



19.  
29.

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL MODELO DE BOSONES INTERACTUANTES  
Y SU APLICACION A CADENAS DE ISOTOPOS E ISOTONOS  
PAR - PAR

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

FISICO

PRESENTA

*Eduardo Leonardo González Espinosa*

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

1990



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

### CAPITULO I INTRODUCCION.

1. Modelo de capas	1
2. Modelos colectivos	4
3. Simetrías	17

### CAPITULO II EL MODELO DE BOSONES INTERACTUANTES.

1. Introducción	20
2. Operadores bosónicos	21
3. Hamiltoniano	24
4. Operadores de transición	27

### CAPITULO III TRATAMIENTO ALGEBRAICO DEL HAMILTONIANO MBI-1.

1. El grupo $U(6)$	29
1.1 Generadores	29
1.2 Subálgebras bosónicas	31
1.3 Operadores de Casimir	35
2. Hamiltoniano MBI-1	38
3. Estados base	43
3.1 Cadena $U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(3)$	44
3.2 Cadena $U(6) \supset SU(3) \supset O(3) \supset O(2)$	48
3.3 Cadena $U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2)$	52
4. Paréntesis de transformación	56
5. Elementos de matriz de los operadores $P^2$ y $Q^2$ en la base $ Nn_d \sigma \tau LM\rangle$	61
5.1 Elementos de matriz de $P^2$	61
5.2 Elementos de matriz de $Q^2$	62

### CAPITULO IV SIMETRIAS DINAMICAS EXACTAS DEL MBI-1.

1. Límite vibracional	66
1.1 Hamiltoniano	66
1.2 Espectro	67
1.3 Transiciones electromagnéticas	69
1.4 Las regiones del límite $U(5)$	70
1.5 Ejemplos típicos	71
2. Límite rotacional	73
2.1 Hamiltoniano	73
2.2 Espectro	74
2.3 Transiciones electromagnéticas	74
2.4 Las regiones del límite $SU(3)$	77
2.5 Ejemplos típicos	79

3. Límite $\gamma$ -inestable	80
3.1 Hamiltoniano	80
3.2 Espectro	80
3.3 Transiciones electromagnéticas	83
3.4 Las regiones del límite $O(6)$	84
3.5 Ejemplos típicos	88
CAPITULO V	APLICACION DEL MBI-1 A CADENAS DE ISOTOPOS E ISOTONOS PAR-PAR.
1. Introducción	90
2. Aplicaciones y discusión	91
2.1 Cadenas de Isótopos	91
2.2 Cadenas de Isótonos	115
CAPITULO VI	CONCLUSIONES
	126
APENDICE A	EL METODO DE LA SEGUNDA CUANTIZACION
	131
APENDICE B	EL OSCILADOR ARMONICO EN CINCO DIMENSIONES
	141
APENDICE C	EL TEOREMA DE DRAGT
	150
APENDICE D	PROGRAMA DE AJUSTE PARA EL HAMILTONIANO MBI-1
	153
REFERENCIAS	165

## RESUMEN

SE PRESENTA EL MODELO DE BOSONES INTERACTUANTES, SUS FUNDAMENTOS FÍSICOS, ASI COMO SU ESTRUCTURA ALGEBRAICA FUNDAMENTAL MEDIANTE LA TEORÍA DE GRUPOS. SE CONSTRUYE UNA BASE ADECUADA PARA LLEVAR A CABO LA DIAGONALIZACION DEL HAMILTONIANO DEL MODELO PARA EL CALCULO DE LOS NIVELES DE ENERGIA MAS BAJOS DE CARACTER COLECTIVO DE NUCLEOS PAR-PAR. SE PRESENTA LA APLICACION DE ESTE MODELO A LAS CADENAS DE ISOTOPOS CON  $Z=62, 92, 76, 78$  Y  $44$  ASI COMO A LAS CADENAS ISOTONOS CON  $N=88$  Y  $N=90$ .

## INTRODUCCION

## 1. MODELO DE CAPAS.

Para conocer la estructura del núcleo atómico y poder comprender su dinámica, es necesario utilizar un modelo nuclear. Al conjunto de suposiciones matemáticas con alguna interpretación física más o menos simple, mediante las cuales se intenta reproducir e interpretar teóricamente el comportamiento de los núcleos, se le llama *modelo nuclear*. Dentro de los objetivos de la Física Nuclear está el de formular un modelo mediante el cual las características de los sistemas nucleares sean descritos de la manera más aproximada posible; la validez de un modelo se justifica cuando sus predicciones son directamente comparadas con los resultados experimentales.

Dado que el núcleo atómico es un sistema cuántico, a toda observable física de interés se le asocia un operador hermiteano. Para muchos estudios la observable de mayor importancia es la energía total del sistema, por lo que estaremos particularmente interesados en su Hamiltoniano. De manera general, un modelo nuclear está definido por su correspondiente Hamiltoniano, con el cual se intenta describir los espectros de energía de los núcleos. Para establecer la estructura del Hamiltoniano nuclear se han utilizado ideas originadas en otras áreas de la Física, principalmente de la Física Atómica y Molecular.

3. La aparición de espectros a bajas energías como los que se ilustran en la Fig. 1.1, que sugieren que los estados de vibración y rotación de algunos núcleos pueden construirse con cuantos de momento angular de  $2\hbar$ :

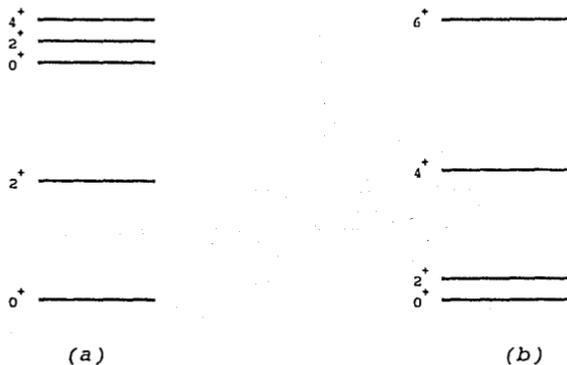


Fig.1.1

Espectro (a) típicamente vibracional y (b) típicamente rotacional

En estos modelos, en lugar de explicar el comportamiento de los núcleos mediante sus  $3A$  grados de libertad se introducen nuevas coordenadas  $\alpha^{[\lambda]}(x_1, \dots, x_{3A})$  que son a su vez funciones de las  $3A$  coordenadas nucleares originales  $(x_1, \dots, x_{3A})$ ; a estas nuevas coordenadas  $\alpha^{[\lambda]}$  se les llama *coordenadas colectivas*. Cualquier modelo nuclear (Hamiltoniano) formulado en términos de tales coordenadas se le conoce correspondientemente como *modelo colectivo*. Dado que no se conoce con precisión la relación funcional entre las coordenadas colectivas y las coordenadas nucleónicas, se parte entonces de una imagen clásica del núcleo, idealizándolo por ejemplo como una "gota de líquido de material nuclear" capaz de reali-

zar movimientos de carácter colectivo, tales como vibraciones alrededor de una configuración de equilibrio y rotaciones.

Un método para introducir variables colectivas que describen el movimiento de la superficie de un núcleo con deformaciones de tipo cuadrupolar es haciendo un desarrollo de la superficie nuclear en términos de los armónicos esféricos de orden dos alrededor de la forma esférica, i. e.,

$$R(\theta, \phi) = R_0 \left[ 1 + \sum_{m=-2}^2 \alpha_m^* Y_{2m}^*(\theta, \phi) \right], \quad (1.4)$$

donde  $R_0$  es el radio del núcleo en la configuración de equilibrio y tomándose como condición que el volumen nuclear permanece constante durante la deformación.

Dado que el radio de un núcleo es una cantidad real, debe cumplirse que

$$\sum_m \alpha_m^* Y_{2m} = \sum_m \alpha_m Y_{2m}^*, \quad (1.5)$$

pero ya que

$$Y_{2m}^*(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{2-m}(\theta, \phi), \quad (1.6)$$

las variables  $\alpha_m$  están sujetas a la restricción

$$\alpha_m^* = (-1)^m \alpha_{-m}. \quad (1.7)$$

De acuerdo a la ec. (1.7), las cinco variables colectivas  $\alpha_m$  (con  $m=-2, \dots, 2$ ) constituyen un conjunto de cinco parámetros, en términos de los cuales las deformaciones de un núcleo pueden estu-

diarse construyéndose un Hamiltoniano que dependa de ellos y de sus respectivos momentos canónicos conjugados. Existe una gran cantidad de Hamiltonianos que pueden construirse mediante este procedimiento, pero para nuestros propósitos se describirán sólo tres casos límites que tienen soluciones analíticas concretas, cada una correspondiendo a una dinámica nuclear definida. El primer caso límite que se discutirá es el límite vibracional, que se presenta en núcleos cercanos a capas cerradas. Estos núcleos poseen una configuración de equilibrio esférica y llevan a cabo oscilaciones alrededor de ella. Espectros característicos de tales núcleos son como los de la Fig. 1.1a. Para estos núcleos se puede esperar que el Hamiltoniano clásico pueda ser aproximado por la siguiente fórmula:

$$H = \frac{1}{2} B \sum |\dot{\alpha}_m|^2 + \frac{1}{2} C \sum |\alpha_m|^2, \quad (1.8)$$

que tiene la estructura de un *oscilador armónico en cinco dimensiones*. El siguiente paso consiste en *cuantizar* este Hamiltoniano, y para ello resulta necesario considerar a las cantidades  $\alpha_m$  como variables dinámicas, y por tanto, como operadores. Consecuentemente, se definen los momentos canónicamente conjugados  $\pi_m$  de  $\alpha_m$  mediante la siguiente forma operacional

$$\pi^m = -i\hbar\delta/\delta\alpha_m, \quad (1.9a)$$

que da lugar a las relaciones de conmutación

$$[\alpha_m, \pi_m'] = i\hbar\delta_m^m. \quad (1.9b)$$

Así se tiene

$$H = \frac{1}{2} B \sum |\pi_m|^2 + \frac{1}{2} C \sum |\alpha_m|^2. \quad (1.10)$$

Resulta conveniente introducir operadores de creación y aniquilación para los cuanta de oscilación (fonones) mediante las definiciones\*

$$d_m^\dagger = (2)^{-1/2} (\alpha_m - i\pi_m), \quad (1.11a)$$

$$d_m = (2)^{-1/2} (\alpha_m + i\pi_m), \quad (1.11b)$$

que, debido a (1.9), satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[d_m^\dagger, d_n^\dagger] = d_m^\dagger d_n^\dagger - d_n^\dagger d_m^\dagger = \delta_n^m, \quad (1.12a)$$

$$[d_m, d_n] = [d_m^\dagger, d_n^\dagger] = 0. \quad (1.12b)$$

En términos de estos operadores,  $\alpha_m$  y  $\pi_m$  se expresan como

$$\alpha_m = (2)^{-1/2} (d_m^\dagger + d_m), \quad (1.13a)$$

$$\pi_m = i(2)^{-1/2} (d_m^\dagger - d_m), \quad (1.13b)$$

de modo que el Hamiltoniano (1.10) toma la forma

---

\* Se considera unidades donde  $\hbar = \omega = B = C = 1$ .

$$H = \left( \sum_m d_m^\dagger d_m + \frac{5}{2} \right) \quad (1.14)$$

El espectro que presenta este Hamiltoniano consiste de una serie de niveles igualmente espaciados entre sí por una diferencia de energía  $hw$ :

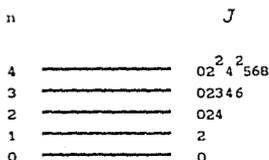


Fig. 1.2

De acuerdo a este espectro, los estados con dos fonones y momentos angulares  $0^*$ ,  $2^*$  y  $4^*$  están degenerados, así como los estados con tres fonones ( $n=3$ ) y momentos angulares  $J^\pi = 0^*$ ,  $2^*$ ,  $3^*$ ,  $4^*$  y  $6^*$ . Experimentalmente no se observan exactamente estas degeneraciones entre estados con estos momentos angulares, lo cual quiere decir que el Hamiltoniano (1.14) es sólo aproximadamente válido para la descripción de núcleos vibratoriales. El ligero desdoblamiento experimental del triplete  $J=024$  (que posee una energía promedio de casi el doble de la del primer estado excitado  $2^*$ ), es evidencia de términos anarmónicos, i.e., términos de orden mayor en  $\alpha$  y  $\pi$  que necesitan agregarse al Hamiltoniano (1.10).

La estructura que presentan estos espectros se pierde para núcleos lejanos a capas cerradas. Algunos de estos sistemas poseen una configuración de equilibrio no esférica y realizan pequeñas

oscilaciones armónicas alrededor de ella, por lo que manifiestan otra variedad de movimiento colectivo: el rotacional. El límite correspondiente se conoce entonces como límite rotacional, y espectros típicos de tales núcleos son como el representado en la Fig. 1.1b. Para estudiar estos núcleos es necesario referir las coordenadas colectivas  $\alpha_m$  a un sistema de coordenadas fijo en el núcleo y cuyos ejes coinciden con los ejes principales del sistema

$$\alpha_m = \sum [D_{mn}^2(\theta_1)]^* \alpha'_n, \quad (1.15)$$

donde  $D_{mn}^2(\hat{\theta})$  es la matriz de Wigner (Rose, 1957), que es función de los ángulos de Euler  $\theta_1$ , que especifican la orientación de los ejes principales del núcleo respecto al sistema de coordenadas del laboratorio. En el sistema de coordenadas de ejes principales de la superficie nuclear, se tiene la condición

$$\alpha'_1 = \alpha'_{-1} = 0, \quad \alpha'_2 = \alpha'_{-2} \equiv a_2, \quad \alpha'_0 \equiv a_0. \quad (1.16)$$

En lugar de usar  $a_0$  y  $a_2$  resulta conveniente utilizar las nuevas coordenadas  $\beta$  y  $\gamma$  definidas por

$$a_0 \equiv \beta \cos \gamma, \quad a_2 \equiv (\beta \sin \gamma) / \sqrt{2} \quad (1.17)$$

Las coordenadas intrínsecas  $\beta$  y  $\gamma$  son invariantes ante rotaciones y cualquier función escalar de las coordenadas originales  $\alpha_m$  se debe poder expresar en términos de  $\beta$  y  $\gamma$ . En particular, el producto tensorial y el doble producto tensorial resultan estar

relacionadas con éstas de la siguiente forma

$$[\alpha \times \alpha]_0^0 = \beta^2 / (5)^{1/2}, \quad (1.18a)$$

$$[[\alpha \times \alpha] \times \alpha]_0^0 = -\beta^2 \cos 3\gamma (2/35)^{1/2}. \quad (1.18b)$$

La ecuación (1.18a) puede escribirse como

$$\beta^2 = a_0^2 + 2a_2^2 = \sum_m |\alpha'_m|^2 = \sum_m |\alpha_m|^2 \quad (1.19)$$

lo cual indica que  $\beta$  es una medida de la magnitud de la deformación cuadrupolar total del núcleo. Por otro lado,  $\gamma$  es una medida de la desviación respecto a su simetría axial, como indicamos en la siguiente figura

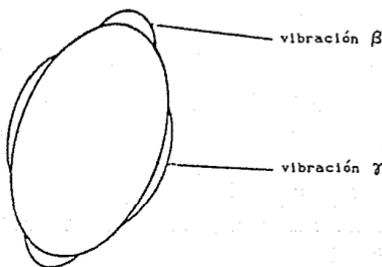


Fig. 1.3

Utilizando la ec. (1.4) se tiene que en el sistema de coordenadas intrínscas, los radios a lo largo de los tres ejes principales

del núcleo están expresados por

$$R_k = R_0 [1 + (5/4\pi)^{1/2} \beta \cos(\gamma - 2\pi k/3)] \quad (1.20)$$

donde  $k = 1, 2, 3$ .

En particular para  $\gamma=0$ , se tiene simetría axial prolata, ya que  $R_1 = R_2 < R_3$ . Conforme  $\gamma$  aumenta desde este valor, la magnitud de  $R$  a lo largo del eje de simetría disminuye mientras que la correspondiente a uno de los ejes principales menores aumenta, rompiéndose así la simetría axial del sistema. Cuando  $\gamma=\pi/3$  los valores de  $R$  a lo largo de estos dos ejes son iguales pero mayores que el tercero. De esta forma, cuando  $\gamma = \pi/3$ , la superficie nuclear presenta también simetría axial, pero ahora simetría axial oblata. Si  $\gamma$  aumenta a  $\gamma + n(2\pi/3)$ , donde  $n$  es un entero, simplemente se reproducen las formas nucleares correspondientes a los valores  $0 \leq \gamma \leq \pi/3$ , es decir, sólo se intercambian los papeles que juegan los distintos ejes de simetría. Por tanto, los rangos de  $\beta$  y  $\gamma$  pueden restringirse a los intervalos

$$0 \leq \beta < \infty, \quad (1.21a)$$

$$0 \leq \gamma \leq \pi/3 \quad (1.21b)$$

de modo que cualquier configuración cuadrupolar de la superficie nuclear es representada por un punto en un sistema de coordenadas polares planas  $\beta$  y  $\gamma$ , con los intervalos especificados en (1.21).

En términos de las variables  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\theta_1$ , la energía cinética  $\frac{1}{2}B\dot{\alpha}^2$  puede escribirse en la forma

$$T = \frac{1}{2}B(\dot{\beta} + \beta^2\dot{\gamma}^2) + \frac{1}{2} \sum \tilde{I}_k \omega_k^2, \quad (1.22)$$

donde  $\omega_k$ , es la velocidad angular del eje  $k'$  con respecto al sistema de laboratorio y  $\tilde{I}_k$ , son los momentos de inercia, dados por

$$\tilde{I}_k = 4B\beta^2 \sin^2(\gamma - 2\pi k'/3). \quad (1.23)$$

La expresión cuántica de la energía cinética (1.22) se obtiene utilizando el método descrito por W. Pauli, que básicamente consiste en el siguiente resultado: Dada la energía cinética clásica del sistema

$$T = \frac{1}{2} \sum g_{mn}(q) \dot{q}_m \dot{q}_n, \quad (1.24)$$

donde  $g_{mn}$  denota al tensor métrico, la contraparte cuántica es

$$T = -\frac{1}{2} \sum (|g|)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial q_m} (|g|)^{1/2} g^{mn}(q) \frac{\partial}{\partial q_n}, \quad (1.25)$$

donde  $g^{mn}$  denota al inverso de  $g_{mn}$  y  $|g|$  al determinante de  $g_{mn}$ . Aplicando este procedimiento a la energía cinética (1.22) y agregándole la energía potencial  $V(\beta, \gamma)$  se obtiene el siguiente Hamiltoniano

$$H = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta}) + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} (\sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}) \right\} + \sum_k \frac{L_{k'}^2}{2D_{k'}} + V(\beta, \gamma), \quad (1.25b)$$

que es la expresión derivada por Aage Bohr (A. Bohr, 1952). Este Hamiltoniano ha sido el punto de partida para la elaboración del modelo colectivo de Bohr-Mottelson (Bohr-Mottelson, 1953), mediante el cual se ha logrado describir de manera satisfactoria estados colectivos nucleares a bajas energías.

Supongamos ahora que un núcleo está en su estado de mínima energía en los parámetros  $\gamma=0$ , y  $\beta=\beta_0 \neq 0$ . Congelando estos grados de libertad del sistema, el núcleo sólo podrá llevar a cabo rotaciones, y su Hamiltoniano será el correspondiente al de un rotor en donde las energías siguen la fórmula

$$E_J = \frac{1}{2D} J(J+1), \quad (1.26)$$

y sus funciones de onda son de la forma

$$\psi_{JMK} = [(2J+1)/8\pi^2] [D_{MK}^J(\theta_1) + (-1)^J D_{M-K}^J(\theta_1)], \quad (1.27)$$

donde  $K=0, 2, 4, \dots$ , y la combinación  $[D_{MK}^J(\theta_1) + (-1)^J D_{M-K}^J(\theta_1)]$  de matrices  $D$  de Wigner surge de las consideraciones de simetría asociadas con la elección de los ejes principales (J. Eisenberg y W. Greiner, 1987).

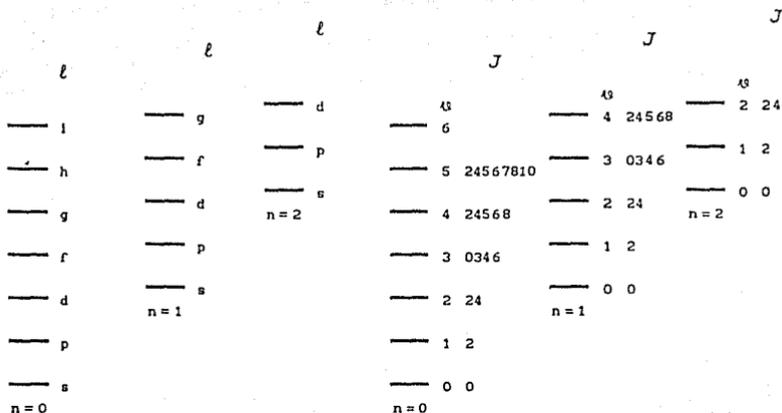
Si las variables  $\beta$  y  $\gamma$  presentan pequeñas oscilaciones armónicas alrededor de sus valores de equilibrio  $\gamma=0$ , y  $\beta=\beta_0$ , se

obtiene una serie de bandas rotacionales. La simetría axial del sistema se ve inalterada ante variaciones de  $\beta$ , de modo que las bandas excitadas correspondientes tienen la misma estructura que la banda base ó fundamental, donde  $K=0$ . Las funciones de onda para este caso difieren de la ec. (1.27) únicamente por el producto de funciones de onda que representan estados con  $n_\beta$  y  $n_\gamma$  cuanta en los modos de oscilación  $\beta$  y  $\gamma$ .

$$\psi_{JHK n_\beta n_\gamma} = [(2J+1)/16\pi^2]^{1/2} [D_{HK}^J(\theta_1) + (-1)^J D_{H-K}^J(\theta_1)] \phi_{n_\beta}(\beta) \phi_{n_\gamma}(\gamma)$$

(1.28)

El tercer caso limite corresponde a núcleos que tienen valores  $\beta=\beta_0 \neq 0$  constantes, pero que poseen una energía potencial que es independiente de  $\gamma$ . Como en este caso no hay preferencia por algún valor particular para  $\gamma$ , a este limite se le llama  $\gamma$ -inestable. La manera más simple de comprender la estructura de este limite es compararlo directamente con el problema de una partícula que se mueve en tres dimensiones y que está sujeta a un potencial de interacción central con simetría esférica  $V(r)$ , siendo este independiente de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ . Para este caso los estados son clasificados por el número cuántico radial  $n$  y el momento angular total  $\ell$ , que resulta ser un índice que describe las propiedades de transformación de las funciones de onda ante rotaciones en el espacio. Este tercer caso limite puede considerarse como el caso análogo de este problema pero en cinco dimensiones y en cuyo caso la variable  $\beta$  juega el papel de la coordenada radial. Espectros para este tipo de potenciales son como el de la Fig. 1.4.



(a)

(b)

Fig. 1.4

Espectro de un potencial que depende únicamente de la variable radial en (a) tres dimensiones y (b) en cinco dimensiones.  $\lambda^3$  es el número cuántico asociado a  $O(5)$ , ver sección 3.3, pag. 44.

En base a modelos colectivos se ha podido interpretar diversos fenómenos además de las vibraciones y rotaciones nucleares, tales como la aparición de las resonancias gigantes (Eisenberg y Greiner, 1987) y el fenómeno de la fisión nuclear (Preston y Bhaduri, 1975). Sin embargo, estos presentan sus limitaciones

1.- No se conoce una clara relación cuantitativa entre las coordenadas colectivas y las coordenadas nucleónicas.

2.- El ajuste de espectros y probabilidades de transición en núcleos vecinos (como es el caso de los isótopos en núcleos pesados) lleva en ocasiones a la construcción de superficies de energía potencial muy distintas entre sí, y la relación entre los parámetros que las definen no es la de una lenta transición como se esperaría para sistemas muy parecidos que difieren en un número pequeño de partículas.

3.- En algunos espectros observados las frecuencias de rotación y vibración son de órdenes de magnitud muy parecidos, dando lugar a que no exista una clara distinción entre los dos tipos de movimiento.

4.- Resulta además difícil interpretar los modelos colectivos desde un punto de vista microscópico e incorporar en ellos conceptos tan fundamentales como es el de estructura en capas del núcleo.

### 3. SIMETRÍAS.

Aunque en apariencia diametralmente opuestos, los modelos colectivo y de partícula independiente han sido combinados en un *modelo unificado*, y en el que se considera el movimiento de los nucleones dentro de un potencial deformado. Una variante de este modelo es el *modelo de Nilsson* (Nilsson, 1955).

El modelo unificado, en sus varias formas y extensiones, ha tenido mucho éxito. Sin embargo, en este trabajo se discutirán algunos problemas de estructura nuclear de carácter colectivo bajo una premisa diferente, a saber, de la existencia de modelos que son computacionalmente más viables y que presentan una *estructura algebraica* fundamental. Esto quiere decir que en ellos existe la posibilidad de explotar un conjunto de simetrías dinámicas asocia-

das con un Hamiltoniano muy particular. Las simetrías de un sistema físico están definidas por sus propiedades de invariancia ante un conjunto de transformaciones (transformaciones de simetría) que actúan sobre él, y que poseen matemáticamente la estructura de un grupo.

El uso de simetrías en problemas de la estructura nuclear tuvo su origen en los trabajos clásicos de E. Wigner (Wigner, 1937) relacionados al grupo  $SU(4)$  en la teoría de los supermultipletes, encontrándose importantes aplicaciones para la descripción de núcleos ligeros, utilizando propiedades de la interacción entre los nucleones.

Posteriormente, Elliott (Elliott, J.P., 1958) utilizó las propiedades de simetría y degeneraciones del potencial del oscilador armónico para la descripción de núcleos ligeros en la capa  $s-d$ , haciendo uso del grupo  $SU(3)$ . Estas descripciones dejan de ser válidas para núcleos pesados debido principalmente a que la simetría espín-isospín y la degeneración típica del oscilador armónico dejan de ser válidas para estos sistemas.

Parecería entonces que la aparición de simetrías está restringida a sistemas nucleares de pocas partículas. Sin embargo, se han implementado métodos algebraicos de la Teoría de Grupos para la descripción de sistemas nucleares más pesados, idealizándolos como sistemas más simples y que permiten estudiar su estructura mediante sus simetrías. Esta técnica ha permitido correlacionar una gran variedad de información experimental de carácter colectivo a bajas energías con la elaboración de un nuevo modelo para estructura nuclear conocido como modelo de bosones interactuantes.

El propósito de este trabajo es presentar, por un lado, la solución completa del problema matemático asociado al modelo de bosones interactuantes mediante la teoría de grupos; así mismo, se aplica este modelo para la descripción espectroscópica de algunas regiones de interés dentro de la tabla nuclear.

En el capítulo II se presenta el Hamiltoniano del modelo, expresado en lenguaje de segunda cuantización y se menciona algunos operadores de transición electromagnética relevantes para nuestro estudio.

En el capítulo III se presenta el tratamiento algebraico del Hamiltoniano más general del modelo, utilizando técnicas de la teoría de grupos y conceptos fundamentales como el de *simetría dinámica*.

En el capítulo IV se analizan los tres *límites exactos* del modelo, que corresponden a los tres tipos de movimientos de carácter colectivo observados en los núcleos.

En el capítulo V se aplican resultados desarrollados en los capítulos anteriores en el análisis de algunas regiones específicas de la tabla nuclear, en particular en aquellas en donde se presentan transiciones ó cambios de estructura en los núcleos. Para ello se utiliza un programa general de ajuste automático implementado para la construcción y diagonalización del Hamiltoniano que se obtiene del tratamiento algebraico presentado en el capítulo III. Con este programa se predicen también niveles excitados nucleares para los cuales la información experimental disponible es escasa.

En el capítulo VI se presenta las conclusiones y perspectivas de este trabajo.

## EL MODELO DE BOSONES INTERACTUANTES

## 1. INTRODUCCION.

El modelo de bosones interactuantes\* ha proporcionado un método alternativo para la descripción de fenómenos nucleares de carácter colectivo a bajas energías. Este modelo tuvo sus inicios en los trabajos de H. Feshbach y F. Iachello (Iachello, 1969; Feshbach y Iachello, 1973, 1974) quienes en 1969 lograron describir propiedades de núcleos ligeros en términos de bosones interactuantes, y de los trabajos de Janssen, Jolos y Dönaú que en 1974 sugirieron la descripción de estados cuadrupolares colectivos en los núcleos en términos del grupo SU(6).

Existen otras expansiones bosónicas para las funciones de onda nucleares, como las descritas en los trabajos de Sorensen (B. Sorensen (B. Sorensen, 1973), Kashimoto et al (Kashimoto et al, 1977) y Marshalek (Marshalek, 1974), entre otros; sin embargo, en el MBI el enfoque es diferente porque no se intenta derivar un Hamiltoniano bosónico a partir de una base fermiónica sino seguir el procedimiento inverso.

EN EL MODELO DE BOSONES INTERACTUANTES, LOS NUCLEOS PAR-PAR SON CONSIDERADOS COMO UN SISTEMA DE BOSONES MONOPOLARES CON MOMENTO ANGULAR Y PARIDAD  $J^{\Pi} = 0^{+}$  (BOSONES  $s$ ) Y DE BOSONES CUADRUPOLES CON MOMENTO ANGULAR Y PARIDAD  $J^{\Pi} = 2^{+}$  (BOSONES  $d$ ); ADICIONALMENTE, LOS BOSONES  $s$  Y  $d$  INTERACTUAN ENTRE SI CON INTERACCIONES DE UNO Y DE DOS CUERPOS.

---

\* Abreviadamente MBI.

Esta es la versión más simple del MBI (Arima y Iachello, 1975, 1976), conocida ahora como MBI-1. Posteriormente (Arima et al, 1977) se identificaron estos bosones como pares de nucleones (fermiones) de manera similar a como se forman los pares de Cooper (Cooper, 1956) en un gas de electrones de un metal superconductor. Esta identificación resultó ser trascendental, porque dió las bases para una descripción microscópica de los estados cuadrupolares colectivos, proporcionándose así una conexión directa con el modelo de capas. Una consecuencia inmediata de esta interpretación fué la posibilidad de considerar estos bosones como pares de dos protones (bosón de protón) ó de dos neutrones (bosón de neutrón). Estas últimas consideraciones dieron lugar a una nueva versión del MBI, conocida actualmente como MBI-2. Subsecuentemente, este modelo fué extendido con la introducción de fermiones no apareados, llegándose así a la posibilidad de tratar núcleos par-non y non-non (Iachello, Scholten, 1979). Esto último dió lugar al llamado *modelo de bosones y fermiones interactuantes*, dentro del cual se conocen ya dos versiones, el MBFI-1 y el MBFI-2, cuyo estudio abarca a muchos de los problemas actuales de estructura nuclear.

## 2. OPERADORES BOSONICOS.

Como se mencionó en la sección anterior, en el MBI-1 se establece que las excitaciones colectivas de los núcleos par-par pueden ser descritas en términos de un sistema de bosones con  $l=0$  (bosón *s*) y con  $l=2$  (bosón *d*). Como se trata de un problema de muchos cuerpos, un formalismo adecuado para resolverlo es el del *método de la segunda cuantización*.

---

\* Véase apéndice I.

De acuerdo a ello, se introducen operadores bosónicos de creación ( $b_{\lambda\mu}^\dagger$ ) y aniquilación ( $b_{\lambda\mu}$ ) con polaridad  $\lambda=0,2$  y componente  $\mu$ , i.e.,

$$b_{00}^\dagger \equiv s^\dagger, \quad b_{2\mu}^\dagger \equiv d_\mu^\dagger, \quad (2.1)$$

$$b_{00} \equiv s, \quad b_{2\mu} \equiv d_\mu, \quad (2.2)$$

y que satisfacen las relaciones de conmutación para bosones, i.e.,

$$[b^{\lambda\mu}, b_{\lambda',\mu'}^\dagger] = \delta_\lambda^\lambda \delta_\mu^\mu, \quad (2.3a)$$

$$[b_{\lambda\mu}, b_{\lambda',\mu'}] = [b_{\lambda\mu}^\dagger, b_{\lambda',\mu'}^\dagger] = 0, \quad (2.3b)$$

o bien, explícitamente

$$[s, s^\dagger] = 1, \quad [s, s] = [s^\dagger, s^\dagger] = 0, \quad (2.4a)$$

$$[d^\mu, d_\mu^\dagger] = \delta_\mu^\mu, \quad [d_\mu^\dagger, d_\mu^\dagger] = [d_\mu, d_\mu] = 0, \quad (2.4b)$$

$$[s, d_\mu^\dagger] = [s, d_\mu] = [s^\dagger, d_\mu^\dagger] = [s^\dagger, d_\mu] = 0. \quad (2.4c)$$

En la formulación de este modelo se establece además que el número total de bosones es finito, con un valor fijo para un núcleo determinado, como explicamos más adelante.

El número total de bosones del sistema está dado por el operador de número definido mediante la siguiente expresión

$$N = n_s + n_d, \quad (2.5)$$

donde  $n_s = s^\dagger s$  y  $n_d = d^\dagger d$  son los operadores de número para bosones  $s$  y  $d$  respectivamente. Los símbolos  $d^\dagger$  y  $d$  en la ecuación anterior denotan *operadores tensoriales irreducibles esféricos de rango dos*, donde la componente contravariante del operador  $d$  está definido por\*

$$d^\mu = (-1)^\mu d_{-\mu}. \quad (2.6)$$

Para núcleos par-par, el número total de bosones está dado por la mitad del número total de nucleones de valencia, siendo estos referidos a la capa cerrada más próxima ( $N, Z=8, 20, 28, 50, 82, 126$ ). Sea, por ejemplo, el núcleo  $^{146}_{56}\text{Ba}_{90}$ . En este caso se tiene seis protones de valencia con respecto a la capa  $Z=50$ , y ocho neutrones de valencia referidos a la capa  $N=82$ . El número total de bosones es por tanto  $N = 3 + 4 = 7$ . Análogamente para los núcleos  $^{146}_{78}\text{Pt}_{118}$  y  $^{128}_{54}\text{Xe}_{74}$ ; en ambos casos  $N = N_\pi + N_\nu = 2 + 4 = 6$ , pero para el  $^{146}_{78}\text{Pt}_{118}$  los protones y neutrones son referidos a las capas  $Z=82$  y  $N=126$ , respectivamente. Los bosones así formados son por tanto, de acuerdo al formalismo de *partícula-agujero* derivado del modelo de capas, llamados *bosones agujero*. Para el caso  $^{128}_{54}\text{Xe}_{74}$ , los protones de valencia son referidos a la capa  $Z=50$ , que constituyen cuatro *protones partícula* y los cuales se aparean para formar dos *bosones partícula*. A su vez, para los neutrones se tiene que son ocho neutrones de valencia tipo *agujero* (referidos a la capa  $N=82$ ), constituyendo así cuatro *bosones agujero*.

\* En la literatura suele utilizarse la notación alternativa  $\tilde{d}_\mu$  y  $d_\mu$  que corresponde en nuestra notación a  $\tilde{d}_\mu$  y  $d_\mu$ , respectivamente.

### 3. HAMILTONIANO.

El Hamiltoniano más general que involucra interacciones de uno y de dos cuerpos entre bosones  $s$  y  $d$  puede expresarse, en lenguaje de segunda cuantización, en la forma

$$H = E_0 + \sum_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta} + \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{1}{2} U_{\alpha\beta\gamma\delta} b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta}^{\dagger} b_{\gamma} b_{\delta}, \quad (2.7)$$

en donde los términos de la forma  $b^{\dagger}b$  representan las contribuciones de un cuerpo, y  $b^{\dagger}b^{\dagger}bb$  las contribuciones de dos cuerpos. El hecho de que en (2.7) el número de operadores de creación sea igual al número de operadores de aniquilación asegura la condición de que el número total de bosones,  $N$ , se conserva.

Tal como está expresado en la ec. (2.7), la condición de que el Hamiltoniano sea un operador escalar (invariante) ante rotaciones en el espacio no es evidente. Para que se cumpla este requisito resulta conveniente escribirlo en la forma

$$H = E_0 + \sum_{\ell} \epsilon_{\ell} (b_{\ell}^{\dagger} \cdot b_{\ell}) + \sum_L \sum_{\ell_1 \ell_2} \sum_{\ell'_1 \ell'_2} \frac{1}{2} U_{\ell_1 \ell_2 \ell'_1 \ell'_2}^{(L)} [(b_{\ell_1}^{\dagger} b_{\ell_2}^{\dagger})^{(L)} \times (b_{\ell'_1} b_{\ell'_2})^{(L)}] \begin{matrix} (0) \\ 0 \end{matrix}, \quad (2.8)$$

donde  $[A^{(L)} \times B^{(L')}]^{(L'')}$  denota el acoplamiento de momento angular del tensor  $A^{(L)}$  y  $B^{(L')}$  a un momento angular  $(L'')$ .

En la mayoría de los casos se considera términos que involucran interacciones hasta de dos bosones.

Explícitamente, en términos de bosones  $s$  y  $d$ , el Hamiltoniano (2.8) es convencionalmente escrito en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 H = & E_0 + \epsilon_s (s^\dagger \cdot s) + \epsilon_d (d^\dagger \cdot d) \\
 & + \sum_{L=0,2,4} 1/2 (2L+1)^{1/2} c_L [(d^\dagger \times d^\dagger)^{(L)} \times [d \times d]^{(L)}]_0^{(0)} \\
 & + \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 [(d^\dagger \times d^\dagger)^{(2)} \times [d \times s]^{(2)} + [d^\dagger \times s^\dagger]^{(2)} \times [d \times d]^{(2)}]_0^{(0)} \\
 & + \frac{1}{2} v_0 [(d^\dagger \times d^\dagger)^{(0)} \times [s \times s]^{(0)} + [s^\dagger \times s^\dagger]^{(0)} \times [d \times d]^{(0)}]_0^{(0)} \\
 & + u_2 [(d^\dagger \times s^\dagger)^{(2)} \times [d \times s]^{(2)}]_0^{(0)} \\
 & + \frac{1}{2} u_0 [(s^\dagger \times s^\dagger)^{(0)} \times [s \times s]^{(0)}]_0^{(0)}. \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

Este Hamiltoniano contiene dos parámetros que involucran la interacción de un sólo bosón:  $\epsilon_s$  y  $\epsilon_d$ . Estos parámetros multiplican respectivamente a los operadores de número para bosones  $s$  y  $d$ . Adicionalmente contiene siete parámetros de interacción que involucran a dos bosones:  $c_0, c_2, c_4, v_2, v_0, u_2, u_0$ , los cuales están relacionados con los elementos de matriz del Hamiltoniano (2.9) con respecto a las funciones de onda de dos bosones como sigue:

$$\langle dd | L | H | dd \rangle = 2\epsilon_d + c_L, \tag{2.10a}$$

$$\langle ds | D | H | ds \rangle = \epsilon_s + \epsilon_d + (5)^{-1/2} u_2, \tag{2.10b}$$

$$\langle ss | s | H | ss \rangle = 2\epsilon_s + u_0, \tag{2.10c}$$

$$\langle dd | D | H | ds \rangle = (5)^{-1/2} v_2, \tag{2.10d}$$

$$\langle dd | s | H | ss \rangle = v_0. \tag{2.10e}$$

Para un valor fijo de bosones,  $N$ , el Hamiltoniano (2.10) puede

modificarse eliminando el término para  $n_s$ . En particular, el término  $c_s(s^\dagger \cdot s)$  puede escribirse como

$$c_s(s^\dagger \cdot s) = c_s n_s = c_s(N - n_d) = c_s N - c_s(d^\dagger \cdot d). \quad (2.11)$$

Para un valor fijo de  $N$ , el operador  $N$  es diagonal y con eigenvalor  $N$ . Eliminando  $n_s$  en el Hamiltoniano (2.9) se tiene

$$\begin{aligned} H = E_0 + \varepsilon' (d^\dagger \cdot d) \\ + \sum_{L=0,2,4} 1/2 (2L+1) c'_L [[d^\dagger \times d^\dagger]^{(L)} \times [d \times d]^{(L)}]_0^{(0)} \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 [[d^\dagger \times d^\dagger]^{(2)} \times [d \times s]^{(2)} + [d^\dagger \times s^\dagger]^{(2)} \times [d \times d]^{(2)}]_0^{(0)} \\ + \frac{1}{2} v_0 [[d^\dagger \times d^\dagger]^{(0)} \times [s \times s]^{(0)} + [s^\dagger \times s^\dagger]^{(0)} + [d \times d]^{(0)}]_0^{(0)}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

con

$$E_0 = \varepsilon_s N + 1/2 u_0 N(N-1) \quad (2.13a)$$

$$\varepsilon' = (\varepsilon_d - \varepsilon_s) + \frac{1}{\sqrt{5}} u_2(N-1) - u_0(N-1), \quad (2.13b)$$

$$c'_L = c_L + u_0 - \frac{2}{\sqrt{5}} u_2, \quad (2.13c)$$

donde se utilizó el hecho de que

$$\sum_L (2L+1)^{1/2} [[d^\dagger \times d^\dagger]^{(L)} \times [d \times d]^{(L)}]_0^{(0)}$$

$$= n_d (n_d - 1) \quad (2.14a)$$

$$\frac{1}{2} u_0 (s^\dagger)^2 s^2 = \frac{1}{2} u_0 [N(N-1) - 2Nn_d + n_d(n_d + 1)], \quad (2.14b)$$

Y

$$u_2 [d^\dagger \times d]^{(0)} s^\dagger s = u_2 (5)^{-1/2} n_d (N - n_d) \quad (2.14c)$$

De acuerdo al Hamiltoniano (2.12), el espectro de un núcleo con número de bosones  $N$  depende solamente de los seis parámetros  $c'_0$ ,  $c'_2$ ,  $c'_4$ ,  $c'$ ,  $v_2$ , y  $v_0$ . Los tres parámetros restantes contribuyen con una dependencia lineal y cuadrática en el número total de bosones. Estos términos son irrelevantes para la descripción del espectro de excitación de un núcleo. Sin embargo, como veremos más adelante, será necesario otro parámetro que multiplica a  $Nn_d$  cuando consideremos series de isótopos y de isótonos.

#### 4. OPERADORES DE TRANSICION.

En el MBI-1 los operadores de transición electromagnética son construidos también desde un punto de vista fenomenológico. En su definición se busca que tengan la mayor simplicidad posible, de modo que a primera aproximación sean expresados en términos de operadores que involucran a un sólo bosón. Adicionalmente deben cumplir las propiedades de invariancia adecuadas ante rotaciones. Los estados descritos por el MBI-1 son estados con paridad par, de modo que operadores de transición construidos con bosones  $s$  y  $d$  no pueden dar lugar a transiciones de carácter eléctrico de grado im-

par (como T(E1)) ó transiciones magnéticas de grado par. Siguiendo estas consideraciones, los operadores de transición de menor orden son definidos en primera aproximación como:

$$T(E0) = a_0 n_b + b_0 n_d = a_0 N + (b_0 - a_0) n_d, \quad (2.15a)$$

$$T(M1) = a_1 [d^\dagger \times d]^{(1)} = a_0 (10)^{-1/2} L, \quad (2.15b)$$

$$T(E2) = a_2 [s^\dagger \times d + d^\dagger \times s]^{(2)} + b_2 [d^\dagger \times d]^{(2)}. \quad (2.15c)$$

Para un núcleo dado, N se mantiene fijo, de modo que el primer término en T(E0) es constante, y por tanto no induce transiciones. Para este caso, las transiciones T(E0) son proporcionales a los elementos de matriz del operador de número para bosones d.

Por otro lado, el operador T(M1) es proporcional al momento angular total del sistema y, por tanto, no da lugar a transiciones. Para estudiar transiciones T(M1) en esta versión del modelo es necesario considerar términos de segundo orden de la forma  $[[d^\dagger \times s] \times L]^{(1)}$  y  $[[d^\dagger \times d]^{(2)} \times L]^{(1)}$ .

Finalmente, el operador T(E2), para valores particulares de  $a_2/b_2$  corresponde al operador cuadrupolar eléctrico.

## TRATAMIENTO ALGEBRAICO DEL HAMILTONIANO MBI-1

1. EL GRUPO  $U(6)$ .

## 1.1 Generadores.

El Hamiltoniano del MBI-1, ec. 2.9, está construido en términos de los 36 productos bilineales de operadores bosónicos de creación  $b_{\lambda\mu}^+$  y aniquilación  $b_{\lambda\mu}$  para bosones  $s$  y  $d$

$$\mathfrak{g}: C_{\lambda\mu}^{\lambda'\mu'} = b_{\lambda\mu}^+ b^{\lambda'\mu'} \quad (3.1)$$

donde  $\lambda, \lambda' = 0, 2$  y  $\mu, \mu' = \pm 2, \pm 1, 0$ . Estos productos satisfacen las relaciones de conmutación

$$\left[ C_{\lambda\mu}^{\lambda'\mu'}, C_{\lambda''\mu''}^{\lambda'''\mu'''} \right] = C_{\lambda''\mu''}^{\lambda'''\mu'''} \delta_{\lambda''}^{\lambda'} \delta_{\mu''}^{\mu'} - C_{\lambda''\mu''}^{\lambda'''\mu'''} \delta_{\lambda''}^{\lambda'} \delta_{\mu''}^{\mu'}. \quad (3.2)$$

De manera general, cualquier conjunto de operadores  $X_\mu$  que satisfacen las relaciones de conmutación

$$[X_\mu, X_\nu] = \sum_{\lambda=1}^F C_{\mu\nu}^\lambda X_\lambda \quad (3.3)$$

donde  $C_{\mu\nu}^\lambda = -C_{\nu\mu}^\lambda$ , junto con la identidad de Jacobi

$$\left[ [X_\nu, X_\mu], X_\lambda \right] + \left[ [X_\mu, X_\lambda], X_\nu \right] + \left[ [X_\lambda, X_\nu], X_\mu \right] = 0, \quad (3.4)$$

se dice que forman un *Algebra de Lie*.

De esta forma, los 36 productos bilineales de la ec. (3.1) constituyen un Algebra de Lie, y son los generadores del grupo de

transformaciones unitarias en seis dimensiones, el grupo U(6).

Las constantes  $C_{\mu\nu}^{\lambda}$ , son conocidas como las *constantes de estructura del grupo*, y para los generadores de la ec.(3.1) estas constantes sólo toman los valores 0 y  $\pm 1$ . Estos generadores definen transformaciones ó rotaciones de un vector en seis dimensiones y matemáticamente poseen la estructura de un grupo.

Es útil escribir los generadores del grupo U(6) definidos en la ec.(3.1) en forma acoplada, es decir, utilizando el acoplamiento de los tensores esféricos  $b_{\lambda\mu}^{\dagger}$  y  $b_{\lambda\mu}$  a un nuevo tensor esférico  $C_k^k$ . De esta forma los 36 generadores de U(6) son escritos simbólicamente como

$$C_H^{(L)}(\ell, \ell') = [b_{\ell}^{\dagger} \times b_{\ell'}]_H^{(L)} \\ = \sum_{m, m'} \langle \ell m \ell' m' | LM \rangle b_{\ell m}^{\dagger} b_{\ell' m'} \quad (3.5)$$

donde  $\langle \ell m \ell' m' | LM \rangle$  es un *coeficiente de Clebsch-Gordan* (Rose, 1957); en términos de los cuales las relaciones de conmutación (3.2) adquieren la forma

$$\left[ C_H^{(L)}(\ell, \ell'), C_H^{(L')}(\ell'', \ell''') \right] \\ = \sum_{L'', H'', L'''} (2L+1)^{1/2} (2L'+1)^{1/2} \langle L M L' M' | L'' M'' \rangle (-1)^{L-L'} \\ \times \left[ (-1)^{L+L'+L''} \left\{ \begin{matrix} L & L' & L'' \\ \ell & \ell' & \ell'' \end{matrix} \right\} \delta_{\ell' \ell''} C_H^{(L''')}(\ell, \ell''') \right. \\ \left. - \left\{ \begin{matrix} L & L' & L'' \\ \ell & \ell' & \ell'' \end{matrix} \right\} \delta_{\ell \ell''} C_H^{(L''')}(\ell'', \ell') \right] \quad (3.6)$$

En esta ecuación los símbolos  $\left\{ \begin{matrix} L & L' & L'' \\ \ell & \ell' & \ell'' \end{matrix} \right\}$  denotan coeficientes  $6j$  de Wigner.

La expresión explícita de estos generadores, en términos de bosones  $s$  y  $d$ , es la siguiente:

$$\begin{array}{ll}
 C_0^{(0)}(s, s) = [s^\dagger \times s]_0^{(0)} & 1 \\
 C_0^{(0)}(d, d) = [d^\dagger \times d]_0^{(0)} & 1 \\
 C_\mu^{(1)}(d, d) = [d^\dagger \times d]_\mu^{(1)} & 3 \\
 C_\mu^{(2)}(d, d) = [d^\dagger \times d]_\mu^{(2)} & 5 \\
 C_\mu^{(3)}(d, d) = [d^\dagger \times d]_\mu^{(3)} & 7 \\
 C_\mu^{(4)}(d, d) = [d^\dagger \times d]_\mu^{(4)} & 9 \\
 C_\mu^{(2)}(d, s) = [d^\dagger \times s]_\mu^{(2)} & 5 \\
 C_\mu^{(2)}(s, d) = [s^\dagger \times d]_\mu^{(2)} & 5
 \end{array} \tag{3.7}$$

---

36

El número de componentes independientes de cada tensor aparece indicado a la derecha.

### 1.2 Subálgebras bosónicas.

Nos interesa clasificar estados y construir una base en términos del grupo  $U(6)$ . Para este propósito necesitamos conocer las subálgebras del álgebra dinámica  $U(6)$ . En general, para un álgebra  $g$ , cualquier subconjunto  $h$  de  $g$  que cierre ante conmutación se dice que forman una *subálgebra*. Las funciones de onda nucleares buscadas deben representar estados con *buen momento angular*; por tanto, dentro de las subálgebras de  $U(6)$ , debe encontrarse siempre el *álgebra de rotaciones en tres dimensiones*, representada por el grupo especial ortogonal  $SO(3)$ .

#### Subálgebra bosónica $U(5)$ .

Una subálgebra de  $U(6)$  puede obtenerse considerando los 25 operadores en bosones  $d$ :

$$\begin{aligned}
C_0^{(0)}(d,d) &= [d^\dagger \times d]_0^{(0)} & 1 \\
C_\mu^{(1)}(d,d) &= [d^\dagger \times d]_\mu^{(1)} & 3 \\
C_\mu^{(2)}(d,d) &= [d^\dagger \times d]_\mu^{(2)} & 5 \\
C_\mu^{(3)}(d,d) &= [d^\dagger \times d]_\mu^{(3)} & 7 \\
C_\mu^{(4)}(d,d) &= [d^\dagger \times d]_\mu^{(4)} & 9
\end{aligned} \tag{3.8}$$

---

25

Estos operadores cierran formando el álgebra U(5). Por otro lado, los diez operadores

$$\begin{aligned}
C_\mu^{(1)}(d,d) &= [d^\dagger \times d]_\mu^{(1)} & 3 \\
C_\mu^{(3)}(d,d) &= [d^\dagger \times d]_\mu^{(3)} & 7
\end{aligned}$$


---

10 (3.9)

forman una subálgebra de U(5), el álgebra ortogonal en cinco dimensiones, que se denota como O(5). Los tres operadores

$$C_\mu^{(1)}(d,d) = [d^\dagger \times d]_\mu^{(1)} \tag{3.10} \quad 3$$

cierran y generan el álgebra de rotaciones en el espacio en tres dimensiones, SO(3).

Finalmente, la componente

$$C_0^{(1)}(d,d) = [d^\dagger \times d]_0^{(1)} \tag{3.11} \quad 1$$

genera el álgebra de rotaciones alrededor del eje z, que se denota como SO(2). Por consiguiente, se ha identificado la cadena de grupos (algebras)

$$U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset SO(3) \supset SO(2) \quad (3.12)$$

Subálgebra Bosónica SU(3).

Se puede obtener una segunda cadena de grupos considerando las siguientes combinaciones de operadores

$$\begin{aligned} C_0^{(0)}(s, s) + \sqrt{5} C_0^{(0)}(d, d) &= [s^\dagger \times s]_0^{(0)} + \sqrt{5} [d^\dagger \times d]_0^{(0)} & 1 \\ C_\mu^{(1)}(d, d) &= [d^\dagger \times d]_\mu^{(1)} & 3 \\ C_\mu^{(2)}(d, s) + C_\mu^{(2)}(s, d) \pm \frac{1}{2}\sqrt{7} C_\mu^{(2)}(d, d) & & \\ &= [d^\dagger \times s + s^\dagger \times d]_\mu^{(2)} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7} [d^\dagger \times d]_\mu^{(2)} & 5 \\ & & \hline & & 9 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Estos operadores cierran ante conmutación y constituyen el álgebra de transformaciones unitarias en tres dimensiones, U(3); esto se cumple para ambos signos ( $\pm$ ) en (3.13). El operador  $C_\mu^{(2)}(d, s) + C_\mu^{(2)}(s, d) \pm \frac{1}{2}\sqrt{7} C_\mu^{(2)}(d, d)$  es proporcional al operador cuadrupolar eléctrico. Los signos  $\pm$  en este operador corresponden, respectivamente, a momentos cuadrupolares positivos (+) y negativos (-). Dado que la gran mayoría de los núcleos exhiben momentos cuadrupolares negativos, usualmente se considera el signo negativo en la ec. (3.13):

$$Q_\mu = [d^\dagger \times s + s^\dagger \times d]_\mu^{(2)} - \frac{1}{2}\sqrt{7} [d^\dagger \times d]_\mu^{(2)} \quad (3.14)$$

Por otro lado, el operador  $C_0^{(0)}(s,s) + \sqrt{5}C_0^{(0)}(d,d)$  se identifica como el operador de *número total de bosones*,  $N$ , (ec. 2.5). Como hemos mencionado ya, en el MBI-1 supondremos que este número se conserva, por lo que en lugar de utilizar el álgebra  $U(3)$  es conveniente considerar el álgebra donde  $N$  se excluye. De acuerdo a esto, se llega al álgebra de transformaciones especiales unitarias en tres dimensiones,  $SU(3)$ ; los generadores de esta álgebra son ocho, expresados por

$$[d^\dagger \times d]_\mu^{(1)} \equiv \sqrt{10} L_\mu, \quad (3.15a)$$

$$Q_\mu \equiv [s^\dagger \times d + d^\dagger \times s]_\mu^{(2)} - \frac{1}{2}\sqrt{7} [d^\dagger \times d]_\mu^{(2)}. \quad (3.15b)$$

El álgebra  $SU(3)$  incluye como subálgebra a  $SO(3)$ , formada por los tres operadores

$$C_\mu^{(1)}(d,d) = [d^\dagger \times d]_\mu^{(1)} \quad (3.16)$$

y a la subálgebra  $SO(2)$  constituida por el único operador

$$C_0^{(1)}(d,d) = [d^\dagger \times d]_0^{(1)}. \quad (3.17)$$

Por lo tanto, otra posible cadena de subálgebras es

$$U(6) \supset SU(3) \supset SO(3) \supset SO(2) \quad (3.18)$$

#### Subálgebra bosónica $O(6)$ .

Una tercera cadena de subálgebras surge cuando se considera los 15 operadores

$$\begin{array}{rcl}
C_{\mu}^{(1)}(d,d) = [d^{\dagger} \times d]_{\mu}^{(1)} & & 3 \\
C_{\mu}^{(3)}(d,d) = [d^{\dagger} \times d]_{\mu}^{(3)} & & 7 \\
C_{\mu}^{(2)}(d,s) + C_{\mu}^{(2)}(s,d) = [d^{\dagger} \times s + s^{\dagger} \times d]_{\mu}^{(2)} & & 5 \\
\hline
& & 15
\end{array}
\tag{3.19}$$

Estos operadores cierran entre sí definiendo el álgebra  $O(6)$  de transformaciones ortogonales en seis dimensiones. Ignorando los cinco operadores  $C_{\mu}^{(2)}(d,s) + C_{\mu}^{(2)}(s,d)$ , se tiene los diez operadores

$$\begin{array}{rcl}
C_{\mu}^{(1)}(d,d) = [d^{\dagger} \times d]_{\mu}^{(1)} & & 3 \\
C_{\mu}^{(3)}(d,d) = [d^{\dagger} \times d]_{\mu}^{(3)} & & 7 \\
\hline
& & 10
\end{array}
\tag{3.20}$$

que constituyen, como se mencionó anteriormente, el álgebra  $O(5)$ . Nuevamente, subálgebras de  $O(5)$  las constituyen los tres operadores de la ec. 3.16 (subálgebra  $SO(3)$ ) y el operador (3.17), que corresponde al subálgebra  $SO(2)$ . Por tanto, una tercera cadena es

$$U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset SO(3) \supset SO(2)
\tag{3.21}$$

### 1.3 Operadores de Casimir.

Para un álgebra dada, existe un conjunto de operadores  $C$  (llamados *operadores invariantes* o *de Casimir*) tales que

$$[C, X_{\alpha}] = 0, \text{ para toda } \alpha.
\tag{3.22}$$

El número de operadores invariantes de un álgebra, llamado el rango del álgebra, es igual al número de índices que se necesitan para caracterizar las representaciones irreducibles del grupo.

En general, un operador de Casimir puede ser lineal, cuadrático, cúbico, ... en los generadores. Al operador de Casimir formado por el producto de  $p$  generadores, se le llamará correspondientemente operador de Casimir de orden  $p$ .

En nuestro estudio sólo será necesario considerar hasta operadores de Casimir cuadráticos. El operador de Casimir de primer orden de  $U(6)$  es el operador de número total de bosones, ya mencionado antes, y el cual está expresado por

$$C_1 U(6) = C_0^{(0)}(s, s) + \sqrt{5} C_0^{(0)}(d, d) = n_s + n_d = N. \quad (3.23)$$

Este operador claramente conmuta con los 36 generadores de  $U(6)$ , ya que éstos no cambian el número total de bosones, siendo de la forma  $b_{\ell m}^\dagger b_{\ell' m'}$ :

$$[N, C_N^{(L)}(\ell, \ell')] = 0 \quad \text{para todo } L, M, \ell, \ell'. \quad (3.24)$$

El operador de Casimir de primer orden de  $U(5)$  se define como el operador de número de bosones  $d$ :

$$C_1 U(5) = n_d = \sqrt{5} [d^\dagger \times d]_0^{(0)}, \quad (3.25)$$

el cual conmuta con todos los generadores del algebra, dados por las ecs. (3.8).

El operador de Casimir de segundo orden (cuadrático) de  $O(5)$  está dado por

$$\begin{aligned}
 C_2 O(5) &= 2 \left\{ [d^\dagger \times d]^{(11)} \cdot [d^\dagger \times d]^{(11)} + [d^\dagger \times d]^{(3)} \cdot [d^\dagger \times d]^{(3)} \right\} \\
 &= n_d (n_d + 3) - 5 [d^\dagger \times d^\dagger]^{(0)} \cdot [d \times d]^{(0)}. \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

El operador de Casimir cuadrático de  $SO(3)$  es el operador de momento angular,

$$\begin{aligned}
 C_2 O(3) &= L \cdot L \\
 &= 10 [d^\dagger \times d]^{(11)} \cdot [d^\dagger \times d]^{(11)} \\
 &= 6n_d - 6 [[d^\dagger \times d]]^{(0)} \cdot [d \times d]^{(0)}_0 \\
 &\quad - 3\sqrt{5} [[d^\dagger \times d^\dagger]^{(2)} \times [d \times d]^{(2)}]^{(0)}_0 \\
 &\quad + 12 [[d^\dagger \times d^\dagger]^{(4)} \times [d \times d]^{(4)}]^{(0)}_0. \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

Por otro lado, dado que el grupo  $SU(3)$  incluye como generadores a las tres componentes  $L_\mu$  ( $\mu=0,\pm 1$ ) del momento angular y las cinco componentes  $Q_\mu$  ( $\mu=\pm 2, \pm 1, 0$ ) del operador cuadrupolar (ecs. 3.15), el correspondiente operador de Casimir cuadrático resulta ser una combinación lineal de los productos escalares

$$Q \cdot Q = \sum_{\mu=-2}^2 (-1)^\mu Q_\mu Q_{-\mu} \quad Y \quad (3.28)$$

$$L^2 = L \cdot L, \quad (3.29)$$

donde  $L^2$  es el invariante (Casimir) de  $SO(3)$ .

El operador de Casimir de SU(3) corresponde a la combinación

$$C_2 SU(3) = \frac{4}{3} Q \cdot Q + \frac{1}{2} L \cdot L. \quad (3.30)$$

Finalmente, escribimos el operador de  $C_2 O(6)$  como

$$\begin{aligned} C_2 O(6) &= N(N+4) - \left[ (d^\dagger \cdot d^\dagger) + (s^\dagger)^2 \right] \left[ (d \cdot d) + s^2 \right] \\ &= C_2 O(5) - (d^\dagger \cdot d^\dagger) s^2 - (s^\dagger)^2 (d \cdot d) \\ &\quad + 2n_s n_d + n_d + 5n_s. \end{aligned} \quad (3.31)$$

## 2. HAMILTONIANO MBI-1.

En las secciones anteriores se demostró que U(6) es el grupo dinámico del Hamiltoniano para un sistema de bosones  $s$  y  $d$  con interacciones de uno y de dos cuerpos. Esto significa que el espacio de Hilbert asociado a este operador está caracterizado por una sola representación irreducible de U(6),  $[N]$ , que denota al número total de bosones.

En esta sección se demostrará que las interacciones entre bosones  $s$  y  $d$  son tales que el Hamiltoniano de este sistema puede ser escrito en términos de los operadores de Casimir (invariantes) del grupo U(6), y sus subgrupos discutidos en la sección anterior.

En general, el Hamiltoniano (2.9) debe ser diagonalizado numéricamente; sin embargo, en circunstancias especiales el problema de eigenvalores correspondiente puede resolverse en forma cerrada. Estas situaciones, llamadas SIMETRÍAS DINÁMICAS, tienen un papel relevante en el desarrollo del modelo de bosones interac-

tuantes. Estas simetrías dinámicas se presentan cuando el HAMILTONIANO DE UN SISTEMA PUEDE ESCRIBIRSE EN TERMINOS DE LOS OPERADORES DE CASIMIR DE UNA SOLA CADENA DE GRUPOS.

Examinando la ec. (2.9) para el Hamiltoniano del MBI-1, se tiene que la parte de interacción entre dos bosones consiste de siete interacciones hermiteanas independientes, que denotamos como sigue:

$$\begin{aligned}
 \hat{A}_L &= [[d^\dagger \times d^\dagger]^{(L)} \times [d \times d]^{(L)}]^{(0)}, & (L=0, 2, 4) \\
 \hat{B} &= [[d^\dagger \times s^\dagger]^{(2)} \times [d \times s]^{(2)}]^{(0)}, \\
 \hat{C} &= [[s^\dagger \times s^\dagger]^{(0)} \times [s \times s]^{(0)}]^{(0)}, \\
 \hat{D} &= [[d^\dagger \times d^\dagger]^{(0)} \times [s \times s]^{(0)} + [s^\dagger \times s^\dagger]^{(0)} \times [d \times d]^{(0)}]^{(0)} \\
 \hat{E} &= [[d^\dagger \times d^\dagger]^{(2)} \times [d \times s]^{(2)} + [d^\dagger \times s^\dagger]^{(2)} \times [d \times d]^{(2)}]^{(0)}
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$

Los operadores  $\hat{A}_L$  ( $L=0, 2, 4$ ) representan las interacciones independientes que involucran únicamente a los bosones  $d$ , las cuales pueden ser expresadas en términos de los operadores de Casimir  $n_d$ ,  $C_2 O(5)$  y  $L^2$ ; para demostrarlo, podemos considerar un Hamiltoniano para bosones  $s$  y  $d$  de la forma

$$H = cn_d + \frac{1}{2}c_0\hat{A}_0 + \sqrt{5}/2c_2\hat{A}_2 + \frac{3}{2}c_4\hat{A}_4, \tag{3.33}$$

De acuerdo a la ec. (3.26) podemos escribir

$$5\hat{A}_0 = -C_2 O(5) + n_d(n_d+3), \tag{3.34}$$

que junto con la ec. (3.27) y la relación  $n_d(n_d-1) = \hat{A}_0 + \sqrt{5}\hat{A}_2 + 3\hat{A}_4$  constituyen un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, cuya solución permite escribir el Hamiltoniano (3.33) en la forma

$$H = \epsilon n_d + \alpha n_d(n_d - 1) + \beta [n_d(n_d+3) - C_2 O(5)] + \gamma [L^2 - 6n_d], \quad (3.35)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= (1/14)(4c_2 + 3c_4), \\ \beta &= (10)^{-1}[c_0 - (10/7)c_2 + (3/7)c_4], \\ \gamma &= (1/14)(c_4 - c_2). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Por otro lado, las interacciones  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$  pueden expresarse en términos de los operadores  $n_s$  y  $n_d$  mediante las siguientes ecs.

$$\hat{B} = n_s n_d, \quad (3.37)$$

$$\hat{C} = n_s(n_s - 1). \quad (3.38)$$

A su vez, utilizando la ec. (3.31), se tiene que la interacción  $\hat{D}$  puede expresarse como

$$-\sqrt{5} \hat{D} = C_2 O(6) - C_2 O(5) - 2n_s n_d - n_d - 5n_s \quad (3.39)$$

Por tanto, sólo falta reescribir la interacción  $\hat{E}$  en términos de operadores de Casimir; para ello es necesario considerar la interacción cuadrupolo-cuadrupolo,  $Q^2 = Q \cdot Q$ . Haciendo uso de la ec. (3.14) para  $Q$  se tiene

$$\begin{aligned}
Q^2 &= \sqrt{5} [Q \times Q]_0^{(0)} \\
&= \sqrt{5} \left\{ \frac{7}{4} \left[ [d^\dagger \times d]^{(2)} \times [d^\dagger \times d]^{(2)} \right]^{(0)} \right. \\
&\quad - \sqrt{7} \left[ [d^\dagger \times d]^{(2)} \times [d^\dagger \times s + s^\dagger \times d]^{(2)} \right]^{(0)} \\
&\quad \left. + \left[ [d^\dagger \times s + s^\dagger \times d]^{(2)} \times [d^\dagger \times s + s^\dagger \times d]^{(2)} \right]^{(0)} \right\} .
\end{aligned}
\tag{3.40}$$

Utilizando técnicas de reacoplamiento de momento angular,  $Q^2$  puede expresarse como sigue:

$$\begin{aligned}
Q^2 &= -\sqrt{35} \left\{ \left[ [d^\dagger \times d^\dagger]^{(2)} \times d \right]_0^{(0)} s + s^\dagger \left[ d^\dagger \times [d \times d]^{(2)} \right]^{(0)} \right\} \\
&\quad + 4P^2 + \frac{1}{2} C_2 O(5) + \frac{1}{8} L^2 - \frac{7}{2} n_d^2 - (11/2) n_d + 4N n_d - N^2 + 6N,
\end{aligned}
\tag{3.41}$$

donde  $P^2 = P^\dagger \cdot P$  está definido como

$$P^2 \equiv \frac{1}{4} (d^\dagger \cdot d^\dagger + s^\dagger \cdot s^\dagger) (d \cdot d + s \cdot s),
\tag{3.42}$$

y el cual está relacionado con  $C_2 O(6)$  mediante la relación

$$P^2 = \frac{1}{4} N(N+4) - \frac{1}{4} C_2 O(6).
\tag{3.43}$$

El operador  $P^2$  es conocido como *operador de apareamiento* (pairing) del grupo  $O(6)$ , y cuenta el número total de bosones acoplados por pares a  $L=0$ .

Usando todos estos resultados se encuentra finalmente

$$\hat{A}_0 = \frac{1}{5} n_d (n_d + 3) - \frac{1}{5} C_2 O(5), \quad (3.44a)$$

$$\hat{A}_2 = \frac{1}{7\sqrt{5}} (-L^2 + 2C_2 O(5) + 2n_d (n_d - 2)), \quad (3.44b)$$

$$\hat{A}_4 = \frac{1}{7} \left( \frac{1}{3} L^2 - \frac{1}{5} C_2 O(5) + \frac{6}{5} n_d (n_d - 2) \right), \quad (3.44c)$$

$$\hat{B} = \frac{1}{7\sqrt{5}} (N - n_d) n_d, \quad (3.44d)$$

$$\hat{C} = (N - n_d) (N - n_d - 1), \quad (3.44e)$$

$$\hat{D} = \frac{1}{\sqrt{5}} (C_2 O(5) - C_2 O(6) + 2N n_d - 2n_d^2 + 5N - 4n_d), \quad (3.44f)$$

$$\hat{E} = \frac{1}{\sqrt{35}} (-Q^2 - 4P^2 + \frac{1}{2} C_2 O(5) + \frac{1}{8} L^2 - \frac{7}{2} n_d^2 - (11/2) n_d + 4N n_d - N^2 + 6N). \quad (3.44g)$$

El Hamiltoniano del MBI-1 puede expresarse por lo tanto como

$$H = k_1 n_d + k_2 n_d^2 + k_3 N n_d + k_4 L^2 + k_5 C_2 O(5) + k_6 P^2 + k_7 Q^2 + k_8 N + k_9 N^2, \quad (3.45)$$

en donde los términos  $k_8 N$  y  $k_9 N^2$  contribuyen únicamente a a las energías de amarre y no necesitan ser incluidos para determinar energías de excitación, por lo que sólo se tiene siete parámetros ajustables. Como se ha mencionado anteriormente, si se considera un sólo núcleo, el operador de número total de bosones tiene un eigenvalor  $N$  constante y así el término  $k_3 N n_d$  no es independiente de  $k_1 n_d$  y sólo se tiene, para este caso, seis parámetros ajustables.

Los parámetros  $k_i$  están relacionados con las energías para un sólo bosón y con los elementos de matriz de la interacción entre dos bosones de la ec. (2.9) mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
k_1 &= c + (3/10)c_0 - \frac{2}{7}c_2 - \frac{18}{35}c_4 + \frac{1}{2}u_0 - \frac{2}{\sqrt{5}}v_0 \mp \frac{11}{2\sqrt{70}}v_2, \\
k_2 &= (1/10)c_0 + \frac{1}{7}c_2 + (9/35)c_4 - \frac{1}{\sqrt{5}}u_2 + \frac{1}{2}u_0 - \frac{1}{\sqrt{5}}v_0 \mp \frac{7}{2\sqrt{70}}v_2 \\
k_3 &= -u_0 + \frac{1}{\sqrt{5}}u_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}v_0 \pm \frac{4}{\sqrt{70}}v_2, \\
k_4 &= -(1/14)c_2 + (1/14)c_4 - \frac{1}{8\sqrt{70}}v_2, \\
k_5 &= -(1/10)c_0 + \frac{1}{7}c_2 - (3/70)c_4 + \frac{1}{2\sqrt{5}}v_0 \pm \frac{1}{2\sqrt{70}}v_2, \\
k_6 &= \frac{2}{\sqrt{5}}v_0 \pm \frac{4}{\sqrt{70}}v_2, \\
k_7 &= \mp \frac{1}{\sqrt{70}}v_2, \\
k_8 &= c_s - \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2\sqrt{5}}v_0 \mp \frac{6}{\sqrt{70}}v_2, \\
k_9 &= \frac{1}{2}u_0 - \frac{1}{2\sqrt{5}}v_0 \mp \frac{1}{\sqrt{70}}v_2,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

donde  $c = \varepsilon_d - c_s$ . El signo superior de  $v_2$  corresponde al operador cuadrupolar definido por Iachello y Arima (Arima et al, 1978) y el signo inferior al usado por Castaños et al (Castaños et al, 1979).

### 3. ESTADOS BASE.

En la sección anterior se demostró que el Hamiltoniano para un sistema de bosones  $s$  y  $d$  con interacciones de uno y de dos cuerpos puede expresarse en términos de los operadores de Casimir de las tres cadenas del grupo dinámico  $U(6)$  que contienen al grupo ortogonal  $SO(3)$ . Nuestro interés es ahora determinar los elementos de matriz de este Hamiltoniano, y para ello resulta necesario disponer de una base completa de estados que esté caracterizada por las representaciones irreducibles de alguna de las cadenas discutidas.

En las siguientes secciones vamos a discutir las bases caracterizadas por cada una de las subcadenas de grupos del grupo dinámico  $U(6)$  que contienen al grupo  $SO(3)$ .

### 3.1 Cadena $U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2)$ .

Para construir los estados caracterizados por las representaciones irreducibles de la cadena que aparece en el título de esta subsección se consideraron primero los estados clasificados por la cadena

$$U(5) \supset O(5) \supset O(3) \quad (3.47)$$

que fueron determinados explícitamente por Chacón, Moshinsky y Sharp (Chacón et al, 1976), quienes resolvieron en forma exacta el problema de las vibraciones cuadrupolares del núcleo, o equivalentemente, el problema asociado al oscilador armónico en cinco dimensiones, cuya estructura de grupos está dada por la cadena (3.47).

De acuerdo a estos autores, los estados del oscilador armónico en cinco dimensiones están clasificados por las representaciones irreducibles de la cadena de grupos (3.47) y son denotados por los *kets*

$$|n_d \nu \tau LM_L\rangle \quad (3.48)$$

Así, estos estados son eigenfunciones de los siguientes operadores

$$n_d |n_d \nu \tau LM_L\rangle = n_d |n_d \nu \tau LM_L\rangle, \quad (3.49a)$$

$$C_2 O(5) |n_d \nu \tau LM_L\rangle = \nu(\nu + 3) |n_d \nu \tau LM_L\rangle, \quad (3.49b)$$

$$L^2 |n_d \nu \tau LM_L\rangle = L(L + 1) |n_d \nu \tau LM_L\rangle, \quad (3.49c)$$

$$L_z |n_d \nu \tau LM_L\rangle = M_L |n_d \nu \tau LM_L\rangle, \quad (3.49d)$$

En términos de las coordenadas del modelo colectivo y de los ángulos de Euler

$$\beta, \gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3 \quad (3.50)$$

estos estados toman la forma

$$|n_d \nu \tau L M_L\rangle = F_j^{\nu}(\beta) \chi_{TLH}^{\nu}(\gamma, \theta_1), \quad (3.51)$$

donde  $j = (n_d - \nu)/2$  corresponde al número cuántico radial.

Explícitamente,

$$F_j^{\nu}(\beta) = \left[ \frac{2(j!)}{\Gamma(\nu+j+5/2)} \right]^{1/2} \beta^{\nu} L_j^{\nu+3/2}(\beta^2) \exp(-\beta^2/2), \quad (3.52a)$$

$$\chi_{TLH}^{\nu}(\gamma, \theta_1) = \pi^{5/4} 2^{-\nu/2} \sum \phi_k^{\nu \tau L}(\gamma) [D_{HK}^L(\theta_1) + (-1)^L D_{H-k}^L(\theta_1)], \quad (3.52b)$$

siendo  $L_j^{\nu+3/2}(\beta^2)$  polinomios de Laguerre. Las funciones  $\chi_{TLH}^{\nu}(\gamma, \theta_1)$  juegan el mismo papel para la cadena de grupos (3.47) que los armónicos esféricos  $Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)$  para la cadena  $O(3) \supset O(2)$ .

Adicionalmente, el índice  $\tau$  es un entero no negativo, y el cual denota el número máximo de tripletes de bosones acoplados a  $L=0$  en la función de onda (véase apéndice II); para valores fijos de  $\nu$  y  $L$ , el índice  $\tau$  satisface las desigualdades

$$\nu - L \leq 3\tau \leq \nu - (L/2), \quad L \text{ par} \quad (3.53a)$$

$$\nu - L \leq 3\tau \leq \nu - (L+3)/2, \quad L \text{ non} \quad (3.53b)$$

a partir de los cuales se puede demostrar (Chacón et al, 1976) que el número de estados diferentes para una  $\nu$  dada es  $d_{\nu} = \frac{1}{6}(\nu+1)(\nu+2)(2\nu+3)$ , que es exactamente la dimensión de la representación irreducible  $(\nu, 0)$  de  $O(5)$ . Las relaciones (3.53) indican que, para valores fijos de  $\nu$  y  $L$ , los valores de  $\tau$  que las satisfacen toman todos los valores enteros posibles entre un mínimo  $\tau_0$  y uno máximo  $\bar{\tau}_0 \geq \tau_0$ . De este modo en lugar de el índice  $\tau$  se utiliza un índice  $s$  definido por

$$s \equiv \tau - \tau_0 + 1, \quad (3.54)$$

y por lo tanto toma los valores  $s = 1, 2, 3, \dots, d(\nu, L)$ , donde  $d(\nu, L)$  es el número de representaciones irreducibles  $L$  de  $O(3)$  contenidas en una representación  $\nu$  de  $O(5)$

$$d(\nu, L) = \bar{\tau}_0 - \tau_0 + 1. \quad (3.55)$$

Para el desarrollo del MBI-1, Arima e Iachello (Arima et al, 1975) consideran al bosón  $s$  junto con las cinco componentes del bosón  $d$ . Así en este modelo se necesita incluir a la cadena (3.47) como subgrupos de  $U(6)$ . Para tal propósito se escribió el operador de número total de bosones  $s$  y  $d$  en la forma

$$N = n_d + s^\dagger s. \quad (3.56)$$

Los eigenestados del operador de número  $n_s \equiv s^\dagger s$ , i.e.,

$$(s^\dagger s) \langle \bar{\alpha} | n_s \rangle = n_s \langle \bar{\alpha} | n_s \rangle, \quad (3.57)$$

son las funciones de onda de un oscilador armónico unidimensional.

Por tanto, si se define (Castaños et al, 1979)

$$\langle \alpha_m, \bar{\alpha} | n_d \psi_S L M \rangle \equiv \langle \alpha_m | n_d \psi_S L M \rangle \langle \bar{\alpha} | n_s \rangle, \quad (3.58)$$

se obtienen los eigenestados buscados, lo que se demuestra mediante la aplicación de las ecs. (3.49) y (3.56).

De este modo los estados  $|n_d \psi_S L M\rangle$  representan un conjunto completo no ortonormal de estados caracterizados por las representaciones irreducibles de la cadena de grupos (3.12).

Para ortonormalizar estos estados se evalúa el producto escalar de las funciones  $\chi_{sLH}^{\psi_S}(\gamma, \theta_1)$ , definidas por la ec. (3.52b); es decir, consideramos

$$\begin{aligned} & \int \chi_{sLH}^{\psi_S}(\gamma, \theta_1) \chi_{s'L'H'}^{\psi_S'}(\gamma, \theta_1) dV \\ &= \delta_{\psi_S \psi_S'} \delta_{LL'} \delta_{HH'} 2^{3-\psi_S} \pi^{9/2} (2L+1)^{-1} \\ & \quad \times \int_0^\pi \sum_k \phi_k^{\psi_S L}(\gamma) \phi_k^{\psi_S' L'}(\gamma) \sin 3\gamma d\gamma \\ & \equiv \delta_{\psi_S \psi_S'} \delta_{LL'} \delta_{HH'} M_{ss'}(\psi, L) \end{aligned} \quad (3.59)$$

donde  $dV = \sin 3\gamma \sin \theta_2 d\gamma d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3$ , con  $0 \leq \theta_2, \gamma \leq \pi, 0 \leq \theta_1, \theta_3 \leq 2\pi$ .

La matriz  $||M_{ss'}(\psi, L)|| = M(\psi, L)$  es real y simétrica y por lo tanto existe una matriz ortogonal  $\Omega(\psi, L) = ||\Omega_{ss'}(\psi, L)||$ , tal que

$$\tilde{\Omega} M \Omega = \Lambda = ||c_s(\psi, L) \delta_{ss'}||, \quad (3.60)$$

donde  $\tilde{\phantom{x}}$  indica matriz transpuesta, y  $\Lambda$  es una matriz diagonal cuyos eigenvalores  $c_s(\psi, L)$ ,  $s=1, 2, \dots, d(\psi, L)$  son todos reales y positivos.

Si definimos ahora

$$X_{tLM}^{(s)}(\gamma, \theta_1) = \sum_{s=1}^{d(s,L)} [\epsilon_t(u, L)]^{-1/2} D_{st}(u, L) X_{sLM}^{(s)}(\gamma, \theta_1), \quad (3.61)$$

se tiene, usando (3.59) y (3.60) que

$$\int X_{tLM}^{(s)}(\gamma, \theta_1) X_{t'L'H'}^{(s')}(\gamma, \theta_1) dV = \delta_{ss'} \delta_{tt'} \delta_{LL'} \delta_{HH'}. \quad (3.62)$$

Podemos, por tanto, definir una base completa y ortonormal para la cadena (3.12) como

$$\begin{aligned} (\alpha_m, \bar{\alpha} | N n_d s t L M) &= \langle \bar{\alpha} | n_s \rangle (\alpha_m | n_d s t L M) \\ &= \langle \bar{\alpha} | n_s \rangle F_j^{(s)}(\beta) X_{tLM}^{(s)}(\gamma, \theta_1), \end{aligned} \quad (3.63)$$

con  $X_{tLM}^{(s)}(\gamma, \theta_1)$  definidas por (3.61), y  $\langle \bar{\alpha} | n_s \rangle$  representa la función de onda de un oscilador armónico unidimensional con  $F_j^{(s)}(\beta)$  dada por (3.52a).

### 3.2 Cadena $U(6) > SU(3) > O(3) > O(2)$ .

En esta sección se discute la estructura de las funciones de onda de la cadena de grupos (3.18). El primer paso es encontrar la descomposición de la representación  $[N]$  de  $U(6)$  en las representaciones  $(f_1, f_2)$  de  $SU(3)$ . En lugar de usar  $(f_1, f_2)$  es más común en Física Nuclear considerar los números  $\lambda$  y  $\mu$  introducidos por J.P. Elliott (Elliott, J.P., 1958)

\* Suele utilizarse la notación  $f_1 = h_1 - h_3$ ,  $f_2 = h_2 - h_3$ , donde  $[h_1, h_2, h_3]$  especifica el diagrama de Young de  $U(3)$ .

$$\lambda \equiv f_1 - f_2, \quad (3.64a)$$

$$\mu \equiv f_2. \quad (3.64b)$$

Los valores de  $(\lambda, \mu)$  contenidos en una representación simétrica [N] de U(6) están dados por la expresión

$$\sum_{k=0}^{[N/2]} \sum_{k'=0}^{[(N-k)/2]-k} (2N-6k-4k', 2k'), \quad (3.65)$$

donde [X] es la parte entera de X.

La cadena de grupos  $SU(3) \supset O(3)$  no es simplemente reducible y por tanto se requiere de un índice adicional denotado por  $\chi$ , el cual distingue L's que se repiten dentro de una misma representación de SU(3). La elección de  $\chi$  no es única. En la literatura existen diversos métodos para construir estos estados, siendo los más citados los de Elliott (Elliott, J.P., 1958), Bargmann-Moshinsky (Bargmann-Moshinsky, 1961, 1962) y el de Vergados (Vergados, 1963). En la base definida por Elliott (Elliott, 1958) se utiliza el índice K (en lugar de  $\chi$ ), el cual está relacionado con la proyección de L a lo largo del eje z fijo en el cuerpo.

De acuerdo al trabajo de Elliott (Elliott, 1958), los valores de L contenidos en cada representación  $(\lambda, \mu)$  de SU(3) están dados por el siguiente algoritmo

$$L = K, (K+1), (K+2), \dots, K + \max(\lambda, \mu), \quad (3.66)$$

donde

$$K = \text{entero} = \min(\lambda, \mu), \min(\lambda, \mu) - 2, \dots, 1, \text{ ó } 0, \quad (3.67)$$

con la excepción de  $K=0$ , para el cual

$$L = \max(\lambda, \mu), \max(\lambda, \mu) - 2, \dots, 1 \text{ ó } 0. \quad (3.68)$$

La base de Elliott no es una base ortogonal. Es por esta razón que resulta necesario introducir otra base, conocida como la base de Vergados (Vergados, 1968) y que puede ser construída a partir de la base de Elliott. Para este propósito consideremos los índices  $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$  que ocurren en una representación  $(\lambda, \mu)$  dada y donde  $K_1 < K_2 < \dots < K_n$ . La nueva base es clasificada de acuerdo a los índices  $\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2, \tilde{\chi}_3, \dots, \tilde{\chi}_n$  con  $\tilde{\chi}_1 < \tilde{\chi}_2 < \dots < \tilde{\chi}_n$  definidos como

$$\begin{aligned} |(\lambda, \mu), \tilde{\chi}_1, L, M_L\rangle &= |(\lambda, \mu), K_1, L, M_L\rangle_0, \\ |(\lambda, \mu), \tilde{\chi}_2, L, M_L\rangle &= x_{21} |(\lambda, \mu), K_1, L, M_L\rangle_0 + x_{22} |(\lambda, \mu), K_2, L, M_L\rangle_0, \\ &\dots \\ |(\lambda, \mu), \tilde{\chi}_1, L, M_L\rangle &= \sum_{j=1}^1 x_{1j} |(\lambda, \mu), K_j, L, M_L\rangle_0, \end{aligned} \quad (3.69)$$

donde los estados  $|(\lambda, \mu), K, L, M\rangle_0$  están relacionados con los estados de Elliott  $|(\lambda, \mu), K, L, M_L\rangle$  mediante la convención de fase

$$|(\lambda, \mu), K, L, M_L\rangle_0 = i^{\lambda+2\mu} |(\lambda, \mu), K, L, M_L\rangle \quad (3.70)$$

y los coeficientes  $x_{ij}$  se obtienen a partir de la condición

$$\langle (\lambda, \mu), \tilde{\chi}_1, L, M_L | (\lambda, \mu), \tilde{\chi}_j, L, M_L \rangle = \delta_{1j}. \quad (3.71)$$

En el MBI-1,  $\lambda$  es siempre un número par, de modo que  $\lambda + 2\mu$  es par, dando lugar a que la fase en la ecuación (3.70) sea +1 ó -1. Por otro lado, la secuencia de los índices  $\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2, \dots, \tilde{\chi}_n$  es la misma que la de los números  $K_1, \dots, K_n$ , pero los valores de L contenidos en cada  $\tilde{\chi}_i$  resultan ser distintos que los contenidos en  $K_i$ . Por esta razón cuando L ocurre en una representación  $(\lambda, \mu)$  una sola vez, entonces pertenece a la  $\tilde{\chi}$  más pequeña posible; si ocurre dos veces pertenece a las dos  $\tilde{\chi}$ 's más pequeñas, etc., con la excepción de  $\tilde{\chi} = 0$ , en cuyo caso los valores permitidos de L están restringidos a tener la misma paridad que  $\lambda$  (Vergados, 1963).

La clasificación completa de los estados de la cadena (3.18) está dada por

$$|[N], (\lambda, \mu), \tilde{\chi}, L, M_L\rangle. \quad (3.72)$$

En la siguiente tabla se indican los estados para  $N=1, 2, 3, 4$ :

U(6)	SU(3)		O(3)
N	$(\lambda, \mu)$	$\tilde{\chi}$	L
0	(0, 0)	0	0
1	(2, 0)	0	2, 0
2	(4, 0)	0	4, 2, 0
	(0, 2)	0	2, 0
3	(6, 0)	0	6, 4, 2, 0
	(2, 2)	0	4, 2, 0
		2	3, 2
	(0, 0)	0	0
4	(8, 0)	0	8, 6, 4, 2, 0
	(4, 2)	0	6, 4, 2, 0
		2	5, 4, 3, 2
	(0, 4)	0	4, 2, 0
	(2, 0)	0	2, 0

3.3 Cadena  $U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2)$ .

Para encontrar los estados caracterizados por las representaciones irreducibles de la cadena de grupos que aparece en el título de esta sección es necesario utilizar, en lugar de las coordenadas

$$\bar{\alpha}, \beta, \gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3 \quad (3.73)$$

definidas anteriormente, al nuevo conjunto

$$b, \delta, \gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3 \quad (3.74)$$

donde

$$\bar{\alpha} \equiv b \cos \delta, \quad \beta \equiv b \sin \delta, \quad (3.75)$$

con  $0 \leq \delta \leq \pi$ .

En términos de estas nuevas coordenadas el operador de número  $N$  toma la forma

$$N = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{b^5} \frac{\partial}{\partial b} b^5 \frac{\partial}{\partial b} + \frac{1}{b^2} C_2 O(6) + b^2 \right) - 3, \quad (3.76)$$

el cual está relacionado directamente con el Hamiltoniano de un oscilador armónico en seis dimensiones mediante la ecuación

$$H = N + 3. \quad (3.77)$$

A su vez, el operador de Casimir  $C_2 O(6)$  puede reescribirse en la forma

$$\begin{aligned}
C_2O(6) &= C_2O(5) + n_d(s^\dagger s + 1) + (n_d + 5)(s^\dagger s) \\
&\quad - (\beta^2 - \beta \partial/\partial\beta - n_d - 5)(s)^\dagger s \\
&\quad - (\beta^2 + \beta \partial/\partial\beta - n_d)(s^\dagger)^\dagger s,
\end{aligned} \tag{3.78}$$

donde

$$\beta^2 = \sum_m \alpha_m \alpha_m = \sum_m \alpha_m (-1)^m \alpha_{-m}, \tag{3.79a}$$

$$\beta \frac{\partial}{\partial\beta} = i \sum_m \alpha_m \pi_m = i \sum_m (-1)^m \alpha_m \pi_{-m}, \tag{3.79b}$$

$$n_d = \frac{1}{2} (\beta^2 + \pi^2) - \frac{5}{2}, \tag{3.79c}$$

$$\begin{aligned}
\pi^2 &= \sum_m \pi_m \pi_m = \sum_m \pi_m (-1)^m \pi_{-m} \\
&= - \left( \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial\beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{1}{\beta^2} C_2O(5) \right).
\end{aligned} \tag{3.79d}$$

Utilizando propiedades de los polinomios de Laguerre (I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, 1965), se puede encontrar el efecto de  $\beta^2$  y  $\beta \partial/\partial\beta$  sobre las funciones  $F_j^{(s)}(\beta)$

$$\left[ \beta^2 + \beta \frac{\partial}{\partial\beta} \right] F_j^{(s)}(\beta) = (s + 2j) F_j^{(s)}(\beta) - 2[j(s + j + 3/2)]^{1/2} F_{j-1}^{(s)}(\beta), \tag{3.80a}$$

$$\left[ \beta^2 - \beta \frac{\partial}{\partial\beta} \right] F_j^{(s)}(\beta) = (s + 2j + 5) F_j^{(s)}(\beta) - 2[(j+1)(s + j + 5/2)]^{1/2} F_{j+1}^{(s)}(\beta). \tag{3.80b}$$

Con las nuevas coordenadas (3.75) el operador  $C_2O(6)$  puede también escribirse en la forma

$$\begin{aligned}
 C_2O(6) &= C_2O(5) - \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\alpha}^2} - \left( -\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta^2} C_2O(5) \right) \tilde{\alpha}^2 \\
 &+ \left( \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + 5 \right) \tilde{\alpha} \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}} + \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \tilde{\alpha} \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}} + 1 \right) \\
 &= -\frac{\partial^2}{\partial \delta^2} - 4 \cot \delta \frac{\partial}{\partial \delta} + \frac{1}{\sin^2 \delta} C_2O(5). \quad (3.81)
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, un eigenestado de los operadores  $N$ ,  $C_2O(6)$ ,  $C_2O(5)$ ,  $L^2$ , y  $L_z$  puede ser expresado en las nuevas coordenadas (ec. 3.75) mediante funciones de onda de la forma (Castaños et al, 1979)

$$|N\sigma\psi LM\rangle = B_{N\sigma\psi} f_J^\sigma(b) g_u^\sigma(\delta) \chi_{sLM}^{\psi}(\gamma, \theta_1), \quad (3.82)$$

donde  $B_{N\sigma\psi}$  es un coeficiente de normalización.

La función  $g_u^\sigma(\delta)$  es eigenfunción de  $C_2O(6)$ , i.e., es solución de la ecuación

$$\left( -\frac{d^2}{d\delta^2} - 4 \cot \delta \frac{d}{d\delta} + \frac{u(u+3)}{\sin^2 \delta} \right) g_u^\sigma(\delta) = \sigma(\sigma+4) g_u^\sigma(\delta) \quad (3.83)$$

y está dada por

$$g_u^\sigma(\delta) = (\sin \delta)^u C_{\sigma-u}^{u+2}(\cos \delta). \quad (3.84)$$

Por otro lado,  $f_J^\sigma(b)$  es eigenfunción del operador de número, i.e., satisface la ecuación

$$\left[ \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{b^5} \frac{d}{db} b^5 \frac{d}{db} + \frac{\sigma(\sigma+4)}{b^2} + b^2 \right) - 3 \right] f_J^\sigma(b) = N f_J^\sigma(b), \quad (3.85)$$

donde  $J=(N-\sigma)/2$  es un número entero, lo cual se cumple solamente si  $N$  y  $\sigma$  tienen la misma paridad. Las funciones  $f_J^\sigma(b)$  que satisfacen esta ecuación están dadas por

$$f_J^\sigma(b) = b^\sigma L_J^{\sigma+2}(b^2) \exp(-b^2/2), \quad (3.86)$$

donde  $L$  es un polinomio de Laguerre.

Para determinar el coeficiente de normalización  $B_{N\sigma\lambda}$  es necesario considerar las propiedades de ortonormalidad de las funciones  $|N\sigma\lambda SLM\rangle$  con respecto a los índices  $N, \sigma$ . Considerando que el elemento de volumen en  $b, \delta$  es  $b^5 (\sin\delta)^4 db d\delta$  y las relaciones

$$\int_0^\pi (\sin\delta)^{2\lambda+4} C_{\sigma-\lambda}^{\lambda+2}(\cos\delta) C_{\sigma'-\lambda}^{\lambda+2}(\cos\delta) d\delta = \frac{\pi(\sigma+\lambda+3)! \delta_{\sigma\sigma'}}{(\sigma+2) 2^{2\lambda+3} (\sigma-\lambda)! (\lambda+1)^2}, \quad (3.87a)$$

$$\int_0^\infty \exp(-b^2) b^{2\sigma+5} L_{(N-\sigma)/2}^{\sigma+2}(b^2) L_{(N'-\sigma)/2}^{\sigma+2}(b^2) db = \frac{[(N+\sigma)/2 + 2]!}{2[(N-\sigma)/2]!} \delta_{NN'}, \quad (3.87b)$$

tenemos que

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (B_{N\sigma\psi})^2 f_j^{\sigma^*}(b) f_j^\sigma(b) g_{\psi}^{\sigma^*}(\delta) g_{\psi}^\sigma(\delta) b^5 (\sin\delta)^4 db d\delta$$

$$= \frac{\pi(\sigma+\psi+3)! [(N-\sigma)/2 + 2] (B_{N\sigma\psi})^2}{(\sigma+2) 2^{2\psi+4} (\sigma-\psi)! (\psi+1)^2 [(N-\psi)/2]!} = 1, \quad (3.88)$$

de modo que

$$B_{N\sigma\psi} = 2^{\psi+2} (\psi+1)! \left[ \frac{(\sigma-\psi) [(N-\sigma)/2]! (\sigma+2)}{\pi (\sigma+\psi+3)! [(N+\sigma)/2 + 2]!} \right]^{1/2}. \quad (3.89)$$

Estos son los coeficientes de normalización de los kets  $|N\sigma\tau LM\rangle$ .

#### 4. PARENTESIS DE TRANSFORMACION.

Los estados caracterizados por las representaciones irreducibles de las cadenas de grupos (3.12) y (3.21) son denotados respectivamente por los kets  $|Nn_d\psi LM\rangle$  y  $|N\psi\sigma LM\rangle$ . Estamos ahora interesados en la expansión

$$|N\psi\sigma\rangle = \sum_{n_d} \langle Nn_d\psi | N\psi\sigma \rangle |Nn_d\psi\rangle \quad (3.90)$$

y en particular en la expresión del paréntesis de transformación  $\langle Nn_d\psi | N\psi\sigma \rangle$ . Dado que  $O(5) \supset O(3)$  es subcadena tanto de  $U(5)$  como de  $O(6)$ , los paréntesis de transformación son independientes de los

índices  $s, L, M$  y diagonales en  $\omega$ . Para un valor fijo de  $\omega$  podemos elegir

$$s=1, \quad L=M=2\omega, \quad (3.91)$$

de modo que los estados  $|Nn_d \omega\rangle$  y  $|N\sigma \omega\rangle$  pueden escribirse como

$$|Nn_d \omega\rangle = \langle \tilde{\alpha} | n \rangle \left[ \frac{2((n_d - \omega)/2)!}{\Gamma((n_d + \omega + 5)/2)} \right]^{1/2} L_{(n_d - \omega)/2}^{\omega + 3/2}(\beta^2) \exp(-\beta^2/2) \alpha_2^{\omega}, \quad (3.92a)$$

$$|N\sigma \omega\rangle = B_{N\sigma \omega} b_{(N-\sigma)/2}^{\sigma} L_{(N-\sigma)/2}^{\sigma+2}(b^2) \exp(-b^2/2) (\sin \delta)^{\omega} C_{\sigma-\omega}^{\omega+2}(\cos \delta) (\alpha_2/\beta)^{\omega}, \quad (3.92b)$$

siendo  $\langle \tilde{\alpha} | n \rangle$  el estado para un oscilador armónico unidimensional. Para este resultado se utilizó el hecho de que la parte en  $\gamma$  y  $\theta_1$  se reduce a

$$\chi_{1,2\omega,2\omega}^{\omega} = (\alpha_2/\beta)^{\omega}, \quad (3.93)$$

excepto por factores de normalización, que podemos omitir ya que aparece en ambas ecuaciones. En lugar de desarrollar  $|N\sigma \omega\rangle$  en términos de coordenadas, conviene hacerlo en términos de operadores bosónicos de creación ( $b_{\ell m}^{\dagger}$ ). Para este propósito es necesario usar el Teorema de Dragt (A.J. Dragt, (1965)), que puede enunciarse como sigue:

Teorema de Dragt: Si

$$P_{\nu}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \exp[-(\alpha \cdot \alpha)/2], \quad (\alpha \cdot \alpha) \equiv \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 \quad (3.94)$$

es una función de onda (normalizada) para oscilador armónico en  $r$  dimensiones con  $\nu$  quanta de energía y que es eigenfunción del operador de Casimir de  $O(r)$  con eigenvalor  $\nu(\nu+r-2)$ , entonces

$$\pi^{r/4} 2^{-\nu/2} P_{\nu}(d_1^{\dagger}, \dots, d_r^{\dagger}) |0\rangle \quad (3.95)$$

es un estado normalizado con los mismos números cuánticos que (3.94).

Una consecuencia de este teorema es que para el polinomio (3.94) y para cualquier entero positivo  $p$ , se cumple

$$(d \cdot d) (d^{\dagger} \cdot d^{\dagger})^p P_{\nu}(d^{\dagger}) |0\rangle = 2p(2p+r-2+2\nu) (d^{\dagger} \cdot d^{\dagger})^{p-1} P_{\nu}(d^{\dagger}) |0\rangle, \quad (3.96)$$

Esta relación es consecuencia de que  $(d \cdot d) P_{\nu}(d^{\dagger}) |0\rangle = 0$ , y de la equivalencia  $d_i P(d^{\dagger}) |0\rangle \equiv (\partial/\partial d_i^{\dagger}) P(d^{\dagger}) |0\rangle$ .

De acuerdo al teorema de Dragt, los estados  $|N n_{\nu}\rangle$  de la cadena  $U(6) \supset U(5)$  pueden escribirse entonces como

$$|0_{\nu\nu}\rangle = \left[ \frac{2}{\Gamma(\nu+5/2)} \right]^{1/2} \pi^{5/4} 2^{-\nu/2} (d^{\dagger})^{\nu} |0\rangle, \quad (3.97)$$

donde se ha ignorado un factor de normalización que no es relevante. Del significado de  $\nu$  (número de bosones no acoplados a  $L=0$ ) es claro que la ecuación anterior puede generalizarse a los casos  $n_{\nu} \neq \nu$  por aplicación repetida del operador

\* Para su demostración, véase apéndice III.

$$(2, 0) \equiv (d^\dagger \cdot d^\dagger), \quad (3.98)$$

obteniéndose,

$$|0n_d^u\rangle = B'_{n_d^u} \left[ \frac{2}{\Gamma(u+5/2)} \right]^{1/2} \pi^{5/4} 2^{-u/2} (d^\dagger \cdot d^\dagger)^{(n_d-u)/2} (d_2^\dagger)^u |0\rangle, \quad (3.99)$$

donde el coeficiente  $B'_{n_d^u}$  se evalúa usando repetidamente (3.96), obteniéndose

$$B'_{n_d^u} = (-1)^{(n_d-u)/2} \left[ \frac{[(n_d+u)/2 + 1]! (2u+3)!}{[(n_d-u)/2]! (u+1)! (n_d+u+3)!} \right]^{1/2}. \quad (3.100)$$

Como  $b^\dagger |n_b\rangle = (n_b+1)^{1/2} |n_b+1\rangle$ , se tiene finalmente que

$$|n_s n_d^u\rangle = (n_s!)^{1/2} (s^\dagger)^{n_s} |0n_d^u\rangle. \quad (3.101)$$

El factor de fase en (3.100) se escogió de tal manera que (3.101) tenga la misma fase que (3.92a).

Para los estados  $|N\sigma u\rangle$ , correspondientes a la cadena  $U(6) \supset O(6)$ , se tiene del teorema de Dragt

$$|N\sigma u\rangle = B_{\sigma\sigma u} \pi^{3/2} 2^{(\sigma/2)-u} \frac{(\sigma+1)!}{(\sigma-u)! (u+1)!} (d_2^\dagger)^u \sum_s a_s (s^\dagger)^{\sigma-u-2s} (d^\dagger \cdot d^\dagger + (s^\dagger)^2)^s |0\rangle, \quad (3.102)$$

donde  $B_{\sigma\sigma u}$  es el coeficiente de normalización (3.89) de los esta-

dos de la cadena  $U(6) \supset O(6)$  para el caso particular  $N=\sigma$ , y

$$a_s = \frac{((\sigma-\sigma)/2)_s ((\sigma-\sigma+1)/2)_s}{s! (-\sigma-1)_s}, \quad (3.103)$$

son coeficientes que provienen de desarrollar el polinomio de Gegenbauer  $C_{\sigma-\sigma}^{\sigma+2}(\cos\delta)$  y  $(\chi)_s = \chi(\chi+1)\cdots(\chi+s-1)$  es el símbolo de Pochhammer. En analogía con la ec. (3.99), el estado general es ahora  $|N\sigma\rangle = B'_{N\sigma} (d^\dagger \cdot d^\dagger + (s^\dagger)^2)^{(N-\sigma)/2}$  y  $|\sigma\sigma\rangle$ , i.e.,

$$|\sigma\sigma\rangle = B_{\sigma\sigma} \pi^{3/2} 2^{\sigma/2-\sigma} \frac{(\sigma+1)!}{(\sigma-\sigma)! (\sigma+1)!} (d_2)^\sigma \cdot \sum_s a_s (s^\dagger)^{\sigma-\sigma-2s} (d^\dagger \cdot d^\dagger + (s^\dagger)^2)^s |0\rangle, \quad (3.104)$$

donde  $B'_{N\sigma}$  es determinado mediante aplicación repetida de (3.96), llegándose a la expresión

$$B'_{N\sigma} = (-1)^{(N-\sigma)/2} \left[ \frac{(\sigma+2)!}{2^{N-\sigma} ((N-\sigma)/2)! (N+\sigma)/2 + 2)!} \right]^{1/2}. \quad (3.105)$$

El factor de fase en esta ecuación es determinado por la condición de que las expresiones (3.104) y (3.92b) tengan exactamente las mismas fases.

El último paso consiste en desarrollar el binomio

$$(d^\dagger \cdot d^\dagger + s^\dagger s^\dagger)^{s+(N-\sigma)/2} \quad (3.106)$$

que aparece en la expresión para  $|N\sigma\rangle$ . Después de intercambiar

sumas y comparando con  $|n_s n_d \psi\rangle = (n_s!)^{-1/2} (s^\dagger)_{n_s}^n |0n_d \psi\rangle$ , se llega a la relación (3.90), donde  $\langle Nn_d \psi | N\sigma \psi \rangle$  adquiere la forma

$$\langle Nn_d \psi | N\sigma \psi \rangle = (-1)^{(N-\sigma+n_d-\psi)/2}$$

$$\left[ \frac{2^{\sigma-\psi} (\sigma+1)! (\sigma+2)! (n_d+\psi+3)! (N-n_d)! ((N-\sigma)/2)!}{2^{N-\sigma} ((N+\sigma)/2+2)! (\sigma-\psi) (\sigma+\psi+3)! ((n_d+\psi)/2+1)! ((n_d-\psi)/2)!} \right]^{1/2}$$

$$\cdot \sum_s \frac{((N-\sigma)/2+1)_s ((\psi-\sigma)/2)_s ((\psi-\sigma+1)/2)_s}{s! ((N-\sigma-n_d+\psi)/2+s)! (-\sigma-1)_s} \quad (3.107)$$

## 5. ELEMENTOS DE MATRIZ DE LOS OPERADORES

### $P^2$ Y $Q^2$ EN LA BASE $|Nn_d \psi LM\rangle$ .

Los únicos operadores que no son diagonales en la base (3.48) son  $P^2$  y  $Q^2$ ; por lo tanto, nuestro objetivo será determinar los elementos de matriz de estos operadores con respecto a la base  $|Nn_d \psi LM\rangle$  y poder llevar a cabo la diagonalización del Hamiltoniano completo.

#### 5.1 Elementos de matriz de $P^2$ .

Mediante las relaciones (3.82) se puede encontrar el efecto de  $C_2 O(6)$  sobre los estados de la base fundamental  $|Nn_d \psi LM\rangle$ ,

$$C_2 O(6) |Nn_d \psi LM\rangle = \sum_{n'_d} A_{n'_d n_d}^{N\psi} |Nn'_d \psi LM\rangle, \quad (3.108)$$

donde  $N=n_s + n_d$ ; usando la relación (3.43) se puede determinar los elementos de matriz para  $P^2$ , i.e.,

$$\langle Nn_d' \omega s L M | P^2 | Nn_d \omega s L M \rangle \equiv A_{n_d' n_d}^{N \omega s} \quad (3.109)$$

donde  $A_{n_d' n_d}^{N \omega s}$  tiene como regla de selección  $n_d' = n_d \pm 2$ ,  $n_d$ ; explícitamente:

$$A_{n_d' n_d}^{N \omega s} = \frac{1}{4} N(N+4) - [n_d(2N+1-2n_d) + 5(N-n_d) + \omega(\omega+3)], \quad (3.110a)$$

$$A_{n_d+2, n_d}^{N \omega s} = -\frac{1}{4} [(N-n_d)(N-n_d-1)(n_d-\omega+2)(n_d+\omega+5)]^{1/2}, \quad (3.110b)$$

$$A_{n_d-2, n_d}^{N \omega s} = -\frac{1}{4} [(N-n_d+1)(N-n_d+2)(n_d-\omega)(n_d+\omega+3)]^{1/2}. \quad (3.110c)$$

## 5.2 Elementos de Matriz de $Q^2$ .

De la ec. (3.41) observamos que  $Q^2$  es una combinación lineal de operadores, donde solamente los dos primeros son no diagonales con respecto a la base  $|Nn_d \omega s L M\rangle$ . Los elementos de matriz de  $P^2$  respecto a esta están dados por la ecuación (3.110), así que solamente falta determinar los correspondientes elementos de matriz del operador

$$Q = -\sqrt{35} \left\{ [d^\dagger \times d^\dagger]^{(2)} \times d \Big|_0^{(0)} s + s^\dagger [d^\dagger \times [d \times d]^{(2)}]_0^{(0)} \right\} \quad (3.111)$$

para obtener los elementos de matriz de  $Q^2$ .

Notamos que el operador  $O$  es la suma de dos términos, cada uno siendo el conjugado hermiteano del otro, de modo que es suficiente encontrar los elementos de matriz del primero de ellos, i.e.,

$$- \sqrt{35} [(d^\dagger \times d^\dagger)^{(2)} \times d]_0^{(0)} s, \quad (3.112)$$

a partir de los cuales los elementos de matriz del segundo término quedan determinados.

Utilizando las funciones de onda del oscilador armónico en una dimensión  $\langle \alpha | n_s \rangle$  se encuentran las relaciones

$$s^\dagger |n_s\rangle = \sqrt{n_s + 1} |n_s + 1\rangle, \quad (3.113a)$$

$$s |n_s\rangle = \sqrt{n_s} |n_s - 1\rangle. \quad (3.113b)$$

A partir de las definiciones en términos de los operadores de creación y aniquilación para coordenadas y momentos

$$\alpha_{\ell m} = \sqrt{2} [b_{\ell m}^\dagger + b_{\ell m}], \quad (3.114a)$$

$$\pi_{\ell m} = i\sqrt{2} [b_{\ell m}^\dagger - b_{\ell m}], \quad (3.114b)$$

y de propiedades de los coeficientes de Clebsch-Gordan para  $O(3)$  se obtiene que

$$\begin{aligned}
2\sqrt{2} \left[ [\alpha \times \alpha]^{(2)} \times \alpha \right]_0^{(0)} &= \left[ [d^\dagger \times d^\dagger]^{(2)} \times d^\dagger \right]_0^{(0)} \\
&+ 3 \left[ [d^\dagger \times d^\dagger]^{(2)} \times d \right]_0^{(0)} + 3 \left[ [d \times d]^{(2)} \times d^\dagger \right]_0^{(0)} \\
&+ \left[ [d \times d]^{(2)} \times d \right]_0^{(0)}.
\end{aligned} \tag{3.115}$$

Tomando los elementos de matriz de esta identidad respecto a los estados (3.51) con  $n_d$  y  $n_d + 1$  cuantos de energía, se deduce

$$\begin{aligned}
\langle n_d + 1, s', LM | -\sqrt{35} \left[ [d^\dagger \times d^\dagger]^{(2)} \times d \right]_0^{(0)} | n_d, s, LM \rangle \\
= -2\sqrt{2}/3 \langle n_d + 1, s', LM | \{3, 0\} | n_d, s, LM \rangle,
\end{aligned} \tag{3.116}$$

donde  $\{3, 0\}$  está dado por

$$\begin{aligned}
\{3, 0\} &= \sqrt{7} \sum_{m, m'} (-1)^{m''} \langle 22mm' | 2 -m'' \rangle \alpha_m \alpha_{m'}, \\
&= -\sqrt{2} \beta^3 \cos 3\gamma,
\end{aligned} \tag{3.117}$$

donde  $\beta$ ,  $\gamma$  son las variables de deformación del modelo colectivo. Este término es uno de los invariantes del modelo colectivo y sus elementos de matriz fueron obtenidos en la base ortonormalizada de la ec. (3.63) (A. Frank, 1979).

Utilizando las ecuaciones (3.49) junto con los elementos de matriz para  $A_{n_d' n_d}^{N_d}$  se encuentra que los elementos de matriz de  $Q^2$  en la base caracterizada por la cadena de grupos (3.12) vienen dados por la expresión

$$\langle Nn'_d \psi' t' LM | Q^2 | Nn_d \psi t LM \rangle$$

$$= \left\{ -\frac{1}{2} \psi(\psi+3) + \frac{1}{8} L(L+1) - \frac{3}{2} n_d^2 - \frac{3}{2} n_d \right. \\ \left. + 2Nn_d + 5N \right\} \delta_{n_d n'_d} \delta_{\psi \psi'} \delta_{t t'} \\ - \left[ (N-n_d)(N-n_d-1)(n_d-\psi+2)(n_d+\psi+5) \right]^{1/2} \delta_{n'_d n_d+2} \delta_{\psi' \psi} \delta_{t' t} \\ - 2\sqrt{2/3} (N-n_d)^{1/2} \langle Nn'_d \psi' t' LM | \{3,0\} | Nn_d \psi t LM \rangle \delta_{n'_d n_d+1} ,$$

(3.118)

donde debido a la naturaleza simétrica de la matriz, se escriben solamente los términos para los cuales  $n'_d \geq n_d$ . En la ecuación anterior hemos introducido el índice  $t$  correspondiente al conjunto de estados ortonormalizados  $|Nn_d \psi t LM\rangle$  de la ec. (3.63).

En el siguiente capítulo analizamos las simetrías dinámicas exactas del MBI-1 y su relación con los datos experimentales.

## SIMETRIAS DINAMICAS EXACTAS DEL MBI-1

## 1. LIMITE VIBRACIONAL.

## 1.1 Hamiltoniano.

Los estados caracterizados por las representaciones irreducibles de  $U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2)$  son denotados por los números cuánticos  $N, n_d, \mathfrak{u}, \tau, L$  y  $M$ , donde para una  $N$  dada

$$n_d = 0, 1, 2, 3, \dots, N, \quad (4.1a)$$

$$\mathfrak{u} = n_d, n_d - 2, \dots, 0 \text{ ó } 1. \quad (4.1b)$$

Si definimos

$$\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{u} - 3\tau, \quad (4.1c)$$

donde  $\tau$  es un entero positivo, se tiene entonces

$$L = \mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_0 + 1, \mathfrak{u}_0 + 2, \dots, 2\mathfrak{u}_0 - 2, 2\mathfrak{u}_0. \quad (4.1d)$$

$$M = -L, -L + 1, \dots, L - 1, L. \quad (4.1e)$$

La etiqueta  $\tau$  indica que la cadena de grupos  $O(5) \supset SO(3)$  no es simplemente reducible; esto significa que una representación de  $O(5)$ ,  $\mathfrak{u}$ , puede contener un mismo valor del momento angular  $L$  más de una vez.

De acuerdo al concepto de simetría dinámica discutido en el capítulo anterior, el Hamiltoniano correspondiente a este límite

debe ser de la forma

$$H_{U(5)} = k_1 n_d + k_2 n_d^2 + k_3 n_d N + k_4 L^2 + k_5 C_2 O(5), \quad (4.2)$$

de modo que el eigenvalor correspondiente es

$$E([N]n_d \otimes SLM) = k_1 n_d + k_2 n_d^2 + k_3 n_d N + k_4 L(L+1) + k_5 \omega(\omega+3), \quad (4.3)$$

donde  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$  son parámetros libres.

## 1.2 Espectro.

Vamos a considerar primero un Hamiltoniano donde únicamente  $k_1 \neq 0$ ; el espectro correspondiente es el de un oscilador armónico en cinco dimensiones, donde los niveles de energía son igualmente espaciados (véase Fig. 1.2). La degeneración dentro de cada multiplete  $n_d$  se mantiene fija cuando se considera  $k_2 \neq 0$ , pero la separación entre ellos varía de acuerdo a si  $k_2 > 0$  ó  $k_2 < 0$ . Considerando un Hamiltoniano donde además  $k_5 \neq 0$ , se presenta un rompimiento de los multipletes  $n_d$  en las diferentes representaciones irreducibles de  $O(5)$   $\omega$  que contiene. Finalmente si  $k_4 \neq 0$ , se rompe la degeneración dentro de cada multiplete  $\omega$ . Este tipo de espectro de energías es ilustrado en la Figura (4.1). En un espectro típico se distinguen *bandas*, siendo éstas definidas como un conjunto de niveles conectados por grandes valores de la transición  $T(E2)$ . Siguiendo la notación usada por Arima e Iachello (Arima et al, 1976), las bandas más importantes son denotadas como las bandas  $Y, X, Z, X', Z'$  y  $\Delta$ .

Utilizando la notación  $|Nn_d \nu LM\rangle$  estas bandas se clasifican de acuerdo a las siguientes definiciones (Arima et al, 1976):

Banda Y:  $|n_d, n_d, 0, L=2n_d, M\rangle,$  (4.4a)

Banda X:  $|n_d, n_d, 0, L=2n_d-2, M\rangle,$  (4.4b)

Banda Z:  $|n_d, n_d, 0, L=2n_d-3, M\rangle,$  (4.4c)

Banda X':  $|n_d, n_d, 0, L=2n_d-4, M\rangle,$  (4.4d)

Banda Z':  $|n_d, n_d, 0, L=2n_d-5, M\rangle.$  (4.4e)

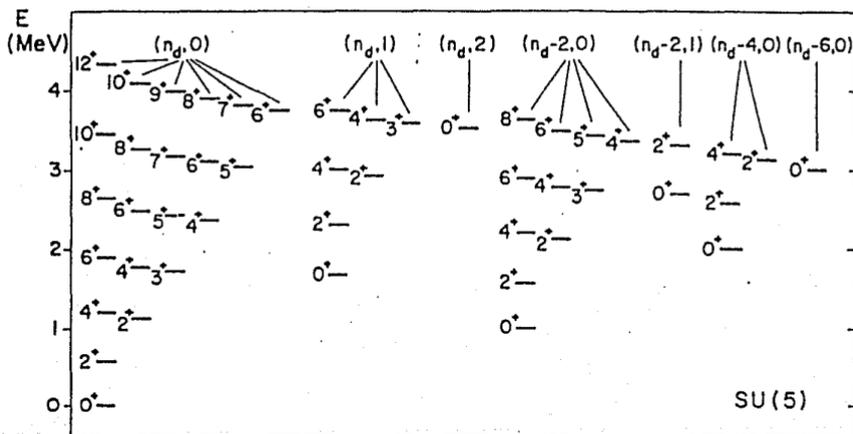


Fig. 4.1

Espectro con simetría U(5) (para  $N=0$ ). En paréntesis se indican números cuánticos  $(n_d, \nu)$  y a la izquierda de cada estado aparece el momento angular correspondiente.

### 1.3 Transiciones electromagnéticas.

Transiciones T(E0): El operador T(E0) definido como

$$\begin{aligned} T(E0) &= \alpha n_s + (\beta'/\sqrt{5})n_d \\ &= \alpha(N-n_d) + (\beta'/\sqrt{5})n_d \\ &= \alpha N + (\beta/\sqrt{5})n_d, \end{aligned} \quad (4.5)$$

es proporcional a  $n_d$ , y entonces

$$\langle i|T(E0)|j\rangle \propto n_d \langle i|j\rangle = 0, \quad (4.6)$$

para  $i \neq j$ , de modo que no puede haber transiciones T(E0) en el límite U(5).

Transiciones T(E2): El operador T(E2)

$$T(E2) = e_p \{ [s^\dagger \times d + d^\dagger \times s]^{(2)} + \chi [d^\dagger \times d]^{(2)}, \quad (4.7)$$

consiste de un término que contribuye con  $\Delta n_d = \pm 1$  y otro con  $\Delta n_d = 0$ . Para que este operador cumpla con ser un generador de U(5) se debe considerar únicamente el término  $\chi [d^\dagger \times d]^{(2)}$ . Esta elección da lugar a elementos de matriz de T(E2) nulos para estados que difieren por uno ó más bosones  $d$  entre sí. Sin embargo, los datos experimentales disponibles demuestran, entre estos estados, transiciones cuadrupolares; por esta razón se incluye el término  $(s^\dagger \times d + d^\dagger \times s)^{(2)}$  en el operador T(E2) en el límite U(5). Este operador permite obtener resultados muy similares a los predichos en el modelo geométrico. Por ejemplo, es posible obtener el resultado general

$$\sum_{\nu, L, N'} B(E2: N, n_d + 1, \nu, \tau, L \rightarrow N, n_d, \nu', \tau', L') = e_B^2 (n_d + 1) (N - n_d), \quad (4.8)$$

donde  $e_B$  es una carga bosónica efectiva. El factor  $(N - n_d)$  surge de la condición de que en el MBI el número de bosones para un núcleo dado es *finito*. Para deducir la ec. (4.8) se utiliza el lema de factorización de Racah para la cadena de grupos  $U(6) \supset U(5) \supset O(3)$  (Wybourne, 1974).

Los valores de  $B(E2)$  para los estados  $\nu = n_d, \tau = 0, L = 2n_d$ , son determinados (para este límite) mediante la expresión

$$B(E2: n_d + 1, \nu = n_d + 1, \tau = 0, L' = 2n_d + 2 \rightarrow n_d, \nu = n_d, \tau = 0, L = 2n_d) = e_B^2 \frac{(L+2)}{2} \frac{(2N-L)}{2}. \quad (4.9a)$$

En particular, para transiciones entre los niveles más bajos se tiene

$$B(E2: 2_1^* \rightarrow 0_1^*) = e_B^2 N \quad (4.9b)$$

y

$$B(E2: 2_2^* \rightarrow 2_1^*) = 2e_B^2 (N-1). \quad (4.9c)$$

#### 1.4 Las regiones del límite $U(5)$ .

Las regiones de la tabla nuclear en las cuales los núcleos son típicamente vibratoriales, son mostradas en la Fig. 4.2:

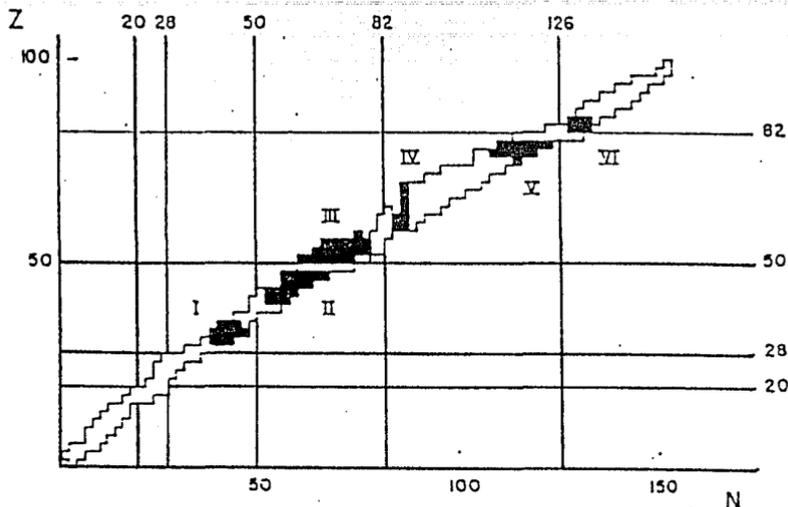


Fig. 4.2

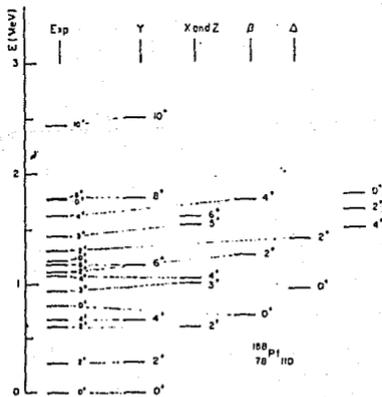
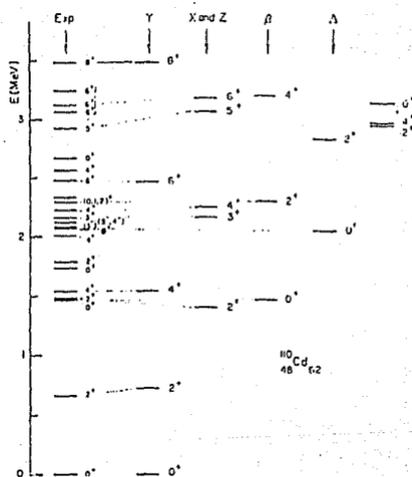
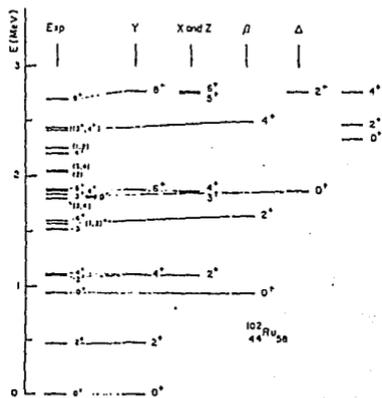
Regiones de la Tabla Nuclear con comportamiento vibracional.

Una condición necesaria mas no suficiente para establecer que un núcleo posee características vibratoriales consiste en que las transiciones con  $\Delta n_p = 2$  sean pequeñas y que un espectro vibracional de dos fonones esté presente para el triplete  $0^+, 2^+, 4^+$ , es decir, que tenga energías muy cercanas al doble de la energía del primer estado excitado  $2^+_1$ . En las regiones I a VI de la Fig. 4.2, los núcleos se caracterizan por tener pocos neutrones y/o protones fuera de una capa cerrada. Las condiciones más favorables surgen cuando se tienen núcleos semimágicos o con número de neutrones y protones fuera de capa cerrada del orden de 4-8 partículas.

### 1.5 Ejemplos típicos.

En las Figs. 4.3a-c se muestra tres ejemplos de núcleos que presentan estructura con simetría U(5):  $^{102}_{44}\text{Ru}_{58}$ ,  $^{110}_{48}\text{Cd}_{62}$ , y el  $^{188}_{78}\text{Pt}_{110}$ . Existen algunos estados que no pueden ser descritos por

el modelo  $s$ - $d$ , tales como excitaciones octupolares y estados de dos cuasipartículas.



Figs. 4.3a-c

## 2. LIMITE SU(3).

### 2.1 Hamiltoniano.

Los estados caracterizados por las representaciones irreducibles de la cadena de grupos  $U(6) \supset SU(3) \supset SO(3)$  son denotados por el número total de bosones  $N$  y los números cuánticos de Elliott  $(\lambda, \mu)$  y el momento angular  $L$ . Las relaciones entre estos índices están dadas por las expresiones (3.65) a (3.68).

El Hamiltoniano más general correspondiente a esta simetría dinámica tiene la forma

$$H_{SU(3)} = k_4 L^2 + k_7 Q^2, \quad (4.10)$$

donde el operador  $Q^2$  está relacionado con el operador de Casimir de  $SU(3)$  mediante la ecuación

$$C_2 SU(3) = \frac{4}{3} Q^2 + \frac{1}{2} L^2. \quad (4.11)$$

El eigenvalor de  $C_2 SU(3)$  está dado por

$$E_{C_2 SU(3)} = \frac{2}{3} (\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu), \quad (4.12)$$

de modo que la expresión para los eigenvalores del Hamiltoniano (4.10) es

$$E = \frac{k_7}{2} (\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu) + (k_4 - 3k_7/8)L(L+1).$$

(4.13)

## 2.2 Espectro.

Un espectro típico de este límite se muestra en la Fig. 4.4, para el caso donde  $N=8$ ; este espectro también resulta ser similar al predicho por el modelo geométrico (rotor simétrico). Después de la banda base (clasificada por la representación  $(2N,0)$  con  $K=0$ ), se tiene la representación  $(2N-4,2)$  que consiste de las bandas con  $K=0$  y  $K=2$  las cuales corresponden, respectivamente, a las bandas de excitación  $\beta$  y  $\gamma$  en el modelo geométrico. Sin embargo, para el límite  $SU(3)$  los niveles con momento angular par en las bandas  $K=0$  y  $K=2$  de esta representación están degenerados. Adicionalmente, las vibraciones  $\beta$  y  $\gamma$  no son armónicas como en el caso geométrico, i.e., la banda  $2\beta$  (correspondiente a  $(2N-8,4)$  y  $K=0$ ) no empieza a una energía igual al doble de la energía de la banda  $\beta$ ; esto se cumple sólo cuando  $N \rightarrow \infty$ . Este hecho constituye una diferencia con el modelo geométrico. Para la misma representación  $(2N-8,4)$ , la excitación con  $K=2$  corresponde (para bajas energías) a vibraciones del tipo  $\beta\gamma$ . Un estado con  $K=0$  resulta ser ambiguo porque puede ser de naturaleza  $\beta\beta$  ó  $\gamma\gamma$ : se predice que ambos poseen la misma energía. Finalmente, para la representación  $(2N-6,0)$ , también se presenta una banda con  $K=0$  y con energías ligeramente más altas.

## 2.3 Transiciones electromagnéticas.

Transiciones  $T(E0)$ : El operador  $T(E0)$ , ec. 4.5 no es un generador de  $SU(3)$  y, por tanto, puede mezclar diferentes representaciones. Por ejemplo, se presentan elementos de matriz para transiciones entre la banda base y la banda  $K=0$  (banda  $\beta$ ) de la representación  $(2N-4,2)$ ; en particular, para estados  $0^+$  éstas toman la forma

$$\langle (2N,0), K=0, L=0 | T(E0) | (2N-4,2), K=0, L=0 \rangle$$

$$= e_0 \left[ \frac{8(N-1)^2(2N+1)N}{9(2N-3)(2N-1)^2} \right]^{1/2}, \quad (4.14)$$

donde  $e_0 = \beta/\sqrt{5}$ . De manera más general,  $T(E_0)$  se transforma como una mezcla de tensores (0,0) y (2,2) ante  $SU(3)$ , de modo que la parte(2,2) puede combinar estados de la representación (2N-4, 2) con estados de las representaciones (2N,0), (2N-8,4) y (2N-6,0). Por ejemplo, si  $N=8$ , los estados con momento angular L asociados a la representación (12,2) puede sufrir transformaciones monopolares con estados del mismo momento angular de las representaciones (16,0), (8,4) y (10,0).

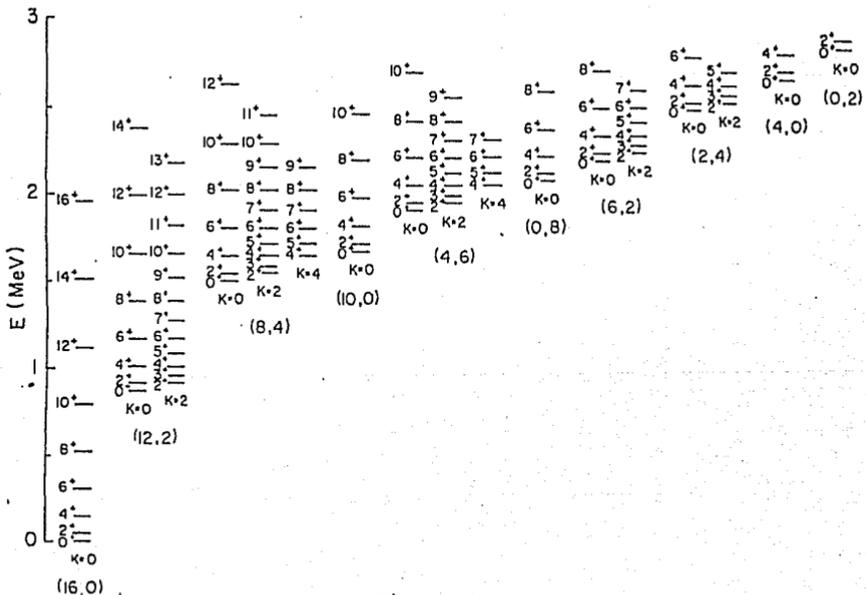


Fig. 4.4

Espectro típico con simetría  $SU(3)$  para  $N=8$ .

En paréntesis se indican los valores de  $\lambda$  y  $\mu$ .

El momento angular L de cada estado se muestra en la izquierda.

Transiciones T(E2): Si se considera el operador cuadrupolar en la forma (3.14), se tiene que  $T(E2) = e_B Q$  es un generador de  $SU(3)$ , de modo que no puede mezclar diferentes representaciones irreducibles. Así, únicamente transiciones electromagnéticas cuadrupolares dentro de una misma representación son permitidas. Por ejemplo, transiciones cuadrupolares entre las bandas  $\gamma \rightarrow g$  ó  $\beta \rightarrow g$  estarían prohibidas, en contraste con las predicciones del modelo geométrico. Transiciones cuadrupolares entre las bandas  $\beta \rightarrow \gamma$  estarían permitidas ya que pertenecen a la misma representación de  $SU(3)$ . Las reglas de selección mencionadas arriba para las transiciones cuadrupolares se han observado en forma aproximada para algunos núcleos deformados (Arima et al, 1978). Estas propiedades, sin embargo pueden relajarse utilizando el operador cuadrupolar general de la ec. (4.7).

El hecho de que en el MBI se está considerando un número finito de bosones se refleja también en los valores para los  $B(E2)$ , que se saturan y decrecen para valores grandes de los momentos angulares. Para la banda base (banda g) los valores de las  $B(E2)$  pueden calcularse en forma analítica, utilizando los coeficientes reducidos de Wigner de  $SU(3)$  (Vergados, 1968), y están dados por la expresión

$$B(E2: (2N, 0); L+2 \rightarrow L) = e_B^2 \frac{3}{4} \left[ \frac{(L+2)(L+1)}{(2L+3)(2L+5)} \right] (2N-L)(2N+1+3). \quad (4.15)$$

En particular, para el primer estado excitado  $2^+$  se tiene

$$B(E2: 2_1^+ \rightarrow 0_1^+) = e_B^2 \frac{N(2N+3)}{5}. \quad (4.16)$$

Nótese que la ec. 4.15 tiende a cero cuando  $L \rightarrow 2N$ , y para valores de  $L \approx (1/2)L_{\max}$  se aprecia una saturación en los valores  $B(E2)$ . Esto es consecuencia directa de que  $N$  es finito. Sin embargo, para la mayoría de los núcleos con deformación permanente parece no observarse esta saturación en los valores  $B(E2)$ .

En el límite cuando  $N \gg 1$ , la dependencia en los espines viene dada por el factor entre paréntesis cuadrados de la ec. (4.15), que da precisamente las reglas de Alaga. Por ejemplo, si  $N \gg 1$ , se obtiene:

$$\frac{B(E2:4 \rightarrow 2)}{B(E2:2 \rightarrow 0)} = 10/7. \quad (4.17)$$

También para  $N \gg 1$  se tiene que  $B(E2: (2N, 0): L+2 \rightarrow L) \approx N^2$ . La ec. (4.18) demuestra que, dentro del límite  $U(5)$ , los valores de las  $B(E2)$  (para  $N \gg n_d$ ) son proporcionales a  $N$ . Esta diferencia es resultado de la presencia, en el límite vibracional, de que  $n_s \approx N$ , y del hecho de que un estado dado (e.g.,  $2_1^+$ ) siempre contiene el mismo número de bosones  $d$  [e.g.  $n_d(2_1^+) = 1$ ] independientemente de  $N$ . Por tanto, en la derivación de la ec. (4.15) para el caso  $SU(3)$ , los operadores  $s^\dagger$  y  $d$  (ó  $d^\dagger$  y  $s$ ) contribuyen en un factor proporcional a  $N$ , mientras que para el límite  $U(5)$  sólo se tiene contribuciones por parte del operador  $s^\dagger$ .

#### 2.4 Las regiones del límite $SU(3)$ .

En la Fig. 4.5 se muestra las regiones de la tabla nuclear para las cuales los núcleos presentan una estructura predominantemente de tipo rotacional. Una condición necesaria es que las energías en la banda del estado base se comporten aproximadamente como  $L(L+1)$ . En la región I se incluyen núcleos situados en la mitad de las ca-

pas  $N=82-126$  y  $Z=50-82$ , mientras que en la región II se encuentran núcleos arriba de las capas  $N=126$  y  $Z=82$ .

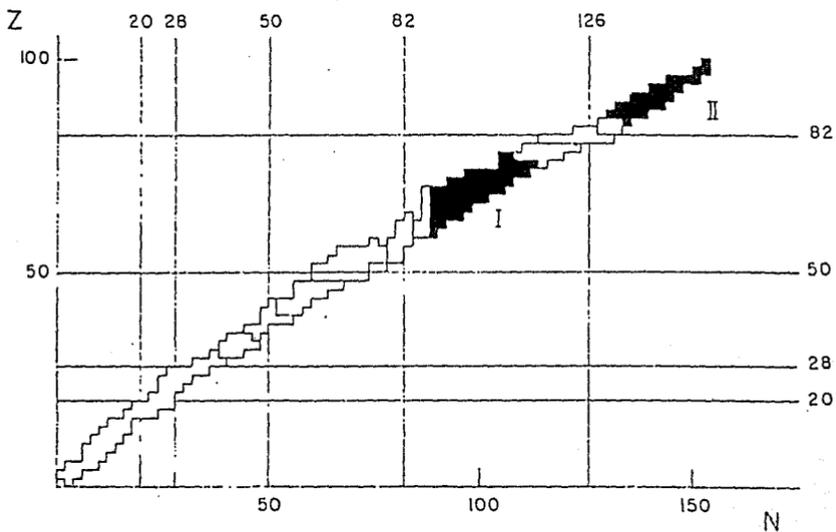


Fig. 4.5  
Regiones del límite SU(3)

## 2.5 Ejemplos típicos.

En las Figs. 4.6a-c se muestra tres ejemplos típicos de núcleos que presentan simetría aproximada SU(3):  $^{156}_{64}\text{Gd}_{92}$ ,  $^{170}_{68}\text{Er}_{102}$  y  $^{234}_{92}\text{U}_{142}$ .

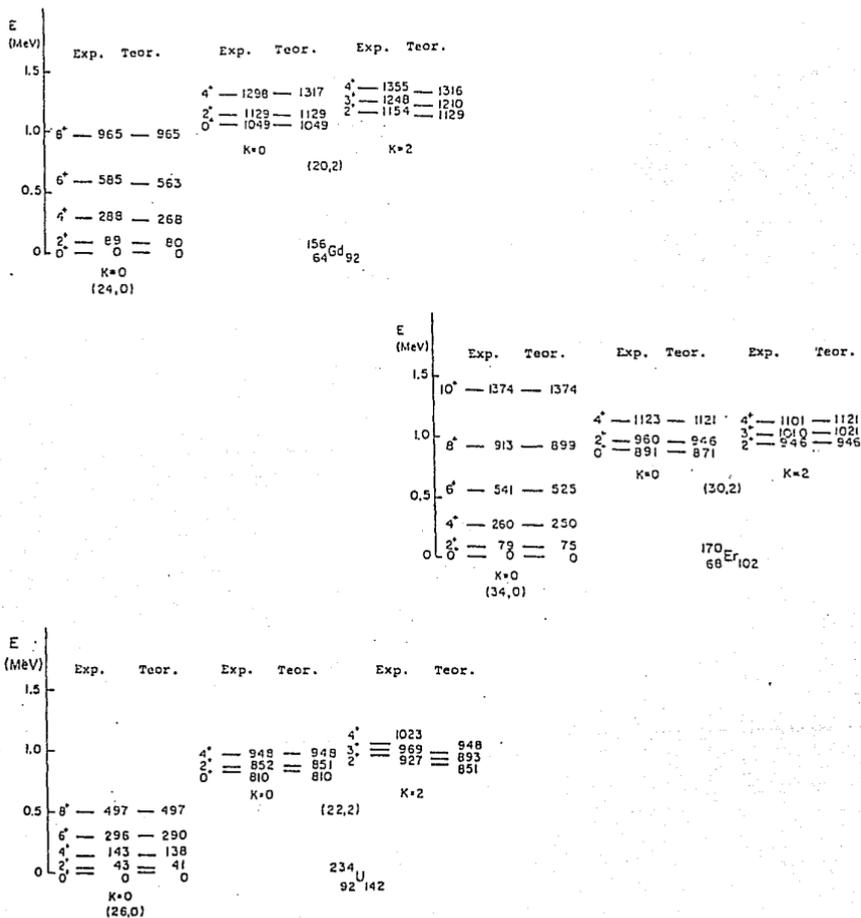


Fig. 4.6a-c

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

### 3. LIMITE $\gamma$ -INESTABLE.

#### 3.1 Hamiltoniano.

Los estados caracterizados por las representaciones irreducibles de la cadena de grupos  $U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3)$  son denotados por los números cuánticos  $N, \sigma, \omega, \tau, L$  y  $M$  donde el número cuántico  $\sigma$  adquiere los valores

$$\sigma = N, N-2, N-4, \dots, 0 \text{ ó } 1. \quad (4.18)$$

mientras que para la reducción a  $O(5)$  satisface la relación

$$\omega = \sigma, \sigma-1, \sigma-2, \dots, 0. \quad (4.19)$$

La reducción  $O(5) \supset O(3)$  fué discutida previamente [véase ec. (4.1c)-(4.1e)]. El Hamiltoniano  $H_{O(6)}$  correspondiente a este límite es expresado en la forma

$$H_{O(6)} = k_6 P^2 + k_5 C_2 O(5) + k_4 L^2. \quad (4.20)$$

donde  $P^2$  está relacionado con  $C_2 O(6)$  mediante la ecuación (3.43). Por consiguiente los eigenvalores de  $H_{O(6)}$  están dados por la expresión

$$E = (k_6/4) (N-\sigma) (N+\sigma+4) + k_5 \omega (\omega+3) + k_4 L(L+1). \quad (4.21)$$

#### 3.2 Espectro.

Un espectro típico de esta simetría dinámica se ilustra en la Fig. 4.7 para valores positivos de  $k_6, k_5, k_4$ . Los estados están

agrupados por familias, cada una caracterizada por un valor particular de  $\sigma$  (donde  $\sigma = N, N-2, N-4, \dots$ ). Dentro de cada familia los estados se clasifican a su vez en multipletes asociados a cada valor de  $\nu$  (donde  $\nu = \sigma, \sigma-2, \sigma-2, \dots, 0$ ). Las energías de separación entre estos multipletes siguen la regla  $\nu(\nu + 3)$ ; finalmente, el efecto de  $k_4 L(L + 1)$  es el de romper la degeneración dentro de cada multiplete  $\nu$ . El espectro resultante es similar al predicho por el modelo de Wilets y Jean (Wilets y Jean, 1956) para núcleos  $\gamma$ -inestables.

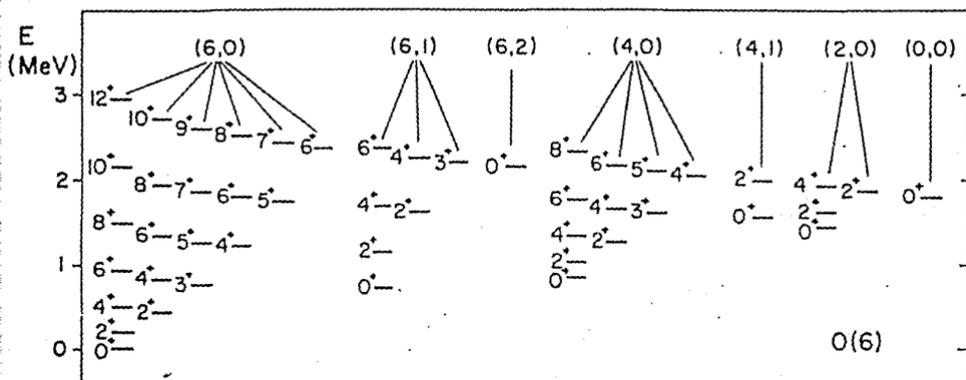


Fig. 4.7

Espectro típico con simetría  $O(6)$  y para  $N=6$ .

En paréntesis se indican los valores para  $\sigma$  y  $\nu$ .

El momento angular  $L$  de cada estado se muestra en la izquierda.

En la Fig. 4.8 se ilustran los rompimientos de degeneración al incluir sucesivamente los términos  $k_6 P^2$ ,  $k_5 C_2 O(5)$  y  $k_4 L^2$  en el Hamiltoniano (4.20).

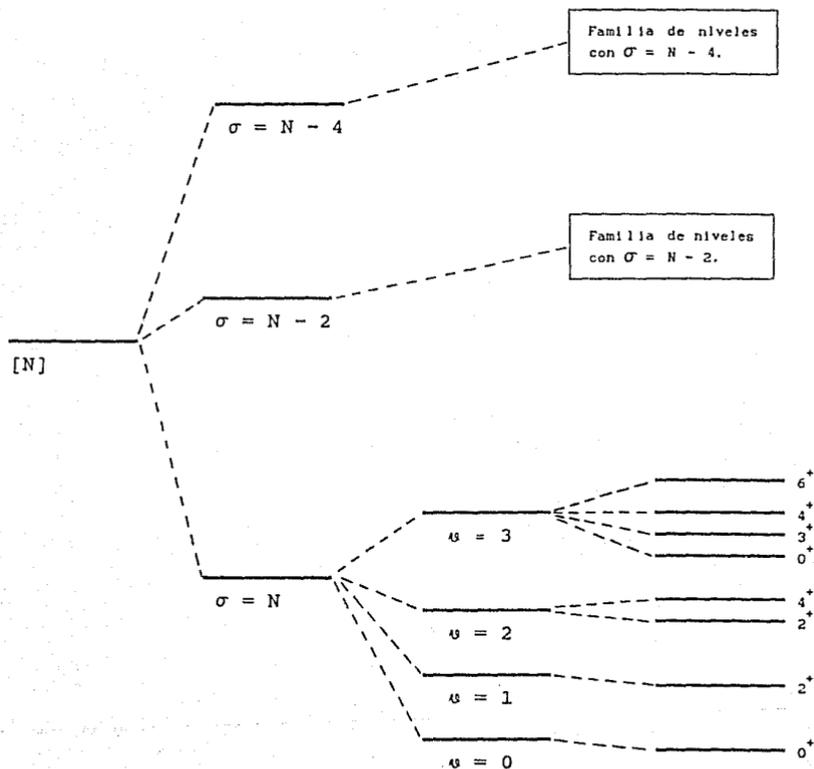


Fig. 4.8

Generación del espectro típico  $O(6)$ .

### 3.3 Transiciones electromagnéticas.

Transiciones electromagnéticas: Dado que el operador  $T(E0)$  es diagonal respecto a la base  $U(5)$  debe cumplirse que  $\Delta v=0$ . De acuerdo a la ec. 4.5 se tiene además que  $\Delta \sigma=\pm 2$ . Entonces la única transición  $T(E0)$  al estado base que es posible dentro de este límite es desde el estado con  $\sigma = N - 2$ ,  $v = 0$ ,  $L = 0$  y tiene la forma (Casten et al, 1988)

$$\begin{aligned} \langle \sigma=N, v=0, L=0 | T(E0) | \sigma=N-2, v=0, L=0 \rangle \\ = e_0 \left[ \frac{(N-1)(N+3)(2N+4)}{8(N+1)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Transiciones  $T(E2)$ : Se conoce empíricamente que, en regiones donde la simetría  $O(6)$  es aplicable, el segundo término del operador cuadrupolar eléctrico, ec. (4.7), tiene una contribución pequeña. Entonces, el operador de transiciones cuadrupolares se define en esta región mediante el operador

$$Q' = e_B [s^\dagger \times d + d^\dagger \times s]^{(2)}, \quad (4.23)$$

el cual es un generador del grupo  $O(6)$ .

Por lo tanto, cuando se toma el elemento de matriz de este operador con respecto a los eigenestados (3.82), se tienen las reglas de selección  $\Delta \sigma=0$  y  $\Delta v=\pm 1$ . Estas reglas indican que (4.23) no puede mezclar estados que poseen un mismo valor de  $v$ .

Para la banda base (donde  $\sigma = \sigma_{\max}$  y  $L = 2v$ ) los valores de  $B(E2)$  pueden evaluarse en forma analítica utilizando los paréntesis de transformación entre la base  $O(6)$  y  $U(5)$ , ecuación

(3.107). Por ejemplo, se puede obtener (Arima et al, 1979), el resultado

$$\begin{aligned}
 B(E2: [N], \sigma=N, \nu+1, \tau=0, L'=2\nu+2 \Rightarrow [N], \sigma=N, \nu, \tau=0, L=2\nu) \\
 = e_B^2 (N-\nu) (N+\nu+4) \frac{(\nu+1)}{2\nu+5}, \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

que para valores grandes de  $N$ , siguen aproximadamente la regla  $N^2$ . En particular, para la transición  $2_1^+ \Rightarrow 0_1^+$ , se tiene

$$B(E2: 2_1^+ \Rightarrow 0_1^+) = e_B^2 \frac{N(N+4)}{5}. \quad (4.25)$$

### 3.4 Las regiones del límite $O(6)$ .

En la Fig.4.9 se muestra las regiones de la tabla nuclear donde se localizan núcleos que parecen seguir la dinámica asociada al grupo  $O(6)$ .

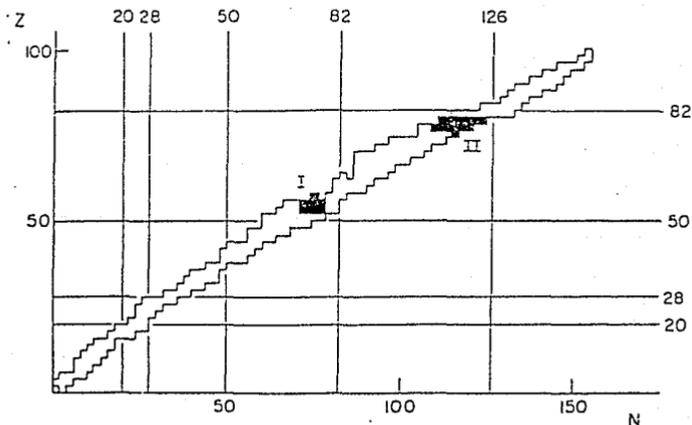


Fig. 4.9

Resulta interesante comparar los valores de  $B(E2)$  para los tres límites de manera simultánea. Esto se ilustra en la Fig. 4.10 para la banda base como función de  $L$ . Los valores de  $B(E2)$  son mayores para los límites  $SU(3)$  (II) y  $O(6)$  (III), ya que, como se mencionó antes, las  $B(E2)$  van como  $N^2$  en lugar de  $N$ , como sucede en  $U(5)$ , i. e., en (I).

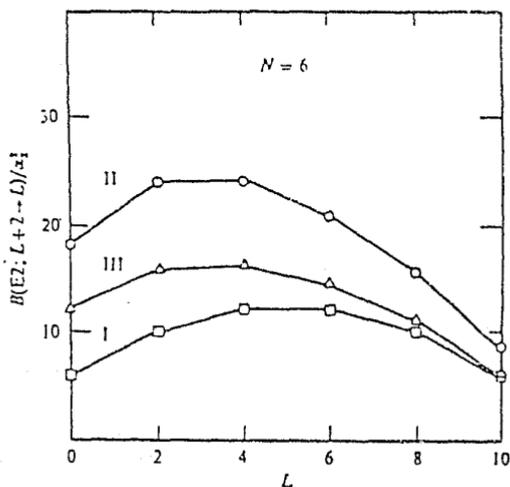


Fig. 4.10

Valores de  $B(E2)$  de la banda base en los tres límites:  
 I:  $U(5)$ , II:  $SU(3)$ , III:  $O(6)$ , para núcleos con  $N=6$ ,  
 y en unidades  $e_B^2$ .

Para valores finitos de  $N$ , las  $B(E2)$  disminuyen a medida que  $L \rightarrow 2N$  (efectos de corte). Como se ilustra en la Fig. 4.10 esta disminución es similar para los límites  $SU(3)$  y  $O(6)$ , pero contrastan con la que se presenta para el límite  $U(5)$ ; este hecho indica que la simetría  $U(5)$  es intrínsecamente diferente que  $SU(3)$  y  $O(6)$ .

Otras cantidades de interés que presentan algunas diferencias adicionales en los tres tipos de simetrías son las razones

$$R = \frac{B(E2:4_1^* \Rightarrow 2_1^*)}{B(E2:2_1^* \Rightarrow 0_1^*)} \quad (4.26a)$$

$$R' = \frac{B(E2:2_2^* \Rightarrow 2_1^*)}{B(E2:2_1^* \Rightarrow 0_1^*)} \quad (4.26b)$$

$$R'' = \frac{B(E2:0_2^* \Rightarrow 2_1^*)}{B(E2:2_1^* \Rightarrow 0_1^*)} \quad (4.26c)$$

Estas vienen dadas respectivamente por

$$R_{U(5)} = 2 \frac{(N-1)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2 \quad (4.27a)$$

$$R_{SU(3)} = (10/7) \frac{(N-1)(2N+5)}{N(2N+3)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 10/7 \quad (4.27b)$$

$$R_{O(6)} = (10/7) \frac{(N-1)(N+5)}{N(2N+3)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 10/7 \quad (4.27c)$$

$$R'_{U(5)} = 2 \frac{(N-1)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2 \quad (4.28a)$$

$$R'_{SU(3)} = 0 \quad (4.28b)$$

$$R'_{0(6)} (10/7) \frac{(N-1)(N+5)}{N(N+4)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 10/7, \quad (4.28c)$$

Y

$$R''_{U(5)} = 2 \frac{(N-1)}{N}, \quad (4.29a)$$

$$R''_{SU(3)} = 0, \quad (4.29b)$$

Y

$$R''_{0(6)} = 0. \quad (4.29c)$$

En resumen, los límites de simetría se caracterizan por transiciones cuadrupolares que cumplen aproximadamente las siguientes condiciones:

U(5):

- (a) Transiciones para las cuales  $\Delta n_d = 2$  deben ser casi nulas.
- (b)  $R = R' = R'' \rightarrow 2[(N-1)/N] \cong 1.6$

SU(3):

- (a)  $B(E2: \gamma \rightarrow g); B(E2: \beta \rightarrow g) \rightarrow 0$
- (b)  $\frac{B(E2: \beta \rightarrow g)}{B(E2: \gamma \rightarrow g)}$
- (c)  $B(E2: \gamma \rightarrow \beta) \rightarrow$  magnitudes grandes

O(6):

(a) Transiciones para las cuales  $\Delta\lambda = 2$  deben ser casi nulas.

(b)  $R = R' \Rightarrow (10/7) \frac{(N-1)(N+5)}{N(N+4)}$

(c)  $R' \rightarrow 0$

### 3.5 Ejemplos típicos.

Dos ejemplos de espectro con simetría aproximada O(6) se muestran en las Figs. 4.11a-b. Este tipo de espectro se observa también en los isótopos del Xe, Ce, y Os, con número de neutrones en el rango 74-78 y 114-120.

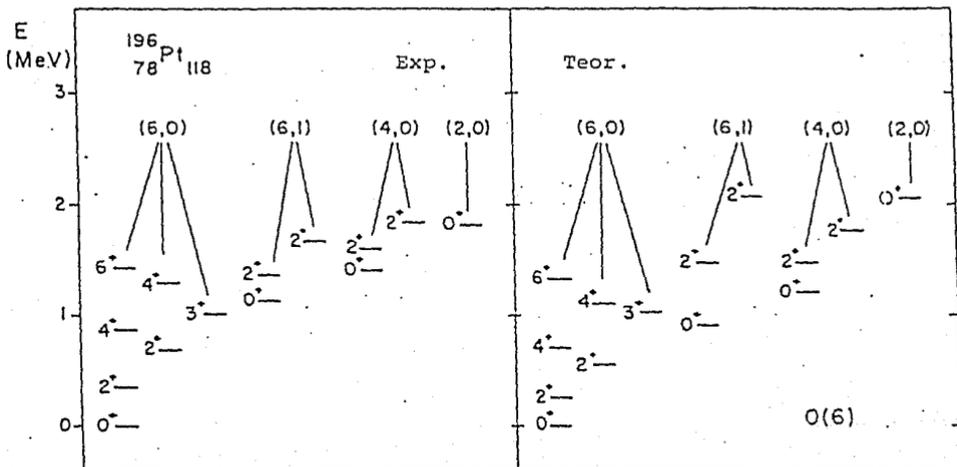


Fig. 4.11a

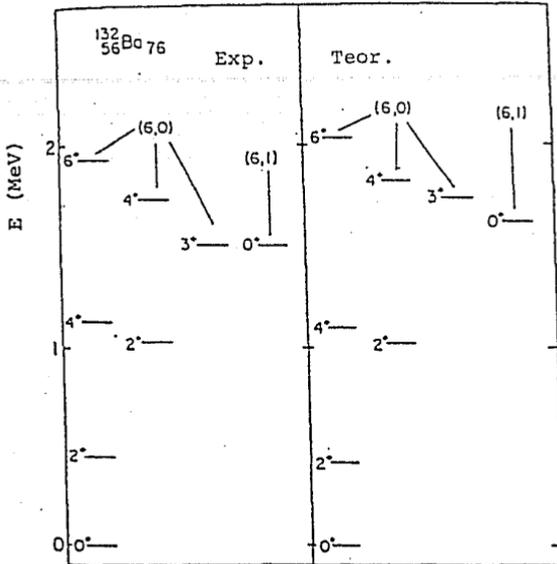


Fig. 4.11b

En el siguiente capítulo consideramos la aplicación del modelo a cadenas de isótopos e isótonos.

con menos ambigüedad que la que se logra con los ajustes de núcleo por núcleo, que en general pueden ajustarse para una amplia variedad de parámetros. Si uno deseara, posteriormente, un ajuste más fino de un núcleo particular, los parámetros efectivos son en general un buen punto de partida, cercano a la convergencia individual (Casten et al, 1978, Chiang et al, 1985, Chiang et al, 1988).

## 2. APLICACIONES Y DISCUSION.

### 1. Cadenas de Isótopos.

Como una aplicación de las técnicas matemáticas y programas de cómputo utilizados en este trabajo, se consideraron las siguientes series ó cadenas de isótopos:

1. Samarios (Sm): Z=62	A=146 a A=158
Uranios (U): Z=92	A=228 a A=240
2. Platinos (Pt): Z=78	A=182 a A=198
Osmios (Os): Z=76	A=180 a A=192
3. Rutenios (Ru): Z=44	A=96 a A=102

#### 1-a Isótopos del Sm (Z=62).

Para esta cadena se consideraron los núcleos par-par del  $^{148}\text{Sm}_{86}$  al  $^{158}\text{Sm}_{96}$ , ajustándose un total de 52 niveles experimentales, los cuales se muestran en la Fig. 5.1. El número de bosones de protón es constante e igual a  $N_{\pi}=6$  para toda la cadena. Los bosones de neutrón varían de  $N_{\nu}=2$  (para  $^{148}\text{Sm}_{86}$ ) hasta  $N_{\nu}=7$  (para  $^{158}\text{Sm}_{96}$ ); el número total de bosones varia entonces desde  $N=8$  hasta  $N=13$ .

Los 52 niveles experimentales que fueron incluidos en el ajuste

## APLICACION DEL MBI-1 A CADENAS DE ISOTOPOS E ISOTONOS PAR-PAR

### 1. INTRODUCCION.

En este capítulo utilizaremos el Hamiltoniano derivado en el capítulo III para el estudio de los estados excitados de carácter colectivo a bajas energías en núcleos par-par:

$$H = k_1 n_d + k_2 n_d^2 + k_3 n_d N + k_4 L^2 + k_5 C_2 O(5) + k_6 P^2 + k_7 Q^2. \quad (5.1)$$

Concretamente, se considerará este operador como un Hamiltoniano efectivo, en el sentido de que un mismo Hamiltoniano es utilizado para la descripción de las líneas espectrales de toda una serie de isótopos o de isótonos par-par.

Con este Hamiltoniano se predicen también los espectros de *núcleos vecinos inestables* localizados a ambos extremos de una cadena específica.

Nuestro objetivo es el de encontrar aquéllos parámetros que mejor reproducen los niveles de energía experimentales considerados dentro del ajuste. Para este propósito se utilizó un programa de cómputo que construye y diagonaliza las matrices de energía asociadas al Hamiltoniano (5.1), y lleva a cabo un ajuste por mínimos cuadrados para determinar los parámetros correspondientes del Hamiltoniano (A. Frank, 1979).

Estos ajustes tienen la ventaja de determinar los parámetros del modelo en la región bajo consideración de manera más precisa y

por mínimos cuadrados son reproducidos con una desviación cuadrática media de 105 KeV. Los parámetros utilizados en el Hamiltoniano convergen a los valores mostrados en la Tabla 5.1. En la Figura (5.1), los niveles experimentales y teóricos incluidos en el ajuste están conectados por líneas punteadas.

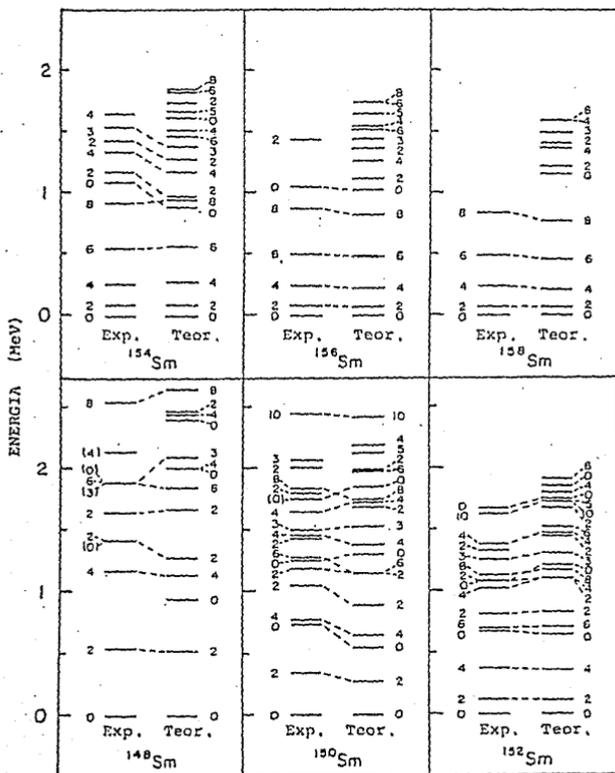


Fig. 5.1

Isótopos del Samario: (Z=62, A: 148 → 158)

TABLA 5.1

Nucleo	$\sigma$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$
Sm	105	2.248	0	-.197	-.00223	.0247	.00173	-.0152
U	27	.165	0	.0407	.00961	-.0347	.0242	-.0183

Los valores experimentales son aproximados por sus respectivos valores teóricos de manera muy razonable, siendo una excepción el estado  $0_2^+$  para el  $^{148}\text{Sm}$ , cuyo valor teórico es predicho a una energía de 0.94 MeV, 0.49 MeV más bajo que el correspondiente valor experimental. Sin embargo, experimentos que involucran excitaciones coulombianas encuentran un nivel  $0^+$  a 1.15 MeV (Smither et al, 1977), que está más cercano al valor predicho por el MBI-1.

El núcleo  $^{148}_{62}\text{Sm}_{88}$  exhibe un espectro de energías de tipo vibracional (o sea presenta las características de la simetría U(5)). A su vez, el núcleo  $^{158}\text{Sm}$  tiene un espectro de tipo rotacional (esto es, presenta características de la simetría SU(3)). Por lo tanto, a medida que se incrementa el número de bosones, esta serie de núcleos presenta una transición de un espectro vibracional (vibrador anarmónico) al de un espectro rotacional (rotor simétrico).

La simetría SU(3) en el  $^{158}_{62}\text{Sm}_{96}$  se aprecia más cuando el espectro predicho por el MBI-1 es clasificado en bandas rotacionales (base,  $\beta$ ,  $\gamma$ ). La banda base tiene la secuencia de espines  $J^\pi = 0_1^+$ ,  $2_1^+$ ,  $4_1^+$ ,  $6_1^+$ ,  $8_1^+$  ...; la banda  $\beta$  (donde  $K=0$ ) está formada por los niveles  $0_2^+$ ,  $2_2^+$ ,  $4_2^+$ ,  $6_2^+$  ...; y la banda  $\gamma$  (donde  $K=2$ ) de los niveles  $2_3^+$ ,  $3_1^+$ ,  $4_3^+$  ... Sin embargo, esta identificación con el

límite  $SU(3)$  es sólo aproximada; porque en el límite  $SU(3)$  exacto el nivel  $2_{\beta}^*$  estaría degenerado con el nivel  $2_{\gamma}^*$ , el  $4_{\beta}^*$  con el  $4_{\gamma}^*$ , etc. Aquí no se presentan estas degeneraciones.

Finalmente, en la Fig. 5.2 se muestra el espectro predicho por el modelo para el  $^{146}\text{Sm}$ .

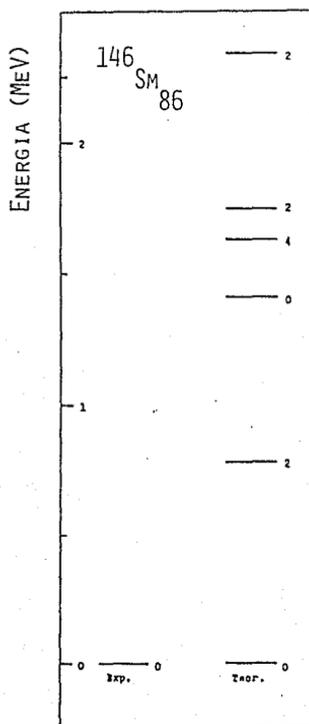


Fig. 5.2

Espectro predicho para el  $^{146}\text{Sm}$

1-b. Isótopos del Sm (ajuste núcleo por núcleo).

Dentro de esta serie de isótopos se consideraron aquellos núcleos con 10 ó más niveles experimentales. Dichos núcleos son  $^{150-154}\text{Sm}$ . En la tabla 5.2 se muestran los correspondientes parámetros y RMS obtenida para cada uno. Para los dos primeros núcleos ( $^{150}\text{Sm}$  y  $^{152}\text{Sm}$ ) los espectros correspondientes resultan ser análogos a los representados en la Fig. 5.1. Por otro lado, el ajuste logrado para el  $^{154}\text{Sm}$  resultó mejor (véase Fig. 5.3), pues los niveles experimentales más altos son aproximados por el modelo con mayor precisión que la obtenida al considerar la cadena completa (Fig. 5.1). En la Tabla 5.2 se ilustra la variación de los parámetros al cambiar de isótopo, observándose un aumento en la magnitud del cociente  $k_7/k_5$  al pasar de  $A=150$  a  $A=154$ . Por tanto, como ya se mencionó anteriormente, esta serie presenta una transición del límite vibracional (U(5)) al límite rotacional (SU(3)).

TABLA 5.2

Núcleo	$\sigma$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$
$^{150}\text{Sm}$	72	.2020	0	0	-.0047	.0260	-.0714	-.0071
$^{152}\text{Sm}$	43	.2466	0	0	-.0014	.0226	.0024	-.0144
$^{154}\text{Sm}$	6	-.1337	0	0	-.0041	.0273	-.0095	-.0167

Los parámetros  $k_1-k_7$  están dados en MeV y  $\sigma$  en KeV.

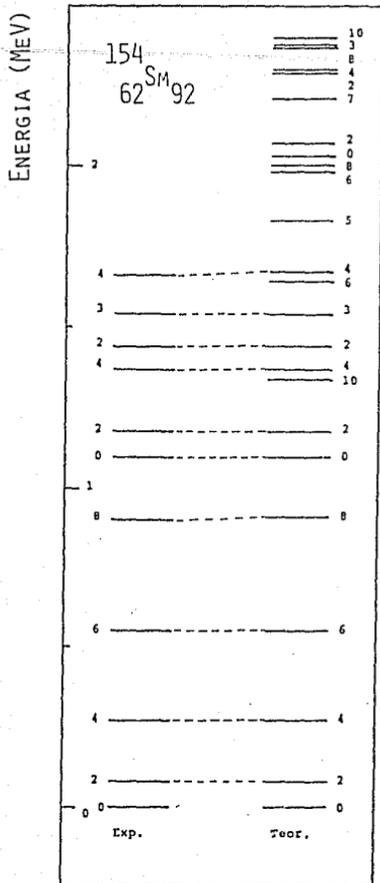


Fig. 5.3

Espectro del  $^{154}_{62}\text{Sm}_{92}$ .

1-b. Isótopos del U (Z=92).

En esta cadena de isótopos se consideraron los núcleos par-par del  $^{230}_{92}\text{U}_{138}$  al  $^{238}_{92}\text{U}_{146}$  ajustándose un total de 48 niveles experimentales. Usando el programa de cómputo mencionado anteriormente, estos

niveles son reproducidos con una desviación cuadrática media de sólo 27 KeV.

Para estos isótopos, el número de bosones de protón ( $N_\pi$ ) es constante e igual a  $N_\pi=5$ , y tiene un número de bosones de neutrón de  $N_\nu=6$  (para  $^{230}\text{U}$ ) hasta  $N_\nu=10$  (para  $^{238}\text{U}$ ). Por lo tanto, el número total de bosones varía de  $N=11$  a  $N=15$ .

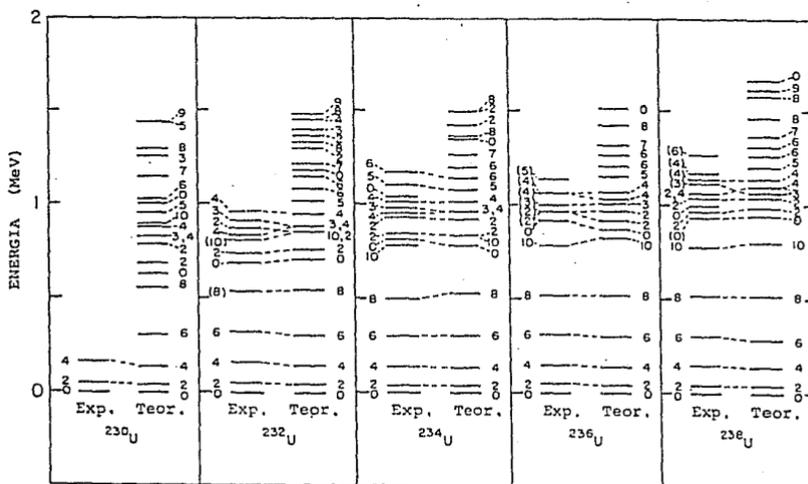


Fig. 5.4

Isótopos del U: ( $Z=92$ ;  $A=230 \Rightarrow 238$ )

Los parámetros del Hamiltoniano que producen el mejor ajuste se listan en la Tabla 5.1. Como se esperaba, el Hamiltoniano es fuertemente dominado por la simetría  $SU(3)$  y sus niveles de energía son dados en la Figura 5.4. Análogamente al caso anterior, los niveles experimentales y teóricos incluidos en el ajuste están conectados por líneas punteadas.

Se puede apreciar que el ajuste es excelente, con la excepción de los niveles  $J^\pi = 0_3^+, 2_4^+, \text{ y } 4_4^+$  en el  $^{238}\text{U}$ . Al parecer estos niveles no pueden ser descritos por el MBI-1; como se demuestra en un trabajo de Hess (P.O. Hess, 1980), utilizando el concepto de superficie de energía potencial (SEP) dentro del modelo colectivo, se encuentra que estos niveles corresponden a un segundo mínimo en la SEP para este núcleo. De acuerdo a un trabajo de Dieperink (A.E.L. Dieperink, 1981) la simetría dinámica SU(3) tal como se conoce en el MBI-1 corresponde a un sólo mínimo deformado en los cálculos de SEP.

Sin embargo, experimentalmente se observa en el  $^{236}\text{U}$  que el nivel  $2_{\beta}^+$  es degenerado con el  $2_{\gamma}^+$  como se predice en el límite SU(3) exacto; esto se cumple (en forma aproximada) para los niveles  $4_{\beta}^+$  y  $4_{\gamma}^+$  (pues estos niveles difieren experimentalmente en sólo 0.01 MeV). El *Hamiltoniano efectivo* correspondiente a esta cadena de isótopos reproduce, particularmente para este núcleo, dichas degeneraciones.

Finalmente, en la Fig. 5.5 se muestran los espectros predichos por el modelo para *núcleos inestables* situados en los extremos de la cadena bajo consideración. Dichos núcleos son el  $^{228}\text{U}_{92\ 136}$  y el  $^{240}\text{U}_{92\ 148}$ .

## 2-a Isótopos del Pt (Z=78).

Como tercera aplicación de este modelo se consideró la cadena de isótopos con Z=78, constituida por la serie de los platinos. En esta serie se incluyeron isótopos par-par con A=182 hasta A=198, ajustándose un total de 82 niveles experimentales.



veles correspondientes a núcleos inestables, localizados a ambos extremos de la cadena, que son el  $^{200}_{78}\text{Pt}_{122}$  (con  $N=4$ ) y el  $^{180}_{78}\text{Pt}_{102}$  (con  $N=14$ ).

Considerando toda la cadena, los 82 niveles experimentales son ajustados con una desviación cuadrática media (RMS) de 140 KeV, con los siguientes parámetros:

$$k_1 = .5843, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 0, \quad k_4 = .00731, \quad k_5 = -.01369, \\ k_6 = .06577, \quad k_7 = 0.$$

Sin embargo, para lograr un mejor ajuste (una RMS más pequeña), fué necesario dividir a la serie completa en dos partes. La primera, llamada PTI, consiste de los primeros siete núcleos de la cadena completa (del  $^{198}\text{Pt}$  al  $^{188}\text{Pt}$ ) formada por un total de 53 niveles experimentales. Con estos niveles se logró una RMS de 88 KeV con los parámetros mostrados en la primera parte de la Tabla 5.3.

En general, como puede verse en las Figs. 5.6a-f, los niveles teóricos calculados por el modelo aproximan los correspondientes niveles experimentales en forma adecuada, siendo excepciones los niveles  $J^\pi=0_2^+$  en los platinos 192, 194 y  $J^\pi=3_1^+$  en los isótopos en los isótopos  $^{192,194,196}\text{Pt}$ . El isótopo  $^{196}\text{Pt}$  es considerado como prototipo de un núcleo con simetría  $O(6)$ , aunque algunos autores afirman evidencias de la simetría  $U(5)$  (A. Leviatan et al, 1986, M.P. Fewell, 1986). De acuerdo a los parámetros mostrados en la Tabla 5.3, los niveles de la serie están fuertemente influenciados por las simetrías  $U(5)$  y  $O(6)$ , representadas por los parámetros  $k_5$  y  $k_6$ , respectivamente. A su vez, el valor de  $k_7$  (correspondiente a la interacción cuadrupolar) es pequeño en comparación con  $k_5$  y  $k_6$ .

La simetría SU(3) no juega, por tanto, un papel importante en el comportamiento de estos niveles nucleares.

TABLA 5.3

PtI: $^{198}\text{Pt}$ - $^{188}\text{Pt}$ , 53 niveles.							
$\sigma$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$
88	1.0287	.2112	-.30104	.0099	-.1324	-.39989	-.00194
PtII: $^{186}\text{Pt}$ - $^{182}\text{Pt}$ , 29 niveles.							
$\sigma$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$
34	.2898	.0127	.0087	.0040	-.0090	-.0062	-.0085

Los parámetros  $k_1$ - $k_7$  están dados en MeV, y  $\sigma$  en KeV.

La segunda parte de la cadena, llamada PtII, incluye a los últimos cuatro núcleos de la serie; en ella se consideraron un total de 29 niveles experimentales, los cuales fueron ajustados con una RMS de 34 KeV con los parámetros mostrados en la segunda parte de la Tabla 5.3.

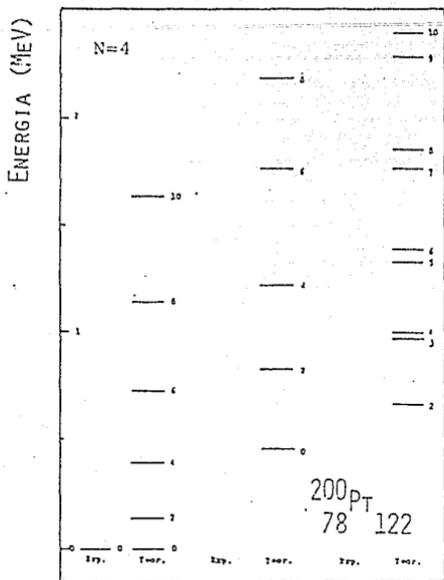


FIG. 5.6A

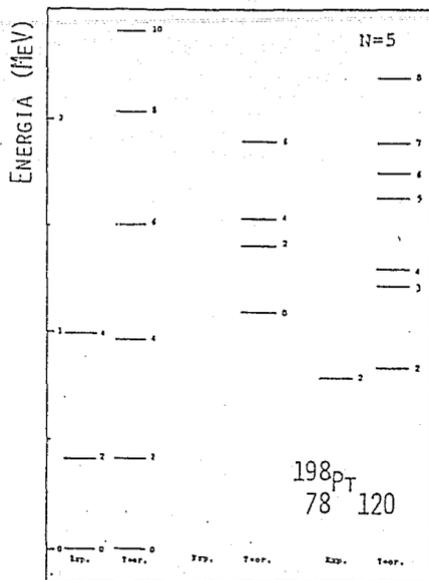


FIG. 5.6B

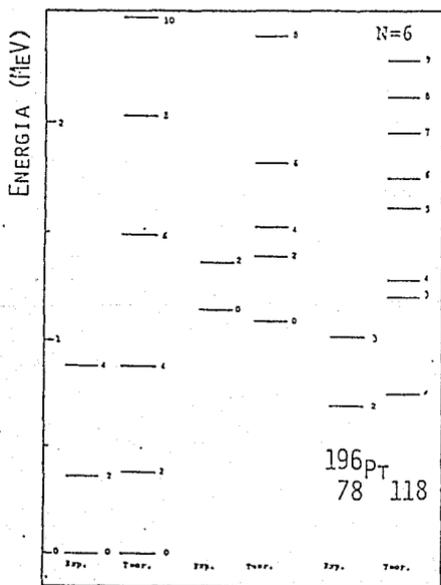


FIG. 5.6C

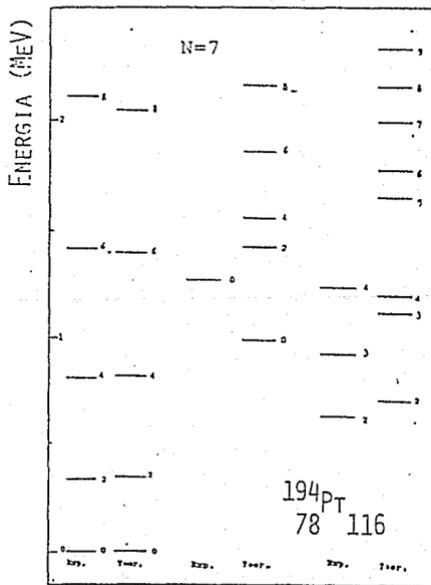


FIG. 5.6D

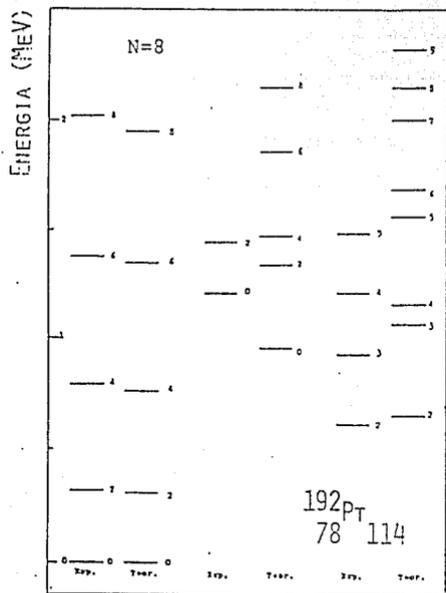


FIG. 5.6E

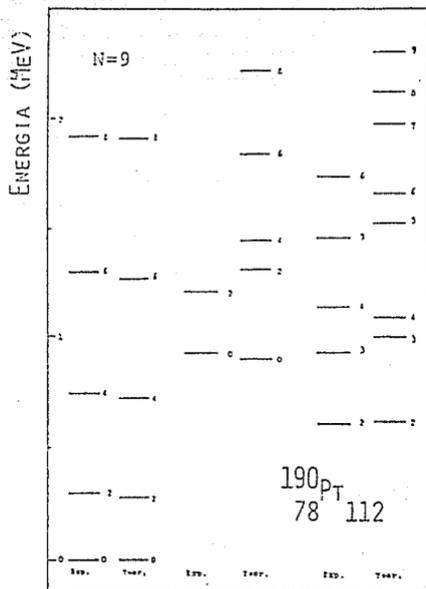


FIG. 5.6E

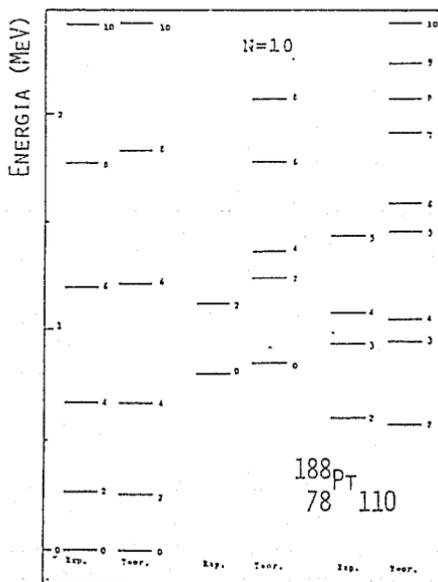


FIG. 5.6G

Los espectros de energía correspondiente a PtII se muestran en las Figs. 5.7a-d. Se puede observar que todos los niveles calculados por el MBI-1 aproximan a los respectivos niveles experimentales de manera satisfactoria.

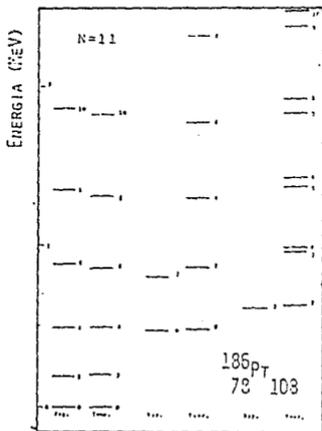


FIG. 5.7A

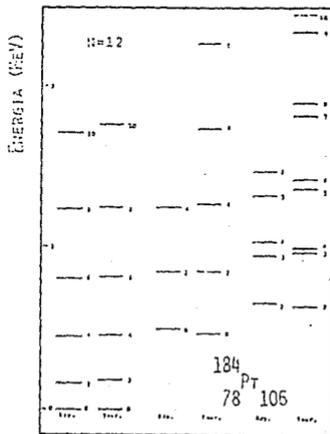


FIG. 5.7B

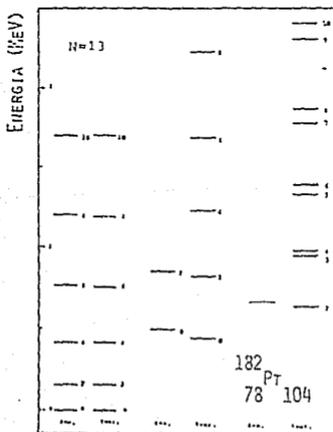


FIG. 5.7C

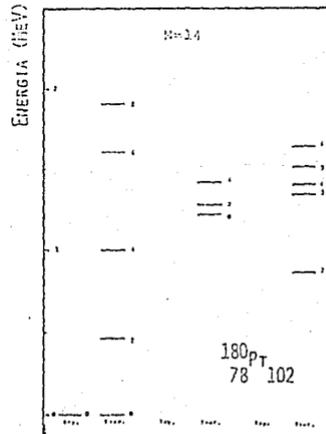


FIG. 5.7D

Los resultados obtenidos en este trabajo se aproximan mucho a los encontrados por Chiang et al (Chiang et al, 1988). Por ejemplo, en los dos ajustes se observa un fuerte descenso en los niveles de la banda ( $\beta$ ) para el núcleo  $^{186}\text{Pt}$ . A su vez, como se muestra en las figuras 5.7a-c, el MBI-1 predice una sucesión de dobletes en los niveles de energía de la banda  $\gamma$ . Por otro lado, los parámetros correspondientes a las simetrías U(5) y O(6) ( $k_5$  y  $k_6$ ) no juegan un papel importante en esta cadena de isótopos, en contraste con los resultados discutidos anteriormente. En cambio, con respecto al valor obtenido en la serie PtI, el valor de  $k_7$  aumentó su magnitud, lo cual indica que los núcleos de esta serie muestran comportamientos de rotor simétrico.

#### 2-b Isótopos del Os (Z=76).

Otra serie de núcleos de interés la constituyen los isótopos del Osmio (donde Z=76). Nuevamente los protones son referidos a la capa Z=82, de modo que se tiene tres bosones de protón tipo agujero para toda la serie. A su vez, los neutrones activos son referidos a la capa N=126, de modo que se tiene bosones de neutrón tipo agujero (desde cinco para el  $^{192}\text{Os}$ , hasta once para el  $^{180}\text{Os}$ ); por consiguiente, el número total de bosones varía desde N=8 hasta N=14.

Para esta serie de isótopos se consideraron en total 71 niveles experimentales, que con el método de los mínimos cuadrados lograron ajustarse con una desviación cuadrática media (RMS) de 97 KeV. Los correspondientes parámetros están indicados en la Tabla 5.4; los respectivos espectros son mostrados en las Figs. 5.8a-g, donde los niveles para cada núcleo han sido clasificados

por bandas (base,  $\beta$ ,  $\gamma$ ).

TABLA 5.4

Os: $^{194}\text{Os}$ - $^{180}\text{Os}$ , 71 niveles							
$\sigma$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$
71	.5914	.0929	-.1637	.0105	-.0425	-.1664	-.0068

Los parámetros  $k_1$ - $k_7$  están dados en MeV, y  $\sigma$  en KeV.

De acuerdo a estas figuras, los niveles de la banda base son aproximados por el modelo de bosones interactuantes de manera muy cercana (especialmente en el  $^{188}_{76}\text{Os}_{112}$  y en el  $^{186}_{76}\text{Os}_{110}$ ). El mismo comentario se puede hacer para las otras dos bandas en cada núcleo de la serie. Especialmente en el  $^{186}\text{Os}$  y en el  $^{180}\text{Os}$ , los niveles de la banda ( $\gamma$ ) son aproximados por este modelo con muy buena precisión.

En general, el modelo predice para los niveles de la banda ( $\gamma$ ) un ascenso constante, a medida que aumenta el número de bosones activos ( $N$ ). A su vez, en todos los niveles de la banda ( $\beta$ ), este modelo predice que todos presentan un ligero ascenso a medida que también aumenta  $N$ ; sin embargo, el espaciamiento relativo entre estos niveles presentan la misma configuración. De acuerdo a estas figuras, se puede decir el mismo comentario para los niveles de la banda ( $\gamma$ ).

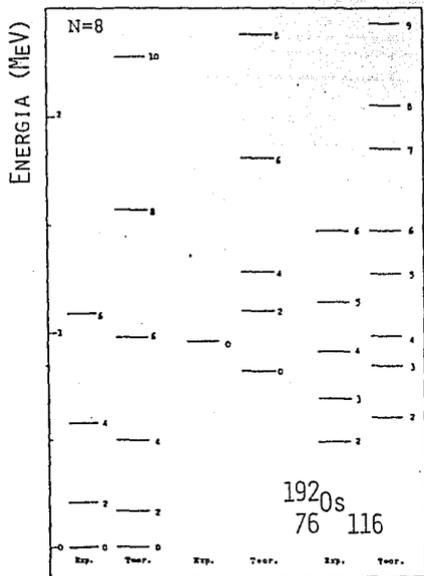


FIG. 5.8A

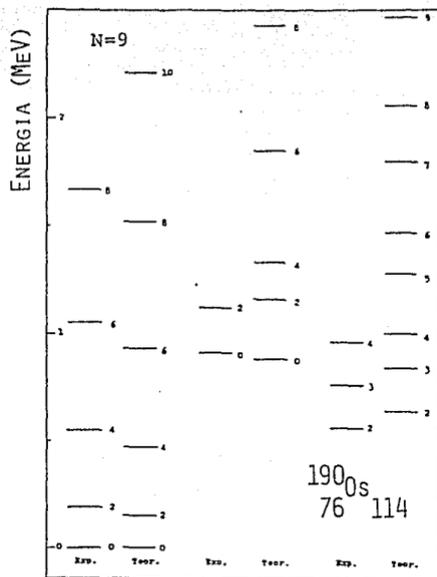


FIG. 5.8B

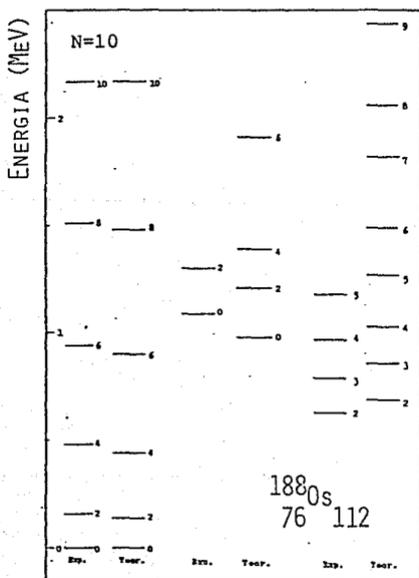


FIG. 5.8c

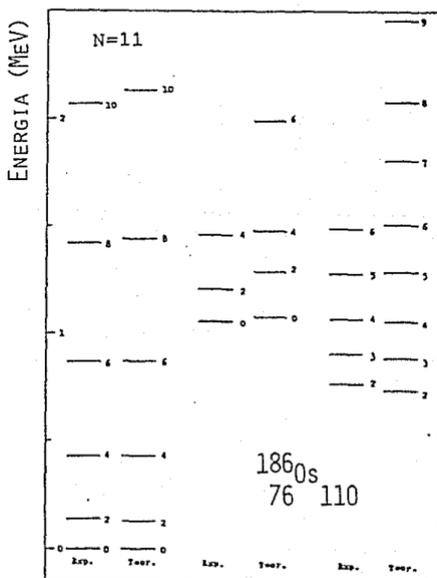


FIG. 5.8D

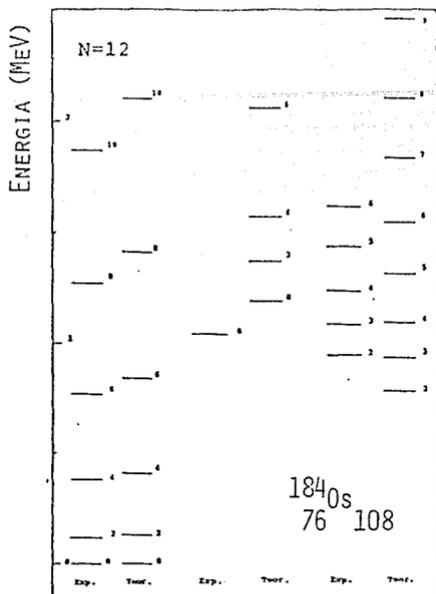


FIG. 5.8E

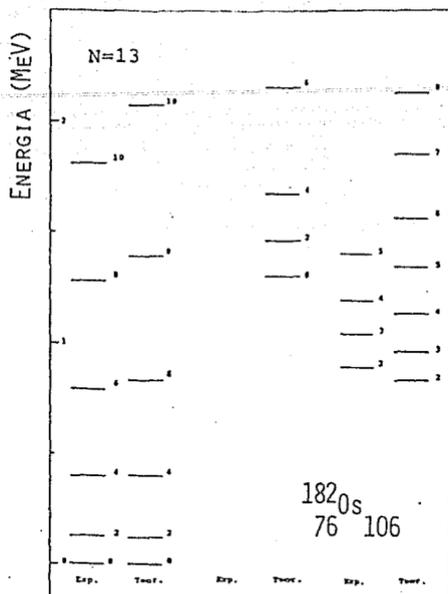


FIG. 5.8F

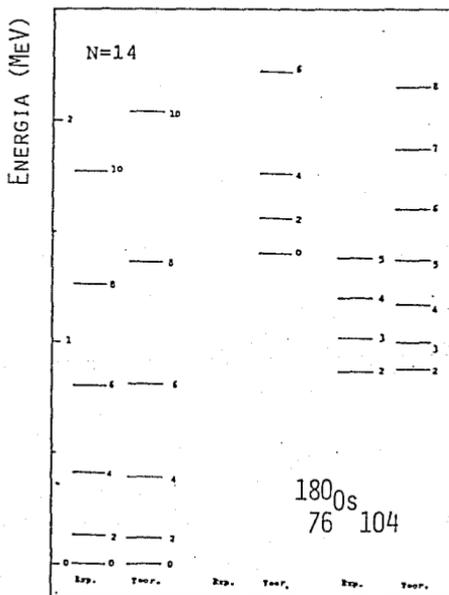


FIG. 5.8G

La serie formada por los osmios (como en los platinos) ha sido tema de discusión de varios autores (Casten et al, 1978, 1984). De acuerdo a estos autores, los niveles de la banda ( $\beta$ ) presentan características de vibración hexadecapolar, en donde están presentes estados de "dos cuasipartículas" para protones. Por otro lado, en los estados de la banda ( $\gamma$ ) se presentan características vibracionales para dos fonones.

En la Fig. 5.9 se muestra el espectro predicho por el modelo para el  $^{194}\text{Os}$ .

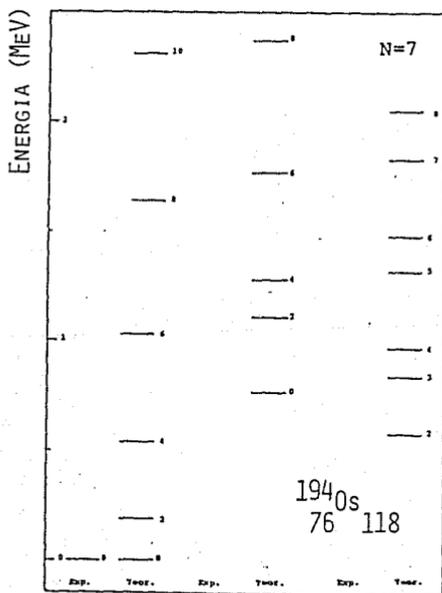


Fig. 5.9

Espectro predicho para el  $^{194}\text{Os}$

### 3-a Isótopos del Ru (Z=44)

Como última aplicación del Hamiltoniano (5.1) a cadenas de isótopos se consideró la serie constituida para Z=44 (correspondiente a la serie de los rutenios). En particular se trataron los núcleos del  $^{96}\text{Ru}_{52}$  al  $^{110}\text{Ru}_{66}$ ; para esta serie, el número de bosones de protón (tipo agujero) es  $N_{\pi}=3$ , mientras que para bosones de neutrón (tipo partícula) es  $N_{\nu}=1$  (para  $^{96}\text{Ru}_{52}$ ) hasta  $N_{\nu}=8$  (para  $^{110}\text{Ru}_{66}$ ). Por tanto, el número total de bosones activos varía respectivamente desde N=4 hasta N=11.

Los 36 niveles experimentales incluidos en el ajuste son reproducidos con una desviación cuadrática media de 122 KeV. Los parámetros utilizados en el Hamiltoniano están indicados en la Tabla 5.5, y los correspondientes espectros son mostrados en las Figs. 5.11a-h, donde los niveles experimentales considerados en el ajuste están conectados por sus respectivos niveles experimentales por líneas punteadas. Nuevamente, los momentos angulares indicados entre paréntesis corresponden a niveles experimentales dudosos.

TABLA 5.5

Ru: $^{96}\text{Ru}$ - $^{110}\text{Ru}$ , 36 niveles.							
$\sigma$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$
122	.77927	0	-.02723	.007	.00692	.00692	0

Los parámetros  $k_1$ - $k_7$  están dados en Mev, y  $\sigma$  en KeV.

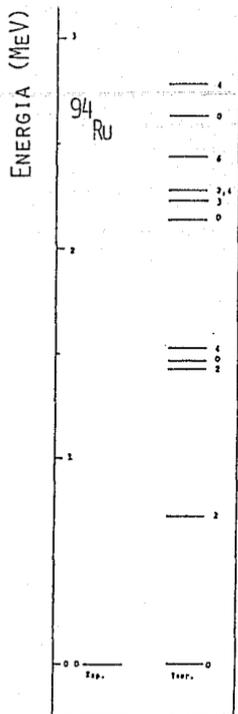


Fig. 5.10

Espectro predicho para el  $^{94}_{44}\text{Ru}_{50}$ .

Los niveles predichos por el modelo aproximan en forma razonable a los respectivos niveles experimentales, con la excepción del estado con  $J^\pi = 2^+$  en el  $^{100}\text{Ru}_{56}$ . La transición que presentan estos núcleos es la de un vibrador anarmónico (límite U(5)) al de uno con simetría O(6) ( $\gamma$ -inestable); por ejemplo, en el  $^{96}\text{Ru}$  se observa que el MBI-1 reproduce los multipletes correspondientes para  $n_d = 1, 2, 3$  y 4 ilustrados en la Fig. 4.1 para la simetría dinámica exacta U(5), discutida en el capítulo anterior.

ENERGIA (MEV)

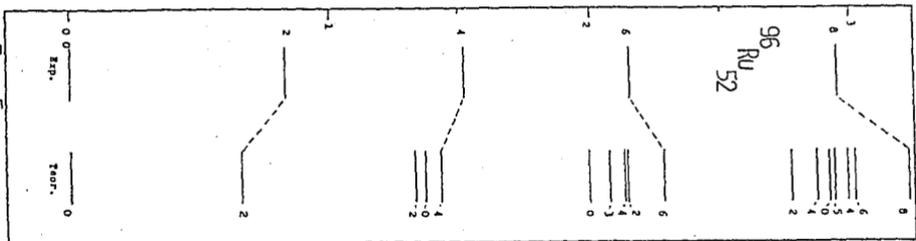


Fig. 5A

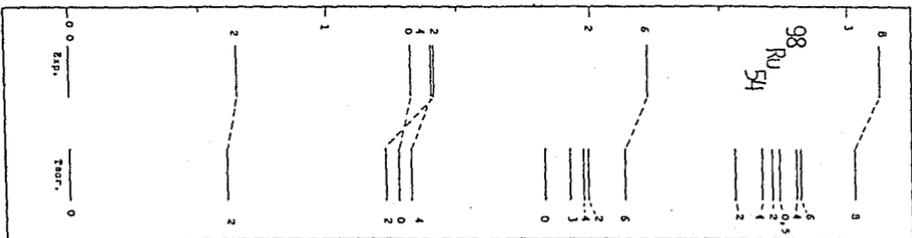


Fig. 5B

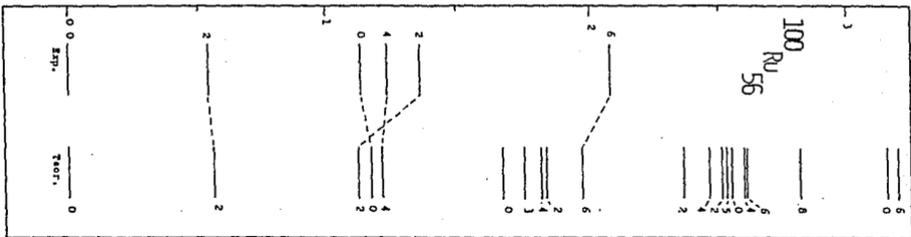


Fig. 5C

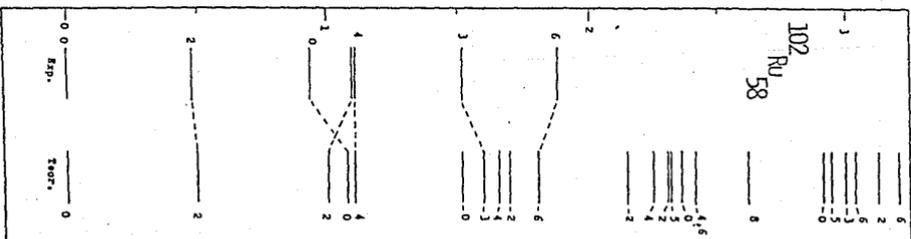


Fig. 5D

Figs. 5.11A-D

ISOTOPOS DEL RUTENIO

ENERGIA (MeV)

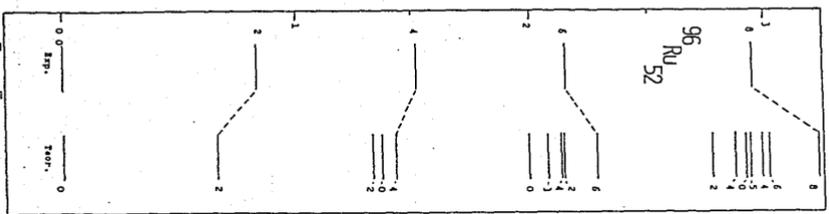


Fig. 5A

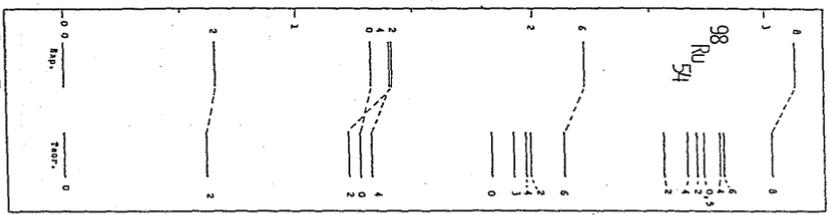


Fig. 5B

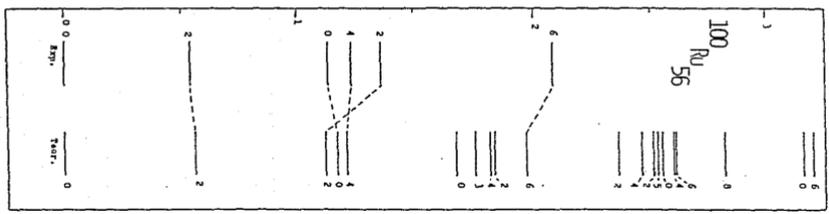


Fig. 5C

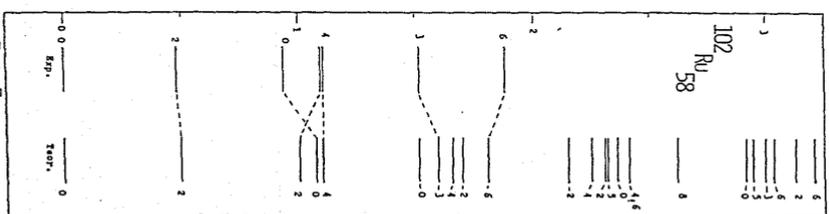


Fig. 5D

FIGS. 5.11A-D



Por otro lado, como se observa en los primeros núcleos de esta serie, el triplete que corresponde a  $n_d=2$  está situado a una altura al doble respecto al nivel  $L=2_1^+$  tal como ocurriría en un espectro con simetría  $U(5)$ .

Finalmente, en las Figs. 5.10 y 5.12 se exhiben los espectros de energías calculados para los isótopos  $^{94}_{44}\text{Ru}_{50}$  y  $^{112}_{44}\text{Ru}_{68}$ , respectivamente. Estos cálculos pueden ser de gran relevancia en los estudios de núcleos inestables y en la predicción de sus espectros.

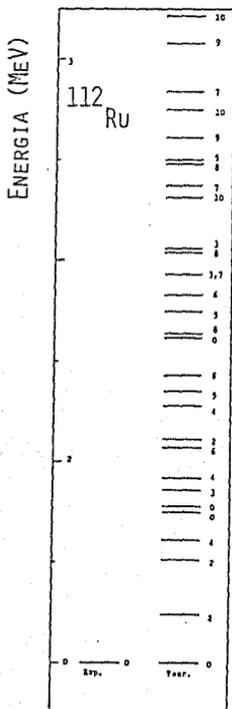


Fig. 5.12

Espectro predicho para el  $^{112}_{44}\text{Ru}_{68}$

## 2. Cadenas de Isótonos.

Como una segunda aplicación de las técnicas de cómputo y métodos matemáticos discutados en este trabajo, se analizaron las cadenas de isótonos par-par con número de neutrones  $N=88$  y  $N=90$ . En analogía al caso de los isótopos, también se considera al Hamiltoniano (5.1) como un *Hamiltoniano efectivo* que incluye los parámetros característicos de toda la cadena de isótonos bajo consideración.

### 1. Cadena de isótonos con $N=88$ .

En particular para la cadena de isótonos con  $N=88$  se consideraron los siguientes núcleos:  $^{144}_{56}\text{Ba}$ ,  $^{146}_{58}\text{Ce}$ ,  $^{148}_{60}\text{Nd}$ ,  $^{150}_{62}\text{Sm}$ ,  $^{152}_{64}\text{Gd}$ ,  $^{154}_{66}\text{Dy}$ ,  $^{156}_{68}\text{Er}$ ,  $^{158}_{70}\text{Yb}$ .

Para los neutrones, la capa con  $N=82$  es considerada como capa cerrada (inerte); para los protones, las capas cerradas correspondientes son en  $Z=50$  y  $Z=82$ . Por consiguiente, toda la serie de isótonos con  $N=88$  contiene seis neutrones activos fuera de la capa  $N=88$ , que en el MBI-1 corresponde a tres bosones de neutrón tipo partícula. Para los primeros seis núcleos de la cadena, el número de protones (partícula) activos son referidos a la capa  $Z=50$ , que en el MBI-1 constituyen 3,4,5,6,7 y 8 bosones de protón tipo partícula. Nótese que para el núcleo  $^{154}_{66}\text{Dy}$  es equivalente considerarlo como formado por ocho bosones partícula referidos a la capa  $Z=50$ , ó por ocho bosones agujero referidos a  $Z=82$ . Para los dos últimos núcleos de la cadena ( $^{158}_{70}\text{Yb}$  y  $^{156}_{68}\text{Er}$ ), resulta necesario considerar a los bosones activos para protones como bosones agujero, ya que el número de éstos es más cercano a la capa  $Z=82$  que con respecto a la capa  $Z=50$ . Por esta razón resulta conveniente considerar dos cadenas para toda la serie de isótonos

con  $N=88$ ; la primera (denotada por ISO88/A) incluye a los núcleos  $^{144}_{56}\text{Ba}$ ,  $^{146}_{58}\text{Ce}$ ,  $^{148}_{60}\text{Nd}$ ,  $^{150}_{62}\text{Sm}$ ,  $^{152}_{64}\text{Gd}$  y  $^{154}_{66}\text{Dy}$ , mientras que la otra (denotada por ISO88/B) incluye a  $^{154}_{66}\text{Dy}$ ,  $^{156}_{68}\text{Er}$  y  $^{158}_{70}\text{Yb}$ . El  $^{154}_{66}\text{Dy}$  está incluido en ambas cadenas.

**Análisis para ISO88/A:** En esta cadena se analizaron en total 49 niveles que, mediante el procedimiento de mínimos cuadrados son ajustados con una desviación cuadrática media de 132 KeV. Los correspondientes parámetros del ajuste están listados en la tabla 5.6 y los espectros son mostrados en las 5.13a-f.

De acuerdo a estas figuras, los niveles para los núcleos  $^{144}_{56}\text{Ba}$ ,  $^{146}_{58}\text{Ce}$  y  $^{148}_{60}\text{Nd}$  son ajustados razonablemente, aunque existe una importante diferencia para el estado  $J^{\pi}=0^{+}$  del  $^{148}_{60}\text{Nd}$ .

TABLA 5.6

Isotonos	$\sigma$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$
Iso88/A	132	.2118	0	-.0027	.0042	-.0157	-.1217	-.0056
Iso88/B	88	.5445	0	.0364	.0054	-.0135	-.1233	-.0044
Iso88/A	132	.2118	0	-.0027	.0042	-.0157	-.1217	-.0056
Iso88/B	88	.5445	0	.0364	.0054	-.0135	-.1233	-.0044

Los parámetros  $k_1 - k_7$  están dados en MeV, y  $\sigma$  en KeV.

Por otro lado, para el núcleo  $^{150}_{62}\text{Sm}$  se observa que la banda base es aproximada por el modelo de manera muy precisa; sin embargo, para momentos angulares mayores ó iguales a 8, los niveles teóricos tienden a distanciarse respecto a los niveles experimentales. Así mismo se observa discrepancia en el estado con  $J^{\pi}=3^{+}$  de la banda ( $\gamma$ ).

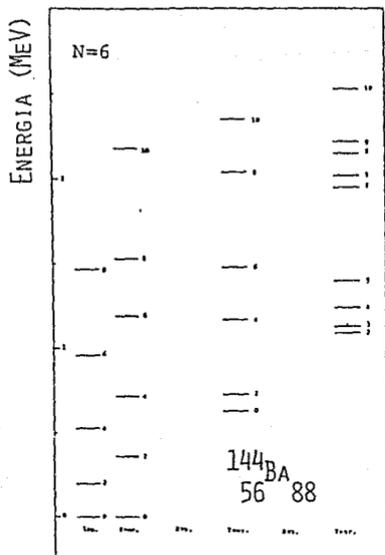


FIG. 5.13A

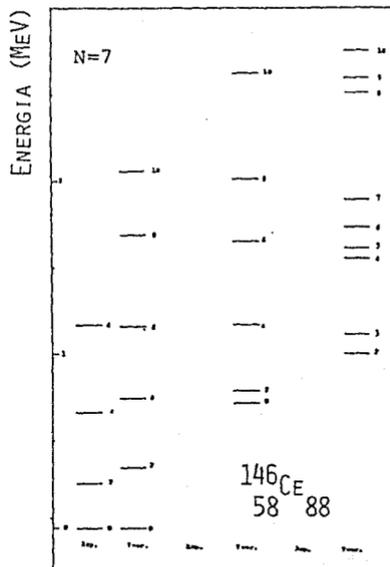


FIG. 5.13B

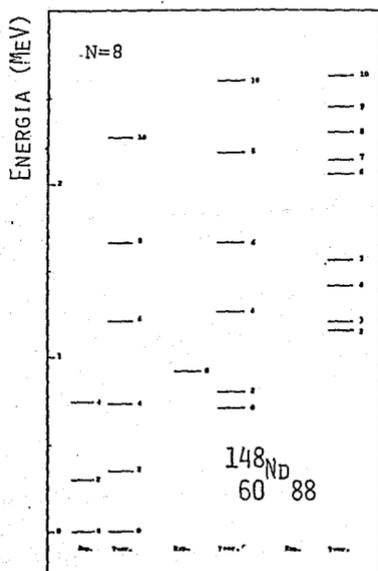


FIG. 5.13c

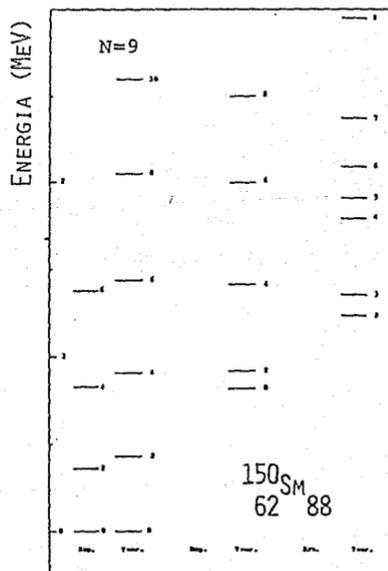


FIG. 5.13d

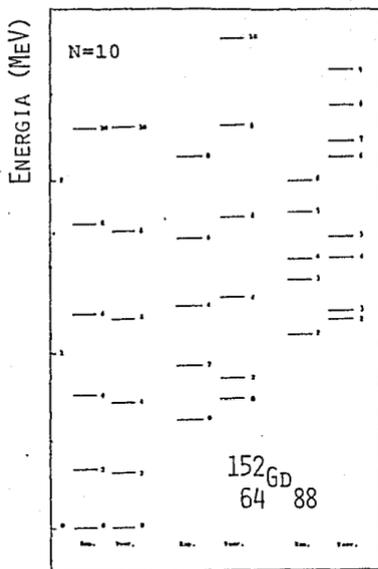


FIG. 5.13E

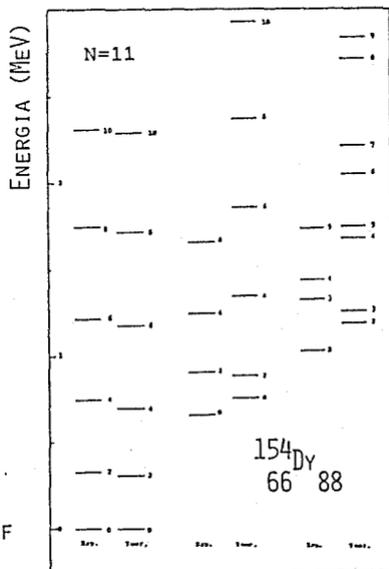


FIG. 5.13F

Para el  $^{152}_{64}\text{Gd}$ , los estados de la banda base son reproducidos por el modelo de manera precisa, aunque no se logra el mismo resultado con respecto a los niveles de las bandas ( $\beta$ ) y ( $\gamma$ ); nótese en particular la fuerte diferencia en los estados con  $J^\pi=3^+$  y  $J^\pi=5^+$  de la banda ( $\gamma$ ).

Finalmente, para el núcleo  $^{154}_{60}\text{Dy}$ , los niveles de la banda base son bien aproximados por este modelo (a diferencia con lo discutido para los niveles de las bandas  $\beta$  y  $\gamma$ ).

*Análisis para ISO88/B:* En esta serie de isótonos se consideró 27 niveles experimentales. El ajuste logrado para esta cadena de isótonos resultó ser excelente pues se obtuvo una RMS de .088 MeV; los parámetros que lograron este ajuste son los señalados en la Tabla 5.6.

Los espectros correspondientes son los ilustrados en las Figuras 5.14a-c.

Como se ha mencionado anteriormente, el  $^{154}_{66}\text{Dy}$  puede considerarse como estar constituido también por bosones tipo agujero; esto se confirma si se observan los espectros calculados en las dos series de isótonos con  $N=88$ , ya que presentan básicamente la misma estructura y no hay diferencias notables en los espectros asociados al  $^{154}_{66}\text{Dy}$ . Para el  $^{156}_{68}\text{Er}$  se tiene que la banda base es reproducida muy bien, aunque existe una ligera discrepancia con los valores experimentales de los dos niveles con  $J^{\pi}=8^{+}$  y  $J^{\pi}=10^{+}$ . El acuerdo con los datos experimentales es razonable, excepto el nivel con momento angular cero.

Finalmente, en el  $^{158}_{70}\text{Yb}$ , se observa que los únicos tres niveles involucrados en el ajuste son aproximados por el Hamiltonian efectivo en forma muy razonable.

NOTA: La información experimental utilizada en este trabajo fue tomada de "Table of Isotopes", de Lederer y Shirley (Lederer et al, 1978) y de "Quasi-ground, quasi-beta and quasi-gamma bands" de Sakai y Gono (Sakai et al, 1979).

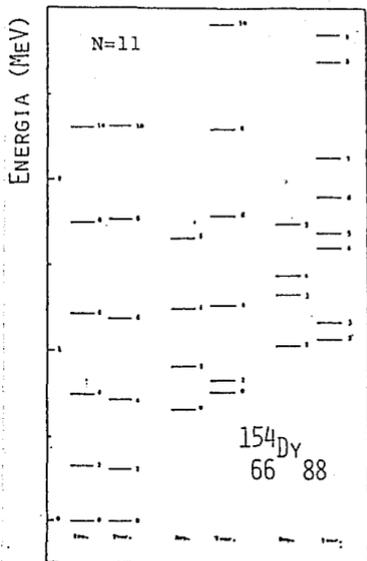


FIG. 5.14A

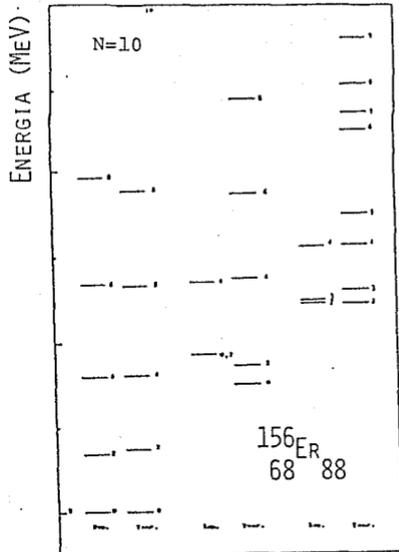


FIG. 5.14B

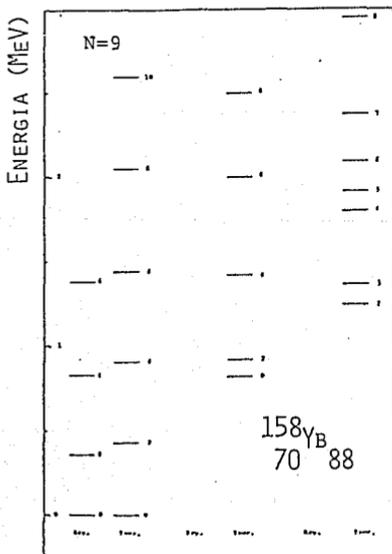


FIG. 5.14c

## 2. Cadena de isótonos con $N=90$ .

Para la cadena de isótonos con  $N=90$  se consideran los siguientes núcleos:  $^{146}_{56}\text{Ba}$ ,  $^{148}_{58}\text{Ce}$ ,  $^{150}_{60}\text{Nd}$ ,  $^{152}_{62}\text{Sm}$ ,  $^{154}_{64}\text{Gd}$ ,  $^{156}_{66}\text{Dy}$ ,  $^{158}_{68}\text{Er}$  y  $^{160}_{70}\text{Yb}$ . Nuevamente la capa  $N=82$  es considerada como capa cerrada inerte para los neutrones, mientras que para los protones las capas respectivas son en  $Z=50$  y  $Z=82$ . Por tanto, en toda esta serie de isótonos, los núcleos poseen ocho neutrones tipo partícula para constituir cuatro bosones de neutrón tipo partícula. Por otra parte, para los núcleos  $^{146}_{56}\text{Ba}$ ,  $^{148}_{58}\text{Ce}$ ,  $^{150}_{60}\text{Nd}$ ,  $^{152}_{62}\text{Sm}$ ,  $^{154}_{64}\text{Gd}$ ,  $^{156}_{66}\text{Dy}$ , los protones activos son referidos a la capa  $Z=50$  constituyendo, respectivamente, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 bosones de protón tipo partícula. En analogía con el  $^{154}_{66}\text{Dy}$ , el núcleo  $^{156}_{66}\text{Dy}$  puede suponerse que posee ocho bosones de protón tipo partícula referidos a la capa  $Z=50$ , ó bien, ocho bosones de protón tipo agujero referidos a la capa  $Z=82$ . A su vez, para los núcleos  $^{158}_{68}\text{Er}$  y  $^{160}_{70}\text{Yb}$  resulta conveniente considerar a los bosones activos como *bosones-agujero*.

Por consiguiente, para analizar la cadena de isótonos con  $N=90$  fué necesario dividirla en dos partes (en analogía a como se procedió para los isótonos con  $N=88$ ), que en este trabajo fueron denominados ISO90/A (que incluye  $^{146}_{56}\text{Ba}$ ,  $^{148}_{58}\text{Ce}$ ,  $^{150}_{60}\text{Nd}$ ,  $^{152}_{62}\text{Sm}$ ,  $^{154}_{64}\text{Gd}$ ,  $^{156}_{66}\text{Dy}$ ) e ISO90/B (que incluye  $^{156}_{66}\text{Dy}$ ,  $^{158}_{68}\text{Er}$ ,  $^{160}_{70}\text{Yb}$ ). Nótese que el  $^{156}_{66}\text{Dy}$  está incluido en ambas cadenas.

*Análisis para ISO90/A:* En esta cadena se incluyen 61 niveles experimentales que, mediante el proceso de mínimos cuadrados, se lograron ajustar con una RMS de .092 MeV, resultando como mejores parámetros para el Hamiltoniano los indicados en la Tabla 5.2.

Los espectros ajustados se muestran en las Figs. 5.15a-f.

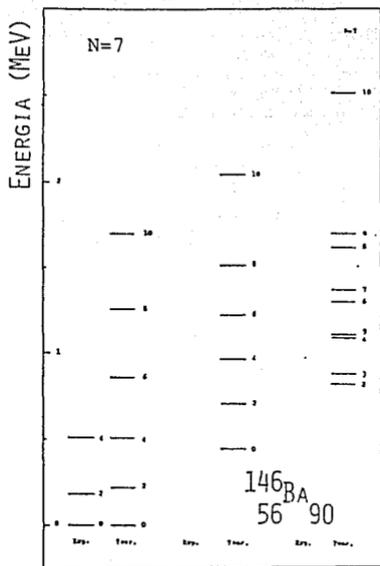


FIG. 5.15A

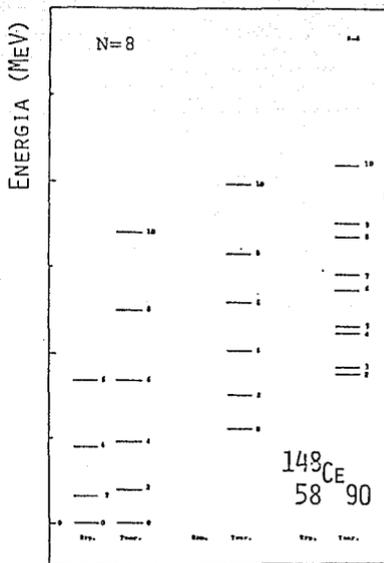


FIG. 5.15B

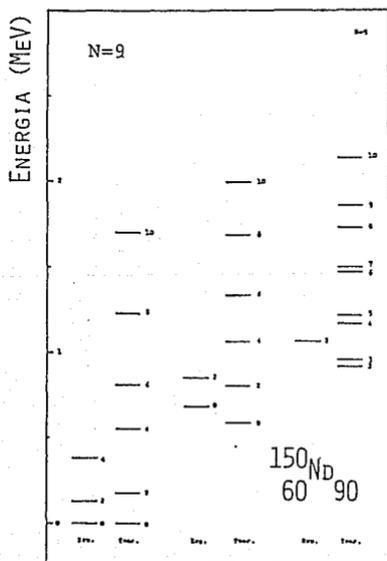


FIG. 5.15c

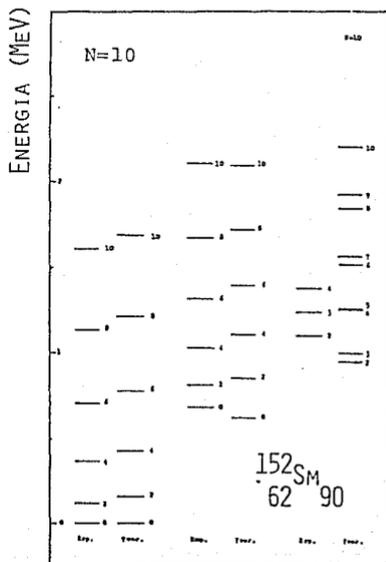
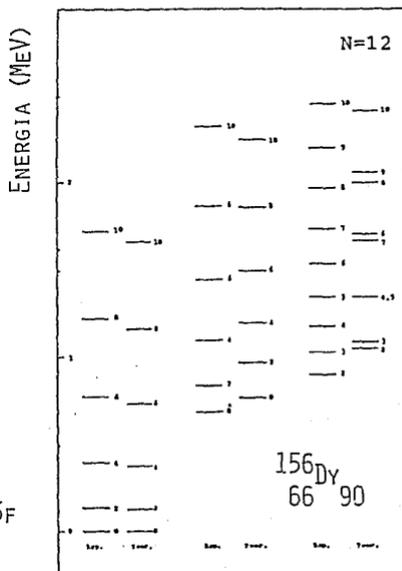
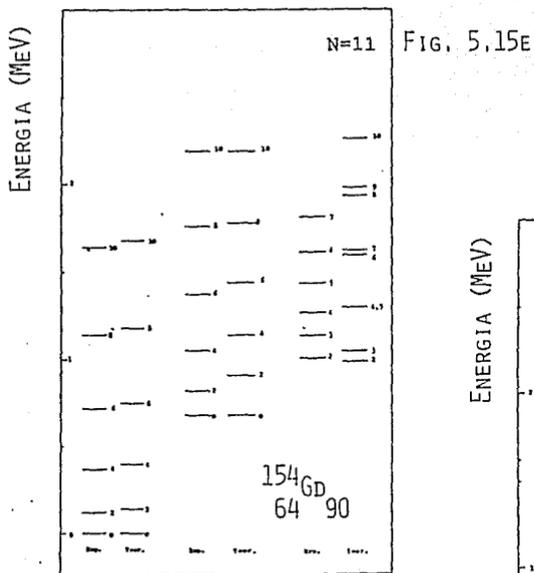


FIG. 5.15D



De acuerdo a estos espectros, para el  $^{146}_{56}\text{Ba}$  y el  $^{148}_{58}\text{Ce}$ , observamos que el MBI-1 reproduce muy bien los niveles de energías experimentales. Sin embargo, en todos los niveles calculados en  $^{150}_{60}\text{Nd}$ , se presentan ligeras discrepancias con los respectivos niveles experimentales. En el núcleo  $^{152}_{62}\text{Sm}$  observamos que los niveles de la

banda  $\beta$  y  $\gamma$  son reproducidos razonablemente. Para el  $^{154}_{64}\text{Gd}$  el modelo logra reproducir la banda base y ( $\beta$ ) con buena aproximación, especialmente los estados con espines elevados. Similarmente se puede decir respecto a los estados de la banda base y  $\beta$  del  $^{156}_{66}\text{Dy}$ . Sin embargo, resulta interesante observar la configuración que presentan los niveles que forman el espectro de la banda ( $\gamma$ ). De acuerdo al MBI-1, los niveles de esta banda tienden a "degenerarse por parejas" i.e., el nivel  $2^+$  tiende a degenerarse con el  $3^+$ , el  $4^+$  con el  $5^+$ , el  $6^+$  con el  $7^+$ , etc. A excepción del  $J^\pi=4^+$  y  $J^\pi=5^+$  en el  $^{154}_{64}\text{Gd}$  esta tendencia parece no observarse experimentalmente.

*Análisis para ISO90/B:* El  $^{156}_{66}\text{Dy}$  es ajustado también dentro de esta cadena, simultáneamente con el  $^{158}_{68}\text{Er}$  y el  $^{160}_{70}\text{Yb}$ . Para este caso, los parámetros son los indicados en la Tabla 5.6, mediante los cuales se obtuvo una RMST de .069. Los espectros se muestran en las Figs. 5.16a-c.

Con los parámetros de la Tabla 5.6 se obtiene que las bandas base y ( $\beta$ ) en el  $^{156}_{66}\text{Dy}$  son reproducidas razonablemente por el modelo. A su vez, los niveles de la banda ( $\gamma$ ) se ajustan mejor que en la cadena ISO90/A. Este último resultado indica que es preferible considerar entonces al  $^{156}_{66}\text{Dy}$  como formado por bosones tipo agujero para la capa de protones junto con el  $^{158}_{68}\text{Er}$  y el  $^{160}_{70}\text{Yb}$ . En el  $^{158}_{68}\text{Er}$  se observa que los niveles son reproducidos razonablemente, a excepción del  $J^\pi=0^+$  de la banda ( $\beta$ ) que difiere en .19 MeV respecto a su valor experimental. Finalmente, los niveles de la banda base en el  $^{160}_{70}\text{Yb}$  se ajustan con buena aproximación.

Finalmente, para el núcleo  $^{154}_{60}\text{Dy}$ , los niveles de la banda base son bien aproximados por este modelo (a diferencia con lo discutido para los niveles de las bandas  $\beta$  y  $\gamma$ ).

*Análisis para ISO88/B:* En esta serie de isótonos se consideró 27 niveles experimentales. El ajuste logrado para esta cadena de isótonos resultó ser excelente pues se obtuvo una RMS de .088 MeV; los parámetros que lograron este ajuste son los señalados en la Tabla 5.6.

Los espectros correspondientes son los ilustrados en las Figuras 5.14a-c.

Como se ha mencionado anteriormente, el  $^{154}_{66}\text{Dy}$  puede considerarse como estar constituido también por bosones tipo *agujero*; esto se confirma si se observan los espectros calculados en las dos series de isótonos con  $N=88$ , ya que presentan básicamente la misma estructura y no hay diferencias notables en los espectros asociados al  $^{154}_{66}\text{Dy}$ . Para el  $^{156}_{68}\text{Er}$  se tiene que la banda base es reproducida muy bien, aunque existe una ligera discrepancia con los valores experimentales de los dos niveles con  $J^\pi=8^+$  y  $J^\pi=10^+$ . El acuerdo con los datos experimentales es razonable, excepto el nivel con momento angular cero.

Finalmente, en el  $^{158}_{70}\text{Yb}$ , se observa que los únicos tres niveles involucrados en el ajuste son aproximados por el Hamiltonian efectivo en forma muy razonable.

NOTA: La información experimental utilizada en este trabajo fue tomada de "Table of Isotopes", de Lederer y Shirley (Lederer et al, 1978) y de "Quasi-ground, quasi-beta and quasi-gamma bands" de Sakai y Gono (Sakai et al, 1979).

## CONCLUSIONES

En este trabajo se ha estudiado la estructura algebraica del Hamiltoniano del MBI-1 desde el punto de vista de la Teoría de Grupos. En particular, se hace uso del concepto de simetría dinámica para estudiar soluciones analíticas del sistema y se presenta la forma explícita de dos de ellas. Posteriormente se construye el Hamiltoniano general expresado en términos de los invariantes de Casimir, que se utiliza para la predicción y comparación de niveles nucleares teóricos con los datos experimentales.

De acuerdo a este modelo, los sistemas nucleares son sistemas finitos, es decir, están constituidos por un número finito de  $N$  bosones interactuantes, lo que constituye una diferencia fundamental respecto a otros modelos nucleares, como el modelo geométrico. El MBI-1 se fundamenta en el modelo nuclear de capas, que es el modelo microscópico fundamental de la estructura nuclear, ya que los  $N$  bosones del sistema están asociados a pares de nucleones activos, referidos a la capa cerrada más próxima.

Como se ha discutido en el capítulo 5, este modelo, a pesar de su simplicidad, constituye un método poderoso para la descripción de fenómenos de carácter colectivo, especialmente en las regiones media y pesadas de la tabla nuclear. Mediante el ajuste global de cadenas de isótopos o isótonos, se determinan los parámetros característicos de la región bajo consideración, los cuales, en general, son un buen punto de partida para lograr una convergencia

individual (es decir, obtener los parámetros de un núcleo en particular). En algunos casos de convergencia individual este modelo logra aproximar a los niveles experimentales de una manera sorprendente (como fué en el caso del  $^{154}\text{Sm}$ ). Por otro lado, el modelo de bosones con interacción simplifica considerablemente el espacio del modelo de capas correspondiente. Como ejemplo de este grado de simplificación, consideremos nuevamente el caso del  $^{154}\text{Sm}$ . En este núcleo, los 12 protones de valencia pueden ocupar todas las órbitas disponibles en la región 50-82, mientras que los neutrones de valencia lo hacen en la capa 82-126. Aún ignorando las excitaciones hacia capas más altas y las del carozo, el número de estados predichos por el modelo de capa resulta ser muy grande. Por ejemplo, existen 41, 654, 193, 516, 797 estados de paridad positiva con  $J=0$ ; 364, 132, 652, 934, 889 para estados con  $J=2$  y 530, 897, 397, 260, 575 estados con  $J=4$ . En el MBI-1, las matrices correspondientes a este sistema (de 11 bosones activos) tienen dimensiones 16, 26 y 30, para  $J=0,2,4$ , respectivamente.

Vemos entonces que, a este nivel, la única conexión de este modelo con el modelo nuclear de capas consiste en referir a los bosones activos del sistema a la capa cerrada más próxima. Sin embargo, este modelo puede relacionarse de manera directa con el modelo de capas (Iachello, F., 1980, Scholten, O, 1981, Iachello et al, 1987) por lo que constituye un puente entre los modelos colectivos fenomenológicos con teorías más fundamentales de la estructura nuclear.

Podemos concluir que el MBI-1 ha enriquecido en una manera importante muchos de los trabajos teóricos en estudios de estructura

nuclear y que ha sido capaz de clasificar y unificar una gran variedad de información experimental.

Finalmente discutiré algunas extensiones que se han formulado de este modelo, que podrían ser utilizadas en estudios posteriores de este trabajo, como por ejemplo, la determinación de espectros de niveles par-non de las cadenas de isótopos e isótonos discutidos. Una extensión natural del MBI-1 consiste en hacer la distinción entre bosones formados por pares de protones ó de neutrones. Los constituyentes básicos del Hamiltoniano son los operadores  $s_{\nu}^{\dagger}$ ,  $s_{\pi}^{\dagger}$ ,  $d_{\mu\nu}^{\dagger}$ ,  $d_{\mu\pi}^{\dagger}$ . Esta extensión del modelo es conocida como el MBI-2 (Arima et al, 1977). De esta manera se tiene  $N_{\nu}$  bosones de neutrón y  $N_{\pi}$  bosones de protón y, nuevamente, los bosones activos son referidos a las capas cerradas más cercanas.

Una variante muy interesante del MBI-1 consiste en extenderlo a sistemas nucleares con un número impar de partículas. En estos casos, el núcleo es considerado como un sistema de bosones y fermiones interactuantes. Los bosones representan de nuevo pares de partícula acopladas a  $L=0$  y  $L=2$ , mientras que los fermiones representan partículas no apareadas. El Hamiltoniano completo del sistema es dividido en una parte bosónica, una fermiónica y una parte "de interacción":

$$H = H_B + H_F + H_{BF} . \quad (6.1)$$

La parte bosónica  $H_B$  se fija con el requisito de que sus eigenvalores describan a los núcleos par-par adyacentes. Por otro lado, los parámetros para la parte fermiónica pueden ser obtenidos a

partir de consideraciones que involucran al modelo de capas. El término  $H_{BF}$  contiene por lo común muchos parámetros por ajustar, y generalmente incluyen interacciones de uno y de dos cuerpos solamente.

Es costumbre escribir el Hamiltoniano  $H_{BF}$  en la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 H_{BF} = & \sum_{i,j} \Gamma_{i,j} [ Q \times [a_i^\dagger \times a_j]^{(2)} ]^{(0)} \\
 & + \sum_{i,j} A_{i,j} [ [d^\dagger \times d]^{(0)} \times [a_i^\dagger \times a_j]^{(0)} ]^{(0)} \\
 & + \sum_{i,j,j'} \Lambda_{j,j'}^{j''} [ [d^\dagger \times a_j]^{(j'')} \times [a_{j'}^\dagger \times d]^{(j'')} ]^{(0)},
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

donde  $d^\dagger$  y  $d$  son los operadores de creación y aniquilación para bosones  $d$ , y  $Q$  es el operador cuadrupolar. Los símbolos  $d^\dagger$  y  $d$  denotan los operadores de creación y aniquilación para fermiones;  $\Gamma$  y  $A$  son parámetros. Las sumatorias involucran los valores de  $j$  para los cuales existen órbitas permitidas para el nucleón no apareado. Una hipótesis que se toma en el MBI-1 consiste en que los operadores fermiónicos  $a^\dagger$  y  $a$  conmutan con los operadores bosónicos. El modelo de bosones y fermiones interactuantes también se presta a un análisis mediante la Teoría de Grupos (van Isacker, P., et al, 1984).

Otra generalización del MBI-1 es la introducción de un bosón  $g$ . Esto tendría relevancia especialmente para niveles con energías de

excitación relativamente altas. Los niveles de energía más bajos son bien descritos por los bosones  $s$  y  $d$ . Sin embargo, diversos hechos experimentales sugieren la necesidad de bosones con  $l=4$ ; uno de los más importantes consiste del hecho de que valores para  $B(E2)$  dentro de las bandas base en núcleos deformados no muestran efectos de corte como se esperaría en un sistema en donde  $N$  es finito (Grosse et al, 1981; Ower, et al, 1982 y Emling, 1984).

## APENDICE A

### EL METODO DE LA SEGUNDA CUANTIZACION.

En nuestro estudio del MBI-1 se considera un sistema de muchas partículas, en particular un sistema de bosones  $s$  y  $d$ , que interactúan entre sí. En principio, la ecuación de onda correspondiente resultaría de resolver la ecuación de Schrödinger no relativista

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (\text{A.1})$$

en el espacio de configuración de las partículas; pero resolver la ecuación de Schrödinger mediante este método resulta difícil. Existe, sin embargo, un método alternativo de resolver el problema de un sistema de muchas partículas, conocido como el *método de la segunda cuantización*. Dado que el Hamiltoniano mismo del MBI-1 y demás operadores relevantes de este modelo (como los de transición electromagnética) se expresan en este lenguaje, conviene presentar un resumen de su formalismo y las ventajas que presenta para la solución de un sistema con muchas partículas.

Para comenzar, en el método de la segunda cuantización se le da una nueva interpretación a la ec. de Schrödinger: es una ecuación de campo para un "campo de materia". Y como tal se supondrá que es derivable a partir de un principio de mínima acción. Es decir, existe una integral de acción de la forma

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\psi, \nabla\psi, \dot{\psi}, t) dt, \quad (\text{A.2})$$

donde

$$\mathcal{L} = \int L(\psi(\mathbf{r}, t), \nabla\psi, \dot{\psi}, t) dt, \quad (\text{A.3})$$

es el Lagrangiano,  $L$  la densidad Lagrangiana,  $d^3r = dx dy dz$  y la integral para  $\mathcal{L}$  es llevada a cabo sobre todo el espacio. La funcional  $\mathcal{L}$  debe ser tal que la variación de  $W$  con respecto a  $\psi$  (con  $\mathbf{r}$  y  $t$  fijos) con la condición  $\delta\psi = 0$  en  $t_1$  y  $t_2$  da lugar a la ecuación de campo (A.1) (L.D. Landau, 1977, P. Roman, 1962).

Nuestro interés es ahora *cuantizar* el "campo de materia" descrito por la ec. (A.1). La motivación de proceder con este enfoque surge de establecer una analogía entre este campo de materia con el campo electromagnético (descrito por las ecuaciones de Maxwell). Es muy conocido el hecho de que de la cuantización del campo electromagnético se llega naturalmente al concepto de *foton*, de modo que el campo electromagnético es interpretado como un sistema de *fotones*. Con la cuantización de la ec. (A.1) se esperaría entonces que el campo de materia descrito sea equivalente a un sistema de *muchas partículas*. Dado que la ecuación de Schrödinger ya es en sí misma un resultado directo de la Mecánica Cuántica, al proceso de cuantizarla se le conoce entonces como la *segunda cuantización*.

Para cuantizar (A.1) se procede del modo siguiente: desarrollamos la amplitud de onda (de materia)  $\psi$  en términos de algún

conjunto completo (ortonormal) de funciones  $u_k$ ; en particular estas funciones pueden ser las eigenfunciones de energía para una partícula que se mueve en el campo de fuerzas determinado por un potencial  $V(r)$ ,

$$\begin{aligned} \text{Hu}_k(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u_k(r) + V(r)u_k(r) \\ c_k u_k(r) \end{aligned} \tag{A.4}$$

y como las funciones  $u_k$  forman un conjunto ortonormal completo se tiene entonces

$$\psi(r, t) = \sum_k a_k(t) u_k(r) \tag{A.5}$$

ya que  $\psi$  se considera ahora como un operador, los coeficientes de expansión  $a_k$  son también operadores cuánticos (dependientes del tiempo) los cuales actúan sobre elementos de un espacio de Hilbert. Las propiedades cuánticas de  $\psi$  estarán determinadas una vez que las relaciones algebraicas entre los operadores  $a_k$  a su vez se establezcan.

Como en el MBI-1 se está considerando un sistema de bosones, tomamos como axiomas de cuantización las relaciones de conmutación

$$[a_k, a_\ell^\dagger] = \delta_{k\ell} \tag{A.6a}$$

$$[a_k, a_\ell] = 0 \tag{A.6b}$$

$$[a_k^\dagger, a_\ell^\dagger] = 0 \tag{A.6c}$$

donde  $a^\dagger$  significa el conjugado Hermitiano del operador  $a_k$ .

Consideremos ahora el operador

$$N_k = a_k^\dagger a_k \quad (\text{A.7})$$

del cual deseamos determinar sus eigenvalores, i.e., queremos resolver la ecuación

$$N_k \phi = n_k \phi, \quad (\text{A.8})$$

donde  $n_k$  es el eigenvalor de  $N_k$ . Multiplicando (A.8) escalarmente por  $\phi$ , se obtiene

$$(\phi, a_k^\dagger a_k \phi) = n_k (\phi, \phi) = n_k, \quad (\text{A.9})$$

dado que los eigenvectores de un operador Hermitiano son normalizables. Podemos reescribir esta expresión aún en la forma

$$n_k = (a_k \phi, a_k \phi) = a_k^2 \geq 0 \quad (\text{A.10})$$

dado que (en un espacio de Hilbert con métrica positiva) la longitud de un elemento no puede ser negativa. Por tanto, los eigenvalores de  $n_k$  son positivos.

Aplicando ahora sobre  $a_k \phi$  el operador  $N_k$  y utilizando las relaciones (A.6) se encuentra que

$$N_k (a_k \phi) = n_k a_k^\dagger \phi + [N_k, a_k] \phi$$

$$\begin{aligned}
&= n_k a_k^\dagger \phi + a_k^\dagger \phi \\
&= (n_k + 1) (a_k^\dagger \phi), \tag{A.11}
\end{aligned}$$

Por tanto, si  $\phi$  es un eigenvector de  $N_k$ , entonces  $a_k^\dagger$  es también un eigenvector pero con eigenvalor  $n_k + 1$ .

De manera análoga, se obtiene

$$N_k (a_k \phi) = (n_k - 1) (a_k \phi), \tag{A.12}$$

con lo que  $a_k \phi$  es también eigenvector pero con eigenvalor  $n_k - 1$ .

Dado que el espectro de eigenvalores está acotado inferiormente (véase ec. A.10), debe entonces existir un vector de Hilbert  $\phi_0$  tal que  $a_k \phi_0 = 0$ . Entonces,

$$N_k \phi_0 = 0, \tag{A.13}$$

es decir,  $\phi_0$  es un eigenvector con eigenvalor  $n_k = 0$ . Aplicando sobre  $\phi_0$  el operador  $a_k^\dagger$  se obtiene un vector  $\phi_1 = a_k^\dagger \phi_0$  tal que, de acuerdo a la ec. (A.11)  $N_k \phi_1 = \phi_1$ , es decir,  $\phi_1$  es un eigenvector con eigenvalor  $n_k = 1$ . Continuando en esta forma se encuentra que la expresión

$$\phi_r = a_k^\dagger a_k^\dagger \cdots a_k^\dagger \phi_0 = a_k^\dagger \phi_{r-1} \tag{A.14}$$

es también un eigenvector que satisface la ecuación

$$N_k \phi_r = r \phi_r \quad (\text{A.15})$$

es decir, el eigenvalor de  $N_k$  es el entero (positivo)  $r$ . El espectro de  $N_k$  es el conjunto de enteros positivos

$$n_k = 0, 1, 2, \dots, r. \quad (\text{A.16})$$

Al operador  $N_k$  se le llama operador número de partículas. Así mismo, a los operadores  $a_k^\dagger$  y  $a_k$  se les llama, respectivamente, operadores bosónicos de creación y aniquilación.

Para  $k \neq \ell$ , los operadores  $N_k$  y  $N_\ell$  satisfacen

$$[N_k, N_\ell] = 0 \quad (\text{A.17})$$

como puede demostrarse utilizando las relaciones de conmutación (A.6). Los eigenvalores de estos operadores pueden, por tanto, ser definidos simultáneamente; por tanto, es conveniente desarrollar el espacio de Hilbert en términos de los eigenvectores simultáneos del conjunto maximal de operadores  $N_k$ . Un vector de estado es clasificado entonces por el conjunto de eigenvalores  $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, i.e.,$

$$\Phi_{n_1 n_2 \dots n_k \dots} = |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle. \quad (\text{A.18})$$

El estado más general  $\phi$  es escrito como una superposición lineal de estados como (A.18). El vector para el cual  $n_k = 0$  (para

toda  $k$ ) se le llama *estado base*,

$$\Phi^0 = |0, 0, \dots, 0; \dots\rangle \quad (\text{A.19a})$$

y suponiendo que está normalizado, podemos escribir

$$\langle \Phi^0 | \Phi^0 \rangle = 1 \quad (\text{A.19b})$$

Para el estado base, es claro que

$$N_k \Phi^0 = 0 \quad (\text{para toda } k) \quad (\text{A.19c})$$

Esta propiedad define al estado base. De las ecs. (A.19) y (A.5) se tiene que el estado base satisface la relación

$$\psi(r, t) \Phi^0 = 0 \quad (\text{A.20})$$

Un vector base (como el de la ec. (A.18)) se obtiene a partir de  $\Phi^0$  por aplicación repetida de los operadores de creación. Por tanto escribimos

$$\Phi_{n_1 n_2 \dots n_k} = C (a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} \dots (a_k^\dagger)^{n_k} \dots \Phi^0 \quad (\text{A.21})$$

donde  $C$  es un factor de normalización, y para el cual puede demostrarse que viene dado

$$C = (n_1! n_2! \dots n_k! \dots)^{-1/2} \quad (\text{A.22})$$

de modo que los vectores base (ortonormales) son dados por

$$\Phi_{n_1 n_2 \dots n_k \dots} = (n_1! n_2! \dots n_k!)^{-1/2} (a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} \dots (a_k^\dagger)^{n_k} \dots \Phi^0$$

(A.23)

Consideremos ahora la interacción entre las partículas. Sea

$$F^{(2)} = \sum_{a>b} f_{ab}^{(2)} \quad (A.24)$$

donde  $f_{ab}^{(2)}$  es el operador correspondiente a una cantidad física y que actúa simultáneamente sobre las funciones de onda de las dos partículas (a) y (b), i.e.,  $\psi_a(\xi_a)$  y  $\psi_b(\xi_b)$ . En el formalismo de la segunda cuantización este operador puede expresarse en términos de los operadores  $a_1^\dagger$  y  $a_1$  como (L.D. Landau, 1977, P. Roman, 1962)

$$F^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle \alpha\beta | f^{(2)} | \gamma\delta \rangle a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\gamma a_\delta \quad (A.25)$$

donde

$$\langle \alpha\beta | f^{(2)} | \gamma\delta \rangle = \iint \psi_\alpha^*(\xi_a) \psi_\beta^*(\xi_b) f^{(2)} \psi_\gamma(\xi_a) \psi_\delta(\xi_b) d\xi_a d\xi_b \quad (A.26)$$

En términos de operadores  $a_1^\dagger$  y  $a_1$ , un operador que involucra la interacción de una sola partícula

$$F^{(1)} = \sum_a f_a^{(1)} \quad (\text{A.27})$$

es escrito en la forma

$$F^{(1)} = \sum_{\alpha\beta} \langle \alpha | f^{(1)} | \beta \rangle a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta} \quad (\text{A.28})$$

donde

$$\langle \alpha | f^{(1)} | \beta \rangle = \int \psi_{\alpha}^*(\xi_a) f^{(1)} \psi_{\alpha}(\xi_a) d\xi_a \quad (\text{A.29})$$

Estas expresiones pueden utilizarse para escribir, en términos de  $a_1^{\dagger}$  y  $a_1$ , el Hamiltoniano correspondiente a un sistema con N partículas interactuantes. Tenemos así

$$H = \sum_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle \alpha\beta | U^{(2)} | \gamma\delta \rangle a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} a_{\gamma} a_{\delta} \quad (\text{A.30})$$

que es la forma que posee el Hamiltoniano para el MBI-1 presentado en el Cap. II. En esta expresión el número de operadores de creación es el mismo que el de operadores de aniquilación, de modo que las interacciones son tales que el número de partículas se conserva. Si  $U^{(2)}$  es un potencial central, la correspondiente expresión (A.25) debe ser escalar ante rotaciones y entonces es conveniente escribir (A.30) en la forma

$$\begin{aligned}
H = & \sum_{\ell} c_{\ell} (a_{\ell}^{\dagger} \cdot a_{\ell}) \\
& + \sum_{\ell, \ell', \ell'', \ell'''} \frac{1}{2} U_{\ell \ell' \ell'' \ell'''}^{(L)} \left[ [a_{\ell}^{\dagger} \times a_{\ell'}^{\dagger}]^{(L)} \right. \\
& \quad \left. \times [a_{\ell''} \times a_{\ell'''}]^{(L)} \right]_0^{(0)}
\end{aligned}$$

(A.31)

Considerando un sistema de bosones que pueden ocupar dos estados con momentos angulares cero y dos ( $\ell=0,2$ ), el Hamiltoniano (A.31) toma la forma indicada en la ecuación (2.9).

EL OSCILADOR ARMONICO EN CINCO DIMENSIONES.

En este apéndice se presenta un resumen de la solución exacta del problema de las vibraciones cuadrupolares del núcleo, justificándose así las desigualdades (3.52), utilizadas en la reducción  $O(5) \supset O(3)$ . Este problema fué analizado primeramente por A. Bohr y B. Mottelson (A. Bohr, B. Mottelson, 1953), al discutir las vibraciones cuadrupolares de una gota de líquido desde el punto de vista de la Mecánica Cuántica.

Las eigenfunciones buscadas están caracterizadas por las representaciones irreducibles de la cadena de grupos (3.47). Los estados con momento angular par más bajo (i.e., para  $L=0$ ) y  $n_d$ ,  $\nu$  arbitrarios fueron determinados por Bohr-Mottelson, lo mismo los estados con momento angular impar más bajo (i.e.,  $L=3$ ).

Sin embargo, para estados con  $L, n_d, \nu$  arbitrarios, la solución general, fué encontrada por Chacón, Moshinsky y Sharp (Chacón, et al, 1976) utilizando Teoria de Grupos. Concretamente el problema consiste en determinar las eigenfunciones del Hamiltoniano de un oscilador armónico en cinco dimensiones, que en el sistema fijo en el cuerpo toma la forma

$$H = -\frac{1}{2} \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{2\beta^2} C_2 O(5) + \frac{1}{2} \beta^2 \quad (B.1)$$

con  $C_2 O(5)$  denotando al operador de Casimir de  $O(5)$ , el cual está dado por

$$C_2 O(5) = - \frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \sum_{k=1}^3 I_k^{-1} L_k'^2 \quad (\text{B.2})$$

Los eigenvalores de este operador son dados por  $\nu(\nu+3)$ , con  $\nu$  denotando a un entero positivo. El término  $I_k = 4\sin^2(\gamma - 2\pi k/3)$  está relacionado con los momentos de inercia a lo largo de los ejes principales mediante la expresión

$$\ddot{y}_k = \beta^2 I_k \quad (\text{B.3})$$

Los eigenvalores del Hamiltoniano (B.1) están dados en términos del número  $n_d$  (número de cuanta) mediante la relación

$$n_d + \frac{5}{2} = 2n + \nu + \frac{5}{2} \quad (\text{B.4})$$

donde  $n = \frac{1}{2}(n_d - \nu)$  juega el papel del número cuántico radial. Los eigenvalores de los operadores  $L^2$  y  $L_3$  son, respectivamente

$$L(L+1), M \quad (\text{B.5})$$

Los eigenestados del Hamiltoniano son entonces representados por el ket

$$|n_d, s, \tau, L, M\rangle = F_{n(\beta)}^{s\tau L} \sum_k \phi_k^{s\tau L}(\gamma) [D_{HK}^L(\theta_1) + (-)^L D_{H-K}^L(\theta_1)] \quad (\text{B.6})$$

donde  $s$  representa al índice que falta para caracterizar los estados del oscilador en cinco dimensiones en forma completa.

Estableciendo la ecuación de eigenvalores del Hamiltoniano (B.1) se obtiene una ecuación diferencial en  $\beta$  que puede resolverse y cuya solución normalizada está dada por

$$F_n^{\psi}(\beta) = \left[ \frac{2(n!)}{\Gamma(n+\psi+5/2)} \right]^{1/2} \beta^{\psi} L_n^{\psi+3/2}(\beta^2) \exp(-\beta^2/2) \quad (B.7)$$

donde  $L_n^{\psi+3/2}(\beta^2)$  es un polinomio de Laguerre.

Para la dependencia en  $\gamma$  y  $\theta_1$  se utiliza el hecho de que las funciones  $D_{HK}^L(\theta_1)$  constituyen un conjunto completo de funciones de los ángulos de Euler. De las condiciones de simetría asociadas con la elección de los ejes principales se tiene que las funciones de onda deben ser expresadas en términos de

$$[D_{HK}^L + (-)^L D_{H-K}^L], \quad K=0, 2, \dots, L \quad (L \text{ par}) \quad (B.8a)$$

$$K=0, 2, \dots, L-1 \quad (L \text{ non}) \quad (B.8b)$$

De esta forma, la única parte no conocida de la ecuación (B.6) es la correspondiente a su dependencia en  $\gamma$ .

Considerando la acción del operador de Casimir de  $O(5)$  sobre los estados (B.6),

$$C_2 O(5) |n_d^{\psi T L M}\rangle = \psi(\psi+3) |n_d^{\psi T L M}\rangle \quad (B.9)$$

se llega a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas para las funciones  $\phi_K^{\psi T L}(\gamma)$ . De acuerdo a los trabajos de Bohr-Mottelson y Bès (D. Bès, 1959), estas funciones se habían determinado en forma explícita solamente para los casos particulares

con  $L=0,2,3,4,5$  y  $6$ .

El método empleado por Chacón, Moshinsky y Sharp (Chacón et al, 1976) para determinar los eigenestados del Hamiltoniano (B.1) con momento angular  $L$  arbitrario y  $M=L$ , consiste en construir polinomios en los operadores de creación y aniquilación que satisfacen las siguientes propiedades

$$n_d P(d_\tau^\dagger) = n_d P(d_\tau^\dagger), \quad (\text{B.10a})$$

$$L_1 P(d_\tau^\dagger) = 0, \quad (\text{B.10b})$$

$$L_0 P(d_\tau^\dagger) = LP(d_\tau^\dagger), \quad (\text{B.10c})$$

$$C_2 O(5) P(d_\tau^\dagger) = \kappa(\kappa+3) P(d_\tau^\dagger). \quad (\text{B.10d})$$

La primera ecuación indica que  $P(d^\dagger)$  debe ser un eigenpolinomio del operador de número (operador de Casimir de  $U(5)$ ), y el cual es también definido como

$$n_d = \sum_{\tau=-2}^2 (-1)^\tau d_\tau^\dagger d_{-\tau} = H - 5/2 \quad (\text{B.11})$$

y que  $P(d^\dagger)$  debe ser un polinomio homogéneo de grado  $n_d$  en los operadores de creación y por tanto puede escribirse como

$$P(d_\tau^\dagger) = (d_2^\dagger)^{n_d} P' \left[ \frac{d_1^\dagger}{d_2^\dagger}, \frac{d_0^\dagger}{d_2^\dagger}, \frac{d_{-1}^\dagger}{d_2^\dagger}, \frac{d_{-2}^\dagger}{d_2^\dagger} \right] \quad (\text{B.12})$$

donde  $P'$  es un polinomio arbitrario en las variables indicadas con grado no mayor que  $n_d$ . De acuerdo (B.10c)  $P(d^\dagger)$  debe tener momento angular definido y máxima proyección  $M=L$ . Finalmente, (B.10) indica que  $P(d^\dagger)$  debe ser un eigenpolinomio del operador de Casimir

$C_2O(5)$ . En la construcción de estos polinomios se emplea la notación  $(n_d, L)$ , llamada *diagrama permisible elemental* (dpe) y el cual denota el acoplamiento de  $n_d$  fonones a momento angular  $L$  y con máxima proyección  $M=L$ . Los bloques fundamentales para este sistema se indican a continuación

$$(2,0) \equiv \sum_{\tau=-2}^2 (-1)^\tau d_\tau^+ d_{-\tau}^+ \quad (B.13a)$$

$$(3,3) \equiv -(14/3)^{1/2} \sum_{\tau,\tau'} \sum_{\tau'',\tau'''} \langle 22\tau\tau''\tau''' | 33 \rangle \langle 22\tau\tau' | 2\tau'' \rangle \cdot d_\tau^+ d_{\tau'}^+ d_{\tau''}^+ d_{\tau'''}^+ \quad (B.13b)$$

$$(2,2) \equiv (7)^{1/2} \sum_{\tau,\tau'} \langle 22\tau\tau' | 22 \rangle d_\tau^+ d_{\tau'}^+ \quad (B.13c)$$

$$(3,0) \equiv (7)^{1/2} \sum_{\tau,\tau',\tau''} (-)^{\tau''} \langle 22\tau\tau' | 2-\tau'' \rangle d_\tau^+ d_{\tau'}^+ d_{\tau''}^+ \quad (B.13d)$$

En términos de tales dpe's se encuentra (Chacón et al, 1976) que los polinomios buscados pueden escribirse también como

$$P_{n_d \tau L n_1} (d_\tau^+) \equiv (d_2^+)^{L-n_d+2n_1+3\tau} (2,2)^{(2n_d-L)/2 - 3\tau - 2n_1} (3,0)^\tau (2,0)^{n_1} \quad (L \text{ par}) \quad (B.14a)$$

$$P_{n_d \tau L n_1} (d_\tau^+) \equiv (3,3) (d_2^+)^{L-n_d+2n_1+3\tau} (2,2)^{(2n_d-L-3)/2 - 3\tau - 2n_1} \cdot (3,0)^\tau (2,0)^{n_1} \quad (L \text{ non}) \quad (B.14b)$$

donde, para ambos casos,  $\tau, n_1, L, n_d$  son restringidos a tomar única-

mente valores para los cuales todos los exponentes sean positivos.

Las ecs. (B.14) representan un conjunto completo, aunque no necesariamente ortonormal de estados con número definido de cuanta ( $n_d$ ) y máxima proyección de momento angular ( $M=L$ ). Para valores de  $M$  arbitrario es necesario aplicar el operador de descenso ( $L_{-1}$ )<sup>L-M</sup> sobre los polinomios (B.14). Los estados (B.14) no corresponden a una antigüedad (*seniority*) dada, de modo que todavía queda por incluirles el respectivo número cuántico para su caracterización completa.

Considerando los polinomios (B.14) para  $n_d = \nu$ , encontramos que éstos no cumplen con ser armónicos, i.e., no satisfacen la ecuación

$$\sum_m (-)^m d_m^\dagger d_{-m} = (d \cdot d) P(d_r^\dagger) |0\rangle = 0, \quad (\text{B.15})$$

Para que se cumpla este requisito existe un método sugerido por Vilenkin (Vilenkin, N.Y., 1968) y desarrollado por Lohe (Lohe, M.A., 1974), el cual consiste en introducir *operadores bosónicos sin traza* definidos por

$$a_m^\dagger \equiv d_m^\dagger - (2,0) (2n_d + 5)^{-1} d_m \quad (m=0, \pm 1, \pm 2) \quad (\text{B.16})$$

donde  $n_d$  es el operador definido por (B.11) y (2,0) por (B.13a).

Usando las identidades

$$(2n_d + 5)^{-1} d_m^\dagger = d_m^\dagger (2n_d + 7)^{-1}, \quad (\text{B.17a})$$

$$(2n_d + 5)^{-1} d_m = d_m (2n_d + 3)^{-1}, \quad (\text{B.17b})$$

se tiene que los operadores  $a_m^\dagger$  satisfacen las relaciones

$$[a_m^\dagger, a_m^\dagger] = 0 \quad (\text{B.18a})$$

$$\sum_m (-)^m a_m^\dagger a_{-m}^\dagger = (4n_d - 1)^{-1} (2, 0)^2 \sum_m (-1)^m d_m^\dagger d_{-m}^\dagger \quad (\text{B.18b})$$

Reemplazando  $d_m^\dagger$  por  $a_m^\dagger$  en los polinomios (B.14) y aplicándolos sobre el estado  $|0\rangle$  se tiene, de las relaciones (B.18), que los estados correspondientes son nulos a menos que  $n_1=0$ . Suponiendo esta última condición y considerando además  $n_d = \nu$ , se llega a los estados

$$|\nu\tau L\rangle \equiv P_{\nu\tau L 0}(a_m^\dagger) |0\rangle \quad (\text{B.19})$$

los cuales resultan ser combinaciones lineales de términos de la forma  $d_{m_1}^\dagger d_{m_2}^\dagger \dots d_{m_\nu}^\dagger |0\rangle$ , es decir, son homogéneos y de grado  $\nu$  en  $d_m^\dagger$  y continúan estando caracterizados por momento angular  $L$ .

Si se considera la acción de  $\sum_m (-)^m a_m^\dagger a_{-m}^\dagger$  sobre los estados  $|\nu\tau L\rangle$  se obtiene, usando ecs. (B.18), que

$$\begin{aligned} & (4n_d^2 - 1)^{-1} (2, 0)^2 \sum_m d_m^\dagger d_m^\dagger |\nu\tau L\rangle \\ &= \sum_m (-)^m a_m^\dagger a_{-m}^\dagger P_{\nu\tau L 0}(a_m^\dagger) |0\rangle \\ &= [P_{\nu\tau L 0}(a_m^\dagger)] (4n_d^2 - 1)^{-1} (2, 0)^2 \sum_m (-)^m d_m^\dagger d_{-m}^\dagger |0\rangle, \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

y como el factor  $(4n_d - 1)^{-1} (2,0)^2$  no es nulo, se sigue entonces que los estados  $P_{\omega\tau L 0} (a^\dagger) |0\rangle$  cumplen con ser armónicos, i.e., satisfacen la ec. (B.16). De esta forma estos estados corresponden a la representación irreducible  $(\omega, 0)$  de  $O(5)$  y  $[\omega 000]$  de  $U(5)$ .

Como los estados (B.19) son eigenestados de  $H$ ,  $C_2O(5)$ ,  $L^2$  y  $L_z$  con eigenvalores  $\omega + 5/2$ ,  $\omega(\omega+3)$ ,  $L(L+1)$  y  $L$  respectivamente, estos serán idénticos a los estados  $|\omega\tau L\rangle = |n_d = \omega, \omega, \tau, L, M=L\rangle$  si el índice extra  $\tau$  (necesario para su caracterización completa) denota el número de tripletes de operadores bosónicos sin traza  $a_m^\dagger$  acoplados a  $L=0$ .

El nombre de bosones sin traza proviene entonces de la relación (B.21) ya que la acción de la traza

$$\sum_m (-)^m a_m^\dagger a_{-m}^\dagger \quad (B.21)$$

sobre los estados  $|\omega\tau L\rangle$  da un resultado nulo.

Introduciendo la notación  $[n_d, \omega]$  y además  $[1, 2] \equiv a_2^\dagger$  se llega a

$$|\omega\tau L\rangle = [1, 2]^{L-\omega+3\tau} [2, 2]^{(2\omega-L)/2-3\tau} [3, 0]^\tau |0\rangle \quad (L \text{ par}) \quad (B.22a)$$

$$|\omega\tau L\rangle = [1, 2]^{L-\omega+3\tau} [2, 2]^{(2\omega-3-L)/2-3\tau} [3, 3] [3, 0]^\tau |0\rangle \quad (L \text{ non}) \quad (B.22b)$$

donde los exponentes deben ser enteros no-negativos, por lo que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$L - \nu + 3\tau \geq 0, \quad \frac{1}{2}(2\nu - L) - 3\tau \geq 0, \quad \tau \geq 0$$

(L par) (B.23a)

$$L - \nu + 3\tau \geq 0, \quad \frac{1}{2}(2\nu - L - 3) - 3\tau \geq 0, \quad \tau \geq 0$$

(L non) (B.23b)

o bien,

$$\nu - L \leq 3\tau \leq \nu - (L/2) \quad (L \text{ par}) \quad (B.24a)$$

$$\nu - L \leq 3\tau \leq \nu - (L+3)/2 \quad (L \text{ non}) \quad (B.24b)$$

que son las relaciones (3.53) que nos proponiamos deducir para la reducción  $O(5) \supset O(3)$ . Estas relaciones indican que para valores fijos de  $\nu$  y  $L$ , los valores de  $\tau$  que las satisfacen toman todos los valores enteros posibles entre un mínimo  $\tau_0$  a uno máximo  $\tau_1 \geq \tau_0$ . Por esta razón en lugar de usar el índice  $\tau$  se prefiere utilizar un índice  $s$  definido por

$$s \equiv \tau - \tau_0 + 1 \quad (B.25)$$

con  $s = 1, 2, \dots, d(\nu, L)$ , y donde  $d(\nu, L) = \tau_1 - \tau_0 + 1$ , el cual denota el número de representaciones irreducibles  $L$  de  $O(3)$  contenidas en la representación irreducible  $(\nu, 0)$  de  $O(5)$ .

## APENDICE C

### EL TEOREMA DE DRAGT

**Teorema de Dragt:** Si

$$P_{\nu}(d_1^{\dagger}, \dots, d_r^{\dagger}) |0\rangle \quad (C.1)$$

es una eigenfunción de un oscilador armónico en  $r$  dimensiones con un número de antigüedad (seniority) definido, esto es,

$$\sum_i d_i d_i P_{\nu}(d_j^{\dagger}) |0\rangle = 0, \quad \sum_i d_i^{\dagger} d_i P_{\nu}(d_j^{\dagger}) |0\rangle = \nu P_{\nu}(d_j^{\dagger}) |0\rangle, \quad (C.2)$$

entonces

$$P_{\nu}(d_j^{\dagger}) |0\rangle = \pi^{-r/4} 2^{\nu/2} P_{\nu}(\alpha_j) \exp[-(a \cdot a)/2], \quad (C.3)$$

con

$$d_j^{\dagger} = 1/\sqrt{2} (\alpha_j - i\pi_j), \quad d_j = 1/\sqrt{2} (\alpha_j + i\pi_j), \quad j=1, 2, \dots, r.$$

es un estado normalizado con los mismos números cuánticos de la ecuación (C.1).

**Demostración:** Para el oscilador armónico en una dimensión se tiene

$$(d^{\dagger}) |0\rangle = \pi^{-1/4} 2^{-\pi/2} H_n(\alpha) \exp(-\alpha^2/2) \quad (C.4)$$

donde  $H_n$  es un polinomio de Hermite cuyos primeros términos son de la forma

$$H_n(\alpha) = 2^n \alpha^n - 2^{n-1} \binom{n}{2} \alpha^{n-2} + \dots \quad (\text{C.5})$$

Por tanto, para un oscilador armónico en  $r$  dimensiones se tiene

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1} A_{n_1 \dots n_r} (d_1^\dagger)^{n_1} \dots (d_r^\dagger)^{n_r} |0\rangle \\ &= \pi^{-r/4} 2^{-\nu/2} \sum_{n_1} A_{n_1 \dots n_r} H_{n_1}(\alpha_1) \dots H_{n_r}(\alpha_r) \exp(-\beta^2/2) \\ &= \pi^{-r/4} 2^{\nu/2} \sum_{n_1} A_{n_1 \dots n_r} (\alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \dots \alpha_r^{n_r} + \dots) \exp(-\beta^2/2), \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

donde

$$n_1 + n_2 + \dots + n_r = \nu \quad (\text{C.7})$$

y donde los términos (...) en (C.6) indican monomios en  $\alpha_i$  de grado menor que  $\nu$ .

Si el estado (C.6) posee un seniority dado, i. e., si satisface

$$\sum_{j=1}^r d_j d_j^\dagger P(d_j^\dagger) |0\rangle = 0, \quad (\text{C.8})$$

entonces el polinomio con variables  $\alpha$  es homogéneo con grado  $\nu$  y satisface la ecuación de Laplace en  $r$  dimensiones para  $\alpha_i$ . Los

coeficientes  $A_{n_1 n_2 \dots n_r}$  en la ec. (C.6) deben ser tales que todos los términos (...) en dicha ecuación sean cero. Por tanto, podemos escribir

$$P(a_j^\dagger) |0\rangle = \pi^{-r/4} 2^{kr/2} P(\alpha_j) \exp(-\beta^2/2), \quad (C.9)$$

lo cual demuestra el teorema.

## APENDICE D

### PROGRAMA DE AJUSTE PARA EL HAMILTONIANO MBI-1.

#### 1. INTRODUCCION.

En el modelo de capas del núcleo es posible realizar cálculos de niveles de energía una vez que un conjunto de órbitas de partícula independiente ha sido seleccionado y las posibles restricciones en la distribución de nucleones activos en tales órbitas sean fijas. Para este tratamiento es necesario contar con los valores de las energías de partícula independiente y elementos de matriz de dos cuerpos, que en muchos casos no es posible conocer de antemano. El problema se resuelve entonces mediante el procedimiento de considerar estos niveles y elementos de matriz como *parámetros* que pueden determinarse a través del ajuste de los datos experimentales.

Este método puede aplicarse al MBI-1 si se considera como *parámetros ajustables* a las *interacciones de uno y dos cuerpos entre los bosones*. Sin embargo, ya que los límites de simetría exacta discutidos en el Cap. IV están asociados a ciertos operadores que son combinaciones lineales de las interacciones entre bosones, es de más utilidad reescribir el Hamiltoniano del MBI-1 en términos de dichos operadores. Esto fué el método que se utilizó en este trabajo, y en particular se demuestra en el Cap. 3 que el Hamiltoniano del MBI-1 (ec. 2.9) puede escribirse también como

$$H = k_1 n_d + k_2 n_d^2 + k_3 N n_d + k_4 L^2 + k_5 C_2 O(5) + k_6 P^2 + k_7 Q^2$$

$$+ k_8 N + k_9 N^2, \quad (D.1)$$

donde los dos últimos términos contribuyen únicamente a las energías de amarre y no son incluidos en la determinación de las energías de excitación. De esta forma se tienen siete parámetros por determinarse.

En este caso los parámetros por determinarse son combinaciones lineales de aquéllos relacionados con la interacción entre bosones, con la ventaja de que los resultados que se obtienen por este procedimiento se correlacionan con los límites discutidos en el Capítulo 4.

En este apéndice se describe el método de ajuste en general, para posteriormente aplicarlo al Hamiltoniano presentado arriba y mostrar la forma en que se determinaron los niveles de energía de los núcleos par-par, considerados en el Capítulo 5.

## 2. CONSTRUCCION DE LAS ECUACIONES LINEALES.

Partimos de la ecuación de eigenvalores para el Hamiltoniano

$$H\psi = E\psi, \quad (D.2)$$

donde cada eigenvector  $\psi_\rho$ , correspondiente al eigenvalor  $E_\rho$  puede desarrollarse en términos de los estados de cierta base,  $\phi_\rho$

$$\psi_\rho = \sum_I \alpha_{I\rho} \phi_I. \quad (D.3)$$

La ecuación (D.2) puede entonces reescribirse en la forma

## matricial

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1n} \\ H_{21} & \dots & & H_{2n} \\ \vdots & & & \\ H_{n1} & \dots & & H_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1\rho} \\ a_{2\rho} \\ \vdots \\ a_{n\rho} \end{pmatrix} = E_{\rho} \begin{pmatrix} a_{1\rho} \\ a_{2\rho} \\ \vdots \\ a_{n\rho} \end{pmatrix} \quad (D.4)$$

$\rho=1, 2, 3, \dots, n,$

donde  $H_{k\ell}$  denota los elementos de matriz de  $H$  con respecto a la base de las funciones de onda  $\phi$ , donde además  $H_{k\ell} = H_{\ell k}^*$ .

Si denotamos ahora a la matriz de los eigenvectores  $a_{i\rho}$  por la matriz ortogonal  $A$ , podemos reescribir (D.4) como

$$\langle A^{-1}HA \rangle_{\rho', \rho} = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_{j\rho'} H_{jl} a_{l\rho} = E_{\rho} \delta_{\rho\rho'} \quad (D.5)$$

y ya que  $H_{ij}$  es una combinación lineal de matrices (en nuestro caso de los operadores asociados con los distintos grupos) se tiene

$$H_{ij} = \sum_{r=1}^{N_x} C_{ij}^r x_r \quad (D.6)$$

donde  $C_{ij}^r$  representa las matrices mencionadas,  $x_r$  los parámetros que se quiere ajustar y  $N_x$  el número total de éstos. Substituyendo (D.6) en (D.5) se tiene

$$\sum_{j=1}^n a_{j\rho'} \sum_{l=1}^n \left( \sum_{r=1}^{N_x} C_{lj}^r x_r \right) a_{l\rho} = E_{\rho'} \quad (D.7)$$

y un rearrreglo de (D.7) conduce a un conjunto de ecuaciones lineales

les simultáneas en los parámetros  $x_r$ , dado por

$$\sum_{r=1}^N b_r^{(\rho)} x_r = E_\rho \quad \rho=1,2,\dots,n, \quad (D.8)$$

donde

$$b_r^{(\rho)} = \sum_{j=1}^n a_{j\rho} \sum_{i=1}^n a_{i\rho} C_{ij}^r \quad (D.9)$$

Si ahora el Hamiltoniano se evalúa con un conjunto de parámetros que constituyen "la mejor suposición", puede ser diagonalizado y sus correspondientes  $E_\rho$  y  $a_{ij}$  determinados. La ecuación (D.9) determinará entonces el conjunto inicial de coeficientes los  $b_r^{(\rho)}$  para usarse en (D.8). Substituyendo los parámetros originales conduce desde luego a los mismos eigenvalores  $E_\rho$  obtenidos en la diagonalización. No se puede esperar que los eigenvalores  $E_\rho$  reproduzcan el espectro experimental, de modo que sustituimos ahora el lado derecho de (D.8) por las correspondientes energías experimentales  $E_{exp}^{(\rho)}$  y consideramos a los  $x_r$  como parámetros desconocidos. Encontramos el sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{r=1}^N b_r^{(\rho)} x_r = E_{exp}^{(\rho)} \quad \rho=1,2,\dots,n \quad (D.10)$$

donde los coeficientes  $b_r^{(\rho)}$  están dados por la ecuación (D.9).

Se ha supuesto hasta este momento que cada eigenvalor puede ser identificado con una energía experimental. De hecho en general sólo algunos de los eigenvalores más bajos de una matriz dada pueden ser comparados con las energías determinadas experimentalmen-

te, de modo que de las  $n$  ecuaciones (D.10) sólo un conjunto limitado puede utilizarse para la determinación de los parámetros  $x_r$ .

En el caso de que consideremos un conjunto de núcleos vecinos, el número total de parámetros  $N_x$  es el mismo, pero el número de ecuaciones que deben satisfacerse aumenta considerablemente. Para tomar en cuenta estas condiciones sustituimos el índice  $\rho$  (que etiqueta los estados de la matriz) por el índice  $q$  que etiqueta al conjunto completo de ecuaciones

$$\sum_{r=1}^{N_x} b_r^{(q)} x_r = E_{\text{exp}}^{(q)} \quad \text{con } q=1,2,\dots,N_q \quad (\text{D.11})$$

Finalmente, si solo estamos interesados en ajustar las energías de excitación a partir del estado base, i.e., si no nos interesa en ajustar las energías de amarre nucleares, (D.11) puede modificarse restando la ecuación correspondiente al estado base,  $q=q_0$ , llegándose

$$\sum_{r=1}^{N_x} (b_r^{(q)} - b_r^{(q_0)}) x_r = E_{\text{exp}}^{(q)} - E_{\text{exp}}^{(q_0)} \quad (\text{D.12})$$

El lado derecho de (D.12) denota entonces la energía de excitación experimental del nivel  $q$ .

Debe enfatizarse que para encontrar una solución de (D.12) que tenga sentido a través de un procedimiento de mínimos cuadrados, debe satisfacerse la condición  $N_q > N_x$  (i.e., que el número de niveles experimentales sea mayor que el de parámetros por ajustarse).

### 3. EL AJUSTE POR MINIMOS CUADRADOS.

Dado el sistema de ecuaciones (D.11) (o equivalentemente el sistema (D.12)), deseamos determinar los parámetros  $x_r$  de modo que las sumas del lado izquierdo de esta ecuación se aproximen a las energías experimentales lo más posible. En el método de mínimos cuadrados se *minimiza* la función

$$F = \sum_{q=1}^{N_x} \left( \sum_{l=1}^{N_x} b_l^{(q)} x_l - E_{\text{exp.}}^{(q)} \right)^2 \quad (\text{D.13})$$

como función de los parámetros  $x_l$ ; por tanto

$$\frac{\partial F}{\partial x_r} = \sum_{q=1}^{N_x} \left( \sum_{l=1}^{N_x} b_l^{(q)} x_l - E_{\text{exp.}}^{(q)} \right) b_r^{(q)} = 0 \quad (\text{D.14})$$

donde  $r=1,2,\dots,N_x$ . Esto puede escribirse también como

$$\sum_{l=1}^{N_x} \sum_{q=1}^{N_x} b_r^{(q)} b_l^{(q)} x_l = \sum_{q=1}^{N_x} b_r^{(q)} E_{\text{exp.}}^{(q)} \quad (\text{D.15})$$

donde nuevamente  $r=1,2,\dots,N_x$ . La ecuación (D.15) representa un sistema de  $N_x$  ecuaciones lineales no-homogéneas para los  $N_x$  parámetros  $x_1, x_2, \dots, x_{N_x}$ , que puede resolverse para encontrar un nuevo conjunto de parámetros  $x_r^{(1)}$ .

### 4. EL PROCESO DE ITERACION.

Usando el nuevo conjunto (supuestamente mejorado) de parámetros  $x_r^{(1)}$  se calculan nuevamente los elementos de matriz para el Hamiltoniano, que tras diagonalizarse conducen a un nuevo conjunto de eigenvectores  $a_{kq}$ . Con ellos un nuevo conjunto de ecuaciones

(D.11) es construido con los nuevos coeficientes  $b_r^{(q)}$ , que conducen por su parte a nuevos parámetros  $x_r^{(2)}$  a través del proceso de mínimos cuadrados. El procedimiento debe repetirse hasta obtener convergencia, i.e., hasta encontrar que  $x_r^{(n)} \approx x_r^{(n-1)}$ .

El número de iteraciones requerido depende desde luego del conjunto original de parámetros  $x_r$  seleccionados así como de la diferencia ( $N_q - N_x$ ) entre el número de niveles y parámetros.

Una medida de la precisión lograda para el ajuste es la *desviación cuadrática media* (RMST), definida por la relación

$$\text{RMST} = \left( \frac{\sum_{i=1}^{N_q} (E_{\text{cal.}}^{(i)} - E_{\text{exp.}}^{(i)})}{(N_q - N_x)} \right)^{1/2} \quad (\text{D.16})$$

donde  $E_{\text{cal.}}^{(i)}$  y  $E_{\text{exp.}}^{(i)}$  denotan la energía calculada y experimental del nivel  $i$ , respectivamente.

En ocasiones no se obtiene convergencia, debido generalmente a que algunos de los parámetros no son bien determinados por los datos experimentales. Estos parámetros pueden identificarse como aquellos que tienen grandes variaciones durante el proceso iterativo. En este respecto, existe un método llamado DCM (ó *método de la matriz diagonal de correlación*), que permite conocer cuales combinaciones particulares de los parámetros son los de mayor importancia en la determinación de los espectros.

Introduciendo la notación  $B_{qi} \equiv b_i^{(q)}$  ( $i=1, \dots, N_x$  y  $q=1, \dots, N_q$ ),  $X$  el vector columna  $x_i$ , y  $E_{\text{exp.}}$  el vector columna con componentes  $E_{\text{exp.}}^{(q)}$ , la ecuación (D.15) puede escribirse como

$$B^t B X = B^t E_{\text{exp.}} \quad (\text{D.17})$$

y denotando a la matriz cuadrada  $B^t B \equiv F$ , se tiene

$$\sum_{i=1}^{N_x} F_{r1} X_i = \sum_{q=1}^{N_q} B_{rq}^t E_{\text{exp.}}^{(q)} \quad (\text{D.18})$$

donde

$$F_{r1} = \sum_{q=1}^{N_x} B_{rq}^t B_{q1} \quad (\text{D.19})$$

Si denotamos por  $\psi^{(k)}$  ( $k=1, 2, \dots, N_x$ ) a los eigenvectores de  $F$  y  $f_k$  a los correspondientes eigenvalores, se satisfacen entonces las relaciones

$$\sum_r \psi_r^{(k)} F_{r1} \psi_1^{(\ell)} = f_k \delta_{k\ell} \quad (\text{D.20})$$

$$\sum_\ell \psi_1^{(\ell)} \psi_j^{(\ell)} = \delta_{1j} \quad (\text{D.21})$$

El lado izquierdo de (D.18) puede reescribirse con la ayuda de (D.21) en la forma

$$\sum_r F_{r1} X_i = \sum_1 F_{r1} \sum_j \sum_\ell \psi_1^{(\ell)} \psi_j^{(\ell)} X_j \quad (\text{D.22})$$

y multiplicando la ecuación (D.18) por  $\sum_r \psi_r^{(k)}$  y usando (D.20) se

encuentra

$$\sum_{r|j} \omega_r^{(k)} F_{r1} \omega_1^{(\ell)} x_j = f_k \sum_j \omega_j^{(k)} x_j$$

$$= \sum_r \omega_r^{(k)} \sum_q B_{rq}^t E_{exp}^{(q)} \quad (D.23)$$

es decir,

$$f_k y_k = \sum_r \omega_r^{(k)} \sum_q B_{rq}^t E_{exp}^{(q)} \quad (D.24)$$

donde

$$y_k = \sum_j \omega_j^{(k)} x_j \quad (D.25)$$

Las  $y_k$  representa combinaciones particulares de los parámetros ajustables. Los conjuntos  $\{x_r\}$  y  $\{y_k\}$  son equivalentes para la determinación del Hamiltoniano. Se puede demostrar además que el parámetro  $y_{k_1}$ , correspondiente al máximo eigenvalor  $f_{k_1}$  es el mejor determinado por el conjunto original de ecuaciones lineales (D.18). Esto resulta de la matriz de correlación para la distribución de probabilidad de los parámetros. Análogamente, para el eigenvalor (siguiente en magnitud)  $f_{k_2}$  estará asociado con el segundo parámetro mejor determinado  $y_{k_2}$ , y así sucesivamente. De este modo se pueden encontrar las combinaciones más importantes de los parámetros originales para la determinación del espectro.

#### 4. PROGRAMA DE AJUSTE EN EL MBI-1.

Discutiremos el método descrito en la sección anterior al Hamiltoniano del MBI-1, ec. (D.1). Utilizando la base  $|Nn_d \text{ etLM} \rangle$  asociada a la cadena  $U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2)$ , para la diagonalización de  $H$ , es claro que solamente  $P^2$  y  $Q^2$  son no-diagonales y podemos utilizar las ecuaciones (3.111) y (3.120) en la evaluación de dichos elementos de matriz. Dichos elementos de matriz son

$$\begin{aligned}
 H_{\rho' \rho''}^{NL} &\equiv \langle Nn'_d \varphi' t' L | H | Nn''_d \varphi'' t'' L \rangle \\
 &= \left[ cn'_d + k_2 n_d^2 + k_3 n'_d N + k_4 L(L+1) + k_5 \varphi' (\varphi'+3) \right. \\
 &\quad + k_6 \left\{ \frac{1}{4} N(N+4) - \frac{1}{4} \varphi' (\varphi'+3) - \frac{1}{4} n'_d (2N+1-2n'_d) \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. - \frac{5}{4} (N-n'_d) \right\} \right. \\
 &\quad + k_7 \left\{ -\frac{2}{3} \varphi' (\varphi'+3) - \frac{4}{3} n'_d (2N+1-2n'_d) - (20/3) (N-n'_d) \right. \\
 &\quad \quad + \frac{1}{6} L(L+1) - (14/3) (n'_d)^2 - (22/3 n_d) \\
 &\quad \quad \left. \left. + \frac{8}{3} N(2n'_d + 5) \right\} \right] \delta_{n'_d n''_d} \delta_{\varphi' \varphi''} \delta_{t' t''} \\
 &\quad + (k_6 + \frac{4}{3} k_7) \left[ -\frac{1}{4} \left\{ (N-n'_d) (N-n'_d-1) (n'_d - \varphi' + 2) \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. \cdot (n'_d + \varphi' + 5) \right\}^{1/2} \right] \delta_{n'_d n''_d+2} \delta_{\varphi' \varphi''} \delta_{t' t''}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \kappa_7 \left[ \frac{3\sqrt{2}}{9} \langle n'_d, \varpi', t' L | \{3, 0\} | n'_d, \varpi', t' L \rangle (N - n'_d)^{1/2} \right] \\
& \cdot \delta_{n'_d, n'_d+1} (\delta_{\varpi', \varpi'+3} + \delta_{\varpi', \varpi'+1} \\
& \quad + \delta_{\varpi', \varpi'-2} + \delta_{\varpi', \varpi'-3}),
\end{aligned}
\tag{D.26}$$

donde  $\rho'$  y  $\rho''$  denotan índices que dependen respectivamente de  $(n'_d, \varpi', t')$  y de  $(n''_d, \varpi'', t'')$ . En la última parte de (D.26)  $t'$  y  $t''$  toman todos los valores posibles permitidos por las relaciones (3.57).

La ec. (D.26) representa a los elementos de matriz de H para el caso  $\rho'' \geq \rho'$ . Esto es suficiente puesto que la matriz de H es simétrica.

Es claro que el método de la sección anterior debe aplicarse por separado a cada momento angular L en  $H_{\rho', \rho''}^{NL}$ , y en el caso de ajuste simultáneo de varios núcleos, la matriz B en (D.11) se construye de acuerdo al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
L=L_0 & & & & & & \\
b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1N_x} & & \text{Núcleo } N_1 \\
b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2N_x} & & \\
\vdots & & & & & & \\
b_{j1} & b_{j2} & b_{j3} & \cdots & b_{jN_x} & & \\
b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} & \cdots & b_{kN} & & \text{Núcleo } N_2 \\
\vdots & & & & & & 
\end{array}$$

	$b_{l1}$	$b_{l2}$	$b_{l3}$	$\dots$	$b_{lN_x}$	
	$b_{m1}$	$b_{m2}$	$b_{m3}$	$\dots$	$b_{mN_x}$	Núcleo $N_1$
$L=L_1$	$b_{n1}$	$b_{n2}$	$b_{n3}$	$\dots$	$b_{nN_x}$	
	$b_{m1}$	$b_{m2}$	$b_{m3}$	$\dots$	$b_{mN_x}$	Núcleo $N_1$
	$\vdots$					
	$b_{q1}$	$b_{q2}$	$b_{q3}$	$\dots$	$b_{qN_x}$	
						Núcleo $N_1$
	$b_{r1}$	$b_{r2}$	$b_{r3}$	$\dots$	$b_{rN_x}$	
	$\vdots$					
$L=L_{s-1}$	$b_{t1}$	$b_{t2}$	$b_{t3}$	$\dots$	$b_{tN_x}$	
	$b_{u1}$	$b_{u2}$	$b_{u3}$	$\dots$	$b_{uN_x}$	Núcleo $N_1$
	$\vdots$					
	$b_{v1}$	$b_{v2}$	$b_{v3}$	$\dots$	$b_{vN_x}$	
	$b_{N_q 1}$	$b_{N_q 2}$	$b_{N_q 3}$	$\dots$	$b_{N_q N_x}$	Núcleo $N_1$

Este diagrama muestra la manera construir la matriz B cuando ajustamos simultáneamente  $N_q$  niveles experimentales con  $s$  diferentes momentos angulares, pertenecientes a  $i$  núcleos.

## REFERENCIAS

- Arima, A. and Iachello, F. (1975), *Phys. Rev. Lett.* 35, 1069.
- Arima, A. and Iachello, F. (1976), *Ann. Phys. (NY)* 99, 253.
- Arima, A. and Iachello, F. (1978), *Ann. Phys. (NY)* 111, 201.
- Arima, A. and Iachello, F. (1979), *Ann. Phys. (NY)* 123, 468.
- Arima, A., Otsuka, T., Iachello, F. and Talmi, I. (1977), *Phys. Letters*, 66B, 205.
- Bargmann, V. and Moshinsky, M., *Nucl. Phys.* 18, 697, (1960).
- Bargmann, V. and Moshinsky, M., *Nucl. Phys.* 23, 177, (1961).
- Bès, D.R., *Nucl. Phys.* 10, 373 (1959).
- Bohr A., *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* 26(1952)No.14.
- Bohr A. and Mottelson, B.R., *Mat. Fys. Medd. Dan. Selsk* 26(1953)No.16.
- Castañón, O., Chacón, E., Frank, A. and Moshinsky, M. (1979), *Journ. Math. Phys.* 20, 35.
- Castañón, O., Federman, P., Frank, A., Pittel, S., (1982) *Nucl. Phys.* A379, 61-76.
- Casten, R.I. and Cizewski, J.A., (1978), *Nucl. Phys.* A309, 477.
- Casten, R.I. and Cizewski, J.A., (1978), *Phys. Lett.* 78B, 5.
- Casten, R.I. and Cizewski, J.A., (1984), *Nucl. Phys.* A425, 653.
- Casten, R.I. and Warner, D., *Rev. of Mod. Phys.*, Vol. 60, No. 2., April 1988.
- Chacón, E., Moshinsky, M. and Sharp, R.T., *Journ. Math. Phys.* 17(1976), 663.
- Chacón, E., Moshinsky, M., *Journ. Math. Phys.*, 18(1977), 870.
- Chiang, H.C., Hsieh, S.T., King Yen, M.M. and Han, C.S., (1985), *Nucl. Phys.* A435, 54-66.
- Chiang, H.C., Hsieh, S.T. and Kuo, T.T.S., (1988), *Phys. Rev.*, C38, 5.
- Chuu, D.S., Han, C.S., Hsieh, S.T., King Yen, M.M., (1984), *Phys. Rev.* 30C, 4.
- Cooper, L.N. (1956), *Phys. Rev.* 104, 1189.
- Dieperink, A.E.L., 1981, *Nucl. Phys.* A358, 189c.
- Dragt, A.J., *Journ. Math. Phys.*, 6, 533, (1965).
- Eisenberg, J. and Greiner, W., "Nuclear Models", Third Edition, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1987.
- Elliott, J.P., (1958), *Proc. Roy. Soc.* A245, 128, 562.
- Emling, H., 1984, in *Electromagnetic Properties of High-Spin Nuclear Levels* (Annals of the Israel Physical Society, Vol.7), edited by Gvirol Goldring and Michael Haas (Hilger, Bristol), p. 161.
- Feshbach, H. and Iachello, F. (1973), *Phys. Letters*, 45B, 7
- Feshbach, H. and Iachello, F. (1974), *Ann. Phys. (NY)* 84, 211.
- Fewell, M.P., (1986), *Phys. Lett.* 167B, 1.
- Frank, A., PhD. thesis, University of Mexico, 1979.
- Gradshteyn, I.S. and Ryzhik I.M., "Table of Integrals, Series and Products" (Academic Press., N.Y., 1965).
- Grosse, E., et al., 1981, *Phys. Src.* 24, 337.
- Haxel O., Jensen, J>H.D. and Suess, H.F., *Phys. Rev.* 75(1949), 1766.
- Hess, P.O., PhD. thesis, University of Frankfurt, 1980.

- Iachello, F. (1969), *The Interacting Boson Model*, PhD. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.
- Iachello, F., Proc. 1974, Amsterdam Conf. on Nuclear Structure and Spectroscopy (Scholar's Press., Amsterdam, 1974).
- Iachello, F. and Scholten, O. (1979), *Phys. Rev. Letters*, 43, 679.
- Iachello, F. (1980), *Phys. Rev. Letters* 44, 772.
- Iachello, F. and Talmi, I., *Rev. Mod. Phys.* Vol. 59, No.2, April 1987.
- Janssen, D., Joles, R.V. and Dönau, F. (1974), *Nucl. Phys.* A224, 93.
- Kashimoto, T. and Tamura, T., *Nucl. Phys.* A270(1977), 317.
- Landau, L.D., "Quantum Mechanics" (nonrelativistic theory), Pergamon, Oxford, 1977.
- Lederer, C.M. and Shirley, V.S., "Table of Isotopes", (Wiley, New York, 1978).
- Leviatan, A., Novoselsky, A., and Talmi, I., 1986, *Phys. Lett.*, B 172, 144.
- Lohe, M.A., "The Development of the Boson Calculus for the Orthogonal and Symplectic Groups". Thesis, Univ. of Adelaide, 1974.
- Marshalek, E.R., *Nucl. Phys.* A224 (1974) 1.
- Mayer, M.G., *Phys. Rev.* 75(1949), 1969.
- Nilsson, S.G., *Dan. Mat. Fys. Medd.* 29(1955)No. 16.
- Ower, H., et al, 1982, *Nucl. Phys.* A338, 421.
- Preston, M.A. and Bhaduri, R.K., "Structure of the Nucleus", Addison Wesley, 1975.
- Roman, P., "Advanced Quantum Theory", Addison Wesley, 1962.
- Rose, M.E., "Elementary Theory of Angular Momentum" (Wiley, N.Y., 1957).
- Sakai, M. and Gono, Y., preprint INS-J-160, University of Tokyo, Japan, 1979.
- Scholten, O. (1980), *The Interacting Boson Model and some applications*, PhD. Thesis, University of Groningen, Netherlands.
- Smither, R.K., Iachello, F., Friedman, A.M., and Bushnell, D.L., Proc. Int. Conf. on nuclear structure, Tokyo, September, 1977, p.377.
- Sorensen, B., *Nucl. Phys.* A217(1973), 205.
- van Isacker, P., Frank, A., and Sun, H.Z. (1984), *Ann. Phys.* C31, 671.
- Vergados, J.D., *Nucl. Phys.*, 42, 469, (1963).
- Vergados, J.D., *Nucl. Phys.*, A111, 681, (1968).
- Vilenkin, N.Y., "Special Functions and Theory of Group Representations" (A.M.S. translation, Providence, R.I., 1968).
- Wigner, E., (1937), *Phys. Rev.* 51, 106.
- Wybourne, B.G. (1974), "Classical Groups for Physicists", Wiley.