

00362

15.  
29



# Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

PRINCIPIOS VARIACIONALES EN TERMODINAMICA DE PROCESOS  
IRREVERSIBLES  
TESIS DE MAESTRIA

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Federico Vázquez Hurtado

marzo de 1990



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas de la física matemática que más interés ha despertado es el que trata sobre la minimización de expresiones que no dependen sólo de una variable continua, sino de una función. El problema es determinar la forma de tal función de modo que minimice una integral que depende de la función y de sus derivadas. Algunas soluciones famosas (y clásicas) fueron: a) la curva plana que conectando dos puntos dados tiene la longitud más corta, b) la braquistócrona, que es la trayectoria que sigue un móvil entre dos puntos dados en un plano vertical de modo que el tiempo empleado es el más corto (la aceleración del móvil debida sólo a la gravedad), c) la superficie mínima de revolución que pasa por dos puntos dados, etc. Como se sabe, estos problemas caen en el grupo del problema de Lagrange en el cual hay que derivar la ecuación diferencial que debe satisfacer una función  $y(x)$  para que la integral:

$$I = \int_{x_A}^{x_B} f(x, y, y') dx$$

sea un mínimo.  $x_A$ ,  $x_B$ ,  $y(x_A)$ ,  $y(x_B)$  y  $f$  son dadas y se supone que  $f$  es dos veces diferenciable en todos sus argumentos. La condición para  $f$  que minimiza la funcional  $I$  es:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

Esta ecuación fué derivada por Euler en 1744 y se conoce como la ecuación de Euler-Lagrange porque constituye la base de la formulación lagrangiana de la mecánica.

El movimiento de un sistema clásico se obtiene del principio de Hamilton (publicado por primera vez en 1834), el cual establece que si el sistema puede especificarse por medio de un conjunto generalizado de coordenadas  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$ , ...,  $q_n(t)$  y tiene una función potencial  $V(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$  entonces el movimiento del sistema es tal que la funcional:

$$I = \int_A^B L dt$$

es un extremo con respecto a las funciones  $q_i(t)$ . La función lagrangiana  $L$  es  $L=K-V$ , con  $K$  la energía cinética.  $I$  es en efecto un extremo si y sólo si  $L$  satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange.

La formulación variacional del movimiento de los fluidos a partir del problema de Lagrange tiene también una trayectoria larga. Limitada primero a los fluidos ideales dió origen a dos líneas caracterizadas por la forma de establecer el principio: la de Lagrange y la de Euler. En la primera las variaciones se realizan sobre las coordenadas espaciales que describen el fluido y en la segunda sobre las variables de campo del sistema: velocidad, densidad, etc. La inclusión de efectos disipativos en la descripción del movimiento de los fluidos en el contexto de la termodinámica de no equilibrio dió lugar a principios variacionales que difieren en varios sentidos de los principios de la mecánica clásica. El análisis del desarrollo de la termodinámica muestra que existe un interés permanente y sistemático en la formulación variacional de los procesos irreversibles, interés que se extiende hasta nuestros días y que abarca ya las teorías que amplían el campo de aplicaciones de la termodinámica irreversible lineal. La importancia que tiene el disponer de un principio variacional para la termodinámica del no equilibrio fué resaltada en su momento por Gyarmati (1970) quien fincaba la posibilidad de desarrollar una teoría clásica de campo que unificara a la mecánica del continuo, el electromagnetismo y la propia termodinámica, en que ésta última pudiera ser descrita por un sólo principio variacional.

En este contexto se ubica el trabajo que se presenta. Sus objetivos son de diversa naturaleza. El primero de ellos es la reconsideración formal del principio variacional que el autor y Antonio del Río formularan en el ámbito de la versión mexicana de la termodinámica irreversible extendida (TIE) para la obtención de

las ecuaciones de evolución temporal de las variables no conservadas de un fluido viscoso simple (principio V-R).

El segundo de los objetivos que se persiguen es el de ubicar en el desarrollo de las formulaciones variacionales de la mecánica de los fluidos la posición que le corresponde al principio propuesto, lo cual ha dado la oportunidad al mismo tiempo de bosquejar a grandes rasgos el estado del arte en el tema.

En tercer lugar se encuentra el propósito de aplicar el principio variacional V-R a la obtención de las ecuaciones de evolución temporal de la magnetohidrodinámica estableciendo las diferencias que resaltan respecto otros trabajos al respecto. Como objetivo final está discutir a partir del principio variacional algunos aspectos que atañen a la teoría extendida como tal, así como otros relacionados con el principio mismo. La exposición es como sigue.

Los dos primeros capítulos se dedican a revisar los principios variacionales que han sido formulados para derivar las ecuaciones del movimiento de los fluidos desde los que parten del problema de Lagrange de la mecánica clásica hasta los principios del tipo potencial local y los principios restringidos. Se describen con cierto detalle aquellos que permiten mostrar la existencia de dos grandes ramas en la formulación variacional de la mecánica de los fluidos: una que se denomina clásica y que comprende aquellos que provienen directamente del problema de Lagrange y que ha tenido un desarrollo independiente de la otra a la que se le denomina no clásica en la que se incluyen los principios derivados de la termodinámica de no equilibrio. La primera de ellas se subdivide en dos líneas según el principio sea establecido en el lenguaje euleriano o en el lagrangiano. La segunda también se subdivide en aquellos que parten de la formulación de Onsager para la conducción de calor en un sólido y los que se obtienen del principio de mínima producción de entropía de Prigogine. El principio V-R como se desprende de la discusión sostenida en el trabajo se ubica en la línea de principios no clásicos de tipo restringido en el esquema de la termodinámica extendida de procesos irreversibles (TIE).

En el tercer capítulo se establece a grandes rasgos el esquema teórico-conceptual de la TIE para mostrar el bagaje metodológico disponible tanto para la formulación del principio V-R como para la manipulación variacional de las densidades que entran en la funcional del principio.

En el capítulo IV se exponen los principios que según la literatura disponible existen para derivar las ecuaciones de evolución temporal de fenómenos que sobrepasan el marco conceptual de la termodinámica irreversible lineal (TIL). Tales principios son el de Sieniutycz quien introduciendo un término exponencial en el tiempo en la funcional a ser variada es capaz de obtener las ecuaciones de onda de la TIE para los flujos del sistema, y el de Vázquez y del Río quienes a partir de una formulación variacional general en el marco de la TIE obtienen las ecuaciones de evolución temporal de los flujos del sistema. También se incluye la demostración de que los operadores de las ecuaciones de evolución temporal en la TIE son no autoadjuntos y por ello no existe un principio clásico para ellas. Esta demostración es general.

En el capítulo V se reconsidera formalmente el principio V-R estableciendo primero la afirmación de que la variación, o diferencial funcional, de una cierta funcional especificada es igual a un valor fijo. Luego, se indican las funciones respecto de las cuales se toma la variación y las condiciones auxiliares que deben satisfacerse como restricciones cuando se toma la variación. Se menciona el contexto y la importancia de la investigación en fluidos conductores tanto a temperaturas de fusión nuclear como a bajas temperaturas ubicando brevemente el caso de México. Pasando entonces a tratar la magnetohidrodinámica donde a partir del principio V-R se llega a un conjunto de ecuaciones acopladas de evolución temporal sin aproximación para las variables no conservadas de un fluido viscoso conductor de calor y electricidad. De aquí, por aproximación a orden dos se obtienen las ecuaciones de evolución conocidas para el fluido viscoso conductor y luego se particularizan al caso del fluido viscoso simple y el conductor rígido de calor y electricidad. A partir de

aquí se retoman las ecuaciones del conductor rígido de calor para establecer el carácter extremal del principio V-R: se muestra que la funcional propuesta es un máximo global ante las variaciones de la componente no conservada del espacio extendido. Se termina el capítulo estableciendo las condiciones en las que a partir del principio V-R es posible recuperar el principio de mínima producción de entropía de Frigogine.

El trabajo finaliza con una discusión sobre las diferencias y semejanzas que el principio V-R guarda respecto a otros principios así como algunas de sus limitaciones. Se discute también la relación del principio con la hipótesis de cerradura de la TIE y se termina con algunas perspectivas de trabajo que se pueden llevar a cabo a partir del principio.

## I.- PRINCIPIOS VARIACIONALES CLÁSICOS EN HIDRODINÁMICA.

Se exponen a continuación los rasgos generales del problema de Lagrange del cálculo variacional. Se describen dos principios variacionales para la hidrodinámica: el de Eckart (1960) y el de Herivel (1954) derivados del problema de Lagrange en el lenguaje lagrangiano y en el euleriano, respectivamente. Como se verá, la línea que emerge de la formulación variacional euleriana de la mecánica ha sido la que ha dado origen a algunos de los principios que forman parte de los antecedentes directos de este trabajo. Los trabajos que se detallan tienen como antecedentes: por el lado de la forma lagrangiana a Hellinger (1914), Herivel (1951) y Serrin (1959), posteriormente el trabajo de Viniegra-Heberlein et al. (1984); por el lado de la forma euleriana a Thomson (1849) y Eckart (1938), posteriormente Rosof (1971) (que se combina con una rama generada en la termodinámica irreversible, como se detalla en la parte II de este trabajo). Finalmente, se hace énfasis en el teorema de Noether (Goldstein, 1980) sobre la existencia de invariantes en teoría clásica de campos.

### I.1.- El problema de Lagrange.

El problema de Lagrange se plantea como sigue: sean  $x^m (m=1\dots M)$  funciones de las variables  $t^i (i=1\dots N)$ . Si  $L$  es cualquier función de  $x^m, \dot{x}^m, t^i$ , su derivada total respecto a  $t^i$  está definida por:

$$\frac{dL}{dt^i} = \frac{\partial L}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial t^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^m} \frac{\partial \dot{x}^m}{\partial t^i} + \frac{\partial L}{\partial t^i}, \quad (1)$$

donde  $\dot{x}^m = \partial x^m / \partial t^i$  y se usa la convención de suma sobre índices repetidos. Considérese ahora la integral:

$$I = \int \dots \int L dt^1 \dots dt^N, \quad (2)$$

que se extiende sobre un volumen  $N$ -dimensional acotado por la

superficie (N-1)-dimensional cerrada S. Como se sabe, las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt^i} \left( \frac{\partial L}{\partial x^m} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^m} = 0 \quad (3)$$

son las condiciones que definen las funciones  $x^m(t^i)$  que hacen a I un extremo y que toman valores preestablecidos  $x^m(t^i)$  sobre la frontera S. Se ignora aquí y en lo sucesivo la posible existencia de más de una función L que lleve a las mismas soluciones  $x^m(t^i)$  (lagrangianos equivalentes, ver Hojman y Shepley, 1982).

Asociado a la Ec. (3) se encuentran un conjunto de leyes de conservación que pueden escribirse en términos del tensor energía-momento  $L_i^j$  como:

$$\frac{dL_i^j}{dt^j} + \frac{\partial L}{\partial t^i} = 0, \quad (4)$$

donde  $L_i^j = x_i^m (\partial L / \partial x_j^m) - L \delta_i^j$ .

Las Ecs. (4) se obtienen por substitución directa de las Ecs. de Euler-Lagrange en la Ec. (1) (Eckart, 1960).

En las siguientes dos secciones se muestran los trabajos (Eckart, 1960; Herivel, 1954) que representan el desarrollo de los principios variacionales de la hidrodinámica en las formulaciones lagrangiana y euleriana respectivamente.

## I.2.- La formulación variacional lagrangiana de la hidrodinámica.

Los alcances que mostró la formulación variacional de la mecánica clásica motivaron sin duda los intentos de establecer generalizaciones del principio de Hamilton (cf. Ec. (2) cuando  $L=K-V$ , K energía cinética y V energía potencial) a la mecánica de fluidos (Herivel, 1951; Serrin, 1959; Fraeijs de Veubeke, 1967; Eckart, 1960; Casal, 1966) las cuales se restringieron a fluidos perfectos a temperatura uniforme. Eckart (1960) formula un principio variacional desde el punto de vista lagrangiano de la

forma:

$$\delta \int dt \int dx dy dz \left( \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho(U + V) \right) = 0, \quad (5)$$

donde  $\rho(x, y, z, t)$  es la densidad del fluido,  $v(x, y, z, t)$  su velocidad,  $V(x, y, z, t)$  la energía potencial por unidad de masa debida a fuerzas externas y  $U(x, y, z, t)$  la energía interna por unidad de masa del fluido en el punto  $(x, y, z)$  al tiempo  $t$ .  $U$  es una función de  $\rho$  y  $S$ , siendo  $S(x, y, z, t)$  la entropía por unidad de masa. En la aproximación lagrangiana, se supone que un elemento de fluido en  $(x, y, z)$  al tiempo  $t$  estaba originalmente en el punto  $a=(a, b, c)$  al tiempo  $t=0$ :

$$x(t) = x(a, b, c, t), \quad y(t) = y(a, b, c, t), \quad z(t) = z(a, b, c, t). \quad (6)$$

La variación indicada en la ec. (5) se lleva a cabo transformando al sistema de referencia fijo (es decir al espacio  $(a, b, c)$ ):

$$\delta \iiint \left( \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho(U + V) \right) J da db dc dt = 0, \quad (7)$$

donde  $J = \partial(x, y, z) / \partial(a, b, c)$  es el jacobiano de la transformación del espacio  $(x, y, z)$  al  $(a, b, c)$ . El principio incorpora dos condiciones subsidiarias: la conservación de la masa y de la entropía. La primera de ellas, en la forma lagrangiana, es:

$$\rho(r(a, t)) J = \rho(a, 0). \quad (8)$$

Para la segunda, se requiere que el cambio de entropía dentro de una región dada sea el resultado de la entropía transportada a través de la superficie del volumen por el movimiento del fluido exclusivamente (esto excluye procesos disipativos):

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} = - \operatorname{div}(\rho S v). \quad (9)$$

Usando la ecuación de continuidad, la ec. (9) es equivalente a  $dS/dt = 0$ , donde  $d/dt$  es la derivada material. En el lenguaje

lagrangiano la última condición se escribe como:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_a = 0. \quad (10)$$

Introduciendo multiplicadores indeterminados  $\alpha(a, t)$  y  $\beta(a, t)$ , la ecuación variacional (7) queda como:

$$\delta \iiint \left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho(U + V) \right) J - \alpha(\rho J - \rho(a, 0)) - \beta \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)_a \right] da db dc dt = 0, \quad (11)$$

donde ahora  $x(a, t)$ ,  $y(a, t)$ ,  $z(a, t)$ ,  $\rho(a, t)$  y  $S(a, t)$  pueden considerarse independientes.

Al variar la densidad en la última ecuación se obtiene la condición:

$$\frac{1}{2} v^2 - (U + V) - \frac{\rho}{\rho} - \alpha = 0, \quad (12)$$

en la cual se usó el hecho de que  $\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_S = \frac{\rho}{\rho^2}$ , siendo  $\rho$  la presión.

Con la variación de  $S$  se llega a:

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \rho(a, 0) T. \quad (13)$$

En este caso se usó:  $(\partial U / \partial S)_\rho = T$  y  $\rho J = \rho(a, 0)$ . Con lo anterior se puede ahora realizar la variación en las coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Por ejemplo, para  $x$  se obtiene:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho J \frac{\partial x}{\partial t} \right) - \sum_{a,b,c} \frac{\partial}{\partial a} \left[ \left( \frac{\partial J}{\partial (\partial x / \partial a)} \right) \left( \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho(U + V) - \alpha \rho \right) \right] - \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (14)$$

Introduciendo la ec. (12) y realizando cierta algebra puede mostrarse que la ec. (14) es equivalente a:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho J \frac{\partial x}{\partial t} \right) - \rho J \frac{\partial V}{\partial x} - J \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (15)$$

Finalmente, como  $\rho J = \rho(a, 0)$  se tiene:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = - \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{J}{\rho(a, 0)} \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

es decir:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = - \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (16)$$

que es la componente x de la ecuación de movimiento.

### I.3.- La formulación variacional euleriana de la hidrodinámica.

En la aproximación euleriana la ecuación variacional es:

$$\delta \iiint \left[ \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho(U + V) \right] dx dy dz dt = 0. \quad (17)$$

La región del espacio donde se integra se mantiene fija, en concordancia con la idea euleriana. El término en la energía potencial V pudo haberse incluido en la definición de la funcional (2) para el caso anterior dando origen a un término adicional en la Ec. (10) que da cuenta de la variación espacial de V.

A la Ec. (17) deben añadirse dos condiciones subsidiarias:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dS}{dt} = 0 \quad (18)$$

(continuidad e isentropía).

Las Ecs. (18) pueden ser tratadas dentro de la ecuación variacional (17) introduciendo dos multiplicadores indeterminados de Lagrange  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$\delta \int dt \int dx dy dz \left[ \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho(U + V) - \alpha \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) \right) - \beta \frac{dS}{dt} \right] = 0. \quad (19)$$

Ahora puede realizarse la variación de los campos  $\rho$ , S y v en esta última ecuación. Variando la densidad  $\rho$  se obtiene:

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - (U + V) - \frac{\rho}{\rho} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \alpha \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (20)$$

Al variar la entropía  $S$  se llega a:

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + \nabla \beta \cdot \mathbf{v} = T. \quad (21)$$

Finalmente, cuando se varía el campo de velocidades  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{v} + \nabla \alpha = \beta \nabla S. \quad (22)$$

Es interesante hacer notar que el cálculo para llegar a las Ecs (20) a (22) no involucra variaciones en los gradientes, en otras palabras, las variaciones de los gradientes son cero. Este procedimiento se encontrará más adelante en otras formulaciones.

A partir de la Ec. (20) es posible llegar a la ecuación de movimiento en forma euleriana. Para ello se introducen las Ecs. (21) y (22) en el gradiente de la Ec. (20) usando además las siguientes relaciones:  $\partial S / \partial t = -\nabla S \cdot \mathbf{v}$  y  $\text{rot}(\beta \nabla S) = \text{rot} \mathbf{v}$ , junto con:

$$\nabla U = \left[ \frac{\partial U}{\partial S} \right]_{\rho} \nabla S + \left[ \frac{\partial U}{\partial \rho} \right]_{S} \nabla \rho = T \nabla S + \frac{\rho}{\rho^2} \nabla \rho. \quad (23)$$

Esta parte se finaliza con un bosquejo a grandes rasgos del teorema de Noether en teoría clásica de campos donde adquiere su forma más fértil.

#### I.4.- El teorema de Noether.

El teorema de Noether (Goldstein, 1980) contiene la descripción formal de la conexión entre invariancia (o propiedades de simetría) y cantidades conservadas. La discusión se restringe a densidades lagrangianas que satisfacen dos condiciones: invariancia de forma e invariancia de escala ante transformaciones infinitesimales en el espacio cuatridimensional de la teoría de campo clásico (cf. Ecs. 12-143 y 12-144 de Goldstein, 1980):

$$x'_{\mu} = x_{\mu} + \delta x_{\mu}, \quad (24)$$

$\delta x_\mu$  puede depender de  $x_\mu$ .

Bajo tales dos condiciones se encuentra que:

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\eta', x_\mu) dx_\mu - \int_{\Omega} \mathcal{L}(\eta, x_\mu) dx_\mu = 0, \quad (25)$$

donde las variables de campo  $\eta_\rho(x_\mu)$  están representadas por  $\eta$  y se transforman de acuerdo con:

$$\eta'_\rho(x'_\mu) = \eta_\rho(x_\mu) + \delta \eta_\rho(x_\mu). \quad (26)$$

La Ec. (25) es equivalente a (Goldstein establece este resultado a través de una mera analogía con la misma ecuación reducida a una dimensión):

$$\int_{\Omega} [\mathcal{L}(\eta', x_\mu) - \mathcal{L}(\eta, x_\mu)] dx_\mu + \int_S \mathcal{L}(\eta) \delta x_\mu dS_\mu = 0. \quad (27)$$

S es la superficie cuatridimensional de  $\Omega$ . Usando el teorema de la divergencia se obtiene:

$$\int_{\Omega} dx_\mu \left\{ [\mathcal{L}(\eta, x_\mu) - \mathcal{L}(\eta, x_\mu)] + \frac{d}{dx_\nu} (\mathcal{L}(\eta, x_\mu) \delta x_\nu) \right\} = 0, \quad (28)$$

donde la diferencia en las densidades lagrangianas proviene de cambios  $\delta \eta_\rho$  en las variables de campo  $\eta$  en un punto fijo del 4-espacio:

$$\mathcal{L}(\eta', x_\mu) - \mathcal{L}(\eta, x_\mu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} \delta \eta_\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \frac{d\delta \eta_\rho}{dx_\nu}, \quad (29)$$

ya que se han conmutado  $\delta$  y  $d/dx_\mu$ . Así la Ec. (28) se transforma en:

$$\int (dx_\mu) \frac{d}{dx_\nu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \delta \eta_\rho + \mathcal{L} \delta x_\nu \right] = 0, \quad (30)$$

que tiene ya la forma de una ecuación de corriente conservada. La

Ec. (30) se obtiene nuevamente por substitución directa de las Ecs. de campo de Lagrange. Como se ve, la invariancia de la densidad lagrangiana ante transformaciones en el espacio clásico cuadrimensional y las ecuaciones de campo de Lagrange lleva a mostrar la existencia de un conjunto de cantidades conservadas derivadas de la ec. (30). Se expuso aquí este aspecto de la teoría de campo clásica en la eventualidad de discutir la posible existencia de invariantes de Noether en termodinámica irreversible extendida donde el principio variacional que postulamos puede permitir la formulación de la teoría extendida como un teoría de campo clásica.

En el siguiente capítulo se muestran algunos principios variacionales para el movimiento de los fluidos que involucran tanto procesos convectivos como disipativos. Tales principios han surgido en el marco teórico-conceptual de la termodinámica irreversible lineal. Con esto se pretende dejar completo (aunque a grandes rasgos) el panorama de principios variacionales en el que se puede visualizar el contexto y la posición, diríase histórica, que guarda el principio que se sustenta en este trabajo.

## II.- PRINCIPIOS VARIACIONALES NO CLÁSICOS PARA PROCESOS CONVECTIVOS Y DISIPATIVOS.

Las limitaciones encontradas por la presencia de operadores no autoadjuntos en las ecuaciones del movimiento de los fluidos restringió en un inicio los intentos de establecer sus fundamentos variacionales a flujos no viscosos. La inclusión de efectos disipativos se intentó entonces a partir de la termodinámica de procesos irreversibles dando lugar a una serie de trabajos cuyo origen parece estar en la formulación variacional de Onsager de la ley de Fourier de conducción de calor y en el principio de mínima producción de entropía de Prigogine.

Se presenta aquí una reseña breve del desarrollo histórico de las formulaciones variacionales para el movimiento de los fluidos a partir de los trabajos de Onsager y Prigogine incluyendo solo aquellos trabajos en los que se consideran como punto de partida las hipótesis de la termodinámica irreversible lineal. Como se ha mencionado, esto tiene un propósito doble: mostrar con cierto detalle los antecedentes del principio variacional con el que se trabaja aquí y evidenciar la estructura del desarrollo de los principios formulados para el movimiento de los fluidos. Algunos principios que se enmarcan en las extensiones de la termodinámica irreversible se tratan en las partes IV y V.

Como se verá, pueden distinguirse claramente dos líneas representadas, por un lado, por los principios propiamente restringidos de los cuales el primero que se expone es el de Onsager (1931); y por otro, los del tipo potencial local que tienen su origen en el principio de Prigogine (1945).

### II.1.- Principios variacionales de tipo restringido.

Para medios anisotrópicos Onsager (1931) formuló un principio para la conducción de calor que requiere que la funcional:

$$A(J, T) = S(J) + S^*(J_n) - \phi(J, J), \quad (1.1)$$

donde

$$\dot{S}(J) = - \int_V \frac{\nabla \cdot J}{T} dV; \dot{S}^*(J_n) = \int_S \frac{n \cdot J}{T} dS; \ddot{S}(J, J) = \int_V \frac{J \cdot \mathcal{X} \cdot J}{2T} dV, \quad (1.2)$$

sea un máximo con respecto a variaciones del flujo de calor  $J$  bajo la condición de que el campo de temperaturas  $T$  sea una función conocida de la posición,  $\mathcal{X}$  es una diádica simétrica conocida que no depende del flujo de calor pero si de la temperatura;  $\dot{\phantom{S}}$  indica derivada temporal total. Así, la variación  $\delta_T$  de la funcional  $A$  es cero, si y solo si se satisface la relación constitutiva:

$$- \frac{1}{T} \nabla T = \mathcal{X} \cdot J. \quad (2)$$

$T$  es mantenida constante durante la variación.

En el caso de medios isotrópicos, para los cuales  $\mathcal{X} = \mathcal{U}k/T$  ( $\mathcal{U}$  es el diádica unitaria), la Ec. (2) se reduce a la conocida ley de Fourier de conducción de calor:

$$J = -k \nabla T. \quad (3)$$

Adicionalmente, la segunda variación de  $A$  con respecto a  $J$  es negativa siempre y cuando  $\mathcal{X}$  sea positiva definida. Esto implica que la funcional  $A$  es en efecto un máximo en las condiciones descritas.

En un estudio muy crítico Finlayson y Scriven (1967) afirman que cuando el campo de temperaturas es desconocido la formulación de Onsager no es la de un principio máximo porque la variación restringida de  $A$  no es cero en general y el signo negativo de la segunda variación no implica de ningún modo un máximo. Este punto será motivo de una reflexión posterior.

Siguiendo la idea de Onsager, Rosen (1953) hace estacionaria la integral:

$$\int_V (J \cdot J / 2k) dV \quad (4)$$

con respecto a variaciones en  $J$  sujetas a las siguientes restricciones:

- i)  $\nabla \cdot J + \rho C_V \partial T / \partial t = 0$ ,
- ii)  $n \cdot J$  está especificada sobre  $S$ ,
- iii)  $k$  es independiente de  $J$  y
- iv) tanto  $T$  como  $\partial T / \partial t$  se conocen y mantienen fijas en la región  $V$ .

La "ecuación de Euler" derivada de este principio es justamente la ley de Fourier de la conducción de calor. Esta formulación es una de las más rigurosas desde el punto de vista matemático.

Gyarmati (1970) escribió un libro en el que discutió de manera muy seria el problema de los principios variacionales para la termodinámica irreversible lineal (TIL) y la posibilidad de formular esta última como una teoría clásica de campos. A partir del principio de Onsager para la conducción de calor Gyarmati define un principio general de mínima disipación de energía definido de manera que las variaciones son hechas en lo que él llama la representación de fuerzas, siendo capaz de deducir un conjunto de ecuaciones canónicas de campo las cuales son equivalentes a las ecuaciones de transporte de la TIL. Para ilustrar el desarrollo que Gyarmati lleva a cabo, considérese de nuevo el caso de la conducción de calor tratado por Onsager. El principio (sin referirse en este momento a la conducción de calor) establece que

$$\delta \int_V [\sigma - \Psi]_j dV = 0, \quad (5)$$

donde  $\sigma$  es la producción de entropía,  $\Psi$  el potencial de disipación local y el subíndice  $j$  indica que los flujos del sistema permanecen constantes durante la variación la cual es hecha sobre

las fuerzas termodinámicas. En el caso del conductor de calor la condición variacional toma la forma:

$$\delta \int_V [T^2 \sigma_q - \frac{\lambda}{2} (\nabla T)^2]_{J_q} dV = 0, \quad (6)$$

con  $\sigma_q = \rho \dot{s} + \nabla \cdot (J_q / T)$ , que es la ecuación de balance de la entropía  $s$ ,  $J_q$  el flujo de calor y  $T$  la temperatura local. Tomando en cuenta que para un sólido:

$$\dot{s} = \frac{1}{T} \dot{u} = \frac{c_v}{T} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (7)$$

donde  $c_v$  es el calor específico a volumen constante y  $u$  la energía interna, Gyarmati pasa a realizar la variación de la temperatura en la ecuación (6) manteniendo constante el flujo de calor y la derivada temporal de la temperatura. Esto último lo justifica argumentando que en la ecuación de conservación de energía la no variación de  $J_q$  hace plausible la no variación de la derivada temporal de  $T$ . Gyarmati obtiene por supuesto la ley de Fourier de la conducción de calor. En el proceso de variación el integrando de la funcional que está siendo variada toma la forma final  $\int [\rho c_v \partial T / \partial t - \nabla \cdot (\lambda \nabla T)] \delta T dV$  (a sólo un paso de obtener la ley de Fourier). Aquí, Gyarmati transforma el integrando (usando el teorema de Gauss) a:

$$\mathcal{L}_T = \mathcal{L}_T(T, \nabla T) = \rho c_v T \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\lambda}{2} (\nabla T)^2,$$

la que postula como la densidad lagrangiana de modo que la ecuación variacional

$$\delta \mathcal{L}(T) = \delta \int_V \mathcal{L}_T dV = 0,$$

conduce a la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\alpha} \right) = 0, \quad (8)$$

que es idéntica a la ecuación de Fourier. En Ec. (8) se asume la convención de índices repetidos y  $\alpha=1, \dots, 3$ .

En un trabajo de 1971, Rosof postula un principio de la forma del principio de Hamilton que conduce tanto a las ecuaciones de la hidrodinámica como a las de la termodinámica de no equilibrio (relaciones constitutivas lineales para los flujos y fuerzas termodinámicas elegidos).

En la notación empleada por Rosof la ecuación variacional se escribe como:

$$\int_V \int_x (\delta \tau - \delta \pi - \delta u_c - \delta u_d) dx dt = 0. \quad (9)$$

$\tau$  es la densidad de energía cinética,  $\pi$  la energía potencial y  $\delta u_c$  y  $\delta u_d$  son las variaciones de la energía interna debidas a procesos conservativos y disipativos respectivamente. Considérense ahora  $J_s$  el flujo de entropía y  $J_i$  el flujo de la  $i$ -ésima especie química en un sistema de coordenadas baricéntrico. Los "flujos integrados"  $K_s$  y  $K_i$  se definen como:

$$dK_s = J_s dt, \quad (10)$$

$$dK_i = J_i dt. \quad (11)$$

Rosof toma entonces como las primeras  $n$  coordenadas generalizadas del principio al conjunto  $K_1, \dots, K_j, \dots, K_n$ , donde  $K_j = K_i$  para  $j=1$  hasta  $n-1$  y  $K_n = K_s$ . Junto con estas hay otras dos coordenadas generalizadas:  $\rho$  y  $r$ .  $r=r(a, t)$  es la posición al tiempo  $t$  de una partícula de fluido originalmente en  $a$ . Ahora se requiere especificar las componentes de la variación en la energía interna en Ec. (9). Por su lado  $\delta u_c$  estaría dada por:

$$\delta u_c = T \delta s_c - P \delta v + \sum \mu_i \delta n_i, \quad (12)$$

donde T representa la temperatura, P la presión,  $\mu_i$  el potencial químico de la especie i,  $s_c$  la entropía específica (de hecho por unidad de longitud ya que Rosof se restringe a una dimensión) que cruza la frontera del elemento de volumen,  $n_i$  la masa específica de i y  $v$  el volumen. Mientras que:

$$\delta u_d = T \delta s_d \quad (13)$$

es el calor producido por unidad de volumen, donde  $s_d$  es la entropía específica debida a procesos disipativos.

La razón de cambio en el tiempo de la entropía específica  $s_c$  está dada por la entropía transportada por el movimiento del fluido:

$$\dot{s}_c = \frac{-\partial J}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial K}{\partial x} \right), \quad (14)$$

y por tanto se tiene

$$\delta s_c = \dot{s}_c \delta t = - \delta \left( \frac{\partial K}{\partial x} \right). \quad (15)$$

Similarmente,

$$\delta n_i = - \delta \left( \frac{\partial K_i}{\partial x} \right). \quad (16)$$

De modo que la Ec. (12) puede reescribirse como sigue:

$$\delta u_c = \delta \alpha + \delta \beta, \quad (17)$$

ya que  $\sum \delta K_i = 0$  y donde:

$$\delta \alpha = - \sum_{j=1}^n A_j \delta \left( \frac{\partial K_j}{\partial x} \right), \quad (18)$$

$$\delta\beta = -P\delta v, \quad (19)$$

$$A_j = \begin{cases} \mu_j - \mu_n, & j=1 \text{ hasta } n-1 \\ T, & j=n. \end{cases} \quad (20)$$

Así, la doble integral de la ecuación variacional (9) viene a ser:

$$\int_1 \int_x (\delta\tau - \delta\pi - \delta\beta) dx dt + \int_1 \int_x (-\delta\alpha - \delta u_d) dx dt. \quad (21)$$

Aquí Rosof trabaja separadamente los dos términos que aparecen en el lado izquierdo de la última ecuación. Para el primero de ellos se remite a la literatura (Herivel, 1954) asumiendo que el único término importante en la energía interna es el término presión-volumen y obtiene las ecuaciones eulerianas de la hidrodinámica (ver parte I de este trabajo).

Estableciendo una analogía con el caso clásico en donde la presencia de fuerzas disipativas en el sistema (que no pueden derivarse de un potencial) puede tratarse definiendo una función  $\phi$  tal que  $2\phi$  es la razón a la cual la energía es disipada, la cual se asume depender de las velocidades generalizadas, Rosof trata el término en la Ec. (21) que corresponde a la variación en  $u_d$  como sigue. De acuerdo a las Ecs. (10) y (11) las derivadas temporales de las coordenadas generalizadas  $K_j$  corresponden a los flujos  $J_j$ , por lo que la función de disipación  $\phi$  que puede ser usada es:

$$\phi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n R_{jk} J_j J_k, \quad (22)$$

donde  $R_{jk} = R_{kj}$ .

Variando los flujos como se indica en la Ec. (21) se llega a las siguientes ecuaciones de "Euler-Lagrange" en notación matricial:

$$[J_k] = - [C_{jk}] \left[ \frac{\partial A}{\partial x^j} \right], \quad (23)$$

donde  $[C_{jk}] = [R_{jk}]^{-1}$  (24)

Para finalizar Rosof trata el caso de sistemas bajo la acción de un campo magnético para probar la validez de la teoría. Como se ve, el principio de Rosof surge de dos ramas del desarrollo de principios variacionales: la de la formulación euleriana de la hidrodinámica y la línea generada a partir del trabajo de Onsager (por el hecho de que las variaciones son hechas sobre los flujos y obtenerse ecuaciones constitutivas). Esto puede visualizarse mejor en el esquema (fig. 1) al final de esta parte II, donde se observa también la línea de los principios de tipo potencial local que parte también del principio de Onsager pero que se define pronto como una rama independiente y de la cual se expone en primer lugar el principio de Prigogine en el siguiente apartado.

## II.2.- Principios variacionales de tipo potencial local.

El teorema de Prigogine (1945) de la mínima producción de entropía afirma que para condiciones prescritas independientes del tiempo la producción total de entropía:

$$P = \int \sigma dV \quad (25)$$

es un mínimo en el estado estacionario (Prigogine consideró solo procesos disipativos), donde  $\sigma$  denota la producción de entropía por unidad de tiempo y de volumen.

Después, Glansdorff y Prigogine (1964) extendieron la Ec. (25) a un criterio general de evolución incluyendo términos convectivos. El criterio establece que para condiciones de frontera independientes del tiempo:

$$d\mathcal{F} = \int dV \sum_i J_i \cdot dX_i \leq 0, \quad (26)$$

donde las fuerzas termodinámicas  $X_i$  y los flujos  $J_i$  incluyen

procesos mecánicos. El problema básico con la Ec. (26) es determinar en que condiciones  $d\bar{F}$  es una diferencial total. En el caso en que la Ec. (26) solo incluye efectos disipativos en reacciones químicas Prigogine y Balescu (1955) concluyeron que en general tal diferencial total no existe. Esto está relacionado con la existencia de sistemas que aún siendo levemente sacados del estado estacionario el sistema no regresa a tal estado sino que describe una trayectoria muy cercana a el. No obstante, Glansdorff y Prigogine (1964) muestran cómo es posible en muchos casos obtener una diferencial total en la vecindad del estado estacionario substituyendo en la Ec.(26) algunas variables de campo por las distribuciones que corresponden al estado estacionario. La función  $\bar{F}$  obtenida depende entonces de dos tipos de variables:  $u_0$  y  $u$  de modo que las ecuaciones de conservación del sistema en el estado estacionario son obtenidas por una condición extremal al variar las variables  $u$  manteniendo fijas las variables estacionarias  $u_0$ , tomando luego la condición adicional  $u=u_0$ . El método se conoce como el de potencial local. El potencial local  $\bar{F}$  presenta un mínimo cuando se cumple la desigualdad:

$$\bar{F}(u, u_0) > \bar{F}(u_0, u_0). \quad (27)$$

El concepto de potencial local ha sido aplicado a otros sistemas dada su importancia teórica como criterio de evolución para la predicción del comportamiento del sistema cerca de estados estacionarios. Lebon y Lambermont (1972, 1973, 1975) usaron el concepto para estudiar mezclas químicamente activas en estados transitorios. En sistemas con procesos puramente disipativos descritos por ecuaciones lineales Lebon y Lambermont (1972) definen la funcional  $A$  en la representación de energía como:

$$A = \iiint_{V_0} (-\dot{u}_v [P^1, \dots, P^n] + \Psi) dV dt + \sum_{i=1}^n \iint_{\Lambda_i} P_i^* I_i^* v dA dt, \quad (28)$$

donde  $u_v$  es la energía interna específica,  $P_i$  son las variables intensivas del sistema,  $\Psi$  el potencial de disipación local:

$$\Phi(X, X) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} L_{ij} X^i X^j \geq 0$$

con  $L_{ij}$  los coeficientes de Onsager e  $I^i = (1/T) J^i$ .

El principio establece que la evolución del proceso es tal que la variación restringida (derivadas temporales de las variables  $P_i$  se mantienen sin variar) de la funcional (28) con respecto a las variables intensivas es cero. Las condiciones obtenidas para que el principio se cumpla son las ecuaciones de conservación del sistema. Si los coeficientes de Onsager dependen de los parámetros intensivos el principio mantiene su validez siempre que la variación  $\delta L_{ij} = 0$ , lo cual significa que los  $L_{ij}$  dependen de las variables  $P_i$  en el estado estacionario para las cuales la variación es cero. Después de la variación se introducen las condiciones subsidiarias:  $P_{i0} = P_i$ .

En el trabajo de 1973, Lebon y Lambertont elaboran un principio variacional para fluidos en los que están presentes procesos disipativos y convectivos. El principio se formula en términos de la energía cinética específica  $k_v$ :

$$k_v = 1/2 \rho v \cdot v \quad (29)$$

con  $v$  el campo de velocidades, y de la transformada de Legendre de la energía interna específica  $u_v$ :

$$u_v(T, \mu) = u_v - T s_v - \mu p. \quad (30)$$

Estas dos cantidades son utilizadas para definir la función lagrangiana  $\mathcal{L}$  como:

$$\mathcal{L} = k_v - u_v(T, \mu). \quad (31)$$

El principio establece que las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía para el fluido viscoso son las condiciones para que la ecuación variacional siguiente se satisfaga cuando  $\mu$ ,  $T$  y  $v$  son variadas:

$$\delta_t \iint_{\Omega} (\partial z / \partial t) dV dt + \delta_x \iint_{\Omega} \text{div}(\Sigma v) dV dt + \delta \iint_{\Omega} (\Psi + k_v^0 \text{div} v - F_v \cdot v) dV dt - \delta \iint_{\Omega} \Sigma v \cdot v dA dt = 0 \quad (32)$$

Los subíndices  $t$  y  $x$  sobre el operador  $\delta$  indican respectivamente que las derivadas temporales y las derivadas espaciales de los parámetros intensivos no son variadas, además los términos con superíndice  $0$  se mantienen fijos durante la variación. En la Ec. (32) no se han incluido términos que dan las condiciones de frontera para los flujos.

El criterio (32) es válido tanto para leyes fenomenológicas lineales como no lineales. Sin embargo, en este último caso los coeficientes de los gradientes de las fuerzas generalizadas en tales leyes se suponen dependientes de la solución estacionaria  $T_0$ ,  $\mu_0$  y  $v_0$  las cuales no son variadas y por tanto tampoco los coeficientes. Como antes, la restricción se quita con las condiciones subsidiarias:

$$T_0 = T, \quad \mu_0 = \mu, \quad v_0 = v.$$

Lebon y Lambermont mencionan que el principio que proponen es una extensión del principio de Hamilton a mecánica de fluidos que se expresa como se ha visto por:

$$\delta \iint_{\Omega} (k_v - \eta) dV dt = 0, \quad (33)$$

pero tal afirmación se basa solo en la similitud en la forma entre la lagrangiana (31) y el integrando de la Ec. (33). No obstante lo anterior, en el esquema de la figura 1 se ve como en efecto dos líneas a través del esquema lleven al principio de Lebon y Lambermont: la formulación euleriana de la hidrodinámica y la de los principios de tipo potencial local.

Existen otros principios variacionales no clásicos del tipo potencial local para el movimiento de fluidos que involucran

convección y disipación (Weihs y Gal Or, 1970; Hiroaka y Tanaka, 1978). De hecho, Venkateswarlu y Deshpande (1982) muestran como es posible construir una formulación que unifique los trabajos de Glansdorff y Prigogine (1964), Weihs y Gal Or (1970), Lebon y Lambermont (1973) y Hiroaka y Tanaka (1978). En este planteamiento la funcional general tiene la forma:

$$I_m = I_c + I_d = \int_{\Omega} [L_c(u, u^0) + L_d(u, u^0, \rho, \rho^0)] dV dt, \quad (34)$$

donde  $u_0$  son las variables estacionarias y  $L_c$  y  $L_d$  son densidades lagrangianas que conducen a los términos convectivos y disipativos de las ecuaciones de conservación:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (35)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (36)$$

La condición  $u = u_0$  debe tomarse después de realizada la variación. En el caso de la parte convectiva de la Ec (36) la densidad  $L_c$  en su forma más general está dada por:

$$L_c = \rho \left[ a_{ijkl} u_i^0 \frac{\partial u_j^0}{\partial x_k} u_l + b_{ijkl} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} u_l^0 + c_{ijkl} u_i^0 \frac{\partial u_j}{\partial x_k} u_l^0 + d_{ijkl} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} u_l \right]. \quad (37)$$

Los tensores cartesianos de cuarto orden pueden escribirse como combinaciones lineales de productos del tensor  $\delta_{ij}$ . Puede mostrarse entonces que la variación de la densidad  $L_c$  es:

$$\begin{aligned} \alpha_c = \rho [ & (a_2 - c_1 - c_2 - b_2 + d_1 + d_2) u_k^0 \frac{\partial u_l^0}{\partial x_k} + \\ & + (a_1 - 2c_3 - b_3 - d_1 + d_2) u_k^0 \frac{\partial u_l^0}{\partial x_l} ] \delta u_l, \end{aligned} \quad (38)$$

donde se ha usado ya la condición  $u = u_0$ , los  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  y  $d_i$  son los coeficientes de las combinaciones lineales de los tensores de cuarto orden. Eligiendo adecuadamente valores para los coeficientes se obtienen como casos particulares de la densidad  $L_c$  la parte convectiva de los cuatro principios mencionados arriba. Para finalizar este capítulo, se exponen las ideas básicas de dos trabajos (Hameiri y Bhattacharjee, 1987 y Rasband et al., 1988) sobre la aplicación del método del potencial local a un fluido viscoso conductor de electricidad en presencia de un campo magnético, en vista de su estrecha relación con la parte V de este trabajo.

### II.3.- Principios variacionales del tipo potencial local para fluidos conductores.

En Hameiri y Bhattacharjee (1987) se explora la aplicación del principio de Prigogine a física de plasmas. Se trata de describir el proceso conocido como relajación del plasma que consiste en la tendencia espontánea del sistema a aproximarse a un estado estacionario preferido. Como se verá, este corresponde a un estado de mínima producción de entropía. Ellos comienzan discutiendo las ideas en el caso de un conductor rígido de electricidad sujeto a un campo eléctrico con una simetría particular definida. La evolución del campo magnético es en términos de la ley de Faraday:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \quad (39)$$

donde el campo eléctrico está determinado por la ley de Ohm:

$$E + v \times B = \eta i, \quad (40)$$

siendo  $i$  el flujo de corriente,  $i = \nabla \times B$  despreciando el vector de desplazamiento de Maxwell (aproximación MHD),  $\eta$  la resistividad eléctrica y  $v$  la velocidad del fluido ( en el caso del sólido  $v=0$ ). Las Ecs. (39) y (40) están sujetas a las condiciones de frontera:

$$B \cdot n = 0, \quad i \cdot n = 0, \quad (41)$$

con  $n$  un vector normal, junto con:

$$\oint_T E \cdot dl = V, \quad \oint_P E \cdot dl = 0, \quad (42)$$

donde  $T$  y  $P$  son curvas particulares sobre la frontera del conductor acordes con la simetría del sistema,  $V$  es el voltaje axial aplicado por unidad de longitud.

Si la Ec. (39) se multiplica por  $\partial B / \partial t$  y se integra en el volumen del conductor se llega a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_2^1 (-\eta i^2 - E_a \cdot i) dr = - \int \left[ \frac{\partial B}{\partial t} \right] dr, \quad (43)$$

con  $E_a$  el campo eléctrico aplicado. Esta ecuación implica que la funcional del lado izquierdo decrece monótonamente durante la evolución del sistema y se detiene cuando  $\partial B / \partial t$  es cero, cuando se alcanza el estado estacionario. La funcional es llamada por Hameiri y Bhattacharjee la integral de producción de entropía ya que el integrando es la forma usual de calcular la producción de entropía. De este modo establecen que la relajación del plasma a un estado preferido es tal que la variación de la funcional:

$$\int_2^1 (-\eta i^2 - E_a \cdot i) dr \quad (44)$$

con respecto a variaciones en el campo magnético B es cero (las variaciones en i se calculan a partir de  $i = \nabla \times B$ ). Esto expresa la tendencia del plasma aproximarse a un estado de producción de entropía mínima. La condición extremal es la ecuación para i en el estado estacionario:  $\eta i = E_a$ . Las condiciones de frontera son:  $\nabla \cdot i = 0$  y  $i \cdot n = 0$ . Después, los autores tratan el caso de un fluido conductor al cual consideran incompresible por simplicidad. La evolución del campo magnético está ahora determinada por:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times (\eta i - \mathcal{E}) = 0, \quad (45)$$

donde los campos son campos promedio y la cantidad  $\mathcal{E}$  es el promedio de  $v_1 \times B_1$ , siendo  $v_1$  y  $B_1$  la velocidad y el campo magnético fluctuantes (los campos se suponen determinados por un valor promedio al que se superpone un campo fluctuante cuyo promedio es cero). En general la función  $\mathcal{E}$  es desconocida, sin embargo, para el fluido conductor se conocen algunas de sus propiedades y aún se conoce su forma para simetrías determinadas. El término entre paréntesis de la Ec. (45) satisface la condición:

$$\eta i - \mathcal{E} = E_a \text{ sobre } r = a. \quad (46)$$

Un procedimiento equivalente al descrito para llegar a la Ec. (43) lleva a constatar que la integral:

$$\mathcal{F} = \int d\tau \left[ \frac{1}{2} \eta i^2 - \frac{1}{2} \mathcal{E} \cdot i - E_a \cdot i + \frac{1}{2} (\mathcal{E} \cdot i^0 - \mathcal{E}^0 \cdot i) \right] \quad (47)$$

muestra un comportamiento monótono decreciente mientras  $\partial B / \partial t$  sea distinto de cero. La Ec. del estado estacionario Ec. (46), se obtiene entonces como la condición para que la funcional (47) sea un mínimo cuando el campo magnético B es variado manteniendo constantes  $i^0$  y  $\mathcal{E}^0$  y tomando después las condiciones:  $i = i^0$ ,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}^0$ . Como se ve, el principio propuesto por Hameiri y Bhattacharjee es del tipo potencial local, restringido al campo magnético y al caso

estacionario.

Para terminar, el principio se usa para construir un esquema iterativo que partiendo de una suposición inicial sobre  $B_0$ , converge a la solución del estado estacionario siempre que este sea un estado de mínima producción de entropía.

Ahora se describe el trabajo de Rasband et al. (1988). En él se discute una formulación variacional para la magnetohidrodinámica disipativa basada en una funcional definida sobre el conjunto de variables de campo que describen el sistema: la temperatura  $T$ , el campo magnético  $B$ , la velocidad  $v$ , etc. Tal funcional es lo que Rasband et al. (1988) llaman la funcional de producción de entropía generalizada  $\mathfrak{I}(\phi, \phi_0)$  (funcional PEG) con  $\phi_0(x, t)$  el valor promedio de las variables de campo en el punto  $x$  al tiempo  $t$  y  $\phi(x, t)$  incluye variaciones alrededor de los valores promedio. La funcional PEG debe ser tal que valuada en  $(\phi_0, \phi_0)$  corresponda a la razón de producción de entropía (se requiere por supuesto que la funcional tenga unidades de producción de entropía). De este modo, el principio variacional construido a partir de la funcional PEG corresponderá a una generalización del principio de mínima producción de entropía de Frigogine. El principio afirma que la evolución del sistema es de modo tal que se satisface la condición  $\delta\mathfrak{I}=0$ , tomando la variación con respecto a los campos  $\phi$  dejando constantes los campos  $\phi_0$ , tomando a posteriori la conocida condición subsidiaria  $\phi=\phi_0$ . Las ecuaciones "extremales" corresponden a las ecuaciones de evolución de los campos promedio del sistema. Si se cumple adicionalmente la condición:  $\mathfrak{I}(\phi, \phi_0) > \mathfrak{I}(\phi_0, \phi_0)$  para toda variación de  $\phi$  entonces  $\mathfrak{I}(\phi_0, \phi_0)$  es un mínimo global.

Realmente la forma en que aquí se ha planteado es un poco diferente a la de Rasband et al. (1988) Esto se ha hecho así por que la forma en que lo hacen dichos autores deja entrever que la formulación de un principio variacional tiene el mero propósito de servir de base a un esquema iterativo para calcular, es decir: buscar una funcional que reproduzca las ecuaciones correctas del sistema y a partir de ella construir el esquema iterativo

pareciera ser el objetivo.

Así, el principio propuesto por Rasband et al. (1988) se formula para conducir a las ecuaciones de balance de la magnetohidrodinámica disipativa (estas ecuaciones pueden verse en la parte V de este mismo trabajo). Tales ecuaciones se complementan con las ecuaciones de Maxwell y las relaciones constitutivas entre fuerzas y flujos termodinámicos que son asumidas lineales. Estas relaciones son para el caso, las leyes de Fourier, de Newton y de Ohm. Los coeficientes de transporte son supuestos funciones de los campos.

La funcional PEG toma la forma:

$$\Phi = \Phi_B + \Phi_V + \Phi_T + \Phi_\rho \quad (48)$$

donde cada término es construido de modo que al variar el campo que aparece como subíndice dará lugar a la correspondiente ecuación de balance, en el resto de términos el campo que se varíe aparecerá con un subíndice o de modo que permanecerá constante durante la variación. De este modo, se justifica la notación empleada en la Ec. (48) y así cada término de la ecuación origina la ecuación de balance completa correspondiente.

Los términos  $\Phi_V$  y  $\Phi_T$  son tratados en la literatura (Glansdorff y Prigogine, 1971) y Rasband et al. (1988) centran su atención en el término  $\Phi_B$  que debe generar la ecuación de evolución del campo magnético B Ec. (45). Primero retoman de Hameiri y Bhattacharjee (1987) la densidad de la razón de producción de entropía debida a disipación ohmica:  $\eta i^2/2T$ , que al ser variada respecto al campo magnético (nuevamente las variaciones de  $i$  se obtienen de  $i = \nabla \times B$ ) da como resultado:

$$\begin{aligned} \frac{\eta_0}{T_0} i \cdot \delta i &= \nabla \cdot \left[ \delta B \times \frac{\eta_0 c}{4\pi T_0} i \right] \\ &+ \frac{c}{4\pi T_0} \delta B \cdot \left[ \nabla \times (\eta_0 i) + T_0 \nabla \left( \frac{1}{T_0} \right) \times \eta_0 i \right]. \end{aligned} \quad (49)$$

El término de la divergencia dará la condición de frontera requerida, el primer término entre los paréntesis corresponde al término  $\eta$  en la Ec. (45) y el segundo término entre paréntesis tiene una forma similar al efecto Nernst (de Groot y Mazur, 1984) a pesar de lo cual Rasband et al. (1988) lo tratan como un término "no deseado" (!). Los términos faltantes de la Ec. (45) son introducidos en forma *ad hoc* con subíndice 0 para que permanezcan constantes durante la variación, al final de la cual se considera la condición subsidiaria  $\phi = \phi_0$ . Así, la forma de  $\mathfrak{E}_B$  queda:

$$\mathfrak{E}_B = \int_V dV \left[ \frac{\eta_0}{2T_0} + \frac{c}{4\pi} B_0 \left[ \frac{1}{T_0 c} \frac{\partial B_0}{\partial t} - \frac{1}{T_0 c} \nabla \times (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0) - \frac{1}{T_0} \nabla \times \mathfrak{E}_0 - \nabla \left( \frac{1}{T_0} \right) \times \eta_0 \mathbf{i}_0 \right] \right] \quad (50)$$

El último término del paréntesis cuadrado está para anular el término "no deseado".

Con un procedimiento similar se construye  $\mathfrak{E}_\rho$  que al ser variado con respecto a  $\rho$  da la ecuación de balance de masa con la condición de frontera correspondiente.

Después, Rasband et al. (1988) demuestran que la funcional PEG para el campo magnético Ec. (50) es un mínimo local dejando al lector la tarea de mostrar lo mismo para el resto de términos de Ec. (48).

Finalmente el principio formulado se aplica a un plasma disipativo con una simetría particular y se elabora un esquema iterativo para el cálculo de propiedades del plasma. Esta parte no se considera aquí por no ser de interés para la discusión subsecuente.

A lo largo de su trabajo, Rasband et al. (1988) evitan darle el nombre de fluctuaciones a las variaciones de los campos argumentando que "dado que es costumbre considerar que las fluctuaciones de ellos ocurren en una escala espacial y temporal mucho más fina que la de los cambios en los campos promedio. Como

consecuencia, las variaciones de los campos no contribuyen a la producción de entropía dado que son variaciones matemáticas más bien que físicas".

II.4.- Esquema del desarrollo de los principios variacionales asociados a fenómenos convectivos y disipativos en II.

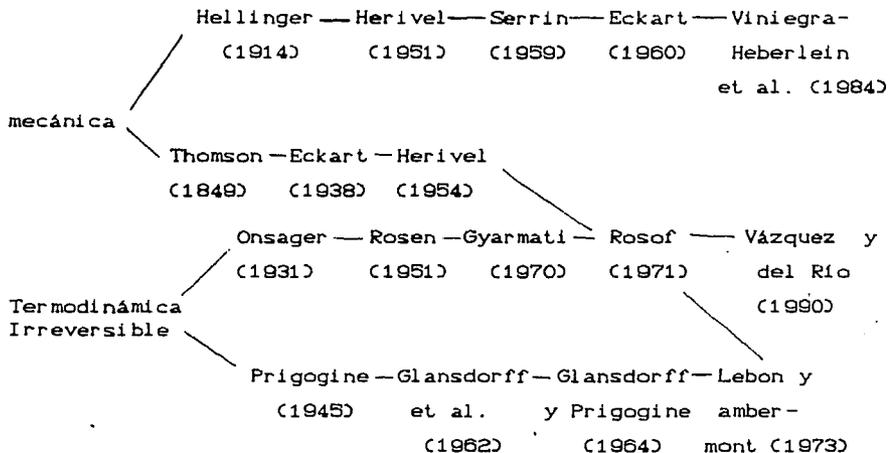


FIGURA 1

El esquema intenta mostrar las raíces de los trabajos incluidos, lo cual no significa que todos los autores de un trabajo cualquiera que están detrás (en el tiempo) de él hayan sido tomados como fuente. Se han excluido por el espacio reducido, muchos trabajos que han contribuido al desarrollo de la formulación variacional de los fenómenos de transporte tanto dentro de los esquemas de la termodinámica irreversible como de otros esquemas: procesos estocásticos, por ejemplo.

### III. - TERMODINÁMICA IRREVERSIBLE EXTENDIDA.

Se exponen algunos aspectos de la termodinámica irreversible extendida para su discusión posterior en términos de la formulación variacional sobre las ecuaciones de evolución temporal que se sustenta en este trabajo. Se plantea el esquema axiomático de la teoría y se bosqueja a grandes rasgos el método general para la obtención de las ecuaciones de evolución temporal de los flujos disipativos. El tratamiento de puntos como el desarrollo de los coeficientes de la ecuación de Gibbs o de la producción de entropía en términos de invariantes escalares del espacio termodinámico extendido o como el desarrollo de expresiones de los tensores en términos de las variables del espacio termodinámico, etc., se hace más bien someramente porque el caso tratado en la parte V del fluido viscoso conductor de electricidad, permite mostrar con algún detalle tales aspectos. Se hace, en contraste, más énfasis sobre la hipótesis de cerradura en relación con la construcción de la producción del potencial termodinámico generalizado, punto al que el principio variacional parece dar un mayor sustento.

#### III.1. - Los postulados de la termodinámica irreversible extendida.

A estas alturas del desarrollo de la termodinámica irreversible extendida sobresalen ya los trabajos que han resultado un hito en la conformación de la teoría: el trabajo de Muller de 1987 donde se propuso que una forma de generalizar la termodinámica irreversible lineal sería modificar la hipótesis de equilibrio local introduciendo una función de entropía generalizada dependiente tanto de las variables conservadas como de los flujos disipativos. El *Recent Developments in Non-Equilibrium Thermodynamics* de 1984 editado por J. Casa-Vázquez, D. Jou y G. Lebon donde se muestran los trabajos de una década que vinieron a conformar el grueso de la teoría como hoy se le conoce. El trabajo de García-Colín et al. de 1984 en el que se hace el intento formal

de establecer la significación física de la teoría y sus fundamentos microscópicos. En éste último sentido también está la ponencia de García-Colín de 1987 en el Congreso Nacional de Física (García Colín, 1988) que es además un muy bello recuento de la termodinámica de no equilibrio. También, la discusión que sobre los criterios de orden para el corte de los desarrollos en la teoría hicieran del Río y López de Haro (1990) y sobre la hipótesis de cerradura (que se describe abajo) por Rodríguez y López de Haro (1989).

En la forma actual, la termodinámica irreversible extendida parte de los siguientes postulados:

i) El espacio termodinámico está constituido (se extiende) por las variables conservadas del sistema y por los flujos disipativos o variables no conservadas del mismo (el criterio para la selección de tal conjunto aún es una cuestión abierta).

ii) El sistema fuera de equilibrio se describe por un potencial termodinámico generalizado  $\eta$  (al que podría llamársele densidad de entropía de no equilibrio) con las siguientes propiedades:  $\eta$  es función de todas las variables del espacio termodinámico extendido y es una función local continua. Como consecuencia, la evolución temporal de  $\eta$  está determinada por una ecuación tipo Gibbs (generalizada). Esta ecuación deberá reducirse a la ecuación usual de Gibbs en equilibrio local.

iii) Se asume la existencia de una ecuación de balance para  $\eta$  de la forma:

$$\rho d\eta/dt = - \operatorname{div} J + \sigma, \quad (1)$$

donde  $J$  es el flujo del potencial generalizado  $\eta$  y  $\sigma$  el término de producción.

iv) Los coeficientes de la ecuación de Gibbs (derivadas parciales de  $\eta$  que aparecen en la ecuación) junto con el flujo del potencial generalizado son funciones de los invariantes escalares del sistema construidos con las variables no conservadas. Los escalares de la teoría son desarrollados como expansiones

alrededor del estado de equilibrio local.

v) La producción del potencial generalizado puede depender además de las variables conservadas y de los invariantes escalares, de parámetros que no pertenecen al espacio termodinámico extendido. El método básico de trabajo de la TIE consiste en la comparación de expresiones para la derivada temporal del potencial generalizado obtenidas de la ecuación de Gibbs y de la ecuación de balance Ec. (1). La primera se obtiene por substitución de las ecuaciones de conservación de las variables lentas y de los coeficientes fenomenológicos desarrollados a un orden preestablecido en la ecuación de Gibbs. La segunda por el desarrollo del flujo  $j_\eta$  y la producción  $\sigma$  como el vector y el escalar más general posible en términos de las variables del espacio termodinámico extendido.

Ahora se ejemplifica este procedimiento en el caso simple de un conductor rígido de calor. Este sistema es utilizado también por Vázquez y del Río para obtener la ecuación de evolución temporal del flujo de calor en el conductor a partir de un principio variacional tipo restringido (esto se describe en la parte IV), de modo que ambos métodos pueden compararse. Para detalles de las condiciones en que se trata el problema puede verse García-Colín (1988). Partiendo entonces de la consideración de que el espacio extendido para el caso, está formado por la energía interna  $e$  (parte conservada) y del flujo de calor (parte no conservada) se tiene que el potencial termodinámico generalizado  $\eta$  es función de estas dos cantidades:

$$\eta = \eta(e, q). \quad (2)$$

La ecuación de Gibbs viene a ser, después de introducir la ecuación de conservación de la energía:

$$\frac{d\eta}{dt} = -\alpha_1 \nabla \cdot q + \alpha_2 \frac{dq}{dt}. \quad (3)$$

Mientras que la expresión alternativa para  $d\eta/dt$  está dada por la

Ec. (1). Las expresiones para  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\sigma$  pueden verse en la parte IV (cf. Ecs. 30.1 a 30.3). Faltaría escribir aquí la del flujo de  $\eta$ :

$$J = (\beta_1 + \beta_2 \mathcal{G} + \beta_3 \mathcal{G}^2 + \dots)q. \quad (4)$$

De este modo, las ecuaciones (1) y (3) quedan:

$$\rho \frac{d\eta}{dt} = -\alpha_{10} \nabla \cdot q + \alpha_{20} q \cdot \frac{dq}{dt}, \quad (5.1)$$

$$\rho \frac{d\eta}{dt} = -\beta_1 \nabla \cdot q - q \cdot \nabla \beta_1 + \sigma_2 q \cdot q. \quad (5.2)$$

Por congruencia con la termodinámica lineal los coeficientes deben tomarse como:  $\alpha_{10} = 1/T$  ( $T$  la temperatura local de equilibrio) porque  $\eta$  debe reducirse a la entropía local al regresar a equilibrio local;  $\beta_1 = 1/T$  porque la Ec. (1) debe reducirse a la correspondiente ecuación de equilibrio local por lo que  $J$  debe reducirse a  $q/T$ . Hecho esto, al igualar los lados derechos de Ecs. (5) se llega a:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{20} \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\sigma_2} \nabla(T^{-1}) + q.$$

La identificación de los coeficientes de esta última ecuación es inmediata (García-Colín, 1988) y lo que se obtiene es la ecuación de evolución temporal para el flujo de calor  $q$ .

### III.2. - La hipótesis de cerradura.

Sobre el postulado v) conviene resaltar para la discusión final de este trabajo algunos aspectos. En primer lugar, la justificación de la inclusión de parámetros adicionales en la producción de potencial termodinámico generalizado (expuesta y argumentada por Rodríguez y López de Haro, 1989) proviene de dos hechos: a) de que

en la teoría lineal la producción de entropía depende explícitamente de los gradientes de las variables termodinámicas del equilibrio y otros términos como el gradiente de velocidad, por ejemplo. Debido a esto, la expresión de la producción generalizada debe contener términos que lleven a la misma expresión en el equilibrio cuando el espacio extendido se proyecta al espacio de variables conservadas y b) de que el resultado de la operación de la derivada temporal y la divergencia sobre  $\eta$  y  $J$  en la ecuación de balance de  $\eta$  no pertenece siempre estrictamente al espacio termodinámico extendido.

Parece costumbre seguir llamando a estos términos parámetros de cerradura, aunque sería más adecuado llamarlos en todo caso "parámetros de apertura".

La inclusión de parámetros en  $\sigma$  que no pertenecen al espacio extendido requiere aún, como Rodríguez y L. de Haro mencionan, de una interpretación física completa y de un mayor soporte en términos de un análisis microscópico (si es que éste pudiera aportar tal soporte).

En el capítulo que sigue se inicia la descripción de los principios variacionales (como se verá hay pocos de ellos) que se inscriben ya en el marco teórico-conceptual de la termodinámica irreversible extendida.

#### IV.- PRINCIPIOS NO CLASICOS EN TERMODINAMICA IRREVERSIBLE EXTENDIDA.

Como se ha visto, existe un interés persistente y sistemático por la formulación variacional de la termodinámica lineal de los procesos irreversibles. Este interés alcanza ya a las teorías que pretenden solventar las limitaciones de la teoría lineal conocidas genéricamente como teorías extendidas. La dificultad para usar principios variacionales clásicos en teorías que tratan sobre procesos irreversibles vuelve a aparecer en el ámbito de tales teorías debido a la presencia de operadores no autoadjuntos. Por esta razón, hay algunos esfuerzos dirigidos a establecer principios variacionales no clásicos particularmente en la termodinámica irreversible extendida (TIE). Debido posiblemente a los, relativamente, pocos años de desarrollo de la TIE existe un escaso número de ellos.

Esta parte se inicia con la demostración de que los operadores asociados a las ecuaciones de evolución temporal en el esquema de la TIE son no autoadjuntos y por lo tanto no existe un principio clásico justificándose la necesidad de principios de tipo no clásico. Después se exponen dos trabajos, uno de Sieniutycz de 1984 y el otro de Vázquez y del Río de 1990 en el que se formulan principios variacionales que llevan, en el primer caso, a las ecuaciones de onda derivadas de las ecuaciones hiperbólicas de evolución temporal de las variables termodinámicas en la TIE, y en el segundo caso directamente a las ecuaciones de evolución temporal.

##### IV.1.- Sobre la existencia de principios variacionales clásicos en TIE.

La demostración de que para el conjunto de Ecs. de evolución temporal de las variables del espacio extendido no existe un principio variacional clásico se basa en las derivadas de Fréchet (Finlayson, 1972). El procedimiento básico fué mostrado por

Vázquez y del Río (1990) para el caso particular del conductor rígido de calor. Considérese un operador diferencial  $N(u)$  tal que

$$N(u)=0 \quad (1)$$

y que puede ser no lineal.  $N(u)$  es el gradiente de una cierta funcional  $F(u)$  si se satisface la condición de simetría

$$\int \psi N'_u \phi \, dV = \int \phi N'_u \psi \, dV, \quad (2)$$

donde la derivada de Fréchet  $N'_u$  del operador se define como

$$\begin{aligned} N'_u \phi &\equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N(u+\varepsilon\phi) - N(u)}{\varepsilon} \\ &= \left[ \frac{\partial N(u+\varepsilon\phi)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0}. \end{aligned} \quad (3)$$

En el caso en que  $u$  es un conjunto de funciones de  $n$  parámetros

$$u_a = u_a(x_1, \dots, x_n), \quad (4)$$

la condición de simetría toma la forma

$$\frac{\partial f^l}{\partial u_{a,jk}} = \frac{\partial f^a}{\partial u_{l,jk}}, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial f^l}{\partial u_{a,j}} = - \frac{\partial f^a}{\partial u_{l,j}} + 2 \nabla_k \left[ \frac{\partial f^a}{\partial u_{l,jk}} \right], \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial f^l}{\partial u_a} = \frac{\partial f^a}{\partial u_l} - \nabla_j \left[ \frac{\partial f^a}{\partial u_{l,j}} \right] + \nabla_j \nabla_k \left[ \frac{\partial f^a}{\partial u_{l,jk}} \right], \quad (5.3)$$

donde  $f^l=0$  son las ecuaciones diferenciales de Ec. (1), los índices latinos van de 1 a 4 y el subíndice coma denota diferenciación parcial.

Supóngase ahora un sistema, en el esquema de la TIE, descrito por un tensor  $\Gamma$  en el espacio termodinámico extendido constituido por dos tipos de variables  $\Gamma_i$  y  $\Gamma_j$  como sigue:

$$\Gamma = (\Gamma_i, \Gamma_j),$$

con  $i=1, \dots, n$  ( $n$  es el número de variables no conservadas del sistema) y  $j=n+1, \dots, m$  (siendo  $m-n-1$  el número de variables conservadas). Las variables están ordenadas en el arreglo  $\Gamma$  de manera tal que  $\Gamma_i$  y  $\Gamma_{i+n}$  son conjugadas en el sentido de la TIL. Entonces las ecuaciones de balance de las variables  $\Gamma_j$  están dadas por:

$$f^j = \rho \Gamma_{j,4} + \Gamma_{j-n,\alpha}^\alpha = 0, \quad j=n+1, \dots, m, \quad (6.1)$$

mientras que las ecuaciones de relajación de las variables no conservadas  $\Gamma_i$  son:

$$f_\alpha^i = t \Gamma_{i,4}^\alpha + k \Gamma_{i+n,\alpha} + \Gamma_i^\alpha = 0, \quad i=1, \dots, n, \quad (6.2)$$

donde  $\alpha$  corre de 1 a 3 y una coma representa diferenciación parcial, se adopta la convención de índices repetidos.

Sigue ahora hacer la identificación siguiente:

$$(f^l) = (f_\alpha^i, f^{i+n}),$$

$$(u_a) = (\Gamma_i^\alpha, \Gamma_{i+n}).$$

En estas condiciones se puede verificar si las Ecs. (6) satisfacen las condiciones (5) y en tal caso existe un principio variacional clásico para ellas, en caso contrario no existe. Las derivadas para la Ec. (5.1) son  $\frac{\partial f^l}{\partial u_{a,jk}} = 0$  y  $\frac{\partial f^a}{\partial u_{l,jk}} = 0$ , de modo que la Ec.

(5.1) se satisface. La Ec. (5.2) se reduce, ya que el segundo término del lado derecho es cero, a  $\frac{\partial f^l}{\partial u_{a,j}} = -\frac{\partial f^a}{\partial u_{l,j}}$ . Las derivadas

son (para  $l=1,2,3$ )

$$\frac{\partial f^l}{\partial u_{a,j}} = \begin{cases} t \delta_{la} \delta_{j4} & \text{si } s=1,2,3 \\ k \delta_{lj} & \text{si } s=4 \end{cases} \quad y$$

$$\frac{\partial f^a}{\partial u_{l,j}} = \begin{cases} t \delta_{al} \delta_{j4} & \text{si } s=1,2,3 \\ \rho \delta_{la} \delta_{ja} + \delta_{jl} & \text{si } s=4 \end{cases}$$

y por consiguiente la Ec. (5.2) no se satisface cuando  $s=4$ . Las derivadas restantes son ( $l=4$ )

$$\frac{\partial f^l}{\partial u_{s,j}} = \begin{cases} \delta_{sj}, & \text{si } s=1,2,3 \\ \rho\delta_{js}, & \text{si } s=4 \end{cases} \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial f^a}{\partial u_{l,j}} = \begin{cases} k\delta_{sj}, & \text{si } s=1,2,3 \\ \rho\delta_{jl}, & \text{si } s=4 \end{cases}$$

y la Ec. (5.2) de nuevo no se satisface.

Finalmente, la Ec. (5.3) se reduce a

$$\frac{\partial f^l}{\partial u_s} = \frac{\partial f^a}{\partial u_l},$$

ya que el tercer término del lado derecho es cero y  $\frac{\partial f^a}{\partial u_{l,j}}$  es una constante. La Ec. (5.3) se satisface para todos los índices.

De este modo se tiene que por no satisfacerse la condición (5.2) no existe un principio variacional clásico para las ecuaciones de evolución temporal de las variables termodinámicas  $\Gamma_l$  en el marco de la TIE. Se justifica así la formulación de principios no clásicos para la teoría.

En los dos apartados que siguen se describen dos principios variacionales no clásicos formulados para la obtención de las ecuaciones de transporte en TIE.

#### IV.2.- El principio de Sieniutycz (1984).

El trabajo de Sieniutycz (1984) se centra en la obtención de un principio variacional a partir del cual derivar el conjunto de ecuaciones de onda que describen la transferencia acoplada de masa y energía:

$$\rho \Xi \frac{du}{dt} = - \mathcal{L} \cdot \left( \nabla^2 u - \frac{d^2 u}{c_0^2 dt^2} \right) \quad (7)$$

u definido como ( $\top$  significa transpuesto):

$$(u)^\top = [(\mu_n - \mu_1)T^{-1}, (\mu_n - \mu_2)T^{-1}, \dots, (\mu_n - \mu_{n-1})T^{-1}, T^{-1}], \quad (8)$$

con T la temperatura,  $\mu_i$  el potencial químico de la i-ésima componente y  $\mathcal{L}$  la matriz de Onsager. La matriz  $\Xi$  está relacionada con la matriz de difusividad  $\mathcal{D}$  a través de:

$$-\mathcal{L} \cdot \Xi^{-1} / (\rho c_0^2) = \mathcal{D} / c_0^2,$$

siendo  $c_0$  la velocidad de propagación,  $\rho$  la densidad.

La Ec. (7) se obtiene de las ecuaciones de relajación hiperbólicas para los flujos operando sobre ellas con una divergencia e introduciendo las ecuaciones de balance respectivas. La metodología requerida para construir el principio variacional es establecida a partir de un caso particular: un sólido humedecido periódicamente por un gas. Cerca del punto de equilibrio (ignorando por el momento los fenómenos de relajación) el proceso clásico se describe con la ecuación:

$$- \frac{dW}{dt} = k(W - W_0) \quad (9)$$

donde W es el contenido de humedad del sólido,  $W_0$  el valor de equilibrio de W.

Para incluir los efectos de una velocidad finita de transmisión de señal la generalización de la Ec. (9) contiene un término adicional  $\tau \ddot{W}$ . La ecuación generalizada puede transformarse en un análogo eléctrico:

$$I \ddot{q} + R \dot{q} + C^{-1} q = E(t), \quad (10)$$

siendo  $q = m(W - We)$  la "carga de masa total" para el sólido cuya masa seca es  $m$ .

Se puede mostrar que la Ec. (10) es equivalente a:

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} I \dot{q}^2 + \frac{1}{2} C^{-1} q^2 \right) = R \dot{q}^2 - E(t) \dot{q} \quad (11)$$

donde  $q$  y  $\dot{q}$  son ya interpretados en términos de la entropía total del sólido y el gas: el término en  $I$  es la "entropía cinética", el término en  $C$  la "entropía estática",  $E$  el cambio de entropía debido a perturbaciones y  $R$  está relacionado con la producción irreversible de entropía.

La Ec. (11) sugiere a Sieniutycz que para un proceso libre reversible ( $R=0$ ,  $E=0$ ) puede existir una lagrangiana de entropía que se obtiene como la transformación de Legendre de:

$$\frac{1}{2} I \dot{q}^2 + \frac{1}{2} C^{-1} q^2 \quad (12)$$

Así, toma como acción:

$$S = \int_0^{t_f} \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} C^{-1} q^2 + E(t) q \right] dt \quad (13)$$

La condición  $\delta S = 0$  lo lleva a un caso especial de la Ec. (11) para el proceso reversible ( $R=0$ ).

Para incluir efectos de disipación Sieniutycz usa la noción de que en muchos casos la lagrangiana irreversible contiene funciones exponenciales como  $\exp(-t\tau^{-1})$ ,  $\tau$  el tiempo de relajación. Consecuentemente:

$$S = \int_0^{t_f} \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} C^{-1} q^2 + E(t) q \right] \exp(-t\tau^{-1}) dt \quad (14)$$

es una funcional de acción más adecuada con la cual la condición  $\delta S=0$  lleva a la Ec. (10).

Ahora, para sistemas térmicos Sieniutycz propone la densidad lagrangiana:

$$\Lambda = \mathcal{L}: [\nabla u \nabla u - c_0^{-2} \dot{u} u], \quad (15)$$

en la que introduce la noción anterior de que la densidad debe contener un cierto término exponencial substituyendo  $\mathcal{L}$  por:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \exp(\tau \tau^{-1}) \cdot \mathcal{L} = \exp(-\Xi \cdot \mathcal{L}^{-1} \rho c_0^2 t) \cdot \mathcal{L}. \quad (16)$$

Entonces la condición  $\delta S=0$  para la funcional:

$$S = \frac{1}{2} \iiint \left( [\exp(-\Xi \cdot \mathcal{L}^{-1} \rho c_0^2 t) \cdot \mathcal{L}] : [\nabla u \nabla u - c_0 \dot{u} u] \right) dV dt \quad (17)$$

es:

$$\exp(-\Xi \cdot \mathcal{L}^{-1} \rho c_0^2 t) \cdot [(\mathcal{L} \cdot \nabla^2 u) - c_0^{-2} \ddot{u} + \rho \Xi \cdot \dot{u}] = 0 \quad (18)$$

Esta ecuación es equivalente a la Ec. (7) que describe la transferencia de energía y masa. Cuando el proceso es puramente disipativo ( $\Xi$  tiende a cero) y para el caso estacionario ( $\dot{u}=0$ ), Sieniutycz recupera el principio de mínima producción de entropía.

#### IV.3. - El principio de Vázquez y del Río (1990).

En Vázquez y del Río (1990) se investiga la existencia de principios variacionales en el marco de la termodinámica irreversible extendida con el propósito de dilucidar sobre la naturaleza del potencial termodinámico generalizado  $\eta$  y las propiedades físicas del espacio termodinámico extendido. Para discutir las ideas en un caso simple se considera en un inicio, un conductor rígido infinito de calor en reposo y con densidad constante  $\rho(r,t)$ .

En estas condiciones se formula un principio variacional para el conductor de calor. La funcional se define en términos del cambio del potencial termodinámico generalizado  $\eta$  como:

$$I(e, q) = \int (\rho \frac{d\eta}{dt} - \sigma) dV, \quad (19)$$

siendo  $\sigma$  la producción de  $\eta$  por unidad de volumen y de tiempo. El cambio de  $\eta$  se obtiene de la ecuación de Gibbs generalizada

$$\rho d\eta = \alpha_1 de + \alpha_2 \cdot dq. \quad (20)$$

Los  $\alpha_i$  son funciones de las variables del espacio termodinámico extendido ( $e$  y  $q$ ). Substituyendo la ecuación de conservación de energía y Ec. (20) en Ec. (19) se obtiene

$$I(e, q) = \int \left[ \nabla \cdot (\alpha_1 q) - \nabla \alpha_1 \cdot q + \alpha_2 \cdot \frac{dq}{dt} - \sigma \right] dV, \quad (21)$$

donde se hizo uso de

$$\nabla \cdot (\alpha_1 q) = \alpha_1 \nabla \cdot q + \nabla \alpha_1 \cdot q.$$

Si la componente perpendicular del flujo de calor sobre la superficie del conductor  $\partial B$  (conductor infinito) es cero, se tiene:

$$\int_{\partial B} \alpha_1 q \cdot ds = 0,$$

Ceste término podría ser retenido para dar la condición de frontera para el flujo de calor, en tal caso aparecería un término adicional en la Ec. (19) relacionado con un valor prescrito para  $q$  sobre  $\partial B$ , la Ec. (21) se reduce a:

$$I(e, q) = \int \left[ -\nabla \alpha_1 \cdot q + \alpha_2 \cdot \frac{dq}{dt} - \sigma \right] dV. \quad (22)$$

Entonces se investigan las consecuencias sobre la funcional (19) cuando se modifica levemente la componente no conservada del

espacio termodinámico extendido. Por construcción se esperaría que  $I(c, q)$  permaneciera invariante ya que se ha substraído la parte no conservada (producción) del cambio del potencial generalizado. Las variaciones que se llevan a cabo son independientes del espacio tiempo y toman lugar en el espacio termodinámico exclusivamente. Esto implica que las derivadas temporales y los gradientes permanecen fijos durante la variación.

El principio variacional establece que:

$$\delta' \int \left[ \frac{d}{dt} \eta - \sigma \right] dV = 0, \quad (23)$$

donde el superíndice ' indica el sentido restringido de la variación.

Así, igualando a cero la variación restringida de la funcional (22) se tiene:

$$\nabla \alpha_1 + \left[ 2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{F}} \alpha_2 \frac{d}{dt} q - \frac{\partial}{\partial \mathcal{F}} \sigma \right] q + \alpha_2 \frac{d}{dt} q = 0, \quad (24)$$

aquí se usó que  $\delta'(\nabla \alpha_1) = 0$  y  $\delta'(\frac{d}{dt} q) = 0$ . La Ec. (24) es una ecuación de evolución temporal no aproximada para el flujo de calor en el conductor en el marco de la TIE.

Ahora, siguiendo el procedimiento de la TIE versión mexicana, los coeficientes  $\alpha_i$  junto con la producción se expanden en términos del invariante escalar  $\mathcal{F} = q \cdot q$  para hallar ecuaciones aproximadas a distintos órdenes:

$$\alpha_1 = \alpha_{10} + \alpha_{11} \mathcal{F} + \alpha_{12} \mathcal{F}^2 + \dots \quad (25.1)$$

$$\alpha_2 = (\alpha_{20} + \alpha_{21} \mathcal{F} + \alpha_{22} \mathcal{F}^2 + \dots) q \quad (25.2)$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \mathcal{F} + \sigma_3 \mathcal{F}^2 + \dots \quad (25.3)$$

Si el integrando de la Ec. (23) ha de ser expandido a un orden dado en las potencias de la variable no conservada entonces las series en las Ecs. (25) deben desarrollarse hasta un orden consistente. Por ejemplo, cuando el integrando se expande a orden

2, los  $\alpha$ 's se requieren hasta el orden más bajo y la producción hasta orden 2:  $\alpha_1 = \alpha_{10}$ ,  $\alpha_2 = \alpha_{20} q$  y  $\sigma = \sigma_2 q$  (por compatibilidad con TIL  $\sigma_1 = 0$ ). En estas condiciones la Ec. (24) se reduce a la ecuación de evolución temporal conocida para el flujo de calor en el conductor rígido:

$$\alpha_{20} (2\sigma_2)^{-1} \frac{d}{dt} q = -(2\sigma_2)^{-1} \nabla \alpha_{10} + q \quad (26)$$

donde si se hace la identificación:

$$\alpha_{10} = T^{-1}, \quad \alpha_{20} (2\sigma_2)^{-1} = -t_q \quad \text{y} \quad (2\sigma_2)^{-1} = k,$$

se recupera la Ec. de evolución temporal para el flujo de calor en el conductor rígido.

Se ve entonces cómo variaciones sobre las variables no conservadas que dejan invariante el espacio tangente del espacio termodinámico extendido dan las ecuaciones de evolución temporal de las variables rápidas como "derivadas de Euler-Lagrange" de la funcional (19).

Después, el principio variacional propuesto es aplicado al caso de un fluido viscoso simple, uno de los sistemas que más profundamente han sido estudiados en TIE. Este sistema da oportunidad de mostrar las técnicas de manipulación de una funcional que depende de dos densidades escalares conservadas y tres variables no conservadas: un escalar, un vector y un tensor de rango dos. También se hace evidente la importancia de la hipótesis de cerradura ya que en este caso se requiere considerar las inhomogeneidades espaciales para la descripción del fluido, cosa que no fué necesaria para el conductor rígido.

Introduciendo las ecuaciones de balance del fluido viscoso en la ecuación de Gibbs para el potencial generalizado  $\eta$ :

$$\frac{d\eta}{dt} = \alpha_1 \frac{d\epsilon}{dt} + \alpha_2 \frac{d\rho}{dt} + \alpha_3 \frac{d\tau}{dt} + \alpha_4 \frac{dq}{dt} + \overset{\leftrightarrow}{\alpha}_5 \frac{d\overset{\leftrightarrow}{r}}{dt} \quad (27)$$

con  $\overset{\leftrightarrow}{r}$  el tensor viscoso sin traza y  $\tau$  la traza del tensor viscoso.

junto con expresiones apropiadas de las ecuaciones de estado generalizadas en términos de los invariantes escalares construidos con  $\tau$ ,  $q$  y  $\dot{\tau}$ , el principio variacional Ec. (23) lleva al conjunto formal (no aproximado) de ecuaciones de evolución temporal para las variables no conservadas del sistema. A orden cero se recuperan los resultados de equilibrio local, a primer orden no puede construirse la producción de  $\eta$  y a segundo orden se obtienen los resultados conocidos (del Río y López de Haro, 1990). Se procede ahora en el siguiente capítulo, por un lado, a aplicar el principio V-R para obtener las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (un fluido viscoso conductor de calor y electricidad bajo el efecto de un campo electromagnético) y, por otro, a discutir aspectos relevantes del principio V-R que contribuyen a darle consistencia al formalismo.

## V.- APROXIMACION VARIACIONAL A LAS ECUACIONES DE RELAJACION EN MAGNETOHIDRODINAMICA.

Se inicia este capítulo, que constituye la parte medular del trabajo, con una reconsideración formal del principio variacional de Vázquez y del Río (1990) en términos de la especificación de la ecuación variacional y de las condiciones subsidiarias que deben satisfacerse al resolverla. Después, dicho principio se aplica al caso de un fluido viscoso conductor de electricidad para llegar a las ecuaciones de relajación de la magnetohidrodinámica. Se compara la formulación tipo potencial local (Hameiri y Bhattacharjee, 1987; Rasband et al., 1988) con la que aquí se realiza y para terminar, los resultados de esta última se particularizan recuperándose ecuaciones previamente establecidas.

### V.1.- El principio de Vázquez y del Río (1990)

Los sistemas a ser tratados por el principio de Vázquez y del Río (V-R) son aquellos que sean en principio susceptibles de ser tratados por la termodinámica irreversible extendida (véase la parte III). La existencia de la ecuación de balance del potencial termodinámico generalizado  $\eta$  da pie a la definición de la ecuación variacional:

$$\delta \int (\rho d\eta/dt - \sigma) dV = 0.$$

La ecuación variacional ha de resolverse bajo las siguientes condiciones:

i) Las ecuaciones de conservación de las variables lentas del sistemas como condiciones subsidiarias del principio, las cuales pueden ser introducidas vía multiplicadores indeterminados de Lagrange o como se hace aquí, vía substitución directa,

- ii) La componente de las variables rápidas del sistema, normal a la superficie del volumen de integración debe ser especificada,
- iii) La variación ó está restringida a las variables rápidas del sistema y
- iv) El espacio tangente al espacio termodinámico extendido se mantiene fijo durante la variación.

El hecho de que se requiera que el espacio tangente no participe en la variación podría inducir a considerar al principio como del tipo potencial local. Esto no es así porque no se requiere al mismo tiempo que las cantidades que pertenecen al espacio tangente sean conocidas o prescritas en el volumen de integración, siendo éste un requisito de los principios de tal tipo.

El punto iii) justifica llamar al principio V-R de tipo restringido y que haya sido puesto en la rama que parte de Onsager (1931) (figura 1 de parte II) ya que todos los principios en dicha rama participan de la característica de no variar el espacio completo de variables que describen el sistema.

## V.2.- El fluido viscoso conductor de electricidad.

El estudio de procesos de transporte en fluidos conductores tiene importancia tanto a temperaturas termonucleares (confinamiento de plasmas) como a temperaturas bajas del orden de 500 K (magnetohidrodinámica de bajas temperaturas). En cuanto a lo primero, el interés radica en las posibilidades de generación de electricidad a partir de fusión controlada y en cuanto a lo segundo, a partir de generadores magnetohidrodinámicos de baja temperatura. Como se sabe, existen programas de desarrollo en este tipo de generadores en el Instituto de Investigaciones Eléctricas (Cúevas, 1987) y en fusión controlada en el Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares (Meléndez, 1989) y más recientemente en la Sección de Graduados de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (Vázquez R., 1990).

No obstante que con la introducción de la configuración Tokamak

(Artsimovich, 1972) se han aminorado los problemas mas serios de inestabilidad en plasmas confinados existe aún un marcado interés en los procesos de transporte responsables de la pérdida de confinamiento. Este fenómeno obedece a procesos de difusión de carga y conducción de calor a través del campo magnético de confinamiento.

Existe también mucho interés en los procesos de relajación del plasma confinado, estudiados tanto por teorías microscópicas (basadas en la ecuación de Boltzmann) (Stacey, 1981) como macroscópicas (termodinámica de no equilibrio) (Hirshman y Sigmar, 1981). Tal proceso de relajación consiste en la aproximación del plasma a un estado estacionario preferido que no es en principio arbitrario del cual Taylor (1974) ha dado una de las descripciones más difundidas. Taylor sugirió que el estado al cual llega el plasma, tras una fase inicial violentamente inestable es un estado de mínima energía magnética sujeto a la conservación de la helicidad magnética (esta propiedad se define como la integral de volumen de  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ , con  $\mathbf{B}$  el campo magnético y  $\mathbf{A}$  el potencial vectorial). La fase inicial, de una duración mucho menor que el estado de mínima energía, se caracterizaría por un proceso muy rápido de reconexión magnética. El estado de mínima energía es un estado libre de fuerzas en el cual se cumple que  $\nabla \times \mathbf{B} = \lambda_0 \mathbf{B}$ , donde  $\lambda_0$  es una constante. El plasma es considerado en la teoría de Taylor como un fluido viscoso conductor confinado en un recipiente toroidal rígido perfectamente conductor. El estado inicial es arbitrario pero tiene la característica de que la corriente inducida y el campo magnético son tangenciales a las paredes del contenedor conductor.

Aún cuando la teoría de Taylor tiene éxito para predecir el estado relajado se le objeta (Hameiri y Bhattacharjee, 1987; descrito en la parte II) que carece de una justificación dinámica. También se menciona que no obstante ser esencialmente cierto que la helicidad se conserva (cambia más lentamente que la energía magnética) existen sin embargo otras cantidades que permanecerían constantes durante el movimiento del plasma. Su inclusión en el modelo

modificaría el estado de Taylor (como se le conoce al estado de mínima energía magnética) permitiendo un mejor acuerdo con el experimento.

Hameiri y Bhattacharjee substituyen, como se vió en la parte II, la hipótesis de Taylor por el supuesto de que el estado relajado es uno en el que la producción de entropía es mínima realizando así la descripción de la relajación del plasma a partir del principio de Prigogine. En realidad el uso de formulaciones variacionales en magnetohidrodinámica de plasmas es anterior y es posible que entre los primeros trabajos se encuentre el de Grad y Rubin (1958) quienes reportaron un principio para el caso estático de las ecuaciones de conservación de momento, masa y entropía del fluido junto con las ecuaciones de Maxwell. Greene y Karlson (1969) presentaron un principio para el caso más general que incluye flujo estacionario. La funcional en este principio es del tipo energía cinética menos suma de energías interna, potencial y magnética. Las variaciones se realizan sobre las variables de campo. Finalmente Wenger (1970) formula un principio para la magnetohidrodinámica que incluye efectos viscosos del mismo tipo que el de Greene y Karlson. En todos ellos se utiliza el método de funciones nulas (multiplicadores de Lagrange).

Se pasa ahora a aplicar el principio V-R al caso del fluido viscoso conductor en presencia de un campo electromagnético para obtener las ecuaciones de relajación sin aproximación para los flujos del sistema.

### V.3.- Ecuaciones de relajación no aproximadas para un fluido viscoso conductor de electricidad bajo un campo electromagnético.

La aplicación del principio V-R al fluido conductor no presupone geometría particular para la frontera del fluido sino sólo los valores prescritos de los flujos normales a la frontera que se tomarán en lo sucesivo como cero.

El espacio termodinámico extendido se asume constituido por dos densidades escalares conservadas (volumen específico  $v$  y energía

interna  $u$ ) y cuatro cantidades no conservadas (flujo de calor, flujo de corriente eléctrica, el tensor de esfuerzos viscoso y su traza). La selección hecha aquí para extender el espacio de variables termodinámicas es la que fué propuesta por Cuevas (1989) que difiere de la de Goldstein y García Colín (1989) quienes tratando el mismo sistema no incluyeron el flujo de corriente eléctrica perdiendo la información sobre la evolución temporal del mismo. La obtención por Spitzer (1962), desde el punto de vista microscópico, de una ecuación de evolución para el flujo de corriente en un gas ionizado, refuerza el incluir tal variable en el espacio termodinámico extendido. Las ecuaciones de balance del sistema (ecuaciones subsidiarias del principio) son en este caso:

$$\rho \frac{d\nu}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho z(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{i} \times \mathbf{B} \quad (2)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{q}}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - \rho \frac{d\nu}{dt} - \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{i} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \boldsymbol{\tau}' \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3)$$

con  $\mathbf{v}$  la velocidad,  $p$  la presión,  $\boldsymbol{\tau}$  el tensor de esfuerzos viscoso,  $\mathbf{q}$  el flujo de calor,  $\mathbf{i}$  el flujo de corriente eléctrica,  $\boldsymbol{\tau}'$  la traza de  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  los campos eléctrico y magnético respectivamente,  $\nu$  el volumen específico y  $\rho z$  la densidad de carga eléctrica. La dependencia del potencial termodinámico generalizado es entonces:  $\eta = \eta(u, \nu, \mathbf{q}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{i}, \boldsymbol{\tau}')$  y por tanto la ecuación de Gibbs generalizada se escribe como:

$$\rho \frac{d\eta}{dt} = \alpha_1 \frac{du}{dt} + \alpha_2 \frac{d\nu}{dt} + \alpha_3 \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \alpha_4 \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} + \alpha_5 \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \alpha_6 \frac{d\boldsymbol{\tau}'}{dt} \quad (4)$$

Los coeficientes  $\alpha_i$  adoptan una forma particular de acuerdo a su carácter tensorial y como se ha mencionado son cantidades indeterminadas. Los escalares se escriben como funciones de las densidades conservadas y de los invariantes escalares  $I_i$  que

pueden construirse con las cantidades no conservadas del espacio extendido:

$$\alpha_1 = \alpha_1(u, v, I_1, \dots, I_{12}), \quad (5)$$

$$\alpha_2 = \alpha_2(u, v, I_1, \dots, I_{12}), \quad (6)$$

$$\alpha_3 = \alpha_3(u, v, I_1, \dots, I_{12}), \quad (7)$$

Los vectores:

$$\alpha_4 = \alpha_{31} q + \alpha_{32} i + \alpha_{33} \tau \cdot q + \alpha_{34} \tau \cdot i, \quad (8)$$

$$\alpha_5 = \alpha_{51} q + \alpha_{52} i + \alpha_{53} \tau \cdot q + \alpha_{54} \tau \cdot i, \quad (9)$$

y finalmente los tensores:

$$\alpha_6 = \alpha_{41} \tau + \alpha_{42} qq + \alpha_{43} ii + \alpha_{44} iq + \alpha_{45} \tau \cdot \tau + \alpha_{46} i \tau \cdot i + \alpha_{47} q \tau \cdot q + \alpha_{48} q \tau \cdot i. \quad (10)$$

Los escalares  $\alpha_{ij}$  son funciones de los invariantes escalares y las variables conservadas, y dado que el espacio tangente no es generado completamente por el espacio termodinámico extendido (Rodríguez y López de Haro, 1989), la producción del potencial generalizado  $\eta$  depende de los invariantes escalares y de otros parámetros relevantes para el sistema:

$$\sigma = \sigma(u, v, I_1, \dots, I_{12}, \text{parámetros}). \quad (11)$$

Las expresiones explícitas para los invariantes escalares son (hasta orden cuatro):

$$I_1 = \tau', \quad (12.1)$$

$$I_2 = q \cdot q, \quad (12.2)$$

$$I_3 = i \cdot i, \quad (12.3)$$

$$I_4 = q \cdot i, \quad (12.4)$$

$$I_5 = \text{tr}(\tau \cdot \tau), \quad (12.5)$$

$$I_6 = \text{tr}(\tau \cdot \tau \cdot \tau), \quad (12.6)$$

$$I_7 = q \cdot \tau \cdot q, \quad (12.7)$$

$$I_8 = i \cdot \tau \cdot i, \quad (12.8)$$

$$I_9 = q \cdot \tau \cdot i, \quad (12.9)$$

$$I_{10} = q \cdot (\tau \cdot \tau) \cdot q, \quad (12.10)$$

$$I_{11} = i \cdot (\tau \cdot \tau) \cdot i, \quad (12.11)$$

$$I_{12} = q \cdot (\tau \cdot \tau) \cdot i. \quad (12.12)$$

Los parámetros adicionales de los que depende la producción  $\sigma$  son:

$$p_1 = \nabla \cdot v, \quad (13.1)$$

$$p_2 = (\nabla v)^s, \quad (13.2)$$

$$p_3 = (\nabla v)^a, \quad (13.3)$$

$$p_4 = E + v \times B, \quad (13.4)$$

$$p_5 = i \times B, \quad (13.5)$$

$$p_6 = \nabla \cdot \tau, \quad (13.6)$$

$$p_7 = \nabla q, \quad (13.7)$$

$$p_8 = \nabla i. \quad (13.8)$$

donde  $( )^s$  y  $( )^a$  son la parte simétrica y antisimétrica del tensor respectivamente. Cabe aquí resaltar que el conjunto (13) contiene tres parámetros adicionales (13.6 a 13.8) comparado con el conjunto de parámetros usado por Cuevas (1989) en el tratamiento que hace del fluido conductor. La necesidad de considerarlos en Ecs. (13) se debe nuevamente al carácter restringido de las variaciones del principio V-R. Nótese sin embargo que pertenecen al espacio tangente.

De acuerdo al principio V-R, la variación restringida (parámetros que pertenecen al espacio tangente y derivadas temporales no son variadas) de la funcional

$$I = \int (\rho \frac{d\eta}{dt} - \sigma) dV dt \quad (14)$$

es cero. Introduciendo Ecs. (1) a (4) en el principio variacional se tiene:

$$\delta' \int [ - \alpha_1 \nabla \cdot q - \alpha_2 \rho \nabla \cdot v - \alpha_3 \tau : \nabla v + \alpha_1 \cdot (E + v \times B) - \alpha_1 \tau \nabla \cdot v + \alpha_2 \nabla \cdot v + \alpha_3 \cdot \frac{dq}{dt} + \alpha_4 : \frac{d\tau}{dt} + \alpha_5 \cdot \frac{di}{dt} + \alpha_6 \frac{d\tau'}{dt} - \sigma ] dV dt. \quad (15)$$

Algunos detalles del proceso de variación se muestran a continuación.

$$\delta(-\alpha_1 \tau : \nabla v) = - \tau : \nabla v \delta \alpha_1 - \alpha_1 \delta(\tau : \nabla v)$$

$$= - \alpha_1 \nabla v : \delta \tau - \tau : \nabla v \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 \frac{\partial \alpha_i}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial \alpha_j} \otimes \delta \alpha_j,$$

siendo  $\alpha_1 = q$ ,  $\alpha_2 = i$ ,  $\alpha_3 = \tau$  y  $\alpha_4 = \tau'$ , el producto  $\otimes$  es  $\times$ ,  $\cdot$ ,  $:$  (multiplicación, contracción, doble contracción) dependiendo del orden tensorial de las cantidades involucradas.

$$\begin{aligned} \delta(\alpha_4 : \frac{d\tau}{dt}) &= \frac{d\tau}{dt} : \delta \alpha_4 = \\ &= \frac{d\tau}{dt} : (\alpha_{41} \delta \tau + \tau \otimes \alpha_{41} + 2\alpha_{42} q \delta q + q q \otimes \alpha_{42} + 2\alpha_{49} i \delta i \\ &+ i i \otimes \alpha_{49} + \alpha_{44} i \delta q + \alpha_{44} q \delta i + q i \otimes \alpha_{44} + 2\alpha_{45} \tau \cdot \delta \tau + \tau \cdot \tau \otimes \alpha_{45} \\ &+ 2\alpha_{46} i \tau \cdot \delta i + \alpha_{46} i i \cdot \delta \tau + i \tau \cdot i \otimes \alpha_{46} + 2\alpha_{47} q \tau \cdot \delta q + \alpha_{47} q q \cdot \delta \tau \\ &+ q \tau \cdot q \otimes \alpha_{47} + \alpha_{48} q \tau \cdot \delta i + \alpha_{48} q i \cdot \delta \tau + \alpha_{48} \tau \cdot i \delta q + q \tau \cdot i \otimes \alpha_{48}) \end{aligned}$$

con el operador  $\otimes$  definido como  $\otimes \equiv \sum_i \sum_j (\frac{\partial I_i}{\partial \alpha_j} \otimes \delta \alpha_j) \frac{\partial}{\partial I_i}$ , el índice  $i$

corre de 1 a 12 y el j de 1 a 4.

De modo que la variación completa en la Ec. (15) conduce al siguiente conjunto de ecuaciones exactas acopladas para las derivadas temporales de las variables no conservadas del sistema:

$$\begin{aligned}
 & \nabla \alpha_1 - \tau \cdot \nabla v \alpha_1 + i \cdot (E + v \times B) \alpha_1 + \tau \cdot \nabla \cdot v \alpha_1 + \frac{dq}{dt} \otimes (\alpha_{31} \\
 & + q \alpha_{131} + i \alpha_{132} + \alpha_{33} \tau + q \cdot \tau \alpha_{133} + i \cdot \tau \alpha_{134}) + \frac{d\tau}{dt} \otimes (\tau \alpha_{141} \\
 & + 2\alpha_{42} q + q q \alpha_{142} + i i \alpha_{143} + \alpha_{44} i + q i \alpha_{144} + \tau \cdot \tau \alpha_{145} \\
 & 2\alpha_{47} q \tau + q \tau \cdot q \alpha_{147} + \alpha_{48} \tau \cdot i + q \tau \cdot i \alpha_{148}) + \frac{di}{dt} \otimes (\alpha_{51} + q \alpha_{151} \\
 & + i \alpha_{152} + \alpha_{53} \tau + q \cdot \tau \alpha_{153} + i \cdot \tau \alpha_{154}) + \frac{d\tau'}{dt} \alpha_{16} \\
 & - (\delta \alpha)_q = 0 \quad (16.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \tau \cdot \nabla v \alpha_2 + \alpha_1 (E + v \times B) + i \cdot (E + v \times B) \alpha_2 + \tau \cdot \nabla \cdot v \alpha_2 \\
 & + \frac{dq}{dt} \otimes (q \alpha_{231} + \alpha_{32} + i \alpha_{232} + q \cdot \tau \alpha_{233} + \alpha_{34} \tau + i \cdot \tau \alpha_{234}) \\
 & + \frac{d\tau}{dt} \otimes (\tau \alpha_{241} + q q \alpha_{242} + 2\alpha_{43} i + i i \alpha_{243} + \alpha_{44} q + q i \alpha_{244} \\
 & + \tau \cdot \tau \alpha_{245} + 2\alpha_{46} i \tau + i \tau \cdot i \alpha_{246} + q \tau \cdot q \alpha_{247} + \alpha_{48} q \tau + q \tau \cdot i \alpha_{248}) \\
 & + \frac{di}{dt} \otimes (q \alpha_{251} + \alpha_{52} + i \alpha_{252} + q \cdot \tau \alpha_{253} + \alpha_{54} \tau + i \cdot \tau \alpha_{254}) \\
 & + \frac{d\tau'}{dt} \alpha_{26} - (\delta \alpha)_i = 0, \quad (16.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha_1 \nabla \cdot \mathbf{v} + i \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \theta_3 \alpha_1 + \tau \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} \theta_3 \alpha_1 + \frac{dq}{dt} \otimes (q \theta_3 \alpha_{31} + i \theta_3 \alpha_{32}) \\
& + \alpha_{33} q + q \cdot \tau \theta_3 \alpha_{33} + \alpha_{34} i + i \cdot \tau \theta_3 \alpha_{34} \Big) + \frac{d\tau}{dt} \otimes (C \alpha_{41} + \tau \theta_3 \alpha_{41} \\
& + q q \theta_3 \alpha_{42} + i i \theta_3 \alpha_{43} + q i \theta_3 \alpha_{44} + 2 \alpha_{45} \tau + \tau \cdot \tau \theta_3 \alpha_{45} + \alpha_{46} i i \\
& + i \tau \cdot i \theta_3 \alpha_{46} + \alpha_{47} q q + q \tau \cdot q \theta_3 \alpha_{47} + \alpha_{48} q i + q \tau \cdot i \theta_3 \alpha_{48} \Big) \\
& \frac{di}{dt} \otimes (q \theta_3 \alpha_{51} + i \theta_3 \alpha_{52} + \alpha_{53} q + q \cdot \tau \theta_3 \alpha_{53} + \alpha_{54} i + i \cdot \tau \theta_3 \alpha_{54} \Big) \\
& + \frac{d\tau'}{dt} \theta_3 \alpha_{56} - (\delta \sigma) = 0, \tag{16.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha_1 \nabla \cdot \mathbf{v} - \tau \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} \theta_4 \alpha_1 - \tau \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} \theta_4 \alpha_1 + i \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \theta_4 \alpha_1 + \frac{dq}{dt} \otimes (q \theta_4 \alpha_{31} \\
& + i \theta_4 \alpha_{32} + q \cdot \tau \theta_4 \alpha_{33} + i \cdot \tau \theta_4 \alpha_{34} \Big) + \frac{d\tau}{dt} \otimes (\tau \theta_4 \alpha_{41} + q q \theta_4 \alpha_{42} + i i \theta_4 \alpha_{43} \\
& + q i \theta_4 \alpha_{44} + \tau \cdot \tau \theta_4 \alpha_{45} + i \tau \cdot i \theta_4 \alpha_{46} + q \tau \cdot q \theta_4 \alpha_{47} + q \tau \cdot i \theta_4 \alpha_{48} \Big) \\
& \frac{di}{dt} \otimes (q \theta_4 \alpha_{51} + i \theta_4 \alpha_{52} + q \cdot \tau \theta_4 \alpha_{53} + i \cdot \tau \theta_4 \alpha_{54} \Big) \\
& + \frac{d\tau'}{dt} \theta_4 \alpha_{56} - (\delta \sigma) = 0, \tag{16.4}
\end{aligned}$$

con el operador  $\theta_j$  definido como  $\theta_j \otimes \delta \alpha_j \equiv \sum_i \left( \frac{\partial I_i}{\partial \alpha_j} \otimes \delta \alpha_j \right) \frac{\partial}{\partial I_i}$ , el índice  $i$  corre de 1 a 12.

Las Ecs. (1), (2) y (3) junto con las Ecs. (16) y las ecs. de Maxwell, forman un conjunto completo de ecuaciones no aproximadas para el fluido conductor en las cuales no se conoce la dependencia explícita de los coeficientes  $\alpha_{ij}$ . En la siguiente sección estas ecuaciones se reducen introduciendo el criterio de orden de las variables termodinámicas (del Río y López de Haro, 1990).

V.4.- Ecuaciones de relajación aproximadas para el fluido viscoso conductor de electricidad bajo un campo electromagnético.

Aquí las Ecs. (16) son aproximadas a orden 2 (con el criterio de las variables no conservadas, del Río y López de Haro, 1990) para obtener las ecuaciones de relajación de las variables rápidas del fluido. La mayoría de los términos en las Ecs. (16) desaparecen en consideración de que si la funcional (14) ha de desarrollarse al orden propuesto, el coeficiente  $\alpha_2$  debe desarrollarse a orden 2 y el resto de los  $\alpha$ 's a orden 1:

$$\alpha_1 = \alpha_{10} + \alpha_{11} \tau' + O(2) \quad (17.1)$$

$$\alpha_2 = \alpha_{20} + \alpha_{21} \tau' + \alpha_{22} q \cdot q + \alpha_{23} i \cdot i + \alpha_{24} q \cdot i + \alpha_{25} \tau \cdot \tau + O(3), \quad (17.2)$$

$$\alpha_3 = \alpha_{31} q + \alpha_{32} i + O(2), \quad (17.3)$$

$$\alpha_4 = \alpha_{41} \tau + O(2), \quad (17.4)$$

$$\alpha_5 = \alpha_{51} i + \alpha_{52} q + O(2), \quad (17.5)$$

$$\alpha_6 = \alpha_{60} + \alpha_{61} \tau' + O(2), \quad (17.6)$$

donde los  $\alpha_{ij}$  son ahora sólo función de las variables lentas  $u$  y  $v$ :

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(u, v). \quad (18)$$

Para hacer compatible a primer orden la ecuación de Gibbs generalizada con la TIL se requiere que  $\alpha_{11} = \alpha_{21} = \alpha_{60} = 0$ , y  $\alpha_{10} = T^{-1}$ . La expresión explícita para la producción del potencial termodinámico generalizado  $\eta$  es:

$$\begin{aligned} \sigma = & \sigma_0 \tau'^2 + \alpha_1 q \cdot q + \alpha_2 i \cdot i + \alpha_3 \tau \cdot \tau + \alpha_4 p_5 \cdot q + \alpha_5 p_1 q \cdot q + \alpha_6 p_2 \cdot q \cdot q \\ & + \alpha_7 p_3 \cdot q \cdot q + \alpha_8 p_5 \cdot i + \alpha_9 p_1 i \cdot i + \alpha_{10} p_2 \cdot i \cdot i + \alpha_{11} p_3 \cdot i \cdot i + \alpha_{12} p_1 \tau \cdot \tau \\ & + \alpha_{13} (\tau \cdot p_2) \cdot \tau + \alpha_{14} (\tau \cdot p_3) \cdot \tau + \alpha_{15} \tau \cdot q \cdot p_4 + \alpha_{16} \tau \cdot i \cdot p_4 \\ & + \alpha_{17} p_6 \cdot q + \alpha_{18} p_7 \cdot \tau + \alpha_{19} p_8 \cdot \tau + \alpha_{20} p_1 \tau'. \end{aligned} \quad (19)$$

Substituyendo Ecs. (17) y (19) en las ecuaciones no aproximadas (16) se encuentra como resultado:

$$\nabla \alpha_{10} + \alpha_{31} \frac{dq}{dt} + \alpha_{51} \frac{di}{dt} - 2\sigma_1 q - 2\sigma_5 (\nabla \cdot v) q - 2\sigma_6 (\nabla v)^2 \cdot q - 2\sigma_7 (\nabla v)^2 \cdot q - \sigma_4 i \times B - \sigma_{17} \nabla \cdot \tau - \sigma_{15} \tau \cdot (E + v \times B) = 0. \quad (20.1)$$

$$\alpha_{10} (E + v \times B) + \alpha_{32} \frac{dq}{dt} + \alpha_{52} \frac{di}{dt} - 2\sigma_2 i - 2\sigma_9 (\nabla \cdot v) i - 2\sigma_{10} (\nabla v)^2 \cdot i - \sigma_{11} (\nabla v)^2 \cdot i - \sigma_8 i \times B - \sigma_{16} \tau \cdot (E + v \times B) = 0. \quad (20.2)$$

$$-\alpha_{10} \nabla v + \alpha_{41} \frac{d\tau}{dt} - 2\sigma_3 \tau - 2\sigma_{12} (\nabla \cdot v) \tau - 2\sigma_{13} (\nabla v)^2 \cdot \tau - 2\sigma_{14} (\nabla v)^2 \cdot \tau - \sigma_{18} \nabla q - \sigma_{19} \nabla i - \sigma_{15} (E + v \times B) q - \sigma_{16} (E + v \times B) i = 0. \quad (20.3)$$

$$-\alpha_{10} \nabla \cdot v - \sigma_{20} \tau' \cdot \nabla \cdot v + \alpha_{61} \frac{d\tau'}{dt} + 2\sigma_0 \tau' = 0. \quad (20.4)$$

Despejando las derivadas temporales se llega al siguiente conjunto de ecuaciones de relajación para las variables rápidas:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} = & \frac{\lambda_1}{\Gamma^2} \nabla \Gamma + \lambda_2 q + \lambda_3 (\nabla \cdot v) q + \lambda_4 (\nabla v)^2 \cdot q + \lambda_5 (\nabla v)^2 \cdot q \\ & + \lambda_6 \Gamma^{-1} (E + v \times B) + \lambda_7 i \times B + \lambda_8 i + \lambda_9 (\nabla \cdot v) i + \lambda_{10} (\nabla v)^2 \cdot i \\ & + \lambda_{11} (\nabla v)^2 \cdot i + \lambda_{12} \nabla \cdot \tau + \lambda_{13} \tau \cdot (E + v \times B), \end{aligned} \quad (21.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} = & \gamma_1 \Gamma^{-1} (E + v \times B) + \gamma_2 i \times B + \gamma_3 i + \gamma_4 (\nabla \cdot v) i + \gamma_5 (\nabla v)^2 \cdot i \\ & + \gamma_6 (\nabla v)^2 \cdot i + \gamma_7 \nabla \Gamma^{-1} + \gamma_8 q + \gamma_9 (\nabla \cdot v) q + \gamma_{10} (\nabla v)^2 \cdot q \\ & + \gamma_{11} (\nabla v)^2 \cdot q + \gamma_{12} \nabla \cdot \tau + \gamma_{13} \tau \cdot (E + v \times B), \end{aligned} \quad (21.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} = & \xi_1 \tau + \xi_2 (\nabla \cdot v) \tau + \xi_3 \tau \cdot \nabla v + \xi_4 \Gamma^{-1} \nabla v + \xi_5 \nabla q \\ & + \xi_6 (E + v \times B) q + \xi_7 \nabla i + \xi_8 (E + v \times B) i, \end{aligned} \quad (21.3)$$

$$\frac{dr'}{dt} = \zeta_1 r' + \zeta_2 T^{-1} \nabla \cdot v + \zeta_3 T' \nabla \cdot v \quad (21.4)$$

Las Ecs. (21.1) a (21.3) coinciden con lo obtenido por Cuevas (1989) y del Río (1989) para la magnetohidrodinámica notando sin embargo la ausencia de términos de la forma  $J \nabla \beta_i$ , con  $J$  alguno de los flujos del sistema ( $q, i$  o  $\tau$ ) y  $\beta_i$  los coeficientes de la expansión del flujo de entropía. Como se recordará, el término que corresponde a la divergencia del flujo de entropía en el principio V-R desaparece por el carácter restringido de las variaciones (sobre todo en lo que se refiere a la no variación del espacio tangente). Los términos  $J \nabla \beta_i$  son importantes por la justificación que se tiene de ellos desde el punto de vista microscópico (Yang, 1962). Está pendiente entonces averiguar la posible eliminación de la restricción de la variación en el principio en relación con las inhomogeneidades que provendrían del flujo de entropía.

Por lo demás, las Ecs. (21.1) y (21.3) concuerdan con lo obtenido por Yang a partir de la teoría cinética para un gas ligeramente ionizado (cf. Ecs. 4.26 y 4.27 de Yang, 1962). La obtención de las expresiones explícitas para los coeficientes indeterminados de las Ecs. (21.1) y (21.3) la hizo Cuevas (1989) al comparar con la descripción microscópica.

Spitzer (1962) obtiene, también a partir de la ecuación de Boltzmann, una ecuación de evolución para la corriente  $i$  (cf. Ec. 2.12 de Spitzer, 1962) en un gas constituido por electrones y un sólo tipo de iones positivos. Se observan en la ecuación el término proporcional a  $E + v \times B$ , el término en la corriente  $i$  y un término proporcional a  $i \times B$  que aquí ha sido introducido por medio de los parámetros adicionales en la producción del potencial termodinámico generalizado  $\eta$  (ver Ec. 21.2). Este último término corresponde a un flujo secundario de carga en dirección perpendicular al campo magnético y a la corriente  $i$  asociado con el efecto Hall (en la Ec. 21.1 el término  $\lambda_2 i \times B$  introduce también un flujo de calor adicional en la ley de Fourier usual conocido como efecto Ettingshausen). Aún cuando no los incluye en su Ec.

(2.12), Spitzer menciona la falta en ella de términos que den cuenta de efectos termoeléctricos que se revelarían en una contribución proporcional a  $\nabla T$ . Esta contribución puede verse en la Ec. (21.2).

Para terminar esta sección, aunque no exclusivamente en términos de parámetros macroscópicos, se hace la identificación de algunos coeficientes de la ecuación de evolución para  $i$  (Ec. 21.2) comparando con los términos disponibles de la Ec. que Spitzer obtiene:

$$\gamma_1 = T(m_e m_i c^2 / Z \rho e^2)^{-1},$$

$$\gamma_2 = (Z m_e - m_i) (m_e m_i c^2 / Z \rho e^2)^{-1},$$

$$\gamma_3 = -\eta (m_e m_i c^2 / Z \rho e^2)^{-1}.$$

$m_e$  y  $m_i$  son la masa del electrón y de los iones del gas en gramos, respectivamente,  $Z$  la carga iónica (en unidades de la carga del protón) y  $\eta$  la resistividad (igual a  $10^9$  veces la resistividad en  $\Omega\text{cm}$ ).

En lo que sigue las Ecs. (21) se particularizan para llegar a resultados previamente establecidos en sistemas que son casos particulares del fluido conductor tratado aquí.

V.5.- Ecuaciones de relajación aproximadas para un fluido viscoso simple.

Ahora las Ecs. (21) pueden usarse para encontrar las ecuaciones de relajación de un fluido viscoso simple. Para ello se hace la resistividad del fluido conductor tender a infinito y tomar  $E=0$  y  $B=0$ . Entonces se llega a:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\lambda_1}{T^{-2}} \nabla T + \lambda_2 q + \lambda_3 (\nabla \cdot v) q + \lambda_4 (\nabla v)^a \cdot q + \lambda_5 (\nabla v)^a \cdot q + \lambda_{12} \nabla \cdot \tau, \quad (22.1)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \zeta_1 \tau + \zeta_2 (\nabla \cdot v) \tau + \zeta_3 \tau \cdot \nabla v + \zeta_4 T^{-1} \nabla v + \zeta_5 \nabla q, \quad (22.2)$$

$$\frac{d\tau'}{dt} = \zeta_1 \tau' + \zeta_2 T^{-1} \nabla \cdot v + \zeta_3 \tau' \cdot \nabla v + \zeta_4 \tau : \nabla v. \quad (22.3)$$

Estos resultados coinciden con del Río y López de Haro (1989) y con Vazquez y del Río (1990).

V.6.- Ecuaciones de relajación aproximadas para un conductor rígido de calor y electricidad.

Finalmente se considera el caso de un conductor rígido de calor de electricidad cuyas ecuaciones se obtienen de Ecs. (22) haciendo  $v=0$  con lo que  $\tau'=0$  y  $\tau=0$ :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\lambda_1}{T^{-2}} \nabla T + \lambda_2 q + \lambda_3 T^{-1} E + \lambda_7 i \times B + \lambda_8 i, \quad (23.1)$$

$$\frac{di}{dt} = \gamma_1 T^{-1} E + \gamma_2 i \times B + \gamma_3 i + \frac{\gamma_7}{T^{-2}} \nabla T + \gamma_8 q. \quad (23.2)$$

Estas ecuaciones son similares a las obtenidas por Llebot et al (1983) la diferencia radica en el término  $i \times B$  que proviene de parámetros de cerradura del tangente al espacio extendido, y el término que ellos tienen de considerar a la concentración electrónica como variable conservada.

Para terminar este capítulo, se discute la naturaleza extremal del principio V-R y se muestra cómo se puede recuperar el principio de mínima producción de entropía de Prigogine (cf. parte II de este trabajo).

### V.7.- Sobre el carácter extremal del principio variacional V-R.

Ahora se retoma la discusión sobre si la condición

$$\delta \int (c \rho d\eta / dt - \phi) dV = 0 \quad (24)$$

es o no una condición extremal calculando la segunda variación de I. Esto se hace por simplicidad matemática nuevamente en el caso del conductor rígido de calor ejemplo que conserva el contenido físico que se quiere ilustrar, para el cual la ecuación de evolución temporal del flujo de calor se obtiene de la Ec. (23.1) cuando el campo electromagnético es cero (cf. Ec. 2 de parte IV). Como se recordará tal ecuación se obtiene de la primera variación de la funcional de Ec. (24):

$$\delta I = \int (c \nabla \alpha_{10} + \alpha_{20} \frac{dq}{dt} - \sigma_2 q) \delta q dV, \quad (25)$$

donde  $\sigma_2$  está redefinido.

Conviene aclarar que la objeción esencial de Finlayson (1967) a este tipo de procedimiento en principios variacionales restringidos fué hecha en el contexto de los de tipo potencial local en los cuales una información necesaria es el conocimiento de las soluciones en estado estacionario. Es cierto que cuando esta información falta, la segunda variación, como Finlayson demuestra, no permite concluir sobre la condición variacional. Este no es el caso aquí, porque el principio V-R no requiere que las distribuciones del estado estacionario sean conocidas. El resultado de la segunda variación es entonces:

$$\delta^2 I = \int [ - \sigma_2 (\delta q)^2 ] dV. \quad (26.1)$$

Dado que  $\sigma_2 = K^{-1}$  (Ec. 31 parte IV) con K conductividad térmica se tiene que:

$$\delta^2 I < 0.$$

(26.2)

Esto indica que las ecuaciones de evolución temporal para los flujos de la termodinámica irreversible extendida son las condiciones bajo las que la funcional  $I$  es un máximo global en el volumen de integración.

Es importante resaltar que es posible recuperar el principio de mínima producción de entropía de Prigogine a partir del principio V-R. En efecto, la condición  $d\eta/dt = 0$  reduce la Ec. (24) a:  $\delta \int (-\sigma) dV = 0$ , de modo que al comparar con el estado estacionario de la Ec. (26.1) se tiene:

$$\delta^2 \int (-\sigma) dV < 0.$$

(27)

La Ec. (27) indica entonces que  $\int (-\sigma) dV$  es un máximo global y así:

$$\int \sigma dV$$

es un mínimo global ( $\sigma$  es positiva globalmente). Si el espacio extendido se proyecta sobre el espacio conservado, se ha recuperado el principio de Prigogine ( $\sigma$  viene a ser la entropía). Resumiendo, el principio V-R se reduce al principio de Prigogine de mínima producción de entropía en el caso estacionario proyectando el espacio extendido sobre el de variables conservadas.

## VI.- DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES.

Las formulaciones euleriana y lagrangiana de la mecánica clásica dieron origen a los primeros intentos de llevar los métodos del cálculo variacional a la mecánica de fluidos. La importancia de disponer de una formulación variacional para el movimiento de los fluidos se puede ver desde distintos puntos (como se ha hecho en la introducción de este trabajo) y aquí es interesante recordar un memorandum que J. von Neumann manda a O. Veblen fechado el 26 de marzo de 1945 (Eckart, 1960) en el que conjetura que la dificultad en resolver las ecuaciones de la hidrodinámica surge, no de su carácter no lineal, sino de la falta de un principio variacional. La presencia de operadores no autoadjuntos en las ecuaciones de los fluidos limitó el rango de aplicación de los principios variacionales clásicos a fluidos ideales. El tratamiento de fluidos reales se hizo entonces a partir de la termodinámica de no equilibrio con los principios de tipo restringido que en este trabajo hemos ubicado en dos líneas de desarrollo pero que tienen un origen común en el principio de Onsager de 1931. Estas dos líneas son la de principios tipo potencial local (a partir del principio de Prigogine de 1945) y los de tipo propiamente restringido como se les ha denominado aquí (más directamente ligados al principio de Onsager). La primera de ellas ha dado origen a trabajos como el de Lebon y Lambermont de 1973, que según se ha visto en la parte II tiene la influencia de la línea euleriana de la mecánica clásica al seleccionar una forma tipo energía cinética menos energía interna para la funcional de la ecuación variacional. Por supuesto, dió origen al principio de evolución de Glandsdorff-Prigogine. La segunda de las líneas referidas constituye el antecedente más directo del principio que hemos sustentado en este trabajo.

La contribución hecha en este trabajo se inicia en el capítulo IV que se dedicó a demostrar, para un amplio rango de sistemas (cf. Ecs. 6 del mismo capítulo), que no existe un principio variacional clásico a partir del cual obtener las ecuaciones de evolución de

las variables del espacio termodinámico extendido. La demostración incluye a los sistemas tratados por Sieniutycz en 1984 (Cf. Ec. 7 de capítulo IV). Después se describen dos principios que se ubican en el ámbito de la termodinámica irreversible extendida (Sieniutycz, 1984; Vázquez y del Río, 1990).

Formalizamos el principio de Vázquez y del Río (V-R) en un modo que desde el punto de vista matemático parece el más consistente (Cf. parte V). La ecuación variacional se escribió como:

$$\delta \int (\rho d\eta / dt - \sigma) dV = 0.$$

Las ecuaciones de balance de las variables conservadas son condiciones subsidiarias del principio. Su introducción puede hacerse por el método de variables nulas o por sustitución directa. Se requiere conocer la componente de los flujos normales a la superficie del volumen de integración. La variación  $\delta$  se realiza sobre las variables no conservadas del sistema manteniendo constante el espacio tangente.

El principio V-R lo aplicamos aquí para obtener las ecuaciones de evolución de los flujos en la magnetohidrodinámica (que describen el movimiento de un fluido viscoso conductor de calor y electricidad en presencia de un campo electromagnético). Las ecuaciones se obtuvieron a partir de las ecuaciones exactas de evolución para las variables disipativas del espacio termodinámico extendido que el principio permite obtener. La aproximación se hizo a segundo orden. Después estas ecuaciones se particularizaron recuperándose resultados obtenidos previamente (Cuevas, 1989; del Río y López de Haro, 1990; García Colín, 1988). Como en Cuevas (1989) en el caso de la magnetohidrodinámica, se obtuvo una ecuación de evolución para el flujo de corriente que tiene su contraparte microscópica (Spitzer, 1962).

Conviene resaltar algunas diferencias que el principio tiene respecto a otros principios: a) el esquema conceptual en el que se inscribe es la termodinámica irreversible extendida y esto condiciona todo el esquema del principio (objetivos, técnicas,

etc), b) no presupone forma alguna sobre la funcional de la ecuación variacional en contraste con formulaciones como la de Sieniutycz (1984) en la cual tiene que introducirse un término exponencial en forma *ad hoc*, c) no supone tampoco un conocimiento previo de las distribuciones de equilibrio por lo cual no puede clasificársele en la rama de los principios tipo potencial local a pesar de que el espacio tangente y las derivadas temporales no participan del proceso de variación; esta restricción parece provenir más bien de la escala de variación de las variables no conservadas (rápidas) y de las cantidades que pertenecen al espacio tangente y d) se realiza un sólo tipo de variaciones a diferencia de otros principios (por ejemplo, Lebon y Lambermont, 1973, donde se realizan al tiempo hasta tres tipos diferentes de variación en la misma ecuación variacional).

Cabe resaltar también las semejanzas del principio con los de la línea de los principios restringidos, mismas que nos han inducido a colocarlo al final de ella (esquema de Fig. 1, capítulo II): a) el espacio de variables que describen al sistema no es variado completo, un subconjunto es mantenido constante durante la variación y b) las ecuaciones de "Euler-Lagrange" del principio son las ecuaciones de evolución temporal de los flujos disipativos (en el límite apropiado, ecuaciones constitutivas).

Las diferencias del principio V-R con los trabajos de Hameiri y Bhattacharjee (1987) y Rasband et al. (1988) son obvias. Mencionamos primero que sus principios son de tipo potencial local y se inscriben en el marco de la termodinámica irreversible lineal. Luego, su propósito es derivar las ecuaciones de evolución del campo magnético en el plasma y en el caso de Rasband et al. también las de las ecuaciones de las variables conservadas del sistema. Sobre todo en el trabajo de Rasband et al. 1988, hay que recalcar por último el gran número de términos de equilibrio local (diferenciados por un subíndice ó) que hay que introducir en la definición de la funcional a ser variada para obtener las ecuaciones buscadas e incluso para eliminar términos no deseados. Esto es una característica general de los principios de tipo

potencial local y contrasta con la simplicidad y generalidad de la definición de la funcional a ser variada en el principio V-R.

Como se sabe, uno de los mecanismos de validación de la termodinámica irreversible extendida es su concordancia con la termodinámica irreversible lineal cuando se restituyen las condiciones de validez de esta última. En este sentido el principio V-R, como se mostró en la parte V, permite recuperar el principio de mínima producción de entropía en el caso estacionario proyectando el espacio termodinámico extendido sobre el espacio de variables conservadas.

La estructura del principio V-R adquiere sentido si se considera la escala espacio-temporal en la que ocurren las variaciones de las variables no conservadas (como se observará, los resultados derivados del principio V-R nos han inducido aquí a interpretar las variaciones como fluctuaciones físicas más bien que como simples variaciones matemáticas). Asumiendo que tales variaciones ocurren en intervalos de tiempo mucho más cortos que los de las variables conservadas, esto justifica, primero, que sólo participe en la variación la componente no conservada. En nuestra opinión esta misma razón interviene para mantener el espacio tangente constante durante la variación, i.e. que la escala de variación temporal de los "parámetros de cerradura" es mucho mayor que la de las variables no conservadas. Esto se refleja en el resultado obtenido en la parte V donde se vió que la funcional de la ecuación variacional es un máximo global. Esto significa que la contribución más importante al cambio  $d\eta/dt$  a nivel global (tiempos de evolución largos) proviene de las variables conservadas (máxime si se ha extraído una parte, la producción, que depende principalmente de los flujos).

Como se ha visto en el desarrollo de la parte V, el principio V-R requiere también "abrir" los parámetros de cerradura como proponen Rodríguez y L. de Haro (1989). Las reflexiones anteriores inducen a suponer que la inclusión de los flujos disipativos en el espacio de variables termodinámicas ha restringido la descripción de los sistemas a tiempos de evolución tales que los componentes del

espacio tangente han quedado excluidos de la descripción por ser variables "lentas".

La investigación de la posibilidad de incluir tales términos en el esquema de la termodinámica irreversible extendida a partir de una formulación variacional tal vez arroje claridad sobre el problema planteado por Rodríguez y L. de Haro al final de su trabajo sobre la hipótesis de cerradura (1989) (cf. final de parte III) y esto tiene relación con la limitante principal del principio V-R según como está formulado hasta ahora: no incluye la forma de tratar inhomogeneidades de variables que no pertenecen al espacio termodinámico extendido.

Dada la generalidad de la formulación de nuestro principio, éste es susceptible de aplicarse al análisis de una amplia variedad de sistemas en estados de no equilibrio como hemos ilustrado aquí.

Como se sabe, un principio variacional da origen a un método de cálculo para resolver las ecuaciones de "Euler-Lagrange" que puede substituir, en ocasiones con ciertas ventajas, a otros métodos de solución de las ecuaciones. En nuestra opinión, se justifica explorar esta posibilidad usando nuestro principio para resolver problemas de no equilibrio. También, puede contribuir a desarrollar una teoría de fluctuaciones en gases ionizados aislados adiabáticamente, ya que tiene la misma forma que el que Onsager y Machlup usaron para el mismo propósito en TIL (Onsager y Machlup, 1953).

Por último, el principio muy bien puede ofrecer las bases para realizar comparaciones con otras versiones de la TIE y contribuir a la formulación de la termodinámica extendida como una teoría clásica de campo.

## VII. - REFERENCIAS.

- Artsimovich, A. (Citado por Hinton, F. L. and R. D. Hazeltine, Rev. Mod. Phys. 48 (1976) 239).
- Casal, P. J. J. Mech. 5 (1966) 149.
- Casas-Vázquez, J., D. Jou and G. Lebon (Eds.). Recent Developments in Nonequilibrium Thermodynamics, Lecture Notes in Physics 199 (Springer, Berlin, 1984). 84).
- Cuevas, S. Transferencia de calor en un flujo magnetohidrodinámico en las condiciones a la frontera de tercer tipo. Tesis de Maestría. F.C.UNAM. (1988).
- Cuevas, S. Procesos disipativos en fluidos conductores de electricidad. Tesina de Exámenes Generales Opción B. F.C.UNAM. (1989).
- de Groot, S. R. and P. Mazur. Non-equilibrium Thermodynamics (Dover, N. Y., 1981).
- Eckart, C. Phys. Rev. 54 (1938) 920 (citado por Finlayson, 1972).
- Eckart, C. Phys. Fluids 3 (1960) 421.
- Finlayson, B. A. and L. E. Scriven. Int. J. Heat Mass Transfer 10 (1967) 799.
- Finlayson, B. A. Phys. Fluids 15 (1972) 983.
- Finlayson, B. A. The Method of Weighted Residuals and Variational Principles (Academic Press, N. Y., 1972).
- Fraeijs de Veubeke, B., in Fluid Dynamics Transaction, W. Fizdom (Ed.) (Polish Scientific Publishers, Warsaw, Poland, 1967), Vol. 3, p. 111 (citado por Lambermont y Lebon, 1973).
- García-Colín, L.S. Rev. Mex. Fis. 34 (1988) 344.
- García-Colín, L. S., M. López de Haro, R. F. Rodríguez, J. Casas-Vázquez and D. Jou. J. Stat. Phys. 37 (1984) 465.
- Goldstein, H. Classical Mechanics, 2nd. Ed. (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1980).
- Goldstein, P. and L. S. García-Colín. Rev. Mex. Fis. 35 (1989) 367.
- Glansdorff, P. and I. Prigogine. Physica 30 (1964) 351.
- Glansdorff, P. and I. Prigogine. Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations (John Wiley, London,

1971).

- Grad, H. and H. Rubin. Proc. Int. Conf. Peaceful Uses At. Energy, 2nd. 31 (1958) 190 (citado por Finlayson, 1972).
- Greene, J. M. and E. T. Karlson. Phys. Fluids 12 (1969) 561.
- Gyarmati, I. Non-equilibrium Thermodynamics (Springer-Verlag, N. Y., 1970).
- Hameiri, E. and A. Bhattacharjee. Phys. Rev. A 35 (1987) 768.
- Hellinger, E. Encyklopadie der Math. Wiss IV-30 (1914) 601 (citado por Viniegra-Heberlein et al., 1984).
- Herivel, J. Proc. Camb. Phil. Soc. 37 (1951) 986.
- Herivel, J. Proc. R.I.A., 56-A (1954) 37.
- Herivel, J. Proc. Camb. Phil. Soc. 51 (1955) 344.
- Hiroaka, M. and K. Tanaka. Memoirs of Faculty of Engineering, Kyoto University, Part 4, 30 (1978) 235 (citado por Venkateswarlu y Deshpande, 1982).
- Hishman, S. P. and D. J. Sigmar. Nuc. Fus. 21 (1981) 1079.
- Hojman, S. y L. C. Shepley. Rev. Mex. Fis. 28 (1982) 149.
- Lambermont, J. and G. Lebon. Ann. Phys. 7 (1972) 15.
- Lebon, G. and J. H. Lambermont. J. Chem. Phys. 59 (1973) 2929.
- Lebon, G. and J. Lambermont. Ann. Phys. 7 (1975) 425.
- Lichtenstein, L. Grundlagen der Hydrodynam. (Berlin, 1929), chap. 9 (citado por Herivel, 1955).
- Llebot, J.E., D. Jou and J. Casas-Vázquez. Physica 121A (1983) 552.
- Meléndez, L. XXXII Cong. Nal. de Fis. Leñn, Gto. Octubre, 1989.
- Muller, I. Z. Phys. 198 (1967) 329.
- Onsager, L. Phys. Rev. 37 (1931) 405.
- Onsager, L. and S. Machlup. Phys. Rev. 91 (1953) 1505, 1512.
- Prigogine, I. and R. Balescu. Ac. Roy. Belg., Bull. Cl. Sc. 41 (1955) 917 (citado por Glansdorff y Prigogine, 1964).
- Prigogine, I. Ac. Roy. Belg., Bull. Cl. Sc. 31 (1945) 600 (citado por Glansdorff y Prigogine, 1964).
- Rasband, S. N., G. W. Mason and P. L. Matheson. Phys. Rev. A 38 (1988) 5294.
- del Río, J. A. and M. López de Haro. J. Non-Equilib. Thermodyn. 15 (1990) 59.

- del Río, J. A. Comunicación personal. (1989).
- Rodríguez, R. F. and M. López de Haro. J. Non-Equilib. Thermodyn. 14 (1989) 37.
- Rosen, P. J. Chem. Phys. 21 (1953) 1220.
- Rosof, B. H. Phys. Rev. A 4 (1971) 1268.
- Serrin, J. Handbuch der Physik, VIII pt. 1 (1959) 125.
- Sieniutycz, S. J. Non-Equilib. Thermodyn. 9 (1984) 61.
- Spitzer, L. Physics of fully ionized gases (Interscience Publishers, N. Y., 1962).
- Stacey, W. M. Fusion plasma analysis (J. Wiley & Sons, N. Y. 1981).
- Taub, A. H. Proc. Symp. Appl. Math. 1 (1949) 148 (citado por Herivel, 1955).
- Taylor, J. B. Phys. Rev. Letters 33 (1974) 1139.
- Thomson, W. Cambridge Dublin Math. J. 4 (1849) 90 (citado por Finlayson, 1972).
- Vázquez, F. and J. A. del Río. Rev. Mex. Fis, 36 (1990) 71.
- Vázquez R., M. Memoria del 2<sup>o</sup> Coloquio Académico, Sección de Graduados. E.S.I.M.E.IPN. 1990.
- Venkateswarlu, P. and S. M. Deshpande. J. Non-Equilib. Thermodyn. 7 (1982) 105.
- Viniegra-Heberlein, F., A. Salcido y A. Fierros. Rev. IMP XVI, 1 (1984) 39.
- Wenger, N. C. J. Fluid Mech. 43 (1970) 211.
- Wheis, D. and B. Gal Or.Int. J. Engg. Sci. 8 (1970) 231.
- Yang, H. T. Phys. Fluids 5 (1962) 1580.

## INDICE

INTRODUCCIÓN.....	4
PRINCIPIOS VARIACIONALES CLÁSICOS EN HIDRODINÁMICA.....	9
PRINCIPIOS VARIACIONALES NO CLÁSICOS PARA PROCESOS CONVECTIVOS Y DISIPATI- VOS.....	17
TERMODINÁMICA IRREVERSIBLE EXTENDIDA.....	37
PRINCIPIOS NO CLÁSICOS EN TERMODINÁ- MICA IRREVERSIBLE EXTENDIDA.....	42
APROXIMACIÓN VARIACIONAL A LAS ECUA- CIONES DE RELAJACIÓN EN MAGNETOHI- DRODINÁMICA.....	53
DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES.....	70
REFERENCIAS.....	75