25
2 y

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

DOS ENFOQUES PARA EL ESTUDIO DE LAS TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A
ENRIQUE RAMIREZ LOSADA

MEXICO, D.F. FALLA DE ORIGEN 1990

INDICE

Introducción

Los recientes años se han caracterizado por una intensa actividad en el área de las transformaciones de Möbius en n-dimensiones. Dos han sido los enfoques principales para su estudio, uno se desarrolla con un punto de vista más sintético, que parte de definirlas como producto de inversiones o reflexiones, y el otro, de carácter analítico, que las define como matrices de dos por dos.

En el presente trabajo pretendemos estudiar la acción del grupo de Möbius en $\hat{\mathbb{R}}^n$. Optamos, en un principio, por definir las transformaciones como producto de inversiones, comenzamos por ver algunas de sus propiedades fundamentales. Resulta interesante saber que cada transformación ϕ que actúa en $\hat{\mathbb{R}}^n$ tiene una extensión natural a una transformación de Möbius que actúa en $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}$ como isometría de (H^{n+1},d)- d métrica hiperbólica-.

Un camino alternativo sería establecer como nuestra métrica $d^{\bullet}$,la expresión $1/2 \log [x^{\bullet},x;y,y^{\bullet}]$, bajo este enfoque resulta inmediato reconocer a las isometrías de H^{n+1}, pues se establece, dentro del material desarrollado en el primer capítulo, que toda transformación de $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}\to \hat{\mathbb{R}}^{n+1}$ que preserva razón cruzada es de Möbius. Entonces, naturalmente, las isometrías de $(H^{n+1},d^{\bullet})$ serán las extensiónes de Poincaré de cada Transformación de Möbius que actúe en $\hat{\mathbb{R}}^n$.

En el capítulo dos, estudiamos al grupo de Möbius en $\hat{\mathbb{R}}^n$, pero visto como matrices de 2 x 2 con números de Clifford en cada entrada. Sin embargo, es necesario dejar en claro las condiciones necesarias y suficientes para que las matrices de Clifford representen una transformación de Möbius. Para las condiciones de necesidad, se hace imprescindible desarrollar resultados algebraicos en relación a dichos números. Quizás la parte más interesante es demostrar que las condiciones necesarias son también suficientes, pues se tiene que probar que estas matrices bajo ciertos condicionantes definen una función de $\hat{V}^n\to \hat{V}^n$ $(\hat{\mathbb{R}}^n\to \hat{\mathbb{R}}^n)$.

Lo relevante de este teorema es que nos proporciona una forma explicita para determinar cuando una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ induce una transformación de Möbius, es decir, una biyección de $\hat{V}^n \to \hat{V}^n$, y por extensión de $\hat{V}^{n+1} \to \hat{V}^{n+1}$.

Finalmente demostramos que las matrices de Clifford forman un grupo bajo la multiplicación, y que módulo $\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es isomorfo a $M(\hat{\mathbb{R}}^n)$. La importancia de este resultado radica en que toda matriz de Clifford en dimensión n, puede extenderse una matriz de Clifford en dimensión n+1, y que la misma matriz extiende automaticamente una transformación en $M(\hat{\mathbb{R}}^n)$ a una en $M(\hat{\mathbb{R}}^{n+1})$, reemplazando x en $\mathbb{R}^n$ por $x + x_n i_n$ en $\mathbb{R}^{n+1}$, a su vez, la extensión es una función del semiespacio superior H^{n+1} en él mismo, y se comporta como isometría del espacio hiperbólico n+1.

Por último, queremos agradecer a la Dra. Sylvia de Neymet, a la M. en C. Ana Irene Ramírez, al Dr. Antonio Lascurain y a la Mat. Pilar Martínez su interés en el desarrollo de este trabajo y sus valiosas observaciones sobre él mismo. En especial mi agradecimiento a la Mat. María de la Paz por sus invaluables enseñanzas, sin las cuales no hubiese sido posible su realización.

Capítulo 1

Las Transformaciones de Möbius.

La geometría hiperbólica es la cristalización de más de 20 siglos de discusión sobre el postulado de las paralelas de Euclides. Su existencia abstracta se sitúa en los trabajos de Lobachevsky, Bolyai, Gauss, hace alrededor de 150 años; su existencia concreta surge al desarrollarse modelos de ella: el de Klein-Beltrami y los de Poincaré y, más tarde, el del hiperboloide.

Nos concentraremos en el modelo del semiespacio superior de Poincaré, su presentación es la siguiente:

$$H^{n+1} = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) : x_{n+1} > 0\}$$

En H^{n+1} se definen las h-líneas como los rayos ortogonales a $\hat{\mathbb{R}}^n$ y el segmento del círculo ortogonal a $\hat{\mathbb{R}}^n$, contenido en H^{n+1}.

Definiremos, en un principio, la distancia entre dos puntos x y y como 1/2 log $[x^*, x; y, y^*]$, donde x^* y y^* son las intersecciones del círculo que pasa por x y y ortogonal a $\hat{\mathbb{R}}^n$.

Una presentación alternativa de este modelo es tomar al semiespacio y definir la distancia entre dos puntos x, y como:

$$\inf_{\gamma} \int_a^b \frac{|\gamma^{(1)}(t)|}{\gamma_{n+1}(t)}\, dt$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las $\gamma: [a,b] \to H^{n+1}$ de clase C^1 por tramos, y $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.

Y demostraremos que las geodésicas son precisamente las que definimos analíticamente. Demostraremos, además, que las dos distancias son equivalentes en H^{n+1}. Sobre esto regresaremos al final del capítulo.

1.1 El grupo de Möbius en $\mathbb{R}^n$

La ecuación de la esfera $S(a, r)$ en $\mathbb{R}^n$ está dada por:

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| = r\}$$

donde $a \in \mathbb{R}^n$ y $r>0$. La reflexión (o inversión) en $S(a, r)$ es la función ϕ definida como:

$$\phi(x) = a + \frac{r^2}{|x-a|^2}(x-a) \qquad (1.1)$$

En el caso de la esfera unitaria, $S(0, 1)$, ϕ se reduce a:

$$\phi(x) = \frac{x}{|x|^2}$$

Si $x/|x|^2$ lo denotamos como x^*, podemos reescribir la ecuación (1.1) como:

$$\phi(x) = a + r^2(x-a)^*$$

La reflexión en $S(a, r)$ no está definida para $x = a$, en dicho caso agregaremos un punto a $\mathbb{R}^n$, que denotaremos por $\propto$, y escribimos:

$$\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\propto\}.$$

Esta definición se hace natural por el hecho de que $|\phi(x)| \to \propto$ cuando $x \to a$, así, definimos $\phi(a) = \propto$ y $\phi(\propto) = a$

. La reflexión ϕ actúa sobre $\hat{\mathbb{R}}^n$, y es involutiva, es decir, $\phi^2(x) =$

$$\phi(x) = a + r^2(x-a)^*$$

$$\Rightarrow \phi(\phi(x)) = a + r^2(\phi(x)-a)^*$$

$$\Rightarrow \phi(\phi(x)) = a + \frac{r^2}{|r^2/|x-a|^2(x-a)|^2} \cdot \frac{r^2}{|x-a|^2}(x-a)$$

$$\Rightarrow \phi(\phi(x)) = a + \frac{r^2}{|x-a|^2} \cdot \frac{|x-a|^2}{r^2}(x-a)$$

$$\Rightarrow \phi(\phi(x)) = x$$

$\therefore$ $\phi(x)$ es inyectiva y sobre.

Tenemos, además, que $\phi(x) = x \Leftrightarrow x \in S(a, r)$.

$$\text{Si } \phi(x) = x \Rightarrow x = a + \frac{r^2}{|x-a|^2}(x-a)$$

$$\Rightarrow (x-a) = \frac{r^2}{|x-a|^2}(x-a)$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{|x-a|^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad |x-a|^2 = r^2$$

Por lo tanto $x \in S(a, r)$.

Si $x \in S(a, r)$, $\Rightarrow |x-a|^2 = r^2$

$$\Rightarrow (x-a) = \frac{r^2}{|x-a|^2}(x-a)$$

$$\Rightarrow x = a + \frac{r^2}{|x-a|^2}(x-a), \quad \Rightarrow \quad x = \phi(x).$$

Al conjunto $P(a, t)$, definido por :

$$P(a, t) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x \cdot a) = t\} \cup \{\infty\}$$

donde $t \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ y $a \neq 0$, lo llamaremos plano. $(x \cdot a)$ es el produc escalar de x por a. Notemos que en la definición ∞ pertenece a todo plano.

La reflexión en $P(a, t)$ la definimos como:

$$\phi(x) = x + \lambda a$$

donde el parámetro λ fue escogido de tal forma que $[\phi(x) + x]/2$ esté sobre el plano $P(a, t)$.

$\Rightarrow ([\phi(x) + x] \cdot a)/2 = t$

$\Rightarrow (x \cdot a) + (\phi(x) \cdot a) = 2t$

Como $\phi(x) = x + \lambda a$

$\Rightarrow (x \cdot a) + (\phi(x) \cdot a) = (x \cdot a) + ((x + \lambda a) \cdot a) = 2t$

$\Rightarrow 2(x \cdot a) + \lambda(a \cdot a) = 2t$

$$\Rightarrow \lambda = 2\,\frac{t-(x \cdot a)}{|a|^2}$$

Por lo tanto $\phi(x) = x + 2\,[t-(x \cdot a)]\dfrac{a}{|a|^2}$

$\Rightarrow \phi(x) = x + 2\,[t-(x \cdot a)]\, a^*$

$\Rightarrow \phi(x) = x - 2\,[(x \cdot a)-t]\, a^*$

Para $x = \infty$, $\phi(x) = \infty$

La reflexión en el plano es involutiva, es decir, $\phi^2(x) = x$

$$\phi(\phi(x)) = \phi(x) + 2[t-(\phi(x) \cdot a)]\, a^*$$

$$= [x + 2\,[t-(x \cdot a)]\, a^* + 2\,[t- [(x + 2\,[t-(x \cdot a)]\, a^*) \cdot a]]\, a^*$$

$$= [x + 2ta^* - 2(x \cdot a)\, a^*] + [2ta^* - 2\,[(x \cdot a) + 2ta^* \cdot a - 2(x \cdot a)a^* \cdot a]\, a^*$$

tenemos que: $a^{\bullet} \cdot a = 1$ (pues $a^{\bullet} = \frac{a}{|a|^2}$)

$$\Rightarrow \phi(\phi(x)) = x + 2ta^{\bullet} - 2(x\cdot a)a^{\bullet} + 2ta^{\bullet} - 2(x\cdot a)a^{\bullet} - 4ta^{\bullet} + 4(x\cdot a)a^{\bullet}$$
$$= x$$

Por lo tanto $\phi(\phi(x)) = x \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n$

Si $x = \infty$

$\Rightarrow \phi(\phi(x)) = \phi(\infty) = \infty$, por lo tanto $\phi(\phi(x)) = x \ \forall \ x \in \hat{\mathbb{R}}^n$

$\therefore \phi$ es inyectiva y sobre.

Es fácil ver que la reflexión ϕ (en esfera o plano) es una función contínua para toda $x \in \mathbb{R}^n$, excepto en los puntos ∞ y $\phi^{-1}(\infty)$, donde la continuidad no ha sido definida.

Es necesario construir una métrica en $\hat{\mathbb{R}}^n$ para mostrar que ϕ es contínua (con respecto a esa métrica) en $\hat{\mathbb{R}}^n$. Para este fin, lo primero que hacemos es encajar $\hat{\mathbb{R}}^n$ en $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}$, mediante la correspondencia:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0)$$

Si $(x_1, \ldots, x_n, 0) = \hat{x} \Rightarrow f: \hat{\mathbb{R}}^n \to \hat{\mathbb{R}}^{n+1}$ está definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \hat{x} & \text{si } x \neq \infty \\ \infty & \text{si } x = \infty \end{cases}$$

f es una biyección de $\hat{\mathbb{R}}^n$ sobre el plano $x_{n+1} = 0$

Ahora, el plano x_{n+1} puede transformarse biyectivamente en la esfera $S(0, 1)$ de $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}$ mediante la proyección estereográfica $\Pi: \hat{\mathbb{R}}^n \to S(0, 1) = S^n$ definida por $\Pi(\infty) = e_{n+1}$ y con $e_{n+1} = (0,\ldots,0,1) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

$\Pi(x) = \hat{x} + t(e_{n+1} - \hat{x})$ para $x \in \mathbb{R}^n$.

de tal forma que $|\Pi(x)| = 1$.

Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_n, 0)$, como $|\Pi(\hat{x})|^2 = 1$

$\Rightarrow 1 = |(x_1, \ldots, x_n, 0) + (0, \ldots, t) + (-tx_1, \ldots, -tx_n, 0)|^2$

$\Rightarrow 1 = |(x_1(1-t), \ldots, x_n(1-t), t)|^2$

$\Rightarrow 1 = x_1^2(1-t)^2 + \ldots + x_n^2(1-t)^2 + t^2$

$\Rightarrow (1-t)^2|x|^2 + t^2 = 1$

$\Rightarrow (1-2t+t^2)|x|^2 + t^2 = 1$

$\Rightarrow |x|^2 - 2t|x|^2 + t^2|x|^2 + t^2 = 1$

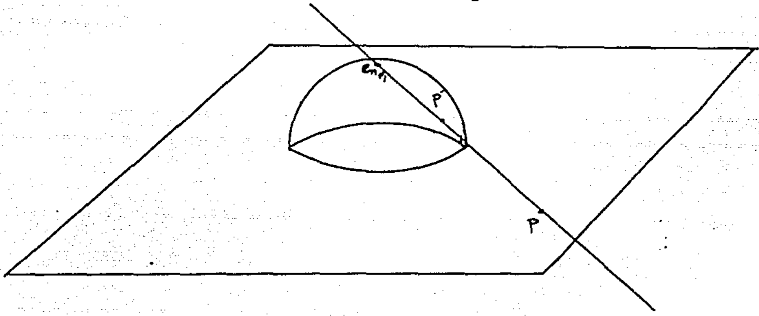
$\Rightarrow t^2(|x|^2+1) + t(-2|x|^2) + |x|^2 - 1 = 0, \Rightarrow t = 1$ o $t = \dfrac{|x|^2-1}{|x|^2+1}$

Si $t = \dfrac{|x|^2-1}{|x|^2+1} \Rightarrow 1-t = \dfrac{2}{|x|^2+1}$

$\Rightarrow \Pi(x) = (x_1(1-t), \ldots, x_n(1-t), t)$

$\Rightarrow \Pi(x) = \left(\dfrac{2x_1}{|x|^2+1}, \ldots, \dfrac{2x_n}{|x|^2+1}, \dfrac{|x|^2-1}{|x|^2+1} \right)$ para $x \in \mathbb{R}^n$

Si $t = 1$ da la función constante que descartamos.



Es evidente que $\Pi(x)$ es una biyección de $\hat{\mathbb{R}}^n$ en S^n. Podemos llevar la métrica euclidiana de S^n a una métrica sobre $\hat{\mathbb{R}}^n$. Esta métrica cordal d, se define como:

$$d(x,y) = |\Pi(x) - \Pi(y)| \quad x, y \in \hat{\mathbb{R}}^n.$$

Explícitamente[1]:

$$d(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2|x-y|}{(1+|x|^2)^{1/2}(1+|y|^2)^{1/2}} & \text{si } x, y \neq \infty \\ \dfrac{2}{(1+|x|^2)^{1/2}} & \text{si } y = \infty \end{cases}$$

[1] Este resultado será demostrado más adelante

Demostraremos que la reflexión ϕ (en la esfera) es continua con respecto a esta métrica.

Si $x,\ y \neq \infty$ y $x,y \neq a$

$$\Rightarrow d(\phi(x),\phi(y)) = \frac{2|\phi(x) - \phi(y)|}{(1+|\phi(x)|^2)^{1/2}(1+|\phi(x)|^2)^{1/2}}$$

Si $x \to y$

$\Rightarrow |x-a|^2 \to |y-a|^2$ pues $(x-a) \to (y-a)$

$\therefore (x-a)|y-a|^2 - (y-a)|x-a|^2 \to 0$

$\Rightarrow (x-a)^{\bullet} - (y-a)^{\bullet} \to 0$

Así $\phi(x) = a + r^2(x - a)^{\bullet} \to a + r^2(y - a)^{\bullet} = \phi(y)$.

$\Rightarrow 2\ |\phi(x)-\phi(y)| \to 0$

Supongamos que $y = a$, si $x \to a$ como ya vimos $\phi(x) \to \infty$

$$\Rightarrow d(\phi(x),\phi(y)) = \frac{2}{(1+|\phi(x)|^2)^{1/2}} \to 0$$

Para $x = a$, la demostración es análoga.

Si ψ es la reflexión en el plano $P(a,t)$ y $x,y \neq \infty$

$$\Rightarrow d(\psi(x),\psi(y)) = \frac{2|\psi(x)-\psi(y)|}{(1+|\psi(x)|^2)^{1/2}(1+|\psi(y)|^2)^{1/2}}$$

Supongamos que $x \to y \Rightarrow x\cdot a \to y\cdot a$

$$\Rightarrow x + 2\ \frac{t-(x\cdot a)}{|a|^2}\ a \to y + 2\ \frac{t-(y\cdot a)}{|a|^2}\ a$$

$\therefore \psi(x) \to \psi(y)$

$\Rightarrow 2|\psi(x) - \psi(y)| \to 0$, así $d(\psi(x),\psi(y)) \to 0$

Si $y = \infty$, $\psi(y) = \infty$

$$d(\psi(x),\psi(y)) = \frac{2}{(1+|\psi(x)|^2)^{1/2}}$$

Supongamos $|x| \to +\infty$, $\Rightarrow |\psi(x)| \to +\infty \Rightarrow d(\psi(x),\psi(y)) \to 0$

por lo tanto ψ es continua.

Una vez demostrada la continuidad de las reflexiones, definimos una transformación de Möbius como la composición finita de reflexiones. Claramente toda transformación de Möbius es un homeomorfismo de $\hat{\mathbb{R}}$ en $\hat{\mathbb{R}}$, pues es composición de reflexiones que, a su vez, son homeomorfismos. La composición de dos transformaciones de Möbius es también una transformación de Möbius, así como la inversa de dicha transformación, en efecto:

Si ϕ es una transformación de Möbius $\Rightarrow \phi = \phi_1 \ldots \phi_m$,

donde ϕ_j es una reflexión.

$$\Rightarrow \phi^{-1} = \phi_m \ldots \phi_1$$

Finalmente, para cualquier reflexión ϕ, tenemos que $\phi^2(x) = x$, entonces la identidad es una transformación de Möbius.

El grupo de las transformaciones de Möbius que actúan sobre $\hat{\mathbb{R}}^n$ es llamado grupo general de Möbius, y es denotado por $GM(\mathbb{R}^n)$.

Consideremos algunos ejemplos de transformaciones de Möbius:

Sea $\psi(x)$ la reflexión en el plano $(x \cdot a) = 0$

y $\phi(x)$ la reflexión en el plano $(x \cdot a) = |a|^2/2$

$\Rightarrow \phi(\psi(x)) = \psi(x) - 2[(\psi(x) \cdot a) - |a|^2/ 2]a^*$

y $\psi(x) = x - 2(x \cdot a)\ a^*$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \phi(\psi(x)) &= x-2(x \cdot a)a^* - 2[(x-2(x \cdot a)a^*) \cdot a) - |a|^2/ 2]\ a^* \\
&= x-2(x \cdot a)a^* - 2[(x \cdot a) - 2(x \cdot a) - |a|^2/ 2]\ a^* \\
&= x-2(x \cdot a)a^* - 2(x \cdot a)a^* + 4(x \cdot a)a^* + a \\
&= x + a
\end{aligned}$$

Por lo tanto la translación $x \to x + a$ es una transformación de Möbius.

Ejemplo 2

Sea $\psi(x) = x/|x|^2$ (la reflexión en $S(0, 1)$)

y $\phi(x)$ la reflexión en $S(0, k^{1/2})$

$\Rightarrow \phi(\psi(x)) = k\ (\psi(x))^*$

$\psi(x) = x/|x|^2$

$$\Rightarrow \psi(x)^* = \frac{\psi(x)}{|\psi(x)|^2} = x$$

$\Rightarrow \phi(\psi(x)) = kx$, por lo tanto la homotecia $x \to kx \in GM(\mathbb{R}^n)$.

Si ϕ y ϕ^* denotan las reflexiones en $S(a, r)$ y $S(0, 1)$ respectivamente y si $\psi(x) = rx + a$, entonces:

$\psi^{-1}(x) = (x-a)/r$ y $\phi^{\bullet}(\psi^{-1}(x)) = \dfrac{(x-a)/r}{|(x-a)/r|^2} = r(x-a)^{\bullet}$

$\Rightarrow \psi(\phi^{\bullet}(\psi^{-1}(x))) = r(r(x-a)^{\bullet}) + a = r^2(x-a)^{\bullet} + a = a + r^2(x-a)^{\bullet} = \phi(x)$
que es la reflexión en $S(a, r)$.
Como $\psi(x)$ está en $GM(\mathbb{R}^n)$ (ver ejemplos), entonces cualesquiera dos reflexiones en esferas son conjugadas en el grupo $GM(\mathbb{R}^n)$.

TEOREMA 1.1.1- Cada isometría euclidiana de $\mathbb{R}^n$es una composición de a lo más n+1 reflexiones en planos. En particular cada isometria es una transformación de Möbius.

Como toda reflexión en un plano es una isometría, es suficiente considerar las isometrias que dejan fijo al origen, es decir $\phi(0) = 0$.

Cada isometría preserva la magnitud de los vectores.

$$|\phi(x)| = |\phi(x)-\phi(0)| = |x-0| = |x|$$

También conservan el producto escalar cuando dejan fijo al origen.

Sea ϕ isometría tal que $\phi(0) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -2(\phi(x)\cdot\phi(y)) &= |\phi(x)|^2 + |\phi(y)|^2 - |\phi(x)-\phi(y)|^2 \\ &= |x|^2 + |y|^2 - |x-y|^2 \\ &= -2(x\cdot y) \end{aligned}$$

Esto significa que si $e_1, \ldots, e_n$ es una base ortonormal, también $\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)$ es una base ortonormal. Y como son n, forman una base para $\mathbb{R}^n$.Entonces dada $x \in \mathbb{R}^n$, $\exists\ \mu \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\Rightarrow \phi(x) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \phi(e_j)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu_j &= (\phi(x)\cdot\phi(e_j)) \\ &= (x\cdot e_j) \\ &= x_j \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \phi(\sum_{=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \phi(e_j).$$

Esto demuestra que ϕ es lineal en $\mathbb{R}^n$.Como toda isometria es 1-1, entonces Ker $\phi = 0$, por lo tanto $\phi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$

Sea A la matriz de ϕ con respecto a la base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$.

$\Rightarrow$ $\phi(x) = xA$. El (i,j)-ésimo elemento de la matriz AA^t

es $(\phi(e_j)\cdot\phi(e_i)) = (e_j\cdot e_i) = 1$ si $j = i$ o 0 si $j \neq i$.

$\therefore$ A es ortogonal.

Probemos, ahora, que ϕ es composición de a lo más n reflexiones en planos.

Sea $a_1 = \phi(e_1)-e_1$

Si $a_1 \neq 0$, sea ψ_1 la reflexión en el plano $P(a_1, 0)$

$\Rightarrow \psi_1(x) = x - 2[(x\cdot a_1)]a_1^*$

$$\psi_1(\phi(e_1)) = \phi(e_1) - 2[(\phi(e_1)\cdot a_1)]a_1^*$$

$$= \phi(e_1) - 2[\phi(e_1)\cdot[\phi(e_1)-e_1]]a_1/|a_1|^2$$

$$= \phi(e_1) - \frac{2[1-(\phi(e_1)\cdot e_1)]}{|a_1|^2}(\phi(e_1)-e_1)$$

$$= \phi(e_1) - \frac{2\ [1-(\phi(e_1)\cdot e_1)]}{2\ [1-(\phi(e_1)\cdot e_1)]}(\phi(e_1)-e_1)$$

$$= e_1$$

Si $a_1 = 0$, sea ψ_1 igual a la identidad, y como $a_1 = 0 \Rightarrow \phi(e_1) = e_1$

$\Rightarrow \psi_1(\phi(e_1)) = e_1$.

Pongamos $\phi_1 = \psi_1\phi$; observamos que ϕ_1 deja fijo al 0 y a e_1, pues:

si $a_1 \neq 0$, $\Rightarrow \phi_1(0) = \psi_1\phi(0) = \psi_1(0) = 0$

y $\phi_1(e_1) = \psi_1(\phi(e_1)) = e_1$. Si $\psi_1 = Id. \Rightarrow$ el resultado es obvio.

En general, suponga que ϕ_k es una isometría que deja fijo a $0, e_1, e_2, \ldots, e_k$, y sea $a_{k+1} = \phi_k(e_{k+1})-e_1$.

Sea ψ_{k+1} la identidad si $a_{k+1} = 0$, o la reflexión en el plano $P(a_{k+1}, 0)$ si $a_{k+1} \neq 0$. Análogo al caso ψ_1, se demuestra que $\psi_{k+1}\phi_k$ deja fijo al 0 y e_{k+1}.

Además, si $1 \le j \le k$, entonces:

$$(e_j\cdot a_{k+1}) = (e_j\cdot\phi_k(e_{k+1})) - (e_j\cdot e_{k+1})$$

$$= (\phi_k(e_j)\cdot\phi_k(e_{k+1}))$$

$$= e_j\cdot e_{k+1} = 0$$

$$\Rightarrow \psi_{k+1}(e_j) = e_j - 2[(e_j\cdot a_{k+1})]a_{k+1}^*$$

$$= e_j.$$

Por lo tanto $\psi_{k+1}\phi_k(e_j) = e_j$, para $1 \le j \le k$.

Por consiguiente existen funciones ψ_j (cada una la identidad o reflexión en un plano) tales que $\psi_n \ldots \psi_1 \phi$ dejan fijo a $0, e_1, \ldots, e_n$. Como es transformación lineal $I = \psi_n \ldots \psi_1 \phi$
Por lo tanto $\phi = \psi_1 \ldots \psi_n$, entonces ϕ es composición de n reflexiones.

TEOREMA 1.1.2.-Una función ϕ es una isometría euclidiana si y sólo si es de la forma

$$\phi(x) = xA + x_0$$

donde A es una matriz ortogonal y $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Si $\phi(x) = xA + x_0$, donde A es ortogonal, entonces ϕ es isometría. Si $\phi(x)$ es isometría, entonces, $\phi(x)-\phi(0)$, es una isometría que deja fijo al 0, por lo tanto se puede escribir como:

$$\phi(x) = xA + \phi(0)$$

TEOREMA 1.1.3-Toda reflexión es conforme[2] e invierte la orientación.

DEMOSTRACION. Sea ϕ la reflexión en $P(a, t)$. Entonces ϕ es diferenciable y $\phi'(x)$ es la matriz simétrica ϕ_{ij}, donde

$$\frac{\delta\phi_i}{\delta x_j} = \phi_{ij} = \delta_{ij} - \frac{2a_i a_j}{|a|^2},$$

(δ_{ij} es la delta de Kroneker, que es 1 si $i = j$ y cero en caso contrario). Podemos reescribir la fórmula como

$$\phi'(x) = I - 2Q_a$$

donde Q_a tiene elementos $a_i a_j/|a|^2$. Ahora Q_a es simetrica y $Q_a^2 = Q_a$,

---

2.Una función f de un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ es diferenciable en x si

$$f(y) = f(x) + (y-x)A + |y-x|\varepsilon(y)$$

donde A es una matriz de n x n y donde $\varepsilon(y) \to 0$ cuando $y \to x$. Diremos que una f diferenciable es conforme en x si A es múltiplo $\mu(x)$ de una matriz ortogonal.

entonces

$$\phi'(x)\cdot\phi'(x)^t = (I-2Q_a)^2 = I$$

Esto demuestra que $\phi'(x)$ es una matriz ortogonal y por lo tanto ϕ es conforme.

Sea $D = \det \phi'(x)$. Como $\phi'(x)$ es ortogonal, $D \neq 0$ (de hecho, $D = \pm 1$). Además, D es una función contínua de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ a $\mathbb{R}^1 - \{0\}$. Como $\mathbb{R}^n - \{0\}$ es conexo (asumimos que $n \geq 2$), D es positivo para todo $a \neq 0$ o negativo para todo $a \neq 0$. Si $a = e_1$, entonces ϕ es

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = (-x_1+2t, x_2,\ldots,x_n)$$

y en este caso, $D = -1$. Podemos concluir que para todo a diferente de cero, $D < 0$ y por lo tanto toda reflexión en un plano invierte la orientación.

Un argumento similar se cumple para las reflexiones en esferas. Primero, sea ϕ la reflexión en $S(1, 0)$. Entonces para x diferente de cero, $\phi'(x)$ tiene entradas:

$$\frac{\delta\phi_i}{\delta x_j} = \frac{\delta_{ij}}{|x|^2} - \frac{2x_i x_j}{|x|^4},$$

entonces

$$\phi'(x) = |x|^{-2}(I - 2Q_x).$$

Esto demuestra que ϕ es conforme en cada $x \neq 0$.

Sea $D(x)$ $\det\phi'(x)$. Como $\phi(\phi(x)) = x$, la regla de la cadena establece que

$$D(\phi(x))D(x) = 1$$

por lo tanto, D es positivo o negativo para todo elemento $a \in \mathbb{R}^n-\{0\}$. Tomando $x = e_1$, tenemos que $D(e_1) = -1$ y así $D < 0$ para todo $x \neq 0$. Para el caso general tenemos que, si ψ es la reflexión en la esfera $S(a,r) \Rightarrow \psi(x) = a + r^2(x-a)^* = a + r^2\phi(x-a)$ donde ϕ es la reflexión en $S(0,1)$. Entonces por regla de la cadena:

$$\phi'(x) = r^2|x-a|^{-2}(I - 2Q_{x-a})$$

el resto de la prueba es idéntico.

Definición: El grupo de Möbius $M(\mathbb{R}^n)$ consiste en el subgrupo de $GM(\mathbb{R}^n)$ que preserva orientación.

Concluiremos esta sección con una fórmula que nos será útil.

Sea σ la reflexión en la esfera $S(a, r)$.

$$\Rightarrow |\sigma(y) - \sigma(x)| = |a + r^2(y-a)^\bullet - a - r^2(x-a)^\bullet|$$
$$= r^2|(y-a)^\bullet - (x-a)^\bullet|$$
$$= r^2|(y-a)/|y-a|^2 - (x-a)/|x-a|^2|$$
$$= r^2[((y-a)/|y-a|^2 - (x-a)/|x-a|^2)\cdot((y-a)/|y-a|^2 - (x-a)/|x-a|^2)]^{1/2}$$
$$= r^2[|y-a|^2/|y-a|^4 - 2(x-a)\cdot(y-a)/|x-a|^2|y-a|^2 + |x-a|^2/|x-a|^4]^{1/2}$$
$$= r^2[1/|y-a|^2 - 2(x-a)\cdot(y-a)/|x-a|^2|y-a|^2 + 1/|x-a|^2]^{1/2}$$
$$= r^2[(x-a)\cdot(x-a) - 2(x-a)\cdot(y-a) + (y-a)\cdot(y-a)/|x-a|^2|y-a|^2]^{1/2}$$
$$= r^2[|(x-a) - (y-a)|^2/|x-a|^2\ |y-a|^2]^{1/2}$$
$$= r^2[|x-y|^2/|x-a|^2|y-a|^2]^{1/2}$$
$$= r^2|x-y|/|x-a||y-a| = \frac{r^2|y-x|}{|x-a||y-a|} \qquad (1.2)$$

Esto muestra que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{|\sigma(x+h) - \sigma(x)|}{|h|} = \lim_{h\to 0}\frac{r^2|h|}{|x-a||x+h-a||h|} = \frac{r^2}{|x-a|^2}$$

Esto mide cómo cambian las longitudes de los vectores tangentes a $\hat{\mathbb{R}}^n$ en $\hat{x}$ bajo σ.

1.2-Propiedades de las transformaciones de Möbius

Usaremos el término esfera para referirnos a una esfera euclidiana o a un plano.

TEOREMA 1.2.1- Sea ϕ una transformación de Möbius y sea Σ una esfera. Entonces ϕ (Σ) es una esfera.

Si ϕ es una isometría euclidiana, entonces es obvio que ϕ envía esferas en esferas.

Como toda reflexión en un plano es una isometría, entonces las reflexiones en planos transforman esferas en esferas.

Veamos ahora que la homotecia $x \to kx$, $k > 0$, también manda esferas en esferas:

Sea $\Sigma = S(a,r)$

$\Rightarrow |x-a|^2 \Rightarrow |kx-ka|^2 = |k|^2\ |x-a|^2 = k^2\cdot r^2 = r_1^2$

$\therefore$ la imagen de Σ es una esfera.

Toda esfera en $\mathbb{R}^n$ puede ser expresada en la siguiente en forma:

$|x|^2 - 2(x\cdot a) + |a|^2 = r^2$

$\Rightarrow |x|^2 - 2(x\cdot a) + |a|^2 - r^2 = 0$, donde $a \in \mathbb{R}^n$

que podemos escribir en la forma general:

$\varepsilon\ |x|^2 - 2(x\cdot a) + t = 0$, donde εy $t \in \mathbb{R}$ satisfacen $|a|^2 > \varepsilon t$ pues

$r^2 = \dfrac{|a|^2}{\varepsilon} - \dfrac{t}{\varepsilon} > 0.$

Si $\varepsilon = 0$ y $a \neq 0$ tenemos la ecuación del plano $P(a,t/2)$. Como $\infty \in P(a,t$

∞ satisface la ecuación sí y solo sí $\varepsilon = 0$.

Sea $\phi(x) = x/|x|^2 = y \quad |y|^2 = |x|^{-2}$

Tenemos $\varepsilon|x|^2 - 2(x\cdot a) + t = 0$, si dividimos entre $|x|^2$.

$$\Rightarrow \quad \varepsilon - 2\left(\frac{x}{|x|^2}\cdot a\right) + \frac{t}{|x|^2} = 0$$

$\therefore \quad \varepsilon - 2(y\cdot a) + t\ |y|^2 = 0$, que es otra esfera

Sea ϕ la inversión en $S(a,r)$

$\phi(x) = a + r^2(x-a)^*$

$\Rightarrow \phi$ se puede ver como la composición de:

$\psi(x) = \dfrac{x-a}{|x-a|^2}$ con $\quad \xi = r^2\psi \quad \Rightarrow \quad \xi\ (x) = r^2\ (x-a)^*$

$\phi = a + \xi$

y cada una de estas funciones transforma esferas en esferas

$\therefore\ \phi$ manda esferas en esferas

$\therefore$ toda transformación de Möbius transforma esferas en esferas.

La ecuación que define a una esfera Σ, digamos $S(a,r)$ o $P(a,t)$ está dada por

$|x|^2 - 2(x-a) + |a|^2 - r^2 = 0 \qquad$ ó $\quad -2(x\cdot a) + 2t = 0$

respectivamente, que podemos escribir como:

$a_o|x|^2 - 2(x\cdot a) + a_{n+1} = 0$

donde $a \in \mathbb{R}^n$. Llamaremos vector coeficiente de Σ a $(a_0, a_1, .., a_n, a_{n+1})$, que no es único.

Veamos que : $\quad |a|^2 > a_0\ a_{n+1}$

Si Σ es la esfera $S(b,r)$, $a_0 \neq 0$, dividiendo la ecuación por a_0 resulta

$a = \frac{b}{a_0}$ y $r^2 = \frac{|a|^2}{a_0} - \frac{a_{n+1}}{a_0}$

$|a|^2 - a_0 a_{n+1} = r^2 a_0^2 > 0$

si Σ es el plano $P(b,t)$, $a_0 = 0$ y $b \neq 0$, $a = \lambda b$ con λ real $\neq 0$ y

$a_{n+1} = 2t\lambda \Rightarrow |a|^2 > 0 = a_0 a_{n+1}$.

Pasemos a definir, en base al vector coeficiente, el producto inversivo, de dos esferas.

Definición.- Sean Σ y Σ'esferas o planos, sean $(a_0, \ldots a_{n+1})$ y $(b_0, \ldots b_{n+1})$ sus vectores coeficientes respectivamente.Entonces el producto inversivo de Σ y Σ' lo definimos como:

$$(\Sigma,\Sigma') = \frac{|2(a\cdot b) - a_0 b_{n+1} - a_{n+1} b_0|}{2(|a|^2 - a_0 a_{n+1})^{1/2}(|b|^2 - b_0 b_{n+1})^{1/2}}$$

Note que, los términos encerrados entre paréntesis en el denominador son positivos, por lo tanto tomamos las raices positivas.

Caso-1. Sean $\Sigma = S(a,r)$ y $\Sigma' = S(b,t)$; podemos tomar como forma canónica

$a_0, b_0 = 1 \Rightarrow a_{n+1} = |a|^2 - r^2$, $b_{n+1} = |b|^2 - t^2$

$$\Rightarrow (\Sigma,\Sigma') = \frac{|2(a\cdot b) - |b|^2 + t^2 - |a|^2 + r^2|}{2(|a|^2 - |a|^2 + r^2)^{1/2}(|b|^2 - |b|^2 + t^2)^{1/2}}$$

$$= \left|\frac{r^2 + t^2 - |a-b|^2}{2rt}\right|$$

Segundo caso.- Sean $\Sigma = S(a,r)$ y $\Sigma' = P(b,t)$; para la forma canónica

$a_0 = 1$, y $b_{n+1} = 2t \Rightarrow a_{n+1} = |a|^2 - r^2$,

$$(\Sigma,\Sigma') = \left|\frac{2(a\cdot b) - 2t}{2(|a|^2 - |a|^2 + r^2)^{1/2}(|b|^2)^{1/2}}\right| = \frac{|(a\cdot b) - t|}{r|b|}$$

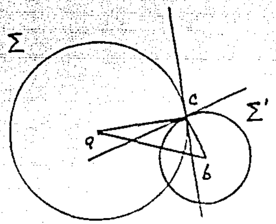
Tercer caso.- Sean $\Sigma = P(a,r)$ y $\Sigma' = P(b,t)$

$\Rightarrow a_0 = b_0 = 0$, tomando $a_{n+1} = 2r$ y $b_{n+1} = 2t$

$$\Rightarrow (\Sigma,\Sigma') = \frac{|2(a\cdot b)|}{2(|a|^2)^{1/2}(|b|^2)^{1/2}} = \frac{|(a\cdot b)|}{|a|\ |b|}$$

Buscando esclarecer esta definición de producto inversivo,

veremos su interpretación geométrica en $\mathbb{R}^2$ cuando $\Sigma \cap \Sigma' \neq \emptyset$
Así, para Σ y Σ' dos circunferencias, tenemos que:



Observemos que, el ángulo entre las tangentes es el mismo que el ángulo entre los vectores normales c-a y c-b, Por la ley de los cosenos

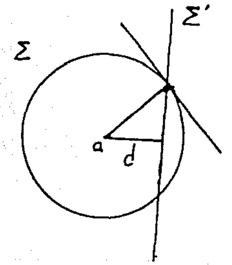
$|a-b|^2 = r^2 + t^2 - 2rt\cos\omega$

$\cos\omega = \dfrac{-|a-b|^2 + r^2 + t^2}{2rt}$

$\Rightarrow |\cos\omega| = \dfrac{|r^2 + t^2 - |a-b|^2|}{2rt}$

Por lo tanto el producto inversivo no es más que el valor absoluto del coseno del ángulo de intersección entre Σ y Σ'.

Caso 2.- Sea Σ un círculo y Σ' una recta

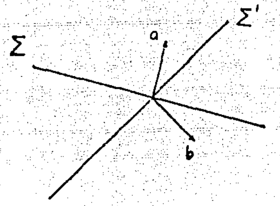


El ángulo comprendido entre la recta y la tangente a la circunferencia, es el mismo que forman sus vectores normales.
Sea $d = d(a,\Sigma')$ $\quad \Sigma'$ es la recta $(x \cdot b) = t$

$\Rightarrow d = \dfrac{(a\cdot b) - t}{|b|^2}$, la distancia de un punto a una recta

como $\cos\omega = x/r = \dfrac{(a\cdot b) - t}{r|b|^2} \Rightarrow |\cos\omega| = \dfrac{|(a\cdot b) - t|}{r|b|^2}$

Caso 3.- Sean Σ y Σ' dos rectas



Σ es la recta $(x\cdot a) = r$ y Σ' es la recta $(x\cdot b) = t$.
a es normal a Σ y b a Σ' $\Rightarrow$ el ángulo entre Σ y Σ' es igual al ángulo entre a y b.

Tenemos que: $(a\cdot b) = |a||b|\cos\omega$

$\Rightarrow |\cos\omega| = \dfrac{|(a\cdot b)|}{|a||b|}$.

En los tres casos tenemos que (Σ,Σ'), mide el coseno del ángulo de intersección de Σ y Σ'.

Si $(\Sigma,\Sigma') = 0 = \cos\omega$, $\Rightarrow \omega = 90^0$ (suponiendo que Σ y Σ' se intersectan), por lo tanto Σ y Σ' son ortogonales. Ahora, si son ortogonales, $\Rightarrow \omega = 90^0$, por lo tanto $\cos\omega = 0 = (\Sigma,\Sigma')$, entonces podemos concluir que $(\Sigma,\Sigma') = 0$ sí y sólo si Σ y Σ' son ortogonales.

Cabe señalar, en el caso dos, que si, $(\Sigma,\Sigma') = 0 \Rightarrow$ la distancia d de Σ' a a es cero.

$\Rightarrow d(a,\Sigma') = 0 \Rightarrow a \in \Sigma'$

En $\mathbb{R}^n$, $a \in P(b,t) = \Sigma' \Leftrightarrow (a\cdot b) - t = 0 \Leftrightarrow (\Sigma,\Sigma') = 0$ con $\Sigma = S(a,r)$.

Resumiendo: $(\Sigma,\Sigma') = 0$ si y sólo si $a \in P(b,t)$

Establezcamos la invarianza de (Σ,Σ').

TEOREMA 1.2.2-Para toda transformación de Möbius ϕ, y dos esferas Σ Σ', se tiene que:

$$(\phi(\Sigma),\phi(\Sigma')) = (\Sigma,\Sigma')$$

Primero estudiemos qué sucede con las isometrías euclidianas que dejan fijo al 0, están representadas por $\phi(x) = xA$, donde A es una matriz ortogonal, e incluyen a todas las reflexiones en planos que pasan por el origen.

$xA = y \Rightarrow \ |x|^2 = |y|^2 \quad y$

$(x\cdot a) = (xA\cdot aA) = (y\cdot aA)$

Por lo tanto ϕ transforma las esferas:

$a_0|x|^2 - 2(x\cdot a) + a_{n+1} = 0$ y $b_0^2|x| - 2(x\cdot b) + b_{n+1} = 0$ en

$a_0|y|^2 - 2(y\cdot aA) + a_{n+1} = 0$ y $b_0^2|y| - 2(y\cdot bA) + b_{n+1} = 0$, respectivamente

$$\Rightarrow (\phi(\Sigma),\phi(\Sigma')) = \frac{|2(aA\cdot bA) - a_0b_{n+1} - a_{n+1}b_0|}{2(|aA|^2 - a_0a_{n+1})^{1/2}(|bA|^2 - b_0b_{n+1})^{1/2}}$$

$$= \frac{|2(a\cdot b) - a_0b_{n+1} - a_{n+1}b_0|}{2(|a|^2 - a_0a_{n+1})^{1/2}(|b|^2 - b_0b_{n+1})^{1/2}} = (\Sigma,\Sigma')$$

Por lo tanto el producto inversivo es invariante bajo las isometrias euclidianas, que dejan fijo a 0.

Probemos que es invariante bajo $y = \phi(x) = kx$ donde $k > 0$

$\Rightarrow x = y/k$

En $a_0|x|^2 - 2(x\cdot a) + a_{n+1} = 0$, substituimos x por y/k

$\Rightarrow a_0|y/k|^2 - 2((y/k)\cdot a) + a_{n+1} = 0$, multiplicando por k^2

$\Rightarrow a_0|y|^2 - 2(y\cdot ka) + k^2a_{n+1} = 0$

$$\Rightarrow (\phi(\Sigma),\phi(\Sigma')) = \frac{|2(ka\cdot kb) - a_0k^2b_{n+1} - b_0k^2a_{n+1}|}{2(|ka|^2 - a_0k^2a_{n+1})^{1/2}(|kb|^2 - b_0k^2b_{n+1})^{1/2}}$$

$$= \frac{k^2\ |2(a\cdot b) - a_0b_{n+1} - b_0a_{n+1}|}{k^2\ 2(|a|^2 - a_0a_{n+1})^{1/2}(|b|^2 - b_0b_{n+1})^{1/2}} = (\Sigma,\Sigma')$$

Por lo tanto (Σ,Σ') se mantiene invariante bajo la función $\phi(x) = kx$

Sea $\phi(x) = x^{*}, \Rightarrow y = x/|x|^2, \Rightarrow x = y/|y|^2$

Sustituyendo en $a_0|x|^2 - 2(x\cdot a) + a_{n+1} = 0$

$\Rightarrow a_0|y/|y|^2|^2 - 2((y/|y|^2)\cdot a) + a_{n+1} = 0$

$\Rightarrow a_0/|y|^2 - 2((y/|y|^2)\cdot a) + a_{n+1} = 0$

$\Rightarrow a_0 - 2(y\cdot a) + a_{n+1}|y|^2 = 0$

$\Rightarrow \phi$ cambia $a_0 \to a_{n+1}$, $a \to a$, $a_{n+1} \to a_0$

$\Rightarrow (\phi(\Sigma),\phi(\Sigma')) = (\Sigma,\Sigma')$

Probaremos la invarianza para $\phi(x) = x + u$

Sea $y = x + u$, $\Rightarrow x = y - u$, $\Rightarrow a_0|x|^2 - 2(x\cdot a) + a_{n+1} = 0$ se convierte

en : $a_0|y-u|^2 - 2((y-u)\cdot a) + a_{n+1} = 0$

$a_0(y-u)\cdot(y-u) - 2((y-u)\cdot a) + a_{n+1} = 0$

$a_0[|y|^2 - 2(y\cdot u) + |u|^2] - 2(y\cdot a) + 2(u\cdot a) + a_{n+1} = 0$

$a_0|y|^2 - 2(y\cdot a_0u) + a_0|u|^2 - 2(y\cdot a) + 2(u\cdot a) + a_{n+1} = 0$

$a_0|y|^2 - 2(y\cdot(a+a_0u)) + a_{n+1} + 2(u\cdot a) + a_0|u| = 0$

Entonces $\phi(x)$ cambia $a_0 \to a_0$, $a \to a + a_0u$, $a_{n+1} \to a_{n+1} + 2(u\cdot a) + a_0|u|^2$

$$(\phi(\Sigma),\phi(\Sigma')) = \frac{|2(a+a_0u)(b+b_0u) - a_0(b_{n+1} - 2(u\cdot b) + b_0|u|^2) - b_0(a_{n+1} + 2(u\cdot a) + a_0|u|}{2(|a+a_0u|^2 - a_0(a_{n+1} + 2(u\cdot a) + a_0|u|^2)^{1/2}(|b+b_0u|^2 - b_0(b_{n+1} + 2(ub) +}$$

$$= \frac{|2(a\cdot b) - a_0b_{n+1} - b_0b_{n+1}|}{2(|a|^2 - a_0a_{n+1})^{1/2}(|b|^2 - b_0b_{n+1})^{1/2}} = (\Sigma,\Sigma')$$

Podemos concluir que (Σ,Σ') es invariante bajo las transformaciones de Möbius.

TEOREMA 1.2.3- Sea Σ cualquier esfera, σ la reflexión en Σ e I la identidad. Si ϕ es una transformación de Möbius, que deja fijo cada x de Σ, entonces ϕ es la identidad o $\phi = \sigma$.

Demostración.- Consideremos, primero, el caso en que Σ es el plano $x_n = 0$

Sea ϕ tal que, deje fijo a Σ. Sea $\Sigma' = S(a,r)$, donde $a \in \Sigma$ y $r > 0$

$\alpha \in \Sigma \Rightarrow \phi(\alpha) = \alpha$.

ϕ manda la esfera Σ' en una esfera, sea ésta $\Sigma'' = S(b,t)$

Como $a \in \Sigma \Rightarrow (\Sigma,\Sigma') = 0 \Rightarrow (\phi(\Sigma),\phi(\Sigma')) = 0 \Rightarrow (\Sigma,\Sigma'') = 0$

Por lo tanto $b \in \Sigma$.

Si $a = (a_0,\ldots,a_n)$ y $b = (b_0,\ldots,b_n) \Rightarrow a_n = b_n = 0$

Cada punto de $\Sigma \cap \Sigma'$ no se mueve bajo $\phi \Rightarrow$ si $x \in \Sigma \cap \Sigma'$

y $x = (x_1,\ldots,x_{n-1},0) \Rightarrow |x-a|^2 = (x_1-a_1)^2 + \ldots + (x_{n-1}-a_{n-1}) = r^2$

Como $\phi(x) = x$

$\Rightarrow |x-b|^2 = (x_1-b_1)^2 + \ldots + (x_{n-1}-b_{n-1})^2 = t^2$

Ahora, si $x \in \Sigma'' \cap \Sigma$, $\Rightarrow x = (x_1,\ldots,x_{n-1},0)$

$\Rightarrow |x-b|^2 = (x_1-b_1)^2 + \ldots + (x_{n-1}-b_{n-1})^2 = t^2$

Como $x = \phi(x) \in \phi(\Sigma'') \cap \Sigma = \Sigma' \cap \Sigma$

$\Rightarrow |\phi(x) - a|^2 = (x_1-a_1)^2 + \ldots + (x_{n-1}-a)^2 = r^2$

De donde, $a = b$ y $t = r$, $\phi(\Sigma') = \Sigma'$.

Tomemos $x \notin \Sigma$, sea a cualquier elemento de Σ, y sea

$|x-a|^2 = r^2 \Rightarrow x \in S(a,r)$

Sea $y = \phi(x)$

Como ϕ preserva a $S(a,r)$, $\Rightarrow y \in S(a,r)$

$\therefore |x|^2 - 2(x\cdot a) + |a|^2 = |y|^2 - 2(y\cdot a) + |a|^2$. Esto para toda a que pertenece a Σ.

En particular a puede ser igual a cero.

$\Rightarrow |x| = |y|$. Asi que $(x\cdot a) = (y\cdot a)$ para todo $a \in \Sigma$

Si tomamos $a = (e_1,\ldots,e_{n-1})$, encontramos $x_j = y_j$ para $j = 1,\ldots,n-1$

Como $|x| = |y|$, $\Rightarrow x_n = \pm y_n$, $\Rightarrow \phi(x) = y$ es x o $\sigma(x)$.

Concluyendo, ϕ deja invariante a Σ y permuta los componentes de $\hat{\mathbb{R}}^n - \Sigma$

$\Rightarrow \phi = I$ o $\phi = \sigma$.

Pasemos al caso general. Sea Σ una esfera diferente del plano $x_n = 0$

Observación.- Siempre existe una transformación de Möbius que envía a Σ en el plano $x_n = 0$

Demostración.- Invertimos con respecto a una esfera cuyo centro sea un punto a de Σ y que intersecte a Σ, entonces Σ se transforma en un plano, lo trasladamos al origen y rotamos hasta que coincida con $x_n = 0$.

$\Rightarrow \Sigma$ ha sido enviado a $x_n = 0$ por medio de tres transformaciones, las cuales podemos expresar como composición de reflexiones. Hemos pues transformado a Σ en $x_n = 0$ por medio de una transformación de Möbius.

Sea ψ dicha transformación.

Sea σ la reflexión en Σ y η la reflexión en $x_n = 0$.

La transformación $\psi\sigma\psi^{-1}$ fija a cada punto de $x_n = 0$, y no es la identidad, $\Rightarrow \psi\sigma\psi^{-1} = \eta$, $\therefore \sigma = \psi^{-1}\eta\psi$

Sea ϕ cualquier transformación de Möbius que deje fijo a Σ

$\Rightarrow \psi\phi\psi^{-1} = I$ o $\psi\phi\psi^{-1} = \eta$

$\Rightarrow \phi = I$ o $\phi = \sigma$.

Esta prueba demuestra, además, que toda reflexión σ es conjugada de la reflexión η. De aquí obtenemos el siguiente:

Corolario: Dos reflexiones son conjugadas en $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$.

Concluimos esta sección con una pequeña discusión a cerca de la razón cruzada.

Dados x, y, u, v, distintos puntos en $\hat{\mathbb{R}}^n$, definimos la razón cruzada de estos puntos como:

$$[x,\ y;\ u,\ v] = \frac{d(x,u)\cdot d(y,v)}{d(x,y)\cdot d(u,v)}$$

En virtud de que nuestra medida de longitud está dada por la distancia cordal, tenemos, para x, y, u, v en $\mathbb{R}^n$

$$[x,y;u,v] = \frac{\dfrac{2|x-u|}{(1+|x|^2)^{1/2}(1+|u|^2)^{1/2}} \quad \dfrac{2|y-v|}{(1+|y|^2)^{1/2}(1+|v|^2)^{1/2}}}{\dfrac{2|x-y|}{(1+|x|^2)^{1/2}(1+|y|^2)^{1/2}} \quad \dfrac{2|u-v|}{(1+|u|^2)^{1/2}(1+|v|^2)^{1/2}}}$$

$$= \frac{|x-u|\cdot|y-v|}{|x-y|\cdot|u-v|}$$

TEOREMA 1.2.4- Una función ϕ: $\hat{\mathbb{R}}^n \to \hat{\mathbb{R}}^n$ es una transformación de Möbius sí y sólo sí preserva razón cruzada.

Para isometrías es obvio. (Por lo tanto para reflexiones en plano).

Probémoslo para $\phi(x) = x^*$. Si x, $x^* \neq \infty$

$\Rightarrow$ por fórmula (1.2) $|x^* - y^*| = \dfrac{|x-y|}{|x|\ |y|}$

$$\Rightarrow [\phi(x),\ \phi(y),\ \phi(u),\ \phi(v)] = \frac{\dfrac{|x-u|}{|x|\ |u|} \quad \dfrac{|y-v|}{|y|\ |v|}}{\dfrac{|x-y|}{|x|\ |y|} \quad \dfrac{|u-v|}{|u|\ |v|}} = [x,\ y;\ u,v].$$

$\therefore$ Las transformaciones de Möbius preservan razón cruzada.

$\Leftarrow$) Supongamos que ϕ :$\hat{\mathbb{R}}^n \to \hat{\mathbb{R}}^n$ preserva razón cruzada y $\phi(\infty) = \infty$.

Tomemos cuatro puntos x, y, u, v en $\hat{\mathbb{R}}^n$ distintos.

$$\Rightarrow [\infty, y; u, v] = \frac{\dfrac{2}{(1+|u|^2)^{1/2}} \; \dfrac{2|y-v|}{(1+|y|^2)^{1/2}(1+|v|^2)^{1/2}}}{\dfrac{2}{(1+|y|^2)^{1/2}} \; \dfrac{2|u-v|}{(1+|u|^2)^{1/2}(1+|v|^2)^{1/2}}} = \frac{|y-v|}{|u-v|}$$

y $[x, y; u, \infty] = \dfrac{|y-v|}{|x-y|}$

$$\therefore [\infty, y; u, v] \,/\, [x, y; u, \infty] = \frac{\dfrac{|y-v|}{|u-v|}}{\dfrac{|y-v|}{|x-y|}} = \frac{|x-y|}{|u-v|}$$

$$\Rightarrow \; [\phi(\infty), \phi(y); \phi(u), \phi(v)] \,/\, [\phi(x), \phi(y); \phi(u), \phi(\infty)] = \frac{|x-y|}{|u-v|}$$

$\Rightarrow \dfrac{|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|} = \dfrac{|\phi(u)-\phi(v)|}{|u-v|}$ pues ϕ preserva razón cruzada

$\Rightarrow$ ϕ es una similitud, se sigue entonces que ϕ es una transformación de Möbius.

Si $\phi(\infty) = a \neq \infty$, componemos con una transformación de Möbius ψ, tal que $\psi(a) = \infty$.

$\Rightarrow [\psi\phi(x), \psi\phi(y); \psi\phi(u), \psi\phi(v)] = [\phi(x), \phi(y); \phi(u), \phi(v)]$

y tenemos el caso anterior.

1.3-Extensión de Poincaré

Poincaré observó que cada transformación de Möbius tenía una extensión natural a una transformación de Möbius $\hat{\phi}$ en $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}$.

En este sentido $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$, puede ser visto como un subgrupo de $GM(\hat{\mathbb{R}}^{n+1})$.

Esta extensión depende principalmente de la función:

$x \to \hat{x} = (x_1, \ldots, x_n, 0)$, donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$

Para cada reflexión ϕ en $\hat{\mathbb{R}}^n$, definimos $\hat{\phi}$ en $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}$ como la reflexión en $S(\hat{a}, r)$. ϕ es la reflexión en $S(a,r)$, $a \in \mathbb{R}^n$.

Si ϕ es la reflexión en $P(a,t)$, entonces $\hat{\phi}$ es una reflexión en $P(\hat{a}$

Si $x \in \hat{\mathbb{R}}^n$ y $y = \phi(x)$, $\Rightarrow \hat{\phi}(x_1, \ldots, x_n, 0) = (y_1, \ldots, y_n, 0) = \phi(x)$.

También podemos identificar $\mathbb{R}^{n+1}$ con $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, y escribir

$$\hat{\phi}(x,0) = (\phi(x),0)$$

Observe que $\hat{\phi}$ deja invariante al plano $x_{n+1} = 0$ (i.e. $\mathbb{R}^n$), y cada uno de los semiespacios $x_{n+1} > 0$ y $x_{n+1} < 0$.

Como cada transformación de Möbius ϕ en $\hat{\mathbb{R}}^n$ es una composición finita de reflexiones ϕ, digamos $\phi = \phi_1 \ldots \phi_m$, existe al menos una transformación de Möbius ϕ, tal que $\hat{\phi} = \hat{\phi}_1 \ldots \hat{\phi}_m$, que extiende a ϕ y preserva

$H^{n+1} = \left\{ (x_1, \ldots x_n, x_{n+1}); x_{n+1} > 0 \right\}$

Supongamos que existen dos extensiones $\psi_2^{-1}\psi_1$ fija cada punto de $x_{n+1} = 0$ y preserva H^{n+1}. Entonces por el teorema 1.2.3 $\psi_1 = \psi_2$, es decir la extensión es única.

Definición.- La extensión Poincaré de ϕ en $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$ es la transformación $\hat{\phi}$ en $GM(\hat{\mathbb{R}}^{n+1})$ definida arriba.

Observe que si ϕ y $\psi \in GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$, con $\phi = \phi_1 \ldots \phi_m$ y $\psi = \psi_1 \ldots \psi_k$, entonces la extensión de Poincaré $\phi\psi$ está dada por:

$$(\phi\ \psi) = (\phi_1 \ldots \phi_m\ \psi_1 \ldots \psi_k) = \hat{\phi}_1 \ldots \hat{\phi}_m\ \hat{\psi}_1 \ldots \hat{\psi}_k = \hat{\phi}\ \hat{\psi}$$

Por lo tanto la función $\phi \to \hat{\phi}$ es un homomorfismo inyectivo de $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$ en $GM(\hat{\mathbb{R}}^{n+1})$.

Hemos demostrado, anteriormente, que toda ϕ que pertenece a $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$ preserva razón cruzada. Tenemos que $\hat{\phi}$ pertenece a $GM(\hat{\mathbb{R}}^{n+1})$, entonces $\hat{\phi}$ también la preserva.

Si tomamos H^{n+1} como modelo de espacio hiperbólico, y como nuestra métrica $1/2 \log [x^{\bullet}, x; y, v^{\bullet}]$, estaremos demostrando que las extensiones de Poincaré son isometrías de H^{n+1}.

Centraremos, ahora, nuestra atención sobre la acción de la extensión de Poincaré $\hat{\phi}$ en H^{n+1}.

Proposición.- Para toda $x, y \in H^{n+1}$ y para toda $\phi \in GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$

$$\frac{|y-x|^2}{y_{n+1} x_{n+1}} \qquad \text{es invariante bajo } \hat{\phi}$$

Dem.- Si $\hat{\phi}$ es reflexión sobre $P(\hat{a},t)$, es isometría euclidiana

$$\frac{|\hat{\phi}(y)-\hat{\phi}(x)|^2}{[\hat{\phi}(y)]_{n+1}[\hat{\phi}(x)]_{n+1}} = \frac{|y-x|^2}{y_{n+1}x_{n+1}}$$ pues $[\hat{\phi}(x)]_{n+1} = x_{n+1}$ para toda $x \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Si ϕ es reflexión sobre $S(\hat{a},r)$, el resultado se sigue de

$$|\hat{\phi}(y) - \hat{\phi}(x)| = \frac{r^2|y-x|}{|x-\hat{a}|\ |y-\hat{a}|} \quad y \quad de\ [\hat{\phi}(x)]_{n+1} = \frac{r^2 x_{n+1}}{|x-\hat{a}|^2}$$

$$\frac{|\hat{\phi}(y)-\hat{\phi}(x)|^2}{[\hat{\phi}(y)]_{n+1}\ \hat{\phi}(x)]_{n+1}} = \frac{r^4|y-x|^2}{|x-\hat{a}|^2|y-\hat{a}|^2} \cdot \frac{|x-\hat{a}|^2|y-\hat{a}|^2}{r^2\ x_{n+1}\ r^2\ y_{n+1}} = \frac{|y-x|^2}{x_{n+1}y_{n+1}}$$

Si se define la métrica hiperbólica en H^{n+1} como la métrica inducida por la diferencial:

$$ds = \frac{|dx|}{x_{n+1}}$$

Entonces la distancia hiperbólica entre dos puntos z y w en H^{n+1} está dada por

$$\rho(z,w) = \inf_{\gamma} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\gamma_{n+1}(t)}\, dt$$

donde el ínfimo es sobre todas las curvas γ: $[a,b] \to H^{n+1}$ de clase C^1 por tramos, con $\gamma(a) = z$ y $\gamma(b) = w$

Es fácil ver que esta distancia es una métrica:

i) Claramente $\rho(x,x) = 0 \quad \forall\ x \in H^{n+1}$

ii) Si $x \neq y$, $\exists\ B(x,r) \subset H^{n+1}$, tal que $y \notin B(x,r)$ y para toda curva γ de clase C^1 por tramos que una x con y se tiene

$$\int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\gamma_{n+1}(t)}\, dt \geq \frac{r}{x_{n+1}+r} \quad \text{por lo cual}$$

$\rho(x,y) \geq \dfrac{r}{x_{n+1}+r}$ y $\rho(x,y) > 0$.

iii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ es consecuencia inmediata de la definición.

iv) Dados x, z, w $\in H^{n+1}$ y curvas γ_1, γ_2 de clase C^1 por tramos que unen x con w y w con z se tiene

$$\rho(x,y) \leq \int_a^{b'} \frac{|\gamma_1'|}{[\gamma_1]_{n+1}} + \int_{b'}^{c} \frac{|\gamma_2'|}{[\gamma_2]_{n+1}} \qquad \text{por cual}$$

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,w) + \rho(w,z)$$

Proposición.- $\forall\ \varphi \in GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$, $\hat{\varphi}$ es una isometría hiperbólica de H^{n+1}.

Dem.- Basta probar que $\forall$ curva C^1 por tramos γ se tiene

$$\frac{|\gamma'(t)|}{\gamma_{n+1}(t)} = \frac{|(\hat{\varphi}\ \gamma)'(t)|}{[\hat{\varphi}\ \gamma(t)]_{n+1}}$$

Si $\hat{\varphi}$ es reflexión sobre un plano $P(\hat{a},t)$

$|(\hat{\varphi}\ \gamma)'(t)| = |\hat{\varphi}'(\gamma(t)\ \gamma'(t)| = |\gamma'(t)|$ pues $\hat{\varphi}'(x) = I - 2Q_a$ es ortogo

Si $\hat{\varphi}$ es la reflexión sobre $S(\hat{a},r)$

Sea $\hat{\sigma}(x) = x^*$ la reflexión en $S(0,1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$\sigma'(x) = |x|^{-2}\ (I - 2Q_x)$, donde Q_x es simétrica y $Q_x^2 = Q_x$

luego $I - 2Q_x$ es matriz ortogonal

$\therefore\ |(\hat{\sigma}\gamma)'(t)| = |\hat{\sigma}'(\gamma(t)\gamma'(t)| = \dfrac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t)|^2}$

Ahora, si $\hat{\phi}$ es la reflexión en $S(\hat{a},r)$

$\hat{\phi}(x) = \hat{a} + r^2\ \sigma(x-\hat{a})$. Sea $u = (x-\hat{a})$

$\Rightarrow\ \hat{\phi}'(x) = \hat{\phi}'(u)\cdot u'(x) = r^2\sigma'(u)\cdot u'(x) = r^2|u|^{-2}\ (I - 2Q_u)\cdot u'(x)$

$\hat{\phi}'(x) = r^2|x-\hat{a}|^{-2}\ (I - 2Q_{x-\hat{a}})$

$$|(\hat{\varphi}\ \gamma)'(t)| = |\hat{\varphi}'(\gamma(t))\ \gamma'(t)| = \frac{1}{\dfrac{|\gamma(t)-\hat{a}|^2}{r^2}}\ |\gamma'(t)|$$

$$y\ \ [\hat{\varphi}(\gamma(t))]_{n+1} = \frac{r^2[\gamma(t)]_{n+1}}{|\gamma(t)\ -\ \hat{a}|^2}$$

Substituyendo éstas en la fórmula a probar, se sigue el resultado.

Proposición.- Si $x = pe_{n+1}$ y $y = qe_{n+1}$ entonces $\rho(x,y) = |\log p/q|$

Dem.- (desigualdad). Si $\gamma : [0,1] \to H^{n+1}$ de clase C^1,

$$\gamma(0) = p\ e_{n+1}\ ,\qquad \gamma(1) = q\ e_{n+1}\qquad\qquad 0 < p < q$$

$$\int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\gamma_{n+1}(t)}\ dt \geq \int_0^1 \frac{|\ \gamma'_{n+1}(t)\ |}{|\ \gamma_{n+1}(t)\ |}\ dt \geq \int_0^1 \frac{\gamma'_{n+1}(t)}{\gamma_{n+1}(t)}\ dt =$$

$$\log \gamma_{n+1}(t)\,\Big|_0^1 = \log q/p$$

Esto también vale para curvas C^1 por tramos pues se cancelan términos intermedios.

(igualdad). Si $p < q$ sea $\gamma : [p,q] \to H^{n+1}$ $\quad \gamma(t) = t\, e_{n+1}$

$$\int_p^q \frac{|\gamma'(t)|}{\gamma_{n+1}(t)}\, dt = \int_p^q \frac{1}{t}\, dt = \log q/p$$

Ahora $\cosh\left((\rho(x,y)\right) = \dfrac{e^{\log q/p} + e^{-\log q/p}}{2} = \dfrac{q/p + p/q}{2}$

$$= \frac{q^2 + p^2}{2pq} = 1 + \frac{(p-q)^2}{2pq} = 1 + \frac{|x-y|^2}{2x_{n+1}y_{n+1}}$$

Como ambos lados son invariantes bajo $\hat{\phi}$, podemos decir que la fórmula es válida para toda x y y en H^{n+1}, y queda expresada como

$\cosh(\rho(x,y)) = 1 + \dfrac{|x-y|^2}{2x_{n+1}y_{n+1}}$

Supongamos que $x = pe_{n+1}$ y $y = qe_{n+1}$ con $p < q$

$\Rightarrow$ si $d(x,y) = 1/2 \log [0,x;y,\infty]$, $\Rightarrow d(x,y) = 1/2 \log (q/p)$

y $\cosh(2d(x,y)) = \dfrac{e^{\log q/p} + e^{-\log q/p}}{2} = 1 + \dfrac{(p-q)^2}{2pq}$

De donde, $2d(x,y) = \rho(x,y)$, para toda x y y en H^{n+1}.

En adición, hemos obtenido que dados dos puntos distintos de H^{n+1} existe una única curva γ que pasa por ellos, la cual minimiza la integral

$$\int_\gamma \frac{|dx|}{x_{n+1}}$$

Tal la curva es un arco de una geodésica y las geodésicas son los semi-círculos ortogonales a $\mathbb{R}^n$ junto con las líneas euclidianas verticales en H^{n+1}.

Denotemos por ϕ_0 a la reflexión en $S(e_{n+1},\sqrt{2}\,)$, entonces:

$$\phi_0(x) = e_{n+1} + 2\,\frac{(x-e_{n+1})}{|x-e_{n+1}|^2}$$

Si $x \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \phi_o(\hat{x}) = e_{n+1} + 2\,\frac{(x_1,\ldots,x_n,-1)}{1+|x|^2}$$

$$\Rightarrow \phi_o(\hat{x}) = \left[\frac{2x_1}{1+|x|^2},\ \ldots,\ \frac{2x_n}{1+|x|^2},\ 1-\frac{2}{1+|x|^2}\right]$$

$$\Rightarrow \phi_o(\hat{x}) = \left[\frac{2x_1}{1+|x|^2},\ \ldots,\ \frac{2x_n}{1+|x|^2},\ \frac{|x|^2-1}{|x|^2+1}\right]$$

Y ésta es precisamente la fórmula de la proyección estereográfica Π de $\hat{\mathbb{R}}^n$ en S^n analizada en sección precedente.

Manejar la proyección estereográfica como una reflexión proporciona una rápida y sencilla prueba de la fórmula para la distancia cordal.

Si $x \in \mathbb{R}^n$ $\quad |\hat{x} - e_{n+1}|^2 = 1 + |x|^2$

$$\Rightarrow\ d(x,y) = |\Pi(x) - \Pi(y)|$$
$$= |\phi_o(\hat{x}) - \phi_o(\hat{y})|$$
$$= \frac{r^2|y-x|}{|x-e_{n+1}|\ |y-e_{n+1}|} = \frac{2|x-y|}{(1+|x|^2)^{1/2}(1+|y|^2)^{1/2}}$$

Capítulo 2

Las transformaciones de Möbius y los números de Clifford

La teoría de las transformaciones de Möbius en $\mathbb{R}^n$ puede ser vista mediante varios caminos. En el capitulo 1 escogimos un enfoque general que si bien desde el punto de vista teórico es satisfactorio, rápidamente nos conduce a fórmulas demasiado extensas y complejas. En consecuencia, es preciso encontrar un método que trabaje directamente en $\mathbb{R}^n$, pero que simplifique la notación.

Inspirados en el caso de $\mathbb{R}^2$, para el cual se utilizan los números complejos, en este capitulo, nos abocaremos a la tarea de establecer un método análogo al empleado en dicho caso. Con este motivo, Ahlfors dota a los elementos de $\mathbb{R}^n$ de una estructura algebraica que nos permita dividir. Son las álgebras de Clifford las que nos proporcionan esta estructura algebraica y nos permiten abordar el estudio de las transformaciones de Möbius mediante el uso de matrices de 2x2 cuyas entradas son números de Clifford.

2.1. Los Números de Clifford.

Algebra de Clifford.- Como en el caso de los cuaternios, tomaremos a $\mathbb{R}$ como nuestro campo y a $\mathcal{C}_n$ como el álgebra lineal asociativa generada por n-1 elementos $i_1,\dots,i_{n-1}$; definimos una multiplicación sujeta a las siguientes reglas:

$i_h\, i_k = -\, i_k\, i_h\,,\quad i_h^2 = -1$

Cada elemento de $\mathcal{C}_n$ tiene una única representación de la forma $\Sigma a_I I$, donde $a_I \in \mathbb{R}$ y la sumatoria es sobre todos los productos $I = i_{v1}, i_{v2},\dots, i_{vp}$ con $v1 < v2 < \dots < vp < n$, esto nos garantiza la unicidad de la representación.

El producto vacío, $I = \emptyset$, también está incluido y lo interpretamos como el número real 1, algunas veces se le denota por i_0, el coeficiente del producto vacío es denotado por a_0, y nos referiremos a él como la parte real, al resto de la suma la llamaremos parte imaginaria.

$\mathscr{C}_1$, que estaría generada por i_o, puede ser identificada con $\mathbb{R}$; $\mathscr{C}_2$, generado por i_o, i_1, es decir, 1, i_1, sería $\mathbb{C}$, pues $i_1^2 = -1$; $\mathscr{C}_3$ es el álgebra de los cuaternios $\mathbb{H}$, en este último caso 1, i, j, k estarían representados por i_o, i_1, i_2, i_1i_2 respectivamente, ya que:

$i_1i_2 = -i_2i_1$ en analogía con ij = k = -ji

$i_2i_1i_2 = -i_2i_2i_1 = i_1$ en analogía con jk = i

$i_1i_2i_1 = -i_2i_1i_1 = i_2$ en analogía con ki = j

$\mathscr{C}_n$ es un espacio vectorial de dimensión 2^{n-1}. Los números de Clifford de la forma $x = x_o + x_1i_1 + \ldots + x_{n-1}i_{n-1}$ serán llamados vectores. Ellos forman un subespacio vectorial V^n de dimensión n, que generalmente se identifica con $\mathbb{R}^n$.

El grado de $I = i_{v1} \ldots i_{vk}$ es k; el grado de $a = \Sigma a_I I$ es el grado de la I de más alto grado dentro de la suma. Un elemento es homogéneo si todos los elementos no nulos tienen el mismo grado. Un elemento es par (impar) si todos los elementos tienen grado par (impar). Todo elemento homogéneo en $\mathscr{C}_n$ lo denotamos por $a^{(k)}$, es decir, $a^{(k)} = \Sigma a_I I$, donde el grado de cada I es igual a k.

Si en la sumatoria $\Sigma a_I I$ "ordenamos" todos los elementos de forma que los grados de los sumandos I queden de menor a mayor, entonces la sumatoria puede ser vista como:

$\Sigma a_I I = a^{(o)} + a^{(1)} + \ldots + a^{(n)}$

donde cada $a^{(i)}$ es una sumatoria en la cual todos los sumandos I tienen el grado i.

Existen numerosas involuciones y anti-involuciones en $\mathscr{C}_n$, similares, a la conjugación compleja. La más importante de éstas consiste en reemplazar cada i_h por $-i_h$. Denotaremos esta conjugación de un elemento a por a', es evidente (a')' = a

Verificaremos que (a+b)' = a' + b'

Si $a = a^{(o)} + \ldots + a^{(n)}$ y $b = b^{(o)} + \ldots + b^{(k)}$

$\Rightarrow (a+b) = a^{(o)} + b^{(o)} + a^{(1)} + b^{(1)} + \ldots + a^{(k)} + b^{(k)} + \ldots + a^{(n)}$.

Cabe señalar que en esta conjugación si I es de grado par, entonces I' = I, y si es de grado impar I' = -I.

$\Rightarrow \quad (a+b)' = a^{(o)}+b^{(o)}+ -(a^{(1)}+b^{(1)}) + (-1)^2(a^{(2)}+b^{(2)}) + \ldots + + (-1)^k(a^{(k)}+b^{(k)}) + \ldots + (-1)^n a^n$

y $a' = a^{(o)}+ (-1)^1 a^{(1)}+ \ldots + (-1)^n a^{(n)}$

$b' = b^{(o)}+ (-1)^1 b^{(1)}+ \ldots + (-1)^k b^{(k)}$

$\therefore (a+b)' = a' + b'$

También se cumple que:

$(ab)' = a'b'$

Por linealidad bastará probarlo para el producto de $I_v= (i_{V1},\ldots,i_{vn})$ por $I_m= (i_{m1},\ldots,i_{mk})$.

Determinaremos el grado del producto

Si I_v e I_m no tienen factores comunes el grado del producto será n + k

Supongamos, ahora, que tienen j-factores en común, como estos elementos aparecen en ambos productos, al eliminarse se anulan por parejas, entonces el grado se ve disminuido en 2j, es decir:

el grado de $I_v I_m = n + k -2j$

$\Rightarrow I_v I_m = i_{v1}\ldots i_{vn} i_{m1}\ldots i_{mk} = (\pm)\ i_{p1}\ldots i_{ps}$ donde $s = n + k - 2j$

y $1 \leq p1 < \ldots < ps < n$

$\Rightarrow (I_v I_m)' = (-1)^{(n+k-2j)}\ (\pm)\ i_{p1}\ldots i_{ps}$

$I_v' = (-1)^n\ i_{v1}\ldots i_{vn}$ e $I_m' = (-1)^k\ i_{m1}\ldots i_{mk}$

$\Rightarrow I_v'\ I_m' = (-1)^{n+k}\ i_{v1}\ldots i_{vn} i_{m1}\ldots i_{mk} = (-1)^{n+k}\ (\pm)\ i_{p1}\ldots i_{ps}$

pero $(-1)^{(n+k-2j)} = (-1)^{n+k}$

$\therefore (I_v I_m)' = I_v'\ I_m'$

$\Rightarrow (ab)' = a'b'$

$\therefore$ dicha conjugación actúa como un automorfismo

Existe otra conjugación $a \to a^{\bullet}$ que se obtiene invirtiendo el orden de los factores en cada I. Es evidente que $(a^{\bullet})^{\bullet} = a$ y

$(a + b)^{\bullet} = a^{\bullet} + b^{\bullet}$

Veamos un ejemplo de esto:

Sea $I = i_1 i_2 \ldots i_n$

Sabemos que $i_1 i_2 = -i_2 i_1$, en general, $i_j i_k = - i_k i_j$ para $j < k$.

$\Rightarrow$ al permutar i_1 n-1 lugares, cual es el caso, la expresión queda como:

$$(-1)^{n-1} i_2 i_3 \dots i_n i_1$$

La i_2 permuta n-2 lugares, entonces:

$$(-1)^{n-1}(-1)^{n-2} i_3 i_4 \dots i_n i_2 i_1$$

En general:

$$I^* = (-1)^{n-1}(-1)^{n-2} \dots (-1)^1 i_1 \dots i_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} i_1 \dots i_n$$

Lema.- $(ab)^* = b^* a^*$

Demostración.- Como en el caso anterior basta probarlo para $(i_{v1}, \dots, i_{vn})(i_{m1}, \dots, i_{mk})$

$$\Rightarrow I_v I_m = i_{v1} \dots i_{vn} i_{m1} \dots i_{mk} = (\pm)\ i_{p1} \dots i_{ps} \quad \text{donde } s = n + k - 2j$$

$$\Rightarrow (I_v I_m)^* = (\pm) i_{pn+k-2j} \dots i_{p1} = (-1)^{\frac{(n+k-2j)[(n+k-2j)-1]}{2}} (\pm) i_{p1} \dots i_{pn+k-2j}$$

$$I_v^* = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} i_{v1} \dots i_{vk}$$

$$I_m^* = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} i_{m1} \dots i_{mk}$$

$$\Rightarrow I_v^* \ I_m^* = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} i_{m1} \dots i_{mn} \ i_{v1} \dots i_{vk}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)+k(k-1)}{2}} i_{m1} \dots i_{mn} \ i_{v1} \dots i_{vk}$$

Analicemos qué sucede al invertir el orden de dos factores de la forma: $I_m \ I_v$

Al pasar i_{mk} al final, el signo se altera n veces; lo mismo sucede con i_{mk-1}, y así sucesivamente, entonces:

$$I_m \ I_v = (-1)^{kn} \ I_v \ I_m$$

$$\Rightarrow I_m^* \ I_v^* = (-1)^{\frac{n(n-1)+k(k-1)+2km}{2}} i_{v1} \dots i_{vk} \ i_{m1} \dots i_{mk}$$

$$= (-1)^{\frac{(n+k)((n+k)-1)}{2}} (\pm) \ i_{p1} \dots i_{n+k-2j}$$

pero $(-1)^{\frac{(n+k)((n+k)-1)}{2}} = (-1)^{\frac{(n+k-2j)((n+k-2j)-1)}{2}}$

$\Rightarrow (I_v I_m)^{\bullet} = I_m^{\bullet} I_v^{\bullet}$

Estas conjugaciones pueden ser combinadas para dar una tercera

$\bar{a} = (a')^{\bullet}$

Si $a = a^{(o)} + \ldots + a^{(n)}$

$\Rightarrow a' = (-1)^{o} a^{(o)} + \ldots + (-1)^{n} a^{(n)}$

$\Rightarrow (a')^{\bullet} = a^{(o)} + (-1) a^{(1)} + (-1)^2 (-1) . a^{(2)} + \ldots + (-1)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a^{(n)}$

$\Rightarrow (a')^{\bullet} = a^{(o)} + (-1) a^{(1)} + (-1) (-1)^2 a^{(2)} + \ldots + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^n a^{(n)}$

$= (a^{\bullet})'$

y cumple con:

$(\overline{ab}) = \bar{b} \cdot \bar{a}$, pues $(\overline{ab}) = ((ab)')^{\bullet} = (a'b')^{\bullet} = (b')^{\bullet} (a')^{\bullet} = \bar{b} \cdot \bar{a}$

Para vectores $x^{\bullet} = x$ y $\bar{x} = (x^{\bullet})' = (x)'$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x\bar{x} = {} & x_o x_o - x_o x_1 i_1 - x_o x_2 i_2 - \ldots . - x_o x_n i_n \\ & + x_1 x_o i_1 + x_1 x_1 - x_1 x_2 i_1 i_2 - \ldots - x_1 x_n i_1 i_n \\ & + x_2 x_o i_2 - x_2 x_1 i_2 i_1 + x_2 x_2 - \ldots - x_2 x_n i_2 i_n \\ & + x_n x_o i_n - x_n x_1 i_n i_1 - \ldots + x_n x_n \end{aligned}$$

$\Rightarrow x \bar{x} = x_o^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = |x|^2$, donde $|x|$ es la norma euclidiana

Si aplicamos la suma $x + y$, entonces

$(x+y)(\overline{x+y}) = |x+y|^2$

$(x+y)\ (\bar{x}+\bar{y}) = |x+y|^2$

$x\bar{x} + x\bar{y} + y\bar{x} + y\bar{y} = |x+y|^2$

$x\bar{y} + y\bar{x} = |\ x + y|^2 - (|x|^2 + |y|^2)$

$= 2(x \cdot y)$

donde $(x \cdot y)$ es el producto interno.

La fórmula más general:

$$x\bar{y} = x_o y_o - x_o y_1 i_1 - \dots - x_o y_1 i_1$$
$$+ x_1 y_o i_1 + x_1 y_1 - x_1 y_2 i_1 i_2 - \dots - x_1 y_n i_1 i_n$$
$$+ x_2 y_o i_2 - x_2 y_1 i_2 i_1 + x_2 y_2 - \dots - x_2 y_n i_2 i_n$$
$$+ x_n y_o i_n - x_n y_1 i_n i_1 - \dots + x_n y_n$$
$$\Rightarrow x\bar{y} = (x\cdot y) - x_1 y_2 i_1 i_2 + x_2 y_1 i_1 i_2 - \dots - x_1 y_n i_1 i_n + x_n y_1 i_1 i_n$$
$$- x_n y_2 i_n i_2 + x_2 y_n i_n i_2 - \dots - x_n y_{n-1} i_n i_{n-1} + x_{n-1} y_n i_n i_{n-1}$$
$$= (x\cdot y) - \sum_{h<k} (x_h y_k - x_k y_h)\, i_h i_k$$

La notación de norma se extiende a los números de Clifford, entediéndose por $|a|^2$ de $a = \Sigma\, a_I I$ el número real Σa_I^2.

Un elemento de $\mathcal{C}_n$ está en su centro Z_n, si conmuta con todos los elementos de $\mathcal{C}_n$.
Existen dos reglas:

1) $i_{vp} I = I' i_{vp}$ si $i_{vp} \notin I$

2) $i_{vp} I = - I' i_{vp}$ si $i_{vp} \in I$

Demostración.-

1) Supongamos que $i_{vp} \notin I$, y grado de $I = n$

$\Rightarrow I' i_{vp} = (-1)^n i_{vp} I'$

Como $I' = (-1)^n I \Rightarrow I' i_{vp} = (-1)^n (-1)^n i_{vp} I = (-1)^{2n} i_{vp} I = i_{vp} I$

$\therefore I' i_{vp} = i_{vp} I$ si $i_{vp} \notin I$

Supongamos que $i_{vp} \in I$ y grado de $I = n$, entonces:

$i_{vp} I = (-1)^{n-1} I\ i_{vp}$, puesto que en el lugar p no cuenta la conmutación.

Ejemplo: si $I = i_1 \dots i_4$, $\Rightarrow i_2 I = i_2 (i_1 \dots i_4) = (-1)(i_1 i_2 i_2 \dots i_4)$
$$= (-1)^2 (i_1 i_2 i_3 i_2 i_4)$$
$$= (-1)^3 (i_1 i_2 i_3 i_4) i_2$$

Como $I' = (-1)^n I$

$\Rightarrow i_{vp} I = (-1)^{n-1} (-1)^n I' i_{vp} = (-1)^{2n-1} I' i_{vp}$, pero $2n-1$ es impar, entonces $(-1)^{2n-1} = (-1)$ $\Rightarrow i_{vp} I = -I' i_{vp}$.

Para que a esté en el centro, se tiene que cumplir que si $a_I \neq 0$, entonces I está en el centro. En consecuencia, podemos establecer el siguiente hecho:

Lema 2.1.1.- Si n es impar, entonces $Z_n = \mathbb{R}$, si n es par entonces Z_n está constituido por elementos que son combinación lineal de 1 y $i_1 i_2 \ldots i_{n-1}$.

Corolarioa 2.1.1.- Si n es impar y $xa = ax$ para todo vector x entonces $a \in \mathbb{R}$ (pues $a \in Z_n$).

Observaciones:

Si I está en el centro, y el grado de I es par, entonces I es vacio (i.e. = 1).

Supongamos que no, entonces $\exists\, i_{vp} \in I$ tal que $i_{vp} I = I i_{vp}$ pues I está en el centro, pero $i_{vp} I = -I' i_{vp}$, ya que i_{vp} es factor de I.

Como el grado de I es par $\Rightarrow I = (-1)^n I' = I'$

$\therefore\ i_{vp} I = -\,I i_{vp} = I i_{vp}$.

$\Rightarrow I = -I$!. La contradicción viene de suponer que $I \neq \emptyset$.

Si el grado de I es impar,y está en el centro, todo i_v es un factor de I.

Nuevamente supongamos lo contrario, es decir, que $\exists\, i_v$ tal que $i_v \notin I$.

Si $i_v \notin I$, entonces por la primera regla, $i_v I = I' i_v = I i_v$, pues I está en el centro, $\Rightarrow I = I'$.

Como grado de I impar $\Rightarrow I = (-1)^n I' = (-1) I = -I$

$\therefore\ I' = -I'$!. La contradicción viene de suponer que $\exists\, i_v \notin I$.

Demostración del lema. Sea n impar, $\Rightarrow i_1 \ldots i_{n-1}$ es de grado par.

Si $a \in Z_n$, $\Rightarrow$ todo I de a, es decir $a_I \neq 0$, pertenece a Z_n.

$\Rightarrow$ para todo I de a, de grado par, $I = \emptyset$, y para todo I de grado impar, se cumple que $I = i_1 \ldots i_{n-1}$, pero habiamos supuesto n-1 par.

$\therefore\ I = \emptyset$, para toda I, $\Rightarrow a \in \mathbb{R}$.

Sea n par $\Rightarrow\ i_1 \ldots i_{n-1}$ es de grado impar.

Si $a \in Z_n$, $\Rightarrow$ todo I de a pertenece a Z_n,

$\Rightarrow$ para todo I de a de grado par $I = \emptyset$.

y para I de grado impar, $\Rightarrow i_v$ es un factor de I.

$\therefore$ a es combinación lineal de 1 y $i_1 \ldots i_{n-1}$

Todo vector, no nulo, es invertible, pues $x\bar{x} = |x|^2$

$$\Rightarrow \frac{\bar{x}}{|x|^2} = \frac{\bar{x}}{x\,\bar{x}} = x^{-1}.$$

El producto de elementos invertibles es invertible. Por lo tanto, todo producto de vectores distintos de cero es invertible. Estos productos forman un grupo multiplicativo Γ_n, conocido como el grupo de Clifford.

Lema 2.1.2. Si $a \in \Gamma_n$, entonces $|a|^2 = a\bar{a}$ y si $a, b \in \Gamma_n$, entonces $|ab| = |a||b|$.

Si $a \in \Gamma_n \Rightarrow a = x^1 \ldots x^k$, un producto de vectores, entonces

$$a\bar{a} = (x^1 \ldots x^k)\overline{(x^1 \ldots x^k)}$$

$\Rightarrow a\bar{a} = x^1 \ldots x^k \bar{x}^k \ldots \bar{x}^1 = |x^k|^2 \ldots |x^1|^2 \geq 0$. Pero los únicos términos, en el producto $a\bar{a}$, de grado cero son los elementos de la forma a_I^2, y $a\bar{a} = \Sigma\, a_I^2 = |a|^2$, pues $I_v \overline{I_m}$ tiene grado cero $\Leftrightarrow I_v = I_m$; además $I\bar{I} = 1$.

Si $a, b \in \Gamma_n$, esto implica $(ab)\overline{(ab)} = ab\bar{b}\bar{a} = |a|^2|b|^2$.

$\therefore |ab|^2 = |a|^2|b|^2, \Rightarrow |ab| = |a||b|$.

Como consecuencia del lema tenemos:

$$a^{-1} = \frac{\bar{a}}{|a|^2} \quad \text{pues} \quad a\,\frac{\bar{a}}{|a|^2} = \frac{a\bar{a}}{a\,\bar{a}} = 1 \quad \text{para todo} \quad a \in \Gamma_n.$$

Similarmente:

$$a^{\bullet -1} = \frac{a'}{|a|^2} \quad \text{pues} \quad a'a^{\bullet} = (\bar{x}^1 \ldots \bar{x}^k)\,(x^k \ldots x^1) = |x^k|^2 \ldots |x^1|^2 = |a|^2$$

Lema 2.1.3.- Si $a \in \Gamma_n$ y $x \in V^n$, entonces $axa'^{-1} \in V^n$, y la función $x \to axa'^{-1}$ es isometría euclidiana de $V^n = \mathbb{R}^n$ sobre sí mismo.

Tenemos que $y\bar{x} = 2(x \cdot y) - x\bar{y}$

Si multiplicamos por y, por la derecha, entonces:

$$y\bar{x}y = 2(x \cdot y)y - x\bar{y}y = 2(x \cdot y)y - |y|^2\, x \text{ para toda } x.$$

Como $x = \bar{\bar{x}}$

$\bar{x} = z \Rightarrow y\bar{z}y = 2(z \cdot y)y - |y|^2\, z, \quad \Rightarrow y\bar{\bar{x}}y = 2(\bar{x} \cdot y)y - |y|^2\, \bar{x}$,

Usando que $y = y^{\bullet}$, obtenemos que $yxy^{\bullet} = 2(\bar{x} \cdot y)y - |y|^2\, \bar{x}$ que es combinación lineal de dos elementos de V^n

$\therefore yxy^{\bullet} \in V^n$

Si $a = y^1 \ldots y^k$

$\Rightarrow$ sabemos que $y^k \, x \, y^{*k} \in V^n \quad \therefore y^{k-1} \; y^k \, x \, y^{*k} \; y^{*k-1} \in V^n$, y así

$y^1 \ldots y^k \, x \, y^{*k} \ldots y^{*1} \in V^n$, $\Rightarrow axa^* \in V^n$

Como $a'a^* = |a|^2 \Rightarrow a'^{-1} = \dfrac{a^*}{|a|^2}$

Si $axa^* \in V^n \Rightarrow \dfrac{1}{|a|^2} \; (axa^*) \in V^n$

$\therefore axa'^{-1} \in V^n$.

$$|axa'^{-1}|^2 = |a|^2 \; |x|^2 \; |a'^{-1}|^2, \text{ pero } \; |a'^{-1}|^2 = |a^*/\, |a|^2|^2 = |a|^{-2}$$

$\Rightarrow \quad |axa'^{-1}|^2 = |x|^2$

$\therefore axa'^{-1}$ es isometría.

$\Rightarrow$ Si $\phi_a \, (x) = axa'^{-1}$, la inversa ψ de ϕ_a es:

$\phi_a \, (\psi(x)) = I(x) \quad \Rightarrow \quad a\psi(x) \; a'^{-1} = I(x) \quad \Rightarrow \quad \psi(x) = a^{-1} \; x \; a'$

y $\psi \; (\phi_a(x)) = a^{-1} \; a \; x \; a^{-1} \; a' = x$. Pero $\; a' = (a^{-1})'^{-1}$

$\therefore$ la inversa de ϕ_a es $\phi_{a^{-1}}$

Como $\phi_a(x) = axa'^{-1}$ es isometría y $\phi_a(0) = 0$ entonces $\phi_a(x) = xA$, donde A es una matriz ortogonal, además

$$\phi_{ab}(x) = ab \; x \; (a'b')^{-1} = ab \; x \; b'^{-1}a'^{-1} = \phi_a(\phi_b(x)).$$

Para dar una interpretación geométrica, determinaremos el significado de ϕ_y cuando y es vector. Entonces:

$$\dot{a}_y\bar{x} = y \; \bar{x} \; \bar{y}^{-1} = y \; \bar{x} \; \frac{y}{|y|^2} = \frac{1}{|y|^2} \; (- \; |y|^2 x + 2(x \cdot y)y)$$

$$= -x + 2(x \cdot y)\frac{y}{|y|^2} = - \; (x - 2(x \cdot y)\frac{y}{|y|^2})$$

Donde $(x - 2(x \cdot y)\dfrac{y}{|y|^2}) = \psi(x)$ es la reflexión en el plano $P(y,0)$, ortogonal a y que pasa por 0[1].

Si $y = 1$, visto en $\mathbb{R}^n$, $y = e_1 = (1, \ldots, 0)$, entonces la reflexión en el plano $P(e_1,0)$, aplicada a x queda:

$$\sigma(x) = x - (2x_o, \; 0, \; \ldots, \; 0) = (-x_o, \; x_1, \; \ldots, \; x_n)$$

---

1 Esta fórmula se vió en el capitulo 1.

En notación de Clifford $(-x_0, x_1, \ldots, x_n)$ es $-\bar{x}$.

$$\phi_y(x) = -\bar{x} + 2(\bar{x}\cdot y)\frac{y}{|y|^2} = -\bar{x} - 2(-\bar{x}\cdot y)\frac{y}{|y|^2}$$

$\Rightarrow \phi_y(x) = \psi\,\sigma(x)$.

$\therefore\ \phi_y(x)$ se puede ver como la composición de dos reflexiones, lo que significa que $\phi_y(x)$ preserva orientación[2].

Lema 2.1.4-Si $a, b \in \Gamma_n$, entonces $ab^{-1} \in V^n$ sí y sólo sí $a^* b \in V^n$.

Supongamos que $ab^{-1} \in V^n$, $ab^{-1} = x \Rightarrow a = xb$, pero $b^* xb \in V^n$,

$\Rightarrow b^* a \in V^n$. Como $b^* a = (b^* a)^* = a^* b$, $\Rightarrow a^* b \Rightarrow V^n$.

Si $a^* b \in V^n$, $a^* b = y \Rightarrow a^* = yb^{-1}$

$\therefore\ b^{*-1} a^* = b^{*-1} y\, b^{-1} \in V^n$ y $b^{*-1} a^* = (b^{*-1} a^*)^* = ab^{-1} \in V^n$.

2.2 Matrices de Clifford.

Consideraremos, en esta sección, únicamente matrices $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, con elementos en $\Gamma_n \cup \{0\}$. La matriz g aplicada al vector x es:

$$g(x) = (ax+b)(cx+d)^{-1}$$

Primeramente quisiéramos definir g como una función de V^n, pero como en el caso complejo es necesario agregar el punto al infinito; denotamos por $\overline{V}^n$ a $V^n \cup \{\infty\}$, donde el infinito desempeña el mismo papel que en los complejos, y $g(\infty) = ac^{-1}$.

Nos ocuparemos, por el momento, en averiguar bajo qué condiciones g(x) define una biyección de $\overline{V}^n \to \overline{V}^n$. Usaremos la misma letra g tanto para la función como para la matriz, prescindiendo del hecho de que múltiplos reales de la matriz definen la misma función.

¿ Cuándo g induce la función identidad?

Si g es la identidad, entonces $g(x) = x$, $ax+b = x(cx+d)$ para todo x.

---

2 Resultado del capitulo 1.

Para $x = 0 \Rightarrow bd^{-1} = 0 \quad \therefore b = 0$
Para $x = \alpha \Rightarrow ac^{-1} = \alpha$
$\Rightarrow c = 0$ y para $x = 1$ $a + b = c + d \Rightarrow a = d$
$\Rightarrow ax = xd = xa$ para toda x. Si n es impar, por el corolario a 2.1.1 tenemos que a es real, pero si n es par no podemos concluir que sea real. Sin embargo, si utilizamos la misma fórmula para $x \in \overline{V}^{n+1}$, y si la función de $\overline{V}^{n+1}$ es también la identidad, podemos concluir que es un múltiplo real de la matriz identidad.

Comenzaremos con condiciones necesarias para que g sea biyección de $\overline{V}^n \to \overline{V}^n$. En primer lugar, $g(0) = bd^{-1}$ y $g(\alpha) = ac^{-1}$; deben estar en $\overline{V}^n$. Por el lema 2.1.4 si $bd^{-1} \in V^n \Rightarrow b^{\bullet}d \in V^n$.
Y si $ac^{-1} \in V^n \Rightarrow a^{\bullet}c \in V^n$.

Si $y = g(x) = (ax+b)(cx+d)^{-1} \in V^n$, entonces $y(cx+d) = ax+b$, y como $x = x^{\bullet}$ y $y = y^{\bullet}$, también $(y(cx+d))^{\bullet} = (ax+b)^{\bullet}$, $(xc^{\bullet}+d^{\bullet})y = xa^{\bullet}+b^{\bullet}$ o lo que es igual $x(a^{\bullet} - c^{\bullet}y) = d^{\bullet}y - b^{\bullet}$, que tiene la misma forma que $g(x)$, $\Rightarrow$ a $g_1(y) = (d^{\bullet}y - b^{\bullet})(a^{\bullet} - c^{\bullet}y)^{-1}$ le corresponde la matriz

$$g_1 = \begin{pmatrix} d^{\bullet} & -b^{\bullet} \\ -c^{\bullet} & a^{\bullet} \end{pmatrix}$$

Podemos escribir $x = g_1(y)$, por construcción $g(g_1(y)) = y$ y $g_1(g(x)) = x$ para toda $x, y \in \overline{V}^n$. Es claro entonces que g_1 es inversa de g, $g_1(0) = -b^{\bullet}a^{\bullet-1} = g^{-1}(0)$, determinemos $g^{-1}(x)$:
$gg^{-1}(x) = x, \Rightarrow (ag^{-1}(x)+b)(cg^{-1}(x)+d)^{-1} = x,\ ag^{-1}(x)+b = xcg^{-1}(x)+xd$
$\Rightarrow (a-xc)g^{-1}(x) = xd-b \Rightarrow g^{-1}(x) = (a-xc)^{-1}(xd-b).$
$\therefore g^{-1}(0) = -a^{-1}b, \Rightarrow -b^{\bullet}a^{\bullet-1} = -a^{-1}b \in V^n \Rightarrow b = -ax \Rightarrow axa^{\bullet} \in V^n \Rightarrow -ba^{\bullet} \in V^n$
$\Rightarrow g_1(\alpha) = -d^{\bullet}c^{\bullet-1} = g^{-1}(\alpha) = -c^{-1}d \in V^n \Rightarrow d = -cx \Rightarrow cxc^{\bullet} \in V^n \Rightarrow -dc^{\bullet} \in V^n$
$\therefore -ab^{\bullet} = -ba^{\bullet}$ y $cd^{\bullet} = b^{\bullet}c$

Sabemos que las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} d^{\bullet} & -b^{\bullet} \\ -c^{\bullet} & a^{\bullet} \end{pmatrix}$ inducen funciones inversas una de la otra, entonces sus productos, en ambos órdenes, inducen la identidad.

$$gg_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^\bullet & -b^\bullet \\ -c^\bullet & a^\bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad^\bullet - bc^\bullet & -ab^\bullet + ba^\bullet \\ cd^\bullet - dc^\bullet & da^\bullet - b^\bullet c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad^\bullet - bc^\bullet & 0 \\ 0 & da^\bullet - b^\bullet c \end{pmatrix}$$

Con un argumento análogo al de arriba se tiene $g_1 g = \begin{pmatrix} d^\bullet a - b^\bullet c & 0 \\ 0 & a^\bullet d - c^\bullet b \end{pmatrix}$

Usando como notación $\Delta(g) = ad^\bullet - bc^\bullet$, $\Delta(g_1) = d^\bullet a - b^\bullet c$, se sigue:

$\Delta(g)x = x\Delta(g)^\bullet$, pues $gg_1(x) = x \Rightarrow ((ad^\bullet - bc^\bullet)x + 0)(0 + da^\bullet - b^\bullet c)^{-1} = x$ $\Rightarrow (ad^\bullet - bc^\bullet)x = x(da^\bullet - b^\bullet c)$ para toda $x \in V^n$. Y similarmente:

$\Delta(g_1)x = x\Delta(g_1)^\bullet$

En particular se cumple para $x = 1$, $\Rightarrow \Delta(g) = \Delta(g)^\bullet$ y $\Delta(g_1) = \Delta(g_1)^\bullet$

$\therefore$ $\Delta(g)x = x\Delta(g)$ para toda $x \in V^n$, y por consiguiente con todo $x \in \mathscr{C}_n$ y así con cada factor del producto.

Si n es impar esto implica que $\Delta(g)$ es real. Si n es par lo mismo se cumple si asumimos que g induce no sólo una biyección de $\overline{V}^n$, sino de $\overline{V}^{n+1}$. Además, es imposible que $\Delta(g) = 0$, pues $ad^\bullet = bc^\bullet$, $d^\bullet c^{\bullet -1} = a^{-1}b = c^{-1}d$, o lo que es igual $g_1(0) = g^{-1}(0) = g^{-1}(\infty)$, que contradice lo que estamos suponiendo.

Como $\Delta(g)$ y $\Delta(g_1)$ son reales, se sigue que:

$$gg_1 = \Delta(g)I, \quad g_1 g = \Delta(g_1)I \quad \Rightarrow \quad \Delta(g) = \Delta(g_1)$$

Como los factores reales en g son irrelevantes para la función, podemos normalizar de tal forma que $\Delta(g) = 1$ ó -1. Incluso con esta normalización g y -g definen la misma función.

Denominaremos a $\Delta(g)$ como el pseudo-determinante de g.

Los resultados anteriores motivan la siguiente definición:

Definición.- La matriz $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pertenece al conjunto $GL(\Gamma_n)$ si

i) $a, b, c, d \in \Gamma_n \cup \{0\}$.

ii) $\Delta(g) = ad^\bullet - bc^\bullet \in \mathbb{R}/\{0\}$.

iii) $ab^\bullet, cd^\bullet \in V^n$

iv) $c^\bullet a, d^\bullet b \in V^n$.

$g \in SL(\Gamma_n)$ si $\Delta(g) = 1$ ó -1, y a $SL_+(\Gamma_n)$ si $\Delta(g) = 1$

Se demostrará que $GL(\Gamma_n)$ es un grupo bajo la multiplicación de matrices, y que $SL(\Gamma_n)$ y $SL_+(\Gamma_n)$ son subgrupos. Utilizaremos la notación PSL, PSL_+ para los grupos cocientes módulo $\{\pm I\}$.

La condición iv) se demuestra a partir de ii) y iii):

$\Delta(g)c^*a = c^*\Delta(g)a$, pues $\Delta(g)$ es real y conmuta, ahora, como $\Delta(g)$ es real $\Rightarrow \Delta(g) = (\Delta(g)^*)'$

$$\Rightarrow c^*\Delta(g)a = c^*(\Delta(g)^*)'a = c^*(\overline{ad^*} - \overline{bc^*})a = c^*((a'\bar{d})^* - (b'\bar{c})^*)a$$

$$= c^*(d'\bar{a} - c'\bar{b})a = |a|^2c^*d' - |c|^2\bar{b}a = |a|^2(\bar{c}d)' - |c|^2\bar{b}a$$

Sabemos que $cd^* \in V^n \Rightarrow c^*d^{*-1} \in V^n \Rightarrow c^*\dfrac{d'}{|d|^2} \in V^n \Rightarrow c^*d' \in V^n$

$$\Rightarrow (\bar{c}d)' \in V^n.$$

$ba^* \in V^n \Rightarrow b^*a^{*-1} \in V^n \Rightarrow b^*\dfrac{a'}{|a|^2} \in V^n \Rightarrow b^*a' \in V^n \Rightarrow (b^*a')' \in V^n.$

$$\Rightarrow \bar{b}a \in V^n.$$

$\therefore |a|^2(\bar{c}d)' - |c|^2\bar{b}a \in V^n$, $\therefore \Delta(g)c^*a \in V^* \in c^*a \in V^n$.

Similarmente se demuetra para d^*b, pues:

$\Delta(g)d^*b = d^*(d'\bar{a} - c'\bar{b})b = |d|^2\bar{a}\, b - |b|^2(\bar{d}c)' \in V^n$.

Si $c^*a \in V^n \Rightarrow a^*c \in V^n$ y si $d^*b \in V^n \Rightarrow b^*d \in V^n$.

Ahora:

$\Delta(g)|d|^2 = d^*(ad^* - bc^*)d' = |d|^2d^*a - d^*bc^*d' = |d|^2d^*a - b^*dc^*d'$,

pues $d^*b \in V^n$, $\Rightarrow d^*b = (d^*b)^* = b^*d$, así $dc^* = cd^*$ porque $cd^* \in V^n$.

$\Delta(g)|d|^2 = |d|^2d^*a - b^*c|d|^2 = \Delta(g_1)|d|^2$.

$\Delta(g) = \Delta(g_1)$

Hemos demostrado que $\Delta(g) = \Delta(g_1)$ sin asumir que g induce una biyección.

TEOREMA A.-La matriz $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con a, b, c, d $\in \Gamma_n \cup \{0\}$ induce una biyección de $\bar{V}^n \to \bar{V}^n$ y $\bar{V}^{n+1} \to \bar{V}^{n+1}$ sí y sólo si $g \in GL(\Gamma_n)$.

La condición de necesidad ha sido probada con la definición de $GL(\Gamma_n)$, note que la existencia de $g(x) = (ax+b)(cx+d)^{-1}$ implica que $cx+d$ es invertible o 0, y que $ax+b$ y $cx+d$ no son simultáneamente 0.

Para la condición de suficiencia tenemos que mostrar, primero que todo, que $(ax+b)(cx+d)^{-1}$tiene sentido. Si $c = 0$ no hay nada que probar, si $c \neq 0$, $\Rightarrow$ $(cx+d) = c(x+c^{-1}d)$.Por iii) y lema 2.1.4, sabemos que $c^{-1}d \in V^n$, por consiguiente $cx+d = c(x+c^{-1}d) \in \Gamma_n \cup \{0\}$.

Si $ax+b = cx+d = 0 \Rightarrow x = -c^{-1}d = -d^*c^{*-1}$ y $ax+b = -ad^*c^{*-1}+b = 0$ $\Rightarrow ad^* - bc^* = 0$ contrario a ii). De aquí que $g(x)$ esté bien definida.

La condición iii) junto con $d^*a - b^*c = \Delta(g)$ implica:

$$\begin{aligned}(yc^*+d^*)(ax+b)-(ya^*+b^*)(cx+d) &= yc^*ax+yc^*b+d^*ax+d^*b-ya^*cx-ya^*d-b^*cx-b^*d\\ &= d^*ax - b^*cx - ya^*d + yc^*b.\\ &= \Delta(g)x - y\Delta(g)\\ &= \Delta(g)(x-y).\end{aligned}$$

Si $x, y \in V^n$, como asumimos, entonces:

$$\begin{aligned}g(x) - g(y)^* &= (ax+b)(cx+d)^{-1} - (yc^*+d^*)^{-1}(ya^*+b^*)\\ &= (yc^*-d^*)^{-1}\Delta(g)(x-y)(cx+d)^{-1}\end{aligned}$$

$\Rightarrow g(x) - g(y)^* = \Delta(g)(yc^*+d^*)^{-1}(x-y)(cx+d)^{-1}$

Una primera consecuencia es que $g(y) = g(y)^*$

$\Rightarrow g(x) - g(y) = \Delta(g)(yc^*+d^*)^{-1}(x-y)(cx+d)^{-1}$.

Para $y = 0$, $\Rightarrow g(x) - g(0) = \Delta(g)d^{*-1}x(cx+d)^{-1}$

Y pasando a la inversa:

$(g(x) - g(0))^{-1} = \Delta(g)^{-1}(cx+d)x^{-1}d^* = \Delta(g)^{-1}(cd^*+dx^{-1}d^*)$ como cd^* y $dx^{-1}d^* \in V^n$, $\Rightarrow$ $(cd^*+dx^{-1}d^*) \in V^n$. De aquí se sigue que $g(x) - g(0)$ es un vector o ∞ y como $g(0) = bd^{-1} \in \overline{V}^n$, pues $d^*b \in V^n$ $\Rightarrow b^*d \in V^n \Rightarrow bd^{-1} \in \overline{V}^n$. Podemos concluir que $g(x) \in \overline{V}^n$.

En otras palabras hemos probado que g induce una función $g: \overline{V}^n \to \overline{V}^n$. Exactamente el mismo razonamiento muestra que g induce una función de $\overline{V}^{n+1} \to \overline{V}^{n+1}$.

La prueba puede ser repetida para la matriz $\begin{pmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{pmatrix}$ que está también en GL(Γ_n). Sabemos de 2.2. que $gg_1 = g_1 g$ es un múltiplo real de la matriz unitaria, que induce a la función identidad. Esto prueba que las funciones $g: \overline{V}^n \to \overline{V}^n$ y $\overline{g}: \overline{V}^{n+1} \to \overline{V}^{n+1}$ son biyecciones.

Lema 2.2.1.- GL(Γ_n) es un grupo con la multiplicación de matrices SL(Γ_n) y SL_+(Γ_n) son subgrupos de GL(Γ_n).

Como un primer paso para mostrar que GL(Γ_n) es un grupo, verificaremos que el producto $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ de dos matrices en GL(Γ_n) tiene elementos en $\Gamma_n \cup \{0\}$.

Por principio, si a_1 y $c_2 \neq 0 \Rightarrow a_1 a_2 + b_1 c_2 = a_1 (a_2 c_2^{-1} + a_1^{-1} b_1) c_2$ que están en $\Gamma_n \cup \{0\}$ pues $a_1 b_1^* \in V^n \Rightarrow b_1 a_1^* \in V^n \Rightarrow b_1^* a_1^{*-1} \in V^n$

$$\Rightarrow (a_1^{-1} b_1)^* \in V^n \Rightarrow a_1^{-1} b_1 \in V^n$$

Lo mismo pasa con $a_2 c_2^{-1}$. Si a_1 ó $c_2 = 0$ la conclusión es obvia. Idéntico razonamiento aplicamos a las otras entradas.

Evidentemente $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in$ GL(Γ_n), la propiedad asociativa se hereda de la multiplicación de matrices. Lo único que resta por probar es que para cada $g \in$ GL(Γ_n) existe g^{-1} en GL(Γ_n) tal que $g^{-1} g = 1$.

Ahora, si $g \in$ GL(Γ_n), g induce una biyección, por lo tanto tiene una única inversa, que es, además biyectiva, entonces $g^{-1} \in$ GL(Γ_n).

Si $g \in$ SL(Γ_n), $\Rightarrow \Delta(g) = 1$ ó -1.

Sea g_1 y $g_2 \in$ SL(Γ_n) y $g_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ y $g_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \Delta(g_1 g_2) = \Delta \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

$$= (a_1 a_2 + b_1 c_2)(b_2^* c_1^* + d_2^* d_1^*) - (a_1 b_2 + b_1 d_2)(a_2^* c_1^* + c_2^* d_1^*)$$

$$= a_1 (a_2 d_2^* - b_2 c_2^*) d_1^* - b_1 (d_2 a_2^* - c_2 b_2^*) c_1^*$$

$$= \Delta(g_2)a_1d_1^* - \Delta(g_2)b_1c_1^*$$
$$= \Delta(g_2)\Delta(g_1)$$

$\therefore$ $SL(\Gamma n)$ y $SL_+(\Gamma n)$ son, ambos, subgrupos de $GL(\Gamma n)$.

Sea $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$ el grupo de las transformaciones de Möbius y $M(\hat{\mathbb{R}}^n)$ el grupo que preserva orientación.

TEOREMA B.- El grupo $PSL_+(\Gamma n)$ es isomorfo al grupo $M(\hat{\mathbb{R}}^n)$ y está generado por las matrices:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{*-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Asumamos que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_+(\Gamma n)$ con $c = 0$

$\Rightarrow ad^* - bc^* = 1, \Rightarrow ad^* = 1, \Rightarrow a^* = d^{-1}$

$\Rightarrow g(x) = axd^{-1} + bd^{-1} = axa^* + ba^*$

que se puede descomponer como $\begin{pmatrix} 1 & ba^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{*-1} \end{pmatrix}$

Si $c \neq 0 \Rightarrow bc^* = ad^* - 1$, como $c^{-1}d \in V^n$, $\Rightarrow b = ad^*c^{*-1} - c^{*-1}$
$\Rightarrow b = ac^{-1}d - c^{*-1}$
$\Rightarrow g(x) = (ax + ac^{-1}d - c^{*-1})(cx + d)^{-1} = (ac^{-1}(cx+d) - c^{*-1})(cx + d)^{-1}$
$$= ac^{-1} - c^{*-1}(cx + d)^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ac^{*-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c^{*-1} \\ c & d \end{pmatrix}$$

Como $\begin{pmatrix} -c^{*-1} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c^{-1}d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^{*-1} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c^{-1}d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c^{*-1} \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ac^{*-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c^{*-1} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c^{-1}d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto prueba que las matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{*-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ generan a $SL_+(\Gamma n)$.

Como:

$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ corresponde a la translación $x \to x + b$ $(b \in V^n)$

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{*-1} \end{pmatrix}$ corresponde a la transformación ortogonal $x \to axa^*$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ corresponde a la reflexión $x \to -\bar{x}$, en el plano $x_0 = 0$, seguida de la reflexión $y \to y/|y|^*$ en la esfera unitaria y estas son todas transformaciones de Möbius, para cualquier $g \in SL_+(\Gamma n)$, la función inducida es una transformación de Möbius, por lo tanto toda $g \in SL_+(\Gamma n)$ es una transformación de Möbius.

Reciprocamente, cualquier transformación de Möbius de $\hat{\mathbb{R}}^n$ se puede expresar como g, para $g \in SL_+(\Gamma n)$, ya que las transformaciones de Möbius son generadas por los tres elementos mencionados arriba.
Hemos visto que la función $\lambda: SL_+(\Gamma n) \to M(\hat{\mathbb{R}}^n)$, definida como:

$\lambda(g) = (ax+b)(cx+d)^{-1}$, identificando $\overline{V}^n$ con $\hat{\mathbb{R}}^n$.

es un homomorfismo. Consideremos el kernel de λ.

Supongamos $g \in \ker \lambda$, entonces para cualquier $x \in \hat{\mathbb{R}}^n$ $g(x) = x$,

especialmente $x = 0$ y $x = \infty \Rightarrow b = c = 0$. Para toda $x \in \hat{\mathbb{R}}^n$, se tiene que $ax = xa$, por lo tanto a tiene que ser real.

Además, estamos suponiendo que $ad^* - bc^* = 1$, $\Rightarrow ad^* = a^2 = 1$

$\Rightarrow a = 1$ ó $a = -1$.

$\therefore \operatorname{Ker} \lambda = \{\pm I\}$

Entonces como g y $-g = (-I)g$ determinan la misma transformación

se tiene bien definida $\overline{\lambda}: PSL_+(\Gamma n) \to M(\hat{\mathbb{R}}^n)$

Por lo tanto $PSL_+(\Gamma n) \cong M(\hat{\mathbb{R}}^n)$.

Bibliografía.

AHLFORS, Lars V. ; Complex Analysis; tercera edición; Singapore; editorial Mc Graw-Hill Book Company; 1979; (International student edition).

AHLFORS, Lars V. ; Möbius Transformations and Clifford Numbers; Diferential geometry and complex analysis; H. E. Rauch memorial volume; Springer-Verlag; Berlin; 1985.

AHLFORS, Lars V. ; Old and new in Möbius groups; Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. 9; 1984; 93 - 105.

AHLFORS, Lars V. ; On the fixed points of Möbius transformation in $\mathbb{R}^n$; Ann. Aca. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. 10; 1985; 15 - 25.

BEARDON, Alan F. ; The Geometry of Dircrete Groups; New York; editorial Board; 1983; (Graduate texts in mathematics; 91); 337 pp.

LEHNER, Joseph ; A short curse in automorphic Functions; U.S.A.; editorialHolt, Rinehart and Winston, Inc.; 1966; (Athena Series); 65 pp.

SCHWERDTFEGER, Hans ; Geometry of complex numbers; New York; editorial Dover Publications, Inc.; 1979; 200 pp.

VERJOVSKY, A. ; Introducción a la geometría y variedades hiperbólicas; México; editorial Instituto Politécnico Nacional; 1982; (Sexta Escuela Latinoamericana de Matemáticas).

WADA, Masaaki ; Conjugacy invariants and normal forms of isometries of hiperbolic Space; (Tésis de Doctorado); 60 pp.