UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE FILOSOFIA

FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRIA DE SOLIDOS PARA UNA TEORIA RELACIONAL DEL ESPACIO FISICO

TESIS

PARA OPTAR POR EL GRADO DE

MAESTRO EN FILOSOFIA

JOSE LUIS GONZALEZ CARBAJAL.

MEXICO, D. F. 1990

INDICE

INTRODUCCION.

En "Some opens problems in the philosophy of space and time", (1972), Suppes anota, entre otros, el problema de "reemplazar las nociones clásicas de punto o línea como conceptos primitivos de la geometría y construir la geometría tridimensional a partir del concepto de objeto sólido o cuerpo", (p. 308), como un problema abierto de la filosofía del espacio. El ofrece ahí un sistema mereológico como una propuesta expresamente incompleta de solución al problema, es decir, como un sistema base para obtener la geometría euclideana prescindiendo del concepto de punto. Este sistema de Suppes está ubicado en una línea de investigación, en la que se encuentran trabajos de Lesniewski, Tarski, Whitehead, Grzegoreczyk y Noll, que busca fundamentar la geometría de sólidos, como opuesta a una de puntos, a partir de un sistema axiomático mereológico, esto es, un sistema cuyos conceptos primitivos son los de cuerpo (u otro análogo) y "parte de" con respecto a un todo. Además, Suppes señala que para que un sistema tal sea satisfactorio debe ser posible representar sus modelos en el espacio tridimensional de manera tal que la representación sea única salvo el grupo estándar de movimientos rígidos; asimismo anota que para realizar esta faena, pueden explotarse las técnicas de la teoría de la medición fundamental de magnitudes unidimensionales.

El propóstio principal de esta Tesis es proponer una solución a este problema, esto es, intentar dar una fundamentación de la geometría de sólidos a partir de una base axiomática mereológica. El sistema que propongo, además de los conceptos mereeológicos mencionados, cuenta con nociones cualitativas espaciales; los axiomas mereológicos del sistema se deben principalmente a Suppes, mientras que los espaciales, formulados en términos cualitativos de distancia, son de mi propia cuenta. Para mostrar que el sistema presente es satisfactorio demuestro un teorema de representación, es decir, pruebo que existe una representación de sus modelos en el espacio matemático E^3 y que esa representación es única salvo movimientos rígidos llamados traslaciones, transformaciones no idénticas de E^3 sobre sí mismo. Para hacer lo anterior me guie, además de la sugerencia de Suppes anotada atrás, del desarrollo de ella hecha por Mundy en (1986). En el Capítulo III se encuentra este material.

Podemos asociar, de manera natural, a la geometría de sólidos con la concepción relacional del espacio físico y con base en una versión adecuada de aquélla, como la que aquí se ofrece, conceptuar las posiciones de un conjunto (finito) de cuerpos, un sistema cinemático, de acuerdo con las distancias relativas que guardan entre sí y, de esta forma, arribar a un concepto de posición relativa, o sea, la posición de un cuerpo expresada relativamente a otros cuerpos del sistema, y no en relación a un espacio absoluto. A grandes rasgos, se relaciona, de la manera brevemente descrita, la geometría de sólidos con una teoría del espacio físico que lo concibe como el conjunto de las posibles posiciones relativas de los cuerpos, ciertamente, una concepción relacional relacional del espacio. En el Capítulo II argumento filosóficamente en favor de la concepción relacional; doy ahí razones tanto epistemológicas como ontológicas para las cuales la concepción relacional del espacio es más plausible que la absoluta, en particular, porque prescinde del concepto de espacio absoluto de la física newtoniana y describe loss hechos espaciales de la ciencia clásica del movimiento en términos de relaciones entre los propios cuerpos, lo cual es más cercano a nuestra experiencia ordinaria y científica.

La conexión entre la geometría de sólidos y la mecánica clásica de partículas la reserve para el Capitulo IV; ahí se encuentra una reformulación axiomática de la mecánica newtoniana que presupone no una geometría de puntos, generalmente asociada a la concepción absoluta, sino una de sólidos concorde con la concepción relacional. Dicha conexión la formulo explícitamente como una relación semática entre los modelos de la mecánica clásica de partículas y la geometría de sólidos propuesta definiendo un vínculo interpretativo, en el sentido de la concepción estructuralista de la ciencia empírica.

Por último, en el primer Capítulo me ocupo de la discusión histórica que se dio entre Newton y Clarke, por un lado, y Berkeley y Leibnitz, por el otro, en torno a la existencia del espacio absoluto, polémica que llevo a la concepción prerelativista del espacio físico de Mach, antecedente de la concepción einsteiniana del espacio-tiempo.

Una manera de mostrar explícitamente la <u>relevancia</u> filosófica de la parte substancial de esta Tesis, la propuesta de fundamentación de la geometría de sólidos, consiste en ubicarla en su contexto histórico-conceptual.

Empezemos por recordar que uno de los pilares de la filosofia natural de Newton fue su concepción del espacio físico como una entidad absoluta, existente por sí misma, y que vista restrospectivamente, por supuesto, dicha filosofía natural newtoniana no es sino una concepción científico-filosófica del universo. Ahora bien, la discusión entre Leibnitz y Newton fue precisamente en torno a la <u>existencia</u> del espacio absoluto y, por cierto, esta cuestión es de índole filosófica: es una cuestión ontológica. A su vez, Leibnitz avanzó una teoria relacional del espacio, alternativa a la newtoniana, de acuerdo con la cual no existe un espacio aparte e independiente de los cuerpos físicos, de naturaleza absoluta. Y si bien, tanto la teoría relativista de Einstein como la mecánica cuántica han desplazado a la física newtoniana como parádigma científico, en el sentido de Kuhn, la discusión filosófica acerca de la naturaleza del espacio "clásico", es decir, un espacio para la mecánica clásica newtoniana, se mantiene vigente en la medida en que esta teoría científica conserva un dominio válido, aunque restringido, de aplicaciones, a saber: sistemas dinámicos de (macro)cuerpos a velocidades "pequeñas".

Desde el nacimiento de la mecánica clásica ha estado asociada a la concepción absoluta del espacio de Newton una geometría euclideana de puntos. Sobre ésto es pertinente hacer dos consideraciones. Primero, la geometría de puntos de Euclides cuenta con una fundamentación axiomática desde los Elementos del propio Euclides, y con una versión definitiva y completamente satisfactoria, como un sistema axiomático en el sentido moderno, en los Grundelagen der Geometrie de Hilbert, de 1899. Segundo, en un sentido similar a la noción de "representación" que voy a usar en esta Tesis, en la obra de geometría analítica de Descartes se encuentra una representación de la geometría euclideana de puntos en el dominio matemático conformado por la tercera potencia de los números reales. Aunque esta cuestión es de suma importancia, es generalmente pasado por aalto, tal vez porqque se presenta de manera tácita y obvia. Hay, pues, una representación o proyección de la geometría tridimensional de Euclides en un universo numérico, debida a Descartes. Bajo una representación tal, se piensa que existe algún tipo de morfismo entre dicha geometría y el dominio matemático en consideración; generalmente se considera que es un isomorfismo.

Lo anterior es lo que tenemos respecto de la concepción absoluta y la geometría de puntos. Lo que aquí se encuentra es una representación análoga a la cartesiana de la geometría de sólidos. Si bien no hay ninguna necesidad de asociar a la geometría de sólidos con la concepción relacional del espacio, sí resulta que esa geometría es la más acorde con dicha concepción. Lo anterior significa que con el presente trabajo, si logra sus propósitos, obtenemos una alternativa más viable a la concepción absoluta, ya que se consigue una concepción del espacio más completa y global, la cual aunada a la física newtoniana, nos brinda una concepción en la mejor de las tradiciones filosóficas, una cosmología.

CAPITULO I.

ANTECEDENTES HISTORICOS DE LA CONCEPCION RELACIONAL.

Generalmente se atribuye a Leibnitz la paternidad de la concepción relacional del espacio, pero varios filósofos contemporáneos a él sostuvieron una teoría no absoluta del espacio físico, particularmente Berkeley y el propio Kant; si bien es cierto que fue Leibnitz su máximo defensor. Presentaré en este Capítulo la polémica clásica sobre la concepción absoluta del espacio de Newton, por lo que primero expondré, brevemente, a ésta.

La concepción newtoniana del espacio y el movimiento absolutos es bien conocida. El espacio es, para Newton, una entidad que existe por sí misma, en la que se da todo movimiento mientras que éste es el cambio de lugar de un cuerpo en ese espacio absoluto o, mejor:

> El espacio absoluto, en su propia naturaleza, sin relación con nada externo, permanece siempre igual e inmóvil.
>
> El movimiento absoluto es el desplazamiento de un cuerpo de un lugar absoluto a otro.[1]

Tal espacio absoluto el es único existente, el verdadero y, por ello, el movimiento verdadero de los cuerpos es el que tiene lugar en ese espacio. El carácter absoluto, o verdadero, de un movimiento deriva de que es una traslación o rotación de un cuerpo de un lugar absoluto (un lugar en el espacio absoluto) a otro;

mientras que el carácter absoluto del espacio le es una propiedad *intrínseca*, que radica en que existe homogéneo e inmóvil independientemente de todo lo externo a él, en particular, de los cuerpos y sus movimientos.
Cuando pensamos al movimiento (siempre en sí absoluto) de un cuerpo no como un desplazamiento en el espacio absoluto sino como un cambio de lugar del cuerpo respecto de otro cuerpo considerado en reposo, estamos concibiendo ese movimiento de manera relativa; pero ese movimiento relativo no es real sino sólo aparente. Concebir a los movimientos verdaderos de los cuerpos como aparentes es necesario, según Newton:

> [...] puesto que las partes del espacio no pueden ser vistas o distinguidas entre sí por nuestros sentidos, en lugar de éstos empleamos medidas sensibles para aquéllas. Definimos, pues, a todos los lugares a partir de las posiciones y distancias de las cosas, con respecto a cualquier cuerpo considerado como inmóvil; y luego calculamos todos los movimientos, con respecto a esos lugares, considerando a los cuerpos como sí se desplazaran de uno de esos lugares a otros. Así, en vez de los lugares y los movimientos absolutos, empleamos los relativos; sin que esto represente ningún inconveniente en los asuntos comúnes.[2]

De esta manera, considerando a un cuerpo como inmóvil llegamos a concebir los espacios relativos, como partes del espacio absoluto, lo cual posibilita nuestra experiencia sensible de los movimientos de los cuerpos, aunque sólo relativamente. En este sentido Newton nos dice que:

> El espacio relativo es alguna dimensión o medida móvil de los espacios absolutos; que nuestros sentidos determinan por su posición en relación con los cuerpos, y que es comúnmente considerado como espacio inmóvil; tal es la dimensión de un espacio subterráneo, aéreo o celeste, determinado por su posición con respecto a la tierra.[3]

Newton consideraba a las matemáticas, en particular a la geometría, no como un sistema abstracto sino más bien como una rama particular de la mecánica: "[...] la geometría se funda en la práctica mecánica, y no es sino una parte de la mecánica universal, que propone y demuestra con precisión el arte de la medición."[4] Y, de acuerdo a Jammer, este realismo matemático llevó a Newton a "dotar al concepto de espacio absoluto -- que hasta entonces era una mera estructura matemática -- de *existencia ontológica* independiente." ([1954], p. 135, subrayado mío.) La concepción del espacio absoluto de Newton va más lejos de lo recién dicho. Al parecer, Newton no sólo atribuyó existencia *per se* al espacio absoluto, sino también le adjudicó un alma. Así, en su *Opticks* escribe:

> [...] de los Fenómenos resulta evidente que existe un Ser incorpóreo, viviente, inteligente, omnipresente, quien es el Espacio infinito, como si estuviera en su Sensorio, ve las cosas íntimamente,

las percibe directamente y las comprende íntegramente a través de su presencia inmediata a él.[5]

Es difícil interpretar estas afirmaciones de Newton, que están muy cercanas a identificar al espacio absoluto con Dios. Leibnitz las interpretó como aseverando que el espacio es un órgano sensible del cual Dios se sirve para percibir las cosas, objetando que "Pero si Dios precisa de un Organo para percibir las cosas, se concluirá que éstas no dependen enteramente de El ni fueron producidas por El."[6]

Es a esta concepción del espacio a la que, entre otros, Leibnitz y Berkeley opusieron una relacional; me ocuparé de la crítica a aquélla, considerando, primero, las cuestiones generales (dejando a un lado las teológicas) y, después, los argumentos dinámicos; a través de ello, tendré en cuenta la cuestión de si es necesario para la física clásica el concepto de espacio absoluto o, bien, es posible contar con un esquema conceptual con el cual se describan los fenómenos cinemáticos sin recurrir a tal concepto.

En la famosa discusión que Leibnitz mantuvo, por carta, con Clarke, quien defendía los puntos de vista de Newton, sobre la existencia del espacio absoluto, Leibnitz esbozó una teoría del espacio físico en la cual la noción de situación (posición) de un cuerpo respecto a otros es una relación suficiente para la idea de espacio. Así nos dice (Quinta carta):

Mostraré aquí cómo llegan los Hombres a formarse la

Noción del Espacio. Consideran que existen muchas cosas a la vez, y las observan en cierto orden de Coexistencia, de acuerdo con el cual la relación de una cosa con otra resulta más o menos simple. Este orden es su situación o distancia. Cuando sucede que una de esas Cosas Coexistentes cambia su Relación con respecto a una Multitud de otras Cosas, las cuales no cambian su Relación mutua, y que otra cosa, recién llegada, adquiere la misma relación que tenía la anterior con las demás, entonces decimos que ha venido a ocupar el Lugar de la anterior; y a este Cambio lo llamamos Movimiento efectuado en Ese Cuerpo, por cuanto que es la Causa inmediata del Cambio. [...] Y suponiendo, o imaginando, que entre esas Cosas Coexistentes hay un Número suficiente de ellas que no ha sufrido ningún Cambio, entonces podemos decir que Aquéllas que tienen una Relación como ésta con las Existentes fijas, igual que otras la tenían con respecto a ellas antes, ahora ocupan el mismo Lugar que tenían aquellas otras. *Y Aquéllo que comprende a todos esos Lugares es llamado el Espacio.*"[7]

Como puede verse, según Leibnitz, la posición de un cuerpo puede concebirse de acuerdo con un orden de distancias que guarda con otros cuerpos, de tal suerte que si un cuerpo viene a ocupar las mismas relaciones de distancia con otros, que se suponen inmóviles, que un cuerpo que se muda, se diría que aquél ocupa el mismo lugar (tiene la misma posición) que ocupaba éste. Esto significa, pues, que la noción de situación (o posición) de un cuerpo es definible en términos de relaciones de distancia dentro de un sistema de cuerpos coexistentes. Y, afirma Leibnitz, esta noción hace innecesaria la suposición de una entidad independiente, distinta de los cuerpos coexistentes, en función de la cual se determinen las posiciones de los cuerpos, puesto que el conjunto de lugares que ocupan relativamente los cuerpos (posiciones relativas) definen al espacio.

Cercanamente a Leibnitz, Berkeley esgrime un contundente argumento en contra de la idea newtoniana de que el movimiento precisa del espacio absoluto. De acuerdo a él (en *De Motu*):

> Si suponemos que los demás cuerpos fueran aniquilados y, por ejemplo, un globo tuviera que existir solo, no podría concebirse ningún movimiento en éste; es igualmente necesario que otro cuerpo este dado, por cuya situación el movimiento se pudiera entender para poder ser determinado. La verdad de esta opinión se verá claramente si llevamos al extremo la supuesta aniquilación de todos los cuerpos, del nuestro y de todos los demás, con excepción de aquel globo solitario."[8]

La fuerza de este argumento radica en que va al centro de la idea newtoniana de espacio absoluto, de acuerdo con la cual el movimiento verdadero de un cuerpo consiste en el cambio de lugar que ocupa en el espacio absoluto, es decir, como una relación concebible entre el cuerpo y el espacio absoluto, y concluye, acertadamente, que no es posible conceptuar el movimiento "absoluto" de un cuerpo, así definido, con referencia únicamente al espacio absoluto.

Tal vez se deba a Kant una de las expresiones más claras del carácter relativo del movimiento. En *Neuer Lehrbegriff der Bewegung und Ruhe*, de su época precrítica, Kant escribe:

> Ahora empiezo a advertir que carezco de algo en la expresión del movimiento y el reposo. Yo nunca diría que un cuerpo está en reposo, sin agregar con respecto a qué se encuentra en reposo; y nunca diría que se mueve, sin nombrar al mismo tiempo los objetos respecto a los cuales cambia su relación. Si quiero imaginar también un espacio matemático libre de toda creatura, como receptáculo de los cuerpos, ni siquiera eso me ayudaría, pues, ¿cómo distinguiría yo las partes del mismo y los diferentes lugares que no están ocupados por nada corpóreo?"[9]

De nuevo se enfatiza, ahora por Kant, la imposibilidad de concebir un espacio, un receptáculo en el que esten los cuerpos móviles, independientemente de los cuerpos mismos

Tanto para Berkeley como para Leibnitz, la noción de espacio absoluto de Newton es una ficción, carente de correlato observacional. Leibnitz con una analogía genial, con los arboles genealógicos, muestra que la hipótesis del espacio absoluto es realmente una hipóstasis injustificada. Así explica:

> De la misma manera que la Mente puede imaginarse un Orden constituido por Líneas Genealógicas, cuya Grandeza consistiría únicamente en el Número de Generaciones en las que cada Persona ocuparía un Lugar; si a éste se agregará la Ficción de una Metempsicosis y se introdujeran las Almas Humanas, entonces las Personas que se encontraran en esas Líneas cambiarían de Lugar; el que era Padre o Abuelo, se podría convertir en Hijo o en Nieto, y así sucesivamente. Y esos Lugares, Líneas y Espacios Genealógicos, aunque expresen Verdades reales, sólo serían cosas ideales.[10]

Los anteriores argumentos generales en contra de la existencia del espacio y el movimiento absolutos exhiben que es posible conceptuar el movimiento como una relación entre cuerpos, como cambio de sus posiciones relativas, y con suficiencia, como sostendré a lo largo de esta Tesis, para expresar los hechos cinemáticos de la mecánica clásica. Podemos decir que esos argumentos son cinemáticos, pues se refieren al problema de cómo concebir el movimiento sin pretender explicarlo, sin apelar a los conceptos dinámicos de masa y fuerza en términos de los cuales en mécanica clásica se da cuenta del movimiento. Newton pretendío demostrar la existencia del espacio absoluto aludiendo a las "causas y los efectos" de los movimientos de los cuerpos en dos argumentos dinámicos. En el primero recurre a la fuerza de inercia enunciada en su Primera Ley; en el segundo apela al movimiento circular como efecto de fuerzas centrífugas.

Me ocuparé ahora de esos argumentos. Para Newton, la ley "Todo cuerpo permanece en su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme, a menos que haya fuerzas ejercidas sobre él que lo obliguen a cambiar ese estado", la cual para él es válida con base en la experiencia inmediata (véase Jammer [1954], p. 135), demuestra la realidad del espacio absoluto puesto que el movimiento rectilíneo uniforme precisa de un sistema de referencia diferente de cualquier espacio relativo arbitrario; la verdad de la Primera Ley supone, pues, un sistema inercial universal. La mayor dificultad radica en que tal sistema inercial no está unívocamente determinado. Los espacios "relativos" newtonianos, anclados en algún sistema de coordenadas, son equivalentes entre sí, por transformaciones galileanas, es decir, son invariantes ante transformaciones de traslación con velocidad constante. ¿Cómo determinar, entonces, el sistema de referencia correspondiente al espacio absoluto? Newton restringío la solución a este problema a la determinación del centro del sistema planetario, identificandolo con su centro de gravedad.

Ahora, dicho centro podría estar en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme. Newton postuló, en la Hipótesis I de su *The System of the World*, que el centro del sistema planetario es inmóvil, descartando la segunda posibilidad. Sin embargo, Newton no tomó en cuenta a las estrellas fijas cuando pretendió determinar el centro en reposo del sistema de referencia universal en el que se cumple la Ley de inercia. Sólamente después de que Newton murió fue reconocido el movimiento propio de las estrellas, lo cual hace más extraño que Newton intencionalmente las ignorara para determinar el centro del universo, puesto que para él estaban realmente "fijas". (Cf. Jammer [1954], p. 137.)

Actualmente las fuerzas de inercia se consideran regidas por el principio de Mach, el cual afirma que la inercia de cualquier cuerpo está determinada por las masas del universo y por su distribución, sin atención a un espacio absoluto. Como explica un físico contemporáneo: "El uso del espacio absoluto no es la única manera de dar cuenta de la inercia. Es posible, como Mach ha propuesto, considerar a la inercia como una interacción entre los cuerpos de nuestro entorno inmediato y el resto del universo. Esto no deja de ser natural, porque es un hecho de la experiencia que los marcos inerciales son precisamente aquellos en los cuales las estrellas fijas y, presumiblemente, las otras masas del universo aparecen más o menos en reposo. Si así la inercia es tratada igual que otras interacciones físicas, ya no es necesario del todo introducir un espacio absoluto."[11]

El segundo argumento de Newton es algo más complicado. De acuerdo a él, el movimiento circular del agua, en el interior de un recipiente que gira, como efecto de fuerzas centrífugas, demuestra la existencia del espacio absoluto ya que no consiste en una traslación del agua con respecto a algún espacio relativo, sino que es un movimiento en sí mismo que se da en el espacio absoluto. El argumento de Newton *in extenso* es el siguiente"

> Si un recipiente colgado de una larga cuerda es hecho girar constantemente para que la cuerda quede bien torcida, y en seguida se llena el recipiente con agua y se mantiene en reposo junto con el agua; entonces, mediante la acción repentina de otra fuerza, se le hace dar vueltas en sentido contrario y mientras la cuerda está destorciendose, el recipiente continua durante algún tiempo en este movimiento; la superficie del agua será primero plana, como antes de que el recipiente comenzará a moverse; pero después de eso, el recipiente al ir comunicando gradualmente su movimiento al agua, comenzará a revolverse de manera apreciable, se alejará poco a poco del centro, y ascencderá a los a los lados del recipiente, formando una figura concava (como yo lo he comprobado); entre más rápido sea el movimiento, más alto subirá el agua, hasta que finalmente haciendo sus revoluciones al mismo tiempo que el recipiente, permanecerá relativamente en reposo dentro de él. Esta ascensión del agua demuestra su esfuerzo por alejarse del eje de su movimiento; y el movimiento circular verdadero y absoluto del agua, que en este caso en directamente contrario al relativo, se pone

de manifiesto y puede ser medido por este esfuerzo. Al principio, cuando el movimiento relativo del agua en el recipiente era mayor, no producía ningún esfuerzo por alejarse del eje; el agua no mostraba ninguna tendencia hacia la circunferencia, ni a ascender hacia los lados del recipiente, sino que conservaba su superficie plana y, por lo tanto, no había iniciado todavía su verdadero movimiento circular. Pero, después, cuando el movimiento relativo del agua había decrecido, el ascenso hacia los lados del recipiente manifestó su esfuerzo por alejarse del eje; y este esfuerzo demostró que el movimiento circular real del agua se incrementaba contínuamente, hasta que alcanzó su mayor magnitud, cuando el agua se encontró en reposo relativo en el recipiente. Y, por lo tanto, este esfuerzo no depende de ninguna traslación del agua, con respecto a los cuerpos del ambiente, ni tampoco el movimiento circular verdadero puede ser definido por esa traslación.[12]

Mucha correspondencia provocó este argumento dinámico entre Huygens, Leibnitz y Clarke, pero una refutación de él la encontró Berkeley al replicar que el movimiento del agua en el recipiente realmente no es circular, si se toman en cuenta la rotación diurna de la tierra y su revolución anual. Berkeley concluye que este movimiento del agua, que para Newton es rotatorio con respecto al espacio absoluto, puede ser referido a otros cuerpos más que al recipiente que la contiene. (Véase, Losee [1972], p. 167.)

De hecho, la hipótesis del espacio absoluto no tuvo ninguna repercusión en la práctica científica de los mecánicos clásicos. Ninguno de los grandes físicos franceses, entre otros Lagrange, Laplace y Poisson, estuvieron interesados en el problema del espacio absoluto; lo tomaron como una hipótesis de trabajo, sin preocuparse por su justificación teórica. (Véase, Jammer [1954], p. 179.) Los comentarios de Diderot y d'Alembert en la *Encyclopédie* son sintomáticos de esa despreocupación por el espacio absoluto; nos dicen: "Nosotros no tomamos partido con respecto a la cuestión del espacio; de todo lo dicho en el artículo sobre elementos de las ciencias, se puede advertir que esta cuestión oscura resulta inútil para la geometría y para la física."[13]

Posteriormente, el rechazo por parte de los físicos del espacio absoluto fue mayor y explícito. Entre ellos, Maxwell ofreció, en *Matter and Motion*, un sólido argumento epistemológico con base en elcual el espacio absoluto, si existe, está vedado a nuestro conocimiento. Maxwell escribió que:

> Se concibe al espacio absoluto como si permaneciera siempre idéntico a sí mismo e inmóvil. La disposición de las partes del espacio no se puede alterar más que en el orden de las porciones del tiempo. Concebirlas como si se movieran en sus lugares, es tanto como concebir que un lugar se

aleje de sí mismo. Pero así como no hay nada que permita distinguir a una porción del tiempo de otra, excepto los diferentes acontecimientos que se realizan en ellas, no hay nada que permita distinguir a una parte del espacio de otra, excepto su relación con el lugar de los cuerpos materiales. Sólo podemos describir el tiempo de un acontecimiento, y el lugar de un cuerpo con respecto a algún otro cuerpo. *Todo nuestro conocimiento, tanto del tiempo como del espacio, es esencialmente relativo.*[14] La versión físicamente más acabada del espacio y el tiempo relativos se debe a Mach. Como se sabe él elaboró la concepción prerelativista del espacio que sirvió de base a Einstein para formular su teoría relativista del espacio-tiempo. En una vena epistemológica cercana a la de Maxwell, Mach expone su concepción así:

Cuando decimos que la dirección y velocidad de un cuerpo K se altera bajo la influencia de otro cuerpo K', estamos estableciendo una concepción a la cual es imposible llegar a menos que se hallen presentes otros cuerpos A, B, C, con referencia a los cuales se haya calculado el movimiento del cuerpo K. Nuestro conocimiento se limita por tanto, en realidad, a una relación entre el cuerpo K y los cuerpos A, B, C...[15]

Sobre la cuestión que plantee anteriormente de si es posible construir un esquema conceptual con base en el cual podamos describir los fenómenos cinemáticos clásicos sin el concepto de espacio absoluto, creo, que se resuelve afirmativamente. Puesto que, como se ha visto, sólo es posible conceptuar el movimiento de los cuerpos de manera relativa y ya que en la práctica científica, de hecho, se hace caso omiso del concepto de espacio absoluto, podemos desechar de nuestro marco conceptual para pensar los hechos espaciales de la ciencia clásica del movimiento a una entidad innecesaria como el espacio absoluto.

NOTAS.

1. Newton [1729], p. 6.

2. Ibid, p. 8.

3. Ibid, p. 6.

4. Ibid, p. xiii.

5. Citado por Jammer [1954], p. 149.

6. Citado por Jammer [1954], p. 149, de *A Collection of Papers which passed between the late learned Mr. Leibnitz and Dr. Clarke*, Londres, 1717.

7. Citado por Jammer [1954] de Op. cit., pp. 152-53, (Subrayado mío.)

8. Citado por Jammer [1954], p. 143.

9. Citado por Jammer [1954], p. 151.

10. Citado por Jammer [1954], de Op. cit., p. 153.

11. Noll [1966], p. 161.

12. Newton [1729], p. 10.

13. Citados por Jammer [1954], p. 180.

14. Citado por Jammer [1954], pp. 180-81.(Subrayado mío.)

15. Mach [1973], p. 29.

LAS CONCEPCIONES ABSOLUTA Y RELACIONAL DEL ESPACIO FISICO.

La concepción clásica del espacio físico postula la existencia de un espacio absoluto, independiente de los objetos físicos. Las entidades básicas que conforman este espacio físico son puntos *espaciales*; se postula un continuo espacial de puntos. Estos puntos, que llenan el espacio, constituyen el espacio mismo. De acuerdo con esta concepción, las relaciones espaciales entre los objetos físicos se derivan de su relación con el espacio absoluto. Primariamente, los objetos *ocupan* cierta región espacial, o mejor, estan *localizados* en un determinado punto del espacio, independientemente de los otros objetos en él; secundariamente, las relaciones espaciales entre los objetos se determinan en relación con sus posiciones en el espacio. La distancia, por ejemplo, se concibe como una relación entre objetos físicos; se dice que dos objetos están a cierta distancia uno del otro cuando están situados en puntos espaciales separados por esa distancia.

Histórica y conceptualmente ha estado asociada a esta concepción absoluta del espacio la geometría euclideana de *puntos*. En esta teoría geométrica, las entidades geométricas básicas son los puntos; los otros objetos geométricos, como líneas y figuras no son sino conjuntos de puntos. Una línea, por ejemplo, es un continuo infinito de puntos. La hipótesis de la concepción absoluta del espacio físico es que el espacio, como una entidad real : por sí misma, tiene una estructura geométrica intrínseca, una estructura euclideana. Podría decirse que de acuerdo con la concepción absoluta, existe un tipo de isomorfismo entre el espacio físico y el espacio geométrico de la geometría euclideana de puntos. Que exista este supuesto isomorfismo significa que a cada punto espacial corresponde un punto geométrico, y viceversa, y que las leyes de la geométria euclideana de puntos se cumplen en el espacio físico, de ahí que la estructura del espacio físico sea euclideana. De lo anterior se deriva que la posición de los objetos físicos sea una *propiedad absoluta*, puesto que se establece en relación al espacio absoluto. Es digno de notarse que, según la concepción clásica, en un universo en que existiera únicamente un objeto físico, su posición en el espacio sería determinable.

Una teoría relacional del espacio, a diferencia de la absoluta, considera a los objetos físicos mismos como las únicas entidades básicas e intenta dar cuenta de los hechos espaciales en términos solamente de las *relaciones* espaciales entre esos objetos. Para una teoría relacional no existe un espacio como una entidad aparte e independiente de las relaciones espaciales entre los objetos físicos mismos; en todo caso, el espacio físico no es sino los objetos mismos con sus relaciones espaciales o, más precisamente, las *posibles posiciones relativas de los objetos físicos.*[1] El hecho de que las posiciones de los objetos físicos, en la concepción relacional, sean expresables relativamente es de suma importancia. Según esta concepción, un objeto físico tiene cierta posición no en conexión con un espacio absoluto postulado, sino por sus relaciones con otros objetos. Como se verá adelante, se requiere un universo con al menos tres objetos para que tenga sentido hablar de posiciones relativas. En último análisis, en la concepción absoluta, la posición es una relación (binaria) entre un objeto físico y el espacio absoluto, mientras que en una concepción relacional alternativa, como la aquí propuesta, la posición de un objeto físico es una relación (ternaria) entre él y al menos otros dos objetos.

Podemos hacer corresponder a una teoría relacional no una geometría de puntos sino una de sólidos. Por este tipo de geometría se entiende una geometría que rechaza, en particular, al concepto de punto como concepto básico y admite como los únicos objetos geométricos básicos a los sólidos, figuras tridimensionales, los cuales se consideran como los correlatos de los conjuntos regulares abiertos, o cerrados, de la geometría euclideana tridimensional.[2] En el caso de la concepción relacional, se correlacionan los objetos físicos o cuerpos con los sólidos geométricos sin implicar que éstos ocupen una región en un espacio de puntos. Al menos en la teoría de los sólidos que aquí se presenta, los puntos en sentido espacial no juegan ningún papel; se tratará así de una teoría espacial sin puntos. El meollo de la cuestión no está, como podría pensarse, en rechazar a los puntos como elementos del espacio euclideano en sentido matemático, sino en el rechazo de los puntos espaciales como entidades materiales que conforman el espacio físico. Las únicas entidades reales que supondré, en la concepción relacional, serán precisamente los objetos materiales o cuerpos.

Es claro que la diferencia entre las ontologías subyacentes a ambas concepciones es radical. Mientras que para la concepción relacional sólo existen los objetos físicos mismos, la concepción absoluta asume, además de los objetos físicos, un espacio que existe por sí mismo, y es más, uno tal que todas las propiedades y relaciones espaciales de los objetos físicos se derivan de su conexión con él. Por supuesto, por economía ontológica es preferible la concepción relacional, sobre todo si se toma en cuenta que no hay ninguna necesidad desde la física de postular un espacio absoluto. También desde el punto de vista epistemológico existe una diferencia significativa entre ambas concepciones del espacio. Aunque no se comparta la tesis kantiana de que nuestro conocimiento del espacio es *a priori*, la concepción absoluta implica que para conocer, por ejemplo, la estructura espacial del universo, *primero* tenemos que conocer el espacio absoluto y *después* su estructura, puesto que ésta depende de la conexión de los objetos físicos con el espacio; y tenemos que conocer tal espacio absoluto *independientemente* de los objetos físicos, pero aquél parece ser incognocible por sus mismas propiedades, por ser homogéneo e indistinguible en sus partes. En cambio, en la concepción relacional, conocemos directamente la estructura del universo conociendo las relaciones espaciales entre los objetos mismos. Creo que estas diferencias filosóficas abogan por sí mismas a favor de la concepción relacional. Por mi parte, además de las razones anteriores y aparte del dudoso carácter absoluto del espacio postulado por la concepción clásica, considero que la teoría relacional como una concepción *metafísica* del espacio físico concuerda más tanto con nuestra *experiencia científica* como con la *ordinaria* que la concepción que conlleva la teoría absoluta. Al estudiar, por ejemplo, la dinámica del sistema planetario, investigamos las posiciones a través del tiempo --las trayectorias-- de los planetas relativas al Sol, tomándolo como el centro del sistema, y no buscamos, *una a una*, supuestas relaciones entre los cuerpos planetarios con un espacio conocido de antemano, para establecer sus posiciones. Así, pues, una teoría relacional del espacio tanto desde el punto de vista ontológico, por no postular una entidad como el espacio absoluto, como desde el punto de vista epistemológico, por concordar con la experiencia científica, resulta más plausible que la concepción absoluta. A estas consideraciones filosóficas se debe mi intento presente de ofrecer una fundamentación de la geometría de sólidos que dé apoyo a la conceptuación del espacio físico concorde con la concepción relacional. En la geometría aquí propuesta se encuentran conceptos espaciales, de distancia, que posibilitan concebir las posiciones de los cuerpos *relativamente* como lo precisa una teoría relacional. Para los propósitos de esta Tesis, entenderé por una teoría relacional del espacio una interpretación de los hechos espaciales de la física clásica que los analiza solamente en términos de las relaciones entre los objetos materiales.

Al partir de los conceptos mereológicos de cuerpo y "parte de" así como de conceptos espaciales cualitativos que tienen *correlatos fácticos* tanto en la experiencia ordinaria como en la científica, el sistema axiomático que aquí se encuentra es más fundamental que algún otro sistema --como el de Tarski en [1929]-- que incluya dentro de sus conceptos primitivos conceptos geométricos --como el de esfera-- para la edificación de la geometría de solidos. Difícilmente podrán encontrase conceptos ontológicos y relaciones espaciales más básicos que los que aquí se usan. A ello se debe mi creencia en que el sistema axiomático presente ofrece, propiamente dicho, una fundamentación de la geometría de sólidos. Sin embargo, me apresuro a aclarar que no pretendo alguna fundamentación epistemológicamente última de la geometría. Con frecuencia se asocia a la concepción relacional alguna posición fenomenalista que intenta dar una base, en términos por ejemplo de datos de los sentidos, de la cual se deriven, o a la cual se reduzcan, las relaciones espaciales entre los objetos físicos. Estas posiciones fenomenalistas sostienen algún tipo de experiencias privilegiadas que son epistemológicamente fundamentales. Por mi parte, y para decirlo de alguna manera, sólamente mantengo una base "empírica", en el sentido de que los conceptos primitivos del sistema axiomático propuesto encuentran *ejemplificaciones* en las experiencias ordinaria y científica, pero sin considerar a éstas como experiencias epistemológicamente intachables. No obstante, lo anterior no significa que los modelos del sistema sean descripciones empíricas de sistemas cinemáticos de partículas. Más bien considero que dichos modelos son conceptuaciones idealizadas que se aproximan a los sistemas reales, concretos, a los que se aplican, a sistemas espaciales de cuerpos.

El concepto de cuerpo es cercano al concepto de *res extensa* de Descartes, es decir, los cuerpos se conciben intuitivamente como entidades extensas en tres dimensiones. Los cuerpos como entidades extensas son radicalmente distintos a las entidades que constituyen el universo de discurso de la geometría euclideana ordinaria: los puntos; puesto que, como se sabe, éstos son entidades ideales inextensas. De esta manera es más natural y *realista* partir del concepto de cuerpo que del de punto; no obstante, para hacer física, resulta más fructifero, como ha sido probado desde Newton, considerar a la masa de los cuerpos y no su extensión como una propiedad básica. Por mi parte, desde el punto de vista ontológico, considero más básico partir de los cuerpos, como entidades materiales tridimensionales, que de "partículas puntuales" físicas. Para consideraciones espaciales creo que es suficiente idealizar a los cuerpos tomándolos como objetos materiales que son tan pequeños que es posible ignorar sus dimensiones laterales en comparación con las distancias que los separan unos de otros. Cuando se pasa de la geometría a la dinámica, es posible partir de esta ontología de cuerpos, geométricamente pensados como sólidos, y asociarles ya no su extensión, sino su centro de masa como propiedad *física* fundamental.

Notas.

1. En Mundy [1983] se encuentra una interesante discusión sobre las diferencias entre las teorías absoluta y relacional del espacio físico.

2. Por un conjunto regular abierto se entiende un conjunto de puntos que coincide con el interior de su clausura y por un conjunto regular cerrado se entiende un conjunto de puntos que coincide con la clausura de su interior. Cf., p. ej., Tarski [1929].

CAPITULO III.

FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRIA DE SOLIDOS.

Existen al menos dos vías alternativas para una formulación axiomática no estándar de la geometría de sólidos, es decir, sistemas que excluyen de sus conceptos primitivos al concepto de punto. Una primera consiste en definir el concepto de punto, y otros conceptos geométricos como el de "estar entre" o equidistancia, a partir de un conjunto de objetos no definidos, como los individuos, y conceptos mereológicos y topológicos, para después mostrar que el sistema geométrico así derivado es equivalente a la geometría euclideana ordinaria. Tarski, en [1929], con el único propósito de ofrecer una fundamentación de la geometría de sólidos, sigue este primer camino. El sistema de Tarski cuenta con los conceptos indefinidos de la relación de parte de un todo, en un universo de discurso de individuos, y de esfera. Con base en estos conceptos, y a través de una serie de definiciones, deriva los conceptos geométricos de punto y equidistancia de dos puntos respecto de uno tercero para, posteriormente, postular que el sistema obtenido satisface los axiomas de la geometría euclideana ordinaria de tres dimensiones y que la clase de los puntos interiores de un sólido es un conjunto (no vacío) regular abierto. Aunque esta vía, ciertamente, representa una forma no estándar de construcción geométrica recupera, en última instancia, los conceptos ordinarios de la geometría euclideana, en particular, el de punto. La otra vía renuncia del todo al concepto de punto, tanto dentro de sus conceptos primitivos como de los derivados, y se aparta más que la anterior de la formulación ordinaria de la geometría euclideana tridimensional. Por este segundo camino se puede partir de conceptos de la mereología y la topología para obtener conceptos adecuados de sólido y, por ejemplo, de equidistancia. Por mi parte adopto esta segunda vía. Usando un concepto derivado de átomo, como una entidad indivisible pero no inextensa, pretendo derivar, aplicando conceptos topológicos, un concepto análogo al ordinario de sólido, para después formular relaciones espaciales entre los sólidos que sean lo suficientemente ricas como para poder describir las posiciones relativas de un conjunto finito de sólidos. Lo que pretendo es obtener una estructura geométrica suficiente para interpretar los hechos espaciales de la mecánica clásica de partículas en términos de posiciones relativas.

Por otro lado, no es necesario asociar a una teoría relacional del espacio una geometría de sólidos. En [1983], Mundy parte de la noción de partícula puntual, en el sentido de la física clásica, y como concepto geométrico primitivo elige el de producto interno, considerado como una función ternaria con rango en los números reales. De acuerdo con Mundy, esta base axiomática es suficiente para obtener tanto la geometría espacial de Euclides como la geometría espacio/temporal de Minkowski; asimismo, pretende que su versión relacional de la geometría euclideana es equivalente a una absoluta,[1] en el sentido de que ambas tienen el mismo poder expresivo y, además, que las relaciones que usa en su sistema tienen un correlato empírico, esto es, son medibles efectivamente por los procedimientos usuales. Nuestra elección evita tomar como concepto indefinido un concepto geométrico tan elaborado como el de producto interno y, por ello, pretende ir más a la base de una geometría no ordinaria, que se ajuste a una concepción relacional del espacio.

Suppes, en [1972], ofrece un sistema puramente mereológico el cual, aunque expresamente incompleto, se propone como una base para obtener una geometría de sólidos. Yo utilizo aquí este sistema de Suppes de manera substancial. De hecho, los conceptos mereológicos primitivos son los estándar, los de cuerpo y "parte de"; los conceptos derivados son casi iguales, excepto que yo agrego el concepto definible de manera obvia de "parte propia de" y elimino algunos que no requiero; los axiomas de la definición de "estructura finita de cuerpos" son asimismo los de Suppes, menos algunos que considero innecesarios. El desarrollo posterior a esa definición del sistema aquí presente es ajeno a Suppes.

La definición de "estructura finita de cuerpos" postula solamente un número finito de cuerpos, y así conlleva una concepción finitista del universo, a diferencia de la concepción infinitista de la teoría absoluta del espacio. Además, los dos últimos axiomas de esa definición involucran una concepción atomista de los cuerpos como entidades materiales, implican que los cuerpos tienen un número finito de partes, lo cual significa que hay partes simples, sin componentes; estos axiomas pueden considerarse, como Suppes anota, como axiomas generales del atomismo abstracto.

Ahora procedo a presentar el sistema geométrico propuesto. Los conceptos merológicos primitivos son dos: un conjunto de cuerpos $\mathcal{C}$ y una relación binaria π en $\mathcal{C}$ de "parte de"; si X y Y son cuerpos, X π Y significa que X es parte de Y. Primero especifico una serie de conceptos mereológicos derivados.

D1. Sean X y Y cuerpos. X = Y si y sólo si para todo cuerpo Z, Z π X si y sólo si Z π Y.

D2. El cuerpo X es una *parte propia* del cuerpo Y si y sólo si X π Y y X no es el mismo que Y.

D3. El cuerpo X es una *parte mínima* o *átomo* del cuerpo Y si y sólo si X π Y y no hay un cuerpo Z tal que Z sea parte propia de X.

D4. Los cuerpos X y Y están *separados* si y sólo si no existe un cuerpo Z tal que Z π X y Z π Y.

D5. Si Z π X y Y π X entonces el cuerpo X es una *cubierta* de los cuerpos Z y Y.

D6. El cuerpo X es una *cubierta mínima* de los cuerpos Z y Y si y sólo si X es una cubierta de Z y Y, y para todo W, si W es cubierta de Z y Y entonces X π W.

D7. Si el cuerpo X es una cubierta mínima de los cuerpos Z y Y entonces la *suma* de Z y Y, S(Z, Y), es igual a X.

D8. Sean $X_1, \ldots, X_n$ partes de Y y sea que $S(X_1, \ldots, X_n)$ existe y es igual a Y, entonces $\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ es una *disección finita* de Y.

Ahora estamos en posición de introducir los sistemas mereológicos de interés, definiendo el predicado conjuntista "es una estructura finita de cuerpos". La definición tiene cuatro axiomas. El primero es un axioma estructural; establece las propiedades formales de la relación π. El segundo postula la existencia de sumas de cuerpos. La existencia de átomos, en número finito, de los cuerpos es postulada por los dos últimos axiomas. Así,

DEFINICION I. $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C}, \pi \rangle$ es una estructura finita de cuerpos si y sólo si $\mathbb{C}$ es un conjunto finito y no vacío de cuerpos, π es una relación binaria en $\mathbb{C}$ y para toda X, Y, Z y W en $\mathbb{C}$:

(1) $X \pi X$; $X \pi Y$ y $Y \pi X$ si y sólo si $X = Y$; si $X \pi Y$ y $Y \pi Z$ entonces $X \pi Z$.

(2) Si X es una parte propia de Y, entonces existe un cuerpo Z tal que S(X, Z) = Y.

(3) Todo cuerpo X contiene una parte mínima.

(4) Todo cuerpo X tiene una disección finita en átomos. (Si X es un cuerpo atómico, su disección finita es igual a $\langle X \rangle$.)

Aplicando nociones topológicas a los anteriores conceptos mereológicos derivaré una serie de conceptos que posibilitan definir el concepto de sólido como un conjunto regular cerrado de átomos. Primero defino una base topológica para los cuerpos en términos de vecindades de átomos.

D9. Sea V una familia de subconjuntos $U_1, \ldots, U_k$ de partes de un cuerpo X. V es una *base de vecindades* de X si para todo átomo Y, Z de X:

(i) si Y es distina de Z entonces existen U_i y U_j en V tales que $Y \in U_i$, $Z \in U_j$ y $U_i \cap U_j = \phi$.

(ii) Si $Y \in U_i \cap U_j$ y U_i y $U_j \in V$ entonces hay un conjunto $U_k \in V$ tal que $Y \in U_k$ y $U_k \subset U_i \cap U_j$.

D10. Sea X un elemento de la disección finita en átomos de Y. Todo subconjunto Vx de partes de Y que contienen al menos un conjunto $U \in V$ tal que $X \in U$ se llama una *vecindad* de X.

D11. Un conjunto G de partes de un cuerpo X que es una vecindad de cada uno de sus átomos se llama *abierto*.

El siguiente teorema justifica la definición de la base topológica de un cuerpo en términos de vecindades ya que muestra que los conjuntos abiertos constituyen una topología en el sentido usual. Como un cuerpo X no es un conjunto, en la enunciación del teorema considero no a X sino al conjunto de sus partes Par(X).

TEOREMA I. Sea $X \in \mathbb{C}$ y sea O la clase de los conjuntos abiertos de X. Entonces

(i) $\bigcup_{i=1}^{n} G_i \in O$, si cada $G_i \in O$, con $i = 1, \ldots, n$

(ii) $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in O$, si cada $G_i \in O$, con $i = 1, \ldots, n$

(iii) ϕ y Par(X) $\in$ O.

Prueba. De (i). Sea Y un elemento arbitrario de la disección finita en átomos del cuerpo X y sea Y mismo un elemento de la unión de los G_i abiertos de X. Por hipótesis cada G_i es una vecindad de cada uno de sus átomos. Luego, para cada k, G_k es una vecindad de Y, y como los elementos de G_k están en la unión de los G_i abiertos, esta unión es una vecindad de Y, por lo cual es abierta. De (ii). Sea Y un elemento arbitrario de la disección finita en átomos del cuerpo X y sea Y mismo un elemento de la intersección de los G_i abiertos de X. La condición (ii) de D9 implica que existe $G_k \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_i$, el cual es una vecindad de Y, es decir, esta intersección contiene una vecindad de Y, por ello es abierta. De (iii). $\phi \in O$ es inmediata vía reducción al absurdo. Ahora Par(X) $\in$ O. La condición (i) de D9 implica que para cualquier átomo Y de X existe una U de V tal que U es una vecindad de Y ajena a cualquier otra vecindad de un átomo Z distinto de Y. Pero U está en Par(X), por lo que Par(X) es abierto.■

D12. Sea que $S(X_1, X_2) = Y$. Llamamos a X_1 y X_2 cada uno el *complemento* del otro, escribiendo X' para el complemento de X.

D13. Sea Y π X y sea F un conjunto de partes de Y. Si F es abierto, entonces Par(Y') es *cerrado*.

D14. Sea Y π X. La *clausura* de Y, C(Y), es la intersección de todos los conjuntos cerrados de X que contienen a Y (i.e., es el conjunto más pequeño que contiene a Y).

D15. Sea Y π X. El *interior* de Y, I(Y), es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en Y (i.e., es el conjunto abierto más grande contenido en Y).

D16. Un *sólido* es la clausura del interior de un cuerpo. (i.e., si X es un cuerpo, C(I(X)) es un sólido.)

Hasta aquí el desarrollo del sistema mereológico. Lo que sigue, una vez definida la noción de sólido, es introducir una estructura espacial para un universo de sólidos. Como las clases de los cuerpos y de los sólidos son extensionalmente equivalentes, los conceptos que he aplicado a los cuerpos los aplicaré a los sólidos. En particular, substituyo en la Definición II a la clase de los cuerpos por la de los sólidos, S, aplicándole el predicado "es una estructura finita de cuerpos" de la Definición I. Para introducir el predicado conjuntista "es una estructura finita espacial de sólidos" agrego a los conceptos primitivos mereológicos un concepto cualitativo espacial de "proximidad" y derivo de él un concepto de equidistancia.

Así, pues, sea P una relación (ternaria) primitiva en S de proximidad tal que para tres sólidos separados por pares A, B y C en S, P(A, B, C) significa que A está más próximo a B que C. En términos de P se define un concepto (ternario) comparativo de equidistancia.

D17. A y B *equidistan respecto de* C si y sólo si ni P(A, C, B) ni P(B, C, A), en símbolos E(A, B, C).

El siguiente teorema muestra que la relación E es una relación de equivalencia en $\mathcal{S}$.

TEOREMA II. La relación E es reflexiva, simétrica y transitiva.

Prueba. Como las demostraciones de la reflexividad y la simetría son obvias, sólo me ocuparé de la transitividad. Nuestras hipótesis son E(A, B, C) y E(B, D, C). De la primera, se obtiene, por definición, que no P(A, C, B) y, de la segunda, que no P(B, C, D), de donde, obtenemos no P(A, C, D). Análogamente de las hipótesis se deduce que no P(D, C, A). Y, por definición, de estas dos últimas afirmaciones tenemos que E(A, D, C).■

Tenemos ahora puesto el escenario necesario para introducir por definición conjuntista los sistemas finitos de sólidos "montándolos" en las estructuras finitas de cuerpos. La relación que hay entre ambos tipos de sistemas es una de teorización, pero esta noción no la presento sino hasta el siguiente capítulo.

DEFINICION II. $\mathfrak{S}$ = $\langle \mathcal{S}, \pi, P, E \rangle$ es una estructura finita espacial de sólidos si y sólo si

(1) $\langle \mathcal{S}, \pi \rangle$ es una estructura finita de sólidos

(2) P es la relación de estar más próximo que en $\mathcal{S}$ tal que para todo sólido A, B, C y D en $\mathcal{S}$:

No es el caso que P(A, B, A); si P(A, B, C) entonces no P(C, B, A); si P(A, B, C) y P(D, B, A) entonces $P(D, B, C)$.

(3) E es la relación de equidistancia en $\mathcal{S}$.

Es un hecho importante el que para sólidos no equidistantes, la relación P de proximidad es una relación de conexión en $\mathcal{S}$. Esto lo enuncia el siguiente teorema cuya prueba omito por ser inmediata.

TEOREMA III. Sean A, B y C elementos de $\mathcal{S}$ separados por pares. o bien $E(A, B, C)$ o bien $P(A, C, B)$ o bien $P(B, C, A)$.

La importancia de este teorema radica en que conecta a todo par de sólidos con uno tercero, es decir, o ambos guardan la misma distancia respecto del tercero o uno está más próximo al otro respecto del tercero.

Es conveniente en este momento mostrar la consistencia del sistema propuesto exhibiendo un modelo que satisface los axiomas. Primero expondré el modelo para después explicar cómo son satisfechos los axiomas bajo él.

Sea $\langle \mathbb{Z}^*, \subset, R\rangle$ una estructura tal que

(1) $\mathbb{Z}^*$ es una familia finita de subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}$, es decir, los números enteros;

(2) $\subset$ es la relación de inclusión en el dominio $\mathbb{Z}^*$; y

(3) para toda X, Y, Z en $\mathbb{Z}^*$

$R(X,Y,Z)$ si y sólo si $|X\hat{} - Y\hat{}| < |Z\hat{} - Y\hat{}|$,

donde , p. ej., $X\hat{}$ denota el número cardinal del conjunto X.

Si hacemos corresponder $\mathcal{C}$ con $\mathbb{Z}^*$, π con $\subset$ y P con R, encontramos lo que sigue. El axioma estructural I.1 se satisface por las propiedades de $\subset$. El I.2 afirma que si X es un subconjunto propio de Y existe un conjunto Z que unido con X es igual a Y, esto es, que existe el conjunto complemento (relativo) de X, lo cual es cierto. El axioma I.3 dice que todo conjunto de enteros contiene un conjunto unitario, lo cual se cumple incluso para conjuntos singulares por la propiedad de reflexividad de la relación de inclusión. Que todo conjunto de enteros tiene una disección finita en conjuntos unitarios es afirmado por I.4, lo cual es verdadero por la existencia de particiones en conjuntos singulares. El axioma II.2 se satisface puesto que la relación R es irreflexiva, antisimétrica y transitiva, al igual que P. Por último, a la relación de equidistancia E le corresponde la relación $|X^\wedge - Y^\wedge| = |Z^\wedge - Y^\wedge|$, la cual es, obviamente, una relación de equivalencia.

Con base en el desarrollo anterior afirmo que: *las relaciones de proximidad y equidistancia son suficientes para expresar las posiciones relativas de un conjunto finito de sólidos*. O dicho en otras palabras, dado un conjunto finito de sólidos, con al menos tres elementos, con las nociones de proximidad y equidistancia es posible extraer una serie de datos de la forma P(A, B, C) y E(A, C, B), los cuales son suficientes para expresar las posiciones relativas de los sólidos en el sistema. Esta afirmación puede justificarse mostrando que las relaciones espaciales que guardan un conjunto de sólidos expresables por dichos conceptos de distancia pueden representarse matemáticamente de manera adecuada. Intuitivamente hablando tal representacion iría como sigue. Dado un modelo de la estructura espacial finita de sólidos, éste se puede "proyectar" en el espacio euclideano tridimensional $\mathbb{E}^3$ (i.e., $\mathbb{R}^3$ dotado de una métrica) de manera tal que las imágenes proyectadas de los sólidos guarden entre sí las mismas relaciones espaciales que las que guardan entre sí los sólidos mismos. En la imagen proyectada en $\mathbb{E}^3$ son expresables las posiciones relativas de las imágenes correspondientes a los sólidos del modelo y, de ahí, igualmente las posiciones relativas de los sólidos mismos, puesto que dicha proyección hace corresponder a cada sólido una y sólo una imagen.

Definir este tipo de proyecciones de los dominios de los sólidos en términos formales equivale a definir una función de representación de los modelos en un dominio matemático adecuado. Para probar que una función de representación es correcta se tiene que demostrar que las relaciones que guardan entre sí los elementos de los dominios de los modelos se *preservan* entre las imágenes correspondientes en el dominio matemático. Probar esto es probar que *existe una representación* en el sentido matemático. Además de demostrar que existe una función de representación, hay que mostrar la medida en que esa representación es arbitraria, y ésto se hace demostrando bajo qué condiciones la función es *única*. Resolver ambos problemas es lo mismo que probar un teorema que se conoce como *teorema de representación*.

Antes de proceder a explicar en qué consiste un teorema de representación para los modelos del sistema espacial de sólidos, consideraré cómo puede extenderse para obtener una geometría euclideana tridimensional para espacios discretos. Una forma de hacerlo consiste en definir los conceptos de "estar entre", como una relación ternaria, y de equidistancia, como una relación cuaternaria. Como Tarski ha mostrado (Cf. [1959], p. 17), con base en este par de conceptos es posible definir todas las relaciones geométricas euclideanas ordinarias. En el sistema de Tarski dichos conceptos son primitivos, sin embargo, pueden derivarse del concepto de "proximidad". A su vez, puede uno agregar los axiomas de Tarski para la geometría euclideana elemental. Hay dos modificaciones al sistema de Tarski que considero necesarias. La primera consiste en cambiar los axiomas sobre las dimensiones inferior y superior por unos adecuados para espacios tridimensionales, puesto que los de Tarski están diseñados para la geometría plana. La segunda modificación involucra una restricción importante; consiste en eliminar el axioma de continuidad. Dicho intuitivamente, ese axioma postula que, bajo ciertas condiciones, para cualesquier par de puntos existe uno tercero entre ellos y, por ello, implica que el espacio es denso. En concordancia con la concepción relacional del espacio, aquí postulo solamente un espacio finito y discreto. Con ello no obtenemos una estructura isomorfa a $\mathbb{E}^3$, pero sí una que puede incrustarse en $\mathbb{E}^3$, i.e., que es homomorfa a $\mathbb{E}^3$.

Así, pues, indico adelante la extensión de la estructura finita espacial de sólidos definiendo algunos conceptos geométricos y postulando axiomas apropiados.

Sea $[A]_B$ la clase de equivalencia de los sólidos X que son equidistantes con A respecto de B.

D18. B *está entre* A y C (en símbolos: $\beta(A,B,C)$) si y sólo si $P(B,C,A)$ y para todo $X \in [A]_C$, distinto de A, $P(B,A,X)$.

D19. Los sólidos A, B y C son *colineales* (en breve: $\alpha(A,B,C)$) si y sólo si $A = B$ o $A = C$ o $B = C$ o $\beta(B,A,C)$ o $\beta(A,B,C)$ o $\beta(A,C,B)$.

D20. Los sólidos A, B y C son *simétricos* (brevemente: $\lambda(A,B,C)$) si y sólo si para todo sólido X, $\alpha(A,B,X)$ y $E(A,X,B)$ si y sólo si $X = A$ o $X = C$.

D21. $\delta(A,B;C,D)$, i.e., A *es tan distante de* B *como* C *lo es de* D, si y sólo si existen sólidos X y Y tales que $\lambda(A,X,C)$ y $\lambda(B,X,Y)$ y $E(Y,D,C)$.

Los axiomas son los siguientes:

Ax1. Identidad de "estar entre".

Para toda X, Y, si $\beta(X,Y,X)$ entonces $X = Y$.

Ax2. Transitividad de "estar entre".

Para toda X, Y, Z y W, si $\beta(X,Y,W)$ y $\beta(Y,Z,W)$ entonces $\beta(X,Y,Z)$.

Ax3. Conexidad de "estar entre".

Para toda X, Y, Z y W, si $\beta(X,Y,Z)$ y $\beta(X,Y,W)$ y X es distinto de Y entonces $\beta(X,Z,W)$ o $\beta(X,W,Z)$.

Ax4. Reflexividad de la equidistancia.

Para toda X, Y, $\delta(X,Y;Y,X)$.

Ax5. Identidad de la equidistancia.

Para toda X, Y y Z, si $\delta(X,Y;Z,Z)$ entonces $(X = Y)$.

Ax6. Transitividad de la equidistancia.

Para toda X, Y, Z, U, V y W, si $\delta(X,Y;Z,W)$ y $\delta(X,Y;V,W)$ entonces $\delta(Z,U;V,W)$.

Ax7. Axioma de Pasch.

Para toda T, X, Y, Z y U, hay una V tal que si $\beta(X,T,U)$ y $\beta(Y,U,Z)$ entonces $\beta(X,V,Y)$ y $\beta(Z,T,V)$.

Ax8. Axioma de Euclides.

Para toda T, X, Y, Z y U, existen V y W tales que si $\beta(X,U,T)$ y $\beta(Y,U,Z)$ y X es distinto de U entonces $\beta(X,Z,V)$ y $\beta(X,Y,W)$ y $\beta(V,T,W)$.

Ax9. Axioma de los cinco segmentos.

Para X, $X\hat{}$, Y, $Y\hat{}$, Z, $Z\hat{}$, U, $U\hat{}$, si $\delta(X,Y;X\hat{},Y\hat{})$ y $\delta(Y,Z;Y\hat{},Z\hat{})$ y $\delta(X,U;X\hat{},U\hat{})$ y $\delta(Y,U;Y\hat{},U\hat{})$ y $\beta(X,Y,Z)$ y $\beta(X\hat{}, Y\hat{}, Z\hat{})$ y X es distinto de Y entonces $\delta(Z,U;Z\hat{},U\hat{})$.

Ax10. Axioma de construcción de segmentos.

Para toda X, Y, U y V, existe una Z tal que $\beta(X,Y,Z)$ y $\delta(Y,Z;U,V)$.

Ax11. Axioma de dimensión inferior.

Existen X, Y, Z y W tales que no $\beta(X,Y,Z)$ y no $\beta(X,W,Y)$ y no $\beta(Y,W,Z)$ y no $\beta(X,W,Z)$ y $\delta(X,Y;X,Z)$ y $\delta(Y,Z;Y,X)$ y $\delta(W,X;W,Y)$ y $\delta(W,Y;W,Z)$.

Ax12. Axioma de dimensión superior.

Para toda X, $X\hat{}$, Y, U, V, W y $W\hat{}$, si $\delta(X,U;X,V)$ y $\delta(X\hat{},U;X\hat{},V)$ y $\delta(W,U;W\hat{},V)$ y $\delta(Y,U;Y,V)$ y $\beta(X,Y,X\hat{})$

y U es distinta de V entonces $(X = X^\wedge)$ o $(W = W^\wedge)$ o $\beta(X,Y,X^\wedge)$ o $\beta(W,Y,W^\wedge)$.

Vamos ahora al teorema de representación. Suppes, en [1972], sugiere que las técnicas de demostración de teoremas de representación que se usan en los casos unidimensionales de medición fundamental de cantidades físicas, pueden aplicarse a estructuras tridimensionales correspondientes a espacios geométricos. Siguiente este señalamiento, y utilizando la elaboración de él debida a Mundy [1986], adoptaré la estrategia general usada en la teoría de la medición.

La aplicación de las técnicas de demostración de representaciones se extrae por analogía de casos de medición fundamental de magnitudes físicas, por lo que utilizaré el ejemplo de la medición fundamental de la masa para mostrar la analogía. Simplificando un tanto, en la medición fundamental de la masa se define un sistema relacional empírico, constituido por un conjunto finito de objetos medianos *O*, una relación binaria definida en *O*, *R*, y una operación binaria o cerrada en *O*. Para objetos *x* y *y* en *O*, *xRy* se interpreta como "*x* es más pesado que y o igual de pesado que *y*" y $x \circ y$ significa la concatenación física de los objetos *x* y *y*. Por medio de un procedimiento empírico, por ejemplo, observando el comportamiento de una balanza de brazos iguales, se establecen los pesos relativos de los objetos de un conjunto dado, y se sistematizan los datos cualitativos obtenidos de dichas comparaciones expresandolos en términos de la relación *R*, ordenándose los cuerpos de acuerdo al orden que arroja en ellos la relación R. En este procedimiento empírico a la operación de concatenación o le corresponde el hecho de colocar dos objetos en el mismo platillo de la balanza. La operación o se introduce para expresar la propiedad de la masa de ser una magnitud extensiva, esto es, que la masa de dos cuerpos concatenados es igual a la suma de las masas de los cuerpos individualmente tomadas. Nótese que dentro de las comparaciones de los pesos relativos de los objetos, podemos incluir comparaciones de objetos concatenados. Con O, R y o se puede definir un sistema empírico $\langle O, R, \circ \rangle$ introduciendo un predicado conjuntista como "es una estructura finita de medición extensiva" estableciendo una serie de axiomas que especifican propiedades formales de R y o, por ejemplo que R es transitiva o que o es asociativa con respecto a R. Para obtener una representación en un dominio matemático apropiado del anterior sistema empírico se requiere encontrar un conjunto númerico adecuado, y una relación así como una operación dadas en ese dominio igualmente adecuadas. En este caso, el conjunto en cuestión son los números reales positivos $\mathbb{R}^+$, la relación binaria en los reales positivos de ser mayor o igual que y la operación de adición igualmente en los reales positivos. Con estos elementos se especifica una estructura númerica extensiva $\langle \mathbb{R}^+, \geq, + \rangle$, la cual se usa como dominio matemático para la representación. Después se define una función m, precisamente de representación, de O a $\mathbb{R}^+$ tal que preserve la relación

R, es decir, si xRy entonces $m(x) \geq m(y)$, y exprese la propiedad de extensividad de la masa, esto es, que $m(x \circ y) = m(x) + m(y)$. Si se demuestra que una función m de O a $\mathbb{R}^{*}$ cumple las dos condiciones anteriores se demuestra que existe una función de representación de las estructuras finitas de medición extensiva, puesto que dicha función es un homomorfismo del sistema empírico extensivo al sistema numérico extensivo. (En este caso no se busca un isomorfismo puesto que dos objetos pueden tener la misma masa y así coincidir sus valores bajo m.).

El conjunto numérico $\mathbb{R}^{+}$ es una escala continua en la que se expresan los valores numéricos de las masas de los objetos. Qué valores realmente se asignan en este continuo numérico como los valores de las masas de los objetos involucra algún grado de arbitrariedad. Que esta arbitrariedad existe puede verse fácilmente por el hecho de que para un mismo sistema numérico pueden existir dos, o más, funciones de representación. En el caso de la medición de la masa, por ejemplo, se tienen dos funciones distintas de acuerdo a que unidad de medida se eliga: gramos o libras. El problema que involucra la existencia de más de una función de representación se resuelve mostrando que la escala de una de las funciones puede transformarse a la escala de otra de las funciones, y así pasar de los valores asignados bajo una escala a los valores asignados bajo la otra, por medio de una operación matemática. En el caso de la medición de la masa, las transformaciones adecuadas son transformaciones de similitud, esto es, transformaciones que se obtienen multiplicando una de las escalas por un número real positivo. Demostrar que para una función de representación dada existe un tipo de transformación admisible es demostrar que esa función es única salvo ese tipo de transformación.

Los rasgos de lo que he dicho que quiero enfatizar son los siguientes. Se cuenta con una base observacional que consiste sólo de un conjunto finito de hechos que se expresan en terminos de relaciones estructurales o, en otras palabras, la base observacional consiste en un conjunto finito de datos cualitativos acerca de las relaciones de orden que guardan los objetos del dominio empírico. A partir de esa base observacional se asignan valores numéricos, a través de la función de representación, en una escala continua. De este continuo numérico sólo unos cuantos "puntos" son asignados como valores. La función de representación pretende reflejar en su imagen en el continuo numérico relaciones estructurales del dominio empírico o, mejor, la estructura del dominio. Al hacer esto, no se está negando, por un lado, que el dominio empírico tenga otras propiedades o relaciones que las que se están considerando en la representación, es decir, que el dominio empírico tenga más estructura que la que se está representando ni, por el otro lado, el sistema numérico que se está usando para la representación tenga más propiedades que las que se están utilizando en la misma.

Considerando a las estructuras finitas espaciales de sólidos como sistemas empíricos, por analogía de los anteriores rasgos, anoto que igualmente se cuenta con una base observacional que consiste en datos cualitativos acerca de relaciones espaciales entre sólidos, elementos del dominio de las estructuras; que asimismo se pretende reflejar esas relaciones espaciales en un conjunto numérico $\mathbb{R}^3$, aunque sólamente algunos "puntos" en él serán "ocupados" realmente, bajo una función de representación, como los valores numéricos de las posiciones de los sólidos; que son precisamente esas relaciones espaciales que se pretenden preservar, por la función de representación, en su imagen en $\mathbb{R}^3$, las que arrojan la estructura del espacio, es decir, las posiciones relativas de los sólidos, de acuerdo con una concepción relacional del mismo.

En el caso de las teorías de la medición son precisamente las funciones de representación lo que justifica hablar propiamente de medición y no meramente de una asignación numérica arbitraria. Las analogías anteriores nos posibilitan adoptar este enfoque propio de las teorías de la medición fundamental para justificar el hablar de *posiciones relativas de sólidos como estructuras espaciales* puesto que, como se verá adelante, los modelos de la estructura finita espacial de sólidos encuentran una representación, en el sentido anotado, en el espacio matemático euclideano.

Así, introduzco una estructura matemática adecuada en la que se representaran los modelos de la estructura finita espacial de sólidos, para después precisar una función de representación entre ellas. Para lo anterior, especifico las siguientes correspondencias: al dominio finito de sólidos S corresponde la potencia de $\mathbb{R}^3$, a la relación de "parte de" entre sólidos corresponde la relación de inclusión entre subconjuntos de $\mathbb{R}^3$; a la relación de proximidad entre sólidos P(A, B, C) le corresponde la relación en $\mathbb{R}^3$, $P^* = \langle\langle a_1, a_2, a_3\rangle, \langle b_1, b_2, b_3\rangle, \langle c_1, c_2, c_3\rangle \mid (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 < (c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2 + (c_3 - b_3)^2 \rangle$, donde, por ejemplo, con propósitos de la representación, $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ se definirá adelante como el vector representante de la imagen del sólido A en $Pot(\mathbb{R}^3)$; similarmente, a la relación de equidistancia entre sólidos E(A, B, C) le hacemos corresponder la relación en $\mathbb{R}^3$, $E^* = \langle\langle a_1, a_2, a_3\rangle, \langle b_1, b_2, b_3\rangle, \langle c_1, c_2, c_3\rangle \mid (a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2 + (a_3 - c_3)^2 = (b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2 + (b_3 - c_3)^2\rangle$, donde igualmente se usan los vectores representantes de las imágenes de los sólidos. Con estos componentes a la mano podemos enunciar la estructura numérica $\langle Pot(\mathbb{R}^3), \subset, P^*, E^*\rangle$, sobre la cual representaremos a las estructuras espaciales finitas de sólidos.

Para formular el teorema de representación, consideremos qué aserciones deben corresponder en la imagen de la función de representación a las aserciones en el dominio de dicha función. Las aserciones en cuestión son: para sólidos A, B y C, que $A \subset B$, que P(A,B,C) y que E(A,B,C). Luego, tenemos que: para la primera, que la imagen de A es parte de la imagen de B;

para la segunda, que la distancia entre la imagen de A y la imagen de B es menor que la distancia entre la imagen de C y la imagen de B; para la última, que la distancia entre la imagen de A y la de C es igual a la distancia entre la imagen de B y la de C. Precisamente este tipo de aserciones serán las que se prueben en el siguiente teorema. Divido el teorema, y su demostración, en dos afirmaciones: la existencia de la representación y la unicidad de la representación demostrada (el que la prueba resulte casi inmediata se debe al diseño de la estructura numérica).

TEOREMA DE REPRESENTACION.

Existencia de una representación.

Sea $\mathfrak{S} = \langle S, \pi, P, E\rangle$ una estructura espacial finita de sólidos. Entonces existe una función uno a uno (pero no sobre[2]) σ de $\mathfrak{S}$ a $\langle Pot(\mathbb{R}^3), \subset, P^*, E^*\rangle$ tal que

(1) si A π B entonces $\sigma(A) \subset \sigma(B)$

(2) si P(A, B, C) entonces $d(\sigma(A), \sigma(B)) < d(\sigma(C), \sigma(B))$

(3) si E(A, B, C) entonces $d(\sigma(A), \sigma(C)) = d(\sigma(B), \sigma(C))$, donde d(X, Y), por ejemplo, denota la distancia entre X y Y definida por la métrica estándar en un espacio vectorial.

Sea σ una función de S a $Pot(\mathbb{R}^3)$ tal que:

(i) si A es un átomo, entonces $\sigma(A) = \{\langle a_1, a_2, a_3\rangle_k\}$ tal que si A y B son átomos distintos, para cada $\langle a_1, a_2, a_3\rangle_i$ en $\sigma(A)$ y cada $\langle b_1, b_2, b_3\rangle_j$ en $\sigma(B)$, con i, j = 1,..., k, a_1 es distinto de b_1, a_2 es distinto de b_2 y a_3 es distinto de b_3.

(ii) si B es un cuerpo molecular, con n átomos, entonces

$\sigma(B) = \bigcup_{i=1}^{n} \langle\langle b_1, b_2, b_3\rangle_k\rangle_n$ tal que cada $\langle\langle b_1, b_2, b_3\rangle_k\rangle_i = \sigma(A)$, con A átomo de B y i = 1,...,n.

Prueba.

Primero, para los cuerpos atómicos en $\mathcal{S}$, σ es uno a uno por definición, y para cualquier cuerpo molecular A en $\mathcal{S}$, la función σ le asigna la unión de las imágenes de sus átomos, luego, σ es también uno a uno para él, puesto que dichos átomos son distintos de los átomos de otro cuerpo distinto de él, y de ahí, las imágenes entre sí son también distintas. Ahora, la prueba de (1). Supongamos que A π B. Si B es atómico, tenemos que A = B, y así B π B. Luego se sigue que $\sigma(B) \subset \sigma(B)$, puesto que son el mismo conjunto. Si B es molecular, sea $\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ su disección finita en átomos. Puesto que A π B, la disección finita en átomos de A = $\langle X_1, \ldots, X_m\rangle \subset \langle X_1, \ldots, X_n\rangle$, con $m \leq n$, y por lo tanto, $\sigma(A) = \bigcup_{j=1}^{m} \sigma(X_j) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \sigma(X_i) = \sigma(B)$.

Para demostrar (2) introduzco la noción de vector representante de la imagen de un sólido A bajo σ. Si $\sigma(A) = \langle\langle a_1, a_2, a_3\rangle_k\rangle$, su vector representante es igual a $\langle\langle \sum_{i=1}^{k} a_{1i}/k, \sum_{i=1}^{k} a_{2i}/k, \sum_{i=1}^{k} a_{3i}/k\rangle\rangle$ (i.e., el vector unitario del vector resultante de las medias de cada una de las coordenadas), y escribiré simplemente $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$. Dada la definición de P^*, de la hipótesis de (2), P(A, B, C), se obtiene

$$P^*(\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C))$$

$$= P^*(\langle a_1, a_2, a_3\rangle, \langle b_1 b_2, b_3\rangle, \langle c_1, c_2, c_3\rangle)$$

$$= (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 <$$

$$(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2 + (c_3 - b_3)^2$$

$$= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2} <$$

$$\sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2 + (c_3 - b_3)^2}$$

$= d(\sigma(A), \sigma(B)) < d(\sigma(C), \sigma(B))$.

De manera similar se demuestra (3). Por hipótesis, $E(A, B, C)$, luego obtenemos

$E^*(\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C))$

$= E^*(\langle a_1, a_2, a_3\rangle, \langle b_1, b_2, b_3\rangle, \langle c_1, c_2, c_3\rangle)$

$= (a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2 + (a_3 - c_3)^2 =$

$(b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2 + (b_3 - c_3)^2$

$$= \sqrt{(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2 + (a_3 - c_3)^2} =$$

$$\sqrt{(b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2 + (b_3 - c_3)^2},$$

$= d(\sigma(A), \sigma(C)) = d(\sigma(B), \sigma(C))$ ∎

Bajo qué tipo de transformaciones es única la función σ ? La arbitrariedad que conlleva la representación σ radica en la elección del origen de las coordenadas, la ubicación del vector nulo $\langle 0, 0, 0, \rangle$, en función del cual se asignan valores numéricos a los cuerpos de acuerdo a sus posiciones relativas. Un cambio en el origen de las coordenadas involucra un cambio en los valores numéricos asociados a los sólidos, pero no un cambio en sus posiciones relativas; éstas son invariantes a los cambios en el origen de las coordenadas. En lo que pueden variar dos funciones de representación dadas es en la ubicación en $\mathbb{R}^3$ de los sólidos, representada por valores numéricos, y ésto significa que en lo que varían es en la elección de la ubicación del vector nulo. De esta manera, lo que se requiere son transformaciones, de una representación a otra, que preserven las distancias entre los sólidos; y este tipo de transformaciones se pueden obtener, en el presente caso, transformando el origen de las coordenadas de una representacion al origen de las coordenadas de otra representación. En general, a las transformaciones que preservan distancias se les conoce como movimientos rígidos, definidas como sigue:

un *movimiento rígido* es una función f de E^3 sobre sí mismo que preserva las distancias en el sentido de que para toda p y p' en E^3, $d(p, p') = d(f(p), f(p'))$.

En el caso presente es suficiente un género particular de movimientos rígidos que llamaré traslaciones. Así, la estrategia de demostración de la unicidad de la representación consistirá en definir una función τ, de hecho una familia de funciones, de traslación y demostrar que ellas y sus inversas son movimientos rígidos. Lo que se demostrará, pues, es que la representación es única salvo ese género de movimientos rígidos.

Unicidad de la representación.

Sea $\mathfrak{S}$ una estructura finita espacial de sólidos. Entonces para cualquier par de funciones σ y σ' uno a uno de $\mathcal{S}$ a $Pot(\mathbb{R}^3)$ que satisfaga las condiciones (1)-(3) de la representación, existe una función τ de E^3 sobre sí mismo tal que para todo sólido A y B en $\mathcal{S}$

$$d(\tau(\sigma(A)),\ \tau(\sigma(B))) = d(\sigma'(A),\ \sigma'(B))$$

Prueba.

Sean r, s y t números reales. Una función $\tau_{r,s,t}$ de E^3 sobre sí mismo es una *traslación* si para todo $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ en $\mathbb{R}^3$,

$$\tau_{r,s,t}(\langle a_1, a_2, a_3\rangle) = \langle a_1 + r, a_2 + s, a_3 + t\rangle.$$

Hay que mostrar que las traslaciones son movimientos rígidos. Supongamos que $\sigma(A) = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $\sigma(B) = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ y que $\tau_{r,s,t}(\sigma(A)) = (\langle a_1 + r, a_2 + s, a_3 + t\rangle) = \sigma'(A)$ y $\tau_{r,s,t,}(\sigma(B)) = (\langle b_1 + r, b_2 + s, b_3 + t\rangle) = \sigma'(B)$. Por definición de la métrica estándar tenemos que

$d(\sigma'(A), \sigma'(B))$

$$= \sqrt{((a_1 + r) - (b_1 + r))^2\ ((a_2 + s) - (b_2 + s))^2 + ((a_3 + t) - (b_3 + t))^2}$$

$$= \sqrt{((a_1 + r) + (-b_1 + -r))^2 + ((a_2 + s) + (-b_2 + -s))^2 + ((a_3 + t) + (-b_3 + -t))^2}$$

$$= \sqrt{((a_1 + -b_1) + (r + -r))^2 + ((a_2 + -b_2) + (s + -s))^2 ((a_3 + -b_3) + (t + -t))^2}$$

$$= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

$= d(\sigma(A), \sigma(B))$.

Para mostrar que la inversa de una traslación,

$\tau^{-1}_{r,s,t}$, es también un movimiento rígido, basta mostrar que es igual a $\tau_{-r,-s,-t}$. Así,

$\tau_{-r,-s,-t}(\tau_{r,s,t,}(\langle a_1, a_2, a_3\rangle))$

$= \tau_{-r,-s,-t}(\langle a_1+ r, a_2+ s, a_3+ t\rangle) = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, de donde $\tau_{r,s,t}$ o $\sigma_{-r,-s,-t}$ = I ("o" denota la composición de funciones e "I" la función identidad). Igualmente,

$\sigma_{r,s,t}(\sigma_{-r,-s,-t}(\langle a_1, a_2, a_3\rangle))$

$= \tau_{r,s,t}(\langle a_1 - r, a_2 - s, a_3 - t\rangle) = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, de donde $\sigma_{-r,-s,-t}$o $\sigma_{r,s,t}$ = I, y por lo tanto $\sigma_{-r,-s,-t}$ = $\sigma^{-1}_{r,s,t}$■

Notas.

1. La geometría absoluta es aquella geometría base e independiente de las geometrías euclideanas y no euclideanas. Véase, por ejemplo, Borsuk y Szmielew [1960].

2. Para que la función σ pudiera ser "sobre" tendríamos que suponer la existencia de un continuo de sólidos. La concepción clásica del espacio físico sí supone un continuo no numerable de puntos, y así mantiene un isomorfismo entre el conjunto de los puntos físicos y $\mathbb{R}^3$.

CAPITULO IV.

EL VINCULO TEORICO ENTRE LA GEOMETRIA DE SOLIDOS Y LA MECANICA CLASICA DE PARTICULAS.

Todos los físicos y filósofos de la ciencia asienten en que hay una estrecha conexión entre la geometría euclideana y la ciencia clásica del movimiento de los cuerpos. Para la concepción clásica tal conexión consiste en que los movimientos de los objetos físicos tienen lugar en un espacio tridimensional constituído por puntos materiales, y este espacio es isomorfo al espacio matemático euclideano. Por ello, es frecuente que los filósofos de la ciencia hablen de una geometría *física*, en el sentido de una geometría euclideana interpretada de tal manera que a los puntos geométricos le corresponden, uno a uno, los puntos espaciales, y que la estructura geométrica se conserva en el espacio de puntos.

Surge, dada esa conexión, la cuestión de dar cuenta de ella en términos de una geometría de sólidos, sin puntos, para ofrecer igualmente una alternativa a la concepción clásica del vínculo entre la geometría euclideana y la mecánica clásica. En este capítulo propongo una formulación conjuntista del vínculo entre la mecánica clásica de partículas y la estructura espacial de sólidos presente. Al establecer este vínculo pretendo aportar apoyo a la concepción relacional, puesto que, como se verá, con él se logra hacerla concordar, en un plano axiomático, con la física clásica. El plan de exposición es el siguiente. Primero esclarezco qué tipo de conexión existe entre la geometría euclideana y la cinemática clásica de partículas, y de ahí la mecánica clásica de partículas, sosteniendo que primariamente es un vínculo semántico o interpretativo; después discuto el papel que juega el espacio o, más bien el parámetro espacial, en varias axiomatizaciones propuestas de la mecánica clásica de partículas para establecer la diferencia que se encuentra entre ellas y una axiomatización que adopte una concepción relacional del espacio; para posteriormente, y por último, proponer una modificación de alguna de esas axiomatizaciones, un subproducto resultante de este trabajo, para formular en relación a ella el vínculo interpretativo mismo, en términos estructuralistas.

Los filósofos estructuralistas de la ciencia han propuesto un concepto general de relaciones entre teorías al que han llamado vínculo interteórico (véase, Balzer, Moulines y Sneed [1983]). Moulines, en [1984], se ocupa de vínculos interteóricos de presuposición. De acuerdo a él, existe un vínculo de presuposición entre un par de teorías T y T' cuando, digamos, T es epistemológica y metodológicamente anterior a T', lo cual significa que no podemos saber cuando aplicar correctamente la teoría T' a menos que sepamos cuando aplicar correctamente la teoría T. Dicho en términos de la teoría de modelos, si T es una teoría presupuesta por T' entonces para aplicar empíricamente una realización posible de T' debemos *suponer la validez de algún modelo de* T. Claramente, la geometría euclideana es una teoría presupuesta, en este sentido, por la mecánica clásica de partículas. Siendo ésto así, debe existir una conexión *semántica* entre ambas teorías en virtud de la cual existe este tipo de dependencia epistemológica y metodológica de la mecánica clásica de partículas respecto de la geometría euclideana. Este vínculo semántico puede enunciarse, en general, como una relación entre los modelos de la teoría presupuesta (puesto que su validez se supone) y los modelos potenciales de la teoría no presupuesta (cuya validez no debe suponerse); en nuestro caso particular, entre los modelos de la geometría de sólidos y los modelos potenciales de la mecánica clásica de partículas.

Debido a la naturaleza híbrida de los vínculos semánticos no pueden considerarse como "axiomas interpretativos" (véase Moulines [1985]) ni como "postulados semánticos" (véase, Bunge [1967]) de la teoría no presupuesta. En tanto relaciones semánticas, los vínculos interpretativos se dan, cuando sucede, como *relaciones entre teorías*, y no entre una teoría, por un lado, y experiencias, operaciones o la realidad misma por el otro. Este es el enfoque semántico que adopto aquí, el cual consiste en concebir a los vínculos interpretativos como conexiones entre modelos de diferentes teorías. De esta manera, formularé el vínculo de interés como una relación semántica entre los modelos de las estructuras finitas espaciales de sólidos y los sistemas cinemáticos clásicos de partículas, los cuales no suponen la validez de las leyes dinámicas.

En las axiomatizaciones de teorías físicas ofrecidas por Bunge en [1967] se incluyen entre los parámetros físicos involucrados al tiempo y al espacio, usandose para este último el símbolo E^3, y agregándose a continuación un postulado semántico que especifica que E^3 representa el espacio euclideano tridimensional. Aunque la intuición de Bunge de incluir explícitamente un parámetro espacial en la formulación axiomática de teorías físicas clásicas es correcta, su postulado no resulta explicativo, puesto que no da cuenta de la conexión semántica entre dichas teorías y la geometría euclideana subyacente, sino simplemente la asume. Otras axiomatizaciones de la mecánica newtoniana, como la debida a McKinsey, Sugar y Suppes, en [1953], contrastan con la de Bunge a este respecto. Estos autores omiten del todo dentro de los conceptos de su sistema axiomático a un término que refiera a un parámetro espacial, aunque no así para un parámetro temporal, para el que introducen el símbolo T, el cual representa un intervalo de números reales que interpretado físicamente, de manera informal, mide tiempos transcurridos. Para el caso del parámetro espacial, sólo hay referencia implícita a él cuando enuncian la función posición s, en su axioma III, según el cual si p está en el conjunto de las partículas P y t está en T, entonces $s(p, t)$ es un vector n-dimensional tal que $d^2/d^2t\ s(p, t)$ existe; para agregar posteriormente la indicación informal de que si $n = 3$, $s(p, t)$ es interpretado físicamente como un vector que da la posición s de p en el instante t. Algunas axiomatizaciones más, como la de Moulines en [1982], son muy similares en este respecto a esta última. Moulines al definir conjuntistamente los sistemas cinemáticos de partículas considera como nociones primitivas a un conjunto finito y no vacío de partículas P, a un intervalo de números reales T y una función para la posición, s, para la cual se postula, en el axioma 4, que s es una función de $P \times T$ a $\mathbb{R}^3$, siendo dos veces diferenciable respecto al segundo argumento, i.e. al tiempo, sin referencia explícita alguna a un parámetro espacial.

En su reformulación axiomática más reciente de la mecánica clásica de partículas, Balzer, Moulines y Sneed (véase, [1987]), sí incluyen explícitamente un concepto S para el parámetro espacial, postulando una función biyectiva c entre S y $\mathbb{R}^3$ y definiendo a la posición s como una función del producto cartesiano entre un conjunto de partículas P y un intervalo temporal T de tal suerte que, por la composición de c y s, para cualquier partícula p, $s(p) \in \mathbb{R}^3$. La interpretación física de S, propuesta por estos autores, es que S representa una región espacial.[1]

Ahora bien, en todas estas axiomatizaciones de la mecánica clásica, los respectivos autores están considerando, en las interpretaciones físicas de sus sistemas axiomáticos, a un espacio *absoluto*, *como una entidad aparte e independiente* de los cuerpos físicos, por ello incluyen tanto un conjunto de partículas *P* como un símbolo que refiere al espacio euclideano tridimensional. Si se adopta la concepción relacional del espacio, la consecuencia para una axiomatización de la mecánica clásica de partículas concorde es inmediata. Como se rechaza a un espacio absoluto y se identifica al espacio con las posiciones relativas de los cuerpos, debe eliminarse del todo cualquier referencia a algún concepto, además del conjunto de las partículas, que pretenda representar a una entidad aparte de ellas, como el espacio absoluto. La presencia, en algunas de las axiomatizaciones mencionadas, de un término que refiere al espacio se debe, pues, a la concepción del espacio como un espacio *absoluto*, que se encuentra detrás de ellas. Creo que en la medida en que la concepción clásica del espacio subyace a una axiomatización de la mecánica clásica de partículas, debe aparecer dentro de los términos de ésta un concepto que refiera al espacio euclideano tridimensional, como en los casos de las axiomatizaciones de Bunge ([1967]) y Balzer, Moulines y Sneed ([1987]); en ambas, a pesar de otras diferencias patentes, se pretende que el término para el parámetro espacial refiera al espacio en sentido absoluto. Por mi parte, siendo consecuente con la concepción relacional del espacio, no postularé un símbolo para el espacio. La única "ontología" que asumiré será un conjunto (finito) de partículas, cuyas relaciones espaciales son *importadas*, por el vínculo interpretativo que enunciaré, de la geometría de sólidos presupuesta.

Resultará útil examinar la última axiomatización estructuralista de la mecánica clásica de partículas para lo que intento hacer adelante. Dichos autores toman al parámetro espacial S como un conjunto cuyos elementos no especifican. Al postular una función biyectiva c entre S y $\mathbb{R}^3$ apelan a una "representación", igualmente inespecificada, de tal conjunto en un universo matemático, y al conectar el rango de la función s, S, con el dominio de c, S mismo, a través de la función composición de c y s, conectan al dominio de s, $P \times T$, con $\mathbb{R}^3$, y así hablan de la posición s de una partícula p en un instante t, en términos cuantitativos, como un vector que la representa en un espacio euclideano en sentido matemático.

Comparada con la axiomatización que propondré, tenemos las siguientes diferencias. Yo no postulo en los axiomas una biyección entre un concepto espacial S y $\mathbb{R}^3$, sino más bien el vínculo interpretativo que formulo precisa de una función biyectiva entre un dominio P de partículas de un sistema cinemático y el dominio S de un modelo de la teoría espacial de sólidos subyacente. A la vez, idealizo físicamente a los sólidos como "partículas puntuales" en el sentido de la mecánica clásica. La geometría que se requiere para hablar de las posiciones relativas de las partículas de un sistema cinemático dado es importada de un modelo espacial presupuesto, a través del vínculo interpretativo en cuestión, el cual establece la estructura geométrica del sistema de partículas en términos de relaciones espaciales de distancia. Esto último es legítimo puesto que los dominios S de los modelos de la teoría espacial de sólidos están representados en $\mathbb{R}^3$ por la función σ, a diferencia de lo que hacen tales autores.

Dada una biyección, b, entre los dominios P,, de los sistemas cinemáticos, y los dominios S, de los modelos geométricos, la definición de la función de posición s que resulta de manera natural es como la composición de la función de representación σ y b. De esta manera, la posición s de cualquier partícula p, en un instante dado, está representada en $\mathbb{R}^3$ o, en símbolos, $s(p) = \sigma(b(p)) \in \mathbb{R}^3$.

Ciertamente, la geometría euclideana no es la única teoría presupuesta por la mecánica clásica de partículas; también, al menos, presupone una teoría cronométrica. Aquí haré un uso explícito de un símbolo T para una teoría del tiempo subyacente al formular axiomáticamente la cinemática clásica de partículas. Así, la estructura que utilizaré en la axiomatización conjuntista de la cinemática clásica de partículas adopta la forma $\langle P, T, s\rangle$, donde, desde luego, P es un conjunto finito (no vacio) de partículas, T es un intervalo temporal representado en los números reales y s es la función posición.

Para enunciar la relación semántica ℓ entre la geometría de sólidos y la cinemática clásica de partículas, explicaré brevemente en qué consiste un vínculo interpretativo. Un vínculo interteórico es, en su expresión más general y abstracta, una relación entre los modelos, potenciales y/o actuales, de un par de teorías T y T', en términos conjuntistas es un subconjunto de Mp(T) X Mp(T'). Más concretamente, podemos considerar un vínculo interteórico, específicamente uno interpretativo, como una conexión existente entre algunos conceptos (o términos) de la teoría T y algunos conceptos (o términos) de la teoría T', en referencia a sus estructuras relacionales correspondientes. Como las estructuras conjuntistas son n-adas ordenadas es útil contar con un medio para denotar a sus componentes de acuerdo al orden que guardan en ellas. El concepto de proyección, como un echelon, de Bourbaki es adecuado para ello. Sea $X = \langle A_1, \ldots, A_k, R_1, \ldots, R_n \rangle$. La i-ésima proyección de X, $\rho_i(X)$, es el componente i de X, con $1 \leq i \leq k + n$.

Sean $X = \langle A_1, \ldots, A_k, R_1, \ldots, R_n \rangle$ y $Y = \langle A_1', \ldots, A_l', R_1', \ldots, R_m' \rangle$ especies de estructura en el sentido de Bourbaki.[2] L es un *vínculo (término a término) interpretativo entre* X y Y si y sólo existen $N \subseteq X$ y $N' \subseteq Y$ tal que para alguna i, $1 \leq i \leq k + n$, y para alguna j, $1 \leq j \leq l + m$:

$L = \langle\langle \rho_i(x), \rho_j(y) \rangle \mid x \in N, y \in N' \text{ y } C(\rho_i(x), \rho_j(y))\rangle$,

donde $C(\rho_i(x), \rho_j(y))$ es una condición que deben guardar entre sí la i-ésima componente de x y la j-ésima componente de y.

La formulación conjuntista del vínculo interpretativo ℓ entre la teoría espacial de sólidos (TES) y la cinemática clásica de partículas (CCP) es como sigue. Sean TES = $\langle S, \pi, P, E \rangle$ y CCP = $\langle P, T, s \rangle$ y sea TES' un subconjunto de TES y CCP' un subconjunto de CCP. Entonces $\ell = \langle\langle \rho_1(x), \rho_1(y)\rangle \mid x \in$ TES', $y \in$ CCP' y $(\exists b)\ (b: \rho_1(x) \leftrightarrow \rho_1(y))\rangle$.

Establecido el vínculo interpretativo ℓ, es posible definir los sistemas cinemáticos clásicos de partículas, por medio de una definición conjuntista, presuponiendo que para un conjunto de partículas dado, dominio de una realización posible de un sistema tal, hay un modelo de la teoría espacial de sólidos tal que existe una función que satisface la definición de ℓ. Así, pues, defino

DEFINICION III. $\mathfrak{J} = \langle P, T, s \rangle$ es un **sistema cinemático clásico de partículas** si y sólo si existen P, T y s tales que

(1) P es un conjunto no vacío y finito

(2) T es un intervalo de números reales

(3) para toda p en P y t en T fijo

$s_t(p) = \sigma(b(p))_t$ tal que es doblemente diferenciable con respecto al tiempo.

Para obtener una visión un tanto más global de las relaciones entre las estructuras aquí definidas, podemos introducir el concepto de teorización entre estructuras de la concepción estructuralista de la ciencia empírica. Simplifico este concepto de teorización adecuándolo a los propósitos presentes, estableciendo sólamente un par de condiciones. La idea intuitiva detrás del concepto estructuralista de teorización consiste en que a partir de una estructura dada se obtiene una estructura, más restrictiva, agregándole algunos conceptos, T-teóricos o no en el sentido de Sneed,[3] y, por supuesto, nuevos axiomas, condiciones de definición, para los conceptos adicionados. De esta manera, la estructura de la que se parte contiene a la estructura que se obtiene por este procedimiento de teorización, lo cual significa que la segunda es intensionalmente más rica que la primera. Además, como se colige, la estructura nueva es extensionalmente menos amplia que la estructura dada, es decir, la clase de sus modelos está contenida en la clase de los modelos de esta última estructura. Esto puede expresarse formalmente como sigue, donde, por ejemplo, M(X) denota a la clase de los modelos de la estructura X.

Sea $X = \langle A_1, \ldots, A_k, R_1, \ldots, R_n \rangle$ una estructura conjuntista. $X' = \langle A_1, \ldots, A_k, R_1, \ldots, R_m \rangle$ es una *teorización* de X si y sólo si

(1) $n < m$ y

(2) $M(X') \subset M(X)$.

Con este concepto a la mano, podemos afirmar que, por un lado, las estructuras espaciales son una teorización de las estructuras mereológicas y que, por otro lado, la mecánica clásica de partículas es una teorización de la cinemática clásica de partículas. Puede constatarse sin dificultad que la relación entre las definiciones de las estructuras espaciales y mereológicas cumplen con la definición del concepto de teorización. Para mostrar que la segunda afirmación también vale, podemos definir las estructuras asociadas a la mecánica newtoniana.

Una definición conjuntista de la mecánica clásica de partículas se obtiene a partir de la definición de los sistemas cinemáticos clásicos agregando los conceptos dinámicos de masa y fuerza, junto con unos axiomas que los caracterizan en términos conjuntistas, y postulando la Segunda Ley de Newton como único axioma propio. Usaré el término m para la función masa y el término F para un conjunto finito de fuerzas componentes. Así,

DEFINICION IV. $\mathfrak{M} = \langle P, T, s, m, F\rangle$ es un **sistema mecánico clásico de partículas** si y sólo si existen P, T, s, m y F tales que

(1) $\langle P, T, s\rangle$ es un sistema cinemático clásico de partículas

(2) m: $P \rightarrow T$ tal que para toda p en P, $m(p) > 0$

(3) $F = \langle f_1, \ldots, f_n\rangle$, con n entero positivo

(4) para toda p en P y t en T

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(p, t) = m(p) \cdot D^2(s_t(p)).$$

Igualmente puede constatarse fácilmente que la relación entre los sistemas clásicos cinemáticos y dinámicos es una de teorización. Las estructuras aquí definidas forman parte de la red arborea de la mecánica clásica, que adoptan la siguiente forma:

estructuras mereológicas

T

estructuras espaciales

I

sistemas cinemáticos

T

sistemas dinámicos

donde los símbolos T representan relaciones de teorización mientras que el I representa un vínculo interpretativo.

Notas.

1. En un libro en preparación, del cual no hay autorizacion para citarlo, *Theoretical Structures in Science*, P. Suppes reconoce explícitamente ciertas estructuras geométricas "galileanas" subyacentes a la mecánica clásica de partículas.

2. Simplificando cuestiones técnicas, una especie de estructura en el sentido de Bourkabi es una clase de estructuras tipificadas, y una estructura está tipificada si todos sus componentes están especificados conjuntistamente en términos de las nociones de proyección, producto cartesiano y conjunto potencia.(Véase, Bourbaki [1968]).

3. Para una formulación reciente del criterio de teoricidad sneediano véase, Balzer [1985].

CONCLUSIONES.

A modo de conclusión recapitularé brevemente lo que he mantenido explícitamente en esta Tesis.

(1) Como anuncie en la Introducción, sostengo que el sistema mereológico propuesto aquí constituye una base a partir de la cual es posible edificar una geometría "cualitativa" de sólidos, para la cual demuestro una representación en un dominio matemático apropiado. Con ésto, analógamente a lo que sucede en las teorías de medición fundamental, se "cuantifica" dicha geometría, usandose la métrica estándar. Sostengo, asimismo, que lo anterior ofrece una fundamentación de la geometría euclideana de sólidos, en el sentido de que se cuenta con un sistema axiomático geométrico que prescinde del concepto de punto, suficiente para la geometría euclideana absoluta, el cual se justifica, precisamente, con el teorema de representación demostrado. A su vez, pruebo que la función de representación que utilizo es única salvo movimientos rígidos de traslación. Así, pues, mi propuesta es un intento de solución al problema de la filosofía del espacio de ofrecer una geometría tridimensional a partir del concepto de cuerpo o sólido.

(2) Además mantengo que la geometría de sólidos presente da apoyo a la concepción relacional del espacio físico al ofrecer un marco conceptual espacial con el cual es posible interpretar los hechos espaciales de la mecánica clásica de partículas sin recurrir a la hipótesis del espacio absoluto; sostengo, conjuntamente, que la concepción relacional del espacio es filosóficamente más plausible que la concepción clásica absoluta y que se ajusta más a nuestra experiencia científica y ordinaria del mundo físico que esta última.

(3) Por último, sostengo que es posible conectar el sistema geométrico propuesto con una axiomatización de la mécanica

clásica de partículas. Para ello, construyo un vínculo interpretativo, en el sentido de la concepción estructuralista de la ciencia empírica, entre ambas teorías de tal suerte que los modelos de la geometría de sólidos resultan ser estructuras subyacentes y presupuestas por los sistemas cinemáticos clásicos de partículas. Con ésto pretendo ofrecer también una alternativa a la concepción absoluta del espacio en su conexión con la física clásica del movimiento, puesto que, como igualmente he mantenido aquí, la teoría espacial de sólidos presente es acorde con la concepción relacional del espacio físico.

REFERENCIAS.

Balzer *et al* [1983]. W. Balzer, C. U. Moulines y J. D. Sneed, *The Structure of Empirical Science: Local and Global*, ponencia presentada al 7mo. Congreso Internacional de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia, Salburgo, Austria, 1983.

Balzer *et al* [1987]. W. Balzer, C. U. Moulines y J. D. Sneed, *An Architecture for Science*, D. Reidel, 1987.

Balzer [1985]. W. Balzer, "On a new Definition of Theoreticity", *Dialectica*, Vol. 39, No. 2, 1985.

Borsuk y Szmielew [1960]. K. Borsuk y W. Szmielew, *Foundations of Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1960.

Bourbaki [1968]. N. Bourbaki, *Theory of Sets*, París, 1968.

Bunge [1967]. M. A. Bunge, *Foundations of Physics*, Springer-Verlag, 1967.

Jammer [1970]. M. Jammer, *Conceptos de Espacio*, Grijalbo, México, 1970.

Losee [1972]. J. Losee, *An Historical Introduction to the Philosophy of Science*, Oxford University Press, Londres, 1972.

Mach [1973]. E. Mach, "La Ciencia de la Mecánica" en *La Teoría de la Relatividad*, L. P. Williams (ed.), Alianza Universidad, Madrid, 1973.

Moulines [1982]. C. U. Moulines, *Exploraciones Metacientíficas*, Alianza Universidad, Madrid, 1982.

Moulines [1984]. C. U. Moulines, "Links, Loops and the Global Structure of Science", *Philosophia Naturalis*, Band 21, Heft 2-4, 1984.

Moulines [1985]. C. U. Moulines, "Tipología axiomática de las teorías empíricas", *Crítica*, Vol.XVII, No. 51, 1985.

Mundy [1983]. B. Mundy, "Relational theories of Euclidean space and Minkowski spacetime", *Philosophy of Science*, 50, 1983.

Mundy [1986]. B. Mundy, "On the general theory of meaningful representation" *Synthese*, 67, 1986.

Newton [1729/1973]. I. Newton, "Escolio a *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*" en *La Teoría de la Relatividad*, L. P. Williams (ed.), Alianza Universidad, Madrid, 1973.

Noll [1966]. W. Noll, "The Foundations of Mechanics" en *Non-Linear Continuum Theories*, G. Trusdell y G. Grioli (eds.), Ediciones Cremonese, Roma, 1966.

Suppes [1972]. P. Suppes, "Some opens Problems in the Philosophy of Space and Time", *Synthese*, 24, 1972.

Tarski [1929]. A. Tarski, "Foundations of the Geometry of Solids" en *Logic, Semantics and Metamathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1956.

Tarski [1959]. A. Tarski, "What is Elementary Geometry?" en *The Axiomatic Method*, L. Henkin *et al* (eds.), North-Holland, Amsterdam, 1959.