UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE UN VORTICE

T E S I S

Que para obtener el Título de

F I S I C O

p r e s e n t a

AURORA MANDUJANO GARCIA

México, D. F. 1990

INDICE

I. INTRODUCCION

1.0 Antecedentes Históricos 1
1.1 Ecuaciones de movimiento 8
1.1.1 Principios de conservación 10
a) Conservación de la masa 10
b) Conservación del momento 11
c) Conservación de la energía 15
1.1.2 Ecuaciones Constitutivas....................................18
1.1.3 Ecuaciones de Navier-Stokes 20
1.1.4 Ecuación de la energía 20
1.1.5 Ecuaciones de movimiento 21
1.2 Conceptos 22
1.2.1 Circulación y vorticidad 22
1.2.2 Curvas de flujo 23
1.2.3 Teoremas de conservacion 24
1.3 Formulación General 26

II TEORIA
SOLUCIONES EXACTAS A LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

2.1 Soluciones conocidas 27
2.1.1 Dependencia radial 28
2.1.2 Solución de Lamb 32
2.1.3 Solución de Taylor 34
2.1.4 Solución de Levi 35
2.2 Soluciones nuevas 36
2.2.1 Dependencia radial 37
2.2.2 Dependencia en r,z 47

2.2.3 Dependencia en r,t 48
a) Solución de Lamb 50
b) Solución general 51
2.3 Discusión 56

III EXPERIMENTO
DISEÑO Y CONSTRUCCION

3.1 Introducción 57
3.2 Dispositivo experimental 58
3.3 Descripción del dispositivo 59
3.4 Visualización 60
3.4.1 Visualización del flujo 60
3.4.2 Metodos utilizados 61
3.5 Observaciones 62
3.6 Obtención de datos 62
3.7 Resultados 64
3.8 Discusión 65

IV CONCLUSIONES

4.1 Conclusiones 67
4.2 Perspectivas 68

BIBLIOGRAFIA

Bibliografia 69

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo, consiste en determinar el campo de velocidades de un vórtice. El estudio de dicho vórtice se hace tanto en forma experimental como teórica. En lo referente a la parte teórica: se obtuvieron soluciones exactas a las ecuaciones de Navier-Sokes para flujos con simetría cilíndrica (Azimutal). De éstas, unas son las ya conocidas y las otras, aparentemente, son soluciones nuevas. En la parte experimental: se logró obtener el perfil de velocidades en la superficie del remolino estudiado, a partir de una distancia r_o= .013 metros. Se probaron dos distintos métodos de visualización de flujos: uno consistió en ponerle un medio de contraste al agua; y el otro en colorear el agua de negro, además de mezclarle el medio de contraste, para después agregarle partículas de aluminio. Este último método fué el que nos sirvió para obtener datos y poder encontrar el perfil de velocidades en la superficie del vórtice.

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1.0 ANTECEDENTES HISTORICOS

Los vórtices han llamado la atención del hombre desde la antigüedad hasta nuestros días. Los encontramos en las leyendas y mitos de las civilizaciones antigüas. Comunmente se les encuentra asociados a deidades malignas [1]. Esto lo podemos apreciar en un pasaje de la Odisea, de Homero, en donde en una de sus aventuras, Ulises logra escapar de las fauces de Caribdis, la cual era un gran remolino en el agua. Tambien los vórtices servían para transportar a los dioses malignos, cuando éstos tenian que ir a sus moradas, o tenian que bajar a la tierra para castigar a algún mortal. En la India hay tribus que ejecutan sus danzas en caminos espirales, ésto debido a que de acuerdo a sus creencias los demonios usan estos caminos. Según la cultura japonesa un dios dragón era el causante de los remolinos en el aire. Esta idea fué encontrada también entre los sumerios, quienes veneraban a dioses de los remolinos en el agua. Así como éstos, muchos otros pueblos en sus leyendas explicaban los fenómenos naturales como causados por los dioses. Posteriormente, durante los siglos VII y VI a.C. ocurrió en Grecia un gran cambio del pensamiento. Aparecieron los filósofos, quienes comenzaron a explicar los fenómenos de la naturaleza con argumentos profundamente distintos. Los filósofos jónicos expresaron principalmente una idea: reemplazaron las analogías antropomórficas por argumentos impersonales y mecanicistas. La formulación de problemas (más que de sus respuestas) tales como: ¿Cuáles son los elementos de los que está formado el universo? y ¿Cómo fué creado el cosmos a partir del caos?, fue una gran aportación de los pensadores griegos, y puede considerarse como el nacimiento de la ciencia [1].

De las ciudades griegas que dieron lugar a nuevas ideas, destaca Mileto. A esta esuela pertenecieron: Thales (624-546 a.C.), Anaximandro (610-545 a.C.) y Anaxímenes (585-528 a.C). Ellos creian en una sóla sustancia primigenia en el universo a partir de la cual se había creado todo. Anaximandro fué el primero en dar la respuesta a la pregunta de cómo se había separado la materia en la creación del universo [1]. La explicación de dicha creación fué el vórtice. Su idea venía del concepto mitológico del remolino cósmico. Anaximandro creía en la evolución del universo y en que el vórtice había jugado un papel importante en transportar la materia pesada a su centro, para formar ahí la Tierra. La materia ligera quedaría en sus alrededores, tal como el oceano y el cielo. Esta idea fué tomada por Anaxímenes y posteriormente por Empédocles (492-432 a.C.) y Demócrito (460-370 a.C.). La opinión de Empédocles difería bastante de la de los Milesios, ya que él no creía en una sustancia primigenia, sino en cuatro que eran: el agua, el aire, la tierra y el fuego. Además él pensaba que las cosas no se movían por sí solas, sino que lo hacían debido a un impulso. Este impulso lo podríamos relacionar actualmente con la fuerza. El distingue dos tipos de "fuerzas": la de atracción y la de repulsión. Con ésto Empédocles da una explicación del fenómeno de la taza de té. Este fenómeno es el que se observa al hacer girar la taza: las partículas sólidas se acumulan en el centro del fondo de ella. Empédocles explicó este fenómeno diciendo que cerca del fondo la fuerza de atracción llevaba a las partículas a unirse a la superficie sólida, y sin embargo en la superficie la fuerza de repulsión las separaba de éste. En analogía a ésto es que Empédocles suponía que la Tierra se habia formado en el centro del remolino cósmico.

Posteriormente, en el climax y al final del desarrollo presocrático, Leucipo y su estudiante Demócrito, desarrollaron la idea de que la materia estaba constituida de particulas indivisibles llamadas "átomos". Demócrito supuso que el movimiento desordenado de los átomos cambiaba a uno ordenado, a través de una serie de procesos. Además consideraba al movimiento vortical tan básico, que veía en éste la ley general de la naturaleza.

El cambio de la concepción mitológica al punto de vista mecanicista llevó consigo una crítica a los dioses del Olimpo. Desde que se cuestionan los argumentos físicos, se puso en duda el poder de los dioses y su existencia. Sin embargo, los filósofos jónicos aún estaban embebidos en sus tradiciones mitológicas y pensaban que sus ideas no contradecían a éstas, sino que eran un maravilloso complemento [1]. Esta situación cambió 100 años despues. Empédocles y los atomistas tenían argumentos puramente mecanicistas. El espiritu de esta época provocaba críticas a la humanidad. Atenas (después de la caída de las ciudades del Asia Menor por los persas) se convirtió en el centro espiritual de Grecia . Aquí aparecen los sofistas, quienes cuestionaban la habilidad de la percepción humana y la validez de las normas sociales. Protágoras (480-411 a.C.) pensaba que la única fuente del conocimiento eran las percepciones humanas. Esta idea juega un papel importante en la filosfía natural hasta nuestros días. Desafortunadamente los argumentos desarrollados por los sofistas eran frivolos y ficticios, y desacreditaban todas las enseñazas. La reacción a estas críticas a los dioses y a la moral no se hizo esperar, las autoridades atenienses consideraron ateos a los filósofos y éstos fueron perseguidos. Una víctima de esta persecución fué Sócrates [1].

Aristóteles, que fué discipulo de Platón (uno de los sofistas), tuvo una tremenda influencia en la cultura occidental. Probablemente él fué el primero en separar el estudio de los fenómenos naturales de sus aspectos mitológicos y filosóficos. Aristóteles en su libro *Metereológica* describe un remolino en el aire.

Los autores romanos siguieron la tradición griega. Hay descripciones de vórtices metereológicos por Leucipo, Séneca y Plinio.

En la Edad Media las ideas de la antigüedad fueron tomadas parcialmente, y criticadas. Por ejemplo en *La Divina Comedia*, de Dante, Odiseo tiene un final más dramático que lo que se dice en la mitologia griega: se encuentra en el infierno y junto con Diómedes Tidida van eternamente en un remolino por ser malos consejeros. El climax en el uso del arte para describir el movimiento vortical, se llevó a cabo durante el Renacimiento, cuyo máximo representante fué Leonardo Da Vinci (1452-1519). Leonardo fue el primero en describir el movimiento turbulento, en reconocer la diferencia entre vórtice potencial y la rotación de cuerpo rígido, y en estudiar los movimientos de vórtices en canales (ver fig.1.1). Su conocimiento del movimiento vortical llevó a Leonardo a hacer estudios anatómicos. Hace apenas unos años se comprobó la teoría de Leonardo de que los vórtices dentro de la válvula aorta son esenciales para su buen control y funcionamiento. Hacia el final de su vida Leonardo revivió la idea del *remolino cósmico*.

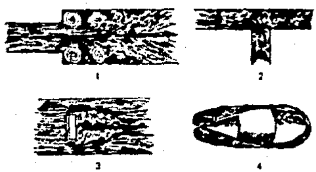


Fig. 1.1 *Esquemas hechos por Leonardo* [1].

Durante los siglos XVI y XVII, surgió una nueva visión del mundo debido a los descubrimientos de Copérnico, Galileo y Kepler. Copérnico dió su teoria heliocéntrica. Galileo descubrió las leyes de la caida libre, y ayudó a clarificar el concepto de inercia. Por último, Kepler dió sus tres leyes para el movimiento planetario. Kepler pensaba que las órbitas circulares eran las trayectorias naturales, y que las órbitas elípticas eran una perturbación de aquellas. Creía que una perturbación en la forma de atracción y repulsión magnética causaba las órbitas elipticas [1]. También creia que el vórtice magnético causado por la rotación del Sol era la razón de esta perturbación. Esta idea contenia la esencia de la teoria cartesiana del vórtice [1].

La idea básica de la teoría cartesiana es que la materia tiene extensión y coincide con el espacio. En consecuencia, no hay vacio y los cuerpos pueden actuar unos con otros sólo por contacto directo. Si un cuerpo se mueve, las particulas fluidas que lo rodean son inducidas a un movimiento circular. Esta concepción es correcta para un continuo. Descartes usó esta idea para los cuerpos celestes, que él pensaba estaban adheridos a una superficie sólida. Pero los vórtices cartesianos no podían describir las órbitas elípticas de los planetas, que son descritas por las leyes de Kepler. Los sucesores de Descartes modificaron su teoría. Por ejemplo, Huygens trató de explicar la gravitación con la teoría de vórtices. En 1689 Leibniz desarrolló un modelo complicado, la teoría armónica de vórtices, que incluía las leyes de Kepler. En 1687 Newton publica los *Principia*, en los que él escribe que las partículas interactúan unas con otras a distancia por atracción. Esta idea fué difícil de comprender por los científicos de su tiempo. Gentes como Leibniz, Huygens, y los Bernoulli, aceptaban generalmente las ideas de la teoría cartesiana. Otra objeción a Newton fué que el postuló un "espacio absoluto", con la propiedad de que un cuerpo puede ser acelerado sin la presencia de otra materia. En 1710, Berkeley argumentó que el movimiento de un cuerpo sólo tiene sentido en relación con otro, y que el espacio absoluto es inaceptable. A mediados del siglo XVIII, después de un período corto de reconciliación, la teoría de Newton fué aceptada, y la cartesiana se desechó.

El siglo XIX fué una edad heróica para la mecánica, los nombres de Leibniz, d'Alambert, Euler, Lagrange y Laplace hablan por si mismos. Euler fué el creador de la dinamica de fluidos [1]. Encontró las ecuaciones de movimiento para un fluido inviscido, que hoy todavía llevan su nombre. El fué el primero, junto con d'Alambert, en usar el término matemático que hoy se conoce como "vector de vorticidad". El significado cinemático de este concepto fué primero reconocido por Cauchy en 1841 y Stokes en 1845. Unos años antes Navier en 1827, Poisson en 1831, y St.Venant en 1843, encontraron bajo varias hipótesis los terminos viscosos de las ecuaciones de movimiento que hoy se llaman "ecuaciones de Navier-Stokes" [1]. En 1858 Helmholtz encontró los famosos teoremas para el campo de vorticidad de un fluido inviscido. Estos descubrimientos dieron la base para la teoría moderna de vórtices. En 1861, Maxwell usó los vórtices como un modelo matemático para el electromagnetismo. En 1867, Lord Kelvin desarrolló una teoría en la que los átomos y moléculas pueden interpretarse como anillos de vórtices. Después, hacia finales de siglo, Lord Kelvin tuvo que admitir que la naturaleza de los vórtices era inestable y decaen, lo cual es incompatible con un modelo atómico [1].

Posteriormente, durante el siglo XIX, se dieron unas soluciones básicas a las ecuaciones de Navier-Stokes [1]. Después de la II Guerra Mundial se abrió un nuevo capítulo en la historia de la dinámica de fluidos con el desarrollo de las computadoras.

La ciencia moderna ha extendido el entendimiento de los vórtices en dos formas: ha hecho claro el significado del movimiento vortical en mecánica, y ha ampliado su estudio a otras áreas (por ejemplo la astronomía), de tal forma que pueden observarse a gran escala.

Los vórtices son muy comunes y variados. Se producen en distintos medios y los hay de diversos tamaños. Van desde los vórtices cuantizados de helio líquido (10^{-8} cm), hasta los de desagüe, tornados, de circulaciones oceánicas, de atmósferas planetarias, la Gran Mancha Roja de Júpiter, los anillos de Saturno, manchas solares, y Galaxias espirales (del orden de años luz) (ver fig.1.2). Se les puede encontrar en líquidos y gases. A pesar de todas estas diferencias de medios y tamaños los vórtices tienen características en común. Nosotros vamos a estudiar los vórtices desde el punto de vista de la *dinámica de fluidos*. A continuación vamos a caracterizar un fluido, y para ello vamos a encontrar sus ecuaciones de movimiento y después vamos a introducir conceptos importantes para entender los vórtices.

fig. 1.2a *Patrones de vórtices en el sur de la atmósfera de Júpiter. La gren mancha roja se ve a la derecha del centro (fotografía de la NASA) [1].*

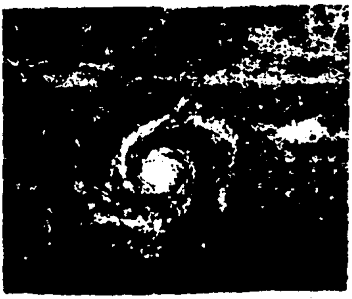


Fig.1.2b *Se muestra un vórtice galáctico (M51) con una galaxia satélite (fotografía del observatorio Hale) [1].*

1.1 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

El estudio del movimiento de los fluidos es lo que constituye *la dinámica de fluidos*. Debido a que los fenómenos estudiados por ésta son macroscópicos, un fluido puede considerarse como un continuo. Es decir, si tomamos un pequeño volumen de fluido, éste contendrá un número elevado de moléculas. Cabe mencionar que cuando hablamos de un elemento de volumen infinitamente pequeño, lo pensamos físicamente muy pequeño, en comparación con el volumen del sistema que estamos estudiando, pero grande comparado con la distancia de separación entre las moléculas [2]. En esta aproximación las moléculas individuales son ignoradas y suponemos que el fluido consiste de materia continua [3].

La descripción matemática del estado de un fluido en movimiento se realiza a través del campo vectorial de velocidades $\vec{u}(x,y,z,t)$ y de dos magnitudes escalares: la densidad $\rho(x,y,z,t)$ y la presión $\vec{p}(x,y,z,t)$. Todos los campos, tales como la densidad y la velocidad, son en general funciones de las coordenadas espaciales y el tiempo.

Para encontrar las ecuaciones dinámicas podemos emplear dos distintos sistemas de descripción, éstos son el sistema euleriano y el lagrangiano.

Sistema euleriano

En el sistema euleriano nos fijamos en el fluido que pasa a través de un volumen de control fijo en el espacio. Las partículas que vemos en dicho volumen en un instante de tiempo, son distintas a aquellas que vemos en el instante de tiempo posterior, o las que vimos en el instante de tiempo anterior. En este sistema las variables independientes son las coordenadas espaciales x,y,z, y el tiempo t [3]. Aquí y en todo lo que sigue, se entiende por partícula a un elemento de volumen. Entonces, si hablamos del desplazamiento de una partícula fluida, no nos referimos al desplazamiento de una molécula individual, sino a un elemento de volumen que contiene un gran número de moléculas, pero que se sigue considerando como un punto.

Sistema langrangiano

En el sistema lagrangiano nos fijamos en un volumen de control que se mueve con el fluido. Las partículas que vemos en dicho volumen van a ser las mismas para todo instante de tiempo. Vamos a seguir la evolución del elemento de fluido conforme éste fluye. El elemento va a rotar y a deformarse conforme el tiempo transcurra. Entonces, las variables independientes son las coordenadas espaciales iniciales X_o, Y_o, Z_o, y el tiempo t [3].

Sea α un campo, como la densidad o la velocidad del fluido. Si observamos un elemento de fluido desde el punto de vista lagrangiano en un intervalo de tiempo δt, su posición va a cambiar una cantidad $\delta x, \delta y, \delta z$. Por cálculo diferencial encontramos que el cambio de α está dado por la siguiente cantidad:

$$\delta\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\alpha}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\delta z \quad .$$

Dividiendo esta ecuación entre δt obtenemos:

$$\frac{\delta\alpha}{\delta t} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\delta x}{\delta t}\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\delta y}{\delta t}\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\delta z}{\delta t}\frac{\partial\alpha}{\partial z} \quad .$$

El lado izquierdo de la ecuación representa el cambio total de la cantidad α en el sistema lagrangiano, el cual denotamos por $D\alpha / Dt$, haciendo tender δt a 0. Así encontramos que $\lim_{\delta t \to 0} (\delta x/\delta t)$ representa la componente de la velocidad en la dirección x, la cual denotaremos por u. En forma similar para y y z cuyas componentes de la velocidad en éstas direcciones denotaremos por v y w, respectivamente. Entonces la ecuación anterior es la siguiente:

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\alpha \quad . \tag{1.1}$$

El término del lado izquierdo de la ecuación es conocido como la derivada material. Esta representa el cambio total de la cantidad α en coordenadas lagrangianas. El lado derecho de la ecuación representa el cambio total de la cantidad α en coordenadas eulerianas, ya que contiene solamente derivadas respecto a las variables independientes en dicho sistema. El primer término del lado derecho representa el hecho de que para un flujo estacionario, α cambia debido a que un elemento dado de fluido cambia su posición en el tiempo y entonces toma distintos valores de α.

1.1.1 PRINCIPIOS DE CONSERVACION

Las ecuaciones de conservación las vamos a encontrar en el sistema de referencia lagrangiano, ya que es mas adecuado para aplicar los principios de conservación a un sistema que siempre contiene las mismas partículas.

a) Conservación de la masa [3]

Consideremos un elemento de fluido cuyo volumen V es escogido en forma arbitraria. Si seguimos dicha masa de fluido conforme fluye, veremos que su forma cambia pero su masa permanece constante. Este es el principio de conservación de la masa. La masa contenida en el volumen V está dada por $\int_V \rho \, dV$. Usando la descripción lagrangiana esta masa no cambia, o sea

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \, dV = 0 \quad . \tag{1.2}$$

Para encontrar una expresión mas adecuada para la ecuación de conservación de la masa vamos a hacer uso del teorema de transporte de Reynolds [3]. Este teorema nos relaciona la derivada lagrangiana de una integral de volumen con una integral de volumen cuyo integrando solo contiene derivadas eulerianas. A continuación escribiremos la relación que representa dicho teorema para cualquier campo α :

$$\frac{D}{Dt}\int_V \alpha\, dV = \int_V \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \vec{u}) \right] dV , \qquad (1.3)$$

Usando esta ecuación, la ecuación (1.2) puede escribirse:

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho \, d\, V = \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right] dV = 0$$

y como el volumen se escogió en forma arbitraria, entonces el integrando debe ser nulo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad .$$

Esta es la ecuación de conservación de la masa. Es una ecuación diferencial que impone que la velocidad sea continua, por lo que esta relación también se conoce como ecuación de continuidad. Si desarrollamos el segundo término de la ecuación encontramos otra forma de escribirla:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad . \qquad (1.4)$$

Para fluidos incompresibles ρ = cte y la ecuación de continuidad toma la forma simple:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \, . \qquad (1.5)$$

b) Conservación del momento

El principio de conservación del momento es una aplicación de la segunda ley de Newton en el sistema de referencia lagrangiano, y nos dice que la rapidez de cambio del momento es igual a la fuerza externa que actúa sobre una masa de fluido [3]. Es posible distinguir dos clases de fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido. El primer grupo lo forman las fuerzas de largo alcance, tales como la fuerza gravitacional y la fuerza electromagnética. Estas fuerzas actúan sobre todo el elemento de fluido, y la fuerza total es proporcional a la masa total del elemento. Se les llama fuerzas volumétricas. El segundo grupo lo integran las fuerzas que decrecen muy rapidamente con la distancia, por lo cual estas fuerzas solo actúan sobre la superficie del elemento de fluido, tales como la presión o los esfuerzos viscosos [2]. A estas se les llama fuerzas superficiales.

Si $\vec{f}$ es la fuerza volumétrica por unidad de masa, entonces la fuerza volumétrica total que actúa sobre el elemento de fluido es:

$$\int_V \rho \vec{f}\, dV \quad .$$

Ahora, si $\vec{t}$ es la fuerza superficial por unidad de área, entonces la fuerza total que actúa sobre la superficie S que limita al volumen V es:

$$\int_S \vec{t}\, ds \quad ,$$

por lo que el principio de conservación del momento lleva a la siguiente ecuación:

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\vec{u}\, dV = \int_S \vec{t}\, ds + \int_V \rho\vec{f}\, dV \quad , \tag{1.6}$$

siendo el lado izquierdo el cambio temporal del momento total del elemento de fluido contenido en el volumen V. El lado derecho representa las fuerzas externas que actúan sobre el elemento de fluido [3].

Para transformar la primera integral del lado derecho a una integral de volumen, vamos a encontrar la fuerza $\vec{t}$ en términos del tensor de esfuerzos [4].

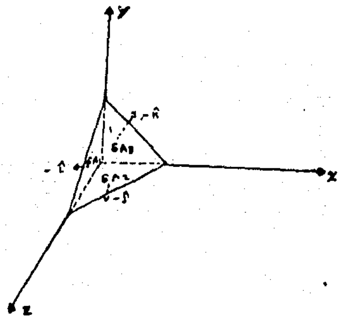


Fig.1.3 *Se muestra un elemento de volumen, en forma de tetraedro con tres caras ortogonales.*

Consideremos todas las fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido contenido en un volumen δV. Por simplicidad, se tomará un tetraedro como volumen que contiene al elemento de fluido que se va a estudiar (Ver figura 1.3) [4]. Las tres caras ortogonales tienen áreas δA_1, δA_2, δA_3, y normales unitarias dirigidas hacia afuera $-\hat{i}$, $-\hat{j}$, $-\hat{k}$. La cara inclinada tiene área δA y normal unitaria $\hat{n}$. La suma de las fuerzas superficiales que actúan sobre el elemento de volumen, a través de las cuatro caras del tetraedro, es:

$$\vec{t}(\hat{n})\delta A + \vec{t}(-\hat{i})\delta A_1 + \vec{t}(-\hat{j})\delta A_2 + \vec{t}(-\hat{k})\delta A_3 \quad .$$

Debido a que las caras ortogonales son la proyección de la cara no ortogonal en cada uno de los planos, tenemos las siguientes relaciones:

$$\delta A_1 = n_x \delta A \ , \ \delta A_2 = n_y \delta A, \ \delta A_3 = n_z \delta A \ ,$$

dónde n_x, n_y, y n_z son las componentes de la normal unitaria $\hat{n}$ sobre cada uno de los ejes. Por lo que la suma la podemos escribir como:

$$[\ \vec{t}(\hat{n}) - (\ n_x \ \vec{t}(\hat{i}) + n_y \ \vec{t}(\hat{j}) + n_z \vec{t}(\hat{k})\ )]\ \delta A \quad ,$$

por lo cual la fuerza total que actúa sobre el elemento de fluido contenido en el volumen δV, limitado por la superficie δA y sus componentes ortogonales, es

$$\rho \vec{a}\ dV = \rho \vec{f}\ dV + [\ \vec{t}(\hat{n}) - (\ n_x \vec{t}(\hat{i}) + n_y \vec{t}(\hat{j}) + n_z \vec{t}(\hat{k})\ )] \ ,$$

en donde $\vec{a}$ es la aceleración neta del elemento de fluido contenido en δV. Sea l la longitud de uno de los lados del tetraedro. entonces, como δV es proporcional a l^3 y δA es proporcional l^2, dividiendo la ecuación entre l^2 y haciendo tender l a cero, obtenemos para un elemento de fluido infinitesimal la relación

$$\vec{t}(\hat{n}) = n_x \vec{t}(\hat{i}) + n_y \vec{t}(\hat{j}) + n_z \vec{t}(\hat{k}). \qquad (1.7)$$

Tomando la componente $\hat{i}$ de la ecuación anterior :

$$t_i(\hat{n}) = n_x \sigma_{ix}(a) + n_y \sigma_{iy}(b) + n_z \sigma_{iz}(c) \quad ,$$

donde

$$\vec{t}(\hat{e}_i) = \sigma_{ix} \hat{i} + \sigma_{iy} \hat{j} + \sigma_{ik} \hat{k} \quad ,$$

con $\hat{e}_i = \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ y donde σ_{ij} representa el esfuerzo en la dirección i que actúa sobre una superficie con normal unitaria j. Introduciendo el tensor de esfuerzos $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{\sigma} = \vec{t}(\hat{i})\hat{i} + \vec{t}(\hat{j})\hat{j} + \vec{t}(\hat{k})\hat{k} \quad ,$$

la ecuación (1.7) se transforma en:

$$\vec{t} = \tilde{\sigma} \cdot \hat{n} \quad . \tag{1.8}$$

Las tres componentes diagonales del tensor de esfuerzos se conocen como esfuerzos normales, y las seis restantes son llamadas esfuerzos cortantes o tangenciales [4]. De las ecuaciones (1.8) y (1.6) obtenemos:

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\vec{u}\, dV = \int_S \tilde{\sigma}\cdot\hat{n}\, ds + \int_V \rho\vec{f}\, dV \quad .$$

Usando el teorema de transporte de Reynolds en el lado izquierdo de la ecuación, el teorema de Gauss en el primer miembro del lado derecho de la ecuación y tomando en cuenta que se escogió un volumen de control arbitrario, se llega a la siguiente relación:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u}) + \nabla\cdot(\rho\vec{u}) = \nabla\cdot\tilde{\sigma} + \rho\vec{f} .$$

Finalmente, desarrollando el lado izquierdo de la ecuación y tomando en cuenta la ecuación de continuidad se llega a la forma usual para la conservación del momento:

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\right)\vec{u} = \nabla\cdot\tilde{\sigma} + \rho\vec{f} \; . \tag{1.9}$$

El lado izquierdo de la ecuación representa la rapidez de cambio de la velocidad de un elemento de volumen unitario del fluido. El primer término es la aceleración temporal y el segundo la aceleración convectiva. Esta última se da aún si el flujo es estacionario. El lado derecho representa a las fuerzas que causan dichas aceleraciones.

c) Conservación de la energía [3]

El principio de conservación de la energía es una aplicación de la primera ley de la termodinámica a un elemento de fluido conforme este fluye. La primera ley de la termodinámica se aplica a sistemas termodinámicos que inicialmente están en equilibrio, y después de un evento, vuelven a alcanzar otro estado de equilibrio. Con estas condiciones se establece que el cambio en la energía interna durante la realización de un evento es igual a la suma del trabajo hecho por o sobre el sistema, y el calor absorbido o cedido durante el evento [3]. En el caso de un fluido se producen procesos de conducción térmica y rozamiento interno, por lo que no se ve obvio aplicar en forma global el principio de conservación de la energía [2]. Para poder emplear el principio de conservación de la energía es necesario introducir la hipótesis de equilibrio local, en la que se considera que si se aislara un elemento de fluido, este quedaría en equilibrio, y aquí se podrían definir las variables termodinámicas y suponer que dichas variables satisfacen las mismas relaciones que se satisfacen en forma global [4]. Si $\rho\epsilon$ es la densidad de energía interna por unidad de masa del elemento de fluido, y $1/2\ (\vec{u}\cdot\vec{u})\rho$ la densidad de energía cinética, la energía total del elemento del fluido contenido en V es:

$$\int_V (\rho\epsilon + 1/2\ \rho\ \vec{u}\cdot\vec{u})\ dV \quad .$$

Si $\vec{t}$ representa la fuerza superficial por unidad de área y $\vec{f}$ la fuerza volumetrica total por unidad de masa, la potencia total realizada sobre el elemento de fluido está dada por:

$$\int_S \vec{u}\cdot\vec{t}\ ds + \int_V \vec{u}\cdot\rho\vec{f}\ dV \quad .$$

Ahora, si $\vec{q}$ representa el flujo de calor que atravieza la superficie S, que rodea al volumen V, y $\hat{n}$ es la normal a la superficie, la cantidad total de calor que pasa a través de S, por unidad de tiempo va a ser:

$$\int_S \vec{q}\cdot\hat{n}\ ds \ .$$

Por lo que el principio de conservación de energía nos lleva a la ecuación:

$$\frac{D}{Dt}\int_V (\rho\epsilon + 1/2\ \vec{u}\cdot\vec{u})\ dV = \int_S \vec{u}\cdot\vec{t}\ ds + \int_V \vec{u}\cdot\rho\vec{f}\ dV - \int_S \vec{q}\cdot\hat{n}\ ds \quad .$$

Usando el teorema de transporte de Reynolds en el lado izquierdo de la ecuación, y sustituyendo $t = \tilde{\sigma}\cdot\hat{n}$, se tiene:

$$\int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\rho\epsilon + 1/2\ \rho\ \vec{u}\cdot\vec{u}) + \nabla\cdot\left[(\rho\epsilon + 1/2\ \rho\ \vec{u}\cdot\vec{u})\ \vec{u}\right]\right\} =$$

$$\int_S \vec{u}\cdot(\tilde{\sigma}\cdot\hat{n})\ dS + \int_V \vec{u}\cdot\rho\vec{f}\ dV - \int_S \vec{q}\cdot\hat{n}\ dS \quad .$$

Usando el teorema de Gauss, desarrollando la expresión anterior, y usando la ecuación (1.9) se encuentra finalmente la ecuación de la energía:

$$\rho\ (\ \partial/\partial t + \vec{u}\cdot\nabla\ )\ \epsilon = \tilde{\sigma} : \nabla\vec{u} - \nabla\cdot\vec{q}, \qquad (1.10)$$

donde $\tilde{\sigma} : \nabla\vec{u} = \sigma_{ij}\ \partial u_j/\partial x_i$ (aquí y en lo subsecuente se usará la convención de Einsten de suma sobre índices repetidos. Esta ecuación sólo representa el balance de energía térmica, ya que en la simplificación anterior, al utilizar la ecuación (1.9), los términos de la energía mecánica se eliminanaron. El lado izquierdo representa la rapidez de cambio de la energía interna. El primer término representa la variación temporal, y el segundo término los cambios convectivos locales debidos al movimiento del fluido. El lado derecho representa las causas del cambio en la energía: por un lado la transformación de energía mecánica en energía térmica debido a la acción de los esfuerzos superficiales, y por otro la rapidez con la que se intercambia calor.

1.1.2 Ecuaciones constitutivas [3]

Tenemos cinco ecuaciones escalares debidas a los principios de conservación básicos, la de la continuidad (1.4) y la de la energía (1.10) son ecuaciones escalares, mientras que la del momento es una ecuación vectorial que representa tres ecuaciones escalares. A éstas podemos agregar dos ecuaciones de estado. Pero las leyes de conservación involucran 17 incógnitas que son $\vec{u}$ y $\vec{q}$, la velocidad y el flujo de calor, respectivamente, con tres componentes cada una. Las cantidades escalares ρ y ε, la densidad y la energía interna, y el tensor de esfuerzos $\tilde{\sigma}$ con 9 componentes. Para obtener un conjunto completo de ecuaciones es necesario establecer relaciones entre los campos involucrados en las ecuaciones anteriores.

A continuación se van a obtener las ecuaciones constitutivas para el tensor de esfuerzos. Los fluidos que se van a estudiar son los llamados fluidos newtonianos, determinados por las siguientes tres condiciones:

1. Cuando el fluido está en reposo, el esfuerzo es hidrostático y la presión ejercida por el fluido es la presión termodinámica.

2. El esfuerzo $\tilde{\sigma}$ está relacionado linealmente con el gradiente de la velocidad y depende solo de éste y la presión.

3. No hay direcciones preferenciales en un fluido, asi que las propiedades del fluido son funciones puntuales.

De las condiciones anteriores se requiere que el tensor de esfuerzos sea de la forma:

$$\sigma_{ij} = -p\ \delta_{ij} + \tau_{ij} \qquad ,$$

dónde τ_{ij} solo depende del movimiento y lo llamamos tensor de esfuerzos viscosos, δ_{ij} es la delta de Kroenecker y p es la presión termodinámica [3]. Podemos establecer la forma general del tensor τ_{ij} de la siguiente manera. En un fluido hay procesos de rozamiento interno sólo en el caso en que las particulas del fluido se muevan con velocidades distintas. De aqui que τ_{ij} dependa de las derivadas espaciales de la velocidad [2]. Si los gradientes de las velocidades son pequeños, se puede suponer que la transferencia de impulso debida a la viscosidad depende sólo de las primeras derivadas de la viscosidad. Con esta misma aproximación, se puede suponer que τ_{ij} es una función lineal de $\partial u_i/\partial x_k$ [2]. No pueden existir términos independientes de $\partial u_i/\partial x_k$, ya que τ_{ij} debe anularse para u = constante [2]. También τ_{ij} debe anularse para cuando el fluido completo está en rotación uniforme, ya que en éste movimiento, en el fuido no hay rozamiento interno. Las sumas

$$\partial u_i/\partial x_k + \partial u_k/\partial x_i \quad ,$$

son combinaciones lineales de las derivadas $\partial u_i/\partial x_k$, y se anulan para el caso de rotación rigida, ya que para éste, si la velocidad angular es Ω, entonces $\vec{u} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ y la parte simétrica de la suma de la derivadas $\partial u_i/\partial x_k$ se anula .[2].

El tensor más general de segundo rango que satisface las condiciones anteriores es

$$\tau_{ij} = \lambda\, \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) .$$

Por lo tanto el tensor de esfuerzos esta dado por la relación:

$$\sigma_{ij} = -p\, \delta_{ij} + \lambda\, \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) . \qquad (1.11)$$

El tensor σ_{ij} quedó en términos de la presión y los gradientes de la velocidad, que anteriormente se introdujeron. Además quedaron los coeficientes λ y μ , que se determinan experimentalmente. μ es conocido como el coeficiente de viscosidad dinámica y λ el segundo coeficiente de viscosidad ó coeficiente de viscosidad volumétrica.

La otra ecuación constitutiva es la que relaciona el flujo de calor con los gradientes de temperatura. El flujo de calor se debe a la conducción térmica. El flujo está relacionado con la variación de la temperatura en el fluido [2]. La relación entre la variación de la temperatura y el flujo de calor es muy simple para el caso en que los gradientes de temperatura son pequeños. En los fenómenos de conducción térmica casi siempre se está en estos casos [2]. Por lo tanto se puede desarrollar $\vec{q}$ en series de potencias de los gradientes de Temperatura, y tomar sólo el primer término. El término constante es cero, ya que $\vec{q}$ debe anularse cuando el gradiente de T se anule. De esta forma, se obtiene

$$\vec{q} = - k \nabla \vec{T} . \tag{1.12}$$

Donde el factor de proporcionalidad k se conoce como conductividad térmica. Este factor siempre es positivo, ya que el calor siempre fluye de los lugares de mayor temperatura a los de menor temperatura. Por lo cual $\vec{q}$ y $\nabla \vec{T}$ deben tener signos opuestos.

1.1.3 Ecuaciones de Navier- Stokes

De las ecuaciones de conservación del momento (1.9) y la ecuación constitutiva (1.11) se obtienen las ecuaciones de Navier-Stokes, que a continuación escribiremos en notación tensorial:

$$\rho\frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]\right) + \rho f_j \tag{1.13}$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes representan tres ecuaciones escalares correspondientes a los tres posibles valores del subíndice j.

Para el caso de un fluido incompresible estas ecuaciones se reducen a:

$$\rho\frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} + \rho f_j .$$

1.1.4 Ecuación de la energía

De la ecuación de conservación de la energía (1.10) y las ecuaciones constitutivas (1.11) y (1.12) se obtiene la ecuación de la energía:

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = - p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \phi \quad , \quad (1.14)$$

donde ϕ está dado por:

$$\phi = \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad , \quad (1.14a)$$

y se conoce como función de disipación, debido a que es una medida de la rapidez con que la energía mecánica se convierte en calor.

Para fluidos incompresibles se tiene que:

$$\phi = 1/2 \; \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \quad .$$

1.1.5 Ecuaciones de movimiento

Se han encontrado las ecuaciones de movimiento de un fluido, estas son: la de continuidad (1.4), las de Navier-Stokes.(1.13), la de energía (1.14) y dos ecuaciones de estado , que son

$$P = P(\rho,T) \quad ,$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho,T) \quad .$$

En la ecuación de la energía ϕ está dada como en la ecuación (1.14).

CONCEPTOS

A continuación vamos a introducir algunas defínciones y conceptos que nos van a ser útiles para entender mejor a los fluidos, en especial a los vórtices.

DEFINICIONES

1.2.1 Circulación y vorticidad

La vorticidad de un elemento de fluido la definimos como el rotacional del vector velocidad; es decir, está definida como

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} \quad .$$

Físicamente la ecuación de arriba quiere decir que si tenemos un campo de flujo, en dicho campo de flujo existe vorticidad, en aquellos lugares en los que los elementos de fluido roten sobre sus propios ejes. Podemos tener campos de flujo en los que el fluido esté rotando, mas sin embargo la vorticidad de éste campo es cero. De la definición de vorticidad se ve que para una rotación rígida la vorticidad está dada por

$$\vec{\omega} = 2\vec{\Omega} \quad .$$

La circulación alrededor de una curva cerrada se define como

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} \quad ,$$

dónde $d\vec{l}$ es el elemento de línea de la curva. Ahora, si A es el área encerrada por la curva y $\vec{n}$ el vector normal unitario al área, usando el teorema de Stokes obtenemos:

$$\Gamma = \oint (\nabla \times \vec{u}) \cdot \hat{n} \, dA \quad ,$$

y de la definición de vorticidad se tiene:

$$\Gamma = \oint \vec{\omega} \cdot \hat{n}\, dA \quad .$$

De aquí vemos que para elecciones arbitrarias de contornos y áreas encerradas A, $\Gamma = 0$ si $\vec{w} = 0$. Físicamente podemos ver la circulación de la siguiente manera: Si colocamos un contorno cerrado dentro del fluido, y observamos las partículas dentro de éste, poedemos decir que hay circulación si dichas partículas se mueven alrededor del contorno.

Los flujos en los que $\vec{\omega} = 0$ excepto en algunas singularidades se conocen como flujos irrotacionales o potenciales. Se les da el nombre de potenciales ya que si $\nabla \times \vec{u} = 0$ significa que existe una función Φ tal que $\vec{u} = \nabla \Phi$.

1.2.2 CURVAS DE FLUJO

Las curvas de flujo se usan sobre todo para propósitos de visualización. Hay al menos cuatro y se conocen como: ***líneas de corriente, trayectorias, líneas de emisión y líneas de vorticidad.*** En general no coinciden y a continuación vamos a describir cada una de ellas.

Líneas de corriente

Las líneas de corriente son aquellas cuyas tangentes siempre son paralelas al vector velocidad. Si tenemos un campo de flujo dependiente del tiempo, la velocidad va a estar cambiando por lo que se consideran líneas de corriente instantáneas. Las líneas de corriente cumplen con las siguientes ecuaciones en coordenadas cartesianas:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

donde u,v y w son las componentes de la velocidad en las direcciones x,y y z respectivamente.

Trayectorias

Una trayectoria es una línea trazada por un partícula de fluido conforme se mueve. Estas líneas cumplen la siguiente ecuación (en coordenads cartesianas):

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i(x,y,z,t) \quad .$$

El subíndice i puede tomar tres valores que indican cada una de las componentes de la velocidad para u_i.

Líneas de emisión

La línea de emisión es la que está formada por todas las partículas de fluido que en algún instante de tiempo estuvieron en una determinada posición del flujo. Las ecuaciones que cumplen éstas líneas son las mismas que cumplen las trayectorias, pero, con la diferencia de que en éste caso, están sujetas a las condiciones iniciales, $x=x_o, y=y_o, z=z_o$, al tiempo $t=\tau$.

Líneas de vorticidad

Las líneas de vorticidad son aquellas cuyas tangentes son siempre paralelas al vector vorticidad. Son las análogas a las líneas de corriente para el caso de la velocidad.

Tubos de corriente y vorticidad

Un tubo de corriente es una superficie en el fluido formada por todas las líneas de corriente que pasan a través de un contorno cerrado en el fluido. El tubo de vorticidad es el análogo al anterior pero para el caso en que las líneas que se toman en cuenta son las de vorticidad.

1.2.3 TEOREMAS DE CONSERVACION

Conservación de la circulación.

Si tenemos un flujo incompresible se cumple que

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad ,$$

integrando sobre un volumen V y usando el teorema de Gauss se tiene que :

$$\int_{s} \vec{u} \cdot \hat{n} \, ds \quad ,$$

donde s encierra al volumen V. Si consideramos la superficie sobre un tubo de corriente incluyendo los extremos, tenemos que sobre las paredes del tubo $\vec{u} \cdot \hat{n}=0$ por definicion de tubo de corriente. por lo tanto

$$\int_{A_1} \vec{u} \cdot \hat{n} + \int_{A_2} \vec{u} \cdot \hat{n} = 0 \quad .$$

Definiendo $\hat{n}$ como la normal unitaria hacia afuera

$$\int_{A_1} \vec{u} \cdot \hat{n} = -Q_1$$

$$\int_{A_2} \vec{u} \cdot \hat{n} = Q_2$$

donde Q_1 es el volumen de fluido que atravieza la superficie A_1 y Q_2 el correspondiente a A_2, por lo tanto:

$$Q_1 = Q_2$$

Lo cual nos dice que el volumen de fluido que atravieza la superficie A_1 por unidad de tiempo es igual al volumen de fluido que atravieza la superficie A_2 por unidad de tiempo.

Ahora, para un campo de flujo en general tenemos que $\nabla \cdot \vec{\omega}=0$, entonces, si en forma analoga a lo anterior tomamos un tubo de vorticidad cuyos extremos tengan areas A_1 y A_2 encontramos que

$$\int_{A_1} \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, ds + \int_{A_2} \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, ds = 0 \quad ,$$

por lo que, de la definición de circulación, se encuentra:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2$$

donde Γ_1 corresponde a la primera integral y Γ_2 a la segunda. Lo que nos dice esta última ecuación es que la circulación alrededor del contorno cerrado que encierra a la superficie A_1 es igual a la circulación en el contorno cerrado que encierra a la superficie A_2. Se puede establecer que la circulación en cada sección transversal del tubo de vorticidad es la misma.

1.3 FORMULACION GENERAL

El problema a desarrollar en la presente tesis, es determinar el campo de velocidades de un vórtice. Este problema se trató de resolver tanto en forma teórica como experimental, y después se relacionaron ambos resultados. En cuanto a la parte teórica, se resolvieron las ecuaciones de Navier-Stokes para flujos con simetría cilíndrica (azimutal), y se encontraron soluciones que describen vórtices. En lo que respecta a la parte experimental, se construyó un dispositivo para generar un vórtice, se visualizó, y se obtuvieron datos que permitieron determinar el campo de velocidades del vórtice en su superficie. En el capitulo 2 se muestran los resultados teóricos. En el 3 se describe el dispositivo experimental y se muestran los resultados experimentales obtenidos y en el capitulo 4 se comparan los resultados teóricos con los experimentales y se dan las conclusiones del trabajo.

CAPITULO 2

TEORIA

SOLUCIONES EXACTAS A LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

En general las soluciones de las ecuaciones básicas de movimiento se encuentran por integración numérica, y para ésto necesitamos la ayuda de una computadora. Sin embargo para ciertas simetrías y propiedades podemos encontrar algunas soluciones exactas, de las cuales unas nos van servir para describir vórtices [1].

2.1 SOLUCIONES CONOCIDAS

Debido a que algunos vórtices tienen simetría cilíndrica, es conveniente estudiarlos en este sistema de coordenadas, ya que de esta manera se simplifican los cálculos. Así, vamos a transformar a coordenadas cilíndricas las ecuaciones de movimiento encontradas en el capítulo anterior. Nosotros queremos encontrar soluciones que describan vórtices con simetría azimutal, es decir, que la derivada con respecto a ϕ va ser cero. Sean u, v y w las componentes de la velocidad en las direcciones r, ϕ, y z respectivamente. r es la coordenada radial, ϕ la azimutal y z la axial. Con estas suposiciones encontramos que las ecuaciones de continuidad y las de Navier- Stokes en coordenadas cilíndricas con simetría azimutal se transforman a

$$\frac{1}{r}(ru)_r + w_z = 0 \quad , \tag{2.1}$$

$$u_t + u u_r + w u_z - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} p_r + \nu \left[\frac{1}{r}(ru)_r\right]_r + \nu u_{zz} \quad , \qquad (2.2)$$

$$v_t + u v_r + w v_z + \frac{uv}{r} = \nu \left\{ \left[\frac{1}{r} (rv)_r\right]_r + v_{zz} \right\} \quad , \qquad (2.3)$$

$$w_t + u w_r + w w_z = -\frac{1}{\rho} P_z + \nu \left[\frac{1}{r} (r w_r)_r + w_{zz} \right] \quad , \qquad (2.4)$$

donde $\vec{u} = \hat{e}_r \; u(r,z,t) + \hat{e}_\phi \; v(r,z,t) + \hat{e}_z \; w(r,z,t)$, y los subíndices r,ϕ,z indican derivada parcial respecto a cada variable.

La ecuación de la energía no la escribimos debido a que al suponer que el fluido es incompresible se desacopla de las anteriores, y así las ecuaciones de Navier-Stokes y la de la continuidad forman un conjunto cerrado de ecuaciones. Por lo pronto solo nos interesan estas ecuaciones. A continuación vamos a estudiar algunas soluciones exactas.

2.1.1 Dependencia radial

Si suponemos que tenemos un movimiento en el plano (r,ϕ) que es independiente del tiempo y de z en ausencia de fuerzas externas, y además $u=w=0$, se tiene la siguiente solución de la ecuación (2.3):

$$v = \frac{a}{r} + b\, r \quad , \qquad (2.5)$$

donde a y b son constantes que se determinan de las condiciones de frontera.

(a) Para $a = 0$ la ecuación (2.5) representa la rotación de un fluido que se mueve como un cuerpo rígido, tenemos:

$$v = b\, r \ , \qquad (2.6)$$

aquí b representa la velocidad angular Ω. Todas las partículas en el fluido se mueven con esta velocidad. De la ecuación (2.2) se encuentra que la expresión para la presión es la siguiente:

$$P = \rho \frac{\Omega^2}{2} r^2 + cte \quad . \qquad (2.7)$$

Otra cosa que podemos decir de este flujo es que la vorticidad es constante y es en magnitud, igual a dos veces la velocidad angular (ver fig.2.1).

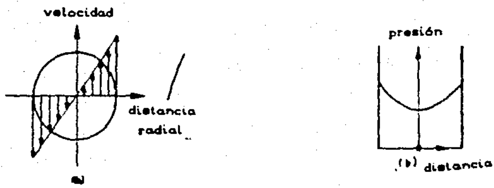


Fig. 2.1 *(a) Distribución de la velocidad en un fluido que se mueve como un cuerpo rígido. (b) Distribución de la presión en éste mismo vórtice* [1].

(b) En el caso en que $b = 0$, la ecuación (2.5) se reduce a:

$$v = \frac{a}{r} \ , \qquad (2.8)$$

que representa un vórtice potencial. Se le da este nombre porque la vorticidad es igual a cero en todos los puntos excepto en el origen, dónde hay sigularidad. Las líneas de corriente son circulares, y coinciden con las lineas de emisión y las trayectorias debido a que tenemos un flujo estacionario. La distribución de presión está dada por la ecuación

$$P = -\rho \frac{a^2}{2r^2} + cte \,, \tag{2.9}$$

(ver fig.2.2).

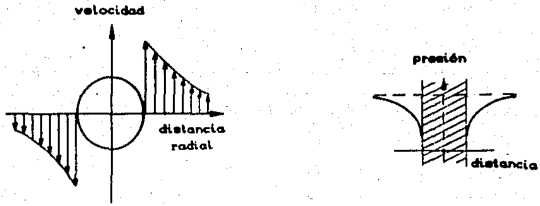


Fig. 2.2 *(a) Distribución de la velocidad en un vórtice potencial. (b) Distribución de la presión en este mismo vórtice* [1].

(c) La combinación de los dos resultados anteriores nos da el muy conocido vórtice de Rankine [1], en este lo que hacemos es definir la solución por intervalos (ver fig.2.3).

$$v = \begin{cases} br \,, & \text{si } r < r_o \,, \quad (2.10a) \\ \dfrac{a}{r} \,, & \text{si } r > r_o \,. \quad (2.10b) \end{cases}$$

Se tiene un vórtice que en el origen su velocidad vale cero, después comienza a crecer y en $r = r_o$ alcanza un máximo y después comienza a tender a cero conforme r crece. En este caso la presión está dada por:

$$P = \begin{cases} \rho \ b^2 r^2/2 + \text{cte} & \text{si } r < r_o , \quad (2.11a) \\ -\rho \ \dfrac{a^2}{2 r^2} + \text{cte} & \text{si } r > r_o , \quad (2.11b) \end{cases}$$

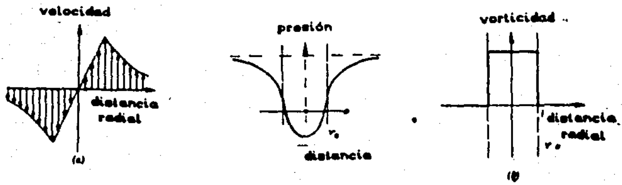


fig. 2.3 *(a) Distribución de la velocidad en un vórtice de Rankine. (b) Distribución de la presión en dicho vórtice. (c) Distribución de la vorticidad en este mismo vórtice* [1].

(d) A continuación se va a relajar la condición $u=0$ a $u=u(r)$, así se obtiene de la ecuación (2.1) :

$$u = -\frac{m}{r} \qquad (2.12)$$

donde m es una constante a determinar. Si m es positiva, tenemos una fuente y en el caso contrario se tendría un sumidero.

Combinando las ecuaciones (2.12) y (2.3) se obtiene:

$$v = \frac{a}{r} + br^{1+m/\nu} \quad , \qquad \text{si} \frac{m}{\nu} \neq -2 \, , \tag{2.13a}$$

$$v = \frac{a}{r} + \frac{b}{r} \log r \quad , \qquad \text{si} \frac{m}{\nu} = -2 \, , \tag{2.13b}$$

este flujo puede ser realizado experimentalmente si ponemos a rotar dos cilindros concéntricos porosos con velocidades angulares distintas [5].

(e) Ahora, si se relaja la condición $w = 0$ y se hace $w = w(r)$ con $u = 0$, se obtiene (sin afectar las ecuaciones (2.13)) de las ecuaciones (2.2) y (2.4) las siguientes relaciones:

$$w = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} r^2 + A \log(r) + B \, , \tag{2.14}$$

$$P = \frac{\partial P}{\partial z} + \rho \int v^2 \frac{dr}{r} + C \quad , \tag{2.15}$$

donde A, B y P_s son constantes arbitrarias. Estas ecuaciones junto con las (2.13) describen un flujo helicoidal en un cilindro circular con deslizamiento en las paredes. Además si $v = 0$ entonces tenemos la solución del flujo de Poiseulle para el flujo laminar estacionario en un cilindro circular.

2.1.2 SOLUCION DE LAMB [1]

Supongamos que se tiene un vórtice potencial estacionario que es mantenido por que se le está suministrando trabajo en el centro de dicho vórtice. Ahora supongamos que al tiempo $t = 0$ la fuente de energía cesa, entonces el vórtice decae. La solución de este problema fué dada por Lamb [6]. A continuación se muestra:

$$v = \frac{k}{r} \left(1 - \exp\left[- \frac{r^2}{4\nu t} \right] \right) , \qquad (2.16a)$$

$$u = w = 0 \quad . \qquad (2.16b)$$

El movimiento de este flujo es en el plano z=cte, y las trayectorias de las partículas son circulares. La vorticidad de este flujo es

$$\omega \cdot \hat{z} = \frac{k}{2\nu t} \exp\left[- \frac{r^2}{4\nu t} \right] , \qquad (2.17a)$$

$$\omega \cdot \hat{\phi} = \omega \cdot \hat{r} = 0 \quad . \qquad (2.17b)$$

Cerca del eje del vórtice el flujo se comporta como si fuera una rotación rígida (ver fig. 2.4). La solución es la siguiente:

$$v = \Omega r , \quad \text{con } \Omega = \frac{k}{4\nu t} \qquad \text{si } \frac{r^2}{4\nu t} < < 1$$

La velocidad angular decae con $1/t$ para este caso.

La ecuación (2.16) es una solución que representa un flujo en el que todas las partículas rotan en la misma dirección, es decir, que la velocidad tangencial es positiva para todas las partículas. Además en el origen, el fluido no se mueve. Conforme nos alejamos de éste, la velocidad comienza a aumentar, llega a un máximo y después comienza a decaer para hacerse cero en infinito. Todo lo descrito anteriormente es para un tiempo fijo. Ahora, conforme el tiempo transcurre, el vórtice decae(ver fig. 2.4).

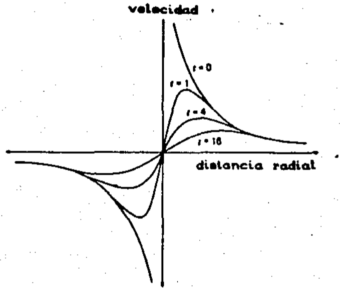


Fig.2.4 *Vórtice que decae con el tiempo. Cerca del origen se comporta como una rotación de cuerpo rígido* [1].

2.1.3 SOLUCION DE TAYLOR

Esta solución debida a G.I. Taylor [1], representa también un vórtice que decae conforme transcurre el tiempo, pero con propiedades distintas al anterior. La solución se obtiene diferenciando la ecuación de Lamb con respecto al tiempo.

$$v = \frac{Mr}{4\pi\nu t^2} \exp\left[-\frac{r^2}{4\nu t}\right] , \qquad (2.18a)$$

$$u = w = 0 \quad . \qquad (2.18b)$$

donde M es una constante que, si la multiplicamos por ρ, representa el momento angular, ya que:

$$\int 2\pi\rho r v r \, dr = \rho M \quad .$$

En este vórtice tambien la energía cinética total y la energía de disipación son finitas. Este vórtice decae mas rápido que el anterior.

La vorticidad de este flujo es:

$$\omega\cdot\hat{z} = \frac{M}{2\pi\nu t^2}\left[1 - \frac{r^2}{4\nu t}\right]\exp\left[-r^2/4\nu t\right],$$

$$\omega\cdot\hat{r} = \omega\cdot\hat{\phi} = 0 .$$

También cerca de su eje el flujo se comporta como un una rotación rígida:

$$v = \Omega r \quad \text{con} \quad \Omega = \frac{M}{4\pi\nu r^2} \quad , \quad \text{si} \quad \frac{r^2}{4\nu t} << 1 \quad .$$

La ecuación (2.18a) representa una solución que es finita tanto en el origen como en infinito. También, como en el de Lamb, en el origen vale cero, y conforme nos alejamos la velocidad comienza a aumentar, alcanza un máximo y después decae, tendiendo a cero en infinito. Todo ésto para un tiempo fijo. Además conforme el tiempo transcurre el vórtice decae.

2.1.4 SOLUCION DE LEVI

Enzo Levi propone una solución en la que $u = w = 0$ y $v = v(r,z)$ y encuentra la siguiente solución [8]:

$$v = \cos(\lambda z - \alpha)\begin{cases} a\, I_1(\lambda r) \ , \ r < r_0 \ , & (2.19a)\\ b\, K_1(\lambda r) \ , \ r > r_0 \ . & (2.19b)\end{cases}$$

donde I_1 y K_1 son las funciones modificadas de Bessel de orden 1. Suponiendo $z = \alpha/\lambda$, las expresiones de arriba quedan de la forma:

$$v = a\, I_1 \ , \ v = b\, K_1 \quad .$$

Esta suposición, se hace con el fin de poder ver cómo varía la velocidad azimutal en un plano z=cte.. Definiendo estas funciones por intervalos, como hicimos con el vórtice de Rankine, se obtiene un modelo parecido a él. A continuación se da una gráfica (ver fig.2.5) en la que se comparan ambos vórtices para el caso $a=100$, $b=1$, $c=50$, y $k=1$.

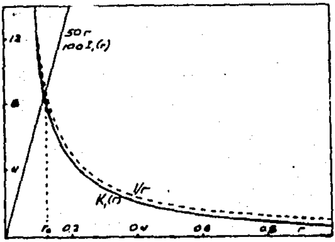


Fig. 2.5 ***Muestra las gráficas de la solución de Levi y de la del vórtice de Rankine para a=100, b=1, c=50 y k=1.***

Esta gráfica se encontró en la referencia [8]. Se puede apreciar la concordancia que existe entre ambos vórtices. Ahora el factor $\cos(\lambda z-\alpha)$ en las ecuaciones (2.19) indica que conforme varía z, encontramos que la velocidad oscila, con un valor máximo en $z=\alpha/\lambda$ y un cero en $z = (\alpha-\pi/2)/\lambda$; es decir, aquí ya no hay movimiento rotatorio. Aumentando z aún más, el flujo rota en sentido contrario. Esto último, hasta donde, sabemos no ha sido comprobado experimentalmente.

2.2 SOLUCIONES NUEVAS

En esta sección se van a mostrar las soluciones que se encontraron durante el desarrollo de la tesis. Algunas de éstas son las ya conocidas, y las otras parecen ser nuevas.

Lo que se hizo fué resolver las ecuaciones de Navier-Stokes que se mostraron en la sección anterior: es decir, las ecuaciones (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4). Se resolvieron para ciertos casos que a continuación se van a describir.

2.2.1 DEPENDENCIA RADIAL

En este caso se supone que el movimiento solo dependa de la coordenada radial. Entonces de la ecuación (2.1), ya que se tiene que el término $w_z = 0$,

$$\frac{1}{r}\left[r\, u \right]_r = 0 \quad .$$

Integrando directamente se obtiene:

$$u = m \;/\; r \;, \tag{2.20}$$

donde m es una constante de integración que va estar determinada por las condiciones de frontera.

Ahora, de las ecuaciones (2.3) y (2.20) se tiene:

$$(m \;/\; r)\; v_r + (m \;/\; r^2)\; v = \nu \left[v_{rr} + (v \;/\; r\;)_r \right] \quad ,$$

efectuando la derivada $(v/r)_r$, pasando todo al lado izquierdo , dividiendo entre ν , factorizando y multiplicando por (-1) se obtiene:

$$v_{rr} - (1/r)\; [\; m/\nu - 1\;]\; v_r - r^{-2}\; [\; m/\nu - 1\;]\; v = 0 \;,$$

Sean $a_1 = [m/\nu - 1]$, $b_1 = -\;[1 + m/\nu]$, entonces

$$v_{rr} + a_1 v_r \;/\; r + b_1 v \;/\; r^2 = 0$$

esta es una ecuación de Euler [11], por lo que las soluciones para v son:

$$v = \begin{cases} \dfrac{a}{r} + \dfrac{b}{r}\ln(r) & \text{si } m/\nu = -2 \,, \quad (2.21a) \\ \dfrac{a}{r} + b\, r^{m/\nu+1} & \text{si } m/\nu \neq -2 \,. \quad (2.21b) \end{cases}$$

De las ecuaciones (2.4) y (2.20) se obtiene una ecuación lineal para w que a continuación se muestra:

$$(m/r)\, w_r = -(1/\rho)\, P_z + \nu\, [\, w_{rr} + w_r / r \,] \,,$$

Sea $G = \partial P/\partial z$ = cte., entonces sustituyendo y pasando todo al miembro izquierdo:

$$w_{rr} + \frac{[\,\nu - m\,]}{r}\, w_r + \frac{G}{\rho\,\nu} = 0,$$

Sean $b = [\,\nu - m\,]/\,\nu$, $G' = G/(\rho\nu)$, entonces,

$$w_{rr} + b\, w_r / r + G' = 0 \,,$$

Por simplicidad de notación, llamemos G a G'. Rearreglando se obtiene:

$$(r^b\, w_r)_r = -G\, r^b, \qquad (i)$$

esta ecuación tiene las siguientes soluciones:

(a) Integrando la ecuación queda:

$$r^b w_r = -\frac{G}{b+1}\, r^{b+1} + C \,, \qquad (ii)$$

integrando nuevamente y pasando r^b al lado derecho finalmente se obtiene:

$$w = - \frac{G}{2(b+1)} r^2 + \frac{C}{1-b} \ln(r) + D \quad , \quad \text{si} \quad \begin{cases} b \neq 1 \\ b \neq -1 \end{cases} .$$

(b) Para el caso en que $b = 1$ nos regresamos a la ecuación (ii) la cual da:

$$w_r = - \frac{G}{b+1} r + C r^{-1} ,$$

integrando la ecuación:

$$w = - \frac{G}{2(b+1)} r^2 + C \ln(r) + D \quad , \quad \text{si } b = 1 .$$

(c) Y por último en el caso en que $b = -1$ nos vamos a la ecuación (i), que queda de la forma:

$$\left(\frac{w_r}{r} \right)_r = - \frac{G}{r} ,$$

la cual da al integrarla:

$$v_r = - G r \ln(r) + C r ,$$

y al volverla a integrar se encuentra:

$$w = - G \left[\frac{r^2}{2} (\ln(r) - 1/2) \right] + \frac{C r^2}{2} + D . \quad \text{si } b = 1 .$$

Por último, tomando en cuenta que $b = (\nu - m) / \nu$ queda:

$$
\psi = \begin{cases} -\dfrac{G}{2(b+1)} r^2 + \dfrac{C}{1-b} \; r^{1-b} + D \,, & \text{si} \begin{cases} m/\nu \neq 0 \\ m/\nu \neq 2 \end{cases} , \quad (2.22a) \\[2ex] -\dfrac{G}{4} \, r^2 + C \ln(r) + D \,, & \text{si } m/\nu = 0 \;, \quad (2.22b) \\[2ex] -\dfrac{G}{2} \, r^2 (\ln(r) - 1/2) + \dfrac{C}{2} \, r^2 + D, & \text{si } m/\nu = 2 \;. \quad (2.22c) \end{cases}
$$

De la ecuación (2.2) se puede encontrar la presión. Se tiene que

$$
-\frac{v^2}{r} = -\frac{1}{r} P_r + \nu \left[u_{rr} - \; (r \, u)_r \right]_r ,
$$

si se sustituye la ecuación (2.20), encontramos que el segundo término del lado derecho se anula, por lo tanto:

$$
P = \int \frac{v^2}{r} \, dr \;. \tag{i1}
$$

A continuación se van a sustituir las ecuaciones (2.21a) y (2.21b). en (i1). De la ecuación (2.21a) tenemos:

$$
P = \rho \int \left[\frac{a^2}{r^3} + \frac{2ab \ln(r)}{r^2} + \frac{b^2}{r^2} \; \ln^2(r) \right] dr \;.
$$

Integrando se obtiene:

$$
P = -\frac{\rho a^2}{2r^2} - \frac{\rho \, b^2 \ln^2(r)}{r^2} - \frac{\rho b^2}{r} \left[\ln(r) - 1 \right] + P(z), \tag{2.23a}
$$

dónde $P(z)$ = cte. Y además $m/\nu = -2$.

De la ecuación (2.21b) y la ecuación (i1) se tiene:

$$P = \iint\left[\frac{a^2}{r^3} + b^2 r^{2(m/\nu)+1} + 2\, a\, b\, r^{(m/\nu)-1}\right].$$

Integrando queda:

$$P = -\frac{\rho a^2}{2r^2} + \frac{\rho b^2 r^{2[(m/\nu)+1]}}{2[(m/\nu)+1]} + \frac{2a\, b\, r^{m/\nu}}{m/\nu} + (\text{cte.}) \times z\ ,$$

$$\text{si } m/\nu \neq -2\ .$$

A continuación se va a calcular la vorticidad. Sabemos que

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}\ ,$$

en coordenadas cilíndricas es:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial\phi} w - \frac{\partial}{\partial z}(rv)\right]\hat{r} + \left[\frac{\partial}{\partial z} u - \frac{\partial}{\partial r} w\right]\hat{\phi} + \left[\frac{\partial}{\partial r}(rv) - \frac{\partial}{\partial\phi} u\right]\hat{z}\ ,$$

y como suponemos que nada depende de z y de ϕ se tiene:

$$\omega\cdot\hat{r} = 0\ , \qquad (2.24)$$

$$\omega\cdot\hat{\phi} = -\frac{\partial w}{\partial r}\ , \qquad (i2a)$$

y

$$\omega\cdot\hat{z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)\ , \qquad (i2b)$$

donde $\omega\cdot\hat{z}$, $\omega\cdot\hat{\phi}$ y $\omega\cdot\hat{r}$ son las componentes de la vorticidad en las direcciones $\hat{r}$, $\hat{z}$ y $\hat{\phi}$ respectivamente.

De las ecuaciones (i2a) y (2.22a) se obtiene:

$$\omega\cdot\hat{\phi} = -\frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{G}{2(b+1)}\,r^2 + \frac{C}{1-b}\,r^{1-b} + D\right] ,$$

por lo tanto derivando se encuentra que:

$$\omega\cdot\hat{\phi} = \frac{G}{2(b+1)} - C\,r^{-b} \qquad \text{si} \begin{cases} m/\nu \neq 0 \\ m/\nu \neq 2 \end{cases} . \qquad (2.25a)$$

si $m/\nu=0$, de las ecuaciones (i2a) y (2.22b) resulta:

$$\omega\cdot\hat{\phi} = -\frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{G}{4}\,r^2 + C\ln(r) + D\right] ,$$

de dode:

$$\omega\cdot\hat{\phi} = \frac{G}{4}\,r - \frac{C}{r} . \qquad (2.25b)$$

Para el caso $m/\nu=2$, de las ecuaciones (i2a) y (2.22c), se tiene:

$$\omega\cdot\hat{\phi} = -\frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{G}{2}\,r^2\,[\ \ln(r) - 1/2\ ] + \frac{Cr^2}{2} + D\right] ,$$

por lo tanto:

$$\omega\cdot\hat{\phi} = G\,r\ln(r) + C\,r . \qquad (2.25c)$$

De (i2b) y (2.21a) se encuentra la relación:

$$\omega\cdot\hat{z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left\{ r \left[\frac{a}{r} + \frac{b}{r} \ln(r) \right] \right\} .$$

por lo que:

$$\omega\cdot\hat{z} = \frac{b}{r^2} , \quad \text{si} \quad m/\nu = -2 . \qquad (2.26a)$$

Por último, de las ecuaciones (i2b) y (2.21b) resulta:

$$\omega\cdot\hat{z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left\{ r \left[\frac{a}{r} + b\, r^{((m/\nu)+1)} \right] \right\} ,$$

por lo tanto:

$$\omega\cdot\hat{z} = [(m/\nu) + 2]\, b\, r^{m/\nu} , \quad \text{si } m/\nu \neq -2. \qquad (2.26b)$$

Hemos obtenido las ecuaciones que nos describen un flujo con simetría azimutal en el que sólo hay dependencia radial. A continuación se muestran los resultados obtenidos:

$$u = m / r . \qquad (2.20)$$

$$
v = \begin{cases} \dfrac{a}{r} + \dfrac{b}{r}\ln r \ , & \text{si } \dfrac{m}{\nu} = -2 \qquad (2.21a) \\[2ex] \dfrac{a}{r} + b\, r^{m/\nu+1} \ , & \text{si } \dfrac{m}{\varphi} \neq -2 \qquad (2.21b) \end{cases}
$$

$$
w = \begin{cases} -\dfrac{G}{2(b+1)} r^2 + \dfrac{C}{1-b} r^{1-b} + D \ , & \text{si } \begin{cases} m/\nu \neq 2 \\ m/\nu \neq 0 \end{cases} \qquad (2.22a) \\[2ex] -\dfrac{G}{4} r^2 + C \ln r + D \ , & \text{si } m/\nu = o \qquad (2.22b) \\[2ex] -\dfrac{G}{2} r^2 (\ln r - 1/2) + C\, r^2 / 2 + D \ , & \text{si } m/\nu = 2 \qquad (2.22c) \end{cases}
$$

donde $G = \dfrac{\partial P}{\rho\nu\partial z}$, es una constante; $b = \nu - m / \nu$. La solución para la presión es la siguiente:

$$
P = \begin{cases} -\dfrac{\rho a^2}{2r^2} - \dfrac{\rho b^2 \ln^2 r}{r^2} - \dfrac{\rho b^2}{r}\left[\ln(r) - 1\right], & \text{si } m/\nu = -2, \qquad (2.23a) \\[2ex] -\dfrac{\rho a^2}{2r^2} + \dfrac{\rho b^2 r^{2[(m/\nu)+1]}}{2[(m/\nu) + 1]} + \dfrac{2\, a\, b\, r^{m/\nu}}{m/\nu}, & \text{si } m/\nu \neq -2. \qquad (2.23b) \end{cases}
$$

Por último, la vorticidad está dada por

$$
\omega \cdot \hat{r} = 0 \ , \qquad (2.24)
$$

$$\omega\cdot\hat{\phi} = \begin{cases} \dfrac{G}{2(b+1)}\, r - \dfrac{C}{r^{b}} & \text{si } \begin{matrix} m/\nu \neq 0 \\ m/\nu \neq 2 \end{matrix} \quad , \qquad (2.25a) \\[2ex] \dfrac{G}{4}\, r - \dfrac{C}{r} & \text{si } m/\nu = 0 \quad , \qquad (2.25b) \\[2ex] G\, r \ln (r) + C\, r & \text{si } m/\nu = 2 \quad , \qquad (2.25c) \end{cases}$$

$$\omega\cdot\hat{z} = \begin{cases} b \,/\, r^{2} \quad , & \text{si } m/\nu = -2 \quad , \qquad (2.19b) \\[1ex] (m/\nu + 2)\; b\; r^{m/\nu}, & \text{si } m/\nu \neq -2 \quad . \qquad (2.19b) \end{cases}$$

En todo este conjunto de ecuaciones a, b, m, G, C, y D son constantes que son determinadas por las condiciones de frontera. A continuación vamos a ver los casos que nos son de interés, en el estudio de vórtices.

(a) Vórtice de Rankine

En el caso en que todas las constantes son cero excepto a y b se encuentra que las únicas ecuaciones que son distintas de cero son la (2.15a) , la (2.15b) y la (2.19b) que coinciden con las ecs. (2.10) y (2.11) mostradas en el inciso (c) de la sección 2.1.1. La ecuación (2.19) indica que la vorticidad es numéricamente igual a dos veces la velocidad angular con que rota el fluido. Afirmación que se había hecho en la sección mencionada. Para que la solución sea exactamente la misma sólo hay que definirla por intervalos y asi reproducir el resultado para el vórtice de Rankine. Si además se pide que a = o se encuenta que la solución a la que se llega es a la encontrada en el inciso (a) de la sección 2.1.1 que nos describe un flujo que se mueve como un cuerpo rígido; y por último para el caso en que b = 0 se recupera el resultado que describe un vórtice potencial.

(B) Si además permitimos que m $\neq$ 0, se recuperan las ecuaciones (2.12), (2.13) y (2.14) de el inciso (e) de la sección 2.1.1.Esta solución ya fué discutida en la sección mencionada. en este caso la presión está dada por las ecuaciones (2.23a) y (2.23b). Si además se relaja la condición $w = 0$ y se hace $\nu=0$, se recupera el inciso (e) de esta misma sección.

(C) Ahora supongamos que $b = 0$ y todas las demás constantes son distintas de cero. Para éste caso tenemos:

$$u = m / r \,, \quad v = a / r + b\, r^{(m/\nu + 1)}$$

y w cumple la ecuación (2.22b).

2.2.2 DEPENDENCIA EN r,z.

La solución que se encuentra en este caso es la de Levi discutida en la sección 2.1.4. Lo que se hizo fué suponer que $u=w=0$, y $v=v(r,z)$. Entonces de la ecuación (2.3) se obtiene:

$$\left[\frac{1}{r} (rv)_r \right]_r + v_{zz} = 0 ,$$

desarrollando la derivada queda:

$$v_{rr} + \frac{v_r}{r} - \frac{v}{r^2} + v_{zz} = 0 ,$$

suponiendo que v es separable y haciendo :

$$v = R(r)\, Z(z) ,$$

se obtiene:

$$Z \frac{d^2R}{d r} + \frac{Z}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{Z\, R}{r^2} + R \frac{d^2Z}{dz^2} = 0 ,$$

dividiendo entre ZR, y reagrupando da:

$$\frac{1}{R} \frac{d^2R}{d r^2} + \frac{1}{r R} \frac{d R}{d r} - \frac{1}{r^2} = - \frac{1}{z} \frac{d^2Z}{d z^2} ,$$

haciendo cada miembro de la ecuación igual a λ^2, por depender de distintas variables, se encuentra:

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r \frac{d R}{d r} - (\lambda^2 r^2 + 1) R = 0 ,$$

$$y \quad \frac{d^2Z}{d z^2} + \lambda^2 Z = 0 .$$

La primera de estas ecuaciones es la ecuación modificada de Bessel y sus soluciones son las funciones modificadas de Bessel de orden uno de la primera y segunda clase [9]. Por lo tanto las dos soluciones independientes para R son:

$$R = a_o I_s \qquad \text{y} \qquad R = b_o K_s \ . \tag{*}$$

La segunda ecuación es la ecuación del oscilador armónico [9], cuyas soluciones son funciones trigonométricas y la solución general es:

$$Z = a_s \cos (\lambda z - \alpha) \tag{**}$$

Por lo tanto de las ecuaciones (*) y (**) se obtiene que la solución para v es:

$$v = \cos (\lambda z - \alpha) \begin{cases} a \ I_s \\ b \ K_s \end{cases} .$$

Si la solución de arriba se define por intervalos, se recupera la solución de Levi discutida en la sección 2.1.4.

2.2.3 Dependencia en r,t

A continuación se va a suponer que sólo se tiene dependencia en r,t. Entonces de la ecuación (2.1) se obtiene:

$$u = \frac{\nu \ f(t)}{r} ,$$

pero a nosotros nos interesan las soluciones que sean finitas en el origen. Se pide esta condición debido a que se desea comparar con la parte experimental. Se podría hacer como en alguna de las soluciones anteriores , en las cuales se definen las soluciones por intervalos, pero a nosotros nos interesa encontrar soluciones que estén definidas en todos lados y que describan vórtices, por lo tanto hacemos f=0 y entonces u = 0.

Ahora de la ecuación (2.3) se encuentra:

$$v_t = \nu \left[v_{rr} + \frac{v_r}{r} - \frac{v}{r^2} \right].$$

Sean $rv = \nu g$ y $\nu t = t$, entonces la ecuación de arriba se transforma a:

$$r^2 g_t = r^2 g_{rr} - r g_r, \qquad (2.30)$$

La ecuación (2.30) se va a resolver por el método de semejanza. Para ésto, se van a hacer las siguientes sustituciones:

$$S = r^{\alpha} t^{\beta} \quad \text{y} \quad g = r^{\mu} t^{\delta} G(S) \quad .$$

Haciendo las derivadas que se necesitan en (2.30), y sustituyendo S se encuentra que la ecuación se transforma en:

$$\mu(\mu-1) G + 2\mu\alpha r^{\alpha} t^{\beta} G' + \alpha(\alpha-1) r^{\alpha} t^{\beta} G' + \alpha^2 r^{2\alpha} t^{2\beta} G'' -$$

$$[\mu G + \alpha r^{\alpha} t^{\beta} G'] = \frac{r^2}{t} [\delta G + \beta r^{\alpha} t^{\beta} G'] ,$$

de donde, haciendo:

$$\frac{r^2}{t} = S^{\rho} ; \quad \beta = -\frac{\alpha}{2} \quad ,\text{y} \quad \rho = 2\alpha ,$$

queda:

$$\alpha^2 S^{\alpha} G'' + [\alpha(\alpha + 2\mu - 1) - \alpha + \frac{\alpha}{2} S^{\rho}] S^{\alpha/2} G' +$$

$$[\mu(\mu-1) - \mu - \delta S^{\rho}] G = 0 .$$

Ahora, haciendo $\alpha = 2$ la ecuación se reduce a:

$$4 S^2 G'' + [4\mu + S] S G' + [\mu(\mu - 2) - \delta S] G = 0 . \qquad (2.31)$$

A continuación se va a resolver esta ecuación primero para un caso especial y luego en general.

(a) SOLUCION DE LAMB

Supongamos que $\mu = \delta = 0$, entonces (2.31) se reduce a:

$$4 S^2 G'' + S^2 G' = 0 ,$$

rearreglando se obtiene:

$$\frac{G''}{G'} = - \frac{1}{4} ,$$

integrando la ecuación con respecto a S:

$$G' = \hat{A} \exp \left[- \frac{S}{4} \right] .$$

Volviendo a integrar, y regresando a las variables originales se obtiene:

$$v = \frac{\hat{A}}{r} \left\{ -4 \exp \left[- \frac{r^2}{4\nu t} \right] + B \right\} ,$$

y como se quiere una solución finita en todo el espacio, en particular en r=0 , entonces haciendo $A=\hat{A}/4$ y B=4 resulta:

$$v = \frac{A}{r} \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{r^2}{4\nu t} \right] \right\} .$$

y ésta es la solución de Lamb, que se discutió en la sección 2.1.2.

(b)SOLUCION GENERAL

Lo que a continuación se va a proponer es que G sea de la forma:

$$G = A \exp\left[-\frac{S}{4}\right] f(S),$$

entonces al hacer las respectivas derivadas y sustituir en la ecuación (2.31) se obtiene:

$$4 S^2 f'' + S (4 \mu - S) f' + [\mu (\mu - 2) - S (\mu + \delta)] f = 0 .$$

Sea X=S/4, entonces usando la regla de la cadena y sustituyendo se encuentra:

$$4 X^2 f'' + 4 X (\mu - X) f' + [\mu (\mu - 2) - 4 X (\mu + \delta)] f = 0.$$

Si se hace $\mu = 0$ no se pierde generalidad, ya que para los otros valores de μ, se van a obtener ecuaciones cuyas soluciones difieren de ésta por un factor de X, el cual se puede agregar o quitar para obtener la solución deseada. Entonces si $\mu=0$ queda:

$$4 X^2 f'' - 4 X^2 f' - 4 X \delta f = 0 ,$$

dividiendo entre 4 y haciendo $\delta = -m$

$$X f'' - X f' + m f = 0 ,$$

ahora haciendo $f = X Y(X)$, entonces la ecuación se transforma en:

$$X Y''(X) + (2-X) Y'(X) + (m-1) Y(X) = 0. \qquad (2.32)$$

Las soluciones regulares de esta ecuación son los polinomios asociados de Laguerre L_{m-1} [10]. Por lo que la solución está dada por:

$$Y(X) = L^1_{m-1}(X) = \frac{d}{dX} L_{m-1}(X) ,$$

dónde $L_n(x)$ es el polinomio de Laguerre de orden n.

La solución general en este caso es

$$Y(x) = \sum_{n} v^{(n)}$$

donde cada término es una solución de la ecuación (2.32) para distintos valores de m.
Ahora haciendo k = m-1 se tiene:

$$Y(x) = L_k^1 \quad ,$$

pero f(x) = X Y(X) y G(x) = A exp [- X] f(X), por lo tanto :

$$G(X) = A\ X \exp[-X]\ L_k^1\ (X).$$

Por otro lado se sabe que $g(x) = r^{\mu}\ t^{\delta}\ G(x)$ y tenemos que $\mu = 0$, por lo tanto:

$$g(x) = A\ t^{\delta}\ X \exp[-X]\ L_k^1\ (X)$$

inicialmente teniamos que la función g(X) estaba relacionada con la velocidad v a través de la relación:

$$rv = \nu\ g \quad .$$

de dónde:

$$v = \frac{A\ \nu\ t^{\delta}}{r}\ X \exp[-X]\ L_k^1\ (X).$$

y como se tenia $\nu t = t$, entonces $X = (-r^2/4\nu t)$, obtenemos:

$$v = \frac{A\nu(\nu t)^{\delta-1} r}{4} \exp\left[-\frac{r^2}{4\nu t}\right] L_k^1\ (X) \quad ,$$

y como $\delta = -m$, y $k = m$, entonces $\delta = -k$, por lo tanto:

$$v = \frac{A\ r}{4\nu^{k}\ t^{(k+1)}}\ \exp\left[-\frac{r^{2}}{4\nu t}\right] L_{k}^{1}(X) \quad . \qquad (2.32)$$

A continuación veremos que forma tienen éstas soluciones:

(i) $k = 1$

En éste caso la solución de la ecuación (2.31) tiene la siguiente forma:

$$v = \frac{A\ r}{4\ \nu\ t^{2}}\ \exp\left[-\frac{r^{2}}{4\ \nu\ t}\right] ,$$

que corresponde a la solución dada por Taylor. Esta solución fué discutida en la sección 2.1.3.

(ii) $k = 2$

Para $K = 2$ obtenemos la siguiente solución:

$$v = \frac{B\ r}{4\ \nu\ t^{3}}\ \exp\left[-\frac{r^{2}}{4\ \nu\ t}\right]\left[1-\frac{r^{2}}{8\ \nu\ t}\right] \quad . \ (2.32a)$$

Esta ecuación tiene un máximo en $r_{0} = [14\nu t + 2\ (33)^{1/2}\nu t]^{1/2}$, se hace cero en $r_{1} = [8\nu t]^{1/2}$ y luego alcanza un valor mínimo en $r_{2} = [14\nu t - 2\ (33)^{1/2}\nu t]^{1/2}$, para después tender a cero. Nos describe un vórtice que si uno se introdujera en él, observaría que estando en el eje de el remolino, la velocidad vale cero, conforme nos comenzamos a alejar de él la velocidad azimutal comienza a aumentar hasta que alcanza un valor máximo en $r = r_{0}$, y después empieza a disminuir hasta hacerse cero en $r = r_{1}$, conforme nos alejamos mas de él la velocidad comienza a aumentar pero ahora en sentido contrario (es decir, que si primero veíamos que el vórtice se movía en un sentido, ahora se va estar moviendo en el otro), hasta alcanzar un valor máximo en $r = r_{2}$, para despues ir tendiendo a cero conforme nos vamos separando más. Este tipo de vórtices hasta dónde sabemos no ha sido encontrado, pero es una solución posible.

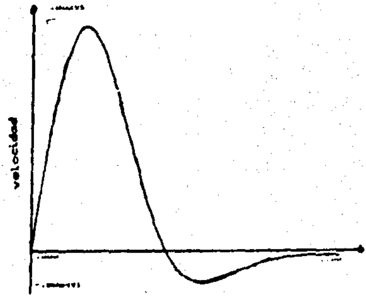


Fig.2.6 *Vórtice con dos zonas cilindricas bién definidas. Las dos zonas rotan en direcciones contrarias. En la frontera de ambas zonas la velocidad del flujo es nula.*

(iii) k=3 La solución en éste caso es

$$v = \frac{C\,r}{4\,\nu^3 t^4} \exp\left[-\frac{r^2}{4\nu t}\right]\left[\frac{r^2}{32\,\nu^2\,t^2} - \frac{3\,r^2}{4\,\nu\,t} + 3\right] \quad . \qquad (2.32b)$$

Los ceros de ésta ecuación se encuentran en r=0, $[(48+16/(3)^{1/2})]^{1/2}$, $[(48-16/(3)^{1/2})]^{1/2}$, ∞. Los máximos de la velocidad están en r_1= [$4\nu t$(.9155243)] y r_2= [$4\nu t$(24.538205)]. El valor mínimo está en r_0= [$4\nu t$(8.5462427)]. La ecuación (2.32*b*) representa un remolino similar al encontrado para k=2, con la diferencia de que ahora la velocidad cambia dos veces de sentido (ver figs. 2.7*a*,2.7*b* y 2.7*c*). Las figs. mencionadas muestran un vórtice que decae con el tiempo. Cada una de éstas corresponde a un tiempo fijo, pero éstos son diferentes de una gráfica a otra. La escala sobre el eje x, es la misma en las tres, pero sobre el eje y, es distinta en cada una. Se nota como al trancurrir el tiempo la velocidad del vórtice disminuye, además cada una de las zonas cilíndricas en las que cambia el sentido de rotación del flujo, se hacen cada vez mas anchas.

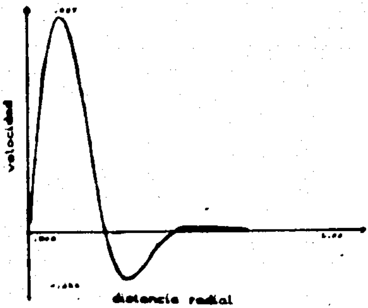


Fig.2.7a. Muestra un remolino en el cual la velocidad cambia dos veces de sentido al irnos alejando de de su eje. La gráfica corresponde al tiempo $4\nu t=1$. $v_{max} = 0.927$.

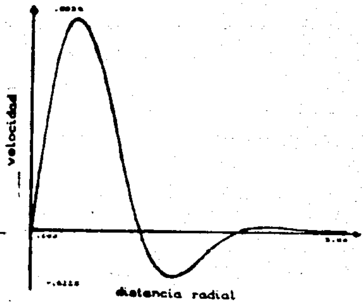


Fig. 2.7b. Muestra al mismo remolino de la figura anterior, pero ahora a un tiempo $4\nu t=2$. $v_{max} = 0.083$.

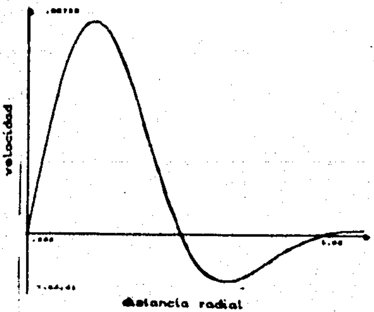


Fig.2.4c. *Vórtice al tiempo* $4\nu t=4$. *Corresponde al de las dos gráficas anteriores.* $v_{max} = 0.007$.

Para los otros valores de k, las soluciones para v están dadas por la ecuación (2.32). Estas soluciones son finitas en todo el espacio. Si tomamos el límite $r \to 0$, encontramos que $v=0$. Ahora, en el límite en que $r \to \infty$, se encuentra también $v=0$. Físicamente este conjunto de soluciones, describe vórtices en los que el flujo se encuentra en reposo en sus ejes y muy lejos de éste el fluido ni se entera que existe vórtice, lo cual es muy razonable. En lo que respecta a qué sucede en la parte intermedia entre éstos dos límites depende del valor de k. Para $k=n$ tenemos que la velocidad tiene n ceros(esto lo podemos asegurar debido a que los polinomios de Laguerre son bien conocidos y la solución encontrada está en términos de ellos). Entonces tenemos que la velocidad cambia de sentido $n-1$ veces, en dichos vórtices. También podemos asegurar que conforme transcurre el tiempo, cada uno de éstos vórtices decae, las zonas cilíndricas en las cuales la velocidad cambia de sentido se hacen mas grandes, y la velocidad disminuye en forma similar a la ilustrada para el caso $k=3$.

2.4 DISCUSION

Se han obtenido soluciones que describen vórtices con distintas propiedades. Unas sólo dependen de la distancia radial, otras de las coordenadas radial y axial, y las otras de la radial y temporal. Todas estas son soluciones exactas a las ecuaciones de Navier-Stokes, todas ellas conocidas, excepto las encontradas en el inciso (B) de la sección 2.2.4, que aparentemente son nuevas. Estas últimas describen vórtices cuya velocidad está definida en todo el espacio y tienen las propiedades mencionadas en dicha sección. Todas estas soluciones son linealmente independientes, por lo cual las podemos sumar, y modelar con ellas distintos remolinos. Estas soluciones contienen como caso particular la solución de Lamb y la solucion de Taylor. También abren una nueva perspectiva para la física experimental: tratar de realizar experimentos de vórtices, en los cuales el flujo cambie su dirección de rotación al ir variando la distancia radial al eje del remolino.

En el siguiente capitulo vamos a describir el experimento realizado en esta tesis.

DISEÑO Y CONSTRUCCION

3.1 Introducción

¿Como podemos producir un vórtice?. Esta es la primera pregunta que uno se hace al tratar de construir un dispositivo experimental para estudiarlo. Hay varios tipos de vórtices que se pueden observar o generar en una forma relativamente sencilla en un laboratorio. Casi todo mundo ha observado el famoso vórtice de desagüe, cuando se lava uno las manos puede ver que al escaparse el agua del lavabo se produce un remolino, lo mismo sucede al destapar la tina del baño. Este vórtice fácilmente puede generarse si uno llena un depósito de agua y al depósito se le abre un agujero en el fondo: al destapar dicho agujero y darle un movimiento inicial al agua, se produce este remolino. Otro vórtice que es muy conocido para aquellos que gustan de remar o jugar con el agua, es aquel que se forma cerca del remo o detrás de la mano si uno está jugando con el agua.Hay otro remolino también muy común, es el que se forma cuando cuando se llena de agua una cubeta, si uno observa el agua conforme se va llenando la cubeta se dará cuenta que a cierto nivel del agua aparece un remolino muy cerca de la boquilla de la manguera, y este remolino permanece ahí en un intervalo Δh del nivel de agua, saliendo de éste intervalo el remolino desaparece. Pues bien, estos son tres de los vórtices mas conocidos y fáciles de producir. Como se mencionó en la última sección del capitulo 1, lo que queremos determinar es el campo de velocidades de un vórtice. El vórtice que vamos a estudiar es aquel que se genera al estar llenando una cubeta. Este remolino fué estudiado inicialmente por Levi [9]. El dispositivo experimental consiste de un tanque cilindrico, que se llena de agua hasta una cierta altura, y un tubo a través del cual se introduce un chorro de agua. En la boquilla del tubo se produce el vórtice. Este vórtice es muy inestable, por lo que es necesario colocar un sistema de estabilizadores. El propósito de Levi era determinar el porqué se producía éste vórtice. También encontró que el chorro se extendía hasta un ángulo un poco mayor de 90° con respecto a la dirección en que el jet estaba dirigido. Midió la velocidad del chorro en distintos puntos y encontró que iba como ur=cte. Bien, a nosotros lo que nos interesa no es saber el porqué se produce el vórtice, lo que queremos es ver como es la distribución de velocidades en uno de estos remolinos. Se construyó un dispositivo experimental siguiendo la idea de Levi. A continuación vamos a describir el dispositivo experimental.

3.2 Dispositivo experimental

A grandes rasgos, el dispositivo consiste de los siguientes elementos: 1) Una caja de acrílico transparente. (2) Un tubo de entrada, (3) Un tubo de desgüe y 4) Una bomba para recircular el agua ,(ver fig. 3.1).

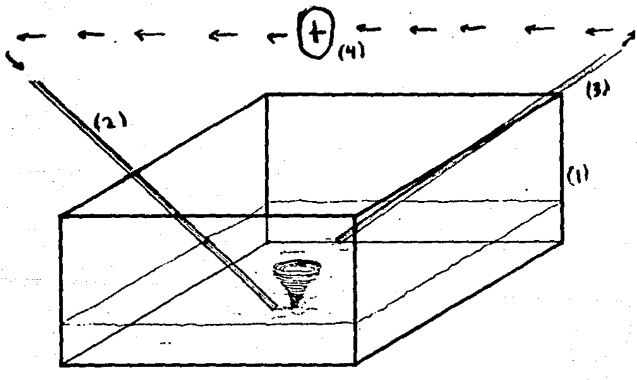


Fig. 3.1 *Se muestra el dispositivo experimental. (1) caja de acrílico, (2) Tubo de entrada, (3) Tubo de desagüe y (4) Bomba para recircular el agua.*

3.3 Descripción del dispositivo

Caja de acrílico

El dispositivo consiste en una caja rectangular de acrílico de 45cm x 48cm x26cm. El remolino se produce para un tirante (altura) de agua de 6cm, y es independiente de la simetría del depósito; sólo depende del gasto del jet de agua, la inclinación del tubo de entrada y el tirante . El remolino se produce en la boquilla del tubo de entrada y su eje es perpendicular a la superficie del agua. El propósito de escojer el depósito rectangular, es que al momento de tomar fotos o video, de lado, las imágenes no se deforman.

Tubo de entrada

El objetivo de este tubo es que por él entra un gasto constante Q, de tal forma que produce un chorro que al chocar con el fondo de la caja genera un remolino. El diámetro de la boquilla de el tubo es de 7mm. El vórtice se produce cerca de la boquilla del tubo, y su eje es vertical. El tubo forma un ángulo de 43 grados con respecto al fondo de la caja, óptimo para producir un vórtice lo suficientemente ancho que nos permite determinar el campo de velocidades en la superficie.

Tubo de desagüe

El fin de este tubo es el de mantener constante el nivel del agua. Un extremo está conectado a una bomba de agua, y el otro extremo está dentro de la caja. Al igual que el otro tubo también toca el fondo de ésta. La cantidad de agua que se extrae de la caja con éste es la misma que se introduce por el otro. El diámetro interno es también de 7mm.

Bomba de agua

Para asegurar que el volumen de fluido que entra a la caja por unidad de tiempo sea igual al que sale, se utiliza una bomba conectada de un lado con el tubo de entrada y del otro con el de desagüe. De esta manera, el agua extraída es igual a la que se introduce, y así se puede mantener constante el nivel del agua. La bomba usada fué una sumergible en agua.

Hilos paralelos

Estos son dos hilos de nylon pintados de negro con un marcador. Estan colocados unos milimetros arriba de el nivel del agua. La utilidad de éstos es que sirvan como referencia de distancia, al momento de la obtención de datos . La distancia de separación entre los hilos es d=5.8±.05 mm. El grosor de los hilos es de .2±.05 mm.

Lámpara

Utilizamos una lámpara de 300 watts para iluminar las particulas que colocamos en la superficie del agua en el depósito (en la siguiente sección explicaremos con detalle el tipo de particula utilizada). La iluminación se hizo por arriba de la caja.

3.4 VISUALIZACION

3.4.1 VISUALIZACION DEL FLUJO

Una vez generado el vórtice, el siguiente paso fué tratar de obtener información de sus caracteristicas. Esto no es simple, ya que estamos trabajando con fluidos, y éstos, cuando se observan, no presentan estructura. Si uno se acerca a un rio y lo observa, se dará cuenta de que no podrá saber si éste fluye o no, a menos de que vaya arrastrando piedras u otros objetos, o que se formen burbujas a su paso. Cuando se ve pasar un avión, los remolinos que se forman en el aire a su paso, no son visibles. Por otro lado, si observamos con atención un remolino en el agua, lo único que podemos decir es que ahí está, y ésto sólo porque vemos que el agua se hunde, y se forma un hoyo. No podemos decir en que dirección se está moviendo, ni cómo son sus lineas de corriente, en fin, no podemos decir nada de sus variables de campo. En cambio si se le depositan particulas, se puede ver cómo se mueven éstas y así se sabe como se está moviendo el agua. Los métodos de visualización consisten en agregar a los fluidos ya sean particulas o tinta con el fin de poder decir algo del comportamiento del campo de flujo.

3.4.2 METODOS UTILIZADOS

Los métodos que se utilizaron para visualizar el flujo fueron los siguientes:

1). La primera técnica que se usó fué la de usar un medio de contraste (shampoo H&S)en el agua. Con ésto se logró tomar fotografías y ver cómo iban las líneas de corriente en un instante dado. Pero con ésto no se pudo decir nada acerca de la magnitud del campo de velocidades del vórtice. Para ésto se tuvo que usar otra técnica. La proporción de Shampoo fué de 10 ml por 4.6 litros de agua.

2). El segundo método fué el de colocar polvo de aluminio en la superficie del agua. También, se diluyó shampoo en la proporción de 10ml de éste por 4.6 litros de agua. A esta mezcla se le agregó una cucharadita cafetera de anilina negra. Esto se hizo con el fín de que, al momento de tomar fotos, las partículas de aluminio contrastaran con el agua pintada de negro. Así, dándole un tiempo de exposición a la cámara, se pueden obtener las trayectorias de las partículas y con éstas la velocidad tangencial de las mismas. El tiempo de exposición fué de 1/15 de segundo. Las partículas se iluminaron como se mencionó al describir la lámpara. Con esta técnica se logró obtener las fotos que sirvieron para extraer datos y poder determinar experimentalmente la forma en que variaba la velocidad azimutal v en la dirección radial (ver fig.3.2). Cabe mencionar que debido a la simetría, se usaron coordenadas cilíndricas.

Fig.3.2 *foto típica de la cual se obtuvieron datos. Las líneas trasadas en ésta, representa las trayectorias seguidas por las partículas. Se conoce la distancia entre las dos líneas paralelas, lo cual nos sirve para interpretar datos.*

3.5 OBSERVACIONES

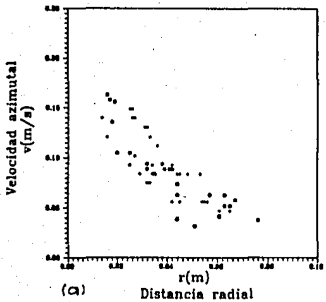
El vórtice generado por este dispositivo es un vórtice inestable. El eje del vórtice es vertical. Lo que se observa es que conforme transcurre el tiempo, el vórtice se vuelve ancho y después se vuelve angosto, además de que crece y decrece a lo largo de su eje. Después desaparece para volver a aparecer, y después se presenta un fenómeno similar al anterior. No se hizo registro del comportamiento temporal.

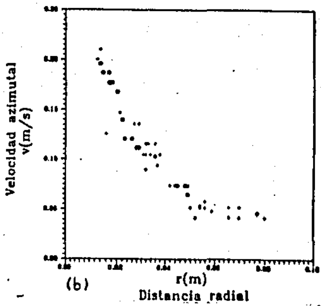
3.6 OBTENCION DE DATOS

Se tomaron fotos del vortice. Las fotografías tomadas fueron de la superficie del remolino. En las fotos se observan las trayectorias seguidas por las partículas en el intervalo de tiempo que se tomaron las fotos (ver figura 3.2). Suponiendo que en este pequeño intervalo de tiempo la velocidad es constante, se puede obtener la magnitud de la velocidad para cada una de las particulas. Se conoce el tiempo que duró la exposición, y se puede medir la distancia recorrida, entonces se puede calcular la velocidad a partir de la relación: velocidad = distancia / tiempo. De esta forma se determinó la velocidad para cada partícula. Hecho ésto, se procedió a medir la distancia de cada partícula al centro del remolino. A continuación se muestran los datos obtenidos para una de las fotos.

distancia (mts $\pm$ $5x10^{-4}$mts)	velocidad (mts/s $\pm$ $7x10^{-3}$mts/s)
.013	.210
.012	.200
.027	.136
.032	.116
.038	.105
.033	.116
.034	.105
.021	.147
.031	.105
.037	.094
.050	.074
.054	.052
.056	.052
.066	.052
.029	.136
.036	.116
.054	.054
.052	.042

Después de obtener los datos para cada foto, se procedió a graficarlos. En las figuras 3.3a y 3.3b se muestran las gráficas. En cada gráfica hay tres conjuntos de puntos. Hay un símbolo distinto para cada uno de éstos. Cada conjunto de puntos pertenece a una foto distinta. Los errores en la tabla no toman en cuenta el hecho de que el eje se determinó visualmente. Estimo que la incertidumbre, en dicha determinación, fué de unos 3mm.





Figs 3.3a y 3.3b. *Se muestran las gráficas obtenidas de los datos experimentales. Cada gráfica contiene tres distintos conjuntos de puntos, corrrespondientes a distintas fotos. Se grafica en el eje y, la velocidad azimutal en m/s, y en el eje x, la distancia radial en metros.*

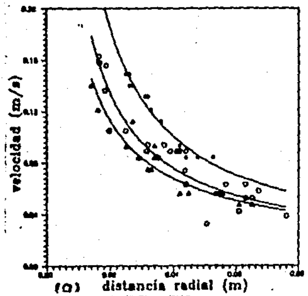
3.7 RESULTADOS

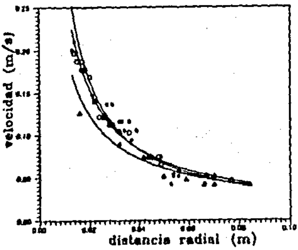
Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

A las seis gráficas mostradas anteriormente, se les ajustó por mínimos cuadrados una función de la forma $y=ax^b$ (ver gráficas 3.4*a* y 3.4*b*). Para todas las gráficas se encontró que el exponente de la x es negativo, por lo cual es un vórtice en el que la velocidad decae con el tiempo. Cada conjunto de datos está tomado a un tiempo distinto al de los restantes, es decir , nos describen al vórtice en distintos instantes de tiempo. A continuación se muestran los valores de a y b, para las distintas gráficas.

a	b	a	b
4.82×10^{-3}	−0.885	6.56×10^{-3}	−0.724
3.68×10^{-3}	−0.966	5.49×10^{-3}	−0.820
6.18×10^{-3}	−0.765	6.33×10^{-3}	−0.860

A continuación se muestran las gráficas con los ajustes mencionados anteriormente:





Figs. 3.4a y 3.4b. *Se muestran las gráficas de las figs. 3.3a y 3.3b, con la diferencia de que ahora le hemos ajustado por mínimos cuadrados una curva cada conjunto de datos. Las curvas que se le ajustaron a cada conjunto de datos aparecen como continuas.*

3.8 DISCUSION

Se encontró experimentalmente que la velocidad de las partículas decae con la distancia con una potencia inversa de ésta. Cada una de estas gráficas corresponde a un tiempo distinto. Por lo cual no debemos esperar que sean exactamente iguales. Todas estas curvas corresponden a partículas que se encuentran en la superficie del vórtice y separadas de su eje. El comportamiento cerca del eje no pudo ser determinado, por lo cual no podemos decir nada de lo que pasa ahí. Otra de las dificultades que se encontraron, fué que al tomar los datos de las fotos, la determinación del centro del remolino se hizo visualmente, esta incertidumbre no fué tomada en cuenta al momento de analizar los datos, en experimentos posteriores será interesante incluirla.

Estimo que la incertidumbre, en la determinación de éste, fué de unos 3mm. El gasto de la bomba no lo medimos, ya que no era un dato esencial para alcanzar el objetivo de la tesis. Si hubiera sido interesante dar el dato, ya que el nivel del agua escogido y el ángulo de inclinación del tubo de entrada, dependen del gasto de la bomba. Estos últimos los estuvimos variando hasta que encontramos los valores necesarios para producir el vórtice deseado, con el gasto que la bomba nos daba. A continuación en el siguiente capitulo se darán la conclusiones y perspectivas del trabajo.

4.1 CONCLUSIONES

(a)Experimento

La determinación del centro del vórtice se hizo visualmente en todas las fotos, y fué un poco difícil deteminarlo. Se estima una incertidumbre de unos 3mm. Otro problema es que el vórtice no es reproducible, y varia en el tiempo. Sin embargo, los vórtices que se producían en distintos tiempos, tenían muchas características en común y eran muy parecidos. Esto se puede apreciar en los resultados experimentales. En éstos, se encuentran seis gráficas distintas, y todas tienen el exponente de la x, del mismo orden, pero están desplazadas, ya que no corresponden al mismo instante de tiempo. Los datos que se obtuvieron sólo fueron en la superficie del agua, y a partir de una distancia r_o del eje del remolino, que no fué la misma para todas las fotos. Para una de ellas tenemos r_o= .013 metros. El método de visualización utilizado fué efectivo, ya que nos permitió determinar en la superficie, la distribución de velocidades.

(b) Teoría

Se obtuvieron soluciones aparentemente nuevas, que describen vórtices que decaen en el tiempo. Estas soluciones son las encontradas en la sección 2.3.3 inciso (b), que tienen la propiedad que son todas linealmente independientes, por lo cual podemos sumarlas y describir con ellas una gran cantidad de remolinos. Además, la solución general tiene como caso particular la encontrada por Lamb. Para $k>1$, tenemos remolinos en los cuales la velocidad cambia de dirección al alejarse del eje .Estas soluciones no le ponen restricciones a la componente axial de la velocidad, por lo que lo que se obtiene es una extensión de las soluciones de Lamb y Taylor, porque en el caso que se resolvió, w puede ser distinta de cero. En la parte teórica, también se recuperaron soluciones conocidas a las ecuaciones de Navier-Stokes para flujos con simetria cilindrica.

(c) Teoría y experimento

No se hizo una comparación entre la teoria y el experimento en la cual podamos decir cuantitativamente que tanto se aleja una de otra.

4.2 PERSPECTIVAS

(1) Tratar determinar el campo de velocidades en la vencindad del eje del remolino.

(2) Hacer una relación entre el gasto de la bomba, el tirante de agua y la inclinación del tubo de entrada, para los cuales se produzca un vórtice lo sufientemente ancho para poder determinar el campo de velocidades en la superficie.

(3) Hacer modelos con las soluciones teóricas aparentemente nuevas, que se ajusten a vórtices conocidos.

(4) Tratar de relacionar en forma estrecha los resultados teóricos y experimentales encontrados.

BIBLIOGRAFIA

[1] Lugt, H.J., *Vortex Flow in Nature and Technology*. Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons, 1983.

[2] Landau, L.D. y Lifshitz, E.M. *Mecánica de Fluidos*, Reverte, 1985.

[3] Currie, I.G. *Fundamental Mechanics of Fluids*, Mc. Graw-Hill, 1974.

[4] Batchelor, G.K. *An Introduccion to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1974.

[5] C.DuP. Donaldson & Sullivan, R.D. *Examination of the Solution of the Navier-Stokes Equations for a Class of Three-Dimensional Vortices*, AFOSR TN 60-1227, oct. 1960.

[6] Lamb, H., *Hydrodynamics*, 6^{th}ed. Dover, New York, 1945.

[7] Taylor G.I., *Aero. Res. Conm.* R & M No. 598(1918).

[8] Levi E., *La Intermitencia de los Vórtices*, Memorias del 10o. Congreso Nacional de Hidráulica, 1980. Asociación Mexicana de Hidráulica A.C.

[9] Arfken, G., *Mathematical Methods for Physicists*, 3^{rd}edition, Academic Press, 1985.

[10] Sneddon, I.N., *Special Functions Of Mathematical Physics and Chemistry*, Oliver and Boyd, 1956.