

36
29



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELIZACIÓN DE LA SEÑAL EN UN INTERFEROMETRO

"SPECKLE" DIFERENCIAL PARA LA MEDICION

DEL TAMAÑO DE ESTRELLAS EN ROTACION RAPIDA

TESIS CON
FALLA FE CRICEN

T E S I S

Que para obtener el Título de:

F I S I C O

P R E S E N T A

ITZEL RIQUELME CHERRIER

México D.F.

1990



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE GENERAL

◦ INTRODUCCION.....	6
◦ CAPITULO I TURBULENCIA ATMOSFERICA	
I.1 <u>ESTRUCTURA DE LA TURBULENCIA ATMOSFERICA</u>	
I.1.1 Características.....	10
I.1.2 Degradación de las imágenes por la turbulencia.....	10
I.1.3 Distribución aleatoria de la atmósfera.....	11
I.2 <u>IMAGENES A LARGO TIEMPO DE EXPOSICION</u>	14
I.2.1 Función de transferencia del telescopio en presencia de turbulencia.....	14
I.2.2 Resolución limite del telescopio.....	17
◦ CAPITULO II METODOS INTERFEROMETRICOS	
II.1 <u>INTERFEROMETRIA SPECKLE</u>	20
II.1.1 Función de transferencia.....	22
II.1.2 Módulo de la amplitud compleja de la onda.....	24
II.2 <u>INTERFEROMETRIA ENTRE DOS PUPILAS</u>	25
II.2.1 Interferometría en el plano imagen.....	25
a) Imágenes a largo tiempo de exposición.....	27
b) Imágenes a corto tiempo de exposición.....	27
II.2.2 Interferometría de rotación de frente de onda.....	28
II.3 <u>INTERFEROMETRIA SPECKLE DIFERENCIAL</u>	31
II.3.1 Analisis interespectral	
a) efecto del ruido de fotones.....	34
II.3.2 Estimación del fotocentro entre dos imágenes.....	37
a) Analisis unidimensional.....	38
◦ CAPITULO III SISTEMA EXPERIMENTAL	
III.1 <u>CARACTERISTICAS DEL SISTEMA OPTICO</u>	43
III.1.1 Telescopio.....	43
III.1.2 Rejilla de difracción	
a) Cálculo de la función de transferencia.....	44
para una rejilla de difracción sinusoidal.	
b) Dispersión.....	47
c) Resolución.....	48

III.1.3	Lentes.....	48
III.1.4	Espejos.....	49
III.1.5	Rendija.....	50
III.1.6	sistema anamórfico.....	51
III.2	<u>SISTEMA DE ADQUISICION</u>	52
III.2.1	Detector CCD.....	52
III.2.2	Tubo intensificador ICCD.....	53
III.2.3	Vídeo-cassetera.....	53
III.3	TABLAS DE LAS CARACTERISTICAS DEL SISTEMA.....	55
	EXPERIMENTAL	

o CAPITULO IV MODELOS TEORICOS

IV.1	<u>ESTRELLAS EN ROTACION RAPIDA</u>	60
IV.1.1	Posición del eje de rotación.....	60
IV.1.2	Desplazamiento del fotocentro con respecto a λ	61
a)	Ensanchamiento del espectro debido al efecto Doppler.....	62
b)	Cálculo del desplazamiento del fotocentro.....	63
IV.1.3	Diámetro de la estrella en rotación rápida.....	64
IV.2	<u>ESTRELLAS BINARIAS</u>	73
IV.2.1	Desplazamiento del fotocentro con respecto a λ	74
IV.2.2	Separación entre las estrellas.....	76

o CONCLUSION.....84

APENDICE I

o	Transformadas de Fourier.....	87
---	-------------------------------	----

APENDICE II

o	Función de transferencia para tiempos de exposición cortos.....	88
---	---	----

APENDICE III

o	Interpretación de la interferometría "Speckle".....	90
---	---	----

APENDICE IV

o	Rejilla de difracción de escalón.....	92
---	---------------------------------------	----

APENDICE V

o	Estructura de un CCD.....	97
---	---------------------------	----

o BIBLIOGRAFIA.....103

INTRODUCCION

Uno de los grandes problemas en Astronomía Observacional en el visible es la degradación de las imágenes debido a la turbulencia atmosférica. La turbulencia hace que existan fluctuaciones aleatorias en el camino óptico de los rayos provenientes de la estrella, con lo cual, la imagen estelar ya no está dada por la figura de difracción de la apertura del telescopio, sino por una mancha extendida que varía de forma con el tiempo. Así pues, la turbulencia actúa como filtro espacial que deteriora la imagen y deja pasar únicamente las bajas frecuencias.

En el capítulo I, se resumen las características de la estructura de la atmósfera, así como de la formación de imágenes en el plano focal del telescopio, en presencia de turbulencia atmosférica.

En el capítulo II, se hará una somera descripción de algunos métodos interferométricos usados actualmente para recuperar la información perdida debido a la turbulencia (interferometría "speckle", interferometría Michelson e interferometría en el plano pupila (rotación de frente de onda)). Además se describirá la teoría de la interferometría "speckle" diferencial de la cual parte la idea de la realización de esta tesis.

En la interferometría "speckle" diferencial se estudia el desplazamiento entre los "speckles" de dos imágenes monocromáticas de una estrella. Este desplazamiento (2-3) corresponde al desplazamiento del fotocentro entre estas dos longitudes de onda el cual a su vez tiene que ver (modelos teóricos Cap. IV) con las características de la estrella. Lo importante de este método es que no depende de la turbulencia atmosférica y se pueden alcanzar resoluciones más chicas que el tamaño de un "speckle".

El desarrollo experimental de la teoría pudo hacerse posible gracias a la construcción de un interferómetro "speckle" diferencial ó "motigrafo", el cual se describe en el capítulo III. Con este aparato se podrá dispersar la luz proveniente de la estrella y obtener distintas imágenes estelares monocromáticas; entre cada una de ellas se notará un desplazamiento de los "speckles", menor que el mismo tamaño del "speckle" y que corresponde a un desplazamiento del fotocentro de la estrella entre cada longitud de onda. Para cuantificar con exactitud este desplazamiento, se calculará la fase del interespectro entre cada par de imágenes, obteniendo así, con una gran precisión, el desplazamiento, $c(\lambda)$, del fotocentro con respecto a la longitud de onda.

El trabajo principal de esta tesis consiste en relacionar $c(\lambda)$ con las características de la estrella, es decir encontrar los modelos, ó las expresiones que relacionen al parámetro físico $c(\lambda)$ con la posición del eje de rotación y el diámetro para estrellas en rotación rápida y para estrellas binarias con su separación.

CAPITULO I

TURBULENCIA ATMOSFERICA

I TURBULENCIA ATMOSFERICA

La atmósfera terrestre es un medio complejo ya que, además de su composición química complicada, sus parámetros principales: índice de refracción, temperatura, densidad, etc..., varían aleatoriamente en el tiempo.

Las fluctuaciones atmosféricas afectan severamente el módulo y la fase de la amplitud compleja de la onda proveniente de la estrella. Los efectos que se observan generalmente en el plano focal del telescopio, (fig.1) son : El **centelleo** que es una fluctuación de brillo y corresponde a una concentración de la energía del frente de onda, la **agitación** que corresponde a un cambio de ángulo del plano tangente al frente de onda, y la **dispersión** de la imagen que se debe a la pérdida de coherencia espacial sobre la pupila.

Quando el diámetro de un telescopio, D , es chico con respecto a r_0 (≈ 10 cm en el visible) (Ver inciso 1.2.2) se observa, sobre el plano focal del telescopio, una imagen que corresponde a la figura de difracción de Airy. Si en cambio D es mayor que r_0 la imagen, a largo tiempo de exposición ($t > t_c$, tiempo de "congelación" de la atmósfera), llega a ser una mancha de tamaño promedio λ/r_0 . Cuando el tiempo de exposición es corto ($t \leq t_c \approx 10$ ms en el visible) y se aumenta el diámetro D del telescopio, la imagen empieza a agrandarse y a quebrarse en pedazos cada vez más chicos llamados "speckles".

El resumen que se hizo en este primer capítulo, basado en el trabajo de Roddier (1981), sobre la estructura de la turbulencia atmosférica y sobre el proceso de formación de la imagen, es pues de gran importancia para interpretar los fenómenos observados en el plano focal del telescopio.

Del estudio del paso de la luz por la atmósfera turbulenta se deduce la "función de transferencia de la atmósfera", B_ψ (1.1.2), gracias a la cual se medirá la degradación de las imágenes en tiempos de exposición largos (1.2). Se calculará después el valor del parámetro de Fried, r_0 (1.2.2), que nos da el "grado de turbulencia" de la atmósfera ya que como se verá éste representa el diámetro de las áreas de coherencia de la onda perturbada sobre la pupila del telescopio.

1.1. ESTRUCTURA DE LA TURBULENCIA ATMOSFERICA.

1.1.1 CARACTERISTICAS

Para describir las modificaciones del frente de onda de una estrella, debido a la turbulencia, se tendrán que caracterizar el espectro de las fluctuaciones estudiadas, ϕ , así como la función de estructura de dichas fluctuaciones, D_ϕ . Con a estas dos funciones se deducirá la covarianza de la función de amplitud, B_ψ (inciso 1.1.3), la cual traduce el grado de coherencia de la onda en el plano de la pupila del telescopio.

En la atmósfera terrestre la temperatura varía con la altitud. La turbulencia hace que las masas de aire que se encuentran a una cierta temperatura se mezclen con otras a una temperatura distinta provocando inhomogeneidades en ciertas regiones.

La función de estructura de las fluctuaciones de temperatura se define como el valor promedio en el tiempo :

$$D_\theta(\rho) = \langle |\theta(r+\rho) - \theta(r)|^2 \rangle \quad (1-1)$$

En donde $\theta = T - \langle T \rangle$ es la temperatura y r y ρ son dos parametros espaciales.

Haciendo cálculos dimensionales (Roddier, 1981) y gracias a las analogías (Obukov, 1949; Yaglom, 1949) que existen entre las variaciones de velocidades estudiadas por Kolmogorov (1941) y las variaciones de temperatura en un medio turbulento, se obtiene que D_θ tiene la dependencia:

$$D_\theta(\rho) \approx C_\theta^2 \rho^{2/3} \quad (1-2)$$

C_θ es la constante de estructura de las fluctuaciones de temperatura, y ρ esta en el intervalo $l < \rho < L$ en donde l y L son las escalas internas y externas de la turbulencia.

De manera similar se encuentra que el espectro de las fluctuaciones está dado por:

$$\phi_{\theta}(k) = 0.033 C_{\theta}^2 k^{-11/3}$$

la función de estructura y el espectro de variaciones del índice de refracción están dados por:

$$D_n(\rho) = C_n^2 \rho^{2/3} \quad (1-3)$$

$$\phi_n(k) = 0.033 C_n^2 k^{-11/3} \quad (1-4)$$

en donde C_n es la constante de estructura de las fluctuaciones de temperatura.

Gracias a estas funciones se podrá describir con mayor facilidad el paso de la luz a través de la atmósfera y poder calcular la degradación de las imágenes.

I.1.2 DEGRADACION DE LAS IMAGENES POR LA TURBULENCIA.

EXPRESSION DE B_{ψ}

La propagación de la luz de una estrella a través de un medio turbulento produce varios efectos sobre su imagen. Para el estudio de estos efectos, se considera un medio turbulento de índice de refracción variable en el cual se supone que las fluctuaciones son procesos ergódicos y estacionarios.

Si se tiene una onda plana monocromática que llega a la capa de atmósfera turbulenta con una amplitud ψ igual a uno, y si se toma en cuenta, también, que la capa horizontal turbulenta, que se encuentra entre una altitud h y $h + \Delta h$, es homogénea y estable (Ver fig 1.2), al pasar por esta capa la amplitud de la onda estará dada por:

$$\psi_h(x) = \exp[i\phi(x)] \quad (1-5)$$

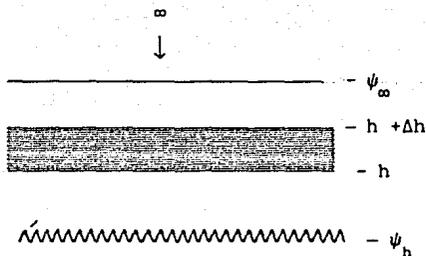


Fig.1.2) Perturbacion del frente de onda por una capa turbulenta de espesor Δh

En donde $\phi(x)$ es el cambio de fase producido por la capa turbulenta:

$$\phi(x) = k \int_h^{h+\Delta h} n(x,z) dz \quad (1-6)$$

siendo k el vector de onda dado por: $k=2\pi/\lambda$ y x, z variables espaciales.

La covarianza de la amplitud de la onda está dada por:

$$B_\psi(\xi) = \langle \psi_h(x) \psi_h^*(x+\xi) \rangle, \quad (1-7)$$

donde ξ es una variable espacial

Reemplazando el valor de ψ_h se obtiene:

$$B_\psi(\xi) = \langle \exp(i\phi(x) - i\phi(x+\xi)) \rangle \quad (1-8)$$

Suponiendo que la distribución de fase es Gaussiana :

$$B_\psi(\xi) = \exp \left[\frac{-1}{2} \langle |\phi(x) - \phi(x+\xi)|^2 \rangle \right]$$

considerando que $D_\phi = \langle |\phi(x) - \phi(x+\xi)|^2 \rangle$, llamada función de estructura de la fase, la covarianza está dada por:

$$B_\psi(\xi) = \exp \left[\frac{-1}{2} D_\phi(\xi) \right] \quad (1-9)$$

Así pues, bastará conocer el valor de la función de estructura de la fase D_ϕ para conocer la covarianza, B_ψ de la función de la amplitud compleja ψ , y saber así cual es el grado de coherencia de la atmósfera.

1.1.3 DISTRIBUCION ALEATORIA DE LA FASE

La expresión dada por Roddier (1981) para la función de estructura de la fase es:

$$D_{\phi}(\xi) = 2.91 k^2 C_n^2 \Delta h \xi^{5/3} \quad (1-10)$$

Por lo tanto reemplazando en (1-9), la covarianza de la fase estará dada por:

$$B_{\psi_h}(\xi) = \exp\left[-\frac{1}{2} (2.91 k^2 C_n^2 \Delta h \xi^{5/3})\right] \quad (1-11)$$

Al pasar de la altura h al suelo ($h=0$) la amplitud $\psi_0(x)$ estará dada por la difracción de Fresnel (Roddier, 1981), sin que varíe su covarianza, la función B_{ψ} :

$$B_{\psi_0} = B_{\psi_h}$$

Así, cuando la luz tiene que atravesar varias capas turbulentas el resultado (1-11) se generaliza y la covarianza de la amplitud es:

$$B_{\psi_0}(\xi) = \exp -1/2 \left[2.91 k^2 (\cos\gamma)^{-1} \xi^{5/3} \int C_n^2(h) dh \right] \quad (1-12)$$

en donde γ es el ángulo entre el Cenit y la dirección de observación.

El valor teórico de B_{ψ} , traduce la distribución aleatoria de la fase de la amplitud compleja, y gracias a éste se podrá definir una longitud de correlación de la atmósfera, a la cual Fried (1966) llama r_0 , y que permite saber cual es la medida de las áreas de coherencia del frente de onda de la estrella, sobre la pupila del telescopio.

1.2 IMAGENES A LARGO TIEMPO DE EXPOSICION

Como se demostró anteriormente, la imagen de la estrella se degrada debido a la propagación de la luz por la atmósfera (Roddiier,1981) ; cuando se observa en un tiempo de exposición t mayor que t_c , tiempo en el que la atmósfera está 'congelada', ya no se observa la figura de difracción de la pupila del telescopio, que sería teóricamente un disco de Airy, sino una mancha extendida de diámetro angular d que varía según el grado de turbulencia de la atmósfera :

$$d = 1.22 \lambda / r_0$$

En donde λ es la longitud de onda y r_0 es el parámetro de Fried y corresponde al diámetro de la pupila del telescopio que en ausencia de turbulencia atmosférica nos daría la misma resolución que un telescopio de diámetro infinito con turbulencia.

Así pues, en el caso en el que el diámetro D del telescopio es mayor que r_0 (1.2.2) la resolución del telescopio no dependerá más que de la turbulencia y se perderán los detalles más finos de la imagen, ya que la frecuencia de corte del sistema será mucho menor ($f'_c = r_0/\lambda$) que sin turbulencia ($f_c = D/\lambda$).

1.2.1 FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL TELESCOPIO EN PRESENCIA DE TURBULENCIA

Consideremos que se tiene isoplanetismo, es decir, que todos los puntos del objeto están afectados exactamente de la misma manera por la turbulencia y que una translación del objeto corresponde a una translación proporcional en la imagen.

Sea $O(\alpha)$ la repartición de intensidad de la estrella en dirección de observación α e $I(\alpha)$ la intensidad observada también en la misma dirección. Como la luz que proviene de la estrella es incoherente, la intensidad en un largo tiempo de exposición ($t \geq t_c \approx 10$ ms) puede escribirse como el promedio sobre el tiempo $\langle I(\alpha) \rangle$ dado por (Goodman,1973):

$$\langle I(\alpha) \rangle = O(\alpha) \cdot \langle S(\alpha) \rangle \quad (2-1)$$

En donde $S(\alpha)$ es la respuesta impulsional del telescopio en presencia de la turbulencia atmosférica.

Haciendo la transformada de Fourier de la ecuación (2-1), se obtiene:

$$\langle \tilde{I}(f) \rangle = \tilde{O}(f) \cdot \langle \tilde{S}(f) \rangle \quad (2-2)$$

Se tomará:

$$\tilde{I}(f) = \int I(\alpha) \exp[-2i\pi \alpha \cdot f] d\alpha$$

$$\tilde{O}(f) = \int O(\alpha) \exp[-2i\pi \alpha \cdot f] d\alpha \quad \langle \tilde{S}(f) \rangle = \int \langle S(\alpha) \rangle \exp[-2i\pi \alpha \cdot f] d\alpha$$

En donde \tilde{S} es la función de transferencia del telescopio.

Sea ψ la amplitud compleja de la onda sobre la pupila del telescopio, la respuesta impulsional del telescopio será proporcional a (Goodman, 1973):

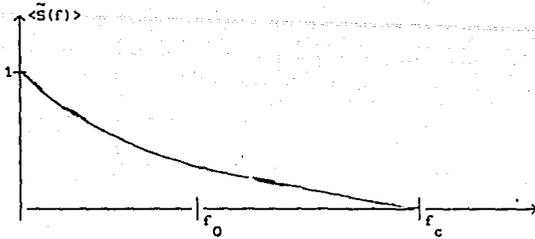
$$\tilde{S}(f) \propto \int \psi(u) \psi(f-u) P(u) P(f-u) du \quad (2-4)$$

En donde P es la función pupila del telescopio y $u = x/\lambda$ es el vector de posición sobre la pupila. (Se supone que la función pupila es real)

Sea \mathcal{S} el área de la pupila del telescopio en ausencia de turbulencia atmosférica, entonces la función de transferencia está dada por :

$$\tilde{S}(f) = (1/\mathcal{S}) \int P(u) P(f-u) du = T(f) \quad (2-5)$$

Esta función se anula (Fig.1.2) en la frecuencia de corte $f_c = D/\lambda$



Función de transferencia de un telescopio sin aberraciones
en ausencia de turbulencia atmosférica
Fig.1.2

En presencia de turbulencia atmosférica la función de transferencia a largo tiempo de exposición esta dada por:

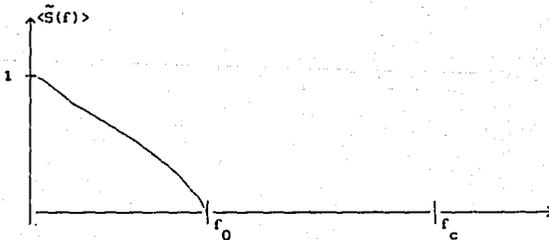
$$\langle \tilde{S}(f) \rangle = (1/\mathcal{L}) \int \langle \psi^*(u) \psi(f-u) \rangle P(u) P(f-u) du \quad (2-6)$$

El término $\langle \psi^*(u) \psi(f-u) \rangle$ no es más que la covarianza B_ψ de la amplitud compleja que ya se calculó:

$$\langle \tilde{S}(f) \rangle = (1/\mathcal{L}) \int B_\psi(f) P(u) P(f-u) du.$$

$$\langle \tilde{S}(f) \rangle = B_\psi(f) T(f) \quad (2-7)$$

Limitándose al caso para el que $D > r_0$, la " función de transferencia de la atmósfera ", B_ψ , va a jugar el papel de filtro espacial haciendo que la imagen pierda todas las frecuencias más grandes que $f_0 = r_0/\lambda$ (Fig. 1.3). (Roddier, 1981)



Función de transferencia de un telescopio sin aberraciones
en presencia de turbulencia atmosférica
Fig.1.3

1.2.2 RESOLUCION LIMITE DEL TELESCOPIO

El estudio de la resolución límite de un telescopio en presencia de turbulencia atmosférica fue hecho por Fried (1966), quién calcula el diámetro r_0 de la pupila del telescopio para la cual en ausencia de turbulencia atmosférica nos daría la misma resolución, \mathcal{R} , que un telescopio de diámetro infinito con turbulencia.

La covarianza de la amplitud compleja de la onda para tener una resolución \mathcal{R} , está dada (Roddier, 1981) por:

$$\Rightarrow B_{\psi} = \exp\left[-3.44 (f/f_0)^{5/3}\right] \quad (2-8)$$

en donde $f_0 = r_0/\lambda$

El valor teórico de r_0 se encuentra reemplazando (2-8) en (1-14):

$$r_0 = \left[0.423 k^2 (\cos \gamma)^{-1} \int C_n^2(h) dh\right]^{-3/5} \quad (2-9)$$

De esta ecuación se encuentra que r_0 depende de la longitud de onda según:

$$r_0 \propto \lambda^{6/5}$$

relación de proporcionalidad que fué verificada experimentalmente por (Boyd, 1978) y (Selby, 1979).

Resumiendo estos resultados, la resolución de las imágenes en presencia de turbulencia atmosférica estará limitada por el telescopio si $D < r_0$ ó por la atmósfera si $D > r_0$. Para el visible $r_0 \approx 10\text{cm}$ y como en general se tratará de utilizar telescopios de diámetro $D > r_0$, las imágenes obtenidas están degradadas por la turbulencia atmosférica.

Con el fin de reducir estos problemas de degradación de la imagen, se desarrollan, paralelamente al estudio de la atmósfera, técnicas interferométricas como las que se estudiarán en el capítulo siguiente.

CAPITULO II

METODOS INTERFEROMETRICOS

II METODOS INTERFEROMETRICOS

En este capítulo se hará una recapitulación de los métodos interferométricos más usados actualmente.

Se discutirá primero, el método "speckle" (II.1); Labeyrie (1970) es el primero que propone una teoría con la cual se recupera toda la información hasta la frecuencia de corte del telescopio; esto lo hace tomando una gran cantidad de imágenes a corto tiempo de exposición (<10ms) y estudiando las formas de las pequeñas motas, "speckles", que se forman sobre éstas. Aunque las resoluciones que se encuentran son muy buenas una gran desventaja de este método es que la función de transferencia del telescopio se encuentra atenuada por un factor, debido a la "redundancia de la pupila" (apéndice III). También existen otros métodos como la interferometría de Michelson en el plano imagen, que se basa en la síntesis de apertura de uno o más telescopios (II.2.1) ó la interferometría de rotación de frente de onda (II.2.2) que estudia la interferencia, en el plano pupila, de dos imágenes superpuestas de la ó las pupilas de uno o dos telescopios, una transformada geoméricamente con respecto a la otra.

Finalmente, se describirá la teoría de la interferometría "speckle" diferencial (II.3) en la cual se estudia el desplazamiento de los "speckles" entre dos imágenes monocromáticas de la estrella. Este método no depende de las condiciones de observación y se obtienen resultados con una gran resolución espacial, ya que se pueden hacer mediciones más allá de la frecuencia de corte del telescopio.

II.1 IMAGENES A CORTO TIEMPO DE EXPOSICION, INTERFEROMETRIA SPECKLE

Cuando se observa una estrella con un tiempo de exposición más corto que el tiempo t_c ($t \leq t_c \approx 10$ ms) de "congelación" de la atmósfera, la imagen observada sobre el foco del telescopio, empieza a fragmentarse hasta llegar a verse como una repartición aleatoria de estructuras granulares finas llamadas "speckles" (Fig. 2.1 y 2.2), por analogía al fenómeno que se observa en las imágenes de los objetos cuando son alumbrados por una fuente de luz muy coherente (un laser por ejemplo).

Al llegar a la pupila del telescopio, el frente de onda proveniente de la estrella, no es coherente más que en ciertas áreas de diámetro r_0 ($r_0 \approx 10$ cm). Cada par de áreas de coherencia funciona como un par de hoyos de Young, dando lugar a franjas de interferencia sobre el plano focal del telescopio. Como todas estas áreas están repartidas aleatoriamente sobre la pupila, en el plano focal, se verán "motas" ó "speckles" que son producto de la intersección de franjas de interferencia con distintas inclinaciones y fases (apéndice III).

Los "speckles" son de forma circular (Dainty, 1984), se mueven aleatoriamente en el tiempo y su tamaño promedio esta dado por:

$$d = 1.27 \lambda / D$$

En donde D es el diámetro del telescopio y λ la longitud de onda. Como se puede notar, el tamaño de los "speckles" corresponde al patrón de difracción de la apertura del telescopio por lo que contiene información espacial hasta el límite de difracción del telescopio.

Labeyrie (1970) es el primero que utiliza la información contenida en los speckles para llegar hasta la frecuencia de corte del telescopio $f_c = D/\lambda$; esto lo logra calculando la repartición espectral de las fluctuaciones espaciales de la luz en la imagen, es decir, haciendo el promedio de la densidad espectral espacial de la imagen $\langle |\tilde{I}(f)|^2 \rangle$ sobre una gran cantidad de imágenes tomadas a corto tiempo de exposición.

A)



B)



Fig.2.1) Imágenes de estrellas a tiempo de exposición corto
 a) Resueltas b) no resueltas

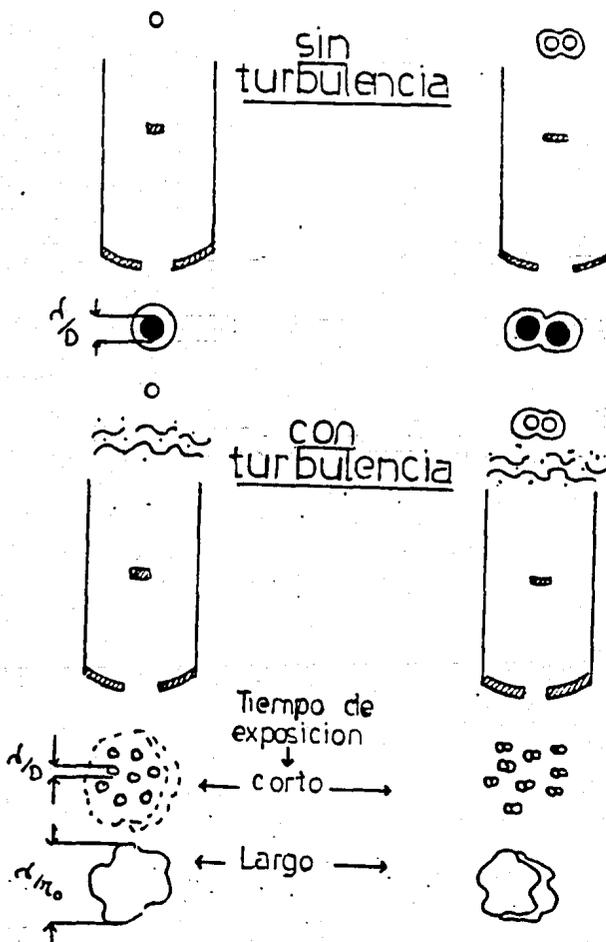


Fig.2.2) Efecto de la turbulencia en la formación de imágenes para una estrella en rotación rápida (izquierda), una binaria (derecha) (Petrov,1981)

II.1.1 FUNCION DE TRANSFERENCIA

Cuando se tiene la condición de isoplanetismo, es decir, cuando cualquier punto del objeto está afectado de la misma manera por la turbulencia, y tomando en cuenta que la luz de la estrella es incoherente, la relación entre la imagen y el objeto puede escribirse como (Goodman, 1973):

$$I(\alpha) = O(\alpha) \cdot S(\alpha) \quad (1-1)$$

En donde $I(\alpha)$ es la repartición de intensidad en la imagen, en la dirección α , $O(\alpha)$ la repartición de energía en el objeto y $S(\alpha)$ la respuesta impulsional del telescopio en presencia de turbulencia atmosférica.

Haciendo la transformada de Fourier directa de la ecuación (1-1), y el promedio de los módulos cuadrados (ya que $\langle I(f) \neq 0 \rangle$) de una gran cantidad de imágenes tomadas con un tiempo de exposición corto, se obtiene:

$$\langle |\tilde{I}(f)|^2 \rangle = |\tilde{O}(f)|^2 \langle |\tilde{S}(f)|^2 \rangle \quad (1-2)$$

De la fórmula (2-6) (Sec I.2) la función de transferencia es:

$$\tilde{S}(f) = (1/\mathcal{P}) \int \psi^*(u) \psi(u-f) P(u) P(u-f) du$$

Elevando al cuadrado y promediando:

$$\langle |\tilde{S}(f)|^2 \rangle = \mathcal{P}^{-2} \iint \langle \psi^*(u) \psi(u-f) \psi(u') \psi(u'-f) \rangle P(u) P(u-f) P(u') P(u'-f) du du' \quad (1-3)$$

Esta expresión resulta difícil de calcular si no se hacen antes algunas suposiciones.

o Cuando $f > f_0 = r/\lambda$ entonces $\psi(u)$ y $\psi(u-f)$ no están correlacionados por lo que el momento de segundo orden $B_{\psi} = \exp\{-3.44 [f/f_0]^{5/3}\} \cong 0$

Haciendo el cálculo de la función de transferencia, $\langle |\tilde{S}(f)|^2 \rangle$, para tiempos de exposición cortos se encuentra (Ver apéndice II):

$$\langle |\tilde{S}(f)|^2 \rangle = \frac{T(f)}{N} \quad (1-4)$$

Por lo que la función de transferencia en altas frecuencias y en presencia de turbulencia atmosférica es igual a la función de transferencia del telescopio sin turbulencia, $T(f)$, dividida entre el número de speckles en la imagen, N . El número de speckles está a su vez dado por el cociente de \mathcal{A} área total de la pupila, entre σ área de coherencia de la onda sobre la pupila

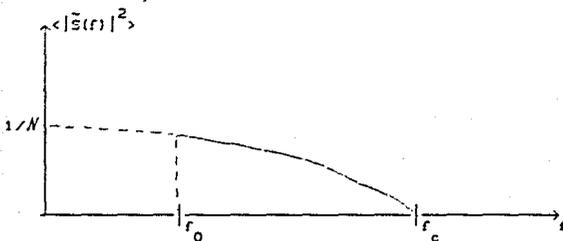


Fig.2.3) Función de transferencia para frecuencias grandes

Si f no es más grande que f_0 se utilizan hipótesis suplementarias para poder calcular el momento de cuarto orden.

o Modelo Gaussiano ó normal

Cuando la turbulencia está igualmente repartida entre dos alturas se puede considerar a la amplitud de la onda compleja ψ como una variable aleatoria Gaussiana y así expresar el momento de cuarto orden como (Dainty, 1984) :

$$\begin{aligned} \langle \psi(u)\psi^*(u-f)\psi^*(u')\psi(u'-f) \rangle &= \langle \psi(u)\psi^*(u-f) \rangle \langle \psi^*(u')\psi(u'-f) \rangle \\ &\quad + \langle \psi(u)\psi^*(u') \rangle \langle \psi^*(u-f)\psi(u'-f) \rangle \\ &= B_{\psi}^2(f) + B_{\psi}^2(u-u') \end{aligned}$$

del apéndice II:

$$\langle |\tilde{S}(f)|^2 \rangle = B_{\psi}^2(f) T^2(f) + T(f)/N$$

de donde:

$$\langle |\tilde{S}(f)|^2 \rangle = |\tilde{S}(f)|^2 + T(f)/N \quad (1-5)$$

Recuperandose así toda la información hasta la frecuencia de corte.

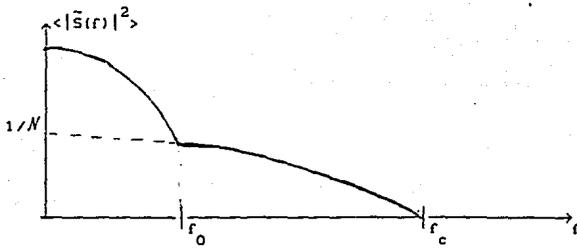


Fig.2.4) Funcion de transferencia para corto tiempo de exposicion

o Modelo Log-Normal

La amplitud compleja de la onda proveniente de la estrella $\psi(r)$ tiene módulo constante cuando las capas turbulentas están cercanas al suelo, por lo que la fase ϕ de $\psi(r) = \exp i\phi(r)$ es una variable aleatoria Gaussiana centrada. El momento de cuarto orden es difícil de calcular analíticamente pero a bajas frecuencias se tiene (Korff, 1973):

$$\langle |\tilde{S}(f)|^2 \rangle \approx T^2(f) \exp \left[-6.88 (f/f_0)^{5/3} (1 - (f/f_c)^{1/3}) \right]$$

Cuando las capas turbulentas no son bajas estos dos modelos no son válidos, ya que debemos tomar en cuenta el centelleo de las estrellas.

II.1.2 MODULO DE LA AMPLITUD COMPLEJA DE LA ONDA

Si las capas turbulentas son estacionarias y se tiene la condición de isoplanetismo, la densidad espectral de la respuesta impulsional $\langle |\tilde{S}(f)|^2 \rangle$ se obtiene observando un objeto puntual en una dirección cualquiera, cercana a la del objeto que se va a observar, para así asegurar el mismo grado de coherencia en la atmósfera.

Si se tiene $\langle |\tilde{S}(f)|^2 \rangle$ con buena señal a ruido, se podrá determinar el módulo de la intensidad compleja de la estrella (1-2)

$$|O(f)|^2 = \langle |\tilde{I}(f)|^2 \rangle / \langle |\tilde{S}(f)|^2 \rangle \quad (1-6)$$

Gracias a esto se obtuvo en el visible (Labeyrie, 1970) una resolución de 20 mili seg arco en un telescopio de 5m.

Los estudios en el infrarojo son todavía más alentadores (Chelli, 1979), ya que el diámetro de las áreas de coherencia, aumenta con la longitud de onda.

II.2 INTERFEROMETRIA ENTRE DOS PUPILAS

La interferometría de Michelson, que se resumirá en el inciso II.2.1, fué uno de los primeros métodos interferométricos para la medición angular de objetos astronómicos en altas frecuencias. En sus primeros experimentos Michelson (1290) hace interferir la luz de la estrella gracias a una máscara oscura, puesta sobre la pupila de un telescopio, con dos perforaciones distantes de una longitud d , y analiza los patrones obtenidos en el plano de la imagen. Como la visibilidad de las franjas está ligada directamente al grado de coherencia entre las dos pupilas, se podrá deducir el espectro espacial del objeto a la frecuencia $f = d/\lambda$. Para ampliar las capacidades de esta técnica se utilizan dos ó más telescopios (Michelson, 1921) aumentando el número de frecuencias espaciales en las cuales se observa al objeto. Actualmente hay varios proyectos como el de Labeyrie en el CERGA (Centro de Estudios Regionales en Astrofísica) el cual utiliza dos telescopios de 1.5m (GIDT) para hacer interferencia "speckle" de tipo Michelson. Otra técnica que también se basa en la interferencia de la luz de la estrella por medio de la superposición parcial ó total de dos pupilas, es la rotación de frente de onda (inciso II.2.2). El análisis de las franjas se hace esta vez en el plano de la pupila del sistema y la gran ventaja de este método sobre la interferometría de Michelson es que la función de transferencia del sistema no depende de la turbulencia atmosférica.

II.2.1 INTERFEROMETRIA EN EL PLANO IMAGEN

Sean dos telescopios de diámetro d , separados por el vector f_1 y dirigidos hacia una estrella haciendo un ángulo α con respecto al horizonte (Fig.2.5).

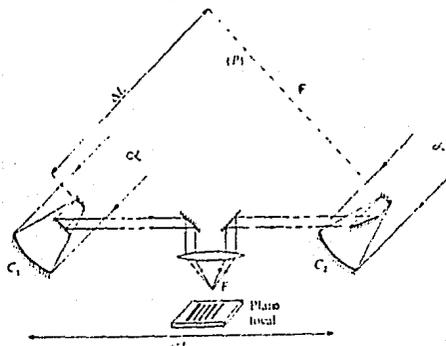


Fig 2.5) Interferometría Michelson con dos telescopios

Sea $\psi(u)$ la amplitud compleja de la onda al nivel de la primera apertura y $\psi(u-f)$ al nivel de la segunda apertura, la intensidad observada sobre el plano imagen del telescopio será proporcional a:

$$|\psi(u) + \psi(u-f)|^2 = |\psi(u)|^2 + |\psi(u-f)|^2 + 2\text{Re}\{\psi^*(u)\psi(u-f)\}. \quad (2-1)$$

Los primeros dos términos representan las intensidades en cada una de las pupilas y el tercero, es el término de interferencia, el cual es una medida del grado de coherencia de la atmósfera y permitirá calcular el módulo y la fase de la función de transferencia de la atmósfera; bastará encontrar el contraste y el movimiento de las franjas de interferencia para conocer el módulo y la fase de B_ψ .

Cuando las pupilas de entrada son bastante pequeñas ($d \ll r_0$) el sistema de franjas es coherente y se desplaza en bloque, aleatoriamente en el tiempo. En el caso $d > r_0$, la mancha que se observa mide λ/r_0 y las franjas se encuentran perturbadas por los "speckles". (Ver fig. 2.6)

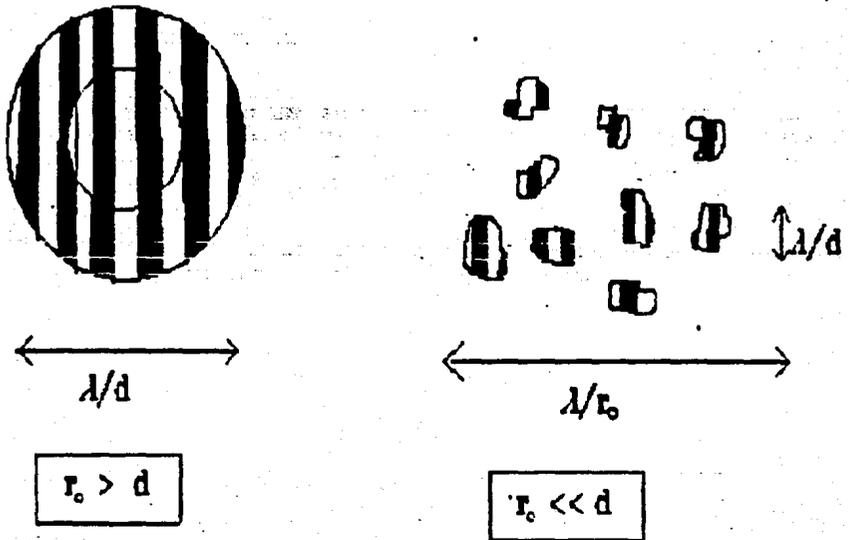


Fig 2.6) Imágenes sobre el plano focal del telescopio

a) Imágenes a largo tiempo de exposición

Para encontrar el diámetro angular (θ) de la estrella, bastará analizar la visibilidad de las franjas (que se mueven en bloque debido a la turbulencia), ya que cuando se observa un mínimo (el primero, por ejemplo) la distancia que separa a los dos telescopios estará dada por:

$$f = \frac{A \lambda}{\theta}$$

En donde A es una constante que depende de la repartición de energía de la estrella, λ la longitud de onda, y θ es el diámetro angular de la estrella.

De esta ecuación se puede obtener fácilmente la distancia angular θ :

$$\theta = \frac{A \lambda}{f}$$

b) Imágenes a corto tiempo de exposición.

Quando el objeto observado es brillante, los fotones son suficientes para que la medida del estado de coherencia sea posible en un tiempo τ , tal que la atmósfera no haya tenido tiempo de modificar la diferencia de fase instantánea entre los dos haces.

Si el objeto es débil, la señal a ruido en un tiempo τ es menor que uno y se tendrá que calcular el promedio de la densidad espectral de la respuesta impulsional sobre varias imágenes, a un tiempo de exposición corto (≤ 10 ms).

Tomando los mismos argumentos con los cuales se explicó la interferometría "speckle" se puede suponer ahora que solo se tiene un par de pupilas (los dos telescopios) separados por el vector f .

Por lo que el factor de atenuación será $N = 1$ y se obtendrá directamente el módulo de la repartición de energía del objeto $\{O(f_i)\}$ (Roddiér, 1981), eliminando completamente el efecto de la turbulencia.

II.2.2 INTERFEROMETRIA DE ROTACION DE FRENTE DE ONDA

La interferometría de rotación de frente de onda se basa en la superposición parcial ó total de dos imágenes coherentes de la pupila de un telescopio (ó para tener una mejor resolución, de las imágenes respectivas de las pupilas de dos telescopios).

En el área común de las imágenes sobrepuestas por el interferómetro, se observan franjas y la orientación y el esparcimiento de éstas está determinado por la orientación y esparcimiento de las dos imágenes de la ó las pupilas.

Se estudiará entonces, en el caso en el que se tienen dos telescopios, para cuales transformaciones geométricas de las imágenes de las pupilas se recuperan mejor las altas frecuencias del objeto. En este inciso se analizarán los casos en los que se hace una translación entre las dos pupilas, una reflexión y finalmente una rotación (Rodier, 1981).

o Translación:

Sea f_1 la separación entre dos telescopios y R_1, R_2 las transformaciones respectivas de la primera y segunda pupila, se toma a R_1 como una translación de un vector $-f_1/2$ y a R_2 como una translación del vector $f_1/2$. En este caso (Chelli, Mariotti, 1986) la intensidad estará dada por:

$$I(u) = 2I_0 \left[1 + V(f_1) \cos(2\pi u + \phi_0(f_1) + \Delta\phi') \right] \quad (2-3)$$

Por lo que sólo se transmite la frecuencia f_1 .

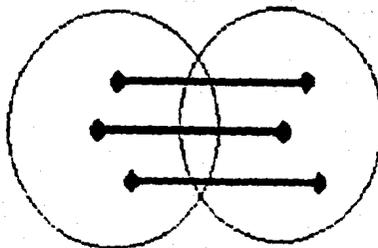


Fig.2.9) Translación de las pupilas

o Translación y reflexión

Aquí R_1 es una translación de vector $-f_1/2$ como en caso anterior y R_2 es una translación del vector $f_1/2$ seguida de una reflexión con respecto al eje perpendicular a la dirección de vector f_1 .

Calculando la intensidad como se hizo anteriormente observamos que el interferómetro sólo transmite las frecuencias del segmento $(f_1 - f_c, f_1 + f_c)$ en la dirección del vector f_1 , (Chelli, Mariotti, 1985), en donde f_c es la frecuencia de corte del telescopio .

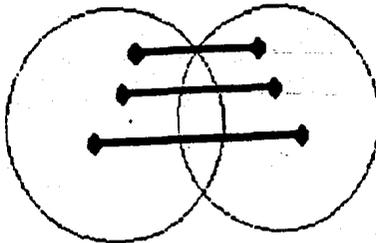


Fig.2.10) Reflexion de las pupilas.

o Translación más rotación (rotación de frente de onda)

Cuando R_1 es una translación del vector $-f_1/2$ y R_2 una translación del vector $f_1/2$, más una rotación de π grados alrededor del eje óptico del detector.

La intensidad sobre el detector está dada por:

$$I(u) = 2I_0 \left[1 + V(f_1 + 2u) \cos(2\pi u + \phi_0(f_1 + 2u) + \Delta\phi) \right] \quad (2-5)$$

En donde $|u| < D/2\lambda$.

El interferómetro transmite todas las frecuencias en un círculo de radio f_c centrado en la frecuencia f_1 .

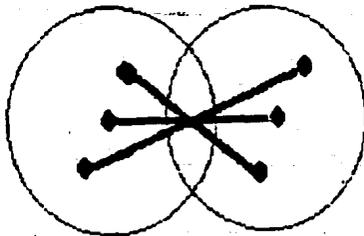


Fig.2.11) Rotacion de las pupilas

La rotación de frente de onda tiene varias ventajas sobre la interferometría en el plano imagen.

Una de ellas es que la visibilidad del objeto se obtiene directamente sobre el plano del detector; tomando la transformada de Fourier de los patrones de interferencia (2-11) se obtienen dos imágenes simétricas cada una con una intensidad dada por:

$$\tilde{I}(f) = V(f_1 + 2f) \exp\left[\phi_0(f_1 + 2f) + \Delta\phi\right] \quad (2-6)$$

Haciendo el promedio del módulo cuadrado de $\tilde{I}(u)$ sobre un número grande de patrones de interferencia y corrigiendo el "bias" debido al ruido de fotones se puede recuperar la visibilidad del objeto y por lo tanto el módulo de la amplitud compleja de la estrella $|O(z_1 - z_2)|$.

Y la segunda es que la función de transferencia del sistema está dada por:

$$\frac{|I(f)|}{|O(f)|} = 1$$

por lo que es insensible a cambios atmosféricos.

II.3 INTERFEROMETRIA SPECKLE DIFERENCIAL

Un método que nos permite hacer observaciones más allá de la frecuencia de corte del telescopio es la interferometría "speckle" diferencial (ISD). El holandés Beckers (1982) fué el primero que propuso este método para objetos astronómicos, describiendo la gran cantidad de aplicaciones, debido a su gran resolución tanto espacial como espectral.

Si se observa una estrella en rotación, la línea de absorción (ó emisión) de su espectro se ensancha por efecto Doppler (II.3.1). Cuando se observa la estrella en el lado que se aleja del observador (lado rojo) se nota un corrimiento del fotocentro hacia el lado azul; De la misma manera si la observamos en su lado azul (lado que se acerca) notaremos un corrimiento de su fotocentro hacia el rojo.

Este desplazamiento corresponde al movimiento de los "speckles" entre las imágenes monocromáticas roja y azul. Además, contiene información sobre $V \sin i$ (proyección del vector velocidad en el cielo, siendo i el ángulo que hace la estrella con la dirección del Cenit), y acerca del perfil de la línea de absorción y el diámetro de la estrella.

También, cuando se observa una estrella doble hay un desdoblamiento de la línea de absorción de su espectro ya sea porque las dos estrellas rotan con velocidades distintas, ó porque tienen un tipo espectral diferente. Según observemos sobre una línea u otra habrá un desplazamiento del fotocentro; este desplazamiento dependerá de la separación entre las dos estrellas.

En ambos casos, la interferometría "speckle" diferencial se basa en el cálculo de intercorrelación entre dos imágenes monocromáticas de la ó las estrellas (incisos II.3.1 y II.3.2) con el cual se podrá deducir el desplazamiento del fotocentro con respecto a la longitud de onda $c(\lambda)$.

Teniendo $c(\lambda)$ y conociendo el espectro del objeto, se podrán realizar modelos que relacionen estas dos cantidades con los parámetros físicos de la estrella. (Cap IV).

Se deducirán así con una gran precisión, la posición del eje de rotación y el tamaño angular de una estrella en rotación rápida, así como la separación de estrellas binarias.

La figura 2.12 representa esquemáticamente la teoría de la interferometría "speckle" diferencial; se tiene una estrella en donde F_1 y F_2 representan respectivamente el fotocentro de la estrella cuando se observa a la longitud de onda λ_1 y λ_2 . Después de que la luz atraviesa la atmósfera se observarán sobre el foco del telescopio pares de "speckles" correspondientes, a las dos longitudes de onda. Un sistema dispersor (el motógrafo) los separa y, gracias al cálculo del interespectro entre estas imágenes (II.3.1), se podrá calcular el desplazamiento entre los dos fotocentros F_1 y F_2 .

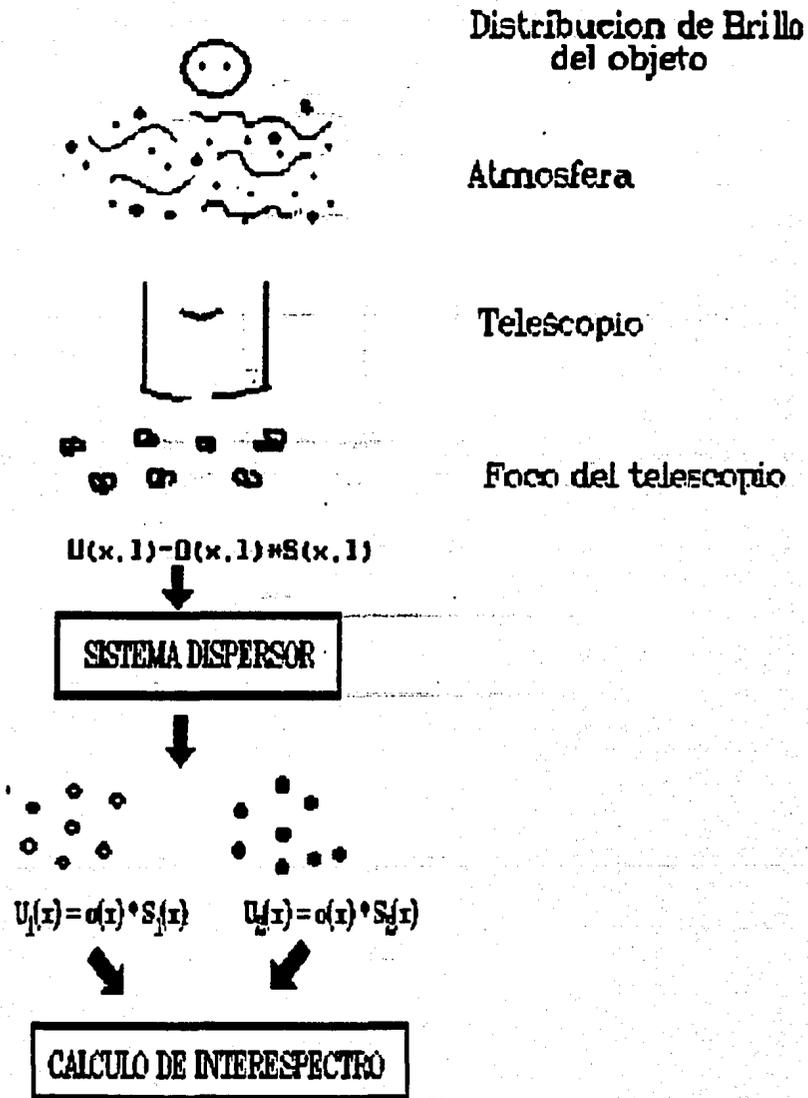


Fig.2.12) Interferometria speckle diferencial
(Petrov, 1981)

II.3.1 ANÁLISIS INTERESPECTRAL

La interferometría speckle diferencial se basa en el cálculo del interespectro (ó de la intercorrelación) de las distribuciones de intensidad, $I_1(\alpha)$ y $I_2(\alpha)$, a las longitudes de onda λ_1 y λ_2 en la posición angular α . Conociendo la fase del interespectro se podrá deducir el desplazamiento del fotocentro con respecto a la longitud de onda (Ver inciso II.3.2)

Si existe la condición de isoplanetismo, en luz incoherente se tiene:

$$I_1(\alpha) = O_1(\alpha) \cdot S(\alpha) \quad (3-1)$$

$$I_2(\alpha) = O_2(\alpha) \cdot S(\alpha) \quad (3-2)$$

En donde $O_1(\alpha)$ y $O_2(\alpha)$ son las reparticiones de intensidad del objeto a las longitudes de onda λ_1 y λ_2 , y $S(\alpha)$ la respuesta impulsional, que supondremos igual para las dos longitudes de onda en la dirección α .

Haciendo la transformada de Fourier de las ecuaciones (3-1) y (3-2) se obtiene:

$$\tilde{I}_1(f) = \tilde{O}_1(f) \cdot \tilde{S}(f) \quad i=1,2 \quad (3-3)$$

La autocorrelación ó interespectro de la señal, $D_{12}(f)$, se define como:

$$D_{12}(f) = \tilde{I}_1(f) \cdot \tilde{I}_2^*(f) \quad (3-4)$$

$$\Rightarrow D_{12}(f) = |\tilde{S}(f)|^2 \tilde{O}_1(f) \tilde{O}_2^*(f) = |\tilde{S}(f)|^2 W_{12}(f) \quad (3-5)$$

En donde W_{12} es el interespectro de $O_1(\alpha)$ y $O_2(\alpha)$ y su fase $\phi_{12}(f)$ (que está relacionada con el desplazamiento del fotocentro (II.3.2)), va a ser igual a la fase $\psi_{12}(f)$ de $D_{12}(f)$.

a) Efecto del ruido de fotones:

Sea n_1 el número de fotones detectados en la imagen 1 ($i=1,2$) debido al efecto cuántico de la radiación la intensidad luminosa estará dada por I'_1 :

$$I'_1(\alpha) = n_1 [I_1(\alpha) + B_1(\alpha)] \quad (3-6)$$

En donde $B_1(\alpha)$ es una variable aleatoria de valor medio nulo que representa el ruido de fotones, e I_1 el valor de la intensidad cuando no existe el ruido de fotones.

Haciendo la transformada de Fourier de (3-6):

$$\tilde{I}'_1(f) = n_1 [\tilde{I}_1(f) + \tilde{B}_1(f)] \quad (3-7)$$

El interespectro $A_{12}(f)$ de $I_1(f)$ e $I_2(f)$ estará entonces dado por:

$$\begin{aligned} A_{12}(f) &= n_1 n_2 [\tilde{I}_1(f) \tilde{I}_2^*(f) + \tilde{I}_1(f) \tilde{B}_2^*(f) + \tilde{I}_2^*(f) \tilde{B}_1(f) + \tilde{B}_1(f) \tilde{B}_2^*(f)] \\ &= n_1 n_2 [D_{12}(f) + P_{12}(f)] \end{aligned}$$

$$\text{en donde } P_{12}(f) = \tilde{I}_1^*(f) \tilde{B}_2^*(f) + \tilde{I}_2^*(f) \tilde{B}_1(f) + \tilde{B}_1(f) \tilde{B}_2^*(f)$$

La fase $\phi_{12}(f)$, de D_{12} , ya no va a ser la misma que $\psi_{12}(f)$, del interespectro A_{12} , ya que P_{12} es una variable aleatoria compleja.

Haciendo el promedio de $P_{12}(f)$ sobre varias imágenes se tiene que:

$$\langle P_{12}(f) \rangle = \langle \tilde{I}_1^*(f) \rangle \langle \tilde{B}_2^*(f) \rangle + \langle \tilde{I}_2^*(f) \rangle \langle \tilde{B}_1(f) \rangle + \langle \tilde{B}_1(f) \rangle \langle \tilde{B}_2^*(f) \rangle$$

Como el promedio de $B_1(f)$ y $B_2(f)$ es nulo:

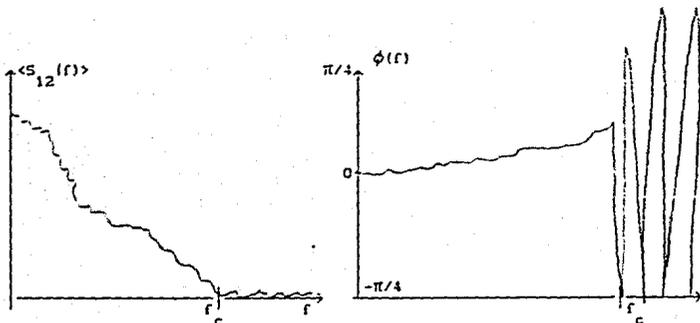
$$\langle P_{12}(f) \rangle = 0 \quad (3-8)$$

Y así:

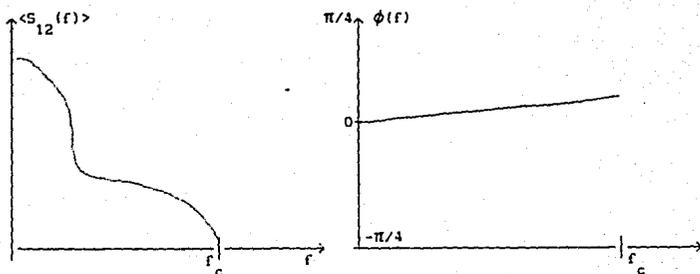
$$\langle A_{12}(f) \rangle = n_1 n_2 \langle D_{12}(f) \rangle = n_1 n_2 \langle |A(f)|^2 \rangle W_{12}(f) \quad (3-9)$$

Por lo que se puede estimar la fase de $W_{12}(f)$ sin error sistemático gracias al estimador $\langle A_{12}(f) \rangle$ de fase $\psi(f)$.

En las siguientes gráficas se muestra la diferencia que existe entre la función de transferencia y la fase del interespectro cuando existe el ruido de fotones para $A_{12}(f)$ (fig 2.15) y cuando se toma el promedio sobre varias imágenes $\langle A_{12}(f) \rangle$ (fig.2.16) ; La pendiente de la gráfica de la fase en función de la frecuencia es igual al desplazamiento del fotocentro entre estas dos longitudes de onda. (Ver II.3.2).



Funcion de transferencia y fase de $A_{12}(f)$
Fig.2.15



Funcion de transferencia y fase de $\langle A_{12}(f) \rangle$
Fig.2.16

II.3.2 ESTIMACION DEL FOTOCENTRO ENTRE DOS IMAGENES.

Supóngase que los focos de las distribuciones de intensidad $O_1(\alpha)$ y $O_2(\alpha)$ a las longitudes de onda λ_1 y λ_2 están separados uno del otro por ϵ .

Si se estudian estrellas no resueltas (es decir que son lo suficientemente chicas con respecto a la resolución límite del telescopio), se puede escribir a $O_1(\alpha)$ y $O_2(\alpha)$ como:

$$O_1(\alpha) = \delta(\alpha + \epsilon/2) \quad (3-10)$$

$$O_2(\alpha) = \delta(\alpha - \epsilon/2) \quad (3-11)$$

Haciendo la transformada de Fourier :

$$\tilde{O}_1(f) = \exp(-i\pi\epsilon f) \quad (3-12)$$

$$\tilde{O}_2(f) = \exp(+i\pi\epsilon f) \quad (3-13)$$

De la ecuacione (3-5) y utilizando (3-12) y (3-13) se calcula al interespectro:

$$D_{12}(f) = |\tilde{S}(f)|^2 \exp(-2i\pi\epsilon f) \quad (3-14)$$

Por lo que su fase estará dada por:

$$\psi_{12}(f) = 2\pi\epsilon f \quad (3-15)$$

Así, conociendo la fase del interespectro, D_{12} , se determinará el desplazamiento ϵ del fotocentro entre las dos longitudes de onda.

Como se vió anteriormente (3-9), si se introduce el ruido de fotones la estimación que se hará es la del interespectro $\langle A_{12}(f) \rangle$:

$$\langle A_{12}(f) \rangle = n_1 n_2 \langle |\tilde{S}(f)|^2 \rangle \exp(-2i\pi\epsilon f) \quad (3-16)$$

Así pues, calculando $\phi(f)$ y teniendo θ se podrá deducir fácilmente $\epsilon(\lambda)$. Luego, gracias a los modelos teóricos descritos en el capítulo IV, se podrá conocer las características de una estrella en rotación rápida así como las de las estrellas dobles.

Una de las grandes ventajas de la interferometría "speckle" diferencial es que nos permite medir desplazamientos más chicos que el tamaño de un "speckle". El experimento que nos muestra esta característica de la ISD está descrito por (Aime et al, 1983).

En el caso de un análisis unidimensional (3-18) se vió que la fase de $D_{12}(f)$ está dada por:

$$\phi_{12}(f) = 2\pi|c|\cos\theta f \quad (3-20)$$

En donde $\epsilon \cos \theta$ es el desplazamiento aparente en la dirección de análisis, θ es el ángulo entre la dirección de análisis y el eje de rotación de la estrella. De manera que haciendo variar θ se obtienen desplazamientos aparentes tan pequeños como se requiera.

En las observaciones hechas en el telescopio del Observatorio de Haute Provence en Enero de 1983 por Petrov, se obtuvieron los desplazamientos esperados con una resolución más chica que 0.5 miliseg de arco.

Gracias al "motógrafo" que se construyó en el Instituto de Astronomía se espera llegar a obtener una resolución de menos de 0.1ms de arco, analizando imágenes unidimensionales y monocromáticas de la estrella, por medio del sistema $(x-\lambda)$ que se describirá en el capítulo III.

CAPITULO III

SISTEMA EXPERIMENTAL

III INTERFEROMETRO SPECKLE DIFERENCIAL

Como se vió en el capítulo anterior, gracias a la interferometría "speckle" diferencial se puede calcular el desplazamiento del fotocentro de la estrella con respecto a la longitud de onda $\epsilon(\lambda)$ mediante el interespectro de dos imágenes monocromáticas (II.3.2). Se necesita entonces, que el sistema que se use para estudiar las distintas posiciones de los "speckles", sea un espectrógrafo o interferógrafo (ya que lo que vamos a analizar son figuras de interferencia ("speckles")), que separe las radiaciones de las distintas longitudes de onda de la estrella.

Existen varios tipos de interferómetros diferenciales de motas.

Uno de ellos, el que Beckers propuso, consiste en formar simultáneamente imágenes de dos dimensiones sobre el mismo detector. Con este método la razón señal a ruido (S-R) es la mejor que se puede obtener, pero existen varios problemas de calibración sobre el detector ya que es difícil estimar la separación de dos imágenes cuando no hay efecto diferencial y analizarlas cuando tienen niveles de luminosidad distintos.

En nuestro caso se utilizará el diseño $(x-\lambda)$, espectrógrafo en el cual se coloca a la entrada una rendija para analizar imágenes monocromáticas en una sola dimensión (Para analizarlas en otra dirección bastará rotar el instrumento sobre la platina del telescopio). Se perderá en señal a ruido con respecto al interferómetro en dos dimensiones pero la calibración espectral se podrá hacer directamente. Se tienen así anchos de banda mucho más chicos y se ganará un factor 1000 en resolución espectral.

Así pues, con este interferómetro se podrá realizar :

o Un análisis espacial de una dimensión (dirección x); sobre un cada columna del detector formaremos distintas imágenes monocromáticas de la estrella.

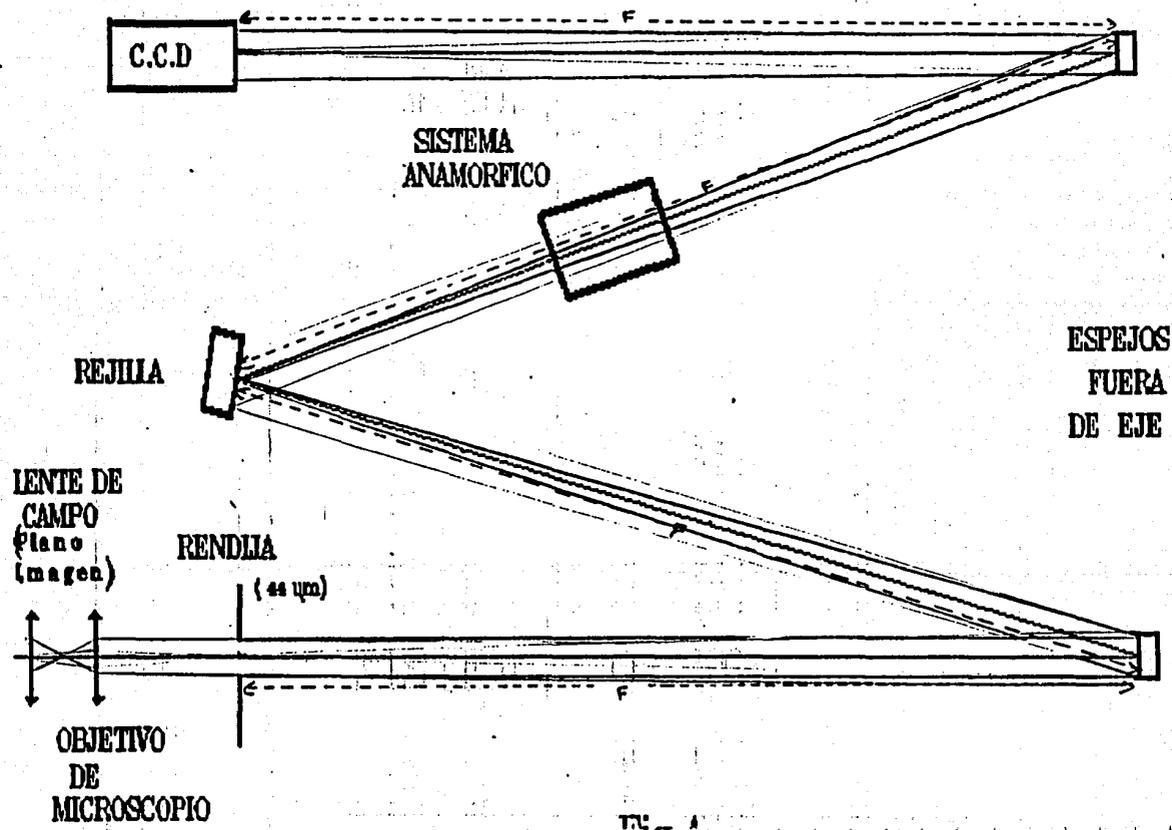
o Un análisis espectral (dirección λ), ya que gracias a la rejilla de difracción se obtiene el espectro de la estrella.

El motógrafo está formado por una parte óptica (inciso III.1) y una electrónica de adquisición de datos (III.2).

La parte óptica consiste en un sistema amplificador de imagen que forma las imágenes de los "speckles" de un tamaño adecuado sobre una rendija de análisis ; ésta es a su vez la entrada de un espectrografo tipo Ebert de alta resolución formado por dos espejos parabólicos fuera de eje y una rejilla de difracción holográfica de 2000 l/mm. El sistema va a dispersar la luz de los "speckles" sobre el detector, esperando llegar a una dispersión menor que $\Delta\lambda = 0.3 \text{ \AA}/\text{pixel}$.

El sistema electrónico de adquisición va a recibir la información, gracias a un CCD intensificado, y la va a transformar en señal video, teniendo así la posibilidad de almacenarla por medio de una video-grabadora para después ser procesada.

SISTEMA OPTICO



III.1 CARACTERISTICAS DEL SISTEMA OPTICO.

A la entrada del sistema se coloca una lente de campo y un objetivo de microscopio que forman el sistema amplificador. Son fáciles de cambiar, y permiten adaptar el resto del instrumento a cualquier telescopio, manteniendo la dispersión y resolución deseada. La imagen ampliada de la estrella (se quiere que las motas sean exactamente del tamaño de la rendija) se formará después sobre la rendija de análisis (fig.A).

La rendija se pone sobre el foco objeto del espejo (M_1) (espejo parabólico) para que el sistema forme su imagen sobre el detector. También se pone la imagen de la pupila del telescopio sobre la rejilla de difracción hacemos al sistema simétrico. Esto elimina la coma y la distorsión. La aberración esférica se elimina con la asferización de M_1 y M_2 y poniendo la rejilla para un haz colimado. El astigmatismo no se elimina, se aprovecha, ya que se quiere que la imagen de los speckles sea alargada.

Se escogerá cada una de las componentes ópticas para que, jugando con sus características, el espectrógrafo tenga una dispersión de 0.3 λ /pixel haciendo los cálculos para tres números f distintos del telescopio ($f/30$, $f/13.5$, $f/7.5$) (Tablas I, II y III al final del capítulo).

III.1.1 TELESCOPIO

Gracias al telescopio se recolecta la luz de ∞ y se forma la imagen de la estrella sobre su foco F' (Ver Fig I).

El que se utilizó para probar el espectrógrafo fué el de San Pedro Mártir en Baja California, su foco es de tipo Cassegrain y el diámetro de su espejo principal es de 2.1 metros.

Las características de este telescopio están dadas en la tabla III al final del capítulo.

III.1.2 REJILLA DE DIFRACCION

La rejilla que se usa en el experimento se grabó holográficamente, su forma es sinusoidal y funciona por reflexión; Debido a esto se le puede considerar como una rejilla de fase, es decir, afecta directamente la fase de la onda, a diferencia de la rejilla de amplitud, que por variaciones de amplitud introduce la diferencia de marcha que hace funcionar la rejilla. Para saber cual es la función de transferencia de este tipo de rejilla, se analizará geoméricamente (Ver Apéndice IV), lo que sucede con una rejilla similar (rejilla de escalón), con un ángulo de blaze α .

Las funciones que se utilizaron en este estudio ($W(x), \Pi(x), \text{sinc}(x) \dots$) están definidas con sus respectivas transformadas de Fourier en el apéndice I.

a) Cálculo de la función de transferencia para una rejilla sinusoidal

En nuestro caso se tiene una rejilla cuadrada sinusoidal cuya función pupila está dada por:

$$P(x, y) = \exp(j \frac{m}{2} \text{sen}(2\pi x/a)) \text{rect}(x/L) \text{rect}(y/L) \quad (1-1)$$

en donde, $\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

m es la amplitud de cresta a cresta de la función que nos da el cambio de fase del frente de onda, al reflejarse por la rejilla, a es el paso de la rejilla y L su ancho que es igual a su largo.

Una de las identidades de las funciones de Bessel esta dada por (Arfken, 1970) :

$$\exp\left[j \frac{m}{2} \text{sen}(2\pi x/a)\right] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{m}{2}\right) \exp(j2\pi q x/a)$$

en donde J_q es una función de Bessel de primera especie de orden q

Sobre cualquier plano $x = \text{cte}$, la rejilla se comporta como espejo y se dedujo geoméricamente (apendice IV) que la amplitud de una onda monocromática sobre el plano focal de una lente, puesta a su vez a una distancia f después de la rejilla de difracción, está dada por la transformada de Fourier de su función pupila :

$$o U(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \exp[-j2\pi(xu + yv)] dx dy \quad (1-2)$$

en donde:

$$u = (\text{sen}\theta + \text{sen}\theta_0) / \lambda$$

v es una coordenada perpendicular a u θ es el ángulo que hace el rayo incidente con la normal.

Tomando en cuenta (1-1) y la identidad de Bessel la amplitud de la onda estará dada por:

$$\begin{aligned} \rightarrow o U(u, v) &= L^2 \text{sinc}(Lu) \text{sinc}(Lv) \cdot \left[\sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q^2(m/2) \delta(u - q/a, v) \right] \\ \rightarrow o U(u, v) &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} L^2 J_q^2(m/2) \text{sinc}[L(u - q/a)] \text{sinc}(Lv) \end{aligned} \quad (1-3)$$

Así pues, la intensidad de la onda incidente de amplitud unitaria, sobre el plano focal de la lente, (que en realidad es el espejo M_2), se puede escribir como (Los términos cruzados pueden despreciarse):

$$o I(u, v) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} L^4 J_q^2(m/2) \text{sinc}^2[L(u - q/a)] \text{sinc}^2[Lv] \quad (1-4)$$

La "envolvente" de los espectros a distintos órdenes va a ser la función de Bessel $J_q^2(m/2)$, que depende del valor de m y varía según q . Su gráfica está representada en la fig 3.3.

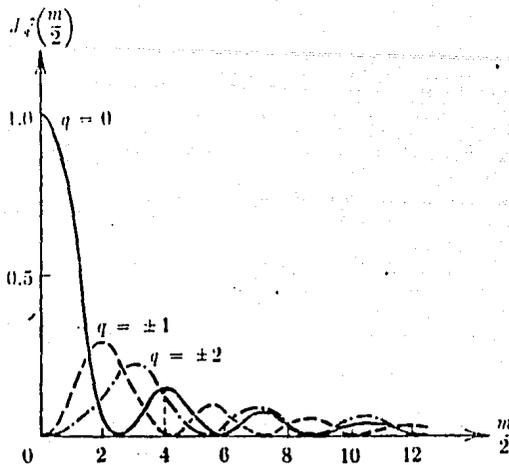


Fig.3.3) Funcion $J_q^2(m/2)$

Se compró una rejilla para la cual el orden 1 es privilegiado, o sea, que estamos trabajando en $m/2 = 2 \rightarrow m = 4$.

Así pues, gracias al análisis de $J_q^2(m/2)$ para $m=4$ y tomando en cuenta la expresión (1-4) se puede dibujar el aspecto de la gráfica de la intensidad de la onda en el plano $u=0$ y $v=0$ (Figuras 3-4 y 3-5).

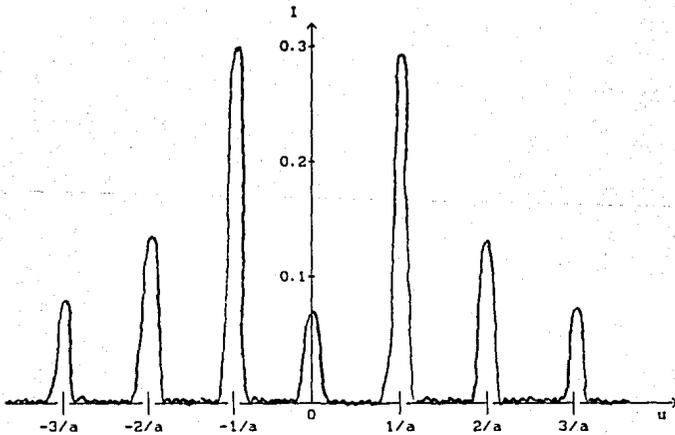


Fig.3.4) Funcion de la intensidad de una rejilla sinusoidal en el plano $v=0$

Y en el plano $u = 0$:

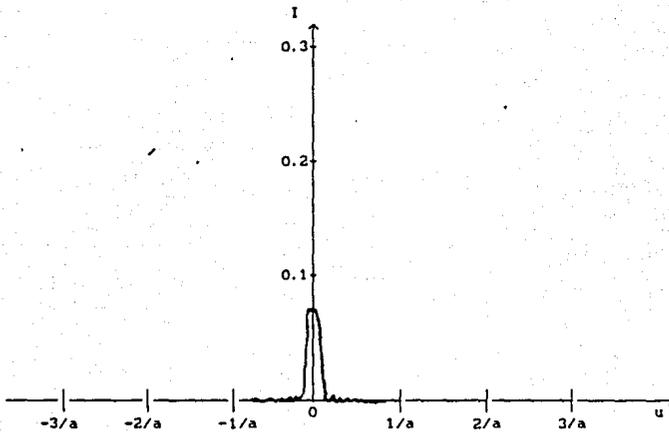


Fig.3.5) Función de la intensidad de una rejilla sinusoidal en el plano $u=0$.

b) Dispersión

Se sabe que⁸, al salir de la rejilla la dispersión angular en la dirección x , para dos longitudes de onda cercanas, λ y $\lambda + \Delta\lambda$, que inciden sobre la rejilla con un ángulo de incidencia θ_0 , es:

$$\rightarrow D_a = d\theta/d\lambda = q/(a \cos\theta) \quad (1-5)$$

donde θ es el ángulo de salida.

Como el detector está sobre el plano focal del espejo M_2 de distancia focal igual a f , la dispersión lineal sobre el detector estará dada por:

$$D = d\lambda/dx = d\lambda/d\theta \quad d\theta/dx \quad \text{como} \quad dx = f \quad d\theta$$

$$D = \frac{a \cos\theta}{q f} \quad (1-6)$$

c) Resolución

El poder de resolución PR de la rejilla se define como⁸:

$$PR = \lambda / \Delta\lambda_{\min}$$

en donde $\Delta\lambda_{\min}$ es el intervalo mínimo entre dos longitudes de onda para que el interferómetro pueda resolverlas.

$$\Rightarrow PR = qL / a = q N \quad (1-8)$$

en donde N es el número de líneas sobre la rejilla.

En el sistema óptico se utiliza una rejilla cuadrada de 20001/mm y de 25mm de lado. Si se ilumina adecuadamente, es decir, si el tamaño de la proyección de la pupila es de $\phi=25\text{mm}$, esto equivale a un poder de resolución de $PR=2000.25=50000$ es decir que se puede llegar a tener una dispersión de $\Delta\lambda = 6000/50000=0.12 \text{ \AA}$ o sea una dispersión menor que la que se requiere ($\Delta\lambda = 0.3 \text{ \AA}$).

III.1.3 LENTE

o Lente de campo

La lente de campo va a ayudar a formar la imagen de la pupila sobre la rejilla de difracción (Fig.A). Se quiere que la imagen de la pupila se encuentre ahí, en esa posición simétrica, para reducir las aberraciones como ya se explicó antes.

La lente de campo no provoca ningún cambio sobre la imagen de la estrella, ya que ésta se forma en la lente a menos de 1mm de su superficie de salida. De esta manera los defectos de la lente y el polvo no son enfocados en la rendija.

La distancia focal de la lente de campo se calcula en función de la distancia focal del objetivo de microscopio y del espejo M_1 , para que el tamaño de la pupila sobre la rejilla sea la requerida para la resolución de 20 000.

Las características de las lentes calculadas para distintos objetivos de microscopio de adaptación están dadas en la tabla I al final del capítulo.

o Objetivo del microscopio

El objetivo de microscopio conjuga la imagen de la estrella sobre la rendija, agrandádola.

Se quiere que el tamaño de un "speckle" de la estrella sea exactamente del tamaño de la rendija, o sea, de $44 \mu\text{m}$ (Ver 1-26).

Sea d' el tamaño del speckle, en el plano del telescopio:

$$d' = 1.22 \lambda F/D$$

en donde D es el diámetro del telescopio y F su distancia focal.

Para $f/30$ en el visible ($\lambda \approx 5000$):

$$d' = 18.3 \mu\text{m}.$$

Sea G el factor de amplificación del objetivo de microscopio y d el tamaño del speckle después de ser conjugado por el microscopio :

$$d = Gd'$$

Como se quiere $d = 44 \mu\text{m}$, entonces la amplificación G deberá de ser igual a:

$$G \approx 2.5$$

Los resultados de los cálculos del factor de amplificación para otros números f del telescopio, están dados en la tabla I.

3.1.4 Espejos

Los espejos del sistema son parabólicos, fuera de eje para evitar así la aberración esférica. También forman un conjunto simétrico por lo que la aberración de coma es nula.

El sistema óptico del espectrografo es afocal y $f_1 = f_2 = f$.

La dispersión lineal de la rejilla de difracción esta dada por (1-6):

por lo que:

$$f = \frac{a \cos \theta}{q(d\lambda/dx)} \quad (1-9)$$

Por ejemplo, si se quiere que la dispersión lineal sea de: $d\lambda/dx = 0.3$ Å/pixel, la distancia máxima requerida estará dada por:

$$\Rightarrow f = 733.3 \text{ mm} \approx 734 \text{ mm}$$

III.1.5 Rendija

La rendija va a limitar el análisis espacial en una dimensión y también va a jugar un papel importante en la resolución espectral

Sea $\Pi(x/\Delta x)$ la función pupila de la rendija, con Δx ancho de esta (se considera $\Delta y \approx 0$), la amplitud a la salida del espectrógrafo está dada (en la dirección x) por (Bousquet, 1968):

$$A(x) = \Pi(x/\Delta x) \cdot D(x) \quad (1-10)$$

en donde $D(x)$ es la figura de difracción que se obtiene sobre el plano focal de la rejilla. Esta figura tiene un ancho d' dado por:

$$d' = f\lambda/P \quad (1-11)$$

donde f es la distancia focal de los espejos y P es el ancho del haz sobre la rejilla.

La luminosidad reducida $\mathcal{L}/\mathcal{L}_0$ varía proporcionalmente a $A(x)/A_0(x)$ y la resolución reducida $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$ como d'/d . Es decir, que mientras más grande sea el ancho del haz (P), más grande será la resolución (con \mathcal{R}_0 y \mathcal{L}_0 resolución y luminosidad respectivas, cuando Δx tiende a infinito).

Los valores de $\mathcal{L}/\mathcal{L}_0$ Y $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$ varían inversamente, por lo que una medida óptima para el tamaño Δx de la rendija está dada cuando el producto $(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0)(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)$ sea máximo.

Haciendo las gráficas de estas dos cantidades (Bousquet, 1968) , vemos que esto se cumple cuando :

$$\Delta x \cong d' = \lambda f/L \quad (1-12)$$

En donde L es la longitud del haz y f la distancia focal del segundo espejo parabólico.

De la formula del' poder de resolución de la rejilla (1-8) se puede deducir el ancho L para el cual se tenga una dispersión de 0.3 Å. Y de esta maner se encuentra que para estar en las condiciones óptimas :

$$\Delta x = d' = 44 \mu\text{m} \quad (1-13)$$

El ancho de la rendija deberá ser exactamente un pixel fisico, es decir, de 44 μm .

3.1.6 Sistema anamórfico

Los pixeles del detector representan los intervalos de muestreo de cada imagen monocromática de la estrella. Para que una imagen pueda ser completamente reconstruida, las muestras que se toman deberán tener un cierto tamaño con respecto al tamaño de la imagen.

El criterio de Shannon (Born y Wolf, 1980) nos dice que para muestrear correctamente, las frecuencias espaciales más grandes de la imagen (las frecuencias de los speckles) no deben intercalarse, por lo que las frecuencias de muestreo deberán ser más grandes que las frecuencias de los speckles, o sea que hay que muestrear un speckle al menos por dos pixeles .

El sistema afocal de dos lentes cilindricas se utiliza con este proposito, , es decir, que deja sin cambio alguno la imagen en una dirección (λ) pero modifica la dirección perpendicular (x).

Las lentes se colocan entre la rejilla y el segundo espejo, en donde el haz de luz está colimado (Ver fig.A).

Si d es el tamaño del objeto y f_1 , f_2 las distancias focales de la primera y segunda lentes. La elongación en la dirección x será de $G = 2.5$.

$$G = f_1/f_2$$

Si se toma $f_1 = 120 \text{ mm}$

$$\Rightarrow f_2 = 40 \text{ mm}.$$

III.2 SISTEMA DE ADQUISICION

Gracias al sistema óptico se han obtenido varias imágenes monocromáticas de la estrella, con las características que se requieren para obtener la resolución y dispersión deseada.

Ahora hará falta un sistema receptor que reciba los fotones y nos dé una señal de salida, fácil de estudiar para digitalizarla después gracias a algunos métodos de tratamiento de imágenes.

El detector que nosotros utilizaremos es un C.C.D. que se acoplará a un intensificador de imagen para amplificar la señal y hacer el barrido de lectura (Tipo de televisión estándar R-170) (Las imágenes se obtienen con tiempos de exposición de aproximadamente 16.6ms).

Para el almacenamiento de la señal video se utilizará una video-cassettera. Las imágenes que se guardan en ésta son posteriormente digitalizadas utilizando un FRAME GRABBER modelo DT2851 de "Data Translation", el cual está instalado en una computadora PROTEUS 386.

Las imágenes son procesadas en la computadora la cual tiene un procesador de arreglos DT7010 para acelerar los cálculos (Ver fig.3.8).

III.2.1 DETECTOR CCD

Estos dispositivos de transferencia de carga son de alta calidad, y tienen además una capacidad de integración temporal muy grande; a diferencia de los tubos multiplicadores, que funcionan debido al efecto foto-eléctrico de los sólidos en el vacío, los C.C.D. trabajan sobre los mismos sólidos (Lena, 1986).

Este tipo de detectores son multicanales y combinan distintos elementos:

o Un arreglo de píxeles fotosensibles, en donde son generadas las fotocargas en un material, en el cual la fotoconductividad es proporcional a la longitud de onda.

- o Una capacidad de almacenamiento de estas fotocargas
- o Un circuito de lectura susceptible de transportar la carga almacenada.
- o Una electrónica de comando que asegura la sincronización general de la lectura de los píxeles.

Un estudio más detallado sobre la estructura del CCD, su funcionamiento y su resolución se hará en el Apéndice IV.

III.2.2 TUBO INTENSIFICADOR ICCD

Antes del CCD se colocará un tubo intensificador que amplificará la señal luminosa, multiplicando el número de fotones de entrada al CCD. Se obtiene así un sistema CCD intensificado (CCDI).

En el tubo intensificador los fotones son recolectados gracias a un conjunto de fibras ópticas que se encuentran a la entrada de éste y mandan los fotones al fotocátodo de entrada (S-25), desprendiendo de éste foto-electrones. (Fig. 3.9)

Estos foto-electrones son a su vez dirigidos hacia una placa microcanal, que está formada por una multitud de tubitos. En estos tubitos se aceleran por una diferencia de potencial y van extrayendo más electrones cada vez que chocan contra la pared produciendo así un efecto de cascada, y obteniendo a la salida una multiplicación considerable de electrones.

Después estos e^- chocan contra una pantalla de fósforo (P-20) obteniendo, a la salida de las fibras ópticas un gran número de fotones (Ver fig. 3.9)

Las ganancias que se obtienen son muy grandes pero desgraciadamente este tipo de tubos tienen una respuesta no-lineal y no se pueden usar directamente en aplicaciones fotométricas.

III.2.3 VIDEO GRABADORA.

Cuando se tiene una gran cantidad de imágenes los problemas de almacenamiento se resuelven gracias a soportes de alta densidad como los discos ópticos. En nuestro caso se hará mediante la ayuda de una video grabadora controlada por una computadora (Bernal, Gutierrez, 1989).

COMPUTADORA
PROTEUS 386

Porte

Entrada
Audio

Entrada Video

ICCD

VCR

Fig 3.10) Diagrama de adquisicion de datos

TABLA I

CARACTERISTICAS DE LAS COMPONENTES OPTICAS

	f/30	f/13.5	f/7.5
Lente de campo	$f_c = 18\text{mm}$ $\phi_c = 1.5\text{mm}$	$f_c = 6.4\text{mm}$ $\phi_c = 2.37\text{mm}$	$f_c = 1.6\text{mm}$ $\phi_c = 4.5\text{mm}$
Objetivo de microscopio	$f_o = 45\text{mm}$ G=2.5x $\phi_o = 10\text{mm}$	$f_o = 32\text{mm}$ G=5x	$f_o = 14\text{mm}$ G=10x

En donde f_c es la distancia focal de la lente de campo .
 f_o es la distancia focal del objetivo de microscopio.
 ϕ_c el diámetro de la lente de campo.
 ϕ_o el diámetro del objetivo de microscopio.
G es la amplificación dada por el microscopio.

TABLA II

CARACTERISTICAS DE LAS COMPONENTES ELECTRONICAS

C. C. D	<ul style="list-style-type: none">o Eficiencia cuantica :0.1 a 0.6 entre 600 y 800 nm o Dominio espectral : CCD intensificado 500-1000 nm o Respuesta temporal: rápida 16 ms o Almacenamiento de la información: digital, lectura destructiva o Dimensiones: 385 x 572 pixeles.
TUBO INTENSIFICADOR	<ul style="list-style-type: none">o Respuesta espectral: tipo S25 o dimensiones: 385 x 576 pixeles. o Fotocatodo de segunda generación o Fósforo de salida : tipo P20

CAPITULO IV

MODELOS TEORICOS

IV MODELOS TEORICOS.

Con el motógrafo que se construyó se puede, después de haber digitalizado y procesado las imágenes, medir el desplazamiento entre los "speckles" de varias imágenes monocromáticas y así, encontrar la posición del fotocentro con respecto a la longitud de onda para estrellas no resueltas.

Una de las grandes ventajas de este experimento es que es autocalibrado y no depende de las condiciones de observación (II.3.2), pero la más importante es que se pueden calcular desplazamientos del fotocentro aún más chicos que el tamaño de un "speckle" por lo que se podrá alcanzar una super resolución espacial.

Modelando el ensanchamiento del espectro por efecto Doppler, y haciendo algunas suposiciones sobre la forma, la repartición de brillo y el espectro de la estrella, se deducirá teóricamente el valor analítico de $\epsilon(\lambda)$ que dependerá de los parámetros físicos de la estrella.

Como ya se obtuvo el valor experimental de $\epsilon(\lambda)$ mediante el cálculo del interespectro (Cap II) se podrán deducir las características de la estrella que intervienen en este modelo, como lo son la posición del eje de rotación y el diámetro de una estrella en rotación rápida (sección V.1), así como la separación angular de estrellas binarias (sección V.2).

IV.1 ESTRELLAS EN ROTACION RAPIDA

IV.1.1 POSICION DEL EJE DE ROTACION

Para iniciar el estudio de este tipo de estrellas, se harán al principio ciertas simplificaciones. Se considerará a la estrella como un disco uniforme con una función de repartición de energía $o(x,y)$ normalizada. También se supondrá que todos los puntos de la estrella tienen el mismo espectro de absorción ó emisión a la longitud de onda λ_0 , $r(\lambda-\lambda_0)$, por lo que la distribución espacio espectral estará dada por:

$$O(x,y,\lambda) = o(x,y) r(\lambda-\lambda_0) \quad (1-1)$$

Supongamos que se hacen las primeras medidas con el eje de la rendija desviado por un ángulo α_1 con respecto al eje de rotación de la estrella (Ver fig. 4.1)

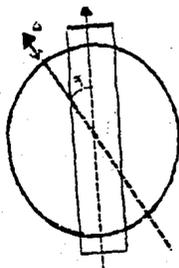


Fig. 4.1) Posición del eje de observación con respecto al eje de rotación de la estrella

De esta manera se obtiene que el desplazamiento del fotocentro con respecto a la longitud de onda está dado por:

$$\epsilon_{x_1}(\lambda) = \epsilon(\lambda) \text{sen}(\alpha_1), \quad (1-2)$$

en donde $\epsilon(\lambda)$ es el desplazamiento del fotocentro perpendicular al eje de rotación de la estrella y el eje x_1 es el de la rendija de análisis.

Si se toman ahora nuevas medidas moviendo de 90° la rendija (Ver fig.4.2)

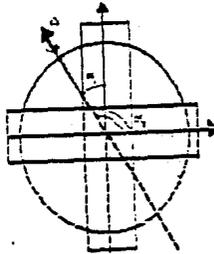


Fig.4.2) Posición de la rendija de observación al efectuar las segundas mediciones

Se tendrá:

$$\epsilon_{x_2}(\lambda) = \epsilon(\lambda) \cdot \text{sen}(\alpha_2) \quad (1-3)$$

Como el eje 1 es perpendicular al eje 2 (fig.4.2) se puede escribir que:

$$\epsilon(\lambda) = [\epsilon_{x_1}^2 + \epsilon_{x_2}^2]^{1/2}$$

Así reemplazando en (1.2) y (1.3) se encuentran α_1 y α_2 :

$$\alpha_1 = \text{arsen} \left(\frac{\epsilon_{x_1}(\lambda)}{\epsilon(\lambda)} \right) \quad \alpha_2 = \text{arsen} \left(\frac{\epsilon_{x_2}(\lambda)}{\epsilon(\lambda)} \right)$$

Por lo que se obtiene la posición exacta del eje de rotación.

IV.1.2 DESPLAZAMIENTO DEL FOTOCENTRO CON RESPECTO A λ

Lo primero que se hará es suponer que el eje de la rendija de observación (eje x) es perpendicular al eje de rotación de la estrella (eje y) (Ver fig.4.3)

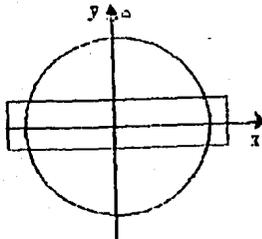


Fig.4.3) Posición de la rendija de observación sobre la estrella

a) Ensanchamiento del espectro debido al efecto Doppler

Desde la tierra los puntos de la estrella, a una distancia x del eje de rotación, se ven como si estuvieran animados por una velocidad V_x dada por:

$$V_x = \omega x = (V/R) x$$

en donde ω es la velocidad angular, R es el radio de la estrella y V su velocidad ecuatorial

Por efecto Doppler (Renault, 1979) la longitud de onda, desde la tierra, estará dada por:

$$\lambda' = \lambda \left(1 + \frac{V_x \cos \theta}{c} \right) = \lambda \left(1 + \frac{V \sin i x}{R c} \right)$$

en donde c es la velocidad de la luz, θ el ángulo que hace el eje x con la recta que va desde el punto o (Ver Fig. 4.4) hasta el centro la estrella e i es el ángulo que hace el eje y con esta misma recta.

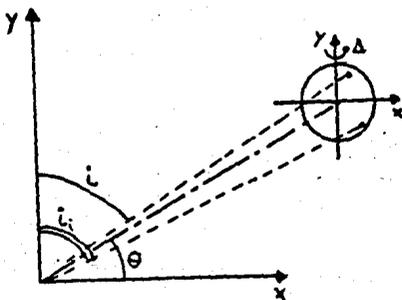


Fig. 4-4 Posición de la la estrella con respecto a un eje de referencia en la tierra, fijo con respecto al eje de rotación de la estrella. Como la estrella esta muy alejada se tiene que $i_1 = i_2 = \dots = i_n = i$

Así pues el espectro de cada punto $r(\lambda - \lambda_0)$ se ensanchará debido a la rotación de la estrella. Su expresión estará dada por:

$$r \left(\lambda \left(1 + \frac{V \sin i x}{R c} \right) - \lambda_0 \right) \quad (1-4)$$

b) Cálculo del desplazamiento del fotocentro

Como se vió en el capítulo II inciso II.3, el desplazamiento del fotocentro depende de la longitud de onda. Así, para conocer su posición se necesitará calcular el espectro de toda la estrella y el de los puntos de abscisa x , ya que $c(\lambda)$ está dado por:

$$c(\lambda) = \frac{\int_{-R}^R x \int_{-R}^R o(x, y, \lambda) dy dx}{\iint_{-R}^R o(x, y, \lambda) dx dy} = \frac{\int_{-R}^R x o_y(x, \lambda) dx}{O(\lambda)} \quad (1-5)$$

en donde $o_y(x, \lambda) = \int_{-R}^R o(x, y, \lambda) dy$ es la distribución espacio espectral de franjas con abscisa "x" y $O(\lambda)$ el espectro de toda la estrella.

La expresión de la distribución espacio espectral de toda la estrella (1.1), incluyendo el efecto-Doppler, está entonces dada por:

$$o(x, y, \lambda) = r \left[\lambda \left(1 - \frac{v \operatorname{seni} x}{R c} \right) - \lambda_0 \right] o(x, y)$$

Integrando con respecto a y se obtiene:

$$o(x, \lambda) = r \left[\lambda \left(1 - \frac{v \operatorname{seni} x}{R c} \right) - \lambda_0 \right] o_y(x) \quad (1-6)$$

en donde

$$o_y(x) = \int_{-R}^R o(x, y) dy$$

Ahora bien, si se toma como ejemplo una distribución $o(x, y)$ constante:

$$o(x, y) = \text{cte} = a$$

Se tendrá:

$$o_y(x) = \int a dy = 2a \sqrt{R^2 - x^2} \quad (1-7)$$

como $o(x, y)$ esta normalizada $a = 1/(\pi R^2)$

Así, el espectro de toda la estrella estará dado por:

$$O(\lambda) = \int_{-R}^R o(x, \lambda) dx = \int_{-R}^R o_y(x) r(\lambda - Kx - \lambda_0) dx$$

Y el desplazamiento $\epsilon(\lambda)$ (1.5) se podrá entonces escribir como:

$$\epsilon(\lambda) = \frac{\int_{-R}^R x \cdot o_y(x) \cdot r(\lambda - Kx - \lambda_0) dx}{\int_{-R}^R o_y(x) \cdot r(\lambda - Kx - \lambda_0) dx} \quad (1-8)$$

en donde $K = \frac{v \operatorname{sen} i \lambda}{R c}$

IV. 1.3 DIAMETRO DE LA ESTRELLA EN ROTACION RAPIDA

En este inciso se tratará de encontrar la ecuación analítica de $\epsilon(\lambda)$, que relacione el perfil de la línea de absorción de la estrella con sus características. Se calculará así, el diámetro de la estrella y la posición de su eje de rotación, conociendo el valor real de $\epsilon(\lambda)$ entre varias imágenes monocromáticas.

Para esto se simulará al espectro de absorción ó emisión $r(\lambda - \lambda_0)$ de la estrella mediante dos distintas funciones. Primero líneas de emisión, modeladas por una función Delta de Dirac con continuo en uno (a), y luego para líneas de emisión ó absorción modeladas por Gaussianas, con valor en el continuo también de uno (b).

a) $r(\lambda - \lambda_0) = 1 + p \delta(\lambda - \lambda_0)$

De (1.8) se tiene que el desplazamiento del fotocentro con respecto a la longitud de onda esta dado por:

$$c(\lambda) = \frac{\int_{-R}^R x \cdot 2a \sqrt{R^2 - x^2} \cdot (1 + p \cdot \delta(\lambda - \lambda_0 - Kx)) dx}{\int_{-R}^R .2a \sqrt{R^2 - x^2} \cdot (1 + p \delta(\lambda_0 - \lambda - Kx)) dx}$$

Haciendo el cambio de variable $u = Kx$

$$c(\lambda) = (1/K) \frac{\int_{-KR}^{KR} u \cdot \sqrt{R^2 - (u/K)^2} \cdot \delta(\lambda - \lambda_0 - u) du}{\int_{-KR}^{KR} \sqrt{R^2 - (u/K)^2} \cdot \delta(\lambda - \lambda_0 - u) du + (\pi R^2 K)/2p}$$

Integrando se obtiene que el fotocentro esta dado por la función:

$$c(\lambda) = (1/K) \frac{(\lambda - \lambda_0) \cdot \sqrt{R^2 - \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{K}\right)^2}}{\sqrt{R^2 - \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{K}\right)^2} + (K\pi R^2)/2p}$$

En donde $K = (\lambda V \text{seni} / RC)$

Con tiene la condición (a'): $-KR < u < KR$

Si se define a $M = C/V \text{seni}$:

$$c(\lambda)/R = M \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} \right) \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} \frac{C}{M} \right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} \frac{C}{M} \right)^2} + (\pi \lambda) / (2Mp)} \quad (1-9)$$

En la ecuación (1.9) la condición (a') se convierte en una condición sobre λ :

$$(a''): -1 < \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} M \right) < 1$$

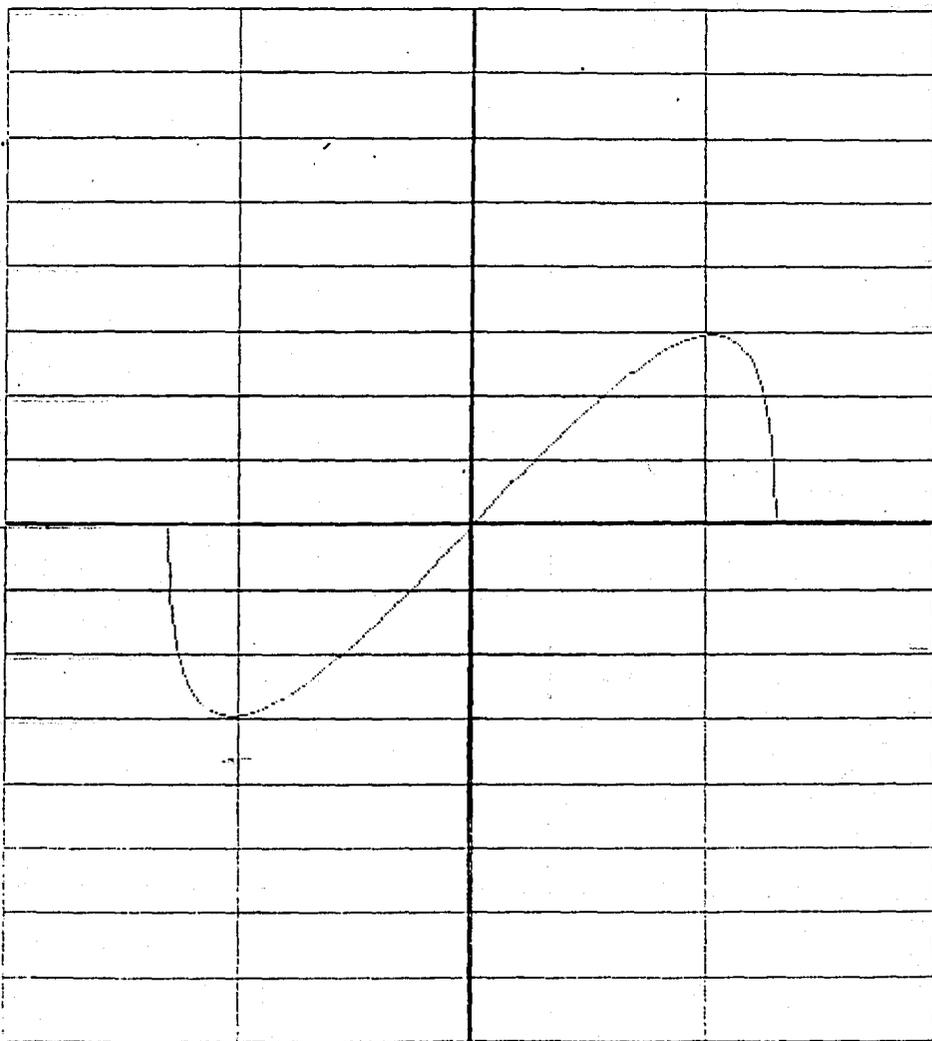
$$\Rightarrow \lambda < \lambda_0 \left(\frac{M}{M-1} \right) \text{ y } \lambda > \lambda_0 \left(\frac{M}{M+1} \right)$$

Por lo que el desplazamiento estará definido en un rango de frecuencias que van de $(M+1)/M\lambda_0$ a $(M-1)/M\lambda_0$

La función $f(\lambda) = \sqrt{1 - (\lambda - \lambda_0)M/\lambda^2}$ tiene un máximo para $\lambda = \lambda_0$, lo cual restringe los valores de p : $p \neq (\lambda\pi)/2M$.

Las gráficas I y II corresponden al desplazamiento del fotocentro tomando líneas de emisión H α (6563 Å), con una velocidad de rotación de $V = 30$ km/s y con profundidades respectivas de $p = 1$ y $p = 10$.

Estas dos gráficas son impares con respecto a λ_0 ya que el desplazamiento del fotocentro, cuando se observa a una posición x del centro, tiene la misma magnitud pero un sentido contrario que cuando estamos en la posición $-x$.



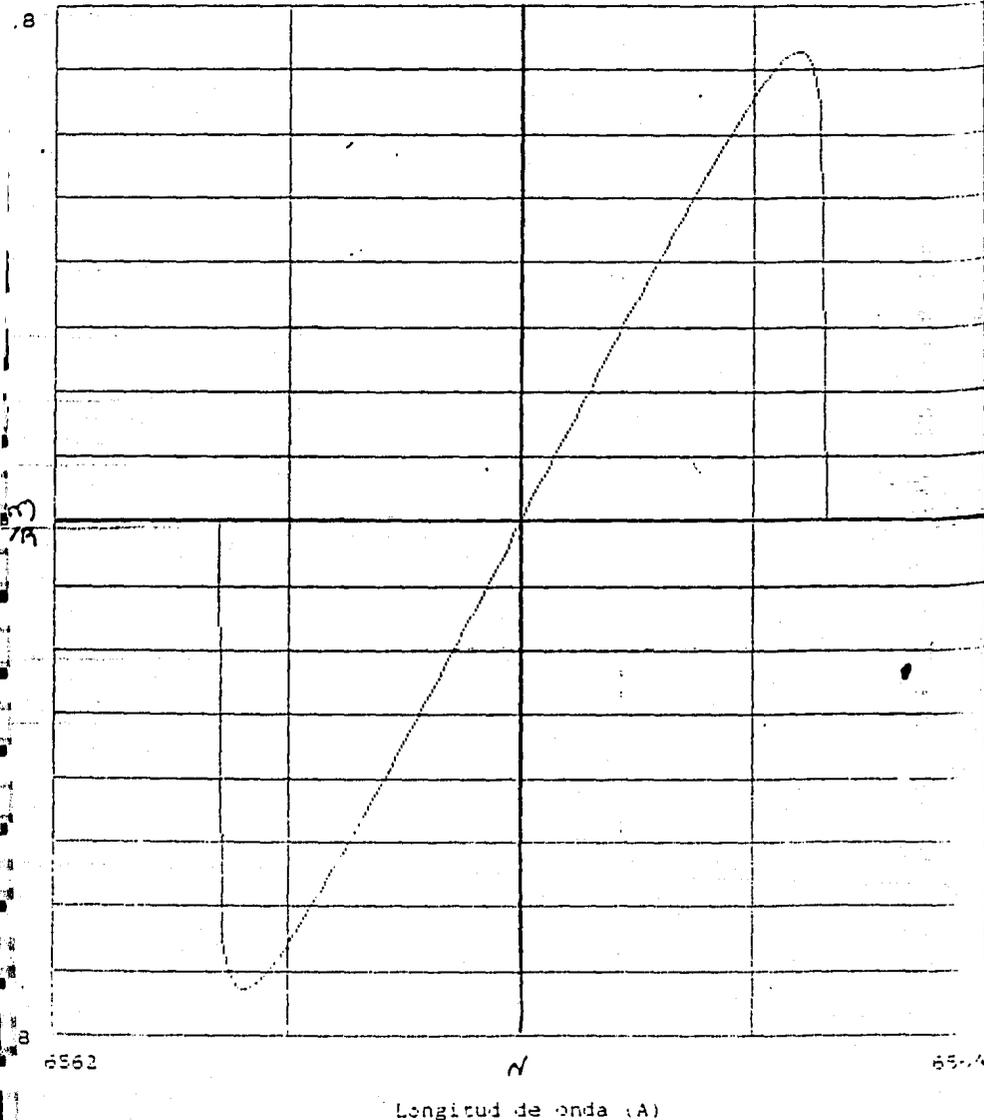
5562

5564

Longitud de onda (A)

La grafica I corresponde al desplazamiento del fotocentro con respecto a su longitud de onda, tomando una delta de Dirac como modelo de la linea de emision H α (6563 A) con una profundidad de p.s.

GRAFICA II



La grafica I corresponde al desplazamiento del fotocentro con respecto a su longitud de onda, tomando una delta de Dirac como modelo de la línea de emisión H α (6563 Å) con una profundidad de $p=10$.

$$b) \quad r(\lambda - \lambda_0) = 1 + p \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\sigma} \right)^2 \right)$$

Cuando el perfil de la línea de absorción es una Gaussiana, con continuo en uno y profundidad p , se tiene que el desplazamiento del fotocentro con respecto al continuo esta dado (1.5) por :

$$c(\lambda) = \frac{\int_{-R}^R x \, 2a \sqrt{R^2 - x^2} \left(1 + p \exp \left((-1/2) \left(\frac{\lambda - \lambda_0 - Kx}{\sigma} \right)^2 \right) \right) dx}{\int_{-R}^R 2a \sqrt{R^2 - x^2} \left(1 + p \exp \left((-1/2) \left(\frac{\lambda - \lambda_0 - Kx}{\sigma} \right)^2 \right) \right) dx}$$

$$\rightarrow c(\lambda) = \frac{\int_{-R}^R x \sqrt{R^2 - x^2} \exp \left((-1/2) \left(\frac{\lambda - \lambda_0 - Kx}{\sigma} \right)^2 \right) dx}{\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \exp \left((-1/2) \left(\frac{\lambda - \lambda_0 - Kx}{\sigma} \right)^2 \right) dx} + (\pi R^2)/2p$$

Si se define ahora $u = x/R$

$$c(\lambda) = \frac{\int_{-1}^1 Ru \sqrt{R^2 - (Ru)^2} \exp \left((-1/2) \left(\frac{\lambda - \lambda_0 - KRu}{\sigma} \right)^2 \right) du}{\int_{-1}^1 \sqrt{R^2 - (Ru)^2} \exp \left((-1/2) \left(\frac{\lambda - \lambda_0 - KRu}{\sigma} \right)^2 \right) du} + (\pi R)/2p$$

Simplificando por R :

$$c(\lambda)/R = \frac{\int_{-1}^1 u \sqrt{1 - u^2} \exp \left((-1/2) \left(\frac{\lambda - \lambda_0 - \Lambda u}{\sigma} \right)^2 \right) du}{\int_{-1}^1 \sqrt{1 - u^2} \exp \left((-1/2) \left(\frac{\lambda - \lambda_0 - \Lambda u}{\sigma} \right)^2 \right) du} + \pi/2p \quad (1-10)$$

en donde $\Lambda = \lambda V \text{seni}/C$

Las gráficas III y IV representan el desplazamiento del fotocentro tomando líneas de emisión H α con un espectro de la forma:

$$r(\lambda - \lambda_0) = 1 + p \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\sigma} \right)^2 \right)$$

con una velocidad de rotación de $V=30\text{km/s}$ con distintos anchos ($\sigma=0.9\text{\AA}; 0.3\text{\AA}; 0.1\text{\AA}; 0.05\text{\AA}$) y con profundidades respectivas de $p=1$ y $p=10$.

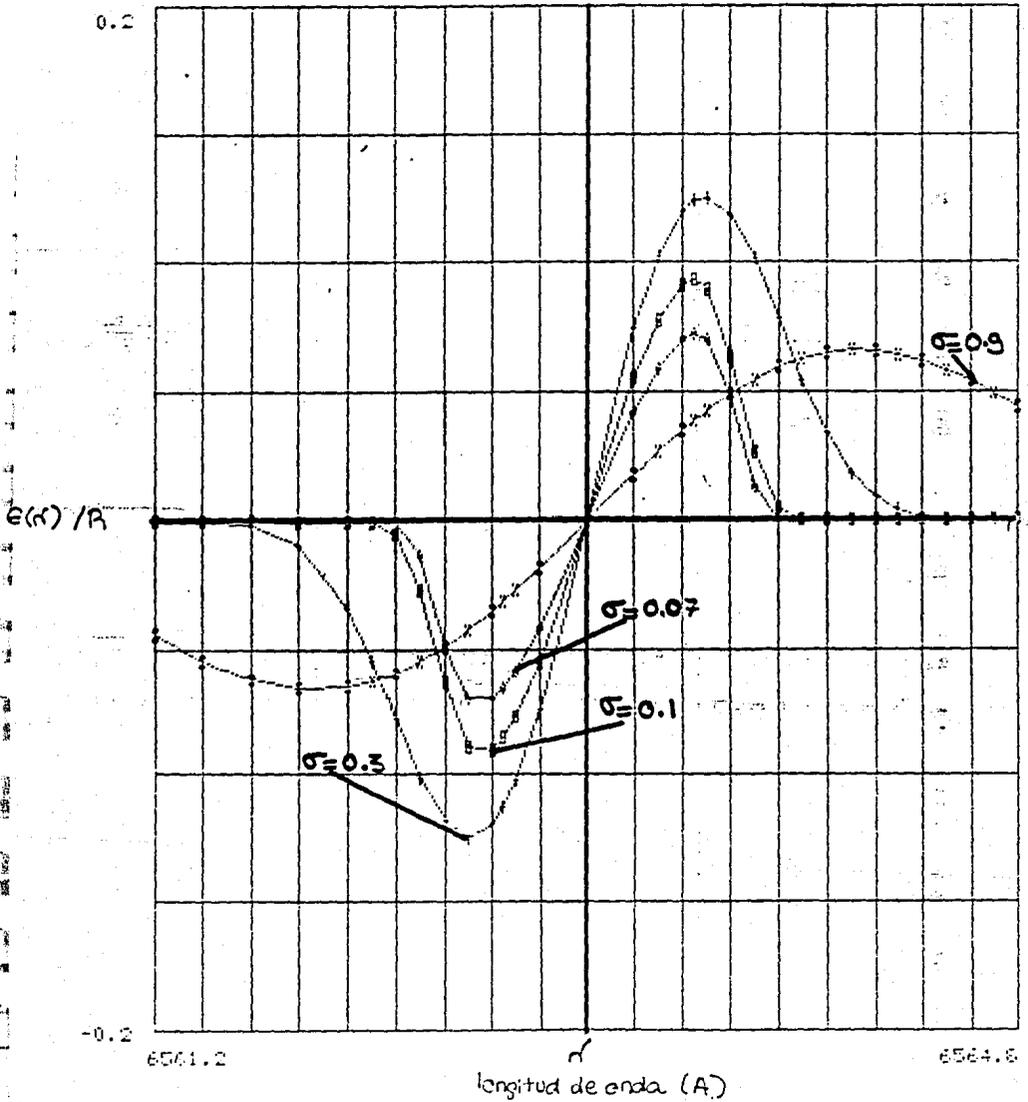
La gráfica V corresponde al desplazamiento para una línea de absorción H α con $p= -0.8$ y con las mismas características que las líneas de emisión mencionadas anteriormente.

La grafica VI es también la función $\epsilon(\lambda)$ tomando como ejemplo una línea de absorción H α pero esta vez con $p= -0.8$ y $V = 6 \text{ km/s}$.

El comportamiento de $\epsilon(\lambda)$ es también impar con respecto a λ_0 , como se explicó anteriormente. Los anchos de las curvas del desplazamiento del fotocentro varían según el ancho de la Gaussiana.

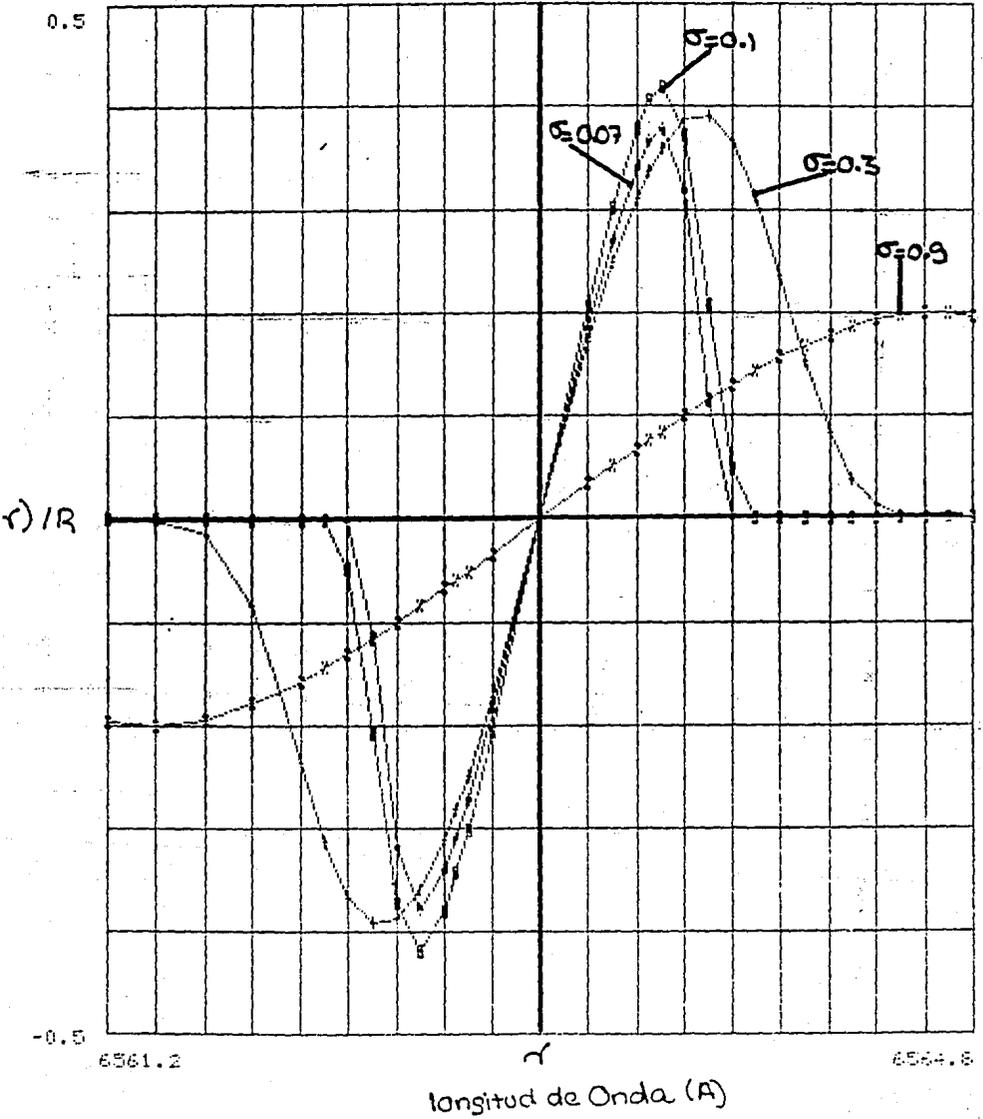
La longitud de onda para la cual el desplazamiento es máximo depende de la profundidad de la línea y del valor del continuo; en general se encuentra el máximo a medio camino entre la longitud de onda λ_0 y la longitud de onda en la que empieza el continuo. Este valor máximo de $\epsilon(\lambda)$ aumenta con el ancho de la gaussiana hasta llegar a un máximo que corresponde al valor dado por el ensanchamiento Doppler (0.6 \AA que corresponde a una velocidad de $V=30 \text{ km/s}$), después el máximo de $\epsilon(\lambda)$ irá decreciendo hasta llegar a cero, y no observar desplazamiento alguno.

GRAFICA III



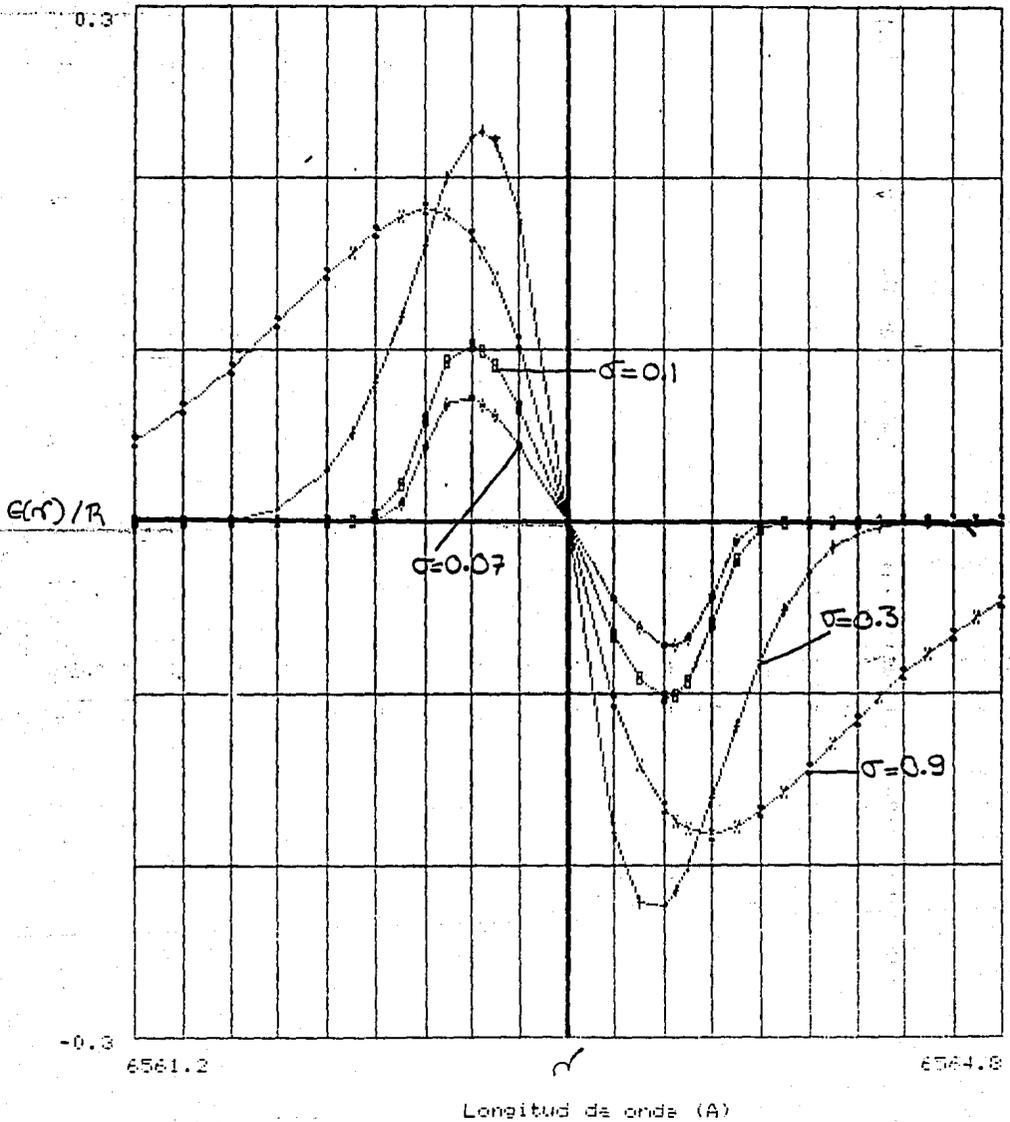
Grafica del desplazamiento del fotocentro con respecto a la longitud de onda para una estrella con velocidad de rotacion $V = 30 \text{ km/s}$ y con un espectro de emision, dado por una gaussiana de distintos anchos σ , y con una profundidad de $p = 1$.

GRAFICA IV



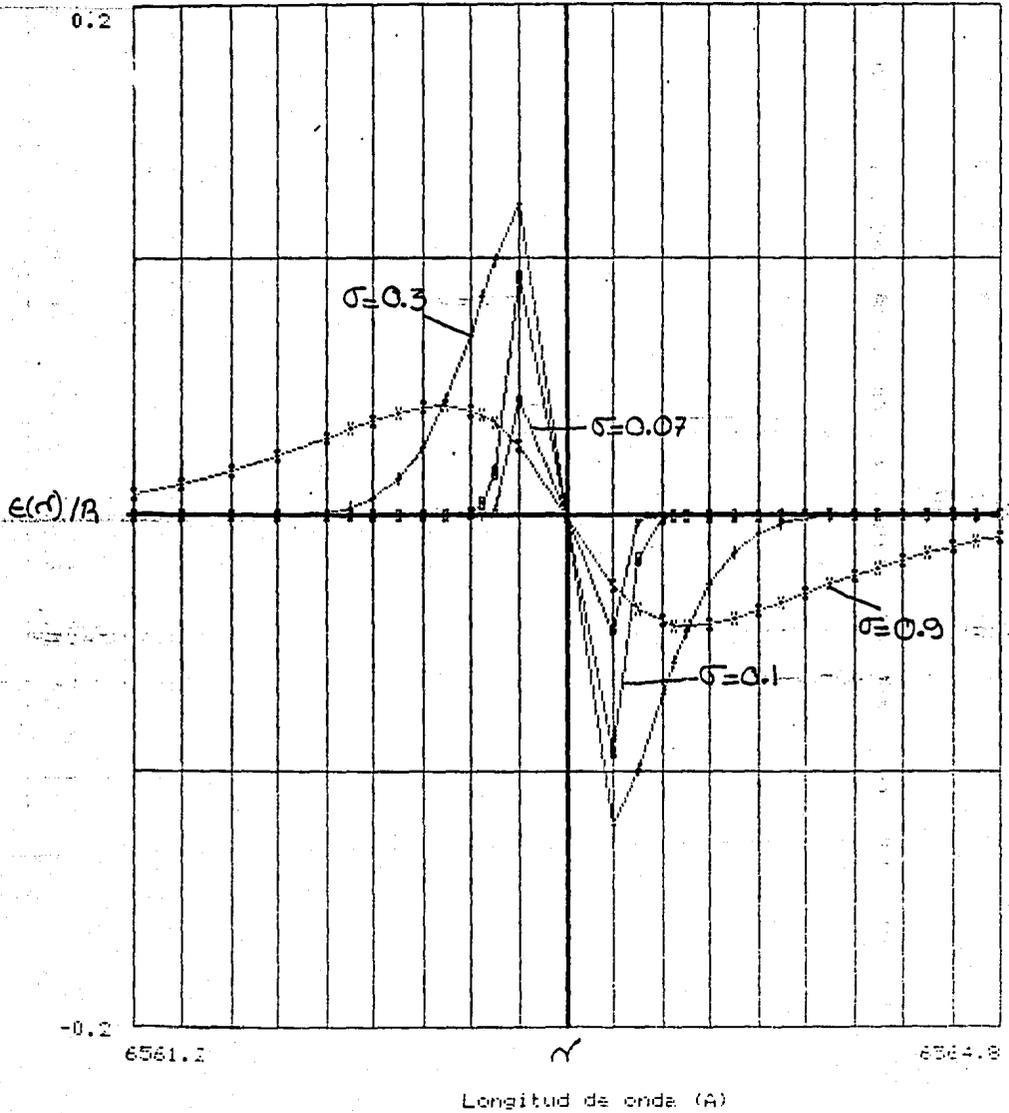
Grafica del desplazamiento del fotocentro con respecto a la longitud de onda para una estrella con velocidad de rotacion $V = 30 \text{ km/s}$ y con un espectro de emision, dado por una gaussiana de distintos anchos σ , y con una profundidad de $p = 10$.

GRAFICA V



Grafica del desplazamiento del fotocentro con respecto a la longitud de onda para una estrella con velocidad de rotación $v = 30 \text{ km/s}$ y con un espectro de absorción, dado por una gaussiana de distintos anchos σ , y con una profundidad de $p = -0.6$.

GRAFICA VI



Grafica del desplazamiento del fotocentro con respecto a la longitud de onda para una estrella con velocidad de rotacion $V = 5 \text{ km/s}$ y con un espectro de absorcion dado por una gaussiana de distintos anchos σ , y con una profundidad de $p = -0.8$.

IV.2 ESTRELLAS BINARIAS

Consideremos al sistema binario como dos objetos puntuales separados por una distancia D (ver Fig. 4.5)

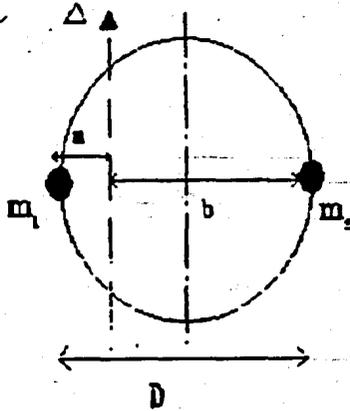


Fig 4.5) Posición de estrellas binarias con respecto a su eje de rotación

Simplificando, se considerará que las dos estrellas rotan una con respecto a otra alrededor de un eje imaginario Δ .

En el espectro de las binarias se podrán reconocer las líneas de absorción de cada una de las estrellas, ya sea porque cada una tiene un tipo espectral diferente ó porque existe un desdoblamiento debido a la diferencia de sus velocidades (IV.2.1). Si observamos sobre la línea de absorción de la primer estrella, el fotocentro estará recorrido hacia la segunda y viceversa.

Este desplazamiento depende de la separación angular de las estrellas y del cociente de sus intensidades.

Así, modelando $c(\lambda)$, se podrá deducir la separación angular entre las dos estrellas.

V.2.1 DESPLAZAMIENTO DEL FOTOCENTRO CON RESPECTO
A LA LONGITUD DE ONDA

Se dejará el caso en el que las dos estrellas tienen un tipo espectral diferente, estudiando solamente el desdoblamiento debido a la diferencia de velocidades entre las dos estrellas. En este caso el eje de rotación Δ no es equidistante para cada una de ellas. (Ver Fig. 4.5)

La distribución espacio espectral puede escribirse como:

$$O(\lambda) = o(-a) r(K\lambda - \lambda_0) + o(b) r(K'\lambda - \lambda_0)$$

en donde: $K = 1 - V \sin i / c$ y $K' = 1 - V' \sin i / c$; V y V' siendo respectivamente las velocidades radiales de la primera y segunda estrella.

Si tomamos $o(-a) = m_1$ y $o(b) = m_2$ el desplazamiento del fotocentro estará dado por:

$$\epsilon(\lambda)' = \frac{-a m_1 r(K\lambda - \lambda_0) + b m_2 r(K'\lambda - \lambda_0)}{m_1 r(K\lambda - \lambda_0) + m_2 r(K'\lambda - \lambda_0)} \quad (2-1)$$

IV.2.2 SEPARACION ENTRE LAS ESTRELLAS.

Como las dos estrellas tienen la misma velocidad angular de rotación:

$$\frac{v}{a} = \frac{v'}{b} \quad \Rightarrow \quad b = (V'/V) a \quad (2-2)$$

Por lo que se podrá escribir el desplazamiento como:

$$\epsilon(\lambda)' / a = \frac{-m_1 r(K\lambda - \lambda_0) + (V'/V) m_2 r(K'\lambda - \lambda_0)}{m_1 r(K\lambda - \lambda_0) + m_2 r(K'\lambda - \lambda_0)} \quad (2-3)$$

Tomando $m_1/m_2 = A$ y $V'/V = B$ se tendrá que:

$$\varepsilon(\lambda)' / a = \frac{-A r(K\lambda - \lambda_0) + B r(K'\lambda - \lambda_0)}{A r(K\lambda - \lambda_0) + r(K'\lambda - \lambda_0)}$$

Como la posición del fotocentro en el continuo esta dada por:

$$\varepsilon(\lambda_0) / a = \frac{-A + B}{A + 1}$$

La posición del fotocentro con respecto a su posición en el continuo estará dada por:

$$\varepsilon(\lambda) / a = \varepsilon(\lambda)' / a - \varepsilon(\lambda_0) / a$$

Como $b = Ba$ (2.2) y la separación entre las dos estrellas esta dada por:

$$D = a + b,$$

$$D/\varepsilon(\lambda) = (Ba + a)/\varepsilon(\lambda) = (B + 1)a/\varepsilon(\lambda)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(\lambda)/D = \varepsilon(\lambda)/a \cdot 1/(B+1)$$

Reemplazando $r(\lambda - \lambda_0)$ por :

$$\left(1 + p \cdot \exp\left((-1/2) \left(\frac{K\lambda - \lambda_0}{\sigma} \right)^2 \right) \right)$$

$$\frac{\varepsilon(\lambda)'}{a} = \frac{-A \left(1 + p \cdot \exp\left((-1/2) \left(\frac{K\lambda - \lambda_0}{\sigma} \right)^2 \right) \right) + B \left(1 + p \cdot \exp\left((-1/2) \left(\frac{K'\lambda - \lambda_0}{\sigma} \right)^2 \right) \right)}{A \left(1 + p \cdot \exp\left((-1/2) \left(\frac{K\lambda - \lambda_0}{\sigma} \right)^2 \right) \right) + \left(1 + p \cdot \exp\left((-1/2) \left(\frac{K'\lambda - \lambda_0}{\sigma} \right)^2 \right) \right)}$$

Y finalmente:

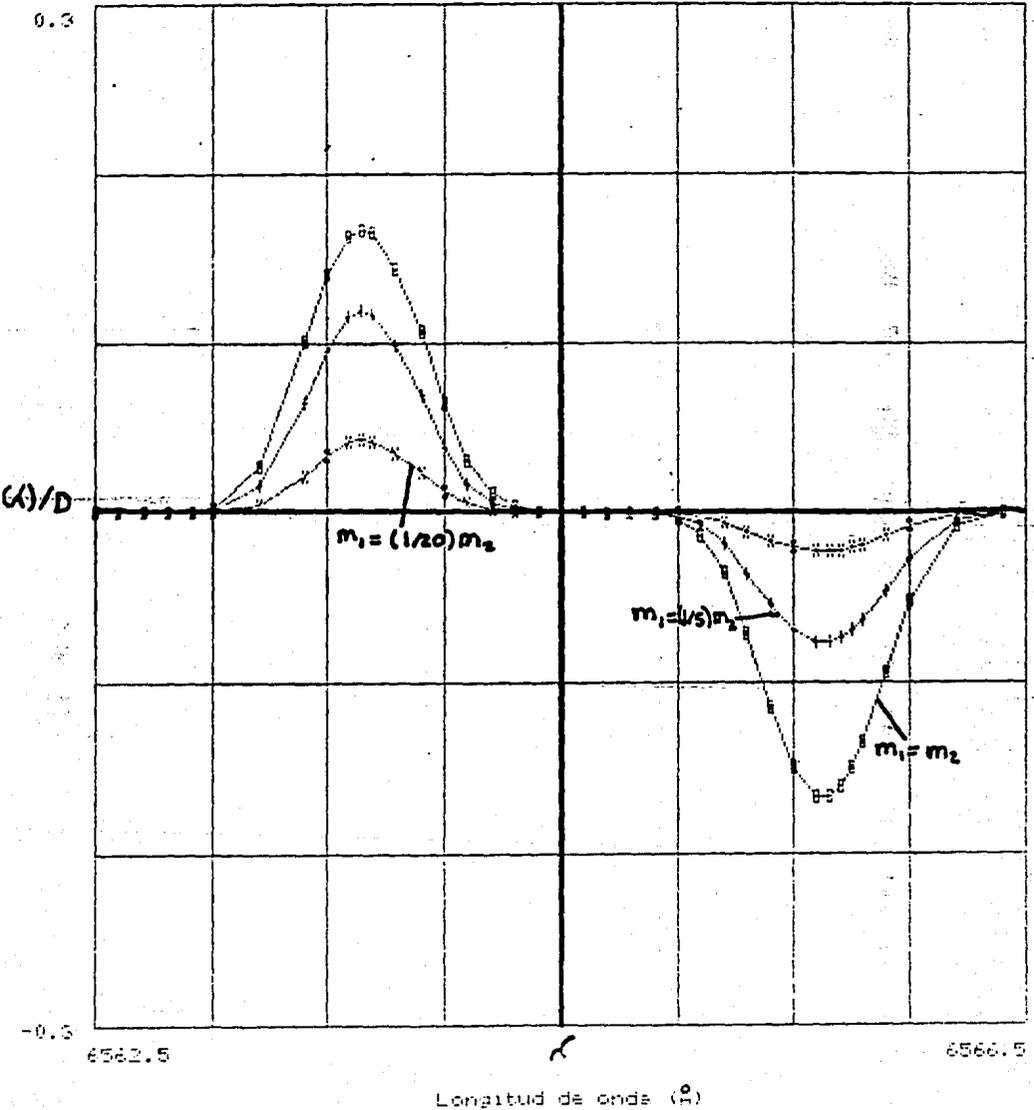
$$\frac{c(\lambda)}{D} = \frac{-A \left(1 + p \cdot \exp \left((-1/2) \left(\frac{K\lambda - \lambda_0}{\sigma} \right)^2 \right) \right) + B \left(1 + p \cdot \exp \left((-1/2) \left(\frac{K'\lambda - \lambda_0^2}{\sigma} \right) \right) \right)}{A \left(1 + p \cdot \exp \left((-1/2) \left(\frac{K\lambda - \lambda_0}{\sigma} \right)^2 \right) \right) + \left(1 + p \cdot \exp \left((-1/2) \left(\frac{K'\lambda - \lambda_0^2}{\sigma} \right) \right) \right)}$$

$$- \left(\frac{-A + B}{A + 1} \right) \cdot \left(\frac{1}{B + 1} \right)$$

Las gráficas VII, VIII, IX, X, XI, XII ilustran el comportamiento del desplazamiento del fotocentro para distintos valores de los parámetros p, A, B y para líneas de emisión ó absorción H α ($\lambda_0 = 6563 \text{ \AA}$).

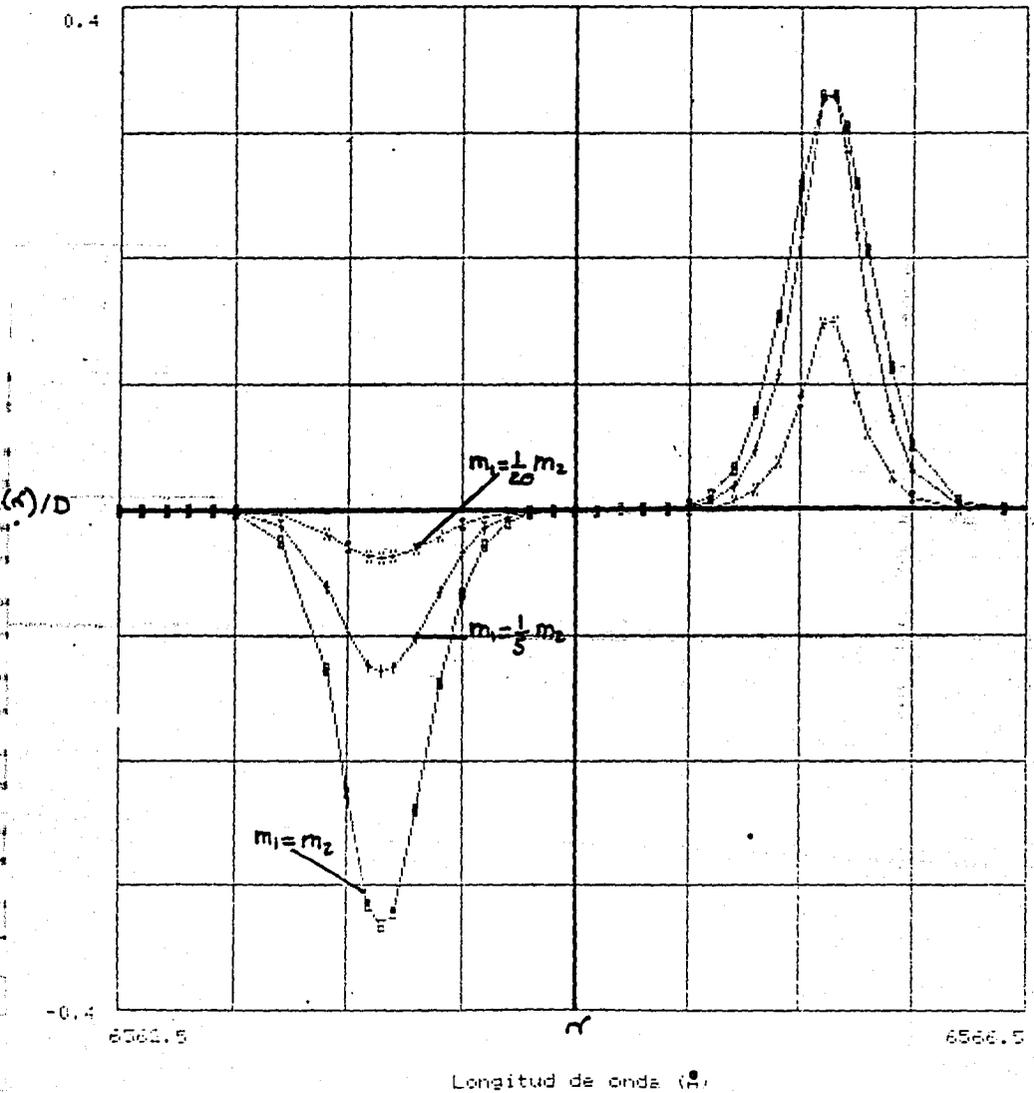
Estas gráficas ya no son simétricas ya que dependen de la repartición de energía m_1 y m_2 de cada una de las estrellas; entre más diferencia exista entre estas dos cantidades se notará más la diferencia de desplazamientos para las longitudes de onda menores ó mayores que λ_0 .

GRAFICA VII



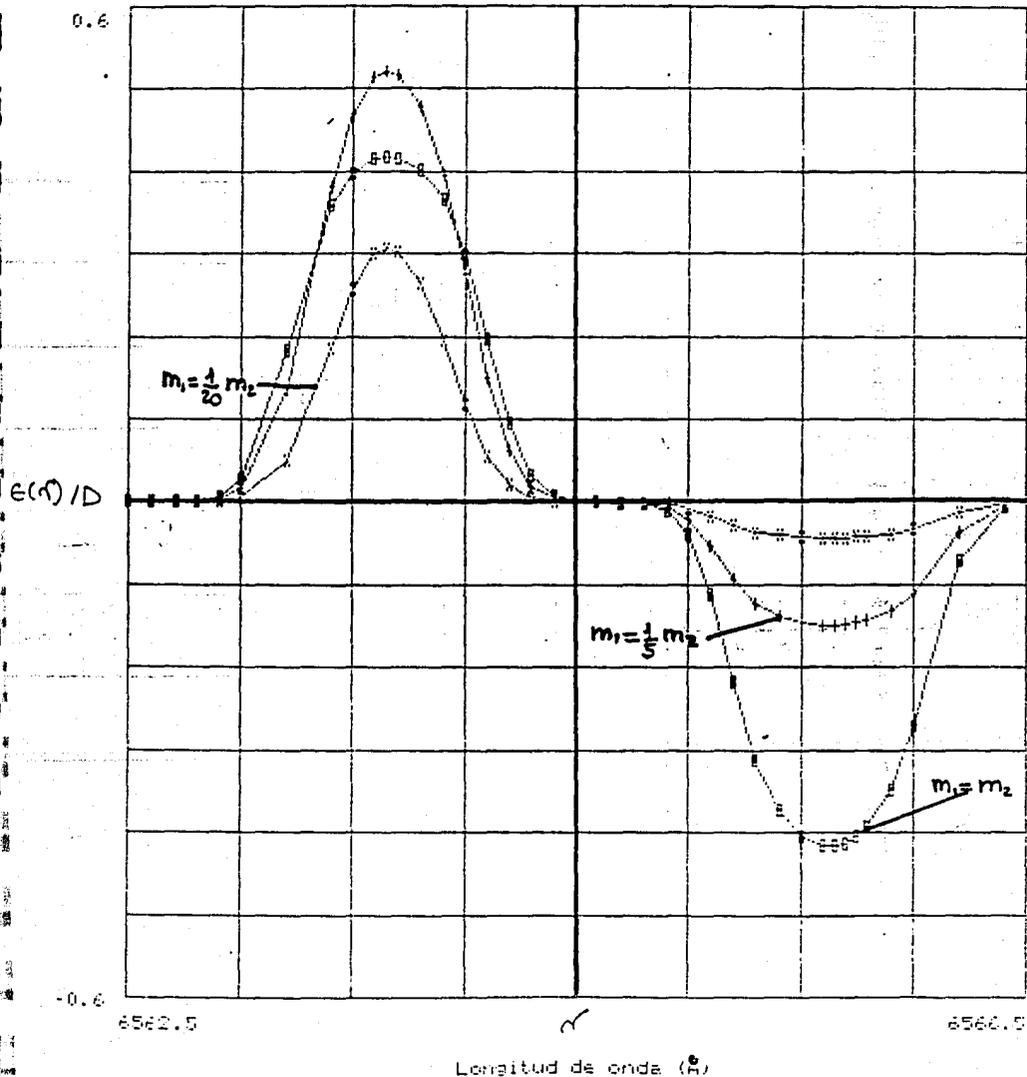
Grafica del desplazamiento del fotocentro con respecto a la longitud de onda para dos estrellas con velocidades respectivas de $V_1=90$ km/s y $V_2=120$ km/s, y modeladas las dos mediante un espectro de emision gaussiano de profundidad $p=1$ y de ancho $s=0.22$ Å

GRAFICA VIII



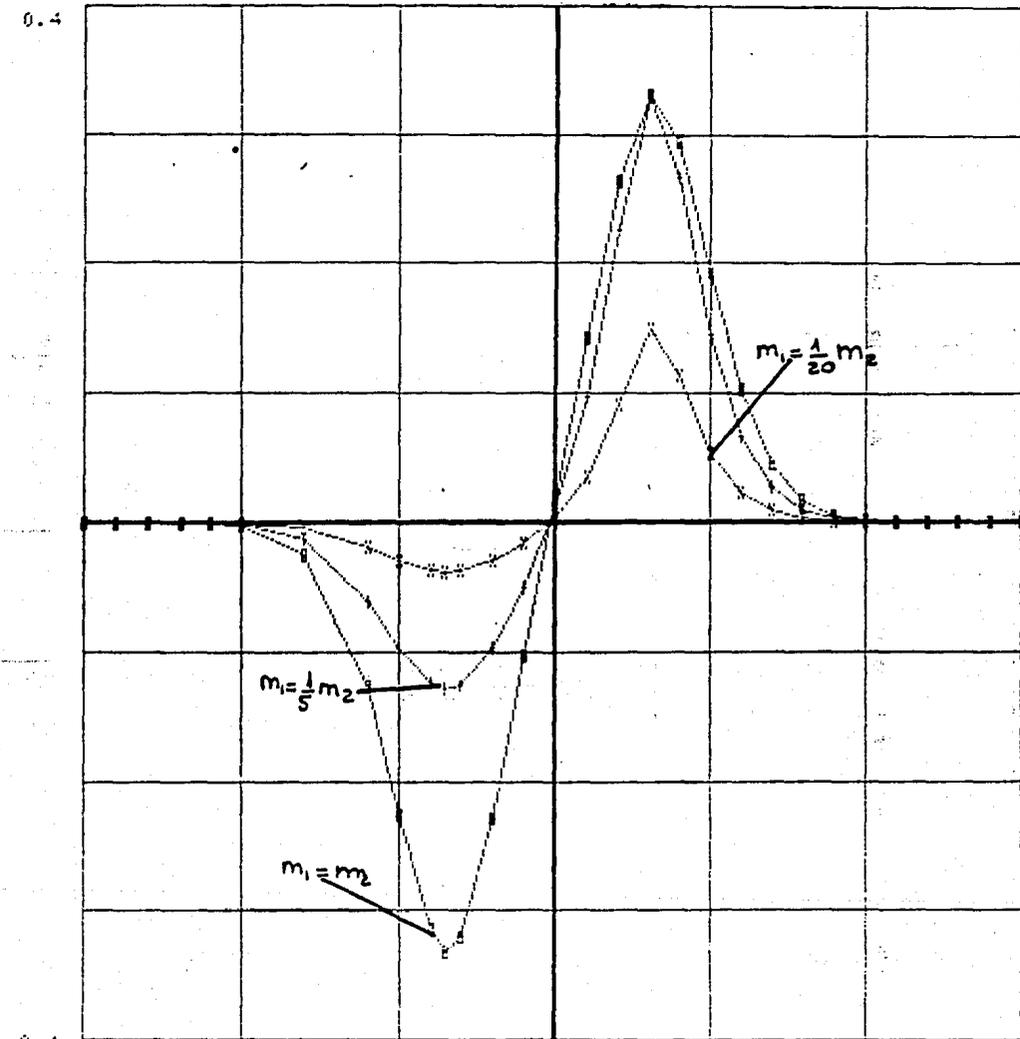
Grafica del desplazamiento del fotocentro con respecto a la longitud de onda para dos estrellas con velocidades respectivas de $V_1=30$ km/s y $V_2=120$ km/s. y modeladas las dos mediante un espectro de absorcion gaustano de profundidad $p=0.8$ y de ancho $s=0.22 \text{ \AA}$.

GRAFICA IX



Grafica del desplazamiento del fotocentro con respecto a longitud de onda para dos estrellas con velocidades respectivas de $V_1=30 \text{ km/s}$ y $V_2=120 \text{ km/s}$, y modeladas las dos mediante un espectro de emision gaussiano de profundidad $p=10$ y de ancho $s=0.22 \text{ \AA}$.

GRAFICA X



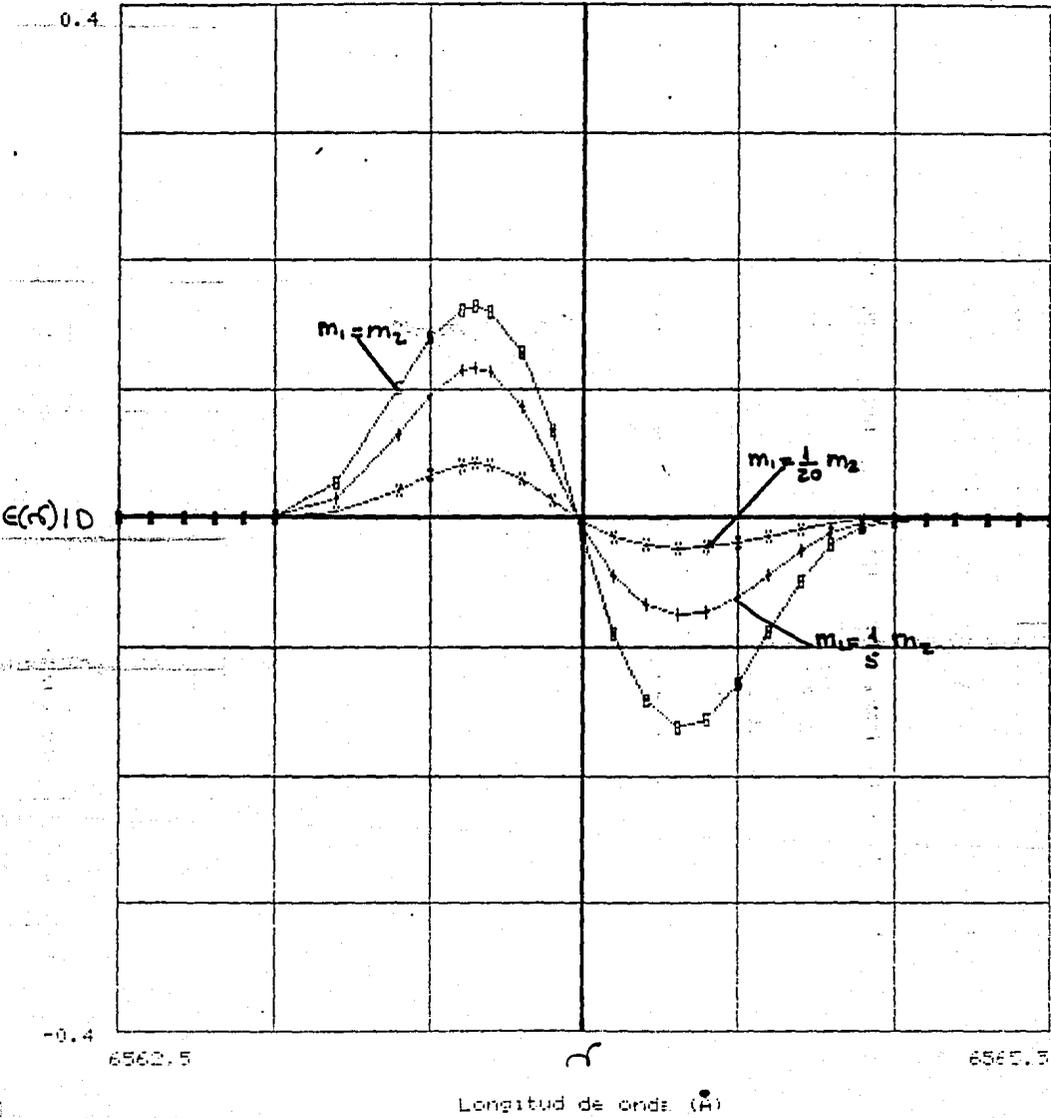
6542.5

Longitud de onda (\AA)

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

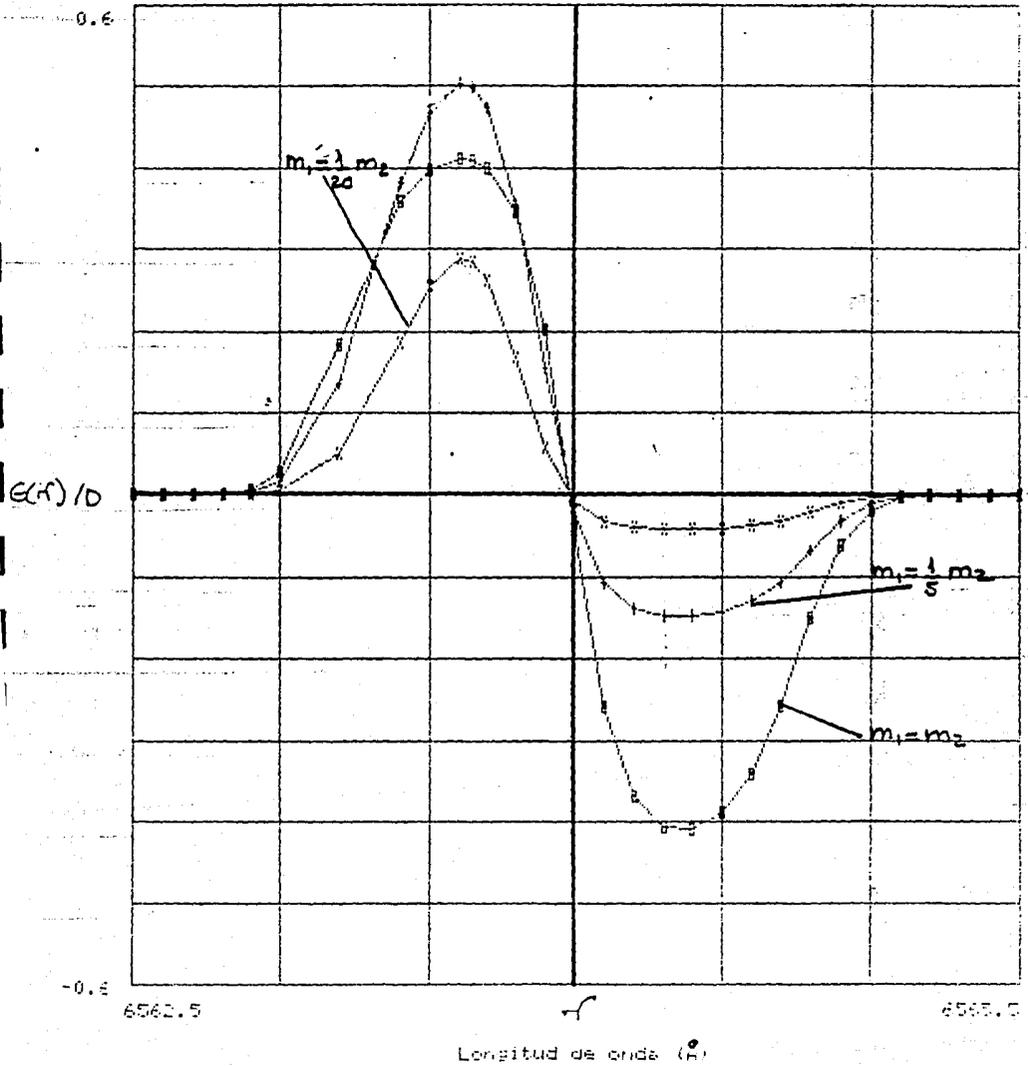
Grafica del desplazamiento del fotocentro con respecto a la longitud de onda para dos estrellas con velocidades respectivas de $V_1=30 \text{ km/s}$ y $V_2=60 \text{ km/s}$, y modeladas las dos mediante un espectro de absorcion gaussiano de profundidad $p=0.8$ y de ancho $s=0.22 \text{ \AA}$.

GRAFICA XI



Grafica del desplazamiento del fotocentro con respecto a la longitud de onda para dos estrellas con velocidades respectivas de $v_1=30$ km/s y $v_2=60$ km/s, y modeladas las dos mediante un espectro de emisión gaussiano de profundidad $p=1$ y de ancho $s=0.22$ Å.

GRAFICA XII



Grafica del desplazamiento del fotocentro con respecto a la longitud de onda para dos estrellas con velocidades respectivas de $V_1=30 \text{ km/s}$ y $V_2=60 \text{ km/s}$, y modeladas las dos mediante un espectro de emision gaussiano de profundidad $p=10$ y de ancho $s=0.22 \text{ \AA}$.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha discutido la aplicación de la interferometría "speckle" diferencial con el objeto de evadir uno de los más grandes problemas en Astronomía Observacional: la turbulencia atmosférica. Este método permite alcanzar una gran resolución espacial en la observación de fuentes estelares.

Adaptando el "interferómetro speckle diferencial" al telescopio, se podrán obtener imágenes de estrellas con una resolución de 1ms de arco .

Mediante modelos teóricos discutidos en el capítulo IV es posible interpretar los resultados obtenibles con el interferómetro speckle diferencial, es decir que se relacionan estos resultados, como lo son la fase del interespectro entre dos imágenes monocromáticas de la estrella y el desplazamiento del fotocentro, con los parámetros físicos de la estrella.

Utilizando las curvas del desplazamiento del fotocentro, $\epsilon(\lambda)$, como función de la longitud de onda obtenidas al final del capítulo IV, se podrán conocer, con una resolución de 0.3 A/ pixel , las siguientes características de la estrella: **la posición del eje de rotación y el diámetro de una estrella en rotación rápida, y la separación de estrellas binarias.**

Aunque las curvas de $\epsilon(\lambda)$ tuvieron la forma que se esperaba fué grato encontrar desplazamientos tan grandes, lo que aumenta el potencial de aplicación de la interferometría "speckle" diferencial.

En la figura.B Petrov (1986) presenta la desviación estandar de $\epsilon(\lambda)$ en función de la magnitud visual de las estrellas, con un experimento similar al nuestro; en la curva I se hizo el estudio con un telescopio de 3.6m , en la II con un interferómetro con tres telescopios puestos en los vértices de un triángulo de 100m de base, y en la III con un interferómetro de dos telescopios de 8m separados por una distancia de 100m .

Suponiendo que $r_0 = 15\text{cm}$, el tiempo de integración es 30 min, y que se tiene un detector de conteo de fotones y una resolución espectral de 0.5 $\text{\AA}/\text{pixel}$. (En nuestro caso se tiene una resolución de 0.3 $\text{\AA}/\text{pixel}$)

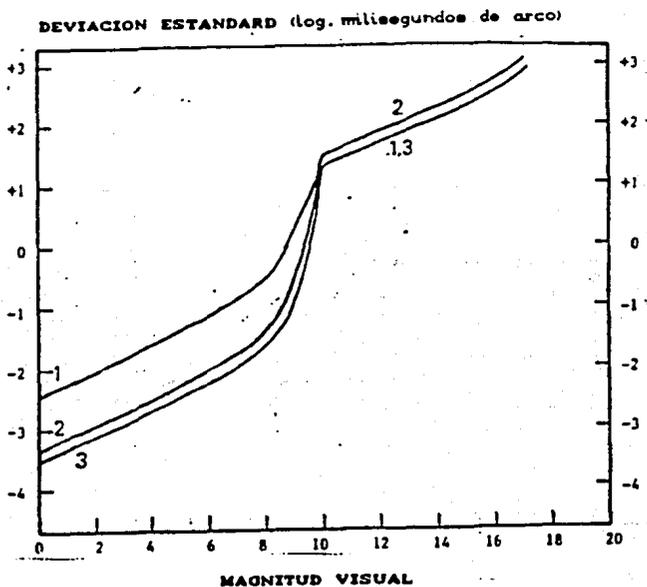


Fig.B. desviación estándar del desplazamiento del fotocentro

Si se tienen desplazamientos de $\epsilon(\lambda) \approx 0.5 R$ (que se encontró para líneas de emisión profundas; gráfica IV, IX, XII) y tomando $R \approx 1\text{miliseq arco}$, se puede estudiar estrellas de magnitud visual 8, con un telescopio de 3.6m, y de hasta 9.5, con los otros dos arreglos. En el caso en el que se obtuvo $\epsilon(\lambda) \approx 0.8R$ (Gráfica II) se puede llegar hasta una magnitud visual de 10 ! Por lo que se pueden estudiar un buen número de estrellas.

Los resultados obtenidos están basados en los modelos de los espectros de las estrellas utilizados (Delta de Dirac y Gaussianas) se acercan bastante a la realidad, sin embargo en algunos casos resultan ser inapropiados.

Esto puede subsanarse utilizando una forma más exacta de los espectros estelares (existen catálogos en donde se encuentran clasificados los espectros de miles de estrellas). Con estos espectros "calcados" se realiza la integración numérica obteniéndose como resultado la posición del fotocentro con respecto a la longitud de onda, y por consecuencia los valores teóricos del diámetro de un gran número de estrellas en rotación rápida conocidas y la separación entre estrellas binarias..

Esta primera versión del espectrógrafo, nos dará la posibilidad de probar el experimento, tomar los primeros datos, y poder obtener resultados después de haber procesado las imágenes, a finales de año. Se podrá demostrar así, como se mejora la resolución del telescopio, con resultados que no dependen de las condiciones de observación, gracias a un aparato sencillo y poco costoso.

Se trabaja sin embargo ya, en una segunda versión del "motógrafo", en la que en lugar de una rendija, se tiene a la entrada un disector de imagen; la rejilla de difracción será esférica y el detector CCD será reemplazado por un MEPSICRON, aumentando considerablemente la resolución del aparato (se espera llegar a una resolución de 0.05 λ /pixel físico).

Estos resultados son alentadores para la continuación en la investigación de la interferometría speckle diferencial sobre todo porque los resultados obtenidos no dependen de la turbulencia atmosférica.

APENDICE I

o TRANSFORMADAS DE FOURIER DE FUNCIONES USUALES.

<u>FUNCION</u>	<u>TRANSFORMADA.</u>
$o \Pi(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 1/2 \\ 0 & \text{en otro lado.} \end{cases}$	$o \text{ sinc}(u) = \frac{\text{sen} \pi u}{\pi u}$
$o \text{ Tri}(x) = \begin{cases} 1- x & x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro lado.} \end{cases}$	$o \text{ sinc}^2(u) = \frac{\text{sen}^2 \pi u}{(\pi u)^2}$
$o W(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$	$o W(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(u-n)$
$o \delta(x)$	$o 1$
$o \text{ sen}(x)$	$o 1/2 \left(\delta(u-1/2) - \delta(u+1/2) \right)$
$o \text{ cos}(x)$	$o 1/2 \left(\delta(u-1/2) + \delta(u+1/2) \right)$
$o \text{ circ}(r) = \begin{cases} 1 & r \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$	$o \text{ Bsinc} = \frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho}$
$o \text{ Exp}(-\pi x^2)$	$o \text{ Exp}(-\pi u^2)$
$o \delta(r-a)$	$o 2\pi a J_0(2\pi a\rho)$

○ FUNCION DE TRANSFERENCIA PARA TIEMPOS DE EXPOSICION CORTOS

Partiendo de la relación de la respuesta impulsional:

$$S(f) = \frac{\lambda^2}{f} \iint \psi(u) \cdot \psi^*(u-f) \cdot P(u) \cdot P(u-f) du$$

De donde :

$$\langle |S(f)|^2 \rangle_t = \frac{\lambda^4}{f^2} \iiint \langle \psi(u) \psi^*(u-f) \psi^*(u') \psi(u'-f) \rangle P(u) P(u-f) P(u') P(u'-f) du du'$$

Para $f \gg f_0$ $B_\psi(f) = \exp[-3.44(f/f_0)^{5/3}] \approx 0 \Rightarrow \psi(u)$ y $\psi(u-f)$ están decorrelacionados por lo que:

$$\langle \psi(u) \psi^*(u-f) \psi^*(u') \psi(u'-f) \rangle \approx \langle \psi(u) \psi^*(u') \rangle \langle \psi(u-f) \psi^*(u'-f) \rangle \approx B_\psi^2(u-u')$$

Reemplazando el momento de cuarto orden por $B_\psi(u-u')$ en la expresión de $\langle |S(f)|^2 \rangle$:

$$\langle |S(f)|^2 \rangle = \frac{\lambda^4}{f^2} \iiint B_\psi^2(u-u') P(u) P(u-f) P(u') P(u'-f) du du'$$

si tomamos a $u-u' = f'$,

$$\langle |S(f)|^2 \rangle = \frac{\lambda^4}{f^2} \iiint B_\psi^2(f') P(u) P(u-f) P(u-f') P(u-f'-f) du df'$$

$$\Rightarrow \langle |S(f)|^2 \rangle = \frac{\lambda^4}{y_t^2} \iint P(u)P(u-f) \iint B_\psi^2(f')P(u-f')P(u-f'-f) df'$$

Para un telescopio grande de diámetro $D > r_0$ y para $f \leq f_c - f_0$ el producto $P(u-f')P(u-f-f')$ es practicamente constante sobre el soporte de la función $B_\psi^2(f')$ por lo que:

$$\iint B_\psi^2(f')P(u-f')P(u-f-f') df' = \iint B_\psi^2(f') df' = \sigma.$$

En donde σ representa el area de coherencia de la onda ψ de aquí que para $f_c - f_0 \geq f \gg f_0$:

$$\langle |S(f)|^2 \rangle = \frac{\lambda^2 \sigma}{y_t} \cdot \frac{\lambda^2}{y_t} \iint P(u) P(u-f) du = \frac{\lambda^2 \sigma}{y_t} T(f).$$

en donde $\sigma = 0.342 r_0^2 / \lambda^2$

Haciendo intervenir el numero N de speckles

$$N = \frac{y_t}{0.342 r_0^2}$$

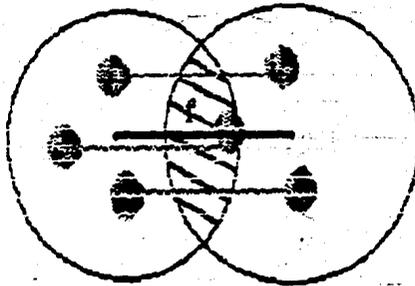
Se tiene que:

$$\langle |S(f)|^2 \rangle = \frac{T(f)}{N}$$

APENDICE III

o INTERPRETACION DE LA INTERFEROMETRIA SPECKLE

Podemos interpretar a los "speckles" obtenidos como la interferencia de $N(f)$ pares de hoyos de diámetro r_0 (I.2.2), separados por el vector f , dentro de dos pupilas separadas tambien por el mismo vector.



Numero de pares separados por el vector f .

Este numero $N(f)$ es proporcional, púes a la función de transferencia del telescopio en ausencia de turbulencia atmosférica, $T(f)$, que representa el area comun entre estas dos pupilas.

$$N(f)/N = \int P(f) P(f-u) du = T(f)$$

Y N es el numero de areas de coherencia sobre la pupila.

Cuando hay turbulencia, los sistemas de franjas de interferencia estarán desfasados aleatoriamente de ϕ_k y se tendrá:

$$\tilde{I}(f) = N^{-1} \sum_{k=1}^{N(f)} \exp [i\phi_k] \tilde{O}(f)$$

$$\Rightarrow \langle |\tilde{I}(f)|^2 \rangle = N^{-2} \langle \left| \sum_1^{N(f)} \exp i\phi_k \right|^2 \rangle |\tilde{O}(f)|^2$$

$$\Rightarrow \langle |\tilde{I}(f)|^2 \rangle = N^{-2} N(f) |\tilde{O}(f)|^2$$

$$\Rightarrow \langle |\tilde{I}(f)|^2 \rangle = N^{-1} T(f) |\tilde{O}(f)|^2$$

Así, se puede escribir a la función de transferencia para tiempos de exposición cortos como:

$$\langle |\tilde{S}(f)|^2 \rangle = \sigma/\gamma T(f)$$

Por lo que se tiene un factor de atenuación de σ/γ con respecto a la interferometría de Michelson ó de rotación de frente de onda, debido a la redundancia de la pupila.

APENDICE IV

◦ REJILLA DE DIFRACCION DE FASE EN ESCALON.

Sea un haz de luz monocromático con amplitud inicial igual a uno que incide sobre la rejilla de difracción con un ángulo θ y se refleja con un ángulo θ_0 .

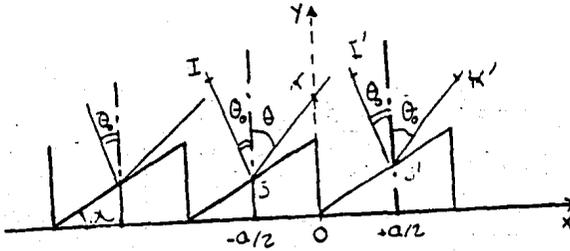


Fig.4-5a Rejilla de difracción de blaze

Los dos rayos IJK y I'J'K' están desfasados por:

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} [a (\text{sen}\theta_0 + \text{sen}\theta)]$$

Si llamamos $u = (\text{sen}\theta_0 + \text{sen}\theta)/\lambda$,

$$\phi = 2\pi u a$$

Si U_q la amplitud reflejada por q -ésimo escalón se tiene que:

$$U_q = U_{q-1} \exp[-12\pi u a]$$

Y en una rejilla que contiene $N=2n+1$ líneas :

$$U = \sum_{q=-n}^n U_q = U_0 \left(\sum_{q=-n}^n \exp[-12\pi u a] \right)$$

$$\Rightarrow U = NU_0 \left[\frac{\text{sen } N\pi u a}{N \text{sen} \pi u a} \right] \quad (1-1)$$

En donde U_0 es la amplitud de la onda que se refleja por el primer escalón elemental .

Para calcular U_0 debemos conocer:

- o El desfase ϕ_1 entre dos rayos paralelos sobre un tramo de longitud a .
- o El desfase ϕ_2 de un rayo al atravesar (o reflejarse) por un escalón.

o ϕ_1 va a estar dado por:

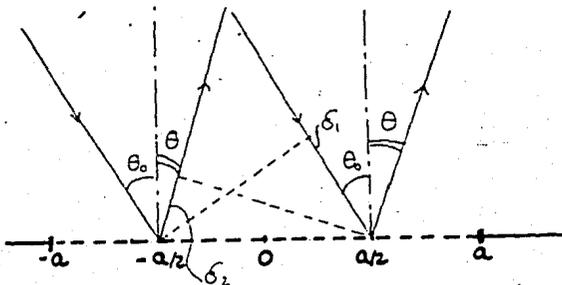


Fig.4-2a Desfase en un tramo de longitud a

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} x (\sin\theta_0 + \sin\theta) = 2\pi u x \quad (1-2)$$

en donde x varía entre $-a/2$ y $a/2$.

o Y el desfase ϕ_2 esta dado por:

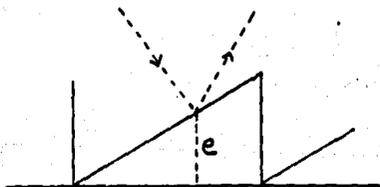


Fig.4-3a Desfase de un rayo debido a la forma de un escalón elemental.

$$\phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} e \quad (1-3)$$

en donde el espesor del escalón : $e = \tan\alpha (x + a/2) \cong \alpha (x + a/2)$.

Por lo que :

$$\phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \alpha (x + a/2) \quad (\text{para ángulos de blaze chicos})$$

Si se toma $w = \frac{a \alpha}{\lambda}$,

$$\phi_2 = \pi w \left(1 + \frac{2x}{a} \right) \quad (1-4)$$

Así se obtiene el desfase total de la onda que está dado por $\phi_1 + \phi_2$, y se puede escribir U_0 como :

$$U_0 = \int_{-a/2}^{a/2} \exp i \left[\phi_1 + \phi_2 \right] dx$$

$$U_0 = \exp(i\pi w) \int_{-a/2}^{a/2} \exp(i2\pi[w/a]x) \exp(-i2\pi ux) dx \quad (1-5)$$

$$U_0 = a \exp(i\pi w) \left[\frac{\text{sen}\pi(u-w/a)a}{\pi(u-w/a)a} \right] \quad (1-6)$$

Reemplazando este resultado en (1-1) se obtiene :

$$U = Na \exp(i\pi w) \left[\frac{\text{sen}\pi(ua-w)}{\pi(ua-w)} \right] \left\{ \frac{\text{sen}N\pi ua}{N \text{sen}\pi ua} \right\} \quad (1-7)$$

Finalmente, la intensidad reflejada por la rejilla de una onda de amplitud uno que incide sobre la rejilla con un ángulo θ_0 y se refleja con un ángulo θ esta dada por:

$$I = a^2 N^2 \left[\frac{\text{sen}\pi(ua-w)}{\pi(ua-w)} \right]^2 \left[\frac{\text{sen}N\pi ua}{N \text{sen}\pi ua} \right]^2 \quad (1-8)$$

en donde: $u = (\text{sen}\theta + \text{sen}\theta_0)/\lambda$.

La gráfica de la intensidad estará dada por:

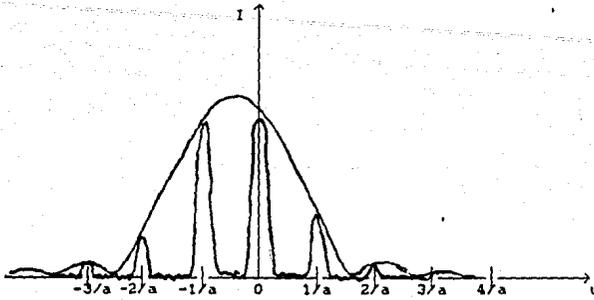


Fig.4-4a Intensidad en una rejilla de escalon.

Cuando w varía, el pico de la envolvente, la función $\left[\frac{\text{sen}N\pi u a}{N \text{sen}\pi u a} \right]^2$ cambia de lugar, privilegiando así un orden del espectro.

Cuando se tiene, por ejemplo $w = 1$, es decir, $\alpha = \lambda/a$, el orden privilegiado es el orden 1. Y el máximo de la envolvente se encuentra en $u = 1/a$; los espectros en este orden van a ser muy luminosos.

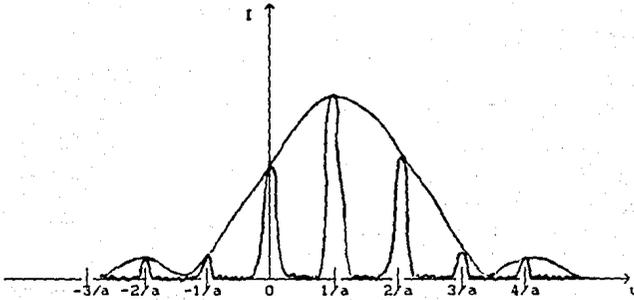


Fig.4-5a Intensidad de una rejilla de blaze con primer orden privilegiado

Ahora bien, si llamamos:

$$K(x) = \exp[i(\phi_2)] = \exp[i\pi w(1 + 2x/a)]$$

se tiene de (1-5) que:

$$U_0 = \int_{-a/2}^{a/2} \exp[i\phi_2 + i\phi_1] dx$$

$$U_0 = \text{TF} \{ K(x) \Pi(x/a) \} \quad (1-9)$$

Por otro lado se sabe que :

La función $\frac{\text{sen } N\pi u a}{N \text{sen} \pi u a}$ es periódica de periodo $1/a$.

Cuando a es pequeña con respecto a L , se puede hacer la aproximación :

$$\frac{\text{Sen } N\pi u a}{N \text{sen} \pi u a} \approx \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sen } \pi(u+q/a)L}{\pi(u+q/a)L} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } \pi(u-q/a)L}{\pi(u-q/a)L}$$

Así se encuentra que:

$$\frac{\text{sen } N\pi u a}{N \text{sen} \pi u a} = \text{TF} \{ W(x/a) \cdot \Pi(x/L) \} \quad (1-10)$$

En donde $W(x/a)$ es la función peine, definida en el apéndice I.

Si a la función $P(x) = (K(x)\Pi(x/a)) \cdot (W(x/a) \Pi(x/L))$, la llamamos función pupila, se tiene que la amplitud total de la onda después de ser reflejada por la rejilla va a estar dada por la transformada de Fourier de la función $P(x)$ (Ver 1-7):

$$U = \text{TF} \{ P(x) \} = \text{TF} \left\{ K(x)\Pi(x/a) \cdot W(x/a)\Pi(x/L) \right\} \quad (1-11)$$

Este resultado importante, nos va a permitir calcular la amplitud de una onda después de ser reflejada (o transmitida) por cualquier tipo de rejilla. Solo necesitaremos encontrar la función pupila de la rejilla para poder calcular la amplitud y la intensidad reflejadas.

o ESTRUCTURA DE UN CCD

a) Estructura elemental de un fotodiodo:

Cada fotodiodo esta constituido por un aislante preso entre un semiconductor y una capa metálica transparente (Ver Fig.5.1a). El aislante puede formarse por oxidación del semiconductor o puede ser depositado por evaporación, pulverización o condensación en fase de vapor.

El semiconductor es extrínseco, es decir, que se le han "inyectado" impurezas a la red cristalina, para disminuir la energia de extracción del metal (Lena,1986).

El semiconductor del CCD que utilizaremos es de tipo n; en un cristal de silicio (Grupo IV) reemplazamos un átomo de silicio por uno de arsénico (Grupo V) obteniendo asi una estructura cristalina con un electrón de más. Este es fácil de extraer y va a ser responsable de la fotoconductividad.

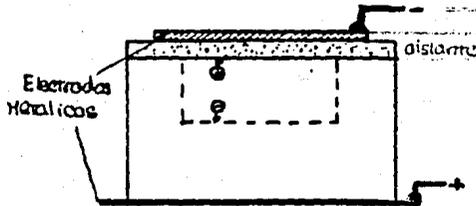


Fig.5.1a Estructura elemental del fotodiodo

Los fotones incidentes extraen del semiconductor a los electrones extras, haciendo que aparesca una cierta corriente. Gracias a los dos electrodos, se puede aplicar una diferencia de potencial que crea un campo eléctrico y modifica la repartición de cargas en el semiconductor.

Al mismo tiempo aparece un pozo de potencial capaz de almacenar las fotocargas liberadas por el semiconductor. (Desgraciadamente, también aparecen cargas liberadas térmicamente, es por eso que debemos enfriar el detector para disminuir la señal generada térmicamente.)

b) Transferencia de carga

La transferencia de carga se hace gracias a una variación sistemática del potencial, sucesivamente en líneas y en columnas.

En la Fig.3, los puntos negros simbolizan a los electrones que se desplazan en el pozo de potencial creado por los electrodos y evolucionando en el tiempo (Lena, 1986) y los tres electrodos, conectados a los tres distintos voltajes V_1 , V_2 y V_3 , corresponden a un pixel.

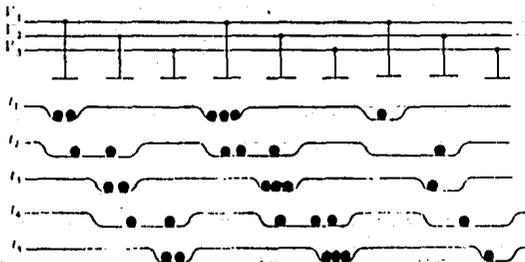


Fig.5.3a Evolucion de los electrones

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
V_1	-5	-5	0	0	0
V_2	0	-5	-5	-5	0
V_3	0	0	0	-5	-5

Ejemplo de la evolucion de las cargas a distintos tiempos

Así, las cargas irán variando secuencialmente de línea y de columna. Gracias a esta evolución la imagen se almacena y la señal de salida se presenta como una señal tipo video, en donde cada impulsión es proporcional a la fotocarga almacenada. (Manual de Operación del CCD, 1987)

c) Respuesta

Una propiedad importante de los CCD es su linealidad hasta una cantidad importante de cargas (hasta 4×10^5 cargas por pixel). Esto permite exposiciones muy largas sobre objeto con baja luminosidad, sin aumentar el ruido de lectura.

d) Resolución

La resolución del ICCD va a estar dada por la función de transferencia modulada del detector (MTF). Para conocer esta función bastará ver cual es el espectro de distintos patrones de barras, barriéndolos horizontalmente y verticalmente y analizando la señal gracias a un osciloscopio.

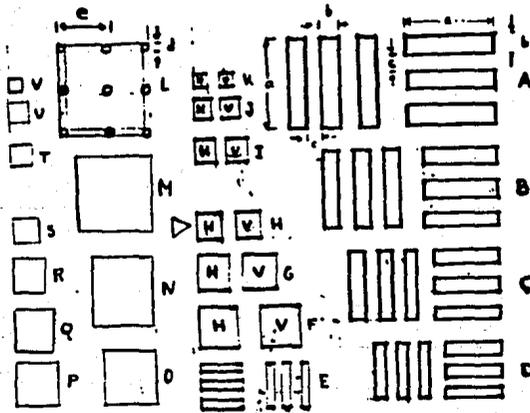


Fig 5.5a) Patrones de barras utilizados para encontrar la función de transferencia

(USAF, 1951) Manual militar standard 150-A para 51.17.

La curva de la función de transferencia para barrido horizontal está dada por la siguiente gráfica :

MTF (Horizontal) CCD P8650A Intensificado

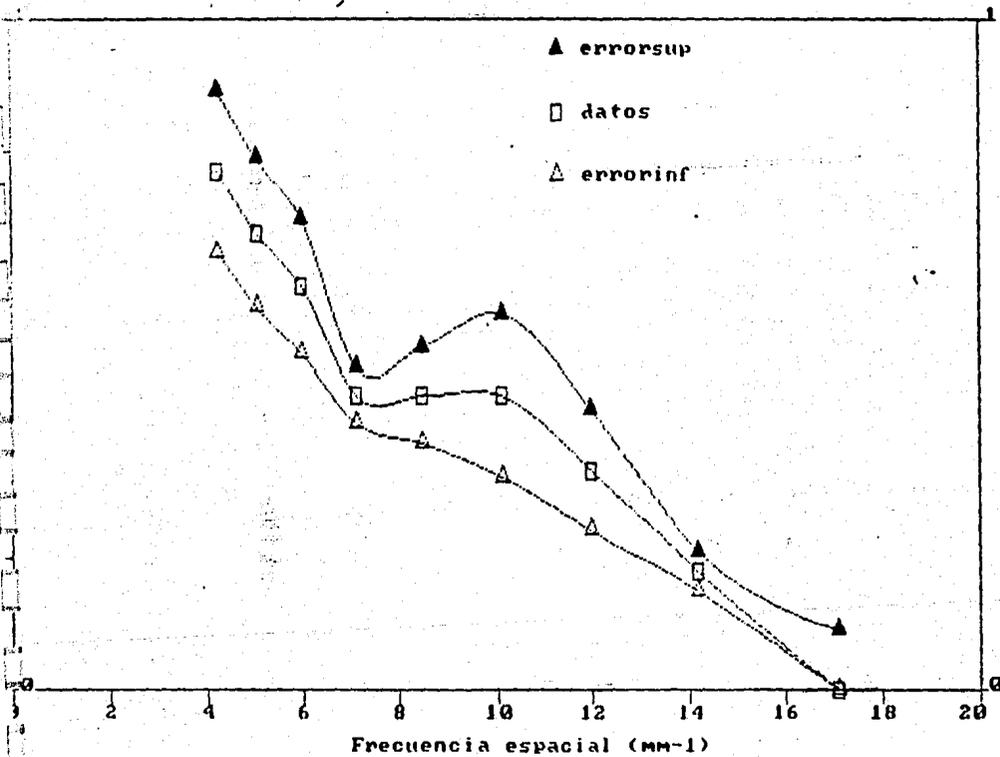


Fig 5.6a)

Funcion de transferencia para barrido horizontal

(Sotelo, 1989)

Gracias a esta gráfica se puede determinar cual es el tamaño de un pixel util, ya que se ve que no se puede considerar el tamaño de los pixeles como el dado por los pixeles de CCD. La modulación para la frecuencia espacial correspondiente a un muestreo con dichos pixeles es menor que 10%. Se puede considerar entonces que dos pixeles "logicos" de 22µm del CCD corresponden a 1 pixel fisico de 44µm.

e) Eficiencia cuántica

Una medida del proceso de conversión corriente-carga es la eficiencia cuántica, que nos da el cociente entre el número de electrones que se obtiene a la salida del detector y el número de fotones incidentes.

Cuando por cada fotón incidente se genera un par electrón-hoyo, se tiene un eficiencia del 100 %. Esta eficiencia aumenta con la longitud de onda y está dada por (Manual de operación del CCD, 1987):

$$\eta = T \left[\frac{(1 - e^{-\alpha L})}{(1 + \alpha L)} \right]$$

en donde

α	Coefficiente de absorción óptica del silicio
L_0	longitud de difusión del electrón
T	transmisión del electrón.
λ	longitud de onda

De la fig 5.8a puede verse cómo la pérdida de respuesta ocurre en longitudes de onda bajas (mucha absorción en los electrodos) y en las altas (los electrones son generados muy profundamente para ser colectados).

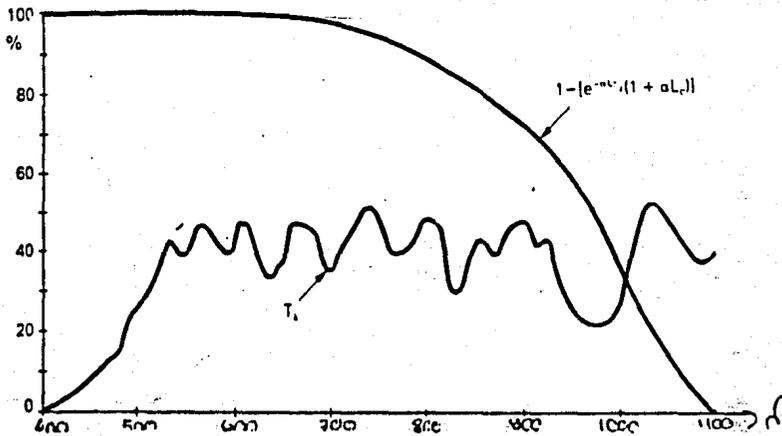


Fig.5.7a) Curvas de la transmisión del electron y de $A(\lambda)$

Por lo que la eficiencia cuántica neta estará dada por:

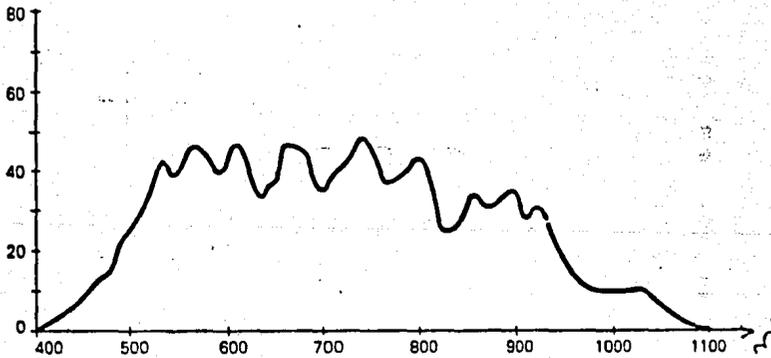


Fig.5.8a) Eficiencia cuantica neta

Las características del CCD que se utilizará en el experimento están dadas en la tabla recapitulativa al final del capítulo III.

BIBLIOGRAFIA GENERAL

1. Aime, Roddier (1977) One dimensional stellar speckle interferometry. Opt. Commun 21, 435-438
2. Aime, Ricort (1980) Speckle Interferometric techniques applied to the observation of solar Photosphere, SPIE Seminar Proc 243, 58-64.
3. Aime, Kadiri, Martijn, Petrov, Ricort (1983) Measurement of Submilliarcsecond speckle Displacements using a Cross Spectrum Analysis Technique: Test on Atmospheric Dispersion. Submitted to Astron. & Astrophys. (1983)
4. Arfken (1970) Mathematical methods for Physicists, Academic Press (LONDON)
5. Bates, Gough, Napier (1973) Speckle interferometry gives holograms of multiple star systems; Astron-astrophys 20, 327-329.
6. Bernal, Gutierrez (1989) Control de una video-grabadora por medio de una computadora personal, Reporte técnico IAUNAM n° 59.
7. Bisajoui (1981) Image et Information. Introduction au Traitement Numérique des Images, MASSON, Paris.
8. Born, Wolf (1980) Principles of Opti, Pergamon Press, New York.
9. Bousquet (1968) Spectroscopie Instrumentale, Dunod Université, Paris.
10. Boyd (1978) J. Opt. Soc Am, 68, 877.
11. Bracewell (1979) Computer. Image Processing, Am. Rev. Astron. Astrophys. 17 113, 1979.
12. Cagnet (1973) Mesures interferométriques des diamètres aparents stellaires, Opt. Commun. 8, 430-434.
13. Chelli, Cruz Gonzales (1987) High spacial resolution infrared observation and variability of the nuclear region of NGC 1068 Astron. astrophys. J (54).
14. Chelli et al (1979) Modulation transfer function for infrared stellar speckle interferometry, evidence for a Log-Norm statistic, Opt. Acta 26, 583-595
15. Chelli (1979) Interférométrie des Tachetures en Infrarouge Proche. Application aux Objets Protostellaires, Thèse Doctorale.
16. Chelli, Mariotti (1986) Visibility and phase analysis for image and pupil plane interferometer at optical wavelengths, Astron-Astrophys, 157, 372-382.
17. Cuevas (1986) Cálculo de la óptica y de las tolerancias mecánicas del , Reporte técnico IAUNAM, #39.

18. Dainty (1978) Computer simulation of speckle interferometry of binary stars in the photon counting mode, Mon.Not.soc 183, 223-226.
19. Dainty (1975) Laser Speckle and Related Phenomena, Topic in Applied Physics, Ed. Dainty J.C, Springer Verlag, Berlin, 1975.
20. Françon (1972) Optique: Formation et Traitement des Images, MASSON, Paris, 1982.
21. M.Françon (1977) Granularité Laser / Speckle, Edit MASSON, Paris.
22. Françon (1987) Holographie, MASSON, Paris.
23. Fried (1966) Optical Resolution Through a Randomly Inhomogenous Medium for Very Long and Very Short Exposures. Journal of the Optical Society of America, Volume 56, 10.
24. Fried (1977) Least square fitting a wave-front distortion estimate to an array of Phase-difference measurements, J:Opt Soc.Am. 67,370-375.
25. Goodman (1973) Introduction à l'Optique de Fourier et à l'Holographie MASSON, Paris.
26. Goodman (1984) Statistical Optics. Ed. Wiley Interscience, NY.
27. Greenaway (1981) Isoplanetism in speckle inteferometry and adaptative optics, Proc.Sac.Peak.conf. C18 , 403-420.
28. Hebdon, Hoge, Beckers (1985) Differential Speckle Imaging with Cophased Multiple Miror Telescope, Thèse doctorale.
29. Hecht, Zajac (1986) Optica, Fondo educativo interamericano.
30. Hunt et al (1983) Analysis of the shift and add method for imaging through turbulent media, J.Optics.Soc.Am 73 ,456-465.
31. Kolmogorov (1941) Local structure of turbulence in incompressible fluids with very high Reynolds numbers.DAN S.S.S.R 30 (4) , 229.
32. Koff,Dryden, Miller (1972) Opt.Commun. 5 #3, 187-192.
33. Korff (1973) Analysis of a method for obtaining Near-diffraction limited information in the presence of atmospheric turbulence, J.Opt.Soc.Am 63 , 971-986.
34. Labeyrie (1970) Attainment of Diffraction Limited Resolution in Large Telescopes by Fourier Analysing Speckle Patterns in Stars. Astron and Astrophys 6, 85-87.
35. Labeyrie (1974) Observations interferometriques au mont Palomar Nouv.Rev.Opt 5, 141-151.
36. P.Lena (1986) Astrophysique, Méthodes Physiques de l'Observation. Savoirs actuels, Inter edition CNRS.

37. Liu, Lohman (1973) High resolution image formation through the turbulent atmosphere, *Opt. Com.* 8, 372-377.
38. Lynds (1976) Digital image reconstruction applied to alpha orionis'' *Astrophys. J.* 207, 174-180.
39. Manual de operaciones del C.C.D (1987) *EEV CCD Imaging III*
40. Marechal, Françon (1970) *Diffraction et structure des images.* Masson, Paris.
41. Michelson, Pease (1921) Measurement of the diameter of a orionis with the interferometer, *Astrophys. J.* 53, 249-259
42. Michelson (1890) On the application of interference methods of astronomical method, *Phil. Mag.* 30, 1-20.
43. Michelson (1891) Measurement of Jupiter satellites by interference, *Astrophys. J.* 51, 257-262.
44. E. Mendez (1987) Laser and stellar speckle, *Sci. Prog. Oxf* 71, 365-380.
45. O'Donnell, Dainty (1980) Space-time analysis of photon-limited stellar speckle interferometry, *J. Opt. Soc. Am.* 70, 1354-1361.
46. Papoulis (1965) Probability Random variables and stochastic processes. Mc. Graw-Hill, New York.
47. Pérez (1988) *Optique Geometrique et ondulatoire*, MASSON, Paris.
48. Petrov (1981) Differential Speckle Imaging Article du Département d'Astrophysique de l'IMSP. Université de Nice.
49. Petrov et al (1982) Application de l'Analyse Interspectrale à la Interférométrie Speckle Differentielle, Thèse Doctorale.
50. Petrov, Kadir, Martin, Ricort, Aime (1982) Application de l'observation interferometrique a la speckle interferometrie, *J. Optics*, Paris 1982, 13 331-337.
51. Petrov (1986) Lecture on diferencial Interferometry Universite d'été CARGES.
52. Petrov (1986) Signal to noise ratio in diferencial speckle interferometry, *J. Opt. Soc. Am. A*, 3, 634-644, (May 1986).
53. Roddier (1978) Distributions et Transformations de Fourier, Mc. Graw Hill, NY.
54. Roddier (1981) The Effects of Atmospheric Turbulence in Optical Astronomy, E. Wolf edit. *Progress in Optics XIX*
55. Roddier, Gilli, Lund (1982) On the Origin of Speckle Boiling and its Effects on Stellar Interferometry, *J. Optics*, vol. 13 N° 5, 263-271.

56. Roddier (1980) Interferometric imaging in optical astronomy, Kitt Peak observatory conference.
57. Selby, Wade (1978) Mon. Not. R Astr Soc 187, 553.
58. Sibille, Chelli, Lena (1979) Infrared speckle Interferometry, Astron. Astrophys 79, 315-328.
59. Sotelo (1989) Sistema espectrofotométrico con detector CCD intensificado, Tesis de licenciatura UNAM.
60. Vogt, Penrod (1983) Doppler Imaging of Spotted Stars: Application to the RS Canum Venaticorum Star HR 1099, Pub. Astr. Soc. Pacific. 95, 565.