"'] \arrow[dr, phantom, "①"] & Y^\cdot \arrow[r, "v^\cdot"] \arrow[d, "g^\cdot"] & Z^\cdot \arrow[r, "w^\cdot"] \arrow[d, dashed, "h"] & TX^\cdot \arrow[d, "Tf^\cdot"] \\
X'^\cdot \arrow[r, "u'^\cdot"] & Y'^\cdot \arrow[r, "v'^\cdot"] & Z'^\cdot \arrow[r, "w'^\cdot"] & TX'^\cdot
\end{tikzcd}$$

Probaremos que existe $h: Z \to Z'^\cdot$ morfismo tal que la terna $(f^\cdot, g^\cdot, h^\cdot): (X^\cdot, Y^\cdot, Z^\cdot, u^\cdot, v^\cdot, w^\cdot) \to (X'^\cdot, Y'^\cdot, Z'^\cdot, u'^\cdot, v'^\cdot, w'^\cdot)$ es un morfismo de triángulos.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $Z = C(u)$ y $Z'^\cdot = C^\cdot(u'^\cdot)$ y que $V^\cdot = V_{u^\cdot}$, $V'^\cdot = V_{u'^\cdot}$, $W^\cdot = W_{u^\cdot}$, $W'^\cdot = W_{u'^\cdot}$ son como en la sección 2.1.1.

Sea $h^\cdot: C^\cdot(u^\cdot) \to C^\cdot(u'^\cdot)$ tal que
$$h^i(a, b) = ((Tf^i)(a), g^i(b)) \text{ para } (a, b) \in C^i(u^\cdot)$$

h es el morfismo buscado como se muestra enseguida.

Sea $b \in Y$

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, mapsto, "V_u"] \arrow[d, mapsto, "g^i"'] & (0,b) \arrow[d, mapsto, "h^i"] \\
g(b) \arrow[r, mapsto, "V_{u'}"] & (0, g(b))
\end{tikzcd}$$

lo cual prueba que $V_u \cdot h = g \cdot V_{u'}$

Análogamente sea $(a,b) \in C'(u)$ entonces

$$\begin{tikzcd}
(a,b) \arrow[r, mapsto, "W_u"] \arrow[d, mapsto, "h^i"'] & a \arrow[d, mapsto, "Tf^i"] \\
(Tf^i(a), g^i(b)) \arrow[r, mapsto, "W_{u'}"] & Tf^i(a)
\end{tikzcd}$$

conmuta y así $W_u \cdot Tf = h \cdot W_{u'}$. Y ésto demuestra nuestra afirmación. $\square$

2.6 (TR4) se satisface en $K(A)$

Suponga dados los triángulos siguientes

(X', Y', Z'', u, j, k)

$(Y', Z', X'', y, \sigma, i)$ y

Mostraremos que $\Delta \cong \Delta_f$.

Para esto consideramos los morfismos de complejos

$$\alpha : C^{\cdot}(f) \longrightarrow C^{\cdot}(g)$$
$$\alpha^i : (X^{i+2} \oplus Y^{i+1}) \oplus (X^{i+1} \oplus Z^i) \longrightarrow Y^{i+1} \oplus Z^i$$
$$((a,b),(a',c)) \longmapsto (u^{i+1}(a')+b,\ c)$$

$$\beta : C^{\cdot}(g) \longrightarrow C^{\cdot}(f)$$
$$\beta^i : Y^{i+1} \oplus Z^i \longrightarrow (X^{i+2} \oplus Y^{i+1}) \oplus (X^{i+1} \oplus Z^i)$$
$$(b,c) \longmapsto ((0,b),(0,c))$$

y los diagramas siguientes

$$\begin{tikzcd}
C^{\cdot}(u) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id_{C^{\cdot}(u)}"'] & C^{\cdot}(u\cdot g) \arrow[r, "V_f"] \arrow[d, "Id_{C^{\cdot}(u\cdot g)}"'] & C^{\cdot}(f) \arrow[r, "W_f"] \arrow[d, "\alpha"'] & TC^{\cdot}(u) \arrow[d, "TId_{C^{\cdot}(u)}"'] \\
C^{\cdot}(u) \arrow[r, "f"] & C^{\cdot}(u\cdot g) \arrow[r, "g"] & C^{\cdot}(g) \arrow[r, "i\cdot T(j)"] & TC^{\cdot}(u)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C^{\cdot}(u) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id_{C^{\cdot}(u)}"'] & C^{\cdot}(u\cdot g) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "Id_{C^{\cdot}(u\cdot g)}"'] & C^{\cdot}(g) \arrow[r, "i\cdot T(j)"] \arrow[d, "\beta"'] & TC^{\cdot}(u) \arrow[d, "TId_{C^{\cdot}(u)}"'] \\
C^{\cdot}(u) \arrow[r, "f"] & C^{\cdot}(u\cdot g) \arrow[r, "V_f"] & C^{\cdot}(f) \arrow[r, "W_f"] & TC^{\cdot}(u)
\end{tikzcd}$$

observe que $g = V_f \cdot \alpha$ y $\beta \cdot W_f = i \cdot (Tj)$

las colecciones de morfismos

$$\Sigma := \{\Sigma^i : (X^{i+2} \oplus Y^{i+1}) \oplus (X^{i+1} \oplus Z^i) \longrightarrow X^{i+1} \oplus Y^i\} \quad \text{con}$$

$$\Sigma^i((a,b),(a',c)) = (a',0)$$

$$\Sigma_0 := \{\Sigma_0^i : X^{i+1} \oplus Z^i \longrightarrow (X^i \oplus Y^i) \oplus (X^i \oplus Z^{i-1})\} \quad \text{con}$$

$$\Sigma_0^i(a,c) = ((a,0),(0,0)).$$

Son tales que

$$\alpha^i \cdot (i^i \cdot T(j^i)) - W_f^i = \partial^i_{C'(f)} \cdot \Sigma^{i+1} + \Sigma^i \cdot \partial^{i-1}_{TC(u)} \quad \text{y}$$

$$V_f^i - g^i \cdot \beta^i = \Sigma_0^i \cdot \partial^{i-1}_{C(f)} + \partial^i_{C'(u \cdot y)} \cdot \Sigma_0^{i+1}$$

lo que demuestra que las ternas

$(Id_{C(u)}, Id_{C'(u\cdot y)}, \beta) : (C(u), C'(u\cdot y), C'(y), f, g, i\cdot(Tj)) \longrightarrow (C(u), C'(u\cdot y), C'(f),$
$f, V_f, W_f)$ y

$(Id_{C(u)}, Id_{C'(u\cdot y)}, \alpha) : (C(u), C'(u\cdot y), C'(f), f, V_f, W_f) \longrightarrow (C(u), C'(u\cdot y), C'(y),$
$f, g, i\cdot(Tj))$

son morfismos de sextuplas.

Es claro que $(Id_{C(u)}, Id_{C'(u\cdot y)}, \beta)\cdot(Id_{C(u)}, Id_{C'(u\cdot y)}, \alpha) =$
$= (Id_{C(u)}, Id_{C'(u\cdot y)}, Id_{C'(y)})$.

Saa

$$\Xi_1 := \{\Xi_1^i : (X^{i+2} \oplus Y^{i+1}) \oplus (X^{i+1} \oplus Z^i) \longrightarrow (X^{i+1} \oplus Y^i) \oplus (X^i \oplus Z^{i-1})\}$$

la colacción da morfismos tal qua

$$\Xi_1^i((a,b),(a',c)) = ((a',0),(0,0)).$$

satisfaca qua

$$\alpha^i \cdot \beta^i - Id_{C^\cdot(f)} = \Xi_1^i \cdot \partial^{i-1}_{C^\cdot(f)} + \partial^i_{C^\cdot(f)} \Xi_1^{i+1}$$

lo qua pruaba qua

$$(Id_{C^\cdot(u)}, Id_{C^\cdot(u\cdot g)}, \alpha) \cdot (Id_{C^\cdot(u)}, Id_{C^\cdot(u\cdot g)}, \beta) = (Id_{C^\cdot(u)}, Id_{C^\cdot(u\cdot g)}, Id_{C^\cdot(f)})$$

luago $(Id_{C^\cdot(u)}, Id_{C^\cdot(u\cdot g)}, \alpha)$ es un isomorfismo da sextuplas y así $(C^\cdot(u), C^\cdot(u\cdot g), C^\cdot(g), f, g, i \cdot (Tj))$ as un triángulo.

$\square$

2.7 Saa A catagoría abaliana. Dafinimos al funtor $H : K(A) \longrightarrow A$ tal qua

$$X^\cdot := (X^n, \partial_X^n)_{n \in \mathbb{Z}} \longmapsto H^0(X) := \frac{\ker \partial_X^0}{\operatorname{Im} \partial_X^{-1}}$$

(Esto as dasda luago un funtor puas as fácil var qua si $f \sim g$ antoncas $H(f) = H(g)$). Escribimos por H^i a $H \cdot T^i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

<u>Obsarvación</u>: H as funtor cohomológico da $K(A)$ a A. Dasda luago, as suficianta chacar qua la sucasión larga

para triángulos construidos con el cono, $C^{\cdot}(u)$ de $u: X^{\cdot} \to Y^{\cdot}$ es exacta y esto se puede checar directamente. A este funtor le llamamos funtor de homología.

2.7.1 Un morfismo $f: X^{\cdot} \to Y^{\cdot}$ de $C(A)$ (resp. de $K(A)$) es llamado un casi-isomorfismo si para todo $i \in \mathbb{Z}$

$$H^i(f) : H^i(X^{\cdot}) \longrightarrow H^i(Y^{\cdot})$$

es un isomorfismo.

2.8 Sean A y B categorías aditivas.

Lema: Sea $F: A \longrightarrow B$ un funtor aditivo. Entonces F induce un ∂-funtor $\bar{F}: K^b(A) \longrightarrow K^b(B)$.

Demostración

Sean $X^{\cdot} := (X^n, \partial_X^n)$, $Y^{\cdot} := (Y^n, \partial_Y^n)$ complejos de cadenas en $K^b(A)$ y sea $f^{\cdot}: X^{\cdot} \to Y^{\cdot}$ un morfismo de complejos. Definimos

$$\bar{F} : K^b(A) \longrightarrow K^b(B) \text{ tal que}$$
$$(X^n, \partial_X^n)_{n\in\mathbb{Z}} \longmapsto (F(X^n), F(\partial_X^n))_{n\in\mathbb{Z}}.$$
$$f^{\cdot} = \{f^n\} \longmapsto \{F(f^n)\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Claramente $\bar{F}$ está bien definido y conmuta con el funtor translación

Basta ver que $\bar{F}$ envía triángulos en triángulos.

Sea $\Delta = (X^{\cdot}, Y^{\cdot}, Z^{\cdot}, u, v, w)$ un triángulo en $K^b(A)$. Por definición podemos suponer que $Z^{\cdot} = C^{\cdot}(u)$, $v = v_u$, $w = w_u$

$$
\begin{tikzcd}
X^n \arrow[r, "u^n"] \arrow[d, "\partial_{X^\cdot}^n"'] & Y^n \arrow[r, "{(0,1)}"] \arrow[d, "\partial_{Y^\cdot}^n"'] & X^{n+1}\oplus Y^n \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "\alpha=\begin{pmatrix} -\partial_X^{n+1} & u^{n+1} \\ 0 & \partial_Y^n \end{pmatrix}"'] & X^{n+1} \arrow[d, "-\partial_X^{n+1}"'] \\
X^{n+1} \arrow[r, "u^{n+1}"] & Y^{n+1} \arrow[r, "{(0,1)}"] & X^{n+2}\oplus Y^{n+1} \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & X^{n+2}
\end{tikzcd}
$$

Aplicando F obtenemos el diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
(FX^\cdot)^n \arrow[r, "(Fu)^n"] \arrow[d, "\partial_{FX^\cdot}^n"'] & (FY^\cdot)^n \arrow[r, "{(0,1)}"] \arrow[d, "\partial_{FX^\cdot}^n"'] & (FX^\cdot)^{n+1}\oplus (FY^\cdot)^n \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "F\alpha"'] & (FX^\cdot)^{n+1} \arrow[d, "-F\partial_{FX^\cdot}^{n+1}"'] \\
(FX^\cdot)^{n+1} \arrow[r, "(Fu)^{n+1}"] & (FY^\cdot)^{n+1} \arrow[r, "{(0,1)}"] & (FX^\cdot)^{n+2}\oplus (FY^\cdot)^{n+1} \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & (FX^\cdot)^{n+2}
\end{tikzcd}
$$

(por simplicidad abusamos del lenguaje y eliminamos la barra de $\overline{F}$).

Pongamos $F(\alpha)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Entonces

$$(a_{21}, a_{22}) = (0,1)F(\alpha) = \partial_{FY^\cdot}^n (0,1) = (0, \partial_{FY^\cdot}^n)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = F(\alpha)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\left(-\partial_{FX^\cdot}^{n+1}\right) = \begin{pmatrix} -\partial_{FX^\cdot}^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, $a_{11} = -\partial_{FX^\cdot}^{n+1}$, $a_{22} = \partial_{FY^\cdot}^n$, $a_{21}=0$.

Además $u^{n+1} = \left(X^{n+1} \xrightarrow{(1,0)} X^{n+1}\oplus Y^n \xrightarrow{\alpha} X^{n+2}\oplus Y^{n+1} \xrightarrow{\binom{0}{1}} Y^{n+1}\right)$.

Entonces $F(u^{n+1}) = (1,0)F(\alpha)\binom{0}{1} = a_{12}$. Esto prueba que $F(\alpha) = \partial_{C^\cdot(F(u))}$. Entonces $FC^\cdot(u) = C^\cdot(F(u))$ y $F(\Delta)$ es triángulo en $K^b(B)$.

$\square$

con $s \in S$, puede completarse a un diagrama;

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "s"] \arrow[d, "u"'] & Z \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[r, "t"] & W \end{tikzcd}$$

con $t \in S$.

(FR3) Si $f, g : X \longrightarrow Y$ son morfismos en $\mathcal{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

i) *Existe* $s : Y \longrightarrow Y'$ con $s \in S$, $f \circ s = g \circ s$

ii) *Existe* $t : X' \longrightarrow X$ con $t \in S$, $t \circ f = t \circ g$

Si $\mathcal{C}$ es una categoría, S es una colección de morfismos de $\mathcal{C}$, entonces la <u>localización</u> de $\mathcal{C}$ con respecto a S es una categoría $\mathcal{C}_S$, junto con un funtor $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ tal que

a) $Q(s)$ es un isomorfismo para cada $s \in S$

b) Cada funtor $F : \mathcal{C} \to D$ tal que $F(s)$ es un isomorfismo para todo $s \in S$ se factoriza de manera única a través de Q.

<u>Observación</u> :- Se puede demostrar que una tal localización existe sin la hipótesis de que S sea un sistema multiplicativo pero no necesitamos este resultado.

3.2 Sea C una categoría y S un sistema multiplicativo. Construiremos una nueva categoría C_S.

Antes de definir C_S, hagamos algunas consideraciones preliminares.

Dados $X, Y \in \mathrm{Ob}\, C$ definimos

$$A(X,Y) := \{ (s, X', a) : X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{a} Y \text{ en } C,\ s \in S \}.$$

En $A(X,Y)$ definimos una relación $\simeq$ de la siguiente forma:

$(s, X', a) \simeq (t, X'', b)$ con $X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{a} Y$ y $X \xleftarrow{t} X'' \xrightarrow{b} Y$ si y sólo si existen morfismos $u : X''' \to X$, $f : X''' \to X'$ y $g : X''' \to X''$ con $u \in S$ tal que $f \cdot a = g \cdot b$ y $f \cdot s = u = g \cdot t$.

La relación anterior la podemos visualizar en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "a"] & \\
X''' \arrow[r, "u"] \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & X & & Y \\
 & & X'' \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "b"'] &
\end{tikzcd}$$

Lema: Para cada $X, Y \in \mathrm{Ob}\, C$, la relación $\simeq$ en $A(X,Y)$ es de equivalencia.

Demostración

La demostración de la propiedad reflexiva y la propiedad de simetría es trivial.

Para demostrar la transitividad supongamos que $(s, X', a) \simeq (t, X'', b)$ y $(t, X'', b) \simeq (r, X''', c)$. Por demostrar que $(s, X', a) \simeq (r, X''', c)$.

Por ser $(s, X', a) \simeq (t, X'', b)$ y $(t, X'', b) \simeq (r, X''', c)$ tenemos los siguientes diagramas;

$$\begin{tikzcd}
& & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "a"] & \\
X^{(iv)} \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[r, "u"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & X & & Y \\
& & X'' \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "b"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& & X'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "b"] & \\
X^{(v)} \arrow[urr, bend left, "f'"] \arrow[r, "v"] \arrow[drr, bend right, "g'"'] & X & & Y \\
& & X''' \arrow[ul, "r"] \arrow[ur, "c"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $(*)$ -- $\begin{cases} f \circ s = u = g \circ t \ \text{ y } \ f \circ a = g \circ b & \text{con } u \in S \\ f' \circ t = v = g' \circ r \ \text{ y } \ f' \circ b = g' \circ c & \text{con } v \in S \end{cases}$

Ya que $u, v \in S$ entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X^{(iv)} \arrow[dr, "u"] & \\
& X \\
X^{(v)} \arrow[ur, "v"] &
\end{tikzcd}$$

se pueda completar a un diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& X^{(iv)} \arrow[dr, "u"] & \\
W \arrow[ur, "t_v"] \arrow[dr, "t_u"'] & & X \\
& X^{(v)} \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

con, t_u en S, por (FR2). Sea $\alpha = t_u \circ v \in S$.
De lo anterior podemos construir el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& X^{(iv)} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "a"] & \\
W \arrow[ur, "t_v"] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "t_u"'] & X & & Y \\
& X^{(v)} \arrow[u, "v"] \arrow[r, "g'"'] & X''' \arrow[ul, "r"'] \arrow[ur, "c"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $t_v \circ f \circ s = t_u \circ g' \circ r$ (ya que $f \circ s = u$ y $v = g' \circ r$, $t_v \circ u = t_u \circ v$). $v = f' \circ t$, entonces

$(t_v \circ g) \circ t = t_v \circ u = t_u \circ v = t_u \circ (f' \circ t) = (t_u \circ f') \circ t$ con $t \in S'$, por (FR3) existe $r: W' \to W$ en S' tal que

Definimos la composición $\overline{(s, X', a)} \cdot \overline{(t, Y', b)}$ por la clase $\overline{(t' \cdot s, X'', a' \cdot b)}$.

*v) Sea $X \in \mathrm{Ob}\, C_S$. Definimos el morfismo identidad de X en C_S como la clase de equivalencia $\overline{(Id_X, X, Id_X)}$

Proposición : C_S es categoría.

Demostración

Veremos primero en a), b), c) que la composición está bien definida.

a) Ya que la composición la definimos usando (FR2), tenemos que demostrar que la composición es independiente de los morfismos dados por este axioma. Sean $\overline{(s, X', a)} \in Hom_{C_S}(X, Y)$ y $\overline{(t, Y', b)} \in Hom_{C_S}(Y, Z)$.

Supongamos que por (FR2) existen por una parte, $X'' \in \mathrm{Ob}\, C$, $t' : X'' \to X'$ y $a' : X'' \to Y'$ con $t' \in S$ y por otra parte existen $X''' \in \mathrm{Ob}\, C$, $t'' : X''' \to X'$ y $a'' : X''' \to Y'$ con $t'' \in S$ tal que conmutan los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} X'' & \xrightarrow{a'} & Y' \\ {\scriptstyle t'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ X' & \xrightarrow{a} & Y \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} X''' & \xrightarrow{a''} & Y' \\ {\scriptstyle t''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ X' & \xrightarrow{a} & Y \end{array}$$

4) $\varepsilon\cdot\alpha\cdot a' = \varepsilon\cdot\beta\cdot a''$

de 4) se concluye que

5) $\varepsilon\cdot\alpha\cdot a'\cdot b = \varepsilon\cdot\beta\cdot a''\cdot b$

Sea $\phi := \varepsilon\cdot\alpha$, $\tau := \varepsilon\cdot\beta$ y $\gamma := \varepsilon\cdot\alpha\cdot t'\cdot s = \varepsilon\cdot\beta\cdot t''\cdot s$. Así por 5) tenemos que $\phi\cdot(a'\cdot b) = \tau\cdot(a''\cdot b)$. Es claro que $\phi\cdot(t'\cdot s) = \gamma = \tau\cdot(t''\cdot s)$ de donde se sigue que

$$\overline{(t'\cdot s\,,\, X'',\, a'\cdot b)} = \overline{(t''\cdot s,\, X'',\, a''\cdot b)}\,.$$

Y ésto demuestra la independencia de (FR2) en la composición.

b) En este inciso se prueba que la composición es independiente de los representantes elegidos. Es decir sean $\overline{(s, X', a)} = \overline{(s', X'', a')}$ en $Hom_{\mathcal{C}_S}(X, Y)$ y $\overline{(t, Y', b)} = \overline{(t', Y'', b')}$ en $Hom_{\mathcal{C}_S}(Y, Z)$ por demostrar entonces que

$$\overline{(s, X', a)}\cdot\overline{(t, Y', b)} = \overline{(s', X'', a')}\cdot\overline{(t', Y'', b')}$$

Para demostrar ésto lo hacemos en dos casos:

Caso 1) Sea $\overline{(s, X', a)} = \overline{(s', X'', a')}$ en $Hom_{\mathcal{C}_S}(X, Y)$ y sea $\overline{(t, Y, b)} \in Hom_{\mathcal{C}_S}(Y, Z)$ arbitrario; por demostrar que $\overline{(s, X', a)}\cdot\overline{(t, Y', b)} = \overline{(s', X'', a')}\cdot\overline{(t, Y', b)}$

La prueba del caso 1) es como sigue:

Ya que $\overline{(s, X', a)} = \overline{(s', X'', a')}$ existen $f: X''' \to X'$, $g: X''' \to X''$ y $u: X''' \to X$ con $u \in S$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

Análogamente tenemos las siguientes dos aplicaciones de (FR2). Primero completamos los siguientes dos diagramas:

$$\begin{tikzcd} & W_1 \arrow[d, "\bar{t}_1"] \\ X''' \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & W_2 \arrow[d, "\bar{t}_2"] \\ X''' \arrow[r, "g"'] & X'' \end{tikzcd}$$

a;

$$\begin{tikzcd} \overline{W}_1 \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "t_2 \in S"'] & W_1 \arrow[d, "t_1 \in S"] \\ X''' \arrow[r, "f"] & X' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \overline{W}_2 \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "t'_2 \in S"'] & W_2 \arrow[d, "t'_1 \in S"] \\ X''' \arrow[r, "g"] & X'' \end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} ai) & \tilde{f} \cdot t_1 = t_2 \cdot f \\ aii) & \tilde{g} \cdot t'_1 = t'_2 \cdot f \end{cases}$$

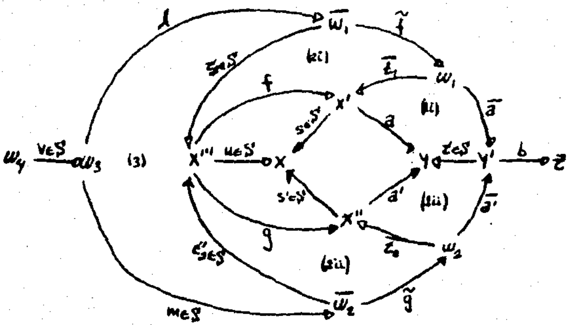
y el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \overline{W}_1 \arrow[d, "t_2 \in S"] \\ W_2 \arrow[r, "t'_2 \in S"] & X''' \end{tikzcd}$$

al diagrama

$$\begin{tikzcd} W_3 \arrow[r, "l"] \arrow[d, "m \in S"'] & \overline{W}_1 \arrow[d, "t_2 \in S"] \\ \overline{W}_2 \arrow[r, "t'_2 \in S"] & X''' \end{tikzcd}$$

estas construcciones derivan en el siguiente diagrama:



Usando (3) y (4) tenemos

$$\begin{cases} 4i) & l \cdot t_2 \cdot f \cdot a = m \cdot t_2' \cdot g \cdot a' \\ 4ii) & l \cdot t_2 \cdot f \cdot s = m \cdot t_2 \cdot u = m \cdot t_2' \cdot g \cdot s' \end{cases}$$

usando (4i), (4ii), (2i), (2ii) tenemos

$$\begin{cases} 5i) & l \cdot \tilde{f} \cdot t_1 \cdot a = m \cdot \tilde{g} \cdot t_2' \cdot a' \\ 5ii) & l \cdot \tilde{f} \cdot t_1 \cdot s = m \cdot t_2 \cdot u = m \cdot \tilde{g} \cdot t_2' \cdot s' \end{cases}$$

usando 1i) y 2(li) tenemos

6) $l \cdot \tilde{f} \cdot \overline{a} \cdot t = m \cdot \tilde{g} \cdot \overline{a'} \cdot t$

por (FR3) existe $v : w_4 \to w_3$ en S tal que

7) $v \cdot l \cdot \tilde{f} \cdot \overline{a} = v \cdot m \cdot \tilde{g} \cdot \overline{a'}$

Sea $\alpha := v\cdot l\cdot \tilde{f}$ y $\beta := v\cdot m\cdot \tilde{g}$. Usando (7) tenemos que.

$$\alpha\cdot(\bar{a}\cdot b) = \beta\cdot(\bar{a}'\cdot b)$$

Sea $\phi := v\cdot m\cdot t_2'\cdot u$ (observa que $\phi\in S$), usando (5ii).
$\alpha\cdot(t_1\cdot s) = \phi = \beta\cdot(t_1'\cdot s')$. Esto prueba que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & & & & w_1 \arrow[dll, "t_1\in S"'] \arrow[d, "a"] & \\
 & & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "a"] & & & \\
w_4 \arrow[r, "\phi\in S"] \arrow[urrrr, bend left, "\alpha"] \arrow[drrrr, bend right, "\beta"'] & X & & Y & Y' \arrow[l, "t"'] \arrow[r, "b"] & Z \\
 & & X'' \arrow[ul, "s'"] \arrow[ur, "a'"'] & & & \\
 & & & & w_2 \arrow[ull, "t_1'"] \arrow[u, "a'"'] &
\end{tikzcd}$$

lo que prueba que $\overline{(s,X',a)}\cdot\overline{(t,Y',b)} = \overline{(s',X'',a')}\cdot\overline{(t,Y',b)}$.

$\square$

Caso 2) De manera similar $\overline{(r,y',b)} = \overline{(r',y'',b')}$ en $Hom_{C_S}(Y,Z)$ y $\overline{(s,x',a)} \in Hom_{C_S}(X,Y)$ entonces $\overline{(s,x',a)}\cdot\overline{(r,y',b)} = \overline{(s,x',a)}\cdot\overline{(r',y'',b')}$. La demostración de este caso es similar a la del caso 1).

Sean $\overline{(s,x',a)} = \overline{(s',x'',a')}$ y $\overline{(r,y',b)} = \overline{(r',y'',b')}$. Usando el caso 1) y el caso 2), podemos inferir el caso general del siguiente modo:

$$\overline{(s,x',a)}\cdot\overline{(r,y',b)} \underset{\text{caso 1)}}{=} \overline{(s',x'',a')}\,\overline{(r,y',b)} \underset{\text{caso 2)}}{=} \overline{(s',x'',a')}\,\overline{(r',y'',b')}.$$

Así

$$\overline{(s,x',a)}\,\overline{(r,y',b)} = \overline{(s',x'',a')}\,\overline{(r',y'',b')},$$

concluye el caso general.

d) La composición es asociativa.

Para mostrar esto sean $\overline{(s,x',a)} \in Hom_{C_S}(X,Y)$, $\overline{(t,y',b)} \in Hom_{C_S}(Y,Z)$, y $\overline{(r,z',c)} \in Hom_{C_S}(Z,W)$, morfismos en C_S.

Así por (FR2) existen $Z'' \in Ob\,C$, $b' : Z'' \to Z'$ y $r' : Z'' \to Y'$ con $r' \in S$ tal que

1) $r' \cdot b = b' r$

(Observe que $r' \cdot t \in S$).

Analogamente, por (FR2) existe $Y'' \in Ob\,C$, $a' : Y'' \to Z''$ y $x : Y'' \to X'$ con $x \in S$ tal que

2) $x \cdot a = a' \cdot (r' \cdot t)$

luego $\overline{(s,x',a)} \cdot [\overline{(t,y',b)} \cdot \overline{(r,z',c)}] = \overline{(s,x',a)} \cdot \overline{(r'\cdot t, z'', b'\cdot c)} =$
$= \overline{(x\cdot s, y'', a'\cdot b'\cdot c)}$

dicha composición queda expresada completamente en el siguiente diagrama:

(*) .....

$$\begin{tikzcd}
 & & & Y'' \arrow[ddll, "x"'] \arrow[dr, "a'"] & & & \\
 & & & & Z'' \arrow[dl, "r'\in S"'] \arrow[dr, "b'"] & & \\
 & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "a"] & & Y' \arrow[dl, "t\in S"'] \arrow[dr, "b"] & & Z' \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "c"] & \\
X & & Y & & Z & & W
\end{tikzcd}$$

Por a), 1) y 2) tenemos que la composición $\overline{(s, X', a)} \circ \overline{(t, Y', b)}$ es $\overline{(x \circ s, Y'', a' \circ r' \circ b)}$ lo cual se expresa en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & Y'' \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "a' \circ r'"] & & \\
 & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "a"] & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "b"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

De la misma forma por (FR2), 1) y 2) la composición de $\overline{(x \circ s, Y'', a' \circ r' \circ b)}$ con $\overline{(r, Z', c)}$ es $\overline{(Id_{Y''} \circ x \circ s, Y'', a' \circ b' \circ c)}$ de donde se tiene el siguiente diagrama:

(**)

$$\begin{tikzcd}
 & & & Y'' \arrow[dl, "Id_{Y''}"'] \arrow[ddrr, "a' \circ b'"] & & & \\
 & & Y'' \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "a' \circ r'"] & & & & \\
 & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "a"] & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "b"] & & Z' \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "c"] & \\
X & & Y & & Z & & W
\end{tikzcd}$$

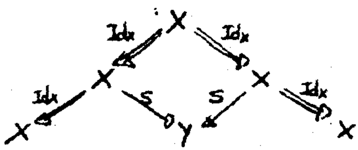
Por tanto de *) y **) se puede ver fácilmente que

$$\overline{(s, X', a)} \circ [\overline{(t, Y', b)} \circ \overline{(r, Z', c)}] = \overline{(x \circ s, Y'', a' \circ b' \circ c)} = \overline{(Id_{Y''} \circ x \circ s, Y'', a' \circ b' \circ c)} =$$

$$= [\overline{(s, X', a)} \circ \overline{(t, Y', b)}] \circ \overline{(r, Z', c)}.$$ Así que la composición es asociativa.

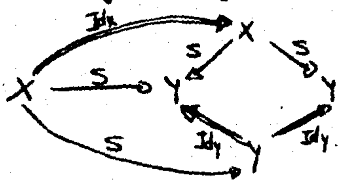
b) $Q(s)$ es isomorfismo en $C_{\mathcal{S}}$, si $s\in\mathcal{S}$.

Sea $s: X\to Y$ con $s\in\mathcal{S}$. Entonces $Q(s)=\overline{(Id_X, X, s)}$. Sea $\alpha := \overline{(s, X, Id_X)}$. Si calculamos $Q(s)\cdot\alpha$ tenemos el siguiente diagrama



el cual demuestra que $Q(s)\cdot\alpha = \overline{(Id_X, X, Id_X)}$ que es el morfismo identidad en $C_{\mathcal{S}}$.

De manera análoga $\alpha\cdot Q(s) = \overline{(Id_X\cdot s, X, Id_X\cdot s)} = \overline{(s, X, s)}$ el cual es la identidad en $Y\in C_{\mathcal{S}}$ como lo prueba el diagrama siguiente



c) Q posee la propiedad universal.

Sea $F: C\to D$ un funtor tal que $F(s)$ es isomorfismo para todo $s\in\mathcal{S}$.

Definimos el funtor $G: C_{\mathcal{S}}\to D$ tal que $G(X) := F(X)$ si $X\in \mathrm{Ob}\,C_{\mathcal{S}}$ y $G(\overline{(s, X', a)}) := F(s)^{-1}F(a)$, si $\overline{(s, X', a)}: X\to Y$ está en $C_{\mathcal{S}}$.

3.5 En esta sección y en (3.6) damos otra forma de construir C_S para S un sistema multiplicativo. Mostraremos que $Hom_{C_S}(X,Y)$ es igual al $\varinjlim_{I_X} Hom_C(-,Y)$ para una categoría superiormente dirigida I_X (ver [Hs, §20]). Fijamos $X, Y \in Ob C$.

Definimos I_X la categoría cuyos objetos son los morfismos $s: X' \to X$ con $s \in S$ y los cuales denotamos por (X', s) y un morfismo $f: (X', s_1) \to (X'', s_2)$ es un diagrama conmutativo en la categoría C de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "s_1"'] & & X'' \arrow[dl, "s_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Nótese que I_X es <u>superiormente dirigida</u> (i.e. para cada (X', s_1) y (X'', s_2) en I_X existe $(X''', s_3) \in I_X$, $g: X''' \to X'$, $h: X''' \to X''$ tal que $g \circ s_1 = s_3 = h s_2$)

Consideremos el funtor $F = Hom_C(-,Y): I_X \to Ab$.

(Es decir $F(X', s) = Hom_C(X', Y)$

$F(f) = Hom_C(f, Y)$ y para $f: (X', s_1) \to (X'', s_2)$ en I_X,

<u>Proposición</u>: $\varinjlim_{I_X} Hom_C(-,Y)$ existe y es isomorfo a $Hom_{C_S}(X,Y)$.

<u>Demostración</u>

Construiremos un <u>poza natural</u> $L = (Hom_{C_S}(X,Y), (q_{(X',s)}))$ para el funtor $F: I_X \to Ab$; esto es, Sea $L' = (Z, (l_{(X';s)}))$ otro pozo natural para F. Construiremos $l : \mathrm{Hom}_{C_S}(X,Y) \to Z$ tal que $g_{(X';s)} \circ l = l_{(X';s)}$ para toda $(X';s) \in I_X$.

Construimos $l : \mathrm{Hom}_{C_S}(X,Y) \to Z$, $\overline{(s,X',h)} \mapsto l_{(X';s)}(h)$; veamos que l está bien definida: en efecto, si $\overline{(s_1, X', h_1)} = \overline{(s_2, X'', h_2)}$ en $\mathrm{Hom}_{C_S}(X,Y)$ entonces existe $(X''',u) \in I_X$ y morfismos f_1, f_2 que hagan el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& & X' \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "h_1"] & \\
X''' \arrow[r, "u"] \arrow[urr, bend left, "f_1"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & X & & Y \\
& & X'' \arrow[ul, "s_2"] \arrow[ur, "h_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Como L' es pozo natural, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Hom}_C(X'',Y) \arrow[dl, "\mathrm{Hom}_C(f_2,Y)"'] \arrow[dr, "l_{(X'';s_2)}"] & \\
\mathrm{Hom}_C(X''',Y) \arrow[rr, "l_{(X''';u)}"] & & Z \\
& \mathrm{Hom}_C(X',Y) \arrow[ul, "\mathrm{Hom}_C(f_1,Y)"] \arrow[ur, "l_{(X';s_1)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $\mathrm{Hom}_C(f_2,Y)(h_2) = \mathrm{Hom}_C(f_1,Y)(h_1)$, entonces

$$l_{(X';s_1)}(h_1) = l_{(X''';u)}(\mathrm{Hom}(f_1,Y)(h_1)) = l_{(X''';u)}(\mathrm{Hom}(f_2,Y)(h_2)) = l_{(X'';s_2)}(h_2).$$

3.6.1 <u>Proposición</u>: Sea $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$ una categoría triangulada y S un sistema multiplicativo compatible con la triangulación. Entonces existe una única categoría triangulada $(\mathcal{C}_S, T_S, \mathcal{T}_S)$ de forma que el funtor localización $Q: \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ es un ∂-funtor y Q satisface la propiedad universal:

Si $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un ∂-funtor tal que $F(s)$ es isomorfismo para todo $s \in S$, existe un único ∂-funtor $F': \mathcal{C}_S \to \mathcal{D}$ tal que $F = Q \circ F'$.

<u>Demostración</u>

Dividimos la prueba en los siguientes pasos:

I) Existencia de la triangulación.

1) Definición de T_S
2) Definición de $\mathcal{T}_S$
3) $Q: (\mathcal{C}, T, \mathcal{T}) \to (\mathcal{C}_S, T_S, \mathcal{T}_S)$ es un ∂-funtor que satisface la propiedad universal.

II) Unicidad de la triangulación.

I 1): Definimos el funtor $T_S: \mathcal{C}_S \to \mathcal{C}_S$ tal que en objetos $T_S(X) = T(X)$, si $(s, X', h) \in Hom_{\mathcal{C}_S}(X, Y)$, entonces $T_S(s, X', h) = (T(s), T(X'), T(h))$. Claramente T_S es el único automorfismo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "T"'] & \mathcal{C}_S \arrow[d, "T_S"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "Q"] & \mathcal{C}_S \end{tikzcd} \quad \text{(usé 3.4)}$$

En efecto $T(S) \subseteq S$ por (FR4), luego $(TQ)(s)$ es iso para cada $s \in S$. Es fácil probar que $T_S(Q(s))^{-1} = Q(T(s))^{-1}$. Luego $T_S(s, x', a) = T_S(Q(s)^{-1} Q(a)) = Q(T(s))^{-1} Q(T(a)) = (T(s), TX', Ta)$.

donde $\overline{X'} \in \operatorname{Ob} C$, $a' \in \operatorname{Hom}_C(X, \overline{X'})$ y $s' \in \operatorname{Hom}_C(Y, \overline{X'}) \cap S$ en seguida extendemos a' a un triángulo $(X, \overline{X'}, w(a'), a', V_{a'}, W_{a'})$ de $\mathcal{T}$ (por (TR1)). Así tenemos el diagrama de triángulos

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "a"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[r, "V_a"] \arrow[d, "s'"'] & w(a) \arrow[r, "W_a"] & TX' \arrow[d, "Ts"'] \\
X \arrow[r, "a'"] & \overline{X'} \arrow[r, "V_{a'}"] & w(a') \arrow[r, "W_{a'}"] & TX
\end{tikzcd}$$

en C, con $s, s' \in S$

Por (FR5) existe $r : w(a) \to w(a')$ en S que hace a la terna $(s, s', r) : (X', Y, w(a), a, V_a, W_a) \to (X, \overline{X'}, w(a'), a', V_{a'}, W_{a'})$ un morfismo de triángulos en $\mathcal{T}$ como lo muestra el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "a"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[r, "V_a"] \arrow[d, "s'"'] & w(a) \arrow[r, "W_a"] \arrow[d, "r"'] & TX' \arrow[d, "Ts"'] \\
X \arrow[r, "a'"] & \overline{X'} \arrow[r, "V_{a'}"] & w(a') \arrow[r, "W_{a'}"] & TX
\end{tikzcd}$$

Es fácil comprobar que la terna

$(Q(Id_X), Q(s), Q(r)) : (X, Y, w(a), \overline{(s, X', a)}, V_a, W_a \cdot T_s) \to (X, \overline{X'}, w(a'), a', V_{a'}, W_{a'})$

es un morfismo de séxtuplas en C_S, pues un cálculo sencillo muestra la conmutatividad del diagrama en la categoría C_S.

II) Sea $\mathcal{C}'_S = (\mathcal{C}_S, T', \mathcal{J}')$ otra estructura de categoría triangulada tal que $Q : (\mathcal{C}, T, \mathcal{J}) \to (\mathcal{C}_S, T', \mathcal{J}')$ es un ∂-funtor que satisface la propiedad universal. Probaremos que $T' = T_S$ y $\mathcal{J}' = \mathcal{J}_S$.

II 1): $T' = T_S$.

En efecto, dado que existe un único funtor $F : \mathcal{C}_S \to \mathcal{C}_S$ que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "T"'] & \mathcal{C}_S \arrow[d, "F"] \\
\mathcal{C} \arrow[r, "Q"] & \mathcal{C}_S
\end{tikzcd}$$

y puesto que T' y T_S también hacen conmutar dicho diagrama entonces $T' = F = T_S$, lo que prueba que $T' = T_S$.

II 2): $\mathcal{J}' = \mathcal{J}_S$

Por (I.3), existe un único ∂-funtor $F : (\mathcal{C}_S, T_S, \mathcal{J}_S) \to (\mathcal{C}_S, T', \mathcal{J}')$ tal que

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{C}_S \arrow[dl, "F"] \\
\mathcal{C}_S &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Como $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ es una localización y $QF = Q$, (por la unicidad de su propiedad universal), $F = Id_{\mathcal{C}_S}$

Por tanto, $\mathcal{T}_S = F(\mathcal{T}_S) \subset \mathcal{T}'$.

Como $Q: C \to C'_S$ satisface la propiedad universal podemos también concluir que $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}_S$.

$\square$

3.6.2 Sea $C=(C, T, \mathcal{T})$ una categoría triangulada y S un sistema multiplicativo compatible con la triangulación.

Sea $D=(D, T', \mathcal{T}')$ subcategoría plena triangulada de C (ver 1.3). Supongamos además que $S \cap D$ es un sistema multiplicativo compatible con la triangulación.

Sea $\mathcal{C}=(C_S, T_S, \mathcal{T}_S)$ (resp. $\mathcal{D}=(D_{S\cap D}, T_{S\cap D}, \mathcal{T}_{S\cap D})$) la única categoría triangulada (construida en 3.6.1) que hace al funtor localización $Q_S: C \to C_S$ (resp. $Q_{S\cap D}: D \to D_{S\cap D}$) un ∂-funtor que satisface la propiedad universal.

Por (3.6.1) existe un único ∂-funtor $j: D_{S\cap D} \to C_S$ que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "Q_{S\cap D}"] \arrow[d, "i \cdot Q_S"'] & D_{S\cap D} \arrow[dl, dashed, "j"] \\ C_S & \end{tikzcd}$$

donde $i: D \to C$ es la inclusión

<u>Proposición</u>: Sea $C=(C, T, \mathcal{T})$ categoría triangulada. Sea $D=(D, T', \mathcal{T}')$ subcategoría plena triangulada de C y supongamos que $S \cap D$ es un sistema multiplicativo en D.

Supongamos que una de las siguientes condiciones se cumplen:

i) Cuando $s: X' \to X$ es un morfismo en S con $X \in \mathrm{Ob}\,D$ entonces existe un morfismo $f: X'' \to X'$ tal que $X'' \in \mathrm{Ob}\,D$ y $f \cdot s \in S$.

ii) Cuando $s: X \to X'$ es un morfismo en S con $X \in \mathrm{Ob}\,D$ entonces existe un morfismo $f: X' \to X''$ tal que $X'' \in \mathrm{Ob}\,D$ y $s \cdot f \in S$.

Entonces $j: D_{S \cap D} \to \mathcal{C}_S$ es fiel y pleno.

<u>Demostración</u>.

1) Para probar que j es fiel y pleno mostraremos primero que $j\,\overline{(s, X', f)} = \overline{(s, X', f)}$, para cada $\overline{(s, X', f)} \in \mathrm{Hom}_{D_{S\cap D}}(X, Y)$.

Claramente, se tiene que $j(\overline{(Id_{X'}, X', f)}) = j \cdot Q_{S\cap D}(f) = i \cdot Q_{\mathcal{C}}(f) = \overline{(Id_{X'}, X', f)}$. Veremos ver que $j(\overline{(s, X', Id_{X'})}) = \overline{(s, X', Id_{X'})}$, para $s \in S \cap D$.

Tenemos que $\overline{(s, X', Id_{X'})} \cdot \overline{(Id_{X'}, X', s)} = Id_X$, de donde $j(\overline{(s, X', Id_{X'})} \cdot \overline{(Id_{X'}, X', s)}) = j(\overline{(s, X', Id_{X'})}) \cdot j(\overline{(Id_{X'}, X', s)}) = Id_X$ en $\mathcal{C}_S$, ya que $j(\overline{(Id_{X'}, X', s)}) = \overline{(Id_{X'}, X', s)}$. Así $j(\overline{(s, X', Id_{X'})}) \cdot \overline{(Id_{X'}, X', s)} = Id_X$.

Se concluye que $j(\overline{(s, X', Id_{X'})}) \cdot \overline{(Id_{X'}, X', s)} \cdot \overline{(s, X', Id_{X'})} = Id_X \cdot \overline{(s, X', Id_{X'})}$ y esto implica $j(\overline{(s, X', Id_{X'})}) = \overline{(s, X', Id_{X'})}$.

Obsérvese que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & X' \arrow[dl, "Id_{X'}"'] \arrow[dr, "Id_{X'}"] & & \\
 & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "Id_{X'}"] & & X' \arrow[dl, "Id_{X'}"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & X' & & Y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "a"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "\bar{s}"] \\
X \arrow[r, "\bar{a}"] & Y'
\end{tikzcd}$$

Como $Y \in D$ y $\bar{s} \in S$, existen $X'' \in D$ y $s' : Y' \longrightarrow X''$ tal que $\bar{s} \circ s' \in S \cap D$. Es claro que $\overline{(s, X', a)} = \overline{(Id_X, X, \bar{a} \circ s')}\,\overline{(\bar{s} \circ s', Y, Id_Y)}$ donde $\overline{(Id_X, X, \bar{a} \circ s')} \in Hom_{D_{S\cap D}}(X, X')$ y $\overline{(\bar{s} \circ s', Y, Id_Y)} \in Hom_{D_{S\cap D}}(X'', Y)$ y así j es plano.

4) <u>j es fiel</u>.

<u>Caso i)</u> : Supongamos que $j\overline{(s, X', a)} = j\overline{(t, Z, b)}$ en C_S entonces, existe $u \in S$ de forma que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & & & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "a"] & \\
X''' \arrow[r, "\alpha"] & X'' \arrow[r, "u"] \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & X & & Y \\
 & & & Z \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "b"'] &
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis existe $\alpha : X''' \longrightarrow X''$ con $X''' \in D$ de forma que $\alpha \circ u \in S$. Luego $\overline{(s, X', a)} = \overline{(t, Z, b)}$ en $D_{S\cap D}$.

<u>Caso ii)</u> Supongamos que $j\overline{(s, X', a)} = j\overline{(s', X'', a')}$ en C_S. Entonces existen $f : X''' \longrightarrow X'$, $g : X''' \longrightarrow X''$ y $u : X''' \longrightarrow X$ con $X \in S$ tal que conmuta el siguiente diagrama

en donde tenemos

$$\begin{cases} 1i) & a\cdot\bar{s} = s\cdot\bar{a} \\ 1ii) & a'\cdot\overline{s'} = s'\cdot\overline{a'} \end{cases}$$

Análogamente usando (FR2) podemos completar el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\bar{s}"] \arrow[d, "s'\in S"'] & W_1 \\ W_2 & \end{tikzcd} \quad \text{al diagrama} \quad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\bar{s}"] \arrow[d, "s'\in S"'] & W_1 \arrow[d, "\alpha\in S"] \\ W_2 \arrow[r, "\beta"] & M \end{tikzcd}$$

Así tenemos

2) $\bar{s}\cdot\alpha = \overline{s'}\beta$

Observe que Y, W_1, W_2 están en D, esto implica que $M\in D$. Sea $\gamma := \bar{s}\cdot\beta'$, el cual pertenece a $S\cap D$. De donde deducimos

3) $\bar{s}\cdot\alpha = \gamma = \overline{s'}\beta$

Por (1)(i) tenemos

4) $f\cdot a\cdot\gamma = g\cdot a'\cdot\gamma$

por (3) tenemos

5) $f\cdot a\cdot\bar{s}\cdot\alpha = g\cdot a'\cdot\overline{s'}\cdot\beta$

de (FR3) existe $\bar{H} \in D$ y $\varepsilon : \bar{H} \to X$ en $S \cap D$ tal que
10) $\varepsilon \cdot \bar{a} \cdot \alpha = \varepsilon \cdot \bar{a}' \cdot \beta$.

Por (FR2) los diagramas

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[d, "s \in S \cap D"] \\ \bar{H} \arrow[r, "\varepsilon \in S"] & X \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} & X'' \arrow[d, "s' \in S \cap D"] \\ \bar{H} \arrow[r, "\varepsilon \in S"] & X \end{tikzcd}$$

los diagramas

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[r, "\varepsilon_1"] \arrow[d, "t_1 \in S \cap D"'] & X' \arrow[d, "s \in S \cap D"] \\ \bar{H} \arrow[r, "\varepsilon \in S'"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y_2 \arrow[r, "\varepsilon_2"] \arrow[d, "t_2 \in S \cap D"'] & X'' \arrow[d, "s' \in S \cap D"] \\ \bar{H} \arrow[r, "\varepsilon \in S'"] & X \end{tikzcd}$$

con Y_1, Y_2 en D, de donde se tiene

$$\begin{cases} 11) & \varepsilon_1 \cdot s = t_1 \cdot \varepsilon \\ 12) & \varepsilon_2 \cdot s' = t_2 \cdot \varepsilon \end{cases}$$

Análogamente existe $W \in D$ y un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\bar{t}_2"] \arrow[d, "\bar{t}_1 \in S \cap D"'] & Y_1 \arrow[d, "t_1 \in S"] \\ Y_2 \arrow[r, "t_2 \in S"] & \bar{H} \end{tikzcd}$$

Sean $\tilde{f} := \phi \cdot \bar{t}_2 \cdot \varepsilon_1$, $\tilde{g} := \phi \cdot \bar{t}_1 \cdot \varepsilon_2$ y $\tilde{u} := \phi \cdot \bar{t}_1 \cdot t_2 \cdot \varepsilon$, con $\tilde{u} \in S \cap D$. Se afirma que estos morfismos hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "a"] & \\
\tilde{W} \arrow[r, "\tilde{u}"] \arrow[urr, bend left, "\tilde{f}"] \arrow[drr, bend right, "\tilde{g}"'] & X & & Y \\
 & & X'' \arrow[ul, "s'"] \arrow[ur, "a'"'] &
\end{tikzcd}$$

En efecto,

$$\tilde{f} \cdot a \underset{(\mathrm{Def.}\,\tilde{f})}{=} \phi \cdot \bar{t}_2 \cdot \varepsilon_1 \cdot a \underset{(13)}{=} \phi \cdot \bar{t}_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot a' \underset{(\mathrm{Def}\,\tilde{g})}{=} \tilde{g} \cdot a'$$

$$\tilde{f} \cdot s \underset{(\mathrm{Def}\,\tilde{f})}{=} \phi \cdot \bar{t}_2 \cdot \varepsilon_1 \cdot s \underset{(iii)}{=} \phi \cdot t_2 \cdot t_1 \cdot \varepsilon \underset{(12)}{=} \phi\, \bar{t}_1\, t_2 \cdot \varepsilon = \tilde{u}$$

$$\tilde{g} \cdot s \underset{(\mathrm{Def}\,\tilde{g})}{=} \phi \cdot \bar{t}_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot s' = \phi \cdot \bar{t}_1 \cdot t_2 \cdot \varepsilon = \tilde{u}$$

Esta afirmación demuestra que $\overline{(s, X', a)} = \overline{(s', X'', a')}$ en $D_{S \cap D}$. Por tanto, j es fiel.

$\square$

Demostración

Basta demostrar (FR2), (FR3) y (FR5) pues (FR1) y (FR4) se satisfacen trivialmente.

<u>Se satisface (FR5)</u> : Sean (X,Y,Z,u,v,w) y (X',Y',Z',u',v',w') triángulos en $\mathcal{C}$ y $f:X\to X'$, $g:Y\to Y'$ morfismos en S, tales que $u\circ g=f\circ u'$. Por (TR3) existe $h:Z\to Z'$ que hace a $(f,g,h):(X,Y,Z,u,v,w)\longrightarrow(X',Y',Z',u',v',w')$ un morfismo de triángulos. Aplicando la sucesión larga de cohomología obtenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H(T^iX) \arrow[r, "H(T^iu)"] \arrow[d, "H(T^if)"'] & H(T^iY) \arrow[r, "H(T^iv)"] \arrow[d, "H(T^ig)"'] & H(T^iZ) \arrow[r, "H(T^iw)"] \arrow[d, "H(T^ih)"'] & H(T^{i+1}X) \arrow[r, "H(T^{i+1}u)"] \arrow[d, "H(T^{i+1}f)"'] & H(T^{i+1}Y) \arrow[r] \arrow[d, "H(T^{i+1}g)"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H(T^iX') \arrow[r, "H(T^iu')"] & H(T^iY') \arrow[r, "H(T^iv')"] & H(T^iZ') \arrow[r, "H(T^iw')"] & H(T^{i+1}X') \arrow[r, "H(T^{i+1}u')"] & H(T^{i+1}Y') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde $H(T^if)$, $H(T^ig)$, $H(T^{i+1}f)$, $H(T^{i+1}g)$ son isomorfismos. Por el lema del cinco $H(T^ih)$ es iso, para todo $i\in\mathbb{Z}$. Así que $h\in S$.

<u>Se satisface (FR2)</u> : Consideremos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d, "s"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y
\end{tikzcd}
$$

donde $s \in S$. Por (TR1) existe un triángulo (Z, Y, N, s, f, g). Análogamente usando (TR1) y (TR2) podemos demostrar que existe un triángulo $(W, X, N, t, u\circ f, h)$.

Como $u\circ f = (u\circ f)\circ Id_N$, por (TR3) existe un morfismo $v : W \to Z$ que hace a la terna

$$(u, Id_N, v) : (W, X, N, t, u\circ f, h) \to (Z, Y, N, s, f, g)$$

un morfismo de triángulos:

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "v"] \arrow[dd, "t"'] & & Z \arrow[dd, "s"] & \\
 & N \arrow[ul, "h"'] \arrow[rr, "Id_N"] & & N \arrow[ul, "g"'] \\
X \arrow[ur, "u\circ f"] \arrow[rr, "u"] & & Y \arrow[ur, "f"] &
\end{tikzcd}
$$

De donde se tiene que $v\circ s = t\circ u$. Resta checar que $t \in S$.

Para esto consideramos el triángulo (Z, Y, N, s, f, g) y la sucesión exacta larga asociada:

$$\cdots \to H(T^i Z) \xrightarrow{H(T^i s)} H(T^i Y) \xrightarrow{H(T^i f)} H(T^i N) \xrightarrow{H(T^i g)} H(T^{i+1} Z) \xrightarrow{H(T^{i+1} s)} H(T^{i+1} Y) \to \cdots$$

i') exista $s: Y \to Y'$ en S tal que $f \cdot s = 0$
ii') exista $t: X' \to X$ en S tal que $t \cdot f = 0$

Supongamos que $s: Y \to Y'$ en S es tal que $f s = 0$. Por (TR1) y (TR2) podemos encontrar un triángulo (Z, Y, Y', v, s, u) para un Z apropiado.

Como $f \cdot s = 0$ por la proposición (1.2)(b) existe un morfismo $g: X \to Z$ tal que $g \cdot v = f$. También por (TR1) y (TR2) podemos encontrar un triángulo (X', X, Z, t, g, w) para X' apropiado. Por la misma proposición aplicada a este segundo triángulo la existencia de v implica que $t \cdot f = 0$. Necesitamos demostrar que $t \in S$. Dado que $s \in S$, $H(T^i Z) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, por la sucesión larga de cohomología, así $t \in S$.

la implicación ii') $\Rightarrow$ i') es similar.

$\square$

y supongamos que $N^\bullet$ y s son de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet : \arrow[d, "s"'] \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X^0 \arrow[r, "\partial_X^0"] \arrow[d, "s^0"] & X^1 \arrow[r, "\partial_X^1"] \arrow[d, "s^1"] & X^2 \arrow[r, "\partial_X^2"] \arrow[d, "s^2"] & \cdots \arrow[r] & X^n \arrow[r, "\partial_X^n"] \arrow[d, "s^n"] & \cdots \\
N^\bullet : \arrow[r] & N^{-2} \arrow[r, "\partial_N^{-2}"] & N^{-1} \arrow[r, "\partial_N^{-1}"] & N^0 \arrow[r, "\partial_N^0"] & N^1 \arrow[r, "\partial_N^1"] & N^2 \arrow[r, "\partial_N^2"] & \cdots \arrow[r] & N^n \arrow[r, "\partial_N^n"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Sean $X'^\bullet \in K^+(A)$ y $s' : N^\bullet \to X'^\bullet$ definidos de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd}
N^\bullet : \cdots \arrow[d, "s'"'] \arrow[r] & N^{-2} \arrow[r, "\partial_N^{-2}"] \arrow[d] & N^{-1} \arrow[r, "\partial_N^{-1}"] \arrow[d, "\partial_N^{-1}"] & N^0 \arrow[r, "\partial_N^0"] \arrow[d, Rightarrow, "Id_{N^0}"] & N^1 \arrow[r, "\partial_N^1"] \arrow[d, Rightarrow, "Id_{N^1}"] & N^2 \arrow[r, "\partial_N^2"] \arrow[d, Rightarrow, "Id_{N^2}"] & \cdots \arrow[r] & N^n \arrow[r, "\partial_N^n"] \arrow[d, Rightarrow, "Id_{N^n}"] & \cdots \\
X'^\bullet : \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \operatorname{Im}\partial_N^{-1} \arrow[r, "i"] & N^0 \arrow[r, "\partial_N^0"] & N^1 \arrow[r, "\partial_N^1"] & N^2 \arrow[r, "\partial_N^2"] & \cdots \arrow[r] & N^n \arrow[r, "\partial_N^n"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

claramente $s \cdot s' \in K^+(A) \cap Q_{is}$. Luego (ii) de (3.6.3) se satisface y así $D^+(A) = (D^+(A), T_{K^+(A)\cap Q_{is}}, \mathcal{T}_{K^+(A)\cap Q_{is}})$ es subcategoría triangulada de $D(A) = (D(A), T_{Q_{is}}, \mathcal{T}_{Q_{is}})$.

4.3.2 Análogamente si $X^\bullet \in K^-(A)$ y $s : N \to X^\bullet$ tal que $s \in Q_{is}$
Sean $X'^\bullet$ y $s' : X'^\bullet \to N^\bullet$ tal que

$$\begin{tikzcd}
X'^\bullet : \cdots \arrow[d, "s'"'] \arrow[r] & N^n \arrow[r, "\partial_N^n"] \arrow[d, Rightarrow, "Id_{N^n}"] & N^{n-1} \arrow[r, "\partial_N^{n-1}"] \arrow[d, Rightarrow, "Id_{N^{n-1}}"] & \cdots \arrow[r] & N^1 \arrow[r, "\partial_N^1"] \arrow[d, Rightarrow, "Id_{N^1}"] & \operatorname{Ker}\partial_N^0 \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
N^\bullet : \cdots \arrow[r] & N^n \arrow[r, "\partial_N^n"] & N^{n-1} \arrow[r, "\partial_N^{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & N^1 \arrow[r, "\partial_N^1"] & N^0 \arrow[r, "\partial_N^0"] & N^1 \arrow[r, "\partial_N^1"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

los cuales son tales que $s' \cdot s \in K^-(A) \cap Q_{is}$, y así $D^-(A) = (D^-(A), T_{K^-(A)\cap Q_{is}}, \mathcal{T}_{K^-(A)\cap Q_{is}})$ es subcategoría triangulada de $D(A) = (D(A), T_{Q_{is}}, \mathcal{T}_{Q_{is}})$.

Observe que $D^+(A) \cap D^-(A) = D^b(A)$.

4.4 Sea A categoría abeliana. Sea $i_A : A \to K(A)$ la composición de la inmersión plena $\bar{I}_A$ descrita en (2.2.1) y el funtor $\pi : C(A) \to K(A) := C(A)/\sim$.

Por último sea F la composición $i_A \circ Q$ de i_A seguida del funtor localización $Q : K(A) \to D(A)$. Así para cada $X \in ObA$ y $f \in Hom_A(X,Y)$, FX es un complejo concentrado a nivel cero y $Ff = \overline{(Id_{FX}, FX, f)}$ donde $f : FX^\bullet \to FY^\bullet$ es el morfismo de complejos tal que $f^n = 0$ si $n \neq 0$ y $f^0 = f$.

4.4.1 <u>Proposición</u>: F determina una equivalencia entre A y la subcategoría plena de $D(A)$ formada por los complejos $Y^\bullet$ tal que $H^n(Y^\bullet) = 0$ para todo $n \neq 0$.

<u>Demostración</u>

i) <u>F es fiel</u>

Sean $f, g \in Hom_A(X,Y)$ tales que $F(f) = F(g)$. Por definición de F tenemos que $F(f) = \overline{(Id_{FX}, FX, f)}$ y $F(g) = \overline{(Id_{FX}, FX, g)}$. Esto implica que existan $\alpha : X'' \to FX$, $\beta : X'' \to FX$ y $s : X'' \to FX$ con $s \in Q_{is}$ tales que $\alpha \cdot Id_{FX} = s = \beta \cdot Id_{FX}$ y $\alpha \cdot f = \beta \cdot g$; esto permite concluir que $\alpha = s = \beta$ y $s \cdot f = s \cdot g$. En particular tenemos que $s^0 \cdot f^0 = s^0 \cdot g^0$.

Por ser s un casi-isomorfismo, $s^0 : X''^0 \to X^0$ es un epimorfismo. Luego, $f^0 = g^0$ y así F es fiel.

ii) <u>F es denso</u>

Sea $X \in D(A)$ tal que $H^n(X^\bullet) = 0$ si $n \neq 0$ y es distinto de cero si $n = 0$.

Sea $i : \ker \partial_X^0 \to X^0$ la inclusión de $\ker \partial_X^0$ en X^0, considere el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{-2} \arrow[r, "\partial_X^{-2}"] \arrow[d, "Id_{X^{-2}}"'] & X^{-1} \arrow[r, "\partial_X^{-1}"] \arrow[d, "Id_{X^{-1}}"'] & \ker \partial_X^0 \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{-2} \arrow[r, "\partial_X^{-2}"] & X^{-1} \arrow[r, "\partial_X^{-1}"] & X^0 \arrow[r, "\partial_X^0"] & X^1 \arrow[r, "\partial_X^1"] & X^2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Consideramos el complejo truncado

$$X'^{\cdot}: \cdots \longrightarrow X^{-m} \xrightarrow{\partial_X^{-m}} X^{-(m-1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X^{-2} \xrightarrow{\partial_X^{-2}} X^{-1} \xrightarrow{\partial_X^{-1}} \ker \partial_X^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Sea ψ el siguiente morfismo de complejos

$\psi^{\cdot}: X'^{\cdot} \longrightarrow X^{\cdot}$ tal que
$\psi^n = 0$ si $n > 0$
$\psi^n = Id_{X^n}$ si $n < 0$
$\psi^0 = i$

entonces ψ es un casi-isomorfismo. Así, $X^{\cdot}$ y $X'^{\cdot}$ son isomorfos en $D(A)$.

Sea $\pi: \ker \partial_X^0 \longrightarrow \dfrac{\ker \partial_X^0}{Im\, \partial_X^{-1}} =: H^0(X^{\cdot})$

la proyección canónica en A.

Sea $\varphi: X'^{\cdot} \longrightarrow FH^0(X)$ tal que
$\varphi^n = 0$ si $n \neq 0$
$\varphi^0 = \pi$

por construcción φ es un casi-isomorfismo. Lo que implica que $X^{\cdot}$ es isomorfo a $FH^0(X)$ en $D(A)$.

4.6 Saa $s: X^\bullet \to Y^\bullet$ un morfismo da complajos, dacimos qua s tiana <u>invarso homotópico por la daracha</u> (rasp. por la izquiarda) si axista $t: Y^\bullet \to X^\bullet$ tal qua $s \circ t \sim Id_X$ (rasp. $t \circ s \sim Id_Y$).

<u>Lama</u>: Saa A catagoría abaliana y saa $s: I^\bullet \to Y^\bullet$ un morfismo da complajos da objatos da A. Supongamos qua

i) $H^n(s)$ as isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$.
ii) I^p as inyactivo, para todo $p \in \mathbb{Z}$.
iii) I as acotado por abajo.

Entoncas s tiana invarso homotópico por la daracha.

<u>Damostración</u>

Saa $s: I^\bullet \to Y^\bullet$ un morfismo qua satisfaca las hipótasis dal lama.
Considaramos al triángulo

$$I^\bullet \xrightarrow{s} Y^\bullet \xrightarrow{V_s} C^\bullet(s) \xrightarrow{W_s} TI \quad (\text{var } 2.1.1 \text{ y } 2.1.2).$$

Aplicando al funtor cohomológico dado an (2.7) sa chaca facilmanta qua $C^\bullet(s)$ as acíclico. Así al morfismo $W_s: C^\bullet(s) \to TI^\bullet$ satisfaca las condicionas dal lama (4.5). Luago W_s as homotópico a caro.
En consacuancia axista un morfismo $t: Y^\bullet \to I^\bullet$ qua haca conmutar al siguianta diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
T^{-1}C^{\cdot}(s) \arrow[r, "T^{-1}w_s"] \arrow[d, "Tr"'] & I^{\cdot} \arrow[r, "s"] \arrow[d, equal, "Id_{I^{\cdot}}"'] & Y^{\cdot} \arrow[r, "v_s"] \arrow[d, "t"'] & C^{\cdot}(s) \arrow[d, "r"'] \\
0 \arrow[r] & I^{\cdot} \arrow[r, "Id_{I^{\cdot}}"] & I^{\cdot} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Esto demuestra que $s\cdot t \sim Id_{I^{\cdot}}$.

$\square$

<u>Observación</u>: Observe que el dual del lema (4.5) también es cierto.

Esto permite ver que el dual de (4.6.1) también lo es.

4.7 Sea A categoría abeliana y sea $\mathcal{J}$ la subcategoría (aditiva) de objetos inyectivos de A. Por la observación (1.3) $K^+(\mathcal{J})$ es una subcategoría triangulada de $K^+(A)$. Sea $i: K^+(\mathcal{J}) \to K^+(A)$ el funtor inclusión, el cual es un ∂-funtor por definición.

Por (1.4) y (4.2) $K^+(\mathcal{J})\cap Qis$ es un sistema multiplicativo compatible con la triangulación. Denotamos por $D^+(\mathcal{J})$ a la localización $K^+(\mathcal{J})_{K^+(\mathcal{J})\cap Qis}$.

Denotamos por $Q_{\mathcal{J}}: K^+(\mathcal{J}) \to D^+(\mathcal{J})$ el funtor localización.

4.7.1 <u>Lema</u>: $Q_{\mathcal{J}}: K^+(\mathcal{J}) \to D^+(\mathcal{J})$ es fiel y pleno.

<u>Demostración</u>

a) <u>$Q_{\mathcal{J}}$ es fiel</u>

Sean $a, b \in Hom_{K^+(\mathcal{A})}(X^\cdot, Y^\cdot)$, tales que $Q(a) = Q(b)$ (i.e. $(Id_{X^\cdot}, X^\cdot, a) = (Id_{X^\cdot}, X^\cdot, b)$ en $D^+(\mathcal{A})$), esto implica que existe $Z^\cdot \in K^+(\mathcal{A})$ y $s : Z^\cdot \to X^\cdot$ en $K^+(\mathcal{A}) \cap Q_{is}$ tal que $s \cdot a = s \cdot b$.

Por (FR3) existe $t : Y^\cdot \to Y'^\cdot$ con $t \in K^+(\mathcal{A}) \cap Q_{is}$ tal que $at = bt$. Por (4.6) t tiene inverso homotópico, digamos $h : Y'^\cdot \to Y^\cdot$. Entonces se tiene $a = a \cdot t \cdot h = b \cdot t \cdot h = b$ en $K^+(\mathcal{A})$.

Luego $Q_{\mathcal{A}}$ es fiel.

b) $Q_{\mathcal{A}}$ es pleno

Sea $\overline{(s, X', a)} \in Hom_{D^+(\mathcal{A})}(X, Y)$. Por (FR2) existe el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{a} & Y \\ {\scriptstyle s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{s}} \\ X & \xrightarrow{\bar{a}} & Y' \end{array}$$

donde $\bar{s} \in K^+(\mathcal{A}) \cap Q_{is}$; (*) $\cdots$ $a\bar{s} = s\bar{a}$.

Ya que $Y \in K^+(\mathcal{A})$ y $\bar{s} \in Q_{is}$ existe $t : Y' \to Y$ inverso homotópico de $\bar{s} : Y \to Y'$. Así $\bar{s} \cdot t = Id_Y$.

Componiendo con $t : Y' \to Y$ la ecuación (*) tenemos;

$$a = a \cdot Id_Y = a\bar{s}t = s\bar{a}t .$$

Esto demuestra que $\overline{(s, X', a)} = \overline{(Id_X, X, \bar{a} \cdot t)}$ pues el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
K^+(\mathcal{I}) \arrow[r, "Q_\mathcal{I}"] \arrow[d, "\alpha"'] & D^+(\mathcal{I}) \arrow[dl, dashed, "j"] \\
D^+(A) &
\end{tikzcd}$$

Por tanto si queremos demostrar que α es fiel y pleno, basta demostrar que $Q_\mathcal{I}$ y j lo son.

Por el lema (4.7.1) $Q_\mathcal{I}$ es fiel y pleno.

Por (4.6.1) la condición (ii) de (3.6.2) es satisfecha para $K^+(\mathcal{I})$ y Qis; luego $j: D^+(\mathcal{I}) \to D^+(A)$ es fiel y pleno.

$\square$

4.7.3 <u>Observación</u>: Se puede demostrar que si A tiene suficientes inyectivos (i.e., si cada objeto de A admite una inyección en algún objecto inyectivo) entonces α es una equivalencia de categorías trianguladas. Ver por ejemplo a [Ha, Prop. 4.7].

4.7.4 Sea $X^\cdot = \{X^n, \partial^n_{X^\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un complejo. Supongamos que $X^n = 0$ para $i<r$ y $s<i$ y $X^r \neq 0 \neq X^s$. Entonces el <u>ancho</u> $w(X^\cdot)$, de $X^\cdot$ es por definición igual a $s-r+1$.

4.7.5 Sea A categoría abeliana y sea $\mathcal{I}$ la subcategoría (aditiva) de objetos inyectivos de A. Por consideraciones semejantes a las hechas en (4.7) podemos decir que:

1) $K^b(\mathcal{I})$ es subcategoría triangulada de $K^b(A)$. Llamamos $i^b: K^b(\mathcal{I}) \to K^b(A)$ a la inclusión de $K^b(\mathcal{I})$ en $K^b(A)$.

2) $K^b(\mathcal{I}) \cap Qis$ es un sistema multiplicativo compatible con la triangulación.
Llamamos $Q^b_{\mathcal{I}}: K^b(\mathcal{I}) \to D^b(\mathcal{I})$ al funtor localización.

3) *Es fácil demostrar que* $Q^b_{\mathcal{I}}: K^b(\mathcal{I}) \to D^b(\mathcal{I})$ es fiel y plano (prueba análoga a la de 4.7.1).

Como en (4.7.2) sea $\alpha^b: K^b(\mathcal{I}) \to D^b(A)$ el ∂-funtor dado por la composición $i^b \cdot Q^b$, *donde* $Q^b: K^b(A) \to D^b(A)$ es el funtor localización.

<u>Proposición</u> : Sea A categoría abeliana tal que *dim gl iny* $A < \infty$. Sea $\mathcal{I}$ la subcategoría (aditiva) de objetos inyectivos de A. *Entonces el funtor*

$$\alpha^b: K^b(\mathcal{I}) \longrightarrow D^b(A)$$

es una equivalencia de categorías trianguladas.

<u>Demostración</u>

a) <u>α^b es fiel y plano</u>.

Esto se sigue facilmente de la demostración de (4.7.2).

b) α^b es denso.

Para demostrar que α^b es denso, procedemos por inducción en el ancho $w(X^\bullet)$, de $X^\bullet$.

i) $w(X^\bullet)=1$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $X^\bullet$ es un complejo concentrado a nivel cero.

Sea $0 \to X^0 \xrightarrow{r} I^1 \xrightarrow{\delta_1} I^2 \xrightarrow{\delta_2} \cdots \xrightarrow{\delta_{r-1}} I^r \to 0$ una resolución inyectiva para $X^0 \in A$.

Sean $I^\bullet \in K^b(\mathcal{A})$ y $\tilde{r} : X^\bullet \to I^\bullet$ definidos por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet : \arrow[d, "\tilde{r}"'] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X^0 \arrow[r] \arrow[d, "r"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
I^\bullet : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r, "\delta_1"] & I^2 \arrow[r, "\delta^2"] & \cdots \arrow[r] & I^r \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Claramente $\tilde{r} \in Qis$. En consecuencia $X^\bullet \cong I^\bullet$ en $D^b(A)$ y así α^b es denso si $w(X^\bullet)=1$.

ii) Supongamos que para todo complejo $Y^\bullet \in D^b(A)$ tal que $w(Y^\bullet) \leq n-1$ existe $I^\bullet \in K^b(\mathcal{A})$ tal que $\alpha^b(I^\bullet) \cong Y^\bullet$.

Sea $X^\bullet := (X^i, \partial^i_{X^\bullet})_{i \in \mathbb{Z}}$ en $D^b(A)$ tal que $w(X^\bullet)=n$. Por demostrar que existe $I^\bullet \in K^+(\mathcal{A})$ tal que $\alpha^b(I^\bullet) = X^\bullet$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $X^m = 0$ si $m<0$ y $X^0 \neq 0$.

4.7.6 Aquí A denota una K-álgebra, sobre un campo algebraicamente cerrado (de característica arbitraria), de dimensión finita.

Por A-mod denotamos la categoría de A-módulos izquierdos finitamente generados.

<u>Corolario</u>: Sea A una K-álgebra de dimensión global finita. Sea ${}_A\mathcal{I}$ la subcategoría plena de A-mod de objetos inyectivos. Entonces $K^b({}_A\mathcal{I})$ es equivalente triangular a $D^b(A\text{-mod})$. $\square$

4.8 Sean ${}_A\mathcal{P}$ y ${}_A\mathcal{I}$ las subcategorías plenas de A-módulos, definidos por los objetos proyectivos e inyectivos respectivamente. Denotamos por ν el <u>funtor de Nakayama</u> definido por $\nu := D\mathrm{Hom}_A(-, {}_AA)$, para más información ver por ejemplo [G2] o [Ri6]. En el capítulo II secciones (3.6.1) y (3.6.2) se prueba que ν induce una equivalencia triangular entre $K^b({}_A\mathcal{P})$ y $K^b({}_A\mathcal{I})$.

<u>Corolario</u>: Las categorías $K^b({}_A\mathcal{I})$, $K^b({}_A\mathcal{P})$ y $D^b(A\text{-mod})$ son equivalentes como categorías trianguladas.

4.9 Lema: Si $X^{\cdot} \cong Y^{\cdot}$ en $D(A)$ entonces $H^n(X^{\cdot}) \cong H^n(Y^{\cdot})$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Donde H^n se define en (2.7).

Demostración

Sea $f: X^{\cdot} \to Y^{\cdot}$ un isomorfismo de $X^{\cdot}$ a $Y^{\cdot}$ en $D(A)$. Sea $g: Y^{\cdot} \to X^{\cdot}$ el inverso de f en $D(A)$. Por (1.2(c)) existe $h: C^{\cdot}(f) \to 0$ isomorfismo en $D(A)$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X^{\cdot} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y^{\cdot} \arrow[r, "V_f"] \arrow[d, "g"] & C^{\cdot}(f) \arrow[r, "W_f"] \arrow[d, dashed, "h"] & TX^{\cdot} \arrow[d, Rightarrow] \\
X^{\cdot} \arrow[r, Rightarrow] & X^{\cdot} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & TX^{\cdot}
\end{tikzcd}$$

Luego tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^n(X^{\cdot}) \arrow[r, "H^n(f)"] \arrow[d, "H^n(1d_{X^{\cdot}})"'] & H^n(Y^{\cdot}) \arrow[r, "H^n(V_f)"] \arrow[d, "H^n(g)"'] & H^n(C^{\cdot}(f)) \arrow[r, "H^n(W_f)"] \arrow[d, "H^n(h)"'] & H^{n+1}(X^{\cdot}) \arrow[r, "H^{n+1}(f)"] \arrow[d, Rightarrow, "H^{n+1}(1d_{X^{\cdot}})"'] & H^{n+1}(Y^{\cdot}) \arrow[r, "H^{n+1}(V_f)"] \arrow[d, "H^{n+1}(g)"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^n(X^{\cdot}) \arrow[r, Rightarrow, "H^n(1d_{X^{\cdot}})"] & H^n(X^{\cdot}) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & H^{n+1}(X^{\cdot}) \arrow[r, "H^n(1d_{X^{\cdot}})"] & H^{n+1}(X^{\cdot}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Por el lema del cinco $H^n(h)$ es un isomorfismo de grupos abelianos. Luego $H^n(C^{\cdot}(f)) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Observe que $Y^n \xrightarrow{V_f^n} C^n(f) \xrightarrow{W_f^n} TX^n$ es una sucesión exacta corta en A para todo $n \in \mathbb{Z}$. De esto se concluye que $H^n(C^{\cdot}(f)) = H^n(Y^{\cdot}) + H^n(TX^{\cdot}) =$
$= H^n(Y^{\cdot}) + H^{n+1}(X^{\cdot}) = H^n(Y^{\cdot}) - H^n(X^{\cdot})$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Luego $H^n(X^{\cdot}) = H^n(Y^{\cdot})$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Por (TR1) el morfismo $u: X^\cdot \to Y^\cdot$ forma parte de un triángulo, como el siguiente

$$X^\cdot \xrightarrow{u} Y^\cdot \xrightarrow{v_u} C^\cdot(u) \xrightarrow{w_u} TX^\cdot$$

Sea $g: C^\cdot(u) \to Z^\cdot$ tal que
$$g^i: X^{i+1} \oplus Y^i \to Z^i$$
$$(a,b) \mapsto v^i(b)$$

por construcción

$$\begin{tikzcd}
Y^\cdot \arrow[r, "v_u"] \arrow[d, "Id_{Y^\cdot}"'] & C^\cdot(u) \arrow[d, "g"] \\
Y^\cdot \arrow[r, "v"] & Z^\cdot
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo.

Usando la sucesión larga de cohomología para el triángulo $(X^\cdot, Y^\cdot, C^\cdot(u), u, v_u, w_u)$ y la sucesión larga de cohomología para la sucesión exacta corta $0 \to X^\cdot \xrightarrow{u} Y^\cdot \xrightarrow{v} Z^\cdot \to 0$ el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & H^i(X^\cdot) \arrow[r, "H^i(u)"] \arrow[d, "Id_{H^i(X^\cdot)}"'] & H^i(Y^\cdot) \arrow[r, "H^i(v_u)"] \arrow[d, "Id_{H^i(Y^\cdot)}"'] & H^i(C^\cdot(u)) \arrow[r, "H^i(w_u)"] \arrow[d, "H^i(g)"'] & H^{i+1}(X^\cdot) \arrow[r, "H^{i+1}(u)"] \arrow[d, "Id_{H^{i+1}(X^\cdot)}"'] & H^{i+1}(Y^\cdot) \arrow[r] \arrow[d, "Id_{H^{i+1}(Y^\cdot)}"'] & \cdots \\
\arrow[r] & H^i(X^\cdot) \arrow[r, "H^i(u)"] & H^i(Y^\cdot) \arrow[r, "H^i(v)"] & H^i(Z^\cdot) \arrow[r, "\omega"] & H^{i+1}(X^\cdot) \arrow[r, "H^{i+1}(u)"] & H^{i+1}(Y^\cdot) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde ω es el homomorfismo de conexión. ver [Rt].

donde por el lema del cinco $H^i(g)$ es isomorfismo. De aquí que g es un casi-isomorfismo en $K(A)$.

Sea $g^{-1}: Z^{\cdot} \to C^{\cdot}(u)$ el morfismo inverso de g en $D(A)$.

Por construcción, la séxtupla $(X^{\cdot}, Y^{\cdot}, Z^{\cdot}, u, v, g^{-1} \cdot w_u)$ es un triángulo en $D(A)$ (ver 3.6.1). Lo cual concluye nuestra demostración (por 1.2.b).

$\square$

5.3 <u>Observación</u>: Se sigue de la prueba que cuando

$$0 \to X^{\cdot} \xrightarrow{u} Y^{\cdot} \xrightarrow{v} Z^{\cdot} \to 0$$

es una sucesión exacta corta de objetos de $C(A)$ entonces existe un morfismo $w: Z^{\cdot} \to TX^{\cdot}$ en $D^b(A)$ que hace a la sextupla $(X^{\cdot}, Y^{\cdot}, Z^{\cdot}, u, v, w)$ un triángulo.

5.4 <u>Proposición</u>: Si A tiene suficientes proyectivos entonces para cada $X, Y \in A$ el $Ext^i_{D(A)}(X, Y)$ definido antes es el $Ext^i_A(X, Y)$ usual en A.

<u>Demostración</u>

Antes, hagamos las siguientes consideraciones.

5.4.1 Sea $X^{\cdot}$ un complejo concentrado a nivel cero

$$X^{\cdot}: \cdots \to 0 \to X^0 \to 0 \to \cdots$$

Sea $\cdots \longrightarrow P^r \xrightarrow{\delta^r} P^{r-1} \xrightarrow{\delta^{r-1}} \cdots \longrightarrow P^1 \xrightarrow{\delta^1} P^0 \xrightarrow{\tilde{\pi}} X \longrightarrow 0$ una resolución proyectiva de X^0 en A.

A continuación definimos un complejo $P^\cdot$ y un morfismo $\pi^\cdot : P^\cdot \longrightarrow X^\cdot$ como sigue

$$P^\cdot : \cdots \longrightarrow P^{r+1} \longrightarrow P^r \xrightarrow{\partial^r_{P^\cdot}} P^{r-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^1 \xrightarrow{\partial^1_{P^\cdot}} P^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

donde P^{r+1} está en el nivel $-(r+1)$, P^r en el nivel $-r$ etc, etc. Y así se concluye que P^0 está en el nivel cero, y $\partial^i_P = \delta i$ para $i \in \{1, 2, \cdots, r, r+1, \cdots\}$.

El morfismo de complejos $\pi : P^\cdot \longrightarrow X^\cdot$ se define por

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
P^\cdot : & \cdots \longrightarrow & P^{r+1} & \longrightarrow & P^r & \longrightarrow & P^{r-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & P^1 & \longrightarrow & P^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \cdots \\
\pi \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow \tilde{\pi} & & \Big\downarrow & \\
X^\cdot : & \cdots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

<u>Observación</u>: *Nota al lector que* π es un casi-isomorfismo en $K(A)$ y por tanto un isomorfismo en $D(A)$.

5.4.2 <u>Lema</u>: Sean $X^\cdot, Y^\cdot \in D(A)$ concentrados a nivel cero. *Entonces* $Hom_{D(A)}(X^\cdot, TY^\cdot) \cong Hom_{K(A)}(P^\cdot, TY^\cdot)$ donde $P^\cdot$ es el complejo definido en 5.4.1.

<u>Demostración</u>

Con $(Id_{P^\bullet}, P^\bullet, \pi^\bullet) \in Hom_{D(A)}(P^\bullet, X^\bullet)$ tenemos

$$(Id_{P^\bullet}, P^\bullet, a^\bullet) = (Id_{P^\bullet}, P^\bullet, \pi)\cdot(\pi^\bullet, P^\bullet, a^\bullet) = (Id_{P^\bullet}, P^\bullet, \pi)\cdot(\pi^\bullet, P^\bullet, b^\bullet) =$$
$$= (Id_{P^\bullet}, P^\bullet, b^\bullet)$$

Si $(Id_{P^\bullet}, P^\bullet, b^\bullet) = (Id_{P^\bullet}, P^\bullet, a^\bullet)$ entonces existe $X'^\bullet \in Ob\, K^b(A)$, $f, g : X'' \to P^\bullet$ y $u^\bullet : X'' \to P^\bullet \in Qis$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & & P^\bullet \arrow[dl, "Id_{P^\bullet}"'] \arrow[dr, "a^\bullet"] & \\
X'' \arrow[urr, bend left, "f^\bullet"] \arrow[r, "u^\bullet"] \arrow[drr, bend right, "g^\bullet"'] & P^\bullet & & TY^\bullet \\
 & & P^\bullet \arrow[ul, "Id_{P^\bullet}"] \arrow[ur, "b^\bullet"'] &
\end{tikzcd}$$

se sigue que $f = u = g$ y así $u\cdot a = u\cdot b$. Por la observación (4.6) u tiene inverso homotópico por la izquierda.

Entonces $a = b$ en $K^b(A)$ luego Ψ es inyectiva. Esto prueba que Ψ es un isomorfismo.

Ψ es isomorfismo

Primero damos a $Hom_{D(A)}(X^\bullet, T^\bullet Y^\bullet)$ una estructura

$$\overline{(s, x'', a)} + \overline{(r, x''', b)} = \overline{(s, x'', a)} + \overline{(r_1, x_1''', b_1)}.$$

Esto demuestra la independencia de los representantes.

b) <u>Es asociativa</u>.

Sean $\overline{(s_1, x_1, a_1)}$, $\overline{(s_2, x_2, a_2)}$ y $\overline{(s_3, x_3, a_3)} \in Hom_{D(A)}(X^\cdot, T^i Y^\cdot)$.

$$\left[\overline{(s_1, x_1, a_1)} + \overline{(s_2, x_2, a_2)}\right] + \overline{(s_3, x_3, a_3)} = \overline{(\pi, p^\cdot, \alpha \cdot a_1 + \beta a_2)} + \overline{(s_3, x_3, a_3)} =$$

$$= \overline{(\pi, p^\cdot, Id_{p^\cdot} \circ (\alpha a_1 + \beta \cdot a_2) + \gamma a_3)} = \overline{(\pi, p^\cdot, (\alpha a_1 + \beta a_2) + \gamma a_3)} =$$

$$= \overline{(\pi, p^\cdot, \alpha a_1 + (\beta a_2 + \gamma a_3))} = \overline{(\pi, p^\cdot, \alpha a_1 + Id_{p^\cdot} \circ (\beta a_2 + \gamma a_3))} =$$

$$= \overline{(\pi, p^\cdot, a_1)} + \overline{(\pi, p^\cdot, Id_{p^\cdot} \circ (\beta a_2 + \gamma a_3))} =$$

$$= \overline{(\pi, p^\cdot, a_1)} + \left[\overline{(s_2, x_2, a_2)} + \overline{(s_3, x_3, a_3)}\right]$$

lo que prueba la asociatividad de $+$.

c) <u>$Hom_{D(A)}(X^\cdot, T^i Y^\cdot)$ tiene neutro aditivo</u>.

Sea $(\pi, p^\cdot, c) \in Hom_{D(A)}(X^\cdot, T^i Y^\cdot)$ donde $c \in Hom_{K(A\text{-mod})}(P^\cdot, T^i Y^\cdot)$

y c es el morfismo cero en el grupo $Hom_{K(A\text{-mod})}(P^\cdot, T^i Y^\cdot)$.

5.4.3 <u>Lema</u>: Sean $X^\cdot, Y^\cdot \in D(A)$ concentrados a nivel cero y sea $P^\cdot$ el complejo definido en 5.4.1. Entonces $Hom_{K(A)}(P^\cdot, T^i Y^\cdot) \cong Ext_A^i(X, Y)$ donde $X^0 := X$ y $Y^0 := Y$.

<u>Demostración</u>

Un morfismo $f: P^\cdot \to T^i Y^\cdot$ en $K(A)$ se ve así:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
P^\cdot: & \cdots \to & P^{i+1} & \xrightarrow{\partial_{P^\cdot}^{-(i+1)}} & P^i & \xrightarrow{\partial_{P^\cdot}^{-i}} & P^{i-1} & \to & \cdots & \to & P^0 & \to & 0 \to \cdots \\
f\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \bar{f}^i & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
T^i Y^\cdot: & \cdots \to & 0 & \to & Y^0 & \to & 0 & \to & \cdots & \to & 0 & \to & 0 \to \cdots
\end{array}$$

y es tal que $\partial_{P^\cdot}^{-(i+1)} \circ \bar{f}^i = 0$.

Teníamos que $\cdots \xrightarrow{\partial_P^{-2}} P^1 \xrightarrow{\partial_P^{-1}} P^0 \xrightarrow{\partial_P^0} X \to 0$ es una resolución proyectiva de X, eso define un complejo:

$$0 \to Hom_A(X, Y) \xrightarrow{\partial_P^{0*}} Hom_A(P^0, Y) \xrightarrow{\partial_P^{-1*}} Hom_A(P^1, Y) \xrightarrow{\partial_P^{-2*}} Hom_A(P^2, Y) \to \cdots$$

y, por definición, $Ext_A^i(X, Y) = \dfrac{\operatorname{Ker} \partial_{P^\cdot}^{-(i+1)*}}{\operatorname{Im} \partial_P^{-i*}}$.

Las consideraciones hechas al principio de la demostración, muestran que:

$\varphi: \operatorname{Ker} \partial_P^{-(i+1)*} \longrightarrow Hom_{K(A)}(P^\cdot, T^i Y^\cdot)$ tal que $\varphi(g) = g^\cdot$ con $g^{-i} = g$ y $g^j = 0$ si $j \neq i$.
Es morfismo sobre de grupos (bien definido). Pero, resulta que $\varphi(g)$ es homotópico a cero si y sólo si g se factoriza

por ∂_P^{-i} (i.e. $g \in \mathrm{Im}\,\partial_P^{-i*}$). Entonces φ induce un isomorfismo $\mathrm{Ext}_A^{i}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K'(A)}(P^{\cdot}, T^{\cdot}Y')$.

$\square$.

CAPITULO II:

CATEGORIAS DERIVADAS Y REPRESENTACION DE ALGEBRAS.

§ 1 Módulos de tilteo.

Sea A una k-álgebra de dimensión finita, la cual se supone de dimensión global finita a lo largo de este capítulo. *En este capítulo también denotamos* por $D^b(A)$ $\{D(A), D^+(A), D^-(A)\}$ a la categoría $D^b(A\text{-mod})$ donde *A-mod es la categoría A-módulos izquierdos de dimensión finita,* (respectivamente $D(A\text{-mod})$, $D^+(A\text{-mod})$ y $D^-(A\text{-mod})$).

Sea M un *A-módulo, entonces obtenemos* de manera natural un funtor $\varphi : K^b(\operatorname{add} M) \to D^b(A)$, el cual es la composición del funtor *inclusión* $K^b(\operatorname{add} M)$ en $K^b(A\text{-mod})$ y el funtor localización $Q : K^b(A\text{-mod}) \to D^b(A)$. Entonces φ es ∂-funtor.

1.1 Lema: Supongamos que $\operatorname{Ext}^i_A(M,M)=0$ para *todo $i>0$. Entonces φ es fiel y pleno.*

Demostración

Sea $M_1^{\cdot}, M_2^{\cdot}$ en $K^b(\operatorname{add} M)$. Nos proponemos demostrar que φ *induce* un isomorfismo de $\operatorname{Hom}_{K^b(\operatorname{add} M)}(M_1^{\cdot}, M_2^{\cdot})$ en $\operatorname{Hom}_{D^b(A)}(\varphi(M_1^{\cdot}), \varphi(M_2^{\cdot}))$.

Para demostrarlo procedemos por doble inducción en el ancho, $\omega(M_1^{\cdot})$ de $M_1^{\cdot}$ y en el ancho $\omega(M_2^{\cdot})$ de $M_2^{\cdot}$.

Caso I) $\omega(M_1^{\cdot}) = \omega(M_2^{\cdot}) = 1$

Usando T o T^- podemos suponer que $M_2^{\cdot}$ es un complejo concentrado a nivel cero. Escribiremos $M_2^{\cdot} = M_2$ con $M_2 \in \operatorname{add} M$. Como $\omega(M_1^{\cdot})=1$, existe $M_1 \in \operatorname{add} M$ tal que $M_1^{\cdot} = T^i M_1$.

Si $i=0$ entonces $\operatorname{Hom}_{D^b(A)}(M_1^{\cdot}, M_2^{\cdot}) \cong \operatorname{Hom}_A(M_1, M_2) \cong$ (ver Cap I 4.4)
$\cong \operatorname{Hom}_{K^b(\operatorname{add} M)}(M_1^{\cdot}, M_2^{\cdot})$.

donde $u_* := \mathrm{Hom}_{K^b(\mathrm{add}M)}(M_1^\cdot, u)$, $\bar{u}_* := \mathrm{Hom}_{D(A)}(M_1^\cdot, u)$. (De manera similar se definen v_*, w_*, $(-Tu)_*$, $\bar{v}_*$, $\bar{w}_*$ y $\overline{(-Tu)}_*$. Ya que el ancho de $T^{-1}M_2^{\circ}$, M_2', $M_2^{\bullet}$, TM_2'' es menor que r entonces $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$ y φ_5 son isomorfismos por hipótesis de inducción.

Por el lema del cinco concluimos que φ_3 es isomorfismo.

<u>Caso III</u>) Sea $M_2^\cdot$ un complejo arbitrario en $K^b(\mathrm{add}M)$. Y supongamos que φ induce un isomorfismo

$$\bar{\varphi} : \mathrm{Hom}_{K^b(\mathrm{add}M)}(X^\cdot, M_2^\cdot) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D(A)}(X^\cdot, M_2^\cdot)$$

para cada complejo $X^\cdot \in K^b(\mathrm{add}M)$ tal que $w(X^\cdot) \leq r-1$. Sea $M_1^\cdot$ complejo de $K^b(\mathrm{add}M)$ tal que $w(M_1^\cdot) = r$. *Entonces φ induce un isomorfismo*.

$$\bar{\varphi} : \mathrm{Hom}_{K^b(\mathrm{add}M)}(M_1^\cdot, M_2^\cdot) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D(A)}(M_1^\cdot, M_2^\cdot)$$

La demostración de esta afirmación es análoga a la demostración del caso II).

□

1.2 Decimos que un A-módulo X tiene <u>*M*-codimensión finita</u> s (lo que denotamos por M-$\mathrm{codim}(X) = s$) si existe una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_s \longrightarrow 0$$

con $M_i \in \mathrm{add}M$ para $0 \leq i \leq s$ y s es el mínimo natural con esta propiedad.

Lema: Sea M un A-módulo tal que $\operatorname{Ext}_A^i(M,M)=0$ para $i>0$ y suponga que A tiene M-codimensión finita. Entonces $\dim \operatorname{proy} M \leq r$ implica que $M\text{-codim}(A) \leq \dim\operatorname{proy} M$.

Demostración

Por hipótesis sabemos que existe una sucesión exacta de la forma:

$$0 \to A \to M_0 \xrightarrow{\partial^0} M_1 \xrightarrow{\partial^1} \cdots \to M_{s-1} \xrightarrow{\partial^{s-1}} M_s \to 0, \text{ con } M_i \in \operatorname{add} M,$$

donde s es mínima, esto es, $K^{s-1} := \ker \partial^{s-1} = \operatorname{Im} \partial^{s-2}$ no está en $\operatorname{add} M$.

Supongamos que $s>r$. Se sigue que $\operatorname{Ext}_A^1(M, K^{s-1})$ es isomorfo a $\operatorname{Ext}_A^s(M,A)=0$, ya que $\dim\operatorname{proy} M \leq r < s$. Luego, la sucesión $0 \to K^{s-1} \to M_{s-1} \xrightarrow{\partial^{s-1}} M_s \to 0$ se escinde y se tiene que $K^{s-1} \in \operatorname{add} M$, contradicción. Así, $s \leq r$.

□

1.3 **Proposición:** Sea M un A-mod tal que $\operatorname{Ext}_A^i(M,M)=0$ para todo $i>0$. Sea P proyectivo inescindible entonces la $M\text{-codim}(P)<\infty$ si la $M\text{-codim}(A)<\infty$.

Para la demostración desarrollamos antes una serie de resultados auxiliares.

1.3.1 Sea M un A-mod tal que $\operatorname{Ext}_A^i(M,M)=0$ para todo $i>0$. Denotamos por B al anillo de endomorfismos de M. M tiene estructura de B-módulo derecho por $m\cdot f := f(m)$.

para cada $m \in M$ y para cada $f \in B$, da la misma manara cada $X \in \operatorname{add} M$ tiana astructura da B-módulo daracho. Danotamos por ${}_B\mathcal{P}$ la subcatagoría plana B-módulos izquiardos proyactivos.

<u>Lama</u>: $Hom_A(M,-) : \operatorname{add} M \to {}_B\mathcal{P}$ as una aquivalancia.

<u>Damostración</u>

Saa $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ una dascomposición da M an inascindiblas antoncas $B = \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_A(M, M_i)$ as una dascomposición da ${}_BB$ an proyactivos inascindiblas. Saa $B_i := Hom_A(M, M_i)$.

Claramanta $Hom_A(M,-)$ as danso puas si $X \in {}_B\mathcal{P}$ antoncas X as isomorfo a una suma finita da X_i donda X_i as isomorfo a $B_i^{n_i}$ para algún $n_i \in \mathbb{N}$, paro ya qua $B_i \in \operatorname{Im} Hom_A(M,-)$ antoncas axista $\bar{X} \in \operatorname{add} M$ tal qua $Hom_A(M, \bar{X}) = X$, lo cual damuastra qua al funtor $Hom_A(M,-)$ as danso.

Sólo rasta damostrar qua $Hom_A(M_i, M_j)$ as isomorfo naturalmanta a $Hom_B(Hom_A(M, M_i), Hom_A(M, M_j))$ bajo al morfismo inducido por $Hom_A(M,-)$. Para asto damostraramos qua $M \otimes_B Hom_A(M, M_i)$ as isomorfo a M_i.

Para $X \in A\text{-mod}$ dafinimos $\varphi_X : M \otimes_B Hom_A(M, X) \to X$, $m \otimes f \mapsto f(m)$.

Claramanta, φ_X as natural y φ_M as iso. Luago si $X \in \operatorname{add} M$, φ_X as iso.

Obtanamos antoncas

$$Hom_B(Hom_A(M, M_i), Hom_A(M, M_j)) \overset{a}{\cong} Hom_A(M \otimes_B Hom_A(M, M_i), M_j) \overset{\varphi_{M_i}}{\longleftarrow}$$

$$\cong Hom_A(M_i, M_j)$$

donda a as al isomorfismo dado por la adjunción y

$\varphi_{M_j}^* = \mathrm{Hom}_A(\varphi_{M_2}, M_j)$. Es fácil checar que la composición $\varphi_{M_j}^* \circ a$ es igual a $\mathrm{Hom}_A(M, -)$.

$\square$

1.3.2 Sea $\varphi : A \to \mathrm{End}_B(M_B)$, donde

$$a \mapsto \varphi_a$$
$$\varphi_a : M \to M$$
$$m \mapsto am.$$

Claramente φ está bien definida, φ es un morfismo de álgebras φ_a es B-homomorfismo, para cada $a \in A$.

<u>Lema</u>: Supongamos que M es un A-módulo tal que $\mathrm{Ext}_A^i(M, M) = 0$ para todo $i > 0$ y la M-$\mathrm{codim}(A) < \infty$. Entonces φ es isomorfismo.

<u>Demostración</u>

<u>φ es mono</u>:

Sea $a \in A$ tal que $\varphi_a = 0$, esto implica que $am = 0$ para todo $m \in M$.

Ya que M-$\mathrm{codim}(A) < \infty$, existe un morfismo inyectivo $i : A \to M_0$ con $M_0 \in \mathrm{add}\, M$. Esto implica que $i(a) = a\, i(1) = 0$.

<u>φ es epi</u>:

Como M-$\mathrm{codim}(A) < \infty$, existe una sucesión exacta

$$0 \to A \xrightarrow{i} M_0 \xrightarrow{g_0} M_1 \xrightarrow{g_1} M_2 \to \cdots \xrightarrow{g_{s-1}} M_s \to 0$$

con $M_i \in \operatorname{add} M$.

El funtor $\operatorname{Hom}_A(-,M)$ induce una sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(M_s,M) \xrightarrow{g_{s-1}^*} \operatorname{Hom}_A(M_{s-1},M) \to \cdots \xrightarrow{g_0^*} \operatorname{Hom}_A(M_0,M) \xrightarrow{i^*} M \to 0$$

En efecto, llamamos $K_i = \ker g_i$. Entonces la sucesión exacta

$$0 \to K_{s-1} \to M_{s-1} \xrightarrow{g_{s-1}} M_s \to 0$$ induce la sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(M_s,M) \xrightarrow{g_{s-1}^*} \operatorname{Hom}_A(M_{s-1},M) \to \operatorname{Hom}_A(K_{s-1},M) \to 0 \to 0 \to \operatorname{Ext}_A^1(K_{s-1},M) \to 0$$

Luego $\operatorname{Ext}_A^1(K_{s-1},M)=0$ y la sucesión

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(K_{s-1},M) \to \operatorname{Hom}_A(M_{s-2},M) \to \operatorname{Hom}_A(K_{s-2},M) \to 0$$

es exacta y $\operatorname{Ext}_A^1(K_{s-2},M)=0$. Continuando así, se checa la afirmación.

Sea $b \in \operatorname{End}_B(M)$. Como cada $\operatorname{Hom}_A(M_i,M)$ es un B-módulo proyectivo obtenemos un diagrama conmutativo de B-módulos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_A(M_s,M) \arrow[r, "g_{s-1}^*"] \arrow[d, "b_s"] & \operatorname{Hom}_A(M_{s-1},M) \arrow[r] \arrow[d, "b_{s-1}"] & \cdots \arrow[r, "g_0^*"] & \operatorname{Hom}_A(M_0,M) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "b_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "b"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_A(M_s,M) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_A(M_{s-1},M) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \operatorname{Hom}_A(M_0,M) \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por el lema anterior, $b_i = a_i^*$ con $a_i \in \operatorname{Hom}_A(M_i,M_i)$. Luego existe $a \in A$ tal que el siguiente diagrama, de A-mod, es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "a"] & M_0 \arrow[r] \arrow[d, "a_0"] & \cdots \arrow[r] & M_{s-1} \arrow[r] \arrow[d, "a_{s-1}"] & M_s \arrow[d, "a_s"] \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & M_0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M_{s-1} \arrow[r] & M_s
\end{tikzcd}$$

Se sigue que $b = a^* = f_{a(1)}$.

$\square$

1.3.3 <u>Demostración de la proposición 1.3</u>

Sea $B = End_A(M)$. Aplicando el funtor $Hom_A(-, M)$ a la sucesión exacta $0 \to {}_AA \to M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_s \to 0$, por (1.3.1), se obtiene que dim proy $M_B \leq s$

Sea P un A-módulo proyectivo inescindible, digamos $P = Ae$ para algún idempotente primitivo $e \in A$. Como $(eM)_B$ es sumando sumando directo de M_B, podemos tomar una resolución proyectiva $0 \to Q_t \to \cdots \to Q_0 \to eM \to 0$ en B-mod, con $t \leq s$.

Como $Hom_B(eM, M) \cong Hom_B(M, M)e \cong Ae = P$ (1.3.2), además como en (1.3.1) $Hom_B(-, M) : P_B \to add M$ es equivalencia. Luego M-codim$(P) \leq t$

$\square$

1.4 <u>Lema</u>: Sean A y B K-álgebras de dimensión finita de forma que $D^b(A)$ y $D^b(B)$ sean equivalentes como categorías trianguladas. Entonces gldim $A < \infty$ si y sólo si gldim $B < \infty$.

<u>Demostración</u>

1.5 <u>Lema</u> Sea M un A-módulo tal que $\mathrm{Ext}_A^i(M,M)=0$ para $i>0$. Si la M-codim$({}_AA)<\infty$, entonces el funtor $\varphi: K^b(\mathrm{add}M)\to D^b(A)$ es denso.

<u>Demostración</u>

Ya que gldim $A<\infty$ entonces $D^b(A)$ es equivalente a $K^b({}_A\mathcal{P})$ como categorías trianguladas (ver cap. I, 4.9). Así sea $P^\bullet\in K^b({}_A\mathcal{P})$ por demostrar que $P^\bullet\cong\varphi(M^\bullet)$ con $M^\bullet\in K^b(\mathrm{add}M)$. La demostración es por inducción en el ancho $w(P^\bullet)$ de $P^\bullet$. Si $w(P^\bullet)=1$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $P^\bullet$ está concentrado a nivel cero, así podemos ver a $P^\bullet$ como $P\in{}_A\mathcal{P}$. Como M-codim$(A)<\infty$ entonces existe una sucesión exacta

$$0\to P\xrightarrow{i} M^0\xrightarrow{a_0}M^1\xrightarrow{a_1}\cdots\xrightarrow{a_{r-1}}M^r\to 0$$

(ver 1.3). Sea $M^\bullet$ el complejo definido por

$$M^\bullet:\cdots\to 0\to M^0\xrightarrow{\partial_M^0}M^1\xrightarrow{\partial_M^1}\cdots\to M^r\to 0\to\cdots$$

donde $a_i:=\partial_M^i$.

Sea $i^\bullet$ el morfismo de complejos definido por

$$\begin{tikzcd}
P^\bullet: \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
M^\bullet: \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M^0 \arrow[r, "\partial_M^0"] & M^1 \arrow[r, "\partial_M^1"] & \cdots \arrow[r, "\partial_M^{r-1}"] & M^r \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

el cual es claramente un casi-isomorfismo. Así $\varphi(M^\bullet)=P^\bullet$.

Supongamos que $P^\bullet\in K^b({}_A\mathcal{P})$ tal que $w(P^\bullet)>1$. Por la la sección (cap. I 2.2.2), podemos considerar

$$T^{-1}\,{}^0P^\bullet\xrightarrow{\overline{\partial_P}}P^{\bullet\prime}\xrightarrow{v_{\bar\partial}}P^\bullet\xrightarrow{w_{\bar\partial}}{}^0P^\bullet$$

al triángulo inducido por ∂_M°. Por construcción $w(T^-P^\circ), w(P'') < w(P^\cdot)$

Por hipótesis de inducción existen $M_1^\cdot, M_2^\cdot \in K^b(\mathrm{add}\,M)$ tales que $\varphi(M_1^\cdot) \cong T^-P^\circ$, $\varphi(M_2^\cdot) \cong P''$ es decir existen $\psi_1^\cdot : T^-P^\circ \to M_1^\cdot$ y $\psi_2^\cdot : P'' \to M_2^\cdot$ isomorfismos en $D^b(A)$. Tenemos

$$\begin{tikzcd}
T^-P^\cdot \arrow[r, "\overline{\partial_{P^\cdot}^\circ}"] \arrow[d, "\psi_1"'] & P'' \arrow[r, "v_{\overline{\partial}}"] \arrow[d, "\psi_2"'] & P^\cdot \arrow[r, "w_{\overline{\partial}}"] \arrow[d, dashed, "\psi_3"'] & {}^{\circ}P^\cdot \arrow[d, "T\psi_1"'] \\
M_1 \arrow[r] & M_2 \arrow[r] & C^\cdot(\psi_1^{-1} \circ \overline{\partial_{P^\cdot}^\circ} \circ \psi_2) \arrow[r] & TM_1
\end{tikzcd}$$

donde $\psi_3 : P^\cdot \to C^\cdot(\psi_1^{-1} \circ \overline{\partial_{P^\cdot}^\circ} \circ \psi_2)$ existe por (TR3) y por (cap. I . 1.2) ψ_3 es isomorfismo en $D^b(A)$; pero $C^\cdot(\psi_1^{-1} \circ \overline{\partial_{P^\cdot}^\circ} \circ \psi_2) \in K^b(\mathrm{add}\,M)$ luego, φ es denso.

1.6 <u>Teorema</u>. Sea M un A-módulo tal que $\mathrm{Ext}_A^i(M,M)=0$ para $i>0$ y supongamos que A tiene M-codim. finita. Sea $B = \mathrm{End}\,M$ y suponga que $\mathrm{gldim}\,B < \infty$. Entonces el funtor $F = \mathrm{Hom}_A(M,-) : A\text{-mod} \to B\text{-mod}$ induce una equivalencia triangulada $\tilde{F} : D^b(A) \to D^b(B)$.

<u>Demostración</u>

Como en (1.3.1), $\mathrm{Hom}_A(M,-) : \mathrm{add}\,M \to {}_B\mathcal{P}$ es una equivalencia. Usando (cap. I, (2.8)) es fácil inducir una equivalencia triangular
$\mathrm{Hom}_A(M,-) : K^b(\mathrm{add}\,M) \to K^b({}_B\mathcal{P})$

Por (Cap I (4.8)), $K^b({}_B\mathcal{P})$ y $D^b(B)$ son equivalentes y por (1.1) y (1.5) $K^b(\mathrm{add}\,M)$ y $D^b(A)$ son equivalentes triangulares. $\square$

1.7 El interés por el estudio de estas propiedades de A-módulos proviene de la teoría de tilteo [HR], ver también [BB]. Un A-módulo M es llamado un <u>módulo de tilteo</u> si las siguientes condiciones son satisfechas: i) proy. dim $M \leqq 1$, ii) $Ext_A^1(M,M)=0$, iii) M-codim $({}_AA) \leqq 1$.

Llamamos a la terna $(A, {}_AM_B, B)$ una <u>terna de tilteo</u> si ${}_AM$ es un módulo y $B = End\, M$.

<u>Corolario</u>. Sea $(A, {}_AM_B, B)$ una terna de tilteo. Entonces $D^b(A)$ y $D^b(B)$ son equivalentes como categorías trianguladas.

<u>Demostración</u>

Esto se sigue de 1.6. □

1.8 Dos k-álgebras, de dimensión finita, A y B son <u>equivalentes por tilteo</u> si existe una sucesión $(A_i, {}_{A_i}M^i_{A_{i+1}}, A_{i+1})$ de ternas de tilteo, tal que $A=A_0$ y $B=A_m$.

§2 ISOMETRIA EN GRUPOS DE GROTHENDIECK.

En está sección definiramos el grupo de Grothendieck $K_0(D^b(A))$ para la categoría derivada $D^b(A)$ y probaremos algunas propiedades relacionadas con él.

Extendemos el concepto de dimensión, $\underline{\dim}\, X$ de módulos a la categoría $D^b(A)$.

Se mostrará que si A y B son álgebras de dimensión global finita y $F: D^b(A) \to D^b(B)$ es una equivalencia de categorías trianguladas, entonces se tiene una isometría $f: K_0(D^b(A)) \to K_0(D^b(B))$ tal que $f(\underline{\dim}\, X^\cdot) = \underline{\dim}\, FX^\cdot$. En particular, el número de clases de isomorfía de módulos simples de A y B es el mismo.

2.1 Sea A una K-álgebra básica de dimensión finita. Sea $\mathcal{F}$ el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfía $[X^\cdot]$ de los objetos X en $D^b(A)$.

Sea $\mathcal{F}_0$ el subgrupo de $\mathcal{F}$ generado por $[X^\cdot] - [Y^\cdot] + [Z^\cdot]$ para todos los triángulos (X, Y, Z, u, v, w) en $D^b(A)$.

El <u>grupo de Grothendieck</u> de $D^b(A)$ es por definición el grupo cociente $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$ y se denota por $K_0(D^b(A))$.

Una función valuada en los enteros y definida en los objetos de $D^b(A)$ es llamada <u>aditiva</u> si $a(X^\cdot) - a(Y^\cdot) + a(Z^\cdot) = 0$ para todo triángulo $(X^\cdot, Y^\cdot, Z^\cdot, u, v, w)$ en $D^b(A)$. En particular $a(X^\cdot) = -a(TX^\cdot)$. En efecto, consideramos el triángulo $X^\cdot \xrightarrow{u} Y^\cdot \xrightarrow{v_u} C^\cdot(u) \xrightarrow{w_u} TX^\cdot$. Entonces $Y^\cdot \xrightarrow{v_u} C^\cdot(u) \xrightarrow{w_u} TX^\cdot \xrightarrow{Tu} TY^\cdot$ es un triángulo y se tiene $a(X^\cdot) - a(Y^\cdot) + a(C^\cdot(u)) = 0$ y $a(Y^\cdot) - a(C^\cdot(u)) + a(TX^\cdot) = 0$ y luego $a(X^\cdot) + a(TX^\cdot) = 0$.

2.2 A lo largo de esta sección A denota una k-álgebra de dimensión finita.

Sea $\mathcal{F}$ el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfía de módulos en A-mod.
Si $X \in A$-mod denotamos por $[X]$ la clase de isomorfía de X en A-mod. Sea $\mathcal{F}_0$ el subgrupo de $\mathcal{F}$ generado por $[X]-[Y]+[Z]$ para toda sucesión exacta $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ en A-mod.
El <u>grupo de Grothendieck</u> de A es por definición el grupo cociente $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$ y se denota por $K_0(A)$. (ver [G2]).

2.3 En el siguiente lema demostraremos que $K_0(A)$ y $K_0(D^b(A))$ son isomorfos como grupos abelianos y por consiguiente $K_0(D^b(A))$ es isomorfo a $\mathbb{Z}^n$ donde n es el número de clases de isomorfía de módulos simples en A-mod.

<u>Lema</u>: $K_0(A)$ y $K_0(D^b(A))$ son isomorfos.

<u>Demostración</u>.

Sea $\psi: K_0(A) \longrightarrow K_0(D^b(A))$ tal que

$$\overline{[X]} \longmapsto \overline{[{}^0X^{\cdot}]}$$ donde ${}^0X^{\cdot}$ es el complejo

concentrado a nivel cero, donde ${}^0X^{\cdot}$ en el nivel cero es igual a X.

a) <u>ψ es función</u>

Si $0 \to X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \to 0$ es sucesión exacta en A-mod.
Entonces $0 \to {}^0X^{\cdot} \to {}^0Y^{\cdot} \to {}^0Z^{\cdot} \to 0$ es sucesión exacta

de complejos en $K^b(A)$. Luego por (capI, 5.3) se tiene un triángulo $^\circ X^\cdot \xrightarrow{^\circ u^\cdot} {^\circ Y^\cdot} \xrightarrow{^\circ v^\cdot} {^\circ Z^\cdot} \xrightarrow{w} T^\circ X^\cdot$ y

$$\overline{[^\circ X^\cdot]} - \overline{[^\circ Y^\cdot]} + \overline{[^\circ Z^\cdot]} = 0 \quad \text{en } K_0(D^b(A)).$$

Si $\overline{[X]} = \overline{[Y]}$ en $K_0(A)$, entonces

$$[X]-[Y] = \sum_i m_i([X_i]-[Y_i]+[Z_i]) \text{ en } \mathcal{F} \text{ donde } m_i \in \mathbb{Z}$$

y $0 \to X_i \to Y_i \to Z_i \to 0$ es sucesión exacta. Entonces

$$[^\circ X^\cdot]-[^\circ Y^\cdot] = \sum m_i([X_i]-[Y_i]+[Z_i]) \text{ en } \mathcal{F} \text{ y}$$

$$\overline{[^\circ X^\cdot]} = \overline{[^\circ Y^\cdot]} \quad \text{en } K_0(D^b(A))$$

b) <u>Ψ es mono</u>:

Sabemos que las clases $\overline{[S_1]}, \dots, \overline{[S_n]}$ de los módulos simples son una base de $K_0(A)$. Supongamos que $\sum_{i=1}^n m_i \overline{[^\circ S_i^\cdot]} = 0$, podemos suponer que $m_1, \dots, m_r \geq 0$ y $m_{r+1}, \dots, m_n < 0$, entonces

$$\overline{[^\circ S^\cdot]} = \sum_{i=1}^r m_i \overline{[^\circ S_i^\cdot]} = \sum_{j=r+1}^n (-m_j)\overline{[^\circ S_j^\cdot]} = \overline{[^\circ S'^\cdot]}$$

donde $S = \bigoplus_{i=1}^r S_i^{m_i}$, $S' = \bigoplus_{j=r+1}^n S_j^{-m_j}$ son dos A-módulos semisimples.

Por tanto, $[^\circ S^\cdot]-[^\circ S'^\cdot] \in \mathcal{F}_0$, o sea existen triángulos

$$X_i^\cdot \to Y_i^\cdot \to Z_i^\cdot \to TX_i^\cdot, \ i=1,\dots,a \text{ en } D^b(A) \text{ y números}$$

$b_i \in \mathbb{Z}$, $i=1,\dots,a$. de forma que $[^\circ S^\cdot]-[^\circ S'^\cdot] = \sum_{i=1}^a b_i([X_i^\cdot]-[Y_i^\cdot]+[Z_i^\cdot])$

Podemos suponer $b_1,\dots,b_t \geq 0$ y $b_{t+1},\dots,b_a<0$; definimos $c_i := -b_i$ para $i=t+1,\dots,a$. Luego,

$$[{}^\circ S] + \sum_{i=1}^{t} b_i[Y_i] + \sum_{i=t+1}^{a} c_i([X_i]+[Z_i]) = [{}^\circ S'] + \sum_{i=t+1}^{a} c_i[Y_i] + \sum_{i=1}^{t} b_i([X_i]+[Z_i]) \text{ en } \mathcal{F},$$

o sea,

$$S\oplus\Big(\bigoplus_{i=1}^{t} Y_i^{b_i}\Big)\oplus\bigoplus_{i=t+1}^{a} (X_i^{c_i}\oplus Z_i^{c_i}) \cong S'\oplus\Big(\bigoplus_{i=t+1}^{a} Y_i^{c_i}\Big)\oplus\bigoplus_{i=1}^{t}(X_i^{b_i}\oplus Z_i^{b_i}) \text{ en } D^b(A).$$

Por (Cap. I, (4.9)).

$$\left.\begin{array}{l} S\oplus H^0\Big(\big(\bigoplus_{i=1}^{t} Y_i^{b_i}\big)\oplus\bigoplus_{i=t+1}^{a}(X_i^{c_i}\oplus Z_i^{c_i})\Big)\cong S'\oplus H^0\Big(\big(\bigoplus_{i=t+1}^{a} Y_i^{c_i}\big)\oplus\bigoplus_{i=1}^{t}(X_i^{b_i}\oplus Z_i^{b_i})\Big) \\ \text{y } H^i\Big(\big(\bigoplus_{i=1}^{t} Y_i^{b_i}\big)\oplus\bigoplus_{i=t+1}^{a}(X_i^{c_i}\oplus Z_i^{c_i})\Big)\cong H^i\Big(\big(\bigoplus_{i=t+1}^{a} Y_i^{c_i}\big)\oplus\bigoplus_{i=1}^{t}(X_i^{b_i}\oplus Z_i^{b_i})\Big) \quad \text{si } i>0 \end{array}\right\} \text{—(1)}$$

Por otra parte, del triángulo $X_i \to Y_i \to Z_i \to TX_i$ obtenemos la sucesión exacta larga acotada,

$$0\to H^0(X_i)\to H^0(Y_i)\to H^0(Z_i)\to H^1(X_i)\to\cdots$$

Entonces en $K_0(A)$ se obtiene, $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\big(\overline{[H^j(X_i)]}-\overline{[H^j(Y_i)]}+\overline{[H^j(Z_i)]}\big)=0$ de donde

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\Big(\overline{\Big[H^j\Big(\big(\bigoplus_{i=1}^{t} Y_i^{b_i}\big)\oplus\big(\bigoplus_{i=t+1}^{a}(X_i^{c_i}\oplus Z_i^{c_i})\big)\Big)\Big]}\Big)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\Big(\overline{\Big[H^j\Big(\big(\bigoplus_{i=t+1}^{a} Y_i^{c_i}\big)\oplus\bigoplus_{i=1}^{t}(X_i^{b_i}\oplus Z_i^{b_i})\Big)\Big]}\Big) \text{—(2)}$$

Pero de (1) obtenemos en $K_0(A)$

$$\overline{[S]}+\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\Big(\overline{\Big[H^j\Big(\big(\bigoplus_{i=1}^{t} Y_i^{b_i}\big)\oplus\big(\bigoplus_{i=t+1}^{a}(X_i^{c_i}\oplus Z_i^{c_i})\big)\Big)\Big]}\Big)=\overline{[S']}+\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\Big(\overline{\Big[H^j\Big(\big(\bigoplus_{i=t+1}^{a} Y_i^{c_i}\big)\oplus\bigoplus_{i=1}^{t}(X_i^{b_i}\oplus Z_i^{b_i})\Big)\Big]}\Big).$$

De 2) se sigue que $\overline{[S]}=\overline{[S']}$ en $K_0(A)$. Luego, $S\cong S'$

que sólo es posible si $m_1 = m_2 = \cdots m_n = 0$.

c) <u>Ψ es sobre</u>:

Sea $[X^\cdot] \in K_0(D^b(A))$. Probaremos que $[X^\cdot] \in \operatorname{Im}\Psi$ por inducción sobre el ancho $w(X^\cdot)$.

Si $w(X^\cdot) = 1$, $X^\cdot = T^s({}^0Y^\cdot)$, donde $Y \in A$-mod. Supongamos primero que $s < 0$. Como $X^\cdot \to C^\cdot(Id_{X^\cdot}) \to TX^\cdot \to TX^\cdot$ es triángulo y Id_X es <u>isomorfismo, por (Cap. I, 4.9) se tiene que</u> $0 = [C^\cdot(Id_{X^\cdot})] = [X^\cdot] + [TX^\cdot]$ y $[X^\cdot] = -[T^{s+1}\,{}^0Y^\cdot]$. Luego $[X^\cdot] = (-1)^s[{}^0Y^\cdot] \in \operatorname{Im}\Psi$. Similarmente si $s \geq 0$. Si $w(X^\cdot) > 1$, consideremos el triángulo (Cap I 2.2) $T^{-1}X^0 \to X'' \to X^\cdot \to X^0$ con $w(X^0), w(X'') < w(X^\cdot)$. Como $[X^\cdot] = [X''] - [X^0]$, el resultado se sigue por inducción.

<u>Observación</u>: Si $[X^\cdot] \in K_0(D^b(A))$ se tiene, $[X^\cdot] = \sum (-1)^i [{}^0X^i]$ (por inducción sobre $w(X^\cdot)$ procediendo como en c)).

2.4 Sea A una K-álgebra básica de dimensión finita e indescomponible.

Sea $P_1, P_2, \ldots, P_n$ un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfía de A-módulos proyectivos inescindibles. Para un A-módulo X el <u>vector dimensión</u> es definido por $\underline{\dim}\, X = (\dim_k \operatorname{Hom}_A(P_i, X))_{i=1}^n$.

El mapeo $X \mapsto \underline{\dim}\, X$ induce un isomorfismo de $K_0(A)$ a $\mathbb{Z}^n$. Usando 2.3, este mapeo puede extenderse a $D^b(A)$ de la siguiente manera: si $X^\cdot = (X^n, \partial_X^n)$ está en $D^b(A)$ entonces $\underline{\dim}\, X^\cdot = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \underline{\dim}\, X^n$ (dado que $X^\cdot$ es un complejo acotado la suma es finita).

2.5 Nótese que por el lema (1.7) de [H4], $X^{\cdot} \cong Y^{\cdot}$ en $D^b(A)$ implica que $a(X^{\cdot}) = a(Y^{\cdot})$, para cualquier función aditiva a.

Entonces las funciones aditivas $a: Ob\,D^b(A) \to \mathbb{Z}^n$ son los morfismos de grupos $K_0(D^b(A)) \xrightarrow{a} \mathbb{Z}^n$. La función aditiva $\underline{dim}: Ob\,D^b(A) \to \mathbb{Z}^n$ es la composición $K_0(D^b(A)) \xrightarrow{\cong} K_0(A) \xrightarrow{\underline{dim}} \mathbb{Z}^n$ que, siendo morfismo de grupos al componerse con cualquiera de las proyecciones a $\mathbb{Z}$ resulta nuevamente morfismo de grupos, luego cada $\underline{dim}^j$ es función aditiva en los objetos de $D^b(A)$.

2.6 Para el resto de esta sección suponemos que A tiene dimensión global finita, con esta suposición el grupo de Grothendieck $K_0(A)$ de A, está dotado automáticamente de una forma bilineal.

Aquí sólo recordamos las definiciones relevantes para un tratamiento más profundo de estos conceptos consultar 2.4 de [Ri6].

Definimos a matriz de Cartan, denotada por $C = C_A$, como la matriz de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{Z}$ tal que $C_{ij} = \dim_k Hom_A(P_i, P_j)$ para $1 \leq i, j \leq n$. Así la j-ésima columna de C es $(\underline{dim}\,P_j)^t$, donde t denota el transpuesto, en [Ri6] se demuestra que $C = C_A$ es invertible.

La matriz $C^{-t} = (C^{-1})^t$ define una forma bilineal $\langle -, - \rangle_A$ en $K_0(A) \cong \mathbb{Z}^n$ dada por: $\langle x, y \rangle_A = x C^{-t} y^t$. La correspondiente forma cuadrática $\chi_A(x) = \langle x, x \rangle_A$ es llamada la característica de Euler de A.

La forma bilineal introducida tiene la siguiente interpretación homológica:

Sea $X, Y \in A\text{-mod}$ entonces

$$(*) \quad \langle \underline{dim}\,X, \underline{dim}\,Y \rangle_A = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_k Ext_A^i(X, Y).$$

(ver, por ejemplo, [H4, Lem pagina 98]).

2.7 <u>Lema</u>: Sea $X^\cdot, Y^\cdot$ en $D^b(A)$
Entonces $\langle \underline{\dim} X^\cdot, \underline{\dim} Y^\cdot \rangle_A = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_k \mathrm{Hom}_{D^b(A)}(X^\cdot, T^i Y^\cdot)$

<u>Demostración</u>

Ya que gl dim $A < \infty$ entonces $D^b(A)$ es equivalente triangular a $K^b(A\mathcal{P})$ (ver Cap. I 4.9); por tanto sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los complejos considerados aquí están en $K^b(A\mathcal{P})$.

Haremos la demostración usando doble inducción en el ancho, $w(X^\cdot)$, de $X^\cdot$ y en el ancho, $w(Y^\cdot)$, de $Y^\cdot$.

<u>Caso</u> a) $w(X^\cdot) = 1 = w(Y^\cdot)$

Usando el funtor translación T, podemos suponer que $X^\cdot$ es el complejo concentrado a nivel cero $X^\cdot = {}^\circ U^\cdot$. Supongamos que $Y^\cdot$ está concentrado a nivel j, $Y^\cdot = T^j\, {}^\circ V^\cdot$. Luego

$$\langle \underline{\dim} X^\cdot, \underline{\dim} Y^\cdot \rangle_A = \langle \underline{\dim} X^\circ, (-1)^j \underline{\dim} Y^j \rangle_A = (-1)^j \langle \underline{\dim} X^\circ, \underline{\dim} Y^j \rangle_A =$$

$$= (-1)^j \sum_{i\geq 0} (-1)^i \dim_k \mathrm{Ext}_A^i(U, V) = (-1)^j \sum_{i\geq 0} (-1)^i \dim_k \mathrm{Ext}^i_{D^b(A)}({}^\circ U^\cdot, {}^\circ V^\cdot) =$$

$$= (-1)^j \sum_{i\geq 0} (-1)^i \dim_k \mathrm{Ext}^i_{D^b(A)}(X^\cdot, T^{j-j}\, {}^\circ V^\cdot) = \sum_{i\geq 0} (-1)^{i-j} \dim_k \mathrm{Hom}_{D^b(A)}(X^\cdot, T^{i-j}(T^j\, {}^\circ V^\cdot)) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \dim_k \mathrm{Hom}_{D^b(A)}(X^\cdot, T^k Y^\cdot) \quad \text{con } k := i-j \text{ para } j\in\mathbb{Z} \text{ fijo.}$$

Por tanto $\langle \underline{\dim} X^\cdot, \underline{\dim} Y^\cdot \rangle_A = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \dim_k \mathrm{Hom}_{D^b(A)}(X^\cdot, T^k Y^\cdot)$

<u>Caso</u> b)

Supongamos que $w(Y^\cdot) = 1$ y que para todo $Z^\cdot \in D^b(A)$ tal que $w(Z^\cdot) \leq n-1$ entonces

$$\langle \underline{\dim} Z^\cdot, \underline{\dim} Y^\cdot \rangle_A = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \underline{\dim}_k \mathrm{Hom}_{D^b(A)}(Z^\cdot, T^i Y^\cdot)$$

Sea $X^\cdot \in D^b(A)$ tal que $\omega(X^\cdot)=n$ por (cap I 2.2.2) sabemos que existe un morfismo $u: T^{-}{}^\circ X^\cdot \to X'^\cdot$ tal que $X^\cdot$ es el cono del morfismo u; es decir $X^\cdot = C^\cdot(u)$.

Así en el triángulo

$$T^{\circ}X^\cdot \xrightarrow{u} X'' \xrightarrow{v} X^\cdot \xrightarrow{w} {}^\circ X^\cdot$$

tenemos que por construcción

$$0 \to X'' \xrightarrow{v} X^\cdot \xrightarrow{w} {}^\circ X^\cdot \to 0.$$

es una sucesión exacta en $K^b(A\mathcal{P})$. Ya que $Y^n \in A$-mod. del complejo $Y^\cdot$ es A-mod. proyectivo para todo $n \in \mathbb{Z}$ tenemos la siguiente sucesión exacta.

$$0 \to Hom_{K^b(A\mathcal{P})}({}^\circ X^\cdot, T^i Y^\cdot) \to Hom_{K^b(A\mathcal{P})}(X^\cdot, T^i Y^\cdot) \to Hom_{K^b(A\mathcal{P})}(X'', T^i Y^\cdot) \to 0$$

Puesto que: $Hom_{D^b(A)}(X^\cdot, T^i Y^\cdot) \cong Hom_{K^b(A\mathcal{P})}(X^\cdot, T^i Y^\cdot)$,

$Hom_{D^b(A)}(X'', T^i Y^\cdot) \cong Hom_{K^b(A\mathcal{P})}(X'', T^i Y^\cdot)$ y $Hom_{D^b(A)}({}^\circ X^\cdot, T^i Y^\cdot) \cong Hom_{K^b(A\mathcal{P})}({}^\circ X^\cdot, T^i Y^\cdot)$

tenemos que

$$\dim_k Hom_{D^b(A)}(X^\cdot, T^i Y^\cdot) = \dim_k Hom_{D^b(A)}({}^\circ X^\cdot, T^i Y^\cdot) + \dim_k Hom_{D^b(A)}(X'', T^i Y^\cdot).$$

en consecuencia.

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_k Hom_{D^b(A)}(X^\cdot, T^i Y^\cdot) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_k Hom_{D^b(A)}({}^\circ X^\cdot, T^i Y^\cdot) + \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_k Hom_{D^b(A)}(X'', T^i Y^\cdot) =$$

$$= \langle \underline{\dim} X'', \underline{\dim} Y^\cdot \rangle_A + \langle \underline{\dim}\, {}^\circ X^\cdot, \underline{\dim} Y^\cdot \rangle_A = \langle \underline{\dim} X'' + \underline{\dim}\, {}^\circ X^\cdot, \underline{\dim} Y^\cdot \rangle_A =$$

$$= \langle \underline{\dim} X^\cdot, \underline{\dim} Y^\cdot \rangle_A.$$

El caso general es similar. $\square$.

2.8 Sean A y B k-álgebras básicas de dimensión finita. Decimos que $k_0(A)$ y $k_0(B)$ son <u>isométricos</u> si existe una isometría $f: k_0(A) \to k_0(B)$ es decir una biyección $\mathbb{Z}$-lineal tal que $\langle x, y\rangle_A = \langle f(x), f(y)\rangle_B$ para todo $x, y \in k_0(A)$.

<u>Proposición</u>. Sean A y B k-algebras básicas de dimensión finita y supongamos que A tiene dimensión global finita. Si $F: D^b(A) \to D^b(B)$ es una equivalencia triangular, existe una isometría $f: k_0(A) \to k_0(B)$ tal que $\underline{\dim} FX^{\cdot} = f(\underline{\dim} X^{\cdot})$ para $X^{\cdot} \in D^b(A)$. En particular, A y B tiene el mismo número de módulos simples hasta isomorfía.

<u>Demostración</u>.

Sean $a: k_0(A) \to k_0(D^b(A))$, $[X] \longmapsto [{}^{\circ}X^{\cdot}]$ el isomorfismo definido en (2.5).

Observamos que a es una isometría. En efecto, si $X, Y \in A\text{-mod}$, entonces

$$\langle a(\underline{\dim}\, X), a(\underline{\dim}\, Y)\rangle_{D^b(A)} = \langle \underline{\dim}\, {}^{\circ}X^{\cdot}, \underline{\dim}\, {}^{\circ}Y^{\cdot}\rangle_{D^b(A)} \underset{(\text{Cap I } 2.7)}{=} \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_k \big({}^{\circ}X^{\cdot}, T^i\, {}^{\circ}Y^{\cdot}\big)_{D^b(A)} =$$

$$\underset{(\text{Cap I } 6.1)}{=} \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_k \mathrm{Ext}^i_{D^b(A)}({}^{\circ}X^{\cdot}, {}^{\circ}Y^{\cdot}) \underset{(\text{Cap I } 5.1)}{=} \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_k \mathrm{Ext}^i_A(X, Y) \underset{(\text{Cap II } 2.6)}{=} \langle \underline{\dim}\, X, \underline{\dim}\, Y\rangle$$

Similarmente $b: k_0(B) \to k_0(D^b(B))$ es isometría.

Como F es equivalencia triangular, se induce un isomorfismo

Llamamos $f = a \circ \overline{F} \circ b^{-1} : K_0(A) \longrightarrow K_0(B)$ isomorfismo.
Si $X, Y \in A$-mod, como a y b son isometrías, tenemos

$$\langle f(\underline{\dim} X), f(\underline{\dim} Y) \rangle_B = \langle \underline{\dim} F^{\circ}X^{\cdot}, \underline{\dim} F^{\circ}Y^{\cdot} \rangle_B =$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim_k \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^b(B)}(FX^{\cdot}, T^i FY^{\cdot}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim_k \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(X^{\cdot}, T^i Y^{\cdot}) =$$

$$= \langle \underline{\dim} X^{\cdot}, \underline{\dim} Y^{\cdot} \rangle_A .$$

$\square$.

§ 3. Triángulos de Auslander-Reiten.

3.1 Sea $\mathscr{C}$ una categoría triangulada tal que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ es un k-espacio vectorial de dimensión finita para todo $X, Y \in \mathscr{C}$ y suponga que el anillo de endomorfismos de cada objeto inescindible es local.

Esto implica que $\mathscr{C}$ es una categoría Krull-Schmidt (ver 2.2 de [Ri 6]).

Un triángulo $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ en $\mathscr{C}$ es llamado un triángulo de Auslander-Reiten si las siguientes condiciones son satisfechas:

AR1) X, Z son inescindibles.

AR2) $w \neq 0$

AR3) Si $f: W \to Z$ no es retracción entonces existe $f': W \to Y$ tal que $f' \cdot v = f$

Decimos que $\mathscr{C}$ tiene triángulos de Auslander-Reiten si para todo objeto inescindible $Z \in \mathscr{C}$ existe un triángulo (X, Y, Z, u, v, w) que satisface la condiciones (AR1), (AR2) y (AR3).

Nuestra motivación proviene de sucesiones de Auslander-Reiten, las cuales son por definición sucesiones exactas no escindibles $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ de módulos de dimensión finita que satisfacen (AR1) y (AR3).

Aquí presentamos algunas de las propiedades básicas para triángulos de Auslander-Reiten.

3.2 Lema: Las siguientes condiciones son equivalentes para triángulos (X, Y, Z, u, v, w) arbitrarios en $\mathcal{C}$.

i) (AR2)

ii) u no es sección

iii) v no es retracción

Demostración

i) $\Rightarrow$ ii) La demostración es por reducción al absurdo. Supongamos que $w \neq 0$ y u es sección, esto implica que existe $u': Y \to X$ tal que $u \cdot u' = Id_X$.

De esto tenemos el siguiente morfismo de triángulos:

$$(Id_X, u', 0) : (X, Y, Z, u, v, w) \to (X, X, 0, Id_X, 0, 0)$$

así conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "Id_X"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d] & TX \arrow[d, "Id_{TX}"] \\
X \arrow[r, "Id_X"] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & TX
\end{tikzcd}$$

esto implica que $w = w \cdot Id_{TX} = 0$ lo cual es una contradicción, y así u no es sección. ✓

ii) $\Rightarrow$ i)

Aquí también la demostración es por reducción al absurdo.

Supongamos que u no es sección y $w = 0$ por TR3) existe $u': Y \to X$ tal que

$(Id_X, u', 0) : (X, Y, Z, u, v, w) \to (X, X, 0, Id_X, 0, 0)$ es un morfismo de triángulos. Esto implica que $u \circ u' = Id_X$ y u es sección, lo cual es una contradicción.

Analogamente se prueba $i) \Leftrightarrow iii)$ usando el siguiente diagrama de triángulos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r, "Id_Z"] \arrow[d, "v'"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "Id_Z"] & 0 \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r] & TX \end{tikzcd}$$

□

3.3 <u>**Lema**</u>: Lo siguientes incisos son equivalentes para Triángulos (X, Y, Z, u, v, w) arbitrarios en $\mathcal{C}$

i) AR3)

ii) Si $f: W \to Z$ no es retracción entonces $f \circ w = 0$

<u>Demostración</u>

Por ser $\mathcal{C}$ una categoría triangulada entonces $Hom_{\mathcal{C}}(W, -)$ es un funtor cohomológico.

Como (X, Y, Z, u, v, w) es triángulo en $\mathcal{C}$ entonces

$$\cdots \to Hom_{\mathcal{C}}(W, X) \xrightarrow{u_*} Hom_{\mathcal{C}}(W, Y) \xrightarrow{v_*} Hom_{\mathcal{C}}(W, Z) \xrightarrow{w_*} Hom_{\mathcal{C}}(W, TX) \to \cdots$$

es sucesión exacta.

Entonces (AR3) implica la existencia de $f' \in Hom_{\mathcal{C}}(W, Y)$ tal que $f' \circ v = f = v_*(f')$ esto es equivalente a que $f \in \ker w_*$ y esto es equivalente a que $w_*(f) = f \circ w = 0$ □

3.4 Lema: (Autodualidad para triángulos Auslander-Reiten).
Sea (X, Y, Z, u, v, w) un triángulo de Auslander-Reiten.
Si $f: X \to W$ no es sección, entonces existe $f': Y \to W$ con $u \circ f' = f$.

Demostración.

Por TR1) el morfismo $f: X \to W$ puede ser encajado en un triángulo (X, W, W', f, g, h). Usando TR2) vemos que también $(T^{-1}W', X, W, -T^{-1}h, f, g)$ es un triángulo. Aplicando el axioma del octaedro (TR4) a la composición $(-T^{-1}h) \circ u$ obtenemos el siguiente diagrama de triángulos.

$$\begin{tikzcd}
T^{-1}W' \arrow[r, "Id_{T^{-1}W'}"] \arrow[d, "-T^{-1}h"'] & T^{-1}W' \arrow[d, "(-T^{-1}h)\circ u"'] & & \\
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "r"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "Id_Z"'] & TX \arrow[d, "Tf"'] \\
W \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "g"'] & Y' \arrow[r, "t_2"] \arrow[d, "s"'] & Z \arrow[r, "w \circ Tf"] & TW \\
W' \arrow[r, "Id_{W'}"] & W' & &
\end{tikzcd}$$

Si t_2 es retracción entonces t_1 es sección por **3.2**. Así existe t_1' con $t_1 \circ t_1' = Id_W$. Definimos

Ahora a $f' := r \circ t_1'$, pero $u \circ f' = u \circ r \circ t_1' = f \circ t_1 \circ t' = f$. Supongamos ahora que t_2 no es retracción. Por (AR3), existe $t_2' : Y' \to Y$ con $t_2' v = t_2$.

Considere los siguientes morfismos de triángulos ($\bar{f}$ existe por TR3)):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "r"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "Id_Z"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\
W \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "\bar{f}"] & Y' \arrow[r, "t_2"] \arrow[d, "t_2'"] & Z \arrow[r, "w \circ Tf"] \arrow[d, "Id_Z"] & TW \arrow[d, "T\bar{f}"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & TX
\end{tikzcd}$$

Dado que f no es sección y X es inescindible, inferimos que $f \circ \bar{f}$ es nilpotente, de aquí que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(f \circ \bar{f})^n = 0$. En consecuencia

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "0"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "(r t_2')^n"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "Id_Z"] & TX \arrow[d, "0"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & TX
\end{tikzcd}$$

es un morfismo de triángulos. Pero entonces $w = 0$ y esto contradice (AR2). □

3.5 Un morfismo $h : Z_1 \to Z_2$ de una categoría aditiva arbitraria es llamado <u>irreducible</u> si h no es sección ni retracción pero para cada factorización de $h = h_1 \circ h_2$ o bien h_1 es sección o h_2 es retracción.

Para una definición usando el radical de la categoría ver por ejemplo [G2] o [Ri6].

<u>Proposición</u>: Sea (X, Y, Z, u, v, w) un triángulo de Auslander-Reiten. Entonces

i) Este triángulo está determinado (hasta isomorfía) por Z.
ii) u y v son morfismos irreducibles.
iii) Si $f: Z_1 \to Z$ es irreducible, existe una sección $g: Z_1 \to Y$ con $f = g \circ v$
iv) Si $f: X \to X_1$ es irreducible, existe una retracción $g: Y \to X_1$ con $f = u \cdot g$

<u>Demostración</u>

i) Sea (X', Y', Z, u', v', w') un triángulo de Auslander-Reiten. Dado que v' no es retracción existe g con $v' = gv$. Por (TR3) obtenemos el siguiente morfismo de triángulos:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "f"] & Y' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w'"] \arrow[d, "Id_Z"] & TX' \arrow[d, "Tf"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & TX
\end{tikzcd}$$

Si f no es un isomorfismo obtenemos un morfismo f' con $u' \circ f' = f$ por (3.4). Pero $w = w' Tf = w' \circ Tu' \circ Tf' = 0$ da una contradicción. Así f es un isomorfismo. Luego $(f, g, Id_Z): (X', Y', Z, u', v', w') \to (X, Y, Z, u, v, w)$ es isomorfismo de triángulos por (Cap I, 1.2). $\square$

ii) Demostraremos que u es irreducible. Considérese una factorización $u = h_1 \circ h_2$. Si h_1 no es sección, existe h_1' con $u \circ h_1' = h_1$. Por TR3) obtenemos un morfismo de triángulos:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "Id_X"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "h_1' \circ h_2"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TX \arrow[d, "Id_{TX}"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & TX
\end{tikzcd}$$

Si h no es un isomorfismo, entonces $w = h \circ w = 0$ por (3.3), es una contradicción. Así $h_1' \circ h_2$ es un isomorfismo. Consecuentemente h_2 es una retracción. Análogamente se prueba que v es irreducible.

iii) Sea $f: Z_1 \to Z$ un morfismo irreducible. Dado que f no es retracción obtenemos $g: Z_1 \to Y$ con $f = g \circ v$. Como v no es retracción, g es sección.

iv) Esto es dual a (iii). □

3.6. Sea A una k-álgebra de dimensión finita y dimensión global finita.

<u>Teorema</u>: La categoría derivada $D^b(A)$ tiene triángulos de Auslander-Reiten.

La demostración de este teorema se pospone hasta la sección (3.7) después de algunas consideraciones previas.

3.6.1. Sean ${}_A\mathcal{P}$ y ${}_A\mathcal{I}$ las subcategorías plenas de A-mod que tienen por objetos los A-módulos proyectivos y los A-módulos inyectivos respectivamente. El funtor de Nakayama está definido por $\nu = D\,Hom_A(-, {}_AA)$ donde D denota la dualidad $D = Hom_k(-, k) : A\text{-mod} \to B\text{-mod}$.

Proposición: a) ${}_A\mathcal{P}$ y ${}_A\mathcal{I}$ son equivalentes bajo el funtor de Nakayama.

b) El funtor de Nakayama induce una transformación natural invertible

$\alpha_P : DHom_A(P, -) \to Hom_A(-, \nu P)$

para cada $P \in {}_A\mathcal{P}$, natural en P.

c) Son equivalentes:

I) : Existe una transformación invertible $\alpha_{P,X} : DHom_A(P,X) \to Hom_A(X, \nu P)$ para cada $P \in {}_A\mathcal{P}$ y $X \in A\text{-mod}$, natural en ambas variables, $P \in {}_A\mathcal{P}$, $X \in A\text{-mod}$.

II) : Para cada $P \in {}_A\mathcal{P}$ y cada $X \in A\text{-mod}$ existe una función bilineal $(-|-) : Hom_A(P,X) \times Hom_A(X, \nu P) \to k$ (usamos la notación $(\xi|\eta)$ para la imagen de (ξ, η) en k), que satisface $(*)$:

$(*)$
- $(*i)$ $(\xi\mu|\eta) = (\xi|\mu\eta)$ para cualquier terna de morfismos ξ, μ, η.
- $(*ii)$ $(\pi\xi|\eta) = (\xi|\eta\,\nu(\pi))$ para π morfismo de ${}_A\mathcal{P}$ y ξ, η morfismos.
- $(*iii)$ $(-|-)$ es <u>no degenerada</u> (i.e. Sea $\eta \in Hom_A(X, \nu P)$, $\xi \in Hom_A(P,X)$. Entonces $[(\xi|\eta) = 0$ para todo ξ si y sólo si $\eta = 0]$ y $[(\xi|\eta) = 0$ para todo η si y sólo si $\xi = 0]$).

Una familia de funciones bilineales que satisfacen (*) se llama <u>dualidad asociada</u> a α

<u>Demostración</u>

Aquí ofrecemos una demostración completa de (c).
Para la demostración de (a) y (b) ver por ejemplo [G2] ó [Ri6].

$\vDash\!\triangleright$): Por ser α_P invertible, dado $\eta \in Hom_A(X,\nu P)$ existe un único $f_\eta \in D\,Hom_A(P,X)$ tal que $\alpha_P(f_\eta) = \eta$.
Definimos a nuestra función bilineal de la siguiente forma:

$$(-|-) : Hom_A(P,X) \times Hom_A(X,\nu P) \longrightarrow K \quad \text{tal que}$$
$$(\xi,\eta) \longmapsto (\xi|\eta) := f_\eta(\xi).$$

<u>Se satisface (*)</u>

(*)(i):

Sea $\xi \in Hom_A(P,X)$, $\mu \in Hom_A(X,Y)$ y $\eta \in Hom_A(Y,\nu(P))$ de la naturalidad de α_P se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
D\,Hom_A(P,Y) \arrow[r, "\alpha_P(Y)"] \arrow[d, "D\mu_*"'] & Hom_A(Y,\nu P) \arrow[d, "\mu_*"] \\
D\,Hom_A(P,X) \arrow[r, "\alpha_P(X)"] & Hom_A(X,\nu P)
\end{tikzcd}$$

de donde se deduce la siguiente ecuación:

1) $f_{\mu\eta} = D\mu_*(f_\eta) = \mu_* f_\eta$.

donde $f_{\mu\eta} \in D\mathrm{Hom}_A(P,X)$ es el único tal que $\alpha_P(f_{\mu\eta}) = \mu\cdot\eta$ y $f_\eta \in D\mathrm{Hom}_A(P,Y)$ es el único tal que $\alpha_P(f_\eta) = \eta$.

Sea $\xi \in \mathrm{Hom}_A(P,X)$. Usando la ecuación (1) tenemos $f_{\mu\eta}(\xi) = (\mu_* f_\eta)(\xi) = f_\eta(\mu_*(\xi)) = f_\eta(\xi\cdot\mu)$.

Por definición de $(-|-)$ se tiene $(\xi|\mu\eta) = (\xi\mu|\eta)$, lo que prueba (*)(i).

(*) ii) :

Sea $\pi \in \mathrm{Hom}_A(P_1,P_2)$ con $P_1, P_2 \in_A \mathcal{P}$. Sea $\eta \in \mathrm{Hom}_A(X,\nu P_1)$.

De la naturalidad de α_P se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
D\mathrm{Hom}_A(P_1,X) & \xrightarrow{\alpha_{P_1}(X)} & \mathrm{Hom}_A(X,\nu P_1) \\
{\scriptstyle D(\pi^*)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\nu\pi)_*} \\
D\mathrm{Hom}_A(P_2,X) & \xrightarrow{\alpha_{P_2}(X)} & \mathrm{Hom}_A(X,\nu P_2)
\end{array}$$

de donde se deduce la siguiente ecuación:

$$f_{\eta\nu(\pi)} = D(\pi^*)(f_\eta).$$

Sea $\xi \in \mathrm{Hom}_A(P_2,X)$ esto implica que

$f_{\eta\nu(\pi)}(\xi) = [D(\pi^*)(f_\eta)](\xi) = f_\eta(\pi^*(\xi)) = f_\eta(\pi\xi)$. y así hemos probado que $(\xi|\eta\nu(\pi)) = (\pi\xi|\eta)$.

Observación: $(\xi/\eta) = [(\alpha_{P,X}^{-1})^{*}(\bar{\bar{\xi}})](\eta)$ donde

$$(\alpha_{P,X}^{-1})^{*} = D\alpha_{P,X}^{-1} : D^{2}Hom_A(P,X) \longrightarrow D\,Hom_A(X,\nu P),$$

$\bar{\bar{\xi}} := ev(\xi)$ donde; $ev: Hom_A(P,X) \to D^{2}Hom_A(P,X)$ es la evaluación definida por $ev(\xi) = \bar{\bar{\xi}} : Hom_k(D\,Hom_A(P,X),k) \to k$ tal que $\bar{\bar{\xi}}(f) = f(\xi)$.

Ya que tenemos la siguiente composición de isomorfismos:

$$\begin{array}{ccccc} Hom_A(P,X) & \xrightarrow{ev} & D^{2}Hom_A(P,X) & \xrightarrow{(\alpha_{P,X}^{-1})^{*}} & D\,Hom_A(X,\nu P) \\ \xi & \longmapsto & \bar{\bar{\xi}} & \longmapsto & (\alpha_{P,X}^{-1})^{*}(\bar{\bar{\xi}}) \end{array}$$

se concluye que $[(\alpha_{P,X}^{-1})^{*}(\bar{\bar{\xi}})](\eta) = \bar{\bar{\xi}}(\alpha_{P,X}^{-1}(\eta)) = \bar{\bar{\xi}}(f_\eta) = f_\eta(\xi) = (\xi/\eta)$.
Lo que justifica nuestra afirmación.

<u>$(-|-)$ es no degenerada.</u>

Sea $\eta \in Hom_A(X,\nu P)$ tal que $(\xi/\eta)=0$ para todo $\xi \in Hom_A(P,X)$. Por definición $(\xi/\eta) = f_\eta(\xi)$ donde $f_\eta \in D\,Hom_A(P,X)$ es el único tal que $\alpha_{P,X}(f_\eta) = \eta$. Dado que $f_\eta = 0$ entonces $\eta = \alpha_{P,X}(f_\eta) = \alpha_{P,X}(0) = 0$.

Análogamente, sea $\xi \in Hom_A(P,X)$ tal que $(\xi/\eta)=0$ para todo $\eta \in Hom_A(X,\nu P)$. Por la observación anterior tenemos $(\xi/\eta) = (\alpha_{P,X}^{-1})^{*}(\bar{\bar{\xi}})(\eta) = 0$ para todo $\eta \in Hom_A(X,\nu P)$.

Luego $(\alpha_{P,X}^{-1})^{*}(\bar{\bar{\xi}}) = 0$, y siendo $\alpha_{P,X}^{-1}$ un isomorfismo, entonces $\bar{\bar{\xi}} = 0$. Como ev es también isomorfismo, concluimos que $\xi = 0$.

Esto prueba que $(-|-)$ es no degenerada.

$\Leftarrow$): Sea $\beta_{P,X} : Hom_A(X, \nu P) \longrightarrow D\,Hom_A(P,X)$ tal que
$$\eta \longmapsto (-|\eta).$$

Claramente está bien definida.

<u>$\beta_{P,X}$ es inyectiva y suprayectiva.</u>

Sea $\eta \in Hom_A(X,\nu P)$ tal que $(-|\eta)=0$. Por la propiedad (*) (iii) tenemos que $\eta = 0$. Luego $\beta_{P,X}$ es inyectiva.
Entonces, $\dim_k Hom_A(X, \nu P) \leq \dim_k D\,Hom_A(P,X)$.
Probaremos ahora que $\dim_k D Hom_A(P,X) \leq \dim_k Hom_A(X,\nu P)$, lo que implica que $\beta_{P,X}$ es isomorfismo.
Para probar está afirmación definimos a

$$\phi_{P,X} : Hom_A(P,X) \longrightarrow D\,Hom_A(X,\nu P)$$
$$\xi \longmapsto (\xi|-)\cdot$$

$\phi_{P,X}$ es inyectiva ya que si $(\xi|-)=0$ entonces $\xi=0$ por (*) (iii). Aplicando $D = Hom_k(-,k)$ a $\phi_{P,X}$ tenemos que

$$(\phi_{P,X})^* = D\phi_{P,X} : Hom_A(X,\nu P) \longrightarrow D\,Hom_A(P,X).$$

es suprayectiva lo que implica que

$$\dim_k D\,Hom_A(P,X) \leq \dim_k Hom_A(X,\nu P)\cdot$$

. <u>$\beta_{P,X}$ es natural en P y en X.</u>

Esto es una consecuencia fácil de (*i) y (*ii).

Definimos a $\alpha_{P,X} := \beta_{P,X}^{-1}$. $\square$

3.6.2. Proposición : Si $\nu : A\text{-mod} \to A\text{-mod}$ es el funtor de Nakayama, $\overline{\nu} : K^b(A\text{-mod}) \to K^b(A\text{-mod})$ induce una equivalencia triangular de $K^b({}_A\mathcal{P})$ a $K^b({}_A\mathcal{I})$.

Demostración

Dado que ν induce una equivalencia aditiva $F : {}_A\mathcal{P} \to {}_A\mathcal{I}$. (3.6.1 (a)).

Por (Cap. I .(2.8)) F induce una equivalencia triangular $\overline{F} : K^b({}_A\mathcal{P}) \to K^b({}_A\mathcal{I})$ donde $\overline{F} := \overline{\nu}$ restringida a $K^b({}_A\mathcal{P})$.

$\square$

3.6.3 Probaremos que el funtor de Nakayama $\nu : K^b({}_A\mathcal{P}) \to K^b({}_A\mathcal{I})$ induce una transformación invertible:

$$\alpha_{P^\cdot} : D\mathrm{Hom}_{K^b(A\text{-mod})}(P^\cdot, -) \to \mathrm{Hom}_{K^b(A\text{-mod})}(-, \nu P^\cdot)$$

Para cada $\eta^\cdot \in \mathrm{Hom}_{K^b(A\text{-mod})}(X^\cdot, \nu P^\cdot)$ consideramos la siguiente correspondencia:

$$(-|\eta^\cdot) : \mathrm{Hom}_{K^b(A\text{-mod})}(P^\cdot, X^\cdot) \to k \quad \text{tal que}$$
$$\xi^\cdot \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n (\xi^n | \eta^n)$$

$(-|\eta^\cdot)$ está bien definido: supongamos que $\xi^\cdot : P^\cdot \to X^\cdot$ es un morfismo de complejos homotópico a 0, debemos probar que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n (\xi^n|\eta^n) = 0$. Sea $\{h_n\}$ una colección de morfismos tales que $\xi^n = h_n \partial_X^{n-1} - \partial_P^n h_{n+1}$

Por tanto,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n (\xi^n|\eta^n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n (h_n \partial_X^{n-1} - \partial_P^n h_{n+1} | \eta^n) =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n (h_n \cdot \partial_X^{n-1} | \eta^n) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n (\partial_P^n h_{n+1} | \eta^n) =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n (h_n | \partial_X^{n-1} \cdot \eta^n) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n (h_{n+1} | \eta^n \nu(\partial_P^n)) =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n [(h_n | \partial_X^{n-1} \eta^n) - (h_n | \eta^{n-1} \cdot \nu(\partial_P^{n-1}))] =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n [(h_n | \partial_X^{n-1} \eta^n - \eta^{n-1} \cdot \nu(\partial_P^{n-1}))] = 0$$

Así hemos demostrado que $(-|\eta^\cdot)$ no depende de la elección en la clase de homotopía de ξ, análogamente podemos demostrar que no depende de la elección de $\eta^\cdot$.

Sea $\beta_{X^\cdot;P^\cdot}: \mathrm{Hom}_{K^b(A\text{-mod})}(X^\cdot, \bar{\nu} P^\cdot) \longrightarrow D\,\mathrm{Hom}_{K^b(A\text{-mod})}(P^\cdot, X^\cdot)$ tal que

$$\eta^\cdot \longmapsto (-|\eta^\cdot)$$

<u>Lema</u>: $\beta_{X^\cdot;P^\cdot}$ es una transformación natural invertible. Definimos $\alpha_{X^\cdot,P^\cdot} := \beta_{X^\cdot}^{-1}$.

<u>Demostración</u>.

Es fácil ver que β es natural en $X^\cdot$ y en $P^\cdot$. Veremos que $\beta_{X^\cdot}$ es un isomorfismo. La demostración es por doble inducción en el ancho $w(P^\cdot)$, $w(X^\cdot)$ de $P^\cdot \in K^b({}_A\mathcal{P})$ y $X^\cdot \in K^b(A\text{-mod})$ respectivamente.

a) <u>$w(P^\cdot) = 1 = w(X^\cdot)$</u>

Si $P^\cdot$, $X^\cdot$ son complejos concentrados a nivel i, j con $i \neq j$ entonces

$\mathrm{Hom}_{K^b(A\text{-mod})}(X^\cdot, \nu P^\cdot) = 0 = D\,\mathrm{Hom}_{K^b(A\text{-mod})}(P^\cdot, X^\cdot)$, por tanto β_X es un iso.

Si $P^\cdot$, $X^\cdot$ son complejos concentrados a nivel i, j con $i = j$. Podemos suponer que $i = 0$ así que:

$$\mathrm{Hom}_{K^b(A\text{-mod})}(X^\cdot, \bar{\nu} P^\cdot) \cong \mathrm{Hom}_A(X^0, \nu P^0) \cong D\,\mathrm{Hom}_A(P^0, X^0) \cong D\,\mathrm{Hom}_{K^b(A\text{-mod})}(P^\cdot, X^\cdot)$$

$$\eta^\cdot \longmapsto \eta^0 \longmapsto (-|\eta^0) \longmapsto (-|\eta^\cdot)$$

y así β_X induce un isomorfismo.

b) Supongamos que $P^\bullet$ es un complejo tal que $w(P^\bullet)=1$ sin pérdida de generalidad podemos suponer que $P^\bullet$ es un complejo concentrado a nivel cero.

Sea $X^\bullet$ un complejo tal que $w(X^\bullet)=n$. Por (Cap I 2.22), podemos construir un triángulo de la forma $(X_1^\bullet, X_2^\bullet, X^\bullet, u, v, w)$ donde $w(X_1^\bullet), w(X_2^\bullet) < w(X^\bullet)$. Por ser $\operatorname{Hom}_{K^b(A\text{-mod})}(-, \overline{D}P^\bullet)$ y $\operatorname{Hom}_{K^b(A\text{-mod})}(P^\bullet, -)$ funtores cohomológicos tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{K^b(A\text{-mod})}(TX_2^\bullet, \overline{D}P^\bullet) \arrow[r, "(Tu)^*"] \arrow[d, "\beta_{TX_2^\bullet}"] & \operatorname{Hom}_{K^b(A\text{-mod})}(TX_1^\bullet, \overline{D}P^\bullet) \arrow[r, "w^*"] \arrow[d, "\beta_{TX_1^\bullet}"] & \operatorname{Hom}_{K^b(A\text{-mod})}(X^\bullet, \overline{D}P^\bullet) \arrow[r, "v^*"] \arrow[d, "\beta_{X^\bullet}"] & \operatorname{Hom}_{K^b(A\text{-mod})}(X_2^\bullet, \overline{D}P^\bullet) \arrow[r, "u^*"] \arrow[d, "\beta_{X_2^\bullet}"] & \operatorname{Hom}_{K^b(A\text{-mod})}(X_1^\bullet, \overline{D}P^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{X_1^\bullet}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D\operatorname{Hom}_{K^b(A\text{-mod})}(P^\bullet, TX_2^\bullet) \arrow[r, "D(Tu)_*"] & D\operatorname{Hom}_{K^b(A\text{-mod})}(P^\bullet, TX_1^\bullet) \arrow[r, "Dw_*"] & D\operatorname{Hom}_{K^b(A\text{-mod})}(P^\bullet, X^\bullet) \arrow[r, "Dv_*"] & D\operatorname{Hom}_{K^b(A\text{-mod})}(P^\bullet, X_2^\bullet) \arrow[r, "Du_*"] & D\operatorname{Hom}_{K^b(A\text{-mod})}(P^\bullet, X_1^\bullet) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis de inducción (ya que $w(X_1^\bullet), w(X_2^\bullet), w(TX_1^\bullet), w(TX_2^\bullet)$ son menores que n), $\beta_{X_1^\bullet}, \beta_{X_2^\bullet}, \beta_{TX_1^\bullet}, \beta_{TX_2^\bullet}$ son isomorfismos, y por el lema del cinco se sigue que $\beta_{X^\bullet}$ es un isomorfismo, para cada $P^\bullet, X^\bullet$ tal que $w(P^\bullet)=1$ y $w(X^\bullet)=n$.

El caso general es similar al anterior. $\square$.

3.7 Demostración del teorema 3.6.

Demostración

Dado que gl dim $A < \infty$ entonces $D^b(A)$ es equivalente triangular a $K^b(_A\mathcal{P})$ y a $K^b(_A\mathcal{I})$.

Así cada objeto en $D^b(A)$ puede escribirse en la forma $P^\cdot$, donde $P^\cdot \in K^b(_A\mathcal{P})$. Supongamos que $P^\cdot$ es inescindible en $D^b(A)$. Sea $\varphi \in D\,\mathrm{Hom}_{K(A\text{-mod})}(P^\cdot, P^\cdot)$ una forma lineal en $End(P^\cdot)$ la cual se anula en el radical $rad\, End(P^\cdot)$ y satisface $\varphi(Id_{P^\cdot}) = 1$ en k.

Ya que φ es distinto de cero, $w = \alpha_{P^\cdot}(\varphi) : P^\cdot \longrightarrow \nu P^\cdot$ es distinto de cero. Aplicando T^- al morfismo w, obtenemos el morfismo

$$T^- w : T^- P^\cdot \longrightarrow T^- \nu P^\cdot$$

distinto de cero.

Tomando el cono del morfismo T^-w obtenemos un triángulo

$$T^-P^\cdot \xrightarrow{T^-w} T^-\nu P^\cdot \xrightarrow{u} C^\cdot(T^-w) \xrightarrow{v} P^\cdot$$

Ahora, aplicando (TR2), obtenemos otro triángulo:

$$T^-\nu P^\cdot \xrightarrow{u} C^\cdot(T^-w) \xrightarrow{v} P^\cdot \xrightarrow{-w} \nu P^\cdot$$

en donde $T^-\nu P^\cdot$, $P^\cdot$ son inescindibles en $D^b(A)$ y $w \neq 0$.

Además se afirma que este triángulo satisface que $f \circ w = 0$ para todo $f : X^\cdot \longrightarrow P^\cdot$ no retracto en $D^b(A)$. Lo cual demuestra que este triángulo es de Auslander-Reiten por (3.3).

Para demostrar nuestra afirmación, observe que si

$\xi: P^{\cdot} \to X^{\cdot}$ es un morfismo arbitrario entonces $\xi \cdot f$ está en rad End$(P^{\cdot})$ pues $\xi \cdot f$ no es invertible, ya que f no es retracto. Por tanto tenemos que

$$(\xi / f\cdot w) = (\xi f / w) = \beta(w)(\xi f) = \varphi(\xi \cdot f) = 0. \text{ Luego,}$$

$$\beta(fw) = (- / fw) = 0. \text{ Como } \beta \text{ es iso } fw = 0.$$

$\square$

3.8 Por definición, los vértices del carcaj $\Gamma := \Gamma(\mathcal{A})$ de una categoría Krull-Schmidt $\mathcal{A}$ son las clases de isomorfía $[X]$ de los objetos inescindibles X de $\mathcal{A}$. El carcaj tiene una flecha $[X] \to [Y]$ si existe un morfismo irreducible de X a Y en $\mathcal{A}$.

<u>Corolario</u>: Sea A una k-álgebra de dimensión finita de dimensión global finita. Entonces $\Gamma(D^b(A))$ tiene estructura de carcaj de translación (ver [R]).

<u>Demostración</u>

Usando 4.9 del capítulo I sabemos que $D^b(A)$ es equivalente triangular a $K^b({}_A\mathcal{P})$. Así $D^b(A)$ es categoría Krull-Schmidt. Sea $P^{\cdot}$ inescindible en $D^b(A)$.

Definimos $\tau P^{\cdot} := T^{-}\overline{D}P^{\cdot}$. Se sigue de (3.6) que $(\Gamma(D^b(A)), \tau)$ es un carcaj de translación estable (estable significa que la translación τ esta definida para todos los vértices).

Nota que en nuestra situación τ es inducida por una equivalencia en ind $D^b(A)$.

$\square$

3.9 Proposición: Sea A K-álgebra de dimensión finita de dimensión global finita y $X^{\cdot}, Y^{\cdot} \in D^b(A)$. Entonces

$$D\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T^{2i-1}X^{\cdot}, Y^{\cdot}) \cong \mathrm{Hom}_{D^b(A)}(Y^{\cdot}, \tau T^{2i}X^{\cdot})$$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Demostración

Sea $P_1^{\cdot} \cong X^{\cdot}$ y $P_2 \cong Y^{\cdot}$ con $P_1^{\cdot}, P_2^{\cdot} \in K^b({}_A\mathcal{P})$. Claramente T conmuta con τ. Así $\tau T^{2i}X^{\cdot} \cong \tau T^{2i}P_1^{\cdot} = \overline{\nu} T^{2i-1}P_1^{\cdot}$. Y el isomorfismo es inducido por la transformación invertible $\alpha_{T^{2i-1}P_i^{\cdot}}$ (compara 3.6.3). $\square$

§4 El carcaj de $D^b(k\vec{\Delta})$

4.1 Sea A una k-álgebra de dimensión finita, básica y hereditaria (i.e el algebra de trayectorias $A=k\vec{\Delta}$ de un carcaj finito sin ciclos orientados $\vec{\Delta}$). Determinaremos $\Gamma(D^b(k\vec{\Delta}))$ el cual sabemos es isomorfo a $\Gamma(D^b(B))$ cuando B es equivalente por tilteo a $k\vec{\Delta}$ (ver (1.7)).

Lema. Sea $X^{\cdot}$ un objeto inescindible en $D^b(k\vec{\Delta})$.
Entonces $X^{\cdot}$ es isomorfo a un complejo concentrado a nivel i, para algún $i\in\mathbb{Z}$, con X^i inescindible en A-mod.

Demostración

Dado que $D^b(k\vec{\Delta})$ es equivalente a $K^b(\mathcal{I})$ es suficiente demostrar que cada objeto $I^{\cdot}$ de $K^b(\mathcal{I})$ inescindible en $D^b(A)$ es isomorfo a alguno de la forma:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow I^j \xrightarrow{\partial^j} I^{j+1} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

donde ∂^j es suprayectivo (Ya que este objeto es isomorfo al complejo $\cdots\longrightarrow 0\longrightarrow \ker\partial^j\longrightarrow 0\cdots$ concentrado a nivel j).

Sea $I^{\cdot}$ inescindible en $K^b(\mathcal{I})$. Aplicando T si es necesario, podemos suponer que $I^{\cdot}$ tiene la siguiente forma:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{\partial^0} I^1 \xrightarrow{\partial^1} I^2 \longrightarrow \cdots$$

con $I^0 \neq 0$.

Considere una factorización $I^0 \xrightarrow{g} X \xrightarrow{h} I^1$ de ∂^0 en $k\vec{\Delta}$-mod con g suprayectivo y h inyectivo.

Entonces X es un $k\vec{\Delta}$-módulo inyectivo, h es una sección. Por tanto tenemos un isomorfismo $(h, u)^t : X \oplus C \to I^1$ en $k\vec{\Delta}$-mod. Dado que $h \circ \partial' = 0$ obtenemos un isomorfismo de complejos

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r, "\partial^0"] & I^1 \arrow[r, "\partial^1"] & I^2 \arrow[r, "\partial^2"] & I^3 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & I^0 \oplus 0 \arrow[r, "\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"] \arrow[u, "Id_{I^0}"] & X \oplus C \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega^1 \end{pmatrix}"] \arrow[u, "\begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}"] & 0 \oplus I^2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \partial^2 \end{pmatrix}"] \arrow[u, "Id_{I^2}"] & 0 \oplus I^3 \arrow[r] \arrow[u, "Id_{I^3}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Dado que $I^{\cdot}$ es inescindible concluimos que

$$\cdots \to 0 \to I^0 \xrightarrow{g} X \to 0 \to \cdots$$

o

$$\cdots \to 0 \to C \to I^2 \to I^3 \to \cdots$$

es cero en $D^b(k\vec{\Delta})$ (i.e. acíclico). En el segundo caso $I^{\cdot}$ es isomorfo a

$$\cdots \to 0 \to I^0 \xrightarrow{g} X \to 0 \to \cdots$$

en $D^b(k\vec{\Delta})$. Y en el primer caso, lo hemos reducido a un complejo de ancho menor.

4.2 <u>Corolario</u>: Sea $X_0^{\cdot} \xrightarrow{f_0^{\cdot}} X_1^{\cdot} \to \cdots \to X_{r-1}^{\cdot} \xrightarrow{f_{r-1}^{\cdot}} X_0^{\cdot}$ un ciclo en $D^b(k\vec{\Delta})$. Entonces, cada $X_i^{\cdot}$ es isomorfo a $T^n X_i$ para algún $X_i \in k\vec{\Delta}$-mod y algún $n \in \mathbb{Z}$ fijo. $\square$

4.3 Dividimos el cálculo de triángulos de Auslander-Reiten en $D^b(A)$ en dos casos:

<u>Primer caso</u>: Si $Z^\bullet = T^i Z$ para algún $i \in \mathbb{Z}$ y algún inescindible Z no proyectivo en $K\tilde{\Delta}^o$-mod. Entonces tomamos la sucesión de Auslander-Reiten $0 \to X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \to 0$ en A-mod.

Sea $w \in Ext^1_{K\tilde{\Delta}^o}(Z, X) = Hom_{D^b(K\tilde{\Delta}^o)}(Z, TX)$ el elemento correspondiente a esta sucesión. Entonces

$$T^i X \xrightarrow{T^i u} T^i Y \xrightarrow{T^i v} T^i Z \xrightarrow{T^i w} T^{i+1} X$$

el cual es triángulo tal que $T^i X, T^i Y$ son inescindibles y $T^i w \neq 0$.

Para ver que es un triángulo de Auslander-Reiten basta demostrar que existe $f': W^\bullet \to T^i Y$ tal que $f' \circ T^i(v) = f$ para cada $f: W^\bullet \to Z^\bullet$ no retracción.

Sea entonces $f: W^\bullet \to Z^\bullet$ no retracción el cual visualizamos a través del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \to & W^{i-1} & \to & W^i & \to & W^{i+1} & \to & W^{i+2} & \to & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow f^i & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \to & 0 & \to & Z & \to & 0 & \to & 0 & \to & \cdots \end{array}$$

donde $f^j = 0$ si $j \neq i$ y $f^i: W^i \to Z$ no es retracción.

Luego existe $h^i: W^i \to Y$ tal que $h^i \circ v = f^i$. Sea entonces $f': W^\bullet \to T^i Y$ tal que

$$f'^j := \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ h^i & \text{si } j = i \end{cases}$$

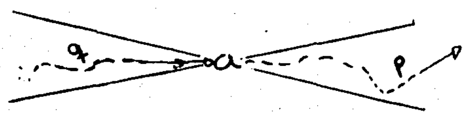
claramente $f' \circ T^i v = f$. Por tanto $(T^i X, T^i Y, T^i Z, T^i u, T^i v, T^i w)$

es triángulo de Auslander-Reiten en $D^b(A)$.

<u>Segundo Caso</u> : Sea $Z = T^i P(a)$ con $i \in \mathbb{Z}$ donde $P(a)$ es el $K\vec{\Delta}$-módulo proyectivo inescindible asociado con el punto a de $\vec{\Delta}$; por simplicidad suponemos que $i=0$.

Denotamos por E el siguiente $K\vec{\Delta}$-módulo (considerado como representación covariante de $\vec{\Delta}$): $E(X)$ es el espacio vectorial libremente generado por las trayectorias en $\vec{\Delta}$ de la forma $p: X \to a$ o $q: a \to X$ (así tenemos que $E(X)=0$ si X no es comparable con a en el orden $\leq$ definido por las flechas de $\vec{\Delta}$).

Si $\alpha: x \to y$ es una flecha en $\vec{\Delta}$ y $a \leq x$, $E(\alpha): E(X) \to E(y)$ mapea a q en la composición de trayectorias $q\alpha$; si $x \leq a$, $E(\alpha)$ mapea p en q' si $p = \alpha q'$ y en 0 si no tiene esta forma.



Las trayectorias (resp. las trayectorias no triviales) que salen de a generan un submódulo de E el cual es identificado con el proyectivo inescindible $P(a)$ asociado a a (respectivamente con el radical $\underline{P}(a)$ de $P(a)$). El conúcleo de la inclusión $\underline{P}(a) \xrightarrow{i} E$ se identifica con el módulo generado por los caminos que terminan en a esto es el inyectivo inescindibla $I(a)$. El cociente $I(a)/\mathrm{soc}\,I(a)$ lo denotamos por $\bar{I}(a)$.

Sea $p: E \to I(a)$ la proyección así definida. Denotamos por ω la composición $P(a) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} I(a)$. Correspondiente a la sucesión exacta $P(a) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p'} \bar{I}(a)$ (resp. $\underline{P}(a) \xrightarrow{i'} E \xrightarrow{p} I(a)$) tenemos un elemento $\eta \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{L}\Delta}(\bar{I}(a), P(a)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(a)}(\bar{I}(a), TP(a))$ (resp. $\eta' \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{L}\Delta}(I(a), \underline{P}(a)) \cong$

$\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(a)}(I(a), T\underline{P}(a))$).

Lema: La sextupla asociada con la sucesión

$$(*)\quad T^{-}I(a) \xrightarrow{[T^{-}p,\, T^{-}\eta']} T^{-}\bar{I}(a) \oplus \underline{P}(a) \xrightarrow{\begin{bmatrix} T\eta \\ i \end{bmatrix}} P(a) \xrightarrow{\omega} I(a)$$

es un triángulo de Auslander-Reiten.

Demostración

Claramente $I(a) = \nu P(a)$. Por la prueba del teorema 3.6 el triángulo de Auslander-Reiten que parte de $\tau P(a) = T^{-}I(a)$ tiene a ω como último morfismo. Así es suficiente verificar que la sextupla de nuestro lema es un triángulo. Esto se sigue directamente del siguiente diagrama, donde E denota un módulo arbitrario, $\underline{P} \subsetneq P$ dos submódulos de E, I y $\bar{I}$ los cocientes $E/\underline{P}$ y E/P respectivamente; por $[X \xrightarrow{\partial} Y]$ el complejo que se anula en grados distintos de 0 y 1 el cual tiene a X como 0-componente y Y en la primera componente; $\omega = (P \hookrightarrow E \to I = E/\underline{P})$.

$$\begin{tikzcd}
{[0 \to P]} \arrow[r, "{[0,w]}"] & {[0 \to I]} \arrow[r, "{[0,1]}"] & {[P \xrightarrow{w} I]} \arrow[r, "{[1,0]}"] & {[P \to 0]} \\
& {[P \hookrightarrow E]} \arrow[u, "{[0,p]}"] \arrow[r, "{[[-1,i],1]}"] & {[\underline{P} \oplus P \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} p \\ i \end{smallmatrix}\right]} E]} \arrow[u, "{[\left[\begin{smallmatrix} i \\ i \end{smallmatrix}\right] p]}"'] &
\end{tikzcd}$$

Por construcción la primera línea es un triángulo y los morfismos verticales son casi-isomorfismos en $K^b(k\vec{\Delta}\text{-mod})$.

Dado que $[\underline{P} \oplus P \to E]$ es casi-isomorfo a $T\underline{P} \oplus \overline{I}$, la primera línea es isomorfa en $D^b(k\vec{\Delta})$ a la siguiente sucesión:

$$P \xrightarrow{\omega} I \xrightarrow{[p,-\eta]} \overline{I} \oplus T\underline{P} \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} \eta \\ Ti \end{smallmatrix}\right]} TP$$

la afirmación se sigue de (TR2). $\square$

El triángulo $(*)$ es llamado <u>triángulo de Conexión</u> observe la analogía con las sucesiones de conexión en la teoría de módulos de Tilteo [HR].

4.4 Usando los resultados de (3.5) es fácil derivar la estructura de $\Gamma(D^b(k\vec{\Delta}))$. Sea $\Gamma := \Gamma_{k\vec{\Delta}}$ el carcaj de Auslander-Reiten de $k\vec{\Delta}$. Denote por Γ_i una copia de Γ para $i \in \mathbb{Z}$, por $\vec{\Gamma}$ el carcaj obtenido de la unión disjunta $\coprod_{i \in \mathbb{Z}} \Gamma_i$, agregando una flecha del módulo inyectivo $I(b)$ en Γ_i al módulo proyectivo $P(a)$ en Γ_{i+1} para cada flecha de b a a en $\vec{\Delta}$.

Proposición: $\Gamma(D^b(k\tilde{\Delta}))\cong\tilde{\Gamma}$ como carcaj de traslación.

Demostración

Sea $Y' \in D^b(k\tilde{\Delta})$ inescindible, entonces $Y'\cong T^\ell Y$ para alguna $\ell\in\mathbb{Z}$, $Y\in k\tilde{\Delta}$-mod. Supongamos que Y no es proyectivo. Consideramos la sucesión de Auslander-Reiten $0\to\tau Y\xrightarrow{u}E\xrightarrow{v}Y\to 0$ en $k\tilde{\Delta}$-mod, obtenemos el triángulo de Auslander-Reiten.

$$T^\ell\tau Y\xrightarrow{T^\ell u}T^\ell E\xrightarrow{T^\ell v}T^\ell Y\longrightarrow T^{\ell+1}\tau Y,\ \text{en } D^b(k\tilde{\Delta}).$$

Sea $E=\bigoplus_{j=1}^{n} X_j$ descomposición inescindible en $k\tilde{\Delta}$-mod y consideramos el morfismo $T^\ell v=\begin{pmatrix}T^\ell v_1\\ \vdots\\ T^\ell v_n\end{pmatrix}:\bigoplus_{j=1}^{n} T^\ell X_j\longrightarrow T^\ell Y$.

Es fácil probar que los morfismos $T^\ell v_j: T^\ell X_j\to T^\ell Y$ son, hasta isomorfía, los morfismos irreducibles que terminan en $T^\ell Y$.

En el caso en que $Y=P(a)$ es proyectivo en $k\tilde{\Delta}$-mod, el triángulo de Auslander-Reiten en $D^b(k\tilde{\Delta})$ resulta.

$$T^{\ell-1}I(a)\xrightarrow{(T^{\ell-1}\rho,\,T^{\ell-1}\gamma')}T^{\ell-1}\bar{I}(a)\oplus T^\ell \underline{P}(a)\xrightarrow{\begin{pmatrix}T^{\ell-1}\gamma\\T^\ell i\end{pmatrix}}T^\ell P(a)\xrightarrow{\omega}T^\ell I(a)$$

donde la notación es como en (4.3). Consideramos las descomposiciones inescindibles

$$\underline{P}(a)=\bigoplus_{j=1}^{n_a}P(b_j)\quad \text{y}\quad \bar{I}(a)=\bigoplus_{j=1}^{m_a}I(c_j),\ \text{donde}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & b_1 \\ a \arrow[ur] \arrow[dr] & \vdots \\ & b_{n_a} \end{tikzcd}$$ son todas las flechas que salen de a en $\vec{\Delta}^0$

y $$\begin{tikzcd}[row sep=small] c_1 \arrow[dr] & \\ \vdots & a \\ c_{m_a} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$ son todas las flechas que entran en a en $\vec{\Delta}^0$

Consideramos los morfismos

$$T^{\ell-1}\eta = \begin{pmatrix} \eta_1^{(\ell)} \\ \vdots \\ \eta_{m_a}^{(\ell)} \end{pmatrix} : \bigoplus_{j=1}^{m_a} T^{\ell-1} I(c_j) \longrightarrow T^{\ell} P(a) \qquad \text{y}$$

$$\iota = \begin{pmatrix} T^{\ell}\iota_1 \\ \vdots \\ T^{\ell}\iota_{n_a} \end{pmatrix} : \bigoplus_{j=1}^{n_a} T^{\ell} P(b_j) \longrightarrow T^{\ell} P(a)$$

Luego, los morfismos $\eta_j^{(\ell)} : T^{\ell-1} I(c_j) \longrightarrow T^{\ell} P(a)$. y $T^{\ell}\iota_j : T^{\ell} P(b_j) \longrightarrow T^{\ell} P(a)$ son hasta isomorfía los irreducibles que terminan en $T^{\ell} P(a)$.

Definimos ahora $f : \Gamma(D^b(k\vec{\Delta}^0)) \longrightarrow \Gamma'$ de la siguiente manera. Si $[Y'] \in \Gamma(D^b(k\vec{\Delta}^0))$ con $Y' = T^{\ell} Y$. para $\ell \in \mathbb{Z}$, $Y \in k\vec{\Delta}^0$-mod, entonces $f([Y']) = ([Y], \ell) \in \Gamma'_{\ell}$. Si $\alpha : [X'] \longrightarrow [Y']$. es flecha en

$\Gamma(D^b(k\vec{\Delta}))$, distinguimos dos casos:

Si Y no es proyectivo, entonces $\alpha = [T^\ell v_j]: [T^\ell x_j] \to [Y']$, donde la notación es como antes. Así, $[v_j]: [x_j] \to [Y]$ es flecha en $\Gamma = \Gamma_{k\vec{\Delta}}$, ponemos $f(\alpha) = ([v_j], \ell)$. Si $Y = P(a)$ y $\alpha = [T^\ell i_j]: [T^\ell P(b_j)] \to [T^\ell P(a)]$, entonces $f(\alpha) = ([i_j], \ell)$ como antes. Si $\alpha = [v_j^{(\ell)}]: [T^{\ell-1} I(c_j)] \to [T^\ell P(a)]$, entonces $f(\alpha)$ es flecha de $([I(c_j)], \ell-1)$ en $([P(a)], \ell)$ en Γ correspondiente a la flecha $c_j \to a$ en $\vec{\Delta}$.

Por construcción f es isomorfismo de carcajes. Además preserva la translación. En efecto, si $Y' = T^\ell Y$ y Y no es proyectivo, entonces $\tau[Y'] = [T^\ell \tau Y]$ y $f(\tau[Y']) = ([\tau Y], \ell) = \tau([Y], \ell)$ en $\tilde{\Gamma}$. Si $Y' = T^\ell P(a)$, entonces $\tau[Y'] = [T^{\ell-1} I(a)]$ y $f(\tau[Y']) = ([I(a)], \ell-1) = \tau([P(a)], \ell) = \tau f([Y'])$.

$\square$.

4.5 En esta sección ciertas gráficas juegan un papel especial. Enseguida damos su descripción:

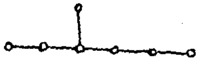
(i) <u>Diagramas Dynkin</u>.

$\mathbb{A}_n$:  ($1 \leq n$ vértices)

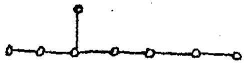
$\mathbb{D}_n$:  ($4 \leq n$ vértices)

$\mathbb{E}_6$: 

$\mathbb{E}_7$:



$\mathbb{E}_8$:

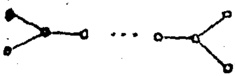


(ii) Diagramas afínes

$\tilde{\mathbb{A}}_n$:

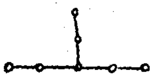
(n+1 vértices)
($n \geqslant 1$)

$\tilde{\mathbb{D}}_n$:



(n+1 vértices)
($n \geqslant 3$)

$\tilde{\mathbb{E}}_6$:

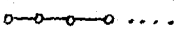


$\tilde{\mathbb{E}}_7$:

$\tilde{\mathbb{E}}_8$:

(iii) Diagrama infinito

$\mathbb{A}_\infty$:



4.5.1 De la estructura de $\Gamma_{k\vec{\Delta}^0}$ ([G2], [R:2], [R:3]) se sigue:

<u>Corolario</u>: i) Si $\vec{\Delta}$ es un diagrama Dynkin entonces $\Gamma(D^b(k\vec{\Delta}^0)) \cong \mathbb{Z}\vec{\Delta}^0$

ii) Si $\vec{\Delta}$ es un diagrama afín (i.e. es de tipo de representación manso) entonces las componentes de $\Gamma(D^b(k\vec{\Delta}^0))$ son de la forma $\mathbb{Z}\vec{\Delta}^0$ y $\mathbb{Z}A_\infty/r$ para algún $r \in \mathbb{N}$.

iii) Si $\vec{\Delta}^0$ es un carcaj no Dynkin ni afín (i.e. $k\vec{\Delta}^0$ es de representación salvaje) entonces las componentes de $\Gamma(D^b(k\vec{\Delta}^0))$ son de la forma $\mathbb{Z}\vec{\Delta}^0$ y $\mathbb{Z}A_\infty$.

□.

4.6 Sea $\vec{\Delta}^0$ un carcaj Dynkin y denote por $k(\mathbb{Z}\vec{\Delta}^0)$ la categoría malla de $\mathbb{Z}\vec{\Delta}^0$, esto es:

Definimos $k(\mathbb{Z}\vec{\Delta}^0)$ la <u>categoría malla</u> $k[\mathbb{Z}\vec{\Delta}^0]/M$ donde $k[\mathbb{Z}\vec{\Delta}^0]$ es la categoría de caminos asociada a $\mathbb{Z}\vec{\Delta}^0$ y M el ideal generado por las sumas $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$ donde

$$\begin{tikzcd} & y_1 \arrow[dr, "\beta_1"] & \\ \tau x \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_n"'] & \vdots & x \\ & y_n \arrow[ur, "\beta_n"'] & \end{tikzcd}$$

en $\mathbb{Z}\vec{\Delta}^0$ es tal que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son todas las flechas que salen de τx (ver [R]).

Proposición: $\operatorname{ind} D^b(k\vec{\Delta}^{\circ})$ es equivalente a $k(\mathbb{Z}\vec{\Delta}^{\circ})$.

Demostración

Sea $f: \mathbb{Z}\vec{\Delta}^{\circ} \to \Gamma(D^b(k\vec{\Delta}^{\circ}))$ el isomorfismo de carcajes de translación dado en (4.5 i).

Se define el funtor $F: k(\mathbb{Z}\vec{\Delta}^{\circ}) \to \operatorname{ind} D^b(k\vec{\Delta}^{\circ})$ inducido por f y tal que preserva la translación de Auslander-Reiten

<u>F es fiel y pleno</u>: Dado que F conmuta con τ podemos suponer que $F(x) = T^i P$ para $i \in \mathbb{Z}$ y P algún proyectivo inescindible en $k\vec{\Delta}^{\circ}$-mod. Supongamos que $F(y) = T^j Y$ con Y inescindible en $k\vec{\Delta}^{\circ}$-mod.

Mostraremos que F es pleno. Si $i \neq j$, entonces $Hom_{D^b(A)}(F(x), F(y)) = 0$. Podemos suponer que $i = j$,

$Hom_{D^b(A)}(F(x), F(y)) \cong Hom_{D^b(k\vec{\Delta}^{\circ})}(P, Y) \cong Hom_{k\vec{\Delta}^{\circ}}(P, Y)$. Como $\vec{\Delta}^{\circ}$ es Dynkin, $\Gamma_{k\vec{\Delta}^{\circ}}$ es una componente preproyectiva. Si $f \in Hom_{k\vec{\Delta}^{\circ}}(P, Y)$ entonces $f = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \alpha_1^{(i)} \cdots \alpha_{n_i}^{(i)}$, donde $\alpha_j^{(i)}$ es morfismo irreducible en $k\vec{\Delta}^{\circ}$-mod

Luego, existen flechas $\beta_j^{(i)}$ en $\mathbb{Z}\vec{\Delta}^{\circ}$ tales que $F(\beta_j^{(i)}) = \alpha_j^{(i)}$. Entonces

$$F\left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \beta_1^{(i)} \cdots \beta_{n_i}^{(i)}\right) = f, \text{ con } \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \beta_1^{(i)} \cdots \beta_{n_i}^{(i)} \in Hom_{k(\mathbb{Z}\vec{\Delta}^{\circ})}(x, y).$$

Mostraremos ahora que F es fiel: podemos suponer que $Hom_{k(\mathbb{Z}\vec{\Delta}^{\circ})}(x, y) \neq 0$. En ese caso $i = j$. Por tanto

$$Hom_{D^b(k\vec{\Delta}^{\circ})}(Fx, Fy) \cong Hom_{k\vec{\Delta}^{\circ}}(P, Y) \overset{!}{\cong} Hom_{k(\mathbb{Z}\vec{\Delta}^{\circ})}(x, y).$$

(!) por ser τ una equivalencia en $k(\mathbb{Z}\vec{\Delta}^{\circ})$ (ver [R]). $\square$

4.7 Si $\vec{\Delta}$ es un carcaj Dynkin, la característica de Euler $\chi_{k\vec{\Delta}}$ es positiva definida y el conjunto de raíces $\mathcal{R}=\{x\in\mathbb{Z}^n : \chi_{k\vec{\Delta}}(x)=1\}$ es finito (ver por ejemplo [R;6]).

Un elemento distinto de cero $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{Z}^n$ es *positivo* si $x_i\geq 0$ para todo $i\in\{1,2,\dots,n\}$. Entonces *dim* induce una biyección entre ind $k\vec{\Delta}$ y $\mathcal{R}^+=\{x\in\mathcal{R} : x$ es positivo$\}$ [BGP], [G1].

Sea T el funtor translación en la categoría ind $D^b(k\vec{\Delta})$. Sea G el grupo cíclico de automorfismos k-lineales de ind $D^b(k\vec{\Delta})$ generado por T^2.

Observamos que G actúa *libremente* sobre ind $D^b(k\vec{\Delta})$ (en efecto, supongamos que $T^{2n}X=X$ con $n\geq 0$. Como X es acotado, podemos suponer que $X^0\neq 0$ y $X^m=0$ si $m<0$ por tanto $(T^{2n}X)^m=0$ si $m\leq 2n-1$ y $(T^{2n}X)^{2n}\neq 0$. Luego $2n=0$ y $n=0$) y la acción de G es *localmente acotada* (en efecto, supongamos que $X, Y\in$ ind $D^b(k\vec{\Delta})$ y $\mathrm{Hom}_{D^b(k\vec{\Delta})}(X,T^{2n}Y)\neq 0$. Sea $F: D^b(k\vec{\Delta})\to K^b({}_{k\vec{\Delta}}\mathcal{S})$ la equivalencia triangular dada en (cap I, 4.9). Luego $0\neq \mathrm{Hom}_{D^b(k\vec{\Delta})}(X,T^{2n}Y)\cong \mathrm{Hom}_{H(\mathcal{S})}(FX,T^{2n}FY)$. Podemos suponer que $(FX)^m=0$ si $m\notin\{l,l+1,\dots,j-1,j\}$ para números $l,j\in\mathbb{Z}$. Similarmente $(FY)^m=0$ si $m\notin\{t,t+1,\dots,s-1,s\}$. Entonces $l\leq t+2n\leq j$ o bien $l\leq s+2n\leq j$ y sólo hay finitas n que satisfacen esta condición).

Por [G3, 3.1], el cociente ind $D^b(k\vec{\Delta})/T^2$ está bien definido y es una categoría localmente de dimensión finita. Además la proyección π : ind $D^b(k\vec{\Delta})\to$ ind $D^b(k\vec{\Delta})/T^2$ es una *cubierta de Galois*.

La categoría $\mathcal{R}(\vec{\Delta})=$ ind $D^b(k\vec{\Delta})/T^2$ se llama la *categoría de raíces* de $\vec{\Delta}$.

Corolario. Sea $\vec{\Delta}$ un carcaj Dynkin. Entonces $\underline{\dim}$ induce una biyección entre los objetos $\mathcal{R}(\vec{\Delta})$ y $\mathcal{R}$.

Demostración

Por 4.1 y la observación previa $\chi_{k\vec{\Delta}}(\underline{\dim}\, X^{\cdot})=1$ para $X^{\cdot} \in ind\, D^b(k\vec{\Delta})$ consecuentemente $\underline{\dim}$ es un mapeo de $ind\, D^b(k\vec{\Delta})$ a $\mathcal{R}$. Como para $x \in \mathcal{R}$ o bien x o $-x$ es positivo, $\underline{\dim}$ es un mapeo suprayectivo. Como $\underline{\dim}\, T^2 X^{\cdot} = \underline{\dim}\, X^{\cdot}$ entonces se induce un mapeo suprayectivo de $\mathcal{R}(\vec{\Delta})$ en $\mathcal{R}$.

Si $\underline{\dim}\, X^{\cdot} = \underline{\dim}\, Y^{\cdot}$ con $X^{\cdot}, Y^{\cdot} \in ind\, D^b(k\vec{\Delta})$. Por (4.1) podemos suponer que $X^{\cdot}$ está concentrado a nivel 0 y $Y^{\cdot}$ concentrado a nivel ℓ. Como $\underline{\dim}\, X \geq 0$ entonces ℓ es par, digamos $\ell = 2k$. Así, $\underline{\dim}\, X^{\cdot} = \underline{\dim}\, T^{-2k} Y$. Por [BGP], $X^{\cdot} \cong T^{-2k} Y^{\cdot}$.

$\square$

4.8 Sea Δ una gráfica finita y $\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2$ dos carcajes sin ciclos orientados y gráfica subyacente igual a Δ. Si $\vec{\Delta}_1$ puede obtenerse de $\vec{\Delta}_2$ por una sucesión de <u>reflexiones</u> [BGP], [G2] y un isomorfismo de carcajes escribimos $\vec{\Delta}_1 \sim \vec{\Delta}_2$.

Proposición: $\mathbb{Z}\vec{\Delta}_1$ y $\mathbb{Z}\vec{\Delta}_2$ son isomorfos como carcajes de translación si y sólo si $\vec{\Delta}_1 \sim \vec{\Delta}_2$.

Antes de demostrar esta proposición, hacemos algunas consideraciones:

4.8.1 a) Sea $\vec{\Delta}^{\circ}$ un carcaj sin ciclos orientados, un conjunto de vértices $\mathfrak{X} = \{x_1, x_2, -, x_n\}$ en $\mathbb{Z}\vec{\Delta}^{\circ}$ es llamado una <u>rabanada</u> si satisface las tres condiciones siguientes:

i) Para cada vértice $x \in \mathbb{Z}\vec{\Delta}^{\circ}$, $\mathfrak{X}$ contiene precisamente un punto de la órbita $\{\tau^n x : n \in \mathbb{Z}\}$ de x.

ii) Si $y_0 \to y_1 \to \dots \to y_s$ es una trayectoria en $\mathbb{Z}\vec{\Delta}^{\circ}$ y, y_0, y_s pertenecen a $\mathfrak{X}$, entonces todos los y_i pertenecen a $\mathfrak{X}$.

iii) Si $x \to y$ es una flecha en $\mathbb{Z}\vec{\Delta}^{\circ}$ y $x \in \mathfrak{X}$ entonces $y \in \mathfrak{X}$ o $\tau y \in \mathfrak{X}$.

Sea $(\vec{\Delta}^{\circ}, 0)$ el subcarcaj plano de $\mathbb{Z}\vec{\Delta}^{\circ}$ definido por

$$(\vec{\Delta}^{\circ}, 0)_0 := \{ (i, 0) : i \in \vec{\Delta}^{\circ} \}$$

$$(\vec{\Delta}^{\circ}, 0)_1 := \{ (\alpha, 0) \in (\mathbb{Z}\vec{\Delta}^{\circ})_1 : (\alpha, 0) : (i, 0) \to (j, 0) \text{ para cada } \alpha : i \to j \in \Delta_1 \}.$$

Claramente $(\vec{\Delta}, 0)$ es una rabanada de $\mathbb{Z}\vec{\Delta}^{\circ}$, isomorfa a $\vec{\Delta}^{\circ}$.

4.8.2 b) En esta sección sea Γ una rabanada de $\mathbb{Z}\vec{\Delta}^{\circ}$, tal que para cada $(x, i) \in \Gamma$, $i \geq 0$.

<u>Lema</u>: $(\Delta, 0) \sim \Gamma$.

<u>Demostración</u>

Demostración

Sea $\omega(\Gamma) := \sum_{(x,i)\in\Gamma} i$. La demostración es por inducción sobre $\omega(\Gamma)$.

Si $\omega(\Gamma)=0$ entonces $(\Delta,0)=\Gamma$ y por tanto $(\Delta,0)\sim\Gamma$.

Supongamos que $\omega(\Gamma)=n$ y que para toda rebanada Γ' con $(x,i)\in\Gamma'$ tal que $i\geqslant 0$ y $\omega(\Gamma')\leqq n-1$ entonces $(\Delta,0)\sim\Gamma'$

En primer lugar observamos que Γ tiene un pozo: Sea $(y_1,i_1)\in\Gamma$. Luego $i_1\geqslant 0$. Si (y_1,i_1) no es pozo en Γ, existe $\alpha_1:(y_1,i_1)\longrightarrow(y_2,i_2)\in\Gamma$ flecha en $\mathbb{Z}\vec{\Delta}$). Luego $i_2\geqslant i_1\geqslant 0$. Continuando de esta forma se debe llegar a un pozo. De otra forma encontramos un ciclo

$$(y_s,i_s)\xrightarrow{\alpha_s}(y_{s+1},i_{s+1})\longrightarrow\cdots\xrightarrow{\alpha_{n-1}}(y_n,i_n)\xrightarrow{\alpha_n}(y_s,i_s)$$

Luego $i_s=i_{s+1}=\cdots=i_n$. Trasladando con τ^{i_s} obtenemos en $(\vec{\Delta},0)$ un ciclo.

$$(\tau^{n_s}y_s,0)\longrightarrow(\tau^{n_s}y_{s+1},0)\longrightarrow\cdots\longrightarrow(\tau^{n_s}y_n,0)\longrightarrow(\tau^{n_s}y_s,0),$$

pero $(\vec{\Delta},0)$ es isomorfo a $\vec{\Delta}$ que no tiene ciclos. Contradicción.

Sea (z,j) un pozo en Γ. Como $\omega(\Gamma)>0$, entonces $j>0$. Definimos Γ' la imagen bajo el funtor reflexión $\sigma(z,j)$ en el pozo (z,j) de $\mathbb{Z}\vec{\Delta}$. Así $\Gamma':=\sigma(z,j)\Gamma$.

Entonces $\Gamma'=\{(x,i)\in\Gamma : x\neq z\}\cup\{(z,j-1)\}$, Γ' es una rebanada tal que para cada $(y,i)\in\Gamma'$, $i\geqslant 0$.

Γ' es rebanada:

i) Es claro que Γ' contiene exactamente un punto de cada órbita de $\mathbb{Z}\Delta$.

ii) Supongamos que $y_0 \to y_1 \to \cdots \to y_s$ es una trayectoria en $\mathbb{Z}\vec{\Delta}$ con $y_0, y_s \in \Gamma'$. Como $(z, j-1)$ es fuente en Γ', $(z, j-1) \neq y_i$, $1 \leq i \leq s$.

Si $y_0 \neq (z, j-1)$, entonces $y_0, y_s \in \Gamma$ y por tanto $y_i \in \Gamma$ $0 \leq i \leq s$. Luego también $y_i \in \Gamma'$, $0 \leq i \leq s$. Supongamos que $y_0 = (z, j-1)$. Como $y_1 \to (z, j) \in \Gamma$, se tiene que $y_1 \in \Gamma$ o bien $z^{-1} y_1 \in \Gamma$. Pero por ser (z, j) pozo en Γ, entonces $y_1 \in \Gamma$. Entonces $y_i \in \Gamma$, $1 \leq i \leq s$. Así, $y_i \in \Gamma'$, $0 \leq i \leq s$.

iii) Supongamos que $x \to y$ es flecha en $\mathbb{Z}\vec{\Delta}$ con $x \in \Gamma'$. Si $x = (z, j-1)$, entonces $y \to (z, j)$ es flecha en $\mathbb{Z}\vec{\Delta}$. Luego $y \in \Gamma$ o bien $z^{-1} y \in \Gamma$. Por ser (z, j) pozo en Γ, $y \in \Gamma$, luego $y \in \Gamma'$.

Si $x \neq (z, j-1)$, entonces $x \in \Gamma$. Así $y \in \Gamma$ o bien $\tau y \in \Gamma$. Si $\tau y \in \Gamma$, entonces $\tau y \neq (z, j)$, luego $\tau y \in \Gamma'$. Si $y \in \Gamma$ pero $y = (z, j)$, entonces $\tau y = (z, j-1) \in \Gamma'$.

Así hemos mostrado que Γ' es una rebanada en $\mathbb{Z}\vec{\Delta}$, la cual por construcción satisface que para cada $(x, i) \in \Gamma'$; $i \geq 0$, además $w(\Gamma') \leq n-1$ por hipótesis de inducción tenemos que $(\Delta, 0) \sim \Gamma'$. Por tanto $(\Delta, 0) \sim \Gamma$.

4.8.3 Sean $\vec{\Delta}_1$ y $\vec{\Delta}_2$ carcajes sin ciclos orientados con gráfica subyacente igual a Δ.

<u>Lema</u>: Si $\mathbb{Z}\vec{\Delta}_1$ es isomorfo a $\mathbb{Z}\vec{\Delta}_2$ como carcajes de translación entonces existe Γ rebanada en $\mathbb{Z}\vec{\Delta}$ tal que para todo $(x, i) \in \Gamma$ $i \geq 0$.

<u>Demostración</u>

Sea $\varphi: \mathbb{Z}\vec{\Delta}_1^0 \to \mathbb{Z}\vec{\Delta}_2^0$ un isomorfismo de carcajes de translación, así $\varphi\tau_1 = \tau_2\varphi$ donde τ_1 es la translación en $\mathbb{Z}\vec{\Delta}_1^0$ y τ_2 es la translación en $\mathbb{Z}\vec{\Delta}_2^0$.

Sea $\bar{X} := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una sucesión (+) admisible en Δ_1 (esto es x_1 es pozo, y x_i es pozo en $\Delta_1 - \{x_1, \dots, x_{i-1}\}$ para $i=1,\dots,n$).

Entonces $(\bar{X},0)$ es una rebanada de $\mathbb{Z}\vec{\Delta}_1$ y $(\bar{X},0)$ es isomorfo a $\vec{\Delta}_1$.

Sea $Y = \varphi(\bar{X},0)$ subcarcaj de $\mathbb{Z}\vec{\Delta}_2^0$.

Y es rebanada en $\mathbb{Z}\Delta_2$. En efecto:

a) Sea z un vértice en $\mathbb{Z}\vec{\Delta}_2^0$. Entonces $\varphi^{-1}(z)$ es vértice en $\mathbb{Z}\vec{\Delta}_1^0$ y existe una única n tal que $\tau_1^n \varphi^{-1}(z) \in (X,0)$. Así, $\tau_2^n z = \varphi(\tau_1^n \varphi^{-1}(z)) \in Y$.

b) Sea $z_1 \to z_2$ en $\mathbb{Z}\vec{\Delta}_2$ con $z_1 \in Y$. Así $\varphi^{-1}(z_1) \to \varphi^{-1}(z_2)$ en $\mathbb{Z}\Delta_1$ con $\varphi^{-1}(z_1) \in (X,0)$. Luego $\varphi^{-1}(z_2) \in (X,0)$ ó $\tau_1\varphi^{-1}(z_2) \in (X,0)$. Equivalentemente, $z_2 \in Y$ ó $\tau_2 z_2 \in Y$.

c) Similarmente Y es cerrado bajo trayectorias.

4.8.4. Demostración de la proposición (4.8)

$\Rightarrow$) Sea $\varphi: \mathbb{Z}\vec{\Delta}_1^0 \to \mathbb{Z}\vec{\Delta}_2^0$ un isomorfismo de carcajes de translación. Sea $X = (\vec{\Delta}_1^0, 0)$ rebanada en $\vec{\Delta}$, isomorfa a $\vec{\Delta}_1$. Entonces $\varphi(X)$ es rebanada en $\mathbb{Z}\vec{\Delta}_2$ y por (4.8.2), $\varphi(X) \sim \vec{\Delta}_2$. Entonces $\vec{\Delta}_1^0 \sim \vec{\Delta}_2^0$.

$\Leftarrow$) La demostración es fácil: se deja al lector.

4.9 <u>Corolario</u>: Si $D^b(k\vec{\Delta}_1^0)$ es equivalente triangular a $D^b(k\vec{\Delta}_2^0)$ entonces $\vec{\Delta}_1^0 \sim \vec{\Delta}_2^0$.

Demostración

Por 4.5 las componentes de $\Gamma(D^b|K\vec{\Delta}^0|)$ no isomorfas a $\mathbb{Z}A_\infty$ o $\mathbb{Z}A_\infty/r$ son isomorfos a $\mathbb{Z}\vec{\Delta}^0$. Así $\mathbb{Z}\vec{\Delta}_1^0$ y $\mathbb{Z}\vec{\Delta}_2^0$ son isomorfos como carcajes de translación.

$\square$.

§5 Algebras Dynkin

5.1 Sea $\vec{\Delta}$ un carcaj Dynkin y Afín (ver (4.5)) sin ciclos orientados que tiene n vértices. *El cuadrado del funtor translación es un automorfismo en* $D^b(k\vec{\Delta})$. La categoría de Raíces es por definición la categoría cociente de ind $D^b(k\vec{\Delta})$ por T^2, definida en (4.7).

En lo siguiente usamos la misma notación para $\mathcal{R}(\vec{\Delta})$ y su carcaj. Observe que $\mathcal{R}(\vec{\Delta})$ no necesariamente es conexo. Llamamos a un vértice $x \in \mathcal{R}(\vec{\Delta})$ regular si x está contenido en una componente de la forma $\mathbb{Z}A_\infty$ o $\mathbb{Z}A_\infty/r$ (compare (4.5)) todos los otros vértices son llamados vértices transyectivos

5.2 *En (2.4) hemos definido el vector* $\underline{\dim}\, X^\cdot$ para $X^\cdot \in D^b(k\vec{\Delta})$.

Sea $x \in \mathcal{R}(\vec{\Delta})$ y $X^\cdot, Y^\cdot \in \pi^{-1}(x)$; *Entonces* $\underline{\dim}\, X^\cdot = \underline{\dim}\, Y^\cdot$.

Definimos $\underline{\dim}\, x$ como $\underline{\dim}\, X^\cdot$ para $x \in \mathcal{R}(\vec{\Delta})$ y $X^\cdot \in \pi^{-1}(x)$, y no depende de la elección de $X^\cdot$ en $\pi^{-1}(x)$.

El vector $\underline{\dim}\, x$ es llamado vector dimensión de x. *Esto hace* considerar dos subcategorías de $\mathcal{R}(\vec{\Delta})$. Sean $\mathcal{R}^+(\vec{\Delta})$ y $\mathcal{R}^-(\vec{\Delta})$ las subcategorías plenas de $\mathcal{R}(\vec{\Delta})$ consistentes en los $x \in \mathcal{R}(\vec{\Delta})$ tal que $\underline{\dim}\, x$ es positivo y negativo respectivamente. Claramente $T\mathcal{R}^+(\vec{\Delta}) = \mathcal{R}^-(\vec{\Delta})$.

5.3 Para todo $x \in \mathcal{R}(\vec{\Delta})$ definimos una función $f_x : \mathcal{R}(\vec{\Delta}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ por $f_x(y) = \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(\vec{\Delta})}(x, y) - \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(\vec{\Delta})}(y, \tau x)$.

<u>Lama</u>: $f_x(y) = \langle \underline{\dim}\, x, \underline{\dim}\, y \rangle$

<u>Damostración</u>

Saa $x^\cdot, y^\cdot \in \operatorname{ind} D^b(k\vec{\Delta})$ tal qua $\pi(x^\cdot)=x$ y $\pi(y^\cdot)=y$. Dado qua π as funtor cubrianta obtanamos:

$$f_x(y) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim_k \operatorname{Hom}_{D^b(k\vec{\Delta})}(T^{2i}x^\cdot, y^\cdot) - \sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim_k \operatorname{Hom}_{D^b(k\vec{\Delta})}(y^\cdot, \tau T^{2i}x^\cdot) =$$

$$\underset{(3.9)}{=} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim_k \operatorname{Hom}_{D^b(k\vec{\Delta})}(T^{2i}x^\cdot, y^\cdot) - \sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim_k \operatorname{Hom}_{D^b(k\vec{\Delta})}(T^{2i-1}x^\cdot, y^\cdot) =$$

$$\underset{(2.7)}{=} \langle \underline{\dim}\, x^\cdot, \underline{\dim}\, y^\cdot \rangle = \langle \underline{\dim}\, x, \underline{\dim}\, y \rangle .$$

□

5.4 Un subconjunto da vérticas $\mathcal{T}=\{t_1,\dots,t_n\}$ da $Q(\vec{\Delta})$, as llamado un <u>conjunto da tiltao</u> si las siguiantas condicionas son satisfachas:

i) $\operatorname{Hom}_{Q(\vec{\Delta})}(t_i, \tau t_j)=0$ para todo i,j

ii) $\underline{\dim}\, t_1, \dots, \underline{\dim}\, t_n$ forman una $\mathbb{Z}$-basa da $\mathbb{Z}^n$.

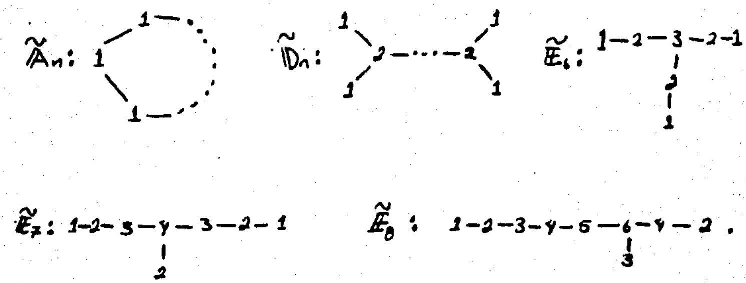
5.5 Saa $\mathcal{T}=\{t_1,\dots,t_n\}$ un conjunto da tiltao. Saa $\operatorname{End}\mathcal{T}$ la k-álgabra formada por las matricas $n\times n$, $f=(f_{ij})$ talas qua $f_{ij}\in \operatorname{Hom}_{Q(\vec{\Delta})}(t_i,t_j)$. El álgabra $\operatorname{End}\mathcal{T}$ sa llama una <u>$\vec{\Delta}$-álgabra raíz</u>.

La <u>matriz da Cartan</u> $C_\mathcal{T}$ da $\mathcal{T}$ tiana por coaficiantas $(C_\mathcal{T})_{ij} = \dim_k \operatorname{Hom}_{Q(\vec{\Delta})}(t_i,t_j) = \langle \underline{\dim}\, t_i, \underline{\dim}\, t_j \rangle$

5.6 <u>Lema</u>: Sea $\vec{\Delta}$ un carcaj afín. Sin ciclos orientados. $\mathcal{T}=\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ un conjunto de tilteo de $\mathcal{R}(\vec{\Delta})$. Entonces $\mathcal{T}$ contiene un vértice transyectivo.

<u>Demostración</u>

Sea $\vec{\Delta}$ un carcaj afín sin ciclos orientados. Es bien conocido [DR] que existe un vector $z_0 \in \mathbb{N}^n$ tal que $\langle z_0, z_0\rangle=0$. De hecho z_0 está dado como sigue:



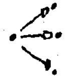
Si $t_1, \dots, t_n$ son vértices regulares de $\mathcal{R}(\vec{\Delta})$ se tiene que $\langle z_0, \underline{\dim}\, t_i\rangle=0$, $i=1,\dots,n$.

Así, $t_i \in H=\{v : \langle z_0, v\rangle=0\}$ hiperplano de dimensión $n-1$. Contradicción. $\square$

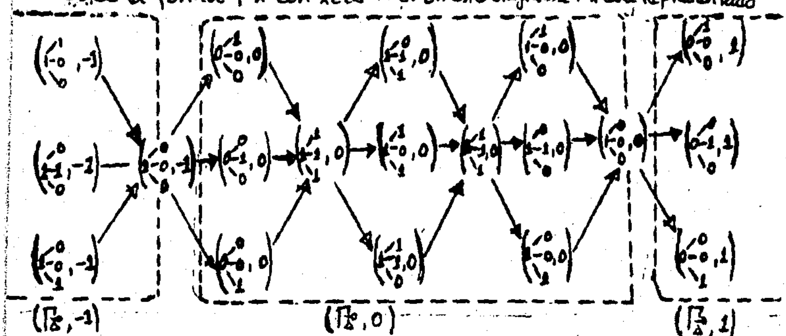
5.7 Llamamos a un conjunto de tilteo $\mathcal{T}$ de $\mathcal{R}(\vec{\Delta})$ <u>libre de ciclos</u> si el carcaj de $\operatorname{End}\mathcal{T}$ no tiene ciclos orientados.

Veremos un <u>ejemplo</u> de un conjunto de tilteo que no es libre de ciclos.

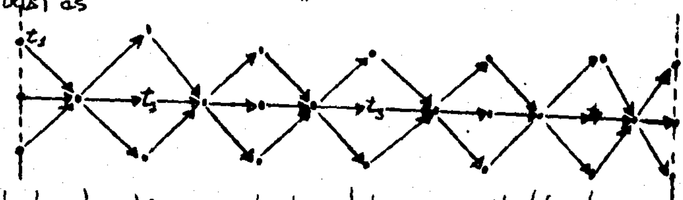
Consideremos

$\vec{\Delta}^0 :=$ 

(o sea, $\Delta = \mathbb{D}_4$). En primer lugar calculamos $R(\vec{\Delta}^0)$. El carcaj de $\operatorname{ind} D^b(k\vec{\Delta}^0)$ es $\mathbb{Z}\vec{\Delta}^0$ y se obtiene de la siguiente manera; Recordamos que por la proposición (4.1) cada complejo inescindible X' en $D^b(k\vec{\Delta}^0)$ es de la forma $T^i X$ con $X \in k\vec{\Delta}^0$-mod. En este diagrama $T^i X$ está representado



por la pareja $(\underline{\dim} X', i)$, donde $T(\underline{\dim} X', i) = (\underline{\dim} X, i-1)$. Luego el carcaj de $R(\vec{\Delta}^0)$ es



donde las líneas verticales deben ser identificadas.

Consideremos el conjunto $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ como se indica en el dibujo. Probaremos que

(I) $\mathcal{T}$ es conjunto de tilteo y

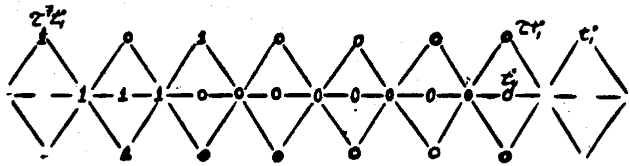
(II) $\mathcal{T}$ no es libre de ciclos.

Para esto observamos que $\pi : ind\, D^b(k\vec{\Delta}) \to \mathcal{R}(\vec{\Delta})$ es una cubriente de Galois dada por el grupo G generado por τ^6. En efecto, basta observar que $T^2 = \tau^6$ en $ind\, D^b(k\vec{\Delta})$.

(I) $\mathcal{T}$ es conjunto de tilteo.

Debemos demostrar que $Hom_{\mathcal{R}(\vec{\Delta})}(t_i, \tau t_j) = 0$, para todo i, j. Como $Hom_{\mathcal{R}(\vec{\Delta})}(t_i, \tau t_j) = \coprod_{n \in \mathbb{Z}} Hom_{D^b(k\vec{\Delta})}(\tau^{6n+1} t_i, t_j)$ donde

$\pi(t_i') = t_i$, $\pi(t_j') = t_j$; basta ver que $Hom_{D^b(k\vec{\Delta})}(\tau^{6n+1} t_i', t_j') = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Chequemos esto para $i = 1, j = 4$ (los demás casos son similares)



Claramente, $Hom_{D^b(k\vec{\Delta})}(\tau^7 t_1', t_4') = 0$. En el diagrama se ha marcado la función $\dim_k Hom_{D^b(k\vec{\Delta})}(\tau^7 t_1', -)$. Similarmente $Hom_{D^b(k\vec{\Delta})}(\tau^{6n+1} t_i', t_4') = 0$.

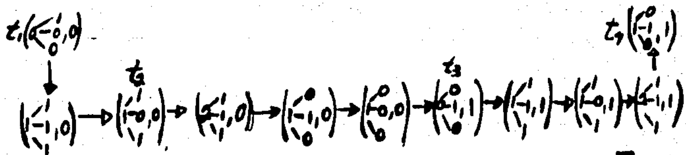
$\{\underline{\dim}\, t_i\}$ es base de $\mathbb{Z}^4$.

En efecto,

$\underline{\dim}\, t_1 = \underline{\dim}\, t_1' = 0\begin{array}{l} / \, 1 \\ - \, 0 \\ \backslash \, 0 \end{array}, \quad \underline{\dim}\, t_2 = 1\begin{array}{l} / \, 1 \\ - \, 0 \\ \backslash \, 1 \end{array}, \quad \underline{\dim}\, t_3 = 0\begin{array}{l} / \, 0 \\ - \, 1 \\ \backslash \, 0 \end{array}, \quad \underline{\dim}\, t_4 = 1\begin{array}{l} / \, 0 \\ - \, 1 \\ \backslash \, 0 \end{array}.$

II) End T tiene ciclos.

En efecto, la siguiente cadena de morfismos en ind $D^b(k\vec{\Delta})$ determina un ciclo en $\mathcal{R}(\vec{\Delta})$.



□

5.8 Sea A una k-álgebra de dimensión finita, $({}_A, {}_A M_B, B)$ una terna de tilteo. Sean $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ las subcategorías plenas $\{Y \in B\text{-mod} : M \otimes_B Y = 0\}$ y $\{Y \in B\text{-mod} : \mathrm{Tor}_1^B(M, Y) = 0\}$ de B-mod respectivamente.

En [HR] se demuestra que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es una teoría de torsión en B-mod. Si cada B-módulo está en $\mathcal{X}$ ó $\mathcal{Y}$, decimos que la teoría de torsión se escinde.

Siguiendo a [AH] una k-álgebra de dimensión finita A es llamada álgebra iterada de tilteo si existe un carcaj finito $\vec{\Delta}$ sin ciclos orientados y una sucesión de ternas de tilteo $(A_i, {}_{A_i}M^i_{A_{i+1}}, A_{i+1})_{0 \le i \le m}$ tal que la teoría de torsión asociada $(\mathcal{X}_{i+1}, \mathcal{Y}_{i+1})$ en A_{i+1}-mod, se escinde para $i = 0, \dots, m$ y $A_0 = k\vec{\Delta}$ y $A_m = A$.

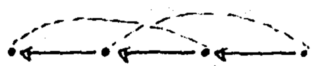
Este carcaj está unívocamente determinado hasta la relación $\sim$ introducida en (4.8) y es llamado el <u>tipo de A</u>.

5.9 De interés especial son las álgebras iteradas de tilteo de tipo $\vec{\Delta}$, donde $\vec{\Delta}$ es un carcaj Dynkin.
Consideramos estas álgebras por el resto de la sección.
Se demuestra en [AH] que estas álgebras son simplemente conexas. Por (1.7) y (2.8) inferimos que $K_0(A)$ y $K_0(k\vec{\Delta})$ son isométricos.

5.10 <u>Teorema</u>: Sea A una $\vec{\Delta}$-álgebra raíz simplemente conexa. Entonces A es una álgebra iterada de tilteo de tipo $\vec{\Delta}$.

Este resultado forma parte del teorema (5.12) y será demostrado en la sección 6.

5.11 Damos en esta sección un ejemplo de una inclusión de ind A a ind $D^b(k\vec{\Delta})$ para una álgebra de tilteo de tipo $\vec{\Delta}$:
Consideramos el álgebra A definida por el carcaj con relaciones:



Esta es una álgebra iterada de tilteo de tipo A_4: con la notación de 5.8 tenemos que $m=2$;
; A_0 es el álgebra del carcaj :

$$\begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l] & 3 \arrow[l] & 4 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

y A_1 es el álgebra del carcaj con relaciones:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, dash, dashed, bend left] & 2 \arrow[l] & 3 \arrow[l] & 4 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

M^1 es la suma directa de los A_0-módulos con vectores dimensión [1,0,0,0], [1,1,1,1], [0,0,1,1], [0,0,0,1]; M^2 es la suma de los A_1-módulos con vectores dimensión [1,0,0,0], [1,1,0,0], [0,1,1,1] y [0,0,0,1].

En lo siguiente demostramos (I) que $(A_0, {}_{A_0}M^1_{A_1}, A_1)$ y $(A_1, {}_{A_1}M^2_{A_0}, A_2)$ son ternas de tilteo y (II) A es una álgebra iterada de tilteo de tipo A_0 (i.e. veremos que $(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1)$ se escinde en A_1-mod y que $(\mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2)$ se escinde en A_2-mod.)

(I) <u>(A_0, M^1, A_1) es una terna de tilteo</u>.

<u>Demostración</u>

i) $Ext^1_A(M^1, M^1) = 0$

En el carcaj de Auslander–Reiten de A_0 (que se muestra abajo) localizamos a M_1, M_2, M_3 y M_4, los A_0-módulos tal que $\underline{dim}\, M_1 = [1,0,0,0]$, $\underline{dim}\, M_2 = [1,1,1,1]$, $\underline{dim}\, M_3 = [0,0,1,1]$ y $\underline{dim}\, M_4 = [0,0,0,1]$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & M_2=P_4(1,1,1,1)=I_1 \arrow[dr] & & & \\
 & & P_3(1,1,1,0) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & (0,1,1,1)=I_2 \arrow[dr] & & \\
 & P_2(1,1,0,0) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & (0,1,1,0) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & \boxed{(0,0,1,1)=I_3=M_3} \arrow[dr] & \\
M_1=\boxed{P_1(1,0,0,0)} \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & (0,1,0,0) \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & (0,0,1,0) \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & \boxed{(0,0,0,1)=M_4=I_4}
\end{tikzcd}
$$

de donde podemos ver que $M_1=P_1$, $M_2=P_4=I_1$, $M_3=I_3$ y $M_4=I_4$

Por tanto $\operatorname{Ext}^1_{A_0}(M^1,M^1)\cong\operatorname{Ext}^1_{A_0}(M_3\oplus M_4, M_1)\cong$

$\cong\operatorname{Ext}^1_{A_0}(M_3,M_1)\oplus\operatorname{Ext}^1_{A_0}(M_4,M_1)\cong D\,\overline{\operatorname{Hom}}_{A_0}(M_1,\tau M_3)\oplus D\,\overline{\operatorname{Hom}}_{A_0}(M_1,\tau M_3)$.

Claramente $\dim_k\operatorname{Hom}_{A_0}(M_1,\tau M_3)=\dim\tau M_3(1)=0$ y $\dim_k\operatorname{Hom}_{A_0}(M_1,\tau M_4)=\dim\tau M_4(1)=0$.

ii) <u>proj. dim M^1</u> ≤ 1.

Ya que A_0 es hereditaria.

iii) M^1- Codim $(A_0)\leq 1$

En [HR] Teorema 4.5, se demuestra que M^1 es de tilteo, si y sólo si $\operatorname{Ext}^1_A(M,M)=0$ y el número de clases de isomorfía de sumandos directos inescindibles es igual al número de clases de isomorfía de A-módulos simples. En virtud de este teorema, sólo hay que demostrar que el número de clases de isomorfía de A-módulos simples es igual a cuatro, lo cual es evidente pues los simples son: $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$ y $(0,0,0,1)$.

Con esto concluimos la tarea de demostrar que M^1 es un A_0-módulo de tilteo.

5.11.1 En esta parte demostraremos que $A_1 \cong \mathrm{End}_{A_0}(M^1)$

En efecto, la matriz 4×4, $(\dim_k \mathrm{Hom}_{A_0}(M_i, M_j))\ i,j=1,\dots,4$ es

$$\begin{pmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & 0 & 0 \\ 0 & K & K & 0 \\ 0 & K & K & K \end{pmatrix}$$

que corresponde al álgebra

$$\begin{tikzcd} 4 \arrow[r] & 3 \arrow[r] \arrow[rr, bend left, dash, dashed] & 2 \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

(véase su gráfica de Auslander–Reiten en la siguiente página)

5.11.2 Como mencionamos en la sección 5.11, A_1, A son las k-álgebras de dimensión finita definidas por los siguientes carcajes con relaciones:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] \arrow[rr, bend left, dash, dashed] & {} \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[rr, bend left, dash, dashed] & \bullet \arrow[r] \arrow[rr, bend left, dash, dashed] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$, respectivamente

Sea $M = M^2$ el A_1-módulo definido por la suma directa de los A_1-módulos M_i con $i \in \{1,2,3,4\}$ y definidos por su vector dimensión:

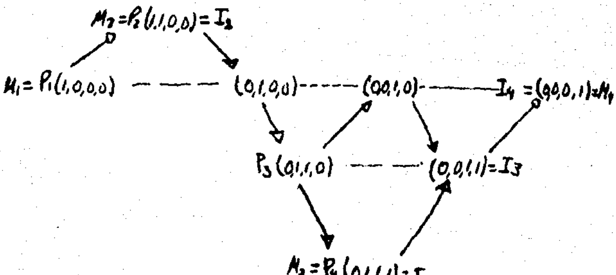
$\underline{\dim} M_1 = [1,0,0,0]$, $\underline{\dim} M_2 = [1,1,0,0]$, $\underline{\dim} M_3 = [0,1,1,1]$ y

$\underline{\dim} M_4 = [0,0,0,1]$.

Afirmamos que $(A_1, {}_{A_1}M^{2}_{A_2}, A_2)$ es una terna de tilteo

i) <u>M es un módulo tilteo.</u>
Del carcaj de Auslander-Reiten de A_1 (aquí abajo).

Γ_{A_1} :



podemos ver que tanto M_1, M_2 como M_3 tienen dimensión proyectiva menor o igual a 1 por ser A_1-módulos proyectivos.
Y para M_4 tenemos la siguiente presentación proyectiva:

$$0 \to P_3(0,1,1,0) \to P_4(0,1,1,1) \to M_4(0,0,0,1) \to 0.$$

Por tanto proj. dim $M \leqq 1$.

ii) <u>$Ext_{A_1}^1(M,M) = 0$</u>

$Ext_A^1(M,M) \cong Ext_A^1(I_4,P_1) \oplus Ext_A^1(I_4,P_2)$ por ser M_1, M_2, M_3 A_1-mod. proyectivos. y por ser M_3, M_4 A_1-mod. inyectivos.

Pero

$$Ext_A^1(I_4, P_1) \cong D\overline{Hom}(P_1, \tau I_4) = 0 \text{ y}$$

$$Ext_A^1(I_4, P_2) \cong D\overline{Hom}(P_1, \tau I_4) = 0.$$

por ser A_1 una k-álgebra dirigida.

iii) <u>M-Codim $A_1 \leqq 1$</u>

Esto se sigue del Teorema (2.1) de [Bo1].

iv) <u>$A \cong End_{A_1}(M)$.</u>

<u>Demostración</u>

$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y

$a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de $End_{A_1}(M) = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ k & k & 0 & 0 \\ 0 & k & k & 0 \\ 0 & 0 & k & k \end{pmatrix}$

por [BB] capítulo 3.

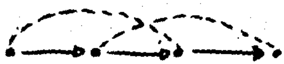
$$\operatorname{rad} End(A_1) = \begin{pmatrix} 0, & k, & 0, & 0 \\ 0 & 0, & k, & 0 \\ 0 & 0, & 0 & k \\ 0 & 0, & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego entonces.

$$\operatorname{rad}^2 End(A_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

y $$\frac{\operatorname{rad} End(A_1)}{\operatorname{rad}^2 End(A_1)} = \operatorname{rad} End(A_1).$$

con lo cual hemos demostrado que el carcaj de Gabriel de $End_{A_1}(M)$ es.



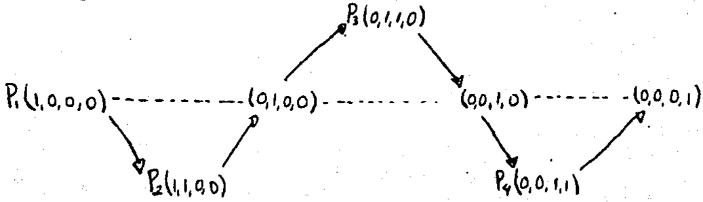
y esto significa que $A \cong End_{A_1}(M)$.

Por las secciones 5.11 — 5.11.2 las ternas $(A_0,M_1,A_1),(A_1,M_2,A_2)$ son ternas de tilteo.

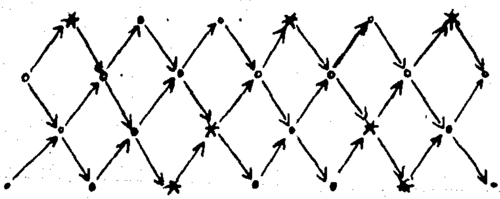
5.11.3 Sean $(\mathcal{T}_1,\mathcal{F}_1)$ y $(\mathcal{T}_2,\mathcal{F}_2)$ las teorías de torsión de las ternas de tilteo (A_0,M^1,A_1) y (A_1,M^2,A) respectivamente. (ver 5.8). Demostraremos a continuación que se escinden (ver 5.8).

Por el teorema 6.3 de [HR] $(\mathcal{T}_1,\mathcal{F}_1)$ es una teoría de torsión escindible (pues A_0 es una k-álgebra hereditaria y M' un A_0-módulo de tilteo).

$(\mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2)$ es una teoría de torsión escindible en A pues $\mathrm{Tor}_A^1(M_2, X) = 0$ para todo X inescindible en A-mod. Esto puede verse fácilmente del carcaj de Auslander-Reiten de A, el cual se muestra a continuación:



Hasta translación de T, existen diez clases de isomorfía de objetos inescindibles en $D^b(A)$ (compare 5.13). La inclusión de ind A en $\mathbb{Z}A_4$ se ilustra en la siguiente figura. Los vértices marcados por $*$ corresponden a los A-módulos inescindibles.



5.12 Una K-álgebra de dimensión finita básica se llama <u>álgebra Dynkin de tipo $\vec{\Delta}^0$</u> si A es simplemente conexa y existe un carcaj de tipo Dynkin $\vec{\Delta}^0$ de forma que $K_0(A)$ y $K_0(K\vec{\Delta})$ son isométricos.

<u>Teorema</u>: Sea A una K-álgebra de dimensión finita y $\vec{\Delta}^0$ un carcaj de tipo Dynkin. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $D^b(A)$ es equivalente triangular a $D^b(K\vec{\Delta}^0)$

ii) A es una algebra Dynkin de tipo $\vec{\Delta}^0$.

iii) A es una $\vec{\Delta}$-algebra raíz simplemente conexa.

iv) A es una algebra iterada de tilteo de tipo $\vec{\Delta}^0$

v) A y $K\vec{\Delta}^0$ son equivalentes por tilteo.

<u>Indicaciones para la demostración.</u>

i) $\Rightarrow$ iv) : lo mostraremos en 6.2

ii) $\Rightarrow$ iii) : será demostrado en 6.4

iii) $\Rightarrow$ iv) : es el contenido de 6.5 y 6.6

iv) $\Rightarrow$ v) : trivial.

v) $\Rightarrow$ i) : fué demostrado en 1.7

$\square$

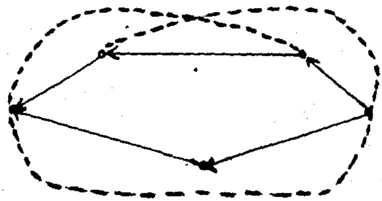
<u>Corolario</u>: Sea A una álgebra Dynkin de tipo $\vec{\Delta}^0$ y $R_A = \{x \in \mathbb{Z}^n : \chi_A(x) = 1\}$. Entonces <u>dim</u> induce una biyección entre ind $D^b(A)/T^2$ y R_A.

<u>Demostración</u>.

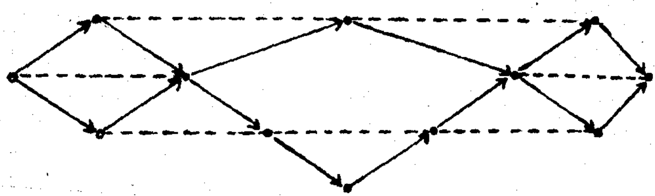
Por 5.12 existe una equivalencia F de categorías trianguladas de $D^b(A)$ a $D^b(K\vec{\Delta}^0)$. Por (2.8) obtenemos una isometría

$f: K_0(A) \to K_0(k\vec{\Delta}^0)$ tal que $\underline{\dim}\, F(X) = f(\underline{\dim}\, X)$ para $X \in \mathcal{U}(A)$. En particular f induce una biyección entre Q_A y $Q_{k\vec{\Delta}^0}$. Nuestra afirmación se sigue ahora de (4.7). □

5.13 Considere el álgebra A dada por el carcaj acotado



Entonces A-mod es dirigido como Γ_A lo demuestra:



Dado que Γ_A no es simplemente conexo, vemos inmediatamente que $K_0(A)$ no es isométrico a $K_0(k\vec{\Delta}^0)$ para un carcaj Dynkin $\vec{\Delta}^0$ (5.12).

Pero χ_A es congruente a $\chi_{\mathbb{D}_5}$ como el siguiente cálculo lo demuestra. La matriz de representación χ_A es.

§6. La demostración del teorema (5.12)

6.1 Sea A una k-álgebra de dimensión finita y de dimensión global finita.
Sea ${}_AM$ un módulo de tilteo. Recordamos algunos conceptos que ya hemos usado antes y que pueden consultarse en [Ri].

a) Sea $\mathcal{T}(M)=\{X\in A\text{-mod}: X \text{ es generado por } M\}$ y $\mathcal{F}(M)=\{Y\in A\text{-mod}: \mathrm{Hom}_A(M,Y)=0\}$. Entonces $(\mathcal{T}(M),\mathcal{F}(M))$ define una teoría de torsión en A-mod. También se tiene que $\mathcal{T}(M)=\{X\in A\text{-mod}: \mathrm{Ext}_A^1(M,X)=0\}$.

b) Sea $B=\mathrm{End}_A(M)$. Entonces M es A-B-bimódulo; definimos $\mathcal{Y}(M)=\{U\in B\text{-mod}: \mathrm{Tor}_1^B(M,U)=0\}$ y $\mathcal{X}(M)=\{V\in B\text{-mod}: M\otimes_B V=0\}$. Entonces $(\mathcal{X}(M),\mathcal{Y}(M))$ es una teoría de torsión en B-mod. Los siguientes funtores son equivalencias:

$\mathrm{Hom}_A(M,-):\mathcal{T}(M)\to\mathcal{Y}(M)$ - con inverso $M\otimes_B -$

y $\mathrm{Ext}_A^1(M,-):\mathcal{F}(M)\to\mathcal{X}(M)$ con inverso $\mathrm{Tor}_1^B(M,-)$

c) Si A es hereditaria y ${}_AM$ es un módulo de tilteo, la teoría de torsión $(\mathcal{X}(M),\mathcal{Y}(M))$ se escinde.
Más en general se tiene el siguiente resultado:
Si ${}_AM$ es módulo de tilteo y $B=\mathrm{End}_A(M)$. Entonces $(\mathcal{X}(M),\mathcal{Y}(M))$ se escinde si y sólo si todo módulo $X\in\mathcal{F}(M)$ satisface $\mathrm{dim\,iny}_A X\leq 1$.

d) Supongamos que S es un A-módulo simple proyectivo y sean $P_1=S, P_2,\dots, P_n$ un conjunto completo de proyectivos inescindibles de A. El módulo $M(S) = \tau^{-1}S \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n$ es módulo de tilteo llamado <u>APR-módulo de tilteo</u> y al álgebra $B = \mathrm{End}_A(M(S))$ se llamará una <u>APR-álgebra tiltada</u>

Claramente, $\mathcal{F}(M(S)) = \mathrm{add}\, S$ y $(\mathcal{T}(M(S)), \mathcal{F}(M(S)))$ se escinde. Esta construcción fue introducida en [APR]

Si A es una álgebra de tipo finito, denotamos por $n(A)$ al número de clases de isomorfía de A-módulos inescindibles.

Por lo anterior y (c) se obtiene la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

i) $\dim \mathrm{iny}_A S > 1$

ii) $B = \mathrm{End}_A(M(S))$ es de tipo infinito ó bien $n(B) > n(A)$.

6.2 El siguiente teorema de [H3] prueba i) $\Rightarrow$ iv) de (5.12).

<u>Teorema</u>: Sea $\vec{\Delta}$ un carcaj de tipo Dynkin y A una álgebra tal que $D^b(A)$ es equivalente triangular a $D^b(k\vec{\Delta})$. Entonces existen ternas de tiltео $(A_i, {}_{A_i}M^i_{A_{i+1}}, A_{i+1} = \mathrm{End}\, M^i)_{0 \leq i < m}$ tales que $A = A_0$, $k\vec{\Delta} = A_m$ y ${}_{A_i}M^i$ es un APR-módulo de tilteo.

<u>Demostración</u>

Primero observamos que en Γ_A no tiene ciclos dirigidos. En efecto, sea $F: D^b(A) \to D^b(k\vec{\Delta})$ la equivalencia triangular y supongamos que $X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \to \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} X_0$ es un ciclo de morfismos irreducibles en Γ_A. Luego.

$FX_0 \to FX_1 \to \cdots \to FX_n \to FX_0$ es un ciclo entre inescindibles en $D^b(k\vec{\Delta}^0)$. Por (4.2), $FX_i = T^m Y_i$ con $m \in \mathbb{Z}$ fijo y $Y_i \in k\vec{\Delta}^0$-mod para todo $i \in \{0, 1, \dots n\}$, luego $Y_0 \to Y_1 \to \cdots \to Y_n \to Y_0$ es un ciclo en $\Gamma_{k\vec{\Delta}^0}$ lo cuál es absurdo.

Luego, debe existir un simple proyectivo $S \in A$-mod. Entonces $B = \mathrm{End}_A(M(S))$ es de tilteo. Por (1.7), $D^b(B)$ es equivalente triangular a $D^b(A)$. Luego $D^b(B)$ y $D^b(k\vec{\Delta}^0)$ son equivalentes triangulares. En particular Γ_B no tiene ciclos dirigidos. Es bien conocido que entonces B es de tipo de representación finito (ver [Ri]). Si $\dim \mathrm{iny}_A S > 1$, entonces $n(k\vec{\Delta}^0) \geqslant n(B) > n(A)$.

Si A es hereditaria no hay nada que probar. Si A no es hereditaria existe un módulo simple $_AS$ con $\dim \mathrm{iny}_A S > 1$. Esto es equivalente a que exista un inyectivo I_t con tal que $\mathrm{Hom}_A(I_t, \tau S) \neq 0$. Además, $d(I_t) := |\{x \in \Gamma_A : \text{no existe un camino } x \rightsquigarrow I_t \text{ en } \Gamma_A\}| \geqslant 1$. Elijamos un simple proyectivo $S' = P_a$ tal que $I_t(a) \neq 0$ y supongamos que $\dim \mathrm{iny}\, S' = 1$. Formamos el APR-módulo de tilteo $M(S')$ y $B = \mathrm{End}_A(S')$. Entonces $n(B) = n(A)$.

Observe que $t \neq a$ (en efecto, como $\mathrm{Hom}_A(I_t, \tau x) \neq 0$, existe un morfismo no cero y no invertible de I_t a algún inyectivo I_s. Luego $\mathrm{Hom}_A(P_s, P_t) \neq 0$ y P_t no es simple. Así $t \neq a$).

Consideremos el funtor equivalencia,

$$F = \mathrm{Hom}_A(M(S'), -) : \mathcal{T}(M(S')) \longrightarrow \mathcal{Y}(M(S'))$$

Como $P_t \in \mathrm{add}\, M(S')$, entonces $F(I_t)$ es inyectivo en B-mod [Ri, p.171]. Además $FS \in \mathcal{Y}(M(S'))$ es tal que $F\tau S = \tau FS$ y $\mathrm{Hom}_B(FI_t, \tau FS) \neq 0$. Lo que prueba que B no es hereditaria. Como se tiene $S' = P_a \rightsquigarrow I_t$ en

Γ_A pero no hay un camino $F'S' \rightsquigarrow FI_t$ en Γ_B ya que $F'S'$ es simple inyectivo, entonces $d(FS_t) > d(I_t)$.

De esto se sigue que hay una sucesión finita de ternas $(A_i, {}_{A_i}M^i, A_{i+1} = \operatorname{End} M^i)_{0 \leq i < m}$, tales que $A = A_0$ y ${}_{A_i}M^i$ es un APR-módulo de tilteo de la forma $M^i = M(S^i)$ con $\dim \operatorname{iny} S^i = 1$ y A_m tiene un simple proyectivo S^m tal que $\dim \operatorname{iny} S^m > 1$. Luego $n(\operatorname{End}_{A_m}(M(S^m))) > n(A_m)$.

Este proceso no puede continuar indefinidamente y se detiene en $k\vec{\Delta}$. □.

6.3 Sea $\vec{\Delta}$ un carcaj de tipo Dynkin. Sea A una k-álgebra de dimensión finita simplemente conexa y básica tal que $K_0(A)$ y $K_0(k\vec{\Delta})$ son isométricos (i.e. A es una álgebra Dynkin de tipo $\vec{\Delta}$).

Sea $f : K_0(A) \to K_0(k\vec{\Delta})$ la isometría y $P_1, \dots, P_n$ un conjunto de representantes de las clases de isomorfía de los A-mod inescindibles proyectivos.

Por (6.1), existen únicos $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{R}(\vec{\Delta})$ tales que $\underline{\dim}\, t_i = f(\underline{\dim}\, P_i)$ ya que $\chi_{k\vec{\Delta}}(f(\underline{\dim}\, P_i)) = \chi_A(\underline{\dim}\, P_i) = 1$.

<u>Lema</u>: $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_n\}$ es un conjunto de tilteo libre de ciclos en $\mathcal{R}(\vec{\Delta})$.

<u>Demostración</u>

Por construcción $\underline{\dim}\, t_1, \dots, \underline{\dim}\, t_n$ es una base de $K_0(k\vec{\Delta})$. Además $C_{\mathcal{T}} = (\langle \underline{\dim}\, t_i, \underline{\dim}\, t_j \rangle)_{ij} = (\langle \underline{\dim}\, P_i, \underline{\dim}\, P_j \rangle)_{ij} = C_A$.

Como A es simplemente conexa podemos suponer que C_A es triangular y luego $\mathcal{T}$ debe ser libre de ciclos.

Basta ver que $\mathcal{T}$ es conjunto de tilteo, esto es $\operatorname{Hom}_{\mathcal{R}(\vec{\Delta})}(t_j, \tau t_i) = 0$; $1 \leq i, j \leq n$.

Como A es de tipo finito, $0 \leq (C_A)_{ij} \leq 1$. Luego $0 \leq \langle \underline{\dim} t_i, \underline{\dim} t_j \rangle \leq 1$. Si $Hom_{\mathcal{D}(\Lambda)}(t_i, t_j) = 0$, entonces

$$0 \leq \langle \underline{\dim} t_i, \underline{\dim} t_j \rangle = -\dim_k Hom_{\mathcal{D}(\Lambda)}(t_j, \tau t_i) \quad y$$

$Hom_{\mathcal{D}(\Lambda)}(t_j, \tau t_i) = 0$. Podemos así suponer que $Hom_{\mathcal{D}(\Lambda)}(t_i, t_j) \neq 0$.

Aplicando T y τ si es necesario podemos suponer que $t_i \in \mathcal{R}^+(\vec{\Delta})$ y que es $k\vec{\Delta}$-proyectivo. Entonces $Hom_{\mathcal{D}(\Lambda)}(t_i, t_j) \neq 0$ implica que $t_j \in \mathcal{R}^+(\vec{\Delta})$. Como $\tau t_i \in \mathcal{R}^-(\vec{\Delta})$ entonces $Hom_{\mathcal{D}(\Lambda)}(t_j, \tau t_i) = 0$.

$\square$.

6.4 <u>dem de ii) $\Rightarrow$ iii)</u>: Sea A una algebra Dynkin de tipo $\vec{\Delta}$. Sea $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_n\}$ el conjunto de tilteo libre de ciclos en $\mathcal{D}(\vec{\Delta})$ definido en (6.3).

Se tiene $C_{\mathcal{T}} = C_A$ matriz triangular superior. Sea $B = End\, \mathcal{T}$, desea demostrarse que $A \cong B$.

Consideramos el proyectivo P_n maximal en Γ_A. Sea $R = \underline{\dim} P_n$. Entonces

$$C_A = \left(\begin{array}{c|c} C_{A'} & \dim R \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

donde $A' = A / A e_n A$ y $P_n = A e_n$. Luego, $A = A'[R]$ es extensión en un punto. Similarmente

$$C_B = \left(\begin{array}{c|c} C_{B'} & \dim T \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

y $B = B'[T]$ es extensión en un punto.

Como A es simplemente conexa, entonces A' lo es también [BrG].

Como $C_{A'} = C_{B'}$, por hipotesis de inducción $A' \cong B'$. Ademas

$\underline{\dim}\, R = \underline{\dim}\, T$ y como Γ_A es una componente preproyectiva, $\underline{\dim}\, R$ determina al módulo R. Así, $R \cong T$ y $A \cong B$. $\square$.

6.5 Sea $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_n\}$ un conjunto de tilteo en $\mathcal{R}(\vec{\Delta})$ con $\vec{\Delta}$ un carcaj de tipo Dynkin. Supongamos que $E = \operatorname{End} \mathcal{T}$ es una álgebra simplemente conexa.

Sea $\pi : \operatorname{ind} D^b(k\vec{\Delta}) \to \mathcal{R}(\vec{\Delta})$ la cubierta de Galois definida en (5.1).

Por $\underline{\mathcal{T}}$ denotamos la subcategoría plena de $\mathcal{R}(\vec{\Delta})$ cuyos objetos están en $\mathcal{T}$ por $\pi^{-1}(\underline{\mathcal{T}})$ la subcategoría plena de $\operatorname{ind} D^b(k\vec{\Delta})$ con objetos en $\pi^{-1}(\mathcal{T})$. Luego $\pi : \pi^{-1}(\underline{\mathcal{T}}) \to \underline{\mathcal{T}}$ es una cubierta de Galois dada por la acción $\{\tau^{n} : n \in \mathbb{Z}\}$.

Como $\operatorname{End} \mathcal{T}$ es simplemente conexa, las cubiertas conexas de Galois de $\underline{\mathcal{T}}$ son triviales. Luego las componentes conexas de $\pi^{-1}(\underline{\mathcal{T}})$ se mapean isomórficamente por π en $\underline{\mathcal{T}}$. Sea $\mathcal{E}$ una de estas componentes conexas, sus objetos $\tilde{\mathcal{T}} = \{\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n\}$ forman un <u>conjunto de tilteo</u> del carcaj $\tilde{\Gamma}$ de $D^b(k\vec{\Delta})$, esto es, satisface:

i) $\operatorname{Hom}_{D^b(k\vec{\Delta})}(\tilde{t}_i, T^r \tilde{t}_j) = 0$ para $r \neq 0$, i, j.

ii) $\underline{\dim}\, \tilde{t}_1, \dots, \underline{\dim}\, \tilde{t}_n$ es una base de $\mathbb{Z}^n$

Además, $\operatorname{End} \tilde{\mathcal{T}} = \bigoplus_{i,j} \operatorname{Hom}_{D^b(k\vec{\Delta})}(\tilde{t}_i, \tilde{t}_j) \cong \operatorname{End} \mathcal{T}$..

La implicación (iii) $\Rightarrow$ (iv) del teorema (5.12) se sigue del siguiente

<u>Teorema</u>: Si $\vec{\Delta}$ es carcaj de tipo Dynkin y $\tilde{\mathcal{T}} = \{\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n\}$ es un conjunto de tilteo de $\tilde{\Gamma}$, entonces $\operatorname{End} \tilde{\mathcal{T}}$ es un álgebra iterada de tilteo de tipo $\vec{\Delta}$.

Demostración

Cada elemento de $\tilde{E} = \operatorname{End}\tilde{T}$ es una matriz con entrada (i,j) en $\operatorname{Hom}_{D^b(k\vec{\Delta})}(\tilde{t}_i,\tilde{t}_j)$. Luego cada $X \in D^b(k\vec{\Delta})$ determina un $\tilde{E}$ mod CX que consiste de las columnas con entradas en $\operatorname{Hom}_{D^b(k\vec{\Delta})}(\tilde{t}_j, X)$, $j=1,\dots,n$.

En particular, los objetos $C\tilde{t}_i$ satisfacen

$$\operatorname{Hom}_{D^b(k\vec\Delta)}(\tilde t_i,\tilde t_j)\cong \operatorname{Hom}_{\tilde E}(C\tilde t_i, C\tilde t_j).$$

Si $\tilde T$ es una rebanada (= subconjunto convexo de $\tilde\Gamma = \mathbb{Z}\vec\Delta$ que contiene un representante de cada τ-órbita), entonces $\tilde E$ es hereditaria. Si $\tilde T$ no es rebanada, deseamos encontrar un conjunto de tilteo $\tilde T'$ que sea "mejor" que $\tilde T$ y tal $E' = \operatorname{End}\tilde T'$ sea APR-tilteada de A. Supongamos que $\tilde T$ no es una rebanada.

Sea $\tilde t_{i_0}$ minimal en $\tilde T$ en el orden de las flechas de $\tilde\Gamma=\mathbb{Z}\vec\Delta$. Luego $C\tilde t_{i_0}$ es simple proyectivo y no inyectivo. Consideramos la sucesión que casi se divide

$$0\to C\tilde t_{i_0}\xrightarrow{(Cu_p)} \bigoplus_{p=1} C\tilde t_{j_p}\to V\to 0 .$$

Entonces el $\tilde E$-módulo, $K = C\tilde t_1\oplus\cdots\oplus C\tilde t_{i_0-1}\oplus V\oplus C\tilde t_{i_0+1}\oplus\cdots\oplus C\tilde t_n$ es un APR-módulo de tilteo en A-mod.

Para ver que End_K está asociada a un conjunto de tilteo en $\tilde\Gamma$, consideramos el triángulo en $D^b(k\vec\Delta)$ de la forma

$$\tilde t_{i_0}\xrightarrow{[u]}\bigoplus \tilde t_{j_p}\xrightarrow{v} t'\xrightarrow{w} T\tilde t_{i_0}$$

En (6.6(a)) probamos que t' es inescindible, digamos $t'\in\tilde\Gamma$.

y que el conjunto $\tilde{\mathcal{T}}' = (\tilde{\mathcal{T}} - \{\tilde{t}_{i_0}\}) \cup \{t'\}$ es de tilteo en $\tilde{\Gamma}$. Además, $\mathrm{End}\, \tilde{\mathcal{T}}' \cong \mathrm{End}\, k$.

Finalmente, sea $c(\tilde{\mathcal{T}})$ la cardinalidad de la <u>envolvente convexa</u> $\langle \tilde{\mathcal{T}} \rangle$ de $\tilde{\mathcal{T}}$ (= conjunto de vértices en caminos orientados en $\tilde{\Gamma}$ cuyos extremos están en $\tilde{\mathcal{T}}$).

Mostraremos en (6.6 (b)) que podemos elegir $\tilde{\mathcal{T}}'$ de forma que $n \leq c(\tilde{\mathcal{T}}') < c(\tilde{\mathcal{T}})$, de forma que después de un número finito de pasos se alcanza un conjunto de tilteo $\tilde{\mathcal{T}}_m$ con $c(\tilde{\mathcal{T}}_m) = n$. Luego $\tilde{\mathcal{T}}_m$ es una rebanada y $\mathrm{End}\, \tilde{\mathcal{T}}_m$ es un álgebra hereditaria. Esto prueba el teorema.

$\square$.

6.6 a) La sucesión larga de homología en $D^b(k\vec{\Delta})$ nos da una sucesión exacta

$$C\tilde{t}_{i_0} \xrightarrow{C[u_p]} \oplus C\tilde{t}_{j_p} \xrightarrow{C_v} Ct' \xrightarrow{C_u} CT\tilde{t}_{i_0}$$

Por ser $\tilde{\mathcal{T}}$ de tilteo, $CT\tilde{t}_{i_0} = 0$. Luego, $Ct' = V$.

Por el lema de Yoneda, $\mathrm{Hom}(\tilde{t}_i, X) \cong \mathrm{Hom}(C\tilde{t}_i, CX)$ para toda i, $X \in D^b(k\vec{\Delta})$. También, si $\mathrm{Hom}(T\tilde{t}_{i_0}, X) = 0$ se tiene $\mathrm{Hom}(t', X) \cong \mathrm{Hom}(Ct', CX)$. En efecto consideremos el diagrama inducido por los isomorfismos de Yoneda:

$$\begin{tikzcd}
0 = \mathrm{Hom}(T\tilde{t}_{i_0}, X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(t', X) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_p \mathrm{Hom}(\tilde{t}_{j_p}, X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}(\tilde{t}_{i_0}, X) \arrow[d, "\wr"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(Ct', CX) \arrow[r] & \bigoplus_p \mathrm{Hom}(C\tilde{t}_{j_p}, CX) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(C\tilde{t}_{i_0}, CX)
\end{tikzcd}$$

En particular, para $X = \tilde{t}_{i_0}$ ó $X = t'$. Luego,

$End\, t' \cong End\, V$. Así, t' es inescindible y $End\, t \cong End\, \tilde{\mathcal{T}}'$. Claramente $Hom(T^{-r}\tilde{t}_i, \tilde{t}_{j_p}) = 0 = Hom(T\tilde{t}_i, T\tilde{t}_i)$, luego también se tiene $Hom(T^{-r}\tilde{t}_i, t') = 0$ para $r \neq 0$, $i \neq i_0$.

Considérese la sucesión exacta con $r \neq 0$ y $i \neq i_0$:

$$Hom(\bigoplus_p T\tilde{t}_{j_p}, T^r\tilde{t}_i) \xrightarrow{\alpha} Hom(T\tilde{t}_{i_0}, T^r\tilde{t}_i) \to Hom(t', T^r\tilde{t}_i) \to Hom(\bigoplus_p \tilde{t}_{j_p}, T^r\tilde{t}_i) = 0$$

con el morfismo $\alpha = Hom([Tu_p], T^r\tilde{t}_i) \xrightarrow{\sim} Hom([Cu_p], C\tilde{t}_i]$ suprayectivo. Luego, $Hom(t_i', T^r\tilde{t}_i) = 0$.

En el caso $i = i_0$ esta sucesión también muestra que $Hom(t', T^r\tilde{t}_{i_0}) = 0$ si $r \neq 1$ y $\dim Hom(t', T\tilde{t}_{i_0}) = 1$. Finalmente la sucesión exacta

$$\bigoplus_p Hom(t', T^r\tilde{t}_{j_p}) \to Hom(t', T^r t') \longrightarrow Hom(t', T^{r+1}\tilde{t}_{i_0}),$$

muestra que $Hom(t', T^r t') = 0$ si $r \neq 0$. Concluimos que $\tilde{\mathcal{T}}'$ es conjunto de tilteo.

b) Supongamos que $\tilde{\mathcal{T}}$ no es rebanada. Luego, $\tau^{-1}\tilde{t}_i \in \langle\tilde{\mathcal{T}}\rangle$ para alguna i, y elegimos i_0 tal que $\tilde{t}_{i_0}$ sea minimal en $\tilde{\mathcal{T}}$ con $\tilde{t}_{i_0} \leq \tilde{t}_i$ en $\tilde{\mathcal{T}}$. Entonces $\tau^{-1}\tilde{t}_{i_0} \in \langle\tilde{\mathcal{T}}\rangle - \{\tilde{t}_{i_0}\}$.

Si hay un índice $j \neq i_0$ tal que $Hom(t', \tilde{t}_j) \neq 0$, entonces $t' \in \langle\tilde{\mathcal{T}}\rangle - \{\tilde{t}_{i_0}\}$ y $\langle\tilde{\mathcal{T}}'\rangle \subset \langle\tilde{\mathcal{T}}\rangle - \{\tilde{t}_{i_0}\}$ probando que $c(\tilde{\mathcal{T}}') < c(\tilde{\mathcal{T}})$.

Supongamos que $Hom(t', \tilde{t}_j) = 0$ para todo $j \neq i_0$, entonces $\langle \underline{\dim}\, t', \underline{\dim}\, t_j' \rangle = 0 = \langle \underline{\dim}\, \tilde{t}_j, \underline{\dim}\, \tilde{t}_{i_0} \rangle = \langle \underline{\dim}\, \tilde{t}_{i_0}, \underline{\dim}\, \tau T\tilde{t}_j \rangle =$

$$= -\langle \underline{\dim}\, \tau^{-1}\tilde{t}_{i_0}, \underline{\dim}\, \tilde{t}_j \rangle \quad \text{y} \quad \langle \underline{\dim}\, t', \underline{\dim}\, \tilde{t}_{i_0} \rangle =$$

$= -\dim Hom(t', T\tilde{t}_{i_0}) = -1 = \langle \underline{\dim}\, \tau^{-1}\tilde{t}_{i_0}, \underline{\dim}\, \tilde{t}_{i_0} \rangle$. Como $\{\underline{\dim}\, \tilde{t}_i\}$ es $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}^n$, entonces $\underline{\dim}\, t' = \underline{\dim}\, \tau^{-1}\tilde{t}_{i_0}$. Esto es, $t' = T^{2r}\tau^{-1}\tilde{t}_{i_0}$.

Como $\operatorname{Hom}(\tilde{t}_{i_0}, \tilde{t}_{j_1}) \neq 0$, entonces $\operatorname{Hom}(\tilde{t}_{j_1}, \tau T\tilde{t}_{i_0}) \cong D\operatorname{Hom}(\tilde{t}_{i_0}, \tilde{t}_{j_1}) \neq 0$ por (3.8). Así, $\tilde{t}_{j_1}$ está en la envolvente convexa $\langle \tilde{t}_{i_0}, \tau T\tilde{t}_{i_0}\rangle$. Similarmente, $\tilde{t}'$ está en $\langle \tilde{t}_{i_0}, (\tau T)^2\tilde{t}_{i_0}\rangle$ ya que $\operatorname{Hom}(\tilde{t}_j, t') \neq 0$. Como $\tau^{-1}\tilde{t}_{i_0}$ es el único vértice de la forma $T^{2r}\tau^{-1}\tilde{t}_{i_0}$ en $\langle \tilde{t}_{i_0}, (\tau T)^2\tilde{t}_{i_0}\rangle$, se tiene $t' = \tau^{-1}\tilde{t}_{i_0}$. Luego $t' \in \langle \tilde{J}\rangle - \{\tilde{t}_{i_0}\}$ y otra vez $\langle \tilde{J}'\rangle \subsetneq \langle J\rangle - \{\tilde{t}_{i_0}\}$.

BIBLIOGRAFIA

[AH] ASSEM, I. and HAPPEL, D., Generalized tilted algebras of type A_n, Comm. Algebra, 9 (1981). 2101-2125

[AB] AUSLANDER, M. and BRIDGER, M., Stable Module theory, *Mem. Amer. Math. Soc.*, No. 94. Providence (1969)

[AR] AUSLANDER, M. and REITEN, I., Representation theory of Artin Algebras III, VI, Comm. Algebra 3 (1975), 239-294, 5 (1977) 443-518.

[APR] AUSLANDER, M., PLATZECK, M. I. and REITEN, I., Coxeter functors without diagrams, Trans. Amer. Math. Soc. 250 (1979), 1-46.

[BLS] BAUTISTA, R., LARRIÓN, F. and SALMERÓN, L., On simply connected algebras, J. London Math. Soc., Vol. 27, Part 2 (1983), 212-220

[B1] BEILINSON, A. A., Coherent sheaves on P^n and problems of linear algebra, Func. Anal. and Appl., Vol 12, No. 3, (1978) 214-216.

[B2] BEILINSON, A. A., The derived category of Coherent Sheaves on P^n, Sel. Math. Sov., Vol. 3. No. 3, 1983/84, 233-237

[BBD] BEILINSON, A. A., BERNSTEIN, J. and DELIGNE, P., Faisceaux pervers, Astérique (100), 1982.

[BGG] BERNSTEIN, I. N., GELFAND, I. M. and GELFAND, S. I., *Algebraic bundles over P^n and problems of linear algebra*, Func. Anal. and Appl., Vol. 12, No. 3 212–214 (1978).

[BGP] BERNSTEIN, I. N., GELFAND, I. M. and PONOMAREV, V. A., Coxeter functors and Gabriel's theorem, Uspecki Mat. Naut. 28 (1973), translated in Russian Math. Surveys 28 (1973). 17–32.

[Bo1] BONGARTZ, K., Tilted algebras, Springer Lecture Notes 903 (1980), 26–38

[Bo2] BONGARTZ, K., A criterion for finite representation type, *Math. Ann.* 269 (1984), 1–12.

[BG] BONGARTZ, K. and GABRIEL, P., Covering spaces in representation theory, Invent. *Math* 65 (1981), 331–378.

[BB] BRENNER, S. and BUTLER, M. C. R., Generalization of *the Bernstein–Gel'fand–Ponomarev reflection functors*, Springer Lecture Notes 832 (1980), 103–169.

[BrG] BRETSCHER, O. and GABRIEL, P., *The standard form of* a representation-finite algebra, *Bull. Soc. Math. France*, 111 (1983), 21–40

[DR] DLAB, V. and RINGEL, C. M., Indecomposable representations of graphs and algebras, *Mem. Amer. Math. Soc.*, No. 173, Providence (1973).

[G1] GABRIEL. P., Unzerlegbare Darstellungen I, *Manuscripta Math.* 6 (1972), 71–102.

[G2] GABRIEL. P. Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras, Springer Lecture Notes 831 (1980), 1–71.

[G3] GABRIEL. P. The universal cover of a representation-finite algebra, Springer Lecture Notes 903 (1981), 68–105.

[Gr] GROTHENDIECK. A., Groupes des classes des catégories abeliennes et triangulées. Complexes parfait, in SGA.5, Expose VIII, Springer Lecture Notes 589 (1977).

[H] HAPPEL, D., On the derived category of a finite dimensional algebra, Comment. Math. Helv., 62 (1987) 339–389.

[H1] HAPPEL. D., Composition factors for indecomposables Proc. Amer. Math. Soc. 86 (1982), 29–31

[H2] HAPPEL. D., Tilting sets on cylinders, Proc. London Math. Soc. (3) 51 (1985) 21–55.

[H3] HAPPEL. D., Iterated tilted algebras of affine type, to appear Com of Alg.

[H4] HAPPEL, D. Triangulated Categories in the Representation theory of finite Dimensional Algebras. London Math. Soc. Lect. Notes 119 (1988).

[HR] HAPPEL, D. and RINGEL C.M. Tilted algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 274(2), (1982) 399–443.

[Ha] HARTSHORNE. R., Residue and Duality, Springer Lecture Notes 20 (1966).

[He] HELLER. A., The loop-space funtor in homological algebra. Trans. Amer. Math. Soc. 96 (1960) 382–394.

[HS] HERLICH.

[HW] HUGHES, D. and WASCHBÜSCH, J., Trivial extensions of tilted algebras, Proc. London Math. Soc. (3), 46 (1983), 347-364.

[ML] Mac LANE, S., Categories for the working mathematician, Springer Verlag 1971.

[Q] QUILLEN, D., *Higher algebraic K-theory I*, Springer Lecture Notes 341 (1973), 85-147

[R] RIEDTMANN, C., Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück, Comm. Math. Helv. 55 (1980), 199-224

[Ri] Ringel, C.M., Representations of K-species and bimodules, J. Algebra 41 (1976), 269-302.

[Ri2] RINGEL, C.M., Finite dimensional hereditary algebras of wild representation type, Math. Z. 161 (1978), 235-255

[Ri3] RINGEL, C.M., Report on the Brauer-Thrall Conjectures, Springer Lecture Notes 831 (1980), 104-136, and Tame algebras, same volume, 137-287.

[Ri4] RINGEL, C.M., The rational invariants of the tame quivers, Invent. Math. 58 (1980), 217-239.

[Ri5] RINGEL, C.M., Bricks in hereditary length categories, Resultate der Mathematik 6(1), (1983), 64-70.

[Ri6] RINGEL, C.M., Tame algebras and integral quadratic forms, Springer Lecture Notes 1099 (1984).

[Rt] ROTMAN J.J. An Introduction to homological algebra, Academic Press (1979).

[TW] TACHIKAWA, H. and WAKAMATSU, T., Applications of reflection functors for selfinjective algebras, Proc. ICRA. IV, Carleton Lecture Notes 1984.

[V] VERDIER, J.L., Catégories dérivées, état 0, Springer Lecture Notes 569 (1977), 262-311.