

4087

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA



U  
N  
I  
C  
O

**Estudio Comparativo de la  
Influencia de la Losa en  
las Rigideces de Entrepiso  
de Marcos Regulares**

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
INGENIERO CIVIL  
P R E S E N T A  
**DIEGO FERNANDEZ BAILLET**

MEXICO, D. F.

1969



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA  
Dirección  
Núm. 73-1500  
Exp. Núm. 73/

Al Parents señor DIEGO FERNANDEZ BAILLET  
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a usted a continuación el tema que aprobó por esta Dirección propuso el señor Profesor Ingeniero ENRIQUE DEL VALLE C. para que lo desarrolle como tesis en su examen profesional de INGENIERO CIVIL.

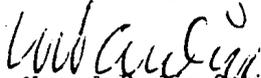
"ESTUDIO COMPARATIVO DE LA INFLUENCIA DE LA LOSA EN LAS RIGIDEZES DE ENTREPISO DE MARCOS REGULARES"

1. Introducción
2. Características del marco propuesto
3. Alternativas en cuanto al tramo de losa por considerar y su influencia en la rigidez de las trabes.
4. Obtención de los rigideces de entrapiso en las distintas alternativas por métodos aproximados - (fórmulas de Villaur)
5. Obtención de los rigideces de entrapiso en las distintas alternativas por métodos exactos - (pendiente-deformación)
6. Obtención y comparación de elementos mecánicos en las barras, en las distintas alternativas. Método pendiente-deformación.
7. Conclusiones.

Ruego a usted tomar debida nota de que en cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar examen profesional; así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprimen en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Muy atentamente

"POR MI RAZA HAJARA EI ESPIRITU"  
México, D. F., a 2 de Diciembre de 1968  
EI DIRECTOR

  
Ing. Manuel Paulín Ortiz

IMPRESIONADA.

A LA FACULTAD DE INGENIERIA

Con agradecimiento a su profesorado.

A LA MEMORIA  
DE MI PADRE.

A MI MADRE , HERMANOS ,  
FAMILIARES Y AMIGOS

Con cariño.

MI EXPRESO RECONOCIMIENTO

Al Sr. Ing. Enrique del Valle Calderón  
Director de la presente Tesis ,  
por el interés y estímulo brin-  
dados.

Al Sr. Ing. Armando Flores Victoria  
Por su colaboración en la so-  
lución de los sistemas de e-  
cuaciones simultáneas.

A todas las personas que hicie-  
ron posible la realización de -  
mis estudios profesionales :  
¡GRACIAS POR SU INTERVENCION!

## CAPITULO I

## INTRODUCCION

El estudio del comportamiento de marcos ante la solici-  
ción de fuerzas laterales reviste una gran importancia, ya que tanto  
el empuje de viento como las fuerzas que se generan en los diferen-  
tes niveles por una aceleración en la base del marco debida a efec-  
tos sísmicos, son de este tipo.

Para este estudio se han desarrollado diversos métodos que  
tratan de obtener dicho comportamiento, interviniendo en la gran ma-  
yoría de ellos la rigidez relativa de los elementos que componen al  
marco, es decir, columnas y trabes.

Sin embargo, no ha sido delimitada debidamente la forma en  
que la losa interviene en el incremento de rigidez relativa de las -  
trabes y por consiguiente en la rigidez de los entrepisos del marco.

En el campo de la práctica lo anterior se ha suplido en -  
diferentes formas, pero en lo general la consideración a seguir más -  
depende del criterio del estructurista que de una norma derivada de  
algún desarrollo teórico o recomendada por el resultado de estudios  
experimentales.

En algunas ocasiones el estructurista considera que la lo-  
sa contribuye en un ancho determinado permitido por especificaciones  
en toda la longitud de la trabe.

Debido a que los momentos flexionantes inducidos a las tra-  
bes por la acción de fuerzas laterales, son en un extremo positivos y  
en el opuesto negativos, otros estructuristas se inclinan por aceptar  
que la contribución de la losa no es a todo lo largo de la longitud  
de la trabe, sino únicamente en una mitad, formándose así una trabe de  
sección variable con uno de sus extremos en forma de T y el otro con  
sección rectangular.

Otros más, pensando en el predominio de la acción de las -  
cargas verticales sobre la acción de las fuerzas horizontales y re-  
firiéndose a los diagramas de momentos flexionantes de vigas de ex--

tremos empotrados, prefieren tomar la contribución de la losa únicamente en los tres quintos centrales de la longitud de la trabe, despreciando la que pudiese existir en los quintos extremos. Como en el caso anterior se forma una trabe de sección variable.

El caso opuesto al mencionado en primer término sería considerar que la losa en nada contribuye a la rigidez de la trabe y - por tanto a la rigidez de entrepiso.

Con objeto de conocer la influencia de la losa en las rigideces de entrepiso de marcos regulares en geometría, con rigideces relativas de trabes y columnas que no se disparen demasiado unas con respecto a las otras, en los capítulos siguientes se desarrolla un estudio comparativo entre los criterios antes mencionados utilizando - para el cálculo de las rigideces de entrepiso, como método aproximado las fórmulas proporcionadas por Wilbur y como método exacto el Pendiente-Deformación.

En el segundo capítulo se encuentran indicadas las características del marco cuyo estudio comparativo se efectúa, así como la obtención de algunos valores que serán utilizados en las diferentes alternativas por conservarse constantes.

El tercero, está enfocado a la forma en que se determinan las rigideces relativas de las trabes para las diferentes alternativas, según la influencia de la losa.

En el siguiente, se obtienen por el método aproximado de Wilbur, las rigideces de entrepiso.

El quinto capítulo está dedicado al cálculo de las rigideces de entrepiso, utilizando para ello el método Pendiente-Deformación.

El sexto, en forma condensada muestra los resultados obtenidos para los momentos finales en los extremos de las barras, a partir de las ecuaciones proporcionadas por el método exacto.

Por último, en el séptimo capítulo se emiten las conclusiones resultantes de este estudio comparativo, mismas que no deberán generalizarse a otros marcos que no cumplan con las características fijadas para el marco estudiado.

## CAPITULO II

## CARACTERISTICAS DEL MARCO PROPUESTO.

CARACTERISTICAS GEOMETRICAS.-El marco cuyas rigideces de -  
entrepiso se desean conocer, se muestra en la figura II-1

		SECCION	
		TRAB. COLS.	
3 m.		25x60	45x45
3 m.		25x60	45x45
3 m.		25x70	50x50
3 m.		25x70	50x50
3 m.		30x70	60x60
3 m.		30x70	60x60
4 m.			60x60
	7 m.		b h

Figura II-1

Como puede advertirse, se trata de un marco de seis pisos -  
con tres crujiás por piso, con un total de cuarenta y dos barras y -  
ventiocho nudos. Este marco presenta seis grados de libertad por des-  
plazamiento lineal, es decir, uno por cada piso.

La sección transversal de las columnas varía tal como se -  
indica en la figura, así como el peralte y ancho de las trabes.

Los claros entre columnas y las alturas de los entrepisos  
también se encuentran acotados en la figura.

**MODULO DE ELASTICIDAD.**—En vista de que tanto en las ecuaciones del método Pendiente-Deformación como en las expresiones de Wilbur interviene el módulo de elasticidad del concreto, se fija como característica del marco, que sea construido con un concreto cuyo peso volumétrico sea de  $2.2 \text{ T/m}^3$  y una resistencia  $f_c = 240 \text{ Kg./cm}^2$  a la falla por compresión.

Con los valores anteriores y la expresión:

$$E = w^{1.5} \times 4270 \sqrt{f_c}$$

proporcionada por el Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado, del A.C.I., (1102 a) se obtiene que:

$$E = 216,000 \text{ Kg./cm}^2$$

El valor del módulo de elasticidad del concreto, también podría haberse determinado con la expresión proporcionada por el Reglamento para Construcciones del Distrito Federal<sup>2</sup>, en su artículo 225 inciso II.

**INFLUENCIA DE LA LOSA.**—Para considerar la influencia de la losa en el aumento de rigidez de las trabes, se considerará que tiene un peralte  $h=10\text{cm.}$ , y que marcos de las mismas características que el estudiado obran paralelamente a él a seis metros de distancia.

El ancho en que la losa contribuye, se encuentra definido en igual forma en el artículo 225 inciso VI del Reglamento para Construcciones del Distrito Federal, y en el artículo 906 (b) del Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado del A.C.I., como el menor valor que resulte de calcular las siguientes expresiones:

$$b = 16t + b'$$

$$b = C \text{ a } C$$

$$b = L/4$$

en las que:

**b** = ancho en que la losa contribuye.

**t** = peralte de la losa.

**b'** = ancho de la trabe.

**C a C** = distancia entre los centros de los claros adyacentes a la trabe.

**L** = longitud de la trabe.

Efectuando las sustituciones necesarias se tiene:

$$b = 16 \times 10 + 30 = 190 \text{ cm. (1° y 2° Pisos)}$$

$$b = 16 \times 10 + 25 = 185 \text{ cm. (3° a 6° " )}$$

$$b = 600/2 + 600/2 = 600 \text{ cm.}$$

$$b = 700/4 = 175 \text{ cm.}$$

El resultado menor es 175 cm. y por tanto ese será el ancho que se considerará contribuye la losa al incremento de rigidez.

CALCULO DE LAS RIGIDECES RELATIVAS DE LAS COLUMNAS.- En vista de que las rigideces relativas de las columnas permanecen constantes en las diferentes alternativas de losa a considerar, su cálculo se incluye dentro de este capítulo.

De Planta Baja a Primer Piso .- Sección de 60 x 60 cm.

$$I = \frac{60 \times 60 \times 60 \times 60}{12} = 1\,080\,000 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I}{L} = \frac{1\,080\,000}{400} = 2\,700 \text{ cm}^3$$

De Primero a Segundo Piso .- Sección de 60 x 60 cm.

$$\frac{I}{L} = \frac{1\,080\,000}{300} = 3\,600 \text{ cm}^3$$

De Segundo a Cuarto Piso .- Sección de 50 x 50 cm.

$$I = \frac{50 \times 50 \times 50 \times 50}{12} = 520\,833 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I}{L} = \frac{520\,833}{300} = 1\,736 \text{ cm}^3$$

De Cuarto a Sexto Piso .- Sección de 45 x 45 cm.

$$I = \frac{45 \times 45 \times 45 \times 45}{12} = 341\,719 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I}{L} = \frac{341\,719}{300} = 1\,139 \text{ cm}^3$$

Estos valores correspondientes a las rigideces relativas de las columnas se utilizarán en los capítulos cuarto y quinto en la obtención de las rigideces de entrepiso para las diferentes alternativas de losa a considerar, las cuales se plantean en el siguiente capítulo.

**CALCULO DE LOS CORTANTES.**--En virtud de que en el método - Pendiente - Deformación y en las ecuaciones modificadas de Wilbur - aparecen los cortantes que obran en los diferentes entresijos, resulta necesario valuarlos y por utilizarse estos resultados tanto en el método exacto como para el aproximado, su cálculo se incluye en este segundo capítulo.

Suponiendo al sismo representado por un Coeficiente Sísmico de 0.06 y asignando al marco un peso de 100 Toneladas por nivel , de acuerdo con lo expuesto por el Reglamento para Construcciones del Distrito Federal en su artículo 273 , se procede a obtener el valor de los cortantes en los diferentes niveles partiendo de un análisis - estático, mismo que se presenta a continuación en forma tabular.

	Aceleración Supuesta	Peso Por Nivel	Fuerza Supuesta	Fuerza Real	Cortante Supuesto	Cortante Real
19	1.000	100	100.0	9.90		
3					100.0	9.90
16	0.845	100	84.5	8.36		
3					184.5	18.26
13	0.685	100	68.5	6.79		
3					253.0	25.05
10	0.528	100	52.8	5.23		
3					305.8	30.28
7	0.368	100	36.8	3.64		
3					342.6	33.92
4	0.211	100	21.1	2.08		
4					363.7	36.00
0		600			363.7	

$$\begin{aligned} \text{Cortante en Planta Baja} &= \text{Peso del Marco} \times \text{Coef. Sísmico} \\ &= 600 \times 0.06 = 36.00 \text{ Ton.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Coeficiente Correctivo} &= \frac{\text{Cortante en Planta Baja}}{\text{Cortante Supuesto en P.B.}} \\ &= \frac{36.0}{363.7} = 0.099 \end{aligned}$$

## CAPITULO III

ALTERNATIVAS EN CUANTO AL TRAMO DE LOSA POR CONSIDERAR Y SU INFLUENCIA EN LA RIGIDEZ DE LAS TRABES.

De acuerdo con los criterios mencionados en el primer capítulo, se estudiarán cuatro alternativas, enfocándose una de ellas desde tres diferentes puntos de vista, por lo cual, prácticamente serán seis los casos a estudiar.

PRIMERA ALTERNATIVA.--La losa contribuye a lo largo de toda la longitud de la trabe, formándose una sección T constante cuya rigidez relativa se obtiene dividiendo el momento de inercia de la sección entre la longitud de la pieza.

SEGUNDA ALTERNATIVA.--La losa contribuye a lo largo de la mitad de la longitud de la trabe, formándose así una pieza de sección variable mitad T y mitad rectangular.

Dada la característica de esta alternativa de tener una trabe con momentos de inercia diferentes en sus extremos, la rigidez relativa puede obtenerse en diferentes formas, siendo algunas de ellas las siguientes:

A.--Considerar el momento de inercia equivalente de la trabe como el simple promedio aritmético de los momentos de inercia en los extremos de la trabe. Dividiendo entre la longitud de la trabe el resultado anterior se obtiene la rigidez relativa equivalente.

B.--Utilizando la ecuación de barra valuar las rigideces relativas equivalentes en los extremos de la trabe y obteniendo su promedio aritmético, considerar éste como la rigidez relativa equivalente de la trabe.

C.--Empleando la ecuación de barra, obtener las rigideces relativas equivalentes y los factores de transporte para los extremos de la trabe y utilizar estos valores en la solución exacta del marco.

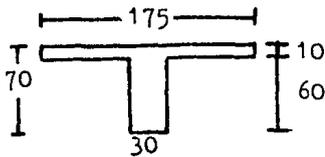
TERCERA ALTERNATIVA.--La losa contribuye únicamente en las tres quintas partes centrales de la longitud de la trabe, formándose una viga de sección variable a la cual habrá que aplicar la ecuación de barra para obtener las rigideces relativas equivalentes en sus --

extremos los cuales presentan la misma sección rectangular. Por lo anterior la rigidez relativa equivalente de la trabe, tiene el mismo valor que la de sus extremos.

CUARTA ALTERNATIVA.-La losa no contribuye a la rigidez de las trabes por lo que la rigidez relativa se determina dividiendo el momento de inercia de la sección entre la longitud de la trabe.

CALCULO DE LA RIGIDEZ RELATIVA DE LAS TRABES PARA LA PRIMERA ALTERNATIVA.

1° y 2° Niveles.



Cálculo del centroide de la sección.

	A	y	Ay	
175 x 10 =	1750	5	8750	
30 x 60 =	1800	40	72000	
	<u>3550</u>		<u>80750</u>	$Y = \frac{80750}{3550} = 22.7\text{cm.}$

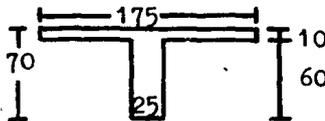
Cálculo del momento de inercia centroidal

30 x 60 x 60 x 60 / 12 =	540 000	22.7	40.0
30 x 60 x 17.3 x 17.3 =	537 500	- 5.0	- 22.7
175 x 10 x 10 x 10 / 12 =	14 600	17.7	17.3
175 x 10 x 17.7 x 17.7 =	547 500		
I =	<u>1639 600</u> cm <sup>4</sup>		

Cálculo de la rigidez relativa de la trabe.

$$\frac{I}{L} = \frac{1639\ 600}{700} = 2345\ \text{cm}^3$$

3° y 4° Niveles.

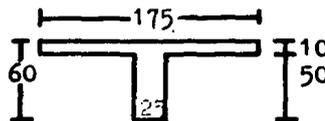


	A	y	Ay	
175 x 10 =	1750	5	8750	
25 x 60 =	1500	40	60000	
	<u>3250</u>		<u>68750</u>	$Y = \frac{68750}{3250} = 21.2\text{cm.}$

25 x 60 x 60 x 60 / 12 =	450 000	21.2	40.0
25 x 60 x 18.8 x 18.8 =	530 000	- 5.0	- 21.2
175 x 10 x 10 x 10 / 12 =	14 600	16.2	18.8
175 x 10 x 16.2 x 16.2 =	458 000		
I =	<u>1452 600</u> cm <sup>4</sup>		

$$\frac{I}{L} = \frac{1\ 452\ 600}{700} = 2075\ \text{cm}^3$$

5° y 6° Niveles.



	A	y	Ay	
175 x 10 =	1750	5	8750	
25 x 50 =	1250	35	43750	
	<u>3000</u>		<u>52500</u>	$Y = \frac{52500}{3000} = 17.5\text{cm.}$

25 x 50 x 50 x 50 / 12 =	260 400	17.5	35.0
25 x 50 x 17.5 x 17.5 =	382 000	- 5.0	- 17.5
175 x 10 x 10 x 10 / 12 =	14 600	12.5	17.5
175 x 10 x 12.5 x 12.5 =	273 000		
I =	<u>930 000</u> cm <sup>4</sup>		

$$\frac{I}{L} = \frac{930\ 000}{700} = 1330\ \text{cm}^3$$

ALGUNAS PALABRAS SOBRE LA ECUACION DE BARRA.

La ecuación de barra, referida a los ejes centroidales y principales del área elástica (Ejes de Levy) es la siguiente:

$$M = M' - \left( \frac{V_e}{A_e} + \frac{V_e X}{I_{ey}} x + \frac{V_e Y}{I_{ex}} y \right) + \left( \frac{\varpi_1}{A_e} + \frac{\varpi_1 X_1}{I_{ey}} x + \frac{\varpi_1 Y_1}{I_{ex}} y \right) - \left( \frac{\varpi_2}{A_e} + \frac{\varpi_2 X_2}{I_{ey}} x + \frac{\varpi_2 Y_2}{I_{ex}} y \right) + \left( \frac{E_2 - E_1}{I_{ex}} y \right) - \left( \frac{H_2 - H_1}{I_{ey}} x \right)$$

La ecuación de barra proporciona el valor del momento FLEXIONANTE para cualquier sección transversal perpendicular al eje de una pieza que cumpla con las condiciones de barra, cualesquiera que sean las condiciones de apoyo de sus extremos.

En la ecuación anterior la nomenclatura es la siguiente:

M = Momento flexionante en cualquier sección a lo largo del eje de la barra.

M' = Valor del momento flexionante en cualquier sección, considerando que la barra tiene condiciones de apoyo que la hacen isostática.

V<sub>e</sub> = Volumen elástico.

A<sub>e</sub> = Área elástica.

X = Abscisa del punto de aplicación del volumen elástico.

Y = Ordenada del punto de aplicación del volumen elástico.

x = Abscisa de la sección donde se desea conocer el momento flexionante

y = Ordenada de la sección donde se desea conocer el momento flexionante.

I<sub>ex</sub> = Momento de inercia del área elástica respecto al eje X

I<sub>ey</sub> = Momento de inercia del área elástica respecto al eje Y

ϖ<sub>1</sub> = Giro de la sección en el extremo 1 de la barra.

ϖ<sub>2</sub> = Giro de la sección en el extremo 2 de la barra.

X<sub>1</sub> = Abscisa de la sección en el extremo 1 de la pieza.

X<sub>2</sub> = Abscisa de la sección en el extremo 2 de la pieza.

Y<sub>1</sub> = Ordenada de la sección en el extremo 1 de la barra.

Y<sub>2</sub> = Ordenada de la sección en el extremo 2 de la barra.

$E_1$  = Desplazamiento lineal del extremo 1 de la pieza, en la dirección -- del eje X

$E_2$  = Desplazamiento lineal del extremo 2 de la barra, en la dirección -- del eje X

$H_1$  = Desplazamiento lineal del extremo 1 de la pieza, en la dirección -- del eje Y

$H_2$  = Desplazamiento lineal del extremo 2 de la barra, en la dirección -- del eje Y

De acuerdo con la definición de rigidez angular se tiene que Rigidez angular en el extremo de una barra es el momento que se debe aplicar en ese extremo de la pieza para que el giro que se produzca sea unitario.

Si se trata de obtener la rigidez angular de una barra de -- eje recto, apoyada elásticamente en ese extremo en que se desea conocer la rigidez, y empotrada en el opuesto, sin que obre sobre la pieza sistema de cargas alguno y sin que se permitan desplazamientos lineales a los extremos de la barra, la ecuación se reducirá ya que algunos de sus términos serán nulos en virtud de que:

$$y = 0$$

$$M' = 0$$

$$Q_2 = 0$$

$$V_e = 0$$

$$E_1 = 0$$

$$E_2 = 0$$

$$H_1 = 0$$

$$H_2 = 0$$

y la ecuación toma la forma siguiente:

$$M = Q_1 \left( \frac{1}{Ae} + \frac{X_1}{Iey} x \right)$$

de acuerdo con la definición de rigidez angular  $Q_1 = 1$ , y por tanto:

$$M_1 = \left( \frac{1}{Ae} + \frac{X_1 X_1}{Iey} \right)$$

y

$$M_2 = \left( \frac{1}{Ae} + \frac{X_1 X_2}{Iey} \right)$$

Tanto  $M_1$  como  $M_2$  son momentos flexionantes, pero el primero es un momento de apoyo sobre barra (ASB) y el segundo es de barra sobre apoyo (BSA).

Se define como factor de transporte al número que multiplicado por  $M_1$  da como resultado el valor  $M_2$  de misma naturaleza que  $M_1$ , es decir, que ambos momentos sean de apoyo sobre barra o bien ambos de barra sobre apoyo.

De la definición de factor de transporte se desprende que:

$$t_{1-2} = - \frac{M_2}{M_1}$$

OBTENCION DE LA RIGIDEZ RELATIVA EQUIVALENTE EN LOS EXTREMOS DE PIEZAS DE SECCION VARIABLE.

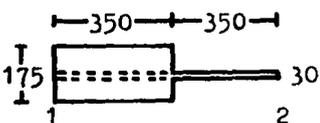
Mediante la aplicación de la ecuación de barra se obtienen las rigideces en los extremos de la pieza.

La rigidez de una barra de sección constante es  $\frac{4EI}{L}$

Igualando el valor anterior con el obtenido por la ecuación de barra resulta una expresión de la cual se despeja la que resulta rigidez relativa equivalente, es decir, el término  $\frac{I}{L}$ .

CALCULO DE LA RIGIDEZ RELATIVA DE LAS TRABES PARA LA SEGUNDA (A) ALTERNATIVA.

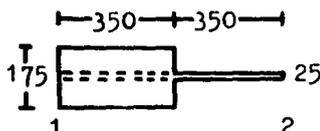
1° y 2° Niveles.



$$\begin{aligned} I_1 &= 1\,639\,600 & 30 \times 70^3/12 &= 857\,500 \\ I_2 &= 857\,500 \\ I_1 + I_2 &= 2\,497\,100 \\ I_{prom.} &= \frac{2\,497\,100}{2} = 1\,248\,550 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\frac{I_{prom.}}{L} = \frac{1\,248\,550}{700} = 1784 \text{ cm}^3$$

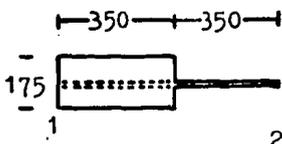
3° y 4° Niveles.



$$\begin{aligned} I_1 &= 1\,452\,600 & 25 \times 70^3/12 &= 714\,583 \\ I_2 &= 714\,583 \\ I_1 + I_2 &= 2\,167\,183 \\ I_{prom.} &= \frac{2\,167\,183}{2} = 1\,083\,592 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\frac{I_{prom.}}{L} = \frac{1\,083\,592}{700} = 1548 \text{ cm}^3$$

5° y 6° Niveles.



$$I_1 = 930\,000 \quad 25 \times 60^3 / 12 = 450\,000$$

$$I_2 = 450\,000$$

$$I_1 + I_2 = 1\,380\,000$$

$$I_{\text{prom}} = \frac{1\,380\,000}{2} = 690\,000 \text{ cm}^4$$

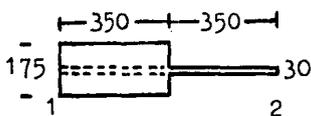
$$\frac{I_{\text{prom.}}}{L} = \frac{690\,000}{700} = 986 \text{ cm}^3$$

OBTENCION DE LA RIGIDEZ RELATIVA EQUIVALENTE DE LAS TRABES PARA LA SEGUNDA (B) ALTERNATIVA.

La rigidez en los extremos 1 y 2 de la trabe se determina - aplicando las expresiones:

$$r_1 = \frac{1}{Ae} + \frac{X_1 X_1}{Iey}$$

$$r_2 = \frac{1}{Ae} + \frac{X_2 X_2}{Iey}$$

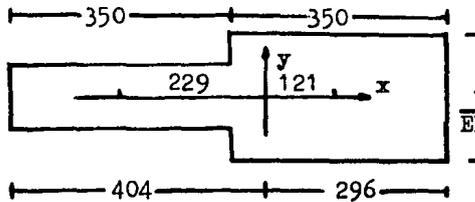


1° y 2° Niveles.

$$I_1 = 1\,639\,600$$

$$I_2 = 857\,500$$

$$\frac{1}{EI_1} = 6.1 \times \frac{10^{-7}}{E}$$



$$\frac{1}{EI_2} = 11.65 \times \frac{10^{-7}}{E}$$

Obtención de la posición del Centro de Levy.

Por tratarse de una barra de eje recto, el area elástica tiene cuando menos un eje de simetría, mismo que en el caso de la sección estudiada es centroidal y principal.

El eje restante, es perpendicular al anterior y su localización se obtendrá en lo que sigue a continuación.

$$\begin{array}{rcl}
 & Ae & x \\
 6.10 \times 10^{-7}/E \times 350 = 2140 \times 10^{-7}/E & ; & x \ 175 = 374 \ 000 \times 10^{-7}/E \\
 11.65 \times 10^{-7}/E \times 350 = 4080 \times 10^{-7}/E & ; & x \ 525 = 2 \ 140 \ 000 \times 10^{-7}/E \\
 & & \hline
 & 6220 \times 10^{-7}/E & 2 \ 514 \ 000 \times 10^{-7}/E
 \end{array}$$

$$\bar{x} = \frac{2 \ 514 \ 000 \times 10^{-7}/E}{6 \ 220 \times 10^{-7}/E} = 404$$

$$X_1 = -404$$

$$X_2 = +296$$

Cálculo del momento de inercia del area elástica (I<sub>ey</sub>)

$$6.10 \times 10^{-7}/E \times 350 \times 350 \times 350/12 = 2.18 /E$$

$$6.10 \times 10^{-7}/E \times 350 \times 229 \times 229 = 11.20 /E$$

$$11.65 \times 10^{-7}/E \times 350 \times 350 \times 350/12 = 4.16 /E$$

$$11.65 \times 10^{-7}/E \times 350 \times 121 \times 121 = \underline{5.97 /E}$$

$$23.51 /E = I_{ey}$$

Cálculo de las rigideces relativas equivalentes en los extremos 1 y 2 de la pieza.

$$r_1 = \frac{1}{6220 \times 10^{-7}/E} + \frac{-404 \times -404}{23.51/E} = 1608E + 6950E = 8558E$$

$$r_1 = 8558E = 4EI/L ; \quad \frac{I}{L} = \frac{8558E}{4E} = 2140 = \frac{I}{L} \text{ equiv.}$$

$$r_2 = \frac{1}{6220 \times 10^{-7}/E} + \frac{296 \times 296}{23.51/E} = 1608E + 3725E = 5333E$$

$$r_2 = 5333E = 4EI/L ; \quad \frac{I}{L} = \frac{5333E}{4E} = 1333 = \frac{I}{L} \text{ equiv.}$$

La rigidez relativa equivalente de la trabe será el promedio aritmético de las rigideces equivalentes de sus extremos

$$r = \frac{2140 + 1333}{2} = 1737$$

3° y 4° Niveles

Siguiendo un procedimiento semejante se llega a los siguientes resultados:

$$Ae = 7310 \times 10^{-7}/E \quad I_{ey} = 27.26 /E \quad X_1 = -409 \quad X_2 = +291$$

$$\frac{I}{L} \text{ equiv. (1)} = 1877 \quad \frac{I}{L} \text{ equiv (2)} = 1118 \quad r = 1498$$

5° y 6° Niveles.

$$Ae = 11540 \times 10^{-7}/E \quad I_{ey} = 42.86 /E \quad X_1 = -410 \quad X_2 = +290$$

$$\frac{I}{L} \text{ equiv. (1)} = 1192 \quad \frac{I}{L} \text{ equiv. (2)} = 707 \quad r = 950$$

OBTENCION DE LOS FACTORES DE TRANSPORTE EN LOS EXTREMOS DE LAS TRABES EN LA SEGUNDA (C) ALTERNATIVA.

En vista de que las rigideces equivalentes en los extremos de las trabes fueron obtenidas en la SEGUNDA (B) ALTERNATIVA, resta únicamente conocer el valor de los factores de transporte en esos ex tremos, para lo cual se sigue el procedimiento a continuación mostrado 1° y 2° Niveles.

$$t_{1-2} = \frac{\frac{1}{Ae} + \frac{X_1 X_2}{Iey}}{-r_1} = \frac{\frac{1}{6220 \times 10^{-7}/E} + \frac{-404 \times 296}{23.51/E}}{-8558 E}$$

$$t_{1-2} = \frac{1608 - 5100}{-8558} = -\frac{3492}{-8558} \quad t_{1-2} = 0.408$$

$$t_{2-1} = \frac{\frac{1}{Ae} + \frac{X_1 X_2}{Iey}}{-r_2} = \frac{\frac{1}{6220 \times 10^{-7}/E} + \frac{-404 \times 296}{23.51/E}}{-5333 E}$$

$$t_{2-1} = \frac{1608 - 5100}{-5333} = -\frac{3492}{-5333} \quad t_{2-1} = 0.654$$

3° y 4° Niveles.

Siguiendo un procedimiento como el anterior, se obtiene que:

$$t_{1-2} = 0.400$$

$$t_{2-1} = 0.670$$

5° y 6° Niveles.

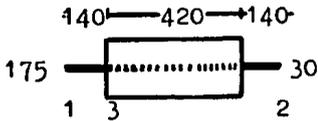
Para los extremos de las barras en el 5° y en el 6° nivel, los factores de transporte son:

$$t_{1-2} = 0.402$$

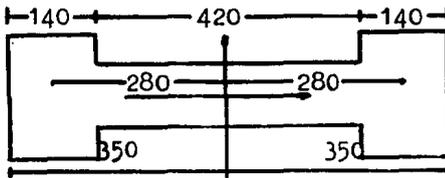
$$t_{2-1} = 0.677$$

OBTENCION DE LA RIGIDEZ RELATIVA DE LAS TRABES PARA LA TERCERA ALTERNATIVA.

1° y 2° Niveles.



$$\frac{1}{EI_3} = \frac{6.10}{10^7 E}$$



$$\frac{1}{EI_1} = \frac{11.65}{10^7 E}$$

Como puede advertirse en la figura representativa del área elástica, existen dos ejes de simetría perpendiculares entre sí, por lo cual, resultan ejes centroidales y principales.

$$\begin{aligned} & \text{Ae} & \text{Iey} \\ 2 \times 11.65 \times 10^{-7}/E \times 140 & = 3260 \times 10^{-7}/E ; \times 140 \times 140 / 12 = 0.53/E \\ & & \times 280 \times 280 = 25.60/E \\ 6.10 \times 10^{-7}/E \times 420 & = \underline{2560 \times 10^{-7}/E} ; \times 420 \times 420 / 12 = \underline{3.76/E} \\ & 5820 \times 10^{-7}/E & 29.89/E \end{aligned}$$

$$r_1 = r_2 = \frac{1}{5820 \times 10^{-7}/E} + \frac{350 \times 350}{29.89/E} = 1720E + 4100E = 5820E$$

$$r_1 = r_2 = 5820E = 4EI/L \quad ; \quad \frac{I}{L} = \frac{5820E}{4E} = 1455 = \frac{I}{L} \text{ equiv.}$$

3° y 4° Niveles.

Siguiendo el procedimiento anterior, para el 3° y el 4° nivel se obtiene:

$$\frac{I}{L} \text{ equiv.} = 1228$$

5° y 6° Niveles.

Para el 5° y el 6° nivel :

$$\frac{I}{L} \text{ equiv.} = 777$$

OBTENCION DE LA RIGIDEZ RELATIVA DE LAS TRABES PARA LA CUARTA ALTERNATIVA.

Tratándose de una sección rectangular constante, basta dividir el momento de inercia de la sección entre la longitud de la trabe para encontrar la rigidez relativa.

1° y 2° Niveles

$$I = 30 \times 70 \times 70 \times 70 / 12 =$$

$$I = 857\,000 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I}{L} = \frac{857\,000}{700} = 1225 \text{ cm}^3$$

3° y 4° Niveles

$$I = 25 \times 70 \times 70 \times 70 / 12 =$$

$$I = 714\,583 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I}{L} = \frac{714\,583}{700} = 1021 \text{ cm}^3$$

5° y 6° Niveles

$$I = 25 \times 60 \times 60 \times 60 / 12 =$$

$$I = 450\,000 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I}{L} = \frac{450\,000}{700} = 642 \text{ cm}^3$$

## CAPITULO IV

OBTENCION DE LAS RIGIDECES DE ENTREPISO EN LAS DISTINTAS ALTERNATIVAS POR METODOS APROXIMADOS ( FORMULAS DE WILBUR ) .

Se conoce como rigidez de entrepiso a la fuerza necesaria - para desplazarlo linealmente un centímetro entre dos niveles adyacentes.

La forma más usual de valuar las rigideces de entrepiso consiste en la aplicación de las Fórmulas de Wilbur, mismas que pueden - consultarse en la referencia 3 .

Wilbur derivó sus expresiones de la primera aproximación - del método de Maney-Goldberg.

Este método fue desarrollado a partir de Pendiente-Deformación y se utiliza para la solución de marcos, ya sea en forma directa o bien en forma iterativa.

Maney-Goldberg desarrollaron su método para marcos que cumplan las siguientes condiciones:

(1) Que se trate de marcos regulares sin discontinuidades - de columnas o trabes.

(2) Que los elementos del marco sean de sección constante.

(3) Que las deformaciones debidas a fuerza cortante y axial sean despreciables comparadas con las producidas por momento flexionante en cada uno de los miembros que constituyen la estructura.

Cuando el método de Maney-Goldberg se procesa en forma iterativa, para una primera aproximación sus autores formulan las siguientes hipótesis adicionales:

(1) Los nudos de un mismo nivel giran el mismo valor.

(2) Para valuar el giro de los nudos de un nivel, se supone que el giro de los nudos de los niveles adyacentes al que interesa , es el mismo que el que se desea valuar.

A partir de estas consideraciones, Wilbur efectúa su desarrollo y llega a expresiones del tipo de las que a continuación se muestran, en las cuales se puede advertir que la rigidez de entrepiso es - una función de las fuerzas cortantes que obran en ese entrepiso y en los inmediatos superior e inferior, así como de la rigidez relativa de

las trabes que limitan el entrepiso en cuestión y de las columnas del mismo.

Considerando que las columnas de la planta baja se encuentran empotradas en su base, la rigidez del primer entrepiso se obtiene utilizando la expresión:

$$R_1 = \frac{48 E}{h_1 \left[ \frac{4 h_1}{S'K_1^c} + \frac{h_1 + h_2 \frac{V_2}{V_1}}{S'K_1^t + \frac{S'K_1^c}{12}} \right]}$$

en la que:

R = Rigidez de entrepiso.

E = Módulo de elasticidad del concreto.

h = Altura de entrepiso.

V = Fuerza Cortante.

S' = Símbolo de suma.

K = Rigidez relativa

Los sub-índices numéricos indican el nivel y los alfabéticos, si se trata de columnas o trabes.

Para el segundo entrepiso se tiene:

$$R_2 = \frac{48 E}{h_2 \left[ \frac{4h_2}{S'K_2^c} + \frac{h_1 \frac{V_1}{V_2} + h_2}{S'K_1^t + \frac{S'K_1^c}{12}} + \frac{h_2 + h_3 \frac{V_3}{V_2}}{S'K_2^t} \right]}$$

Y para un entrepiso " n "

$$R_n = \frac{48 E}{h_n \left[ \frac{4h_n}{S'K_n^c} + \frac{h_m \frac{V_m}{V_n} + h_n}{S'K_m^t} + \frac{h_n + h_o \frac{V_o}{V_n}}{S'K_n^t} \right]}$$

Para hacer las rigideces de entrepiso independientes del valor de los cortantes, Wilbur considera que la fuerza cortante en los dos entrepisos adyacentes al que interesa, son iguales a la de éste.

Con la consideración anterior se llega a las expresiones - proporcionadas en la referencia 3, mismas que a continuación se transcriben para el caso de que las columnas se encuentren empotradas en - su base.

$$R_1 = \frac{48 E}{h_1 \left[ \frac{4h_1}{S'K_1^c} + \frac{h_1 + h_2}{S'K_1^t + \frac{S'K_1^c}{12}} \right]}$$

Para el segundo entrepiso:

$$R_2 = \frac{48 E}{h_2 \left[ \frac{4h_2}{S'K_2^c} \quad \frac{h_1 + h_2}{S'K_1^t + \frac{S'K_1^c}{12}} \quad \frac{h_2 + h_3}{S'K_2^t} \right]}$$

Y para un entrepiso " n "

$$R_n = \frac{48 E}{h_n \left[ \frac{4h_n}{S'K_n^c} \quad \frac{h_m + h_n}{S'K_m^t} \quad \frac{h_n + h_o}{S'K_n^t} \right]}$$

En las siguientes hojas se encuentran los marcos de las distintas alternativas y en ellos se han anotado las rigideces relativas de sus miembros.

A la derecha de los marcos se encuentran las sumas de las - rigideces relativas de sus elementos y a la izquierda, los valores de la fuerza cortante que obra en cada entrepiso, tal como se obtuvo en el segundo capítulo.

En la parte inferior de las hojas se muestran los resultados obtenidos de la aplicación de las Fórmulas de Wilbur, considerando y - sin considerar la influencia de los cortantes.

## PRIMERA ALTERNATIVA.

V (Ton.)	1330		1330		1330	S'K <sup>c</sup> cm <sup>3</sup>	S'K <sup>t</sup> cm <sup>3</sup>
<u>9.90</u>	1139	1330	1139	1139	1139	4556	3990
<u>18.26</u>	1139	1330	1139	1139	1139	4556	3990
<u>25.05</u>	1736	2075	1736	1736	1736	6944	6225
<u>30.28</u>	1736	2075	1736	1736	1736	6944	6225
<u>33.92</u>	3600	2345	3600	3600	3600	14400	7035
<u>36.00</u>	2700	2345	2700	2700	2700	10800	7035
	7m.		7m.		7m.		

R <sub>1</sub> =	110.6	109.7
R <sub>2</sub> =	135.1	134.5
R <sub>3</sub> =	98.3	97.8
R <sub>4</sub> =	95.4	94.8
R <sub>5</sub> =	70.2	68.0
R <sub>6</sub> =	62.6	70.8

Considerando	Sin Considerar
Cortantes	Cortantes

## SEGUNDA (A) ALTERNATIVA.

V (Ton.)				S·K <sup>c</sup> cm. <sup>3</sup>	S·K <sup>t</sup> cm. <sup>3</sup>
<u>9.90</u>	986 1139	986 1139	986 1139	4556	2958
<u>18.26</u>	986 1139	986 1139	986 1139	4556	2958
<u>25.05</u>	1548 1736	1548 1736	1548 1736	6944	4644
<u>30.28</u>	1548 1736	1548 1736	1548 1736	6944	4644
<u>33.92</u>	1784 3600	1784 3600	1784 3600	14400	5352
<u>36.00</u>	1784 2700	1784 2700	1784 2700	10800	5352
	7m.	7m.	7m.		

R <sub>1</sub> =	100.8	99.5
R <sub>2</sub> =	113.2	112.3
R <sub>3</sub> =	84.4	83.6
R <sub>4</sub> =	80.9	80.2
R <sub>5</sub> =	60.4	58.2
R <sub>6</sub> =	53.0	61.0

Considerando	Sin Considerar
Cortantes	Cortantes

## SEGUNDA (B) ALTERNATIVA.

V (Ton.)				S'K <sup>c</sup> cm. <sup>3</sup>	S'K <sup>t</sup> cm. <sup>3</sup>	
<u>9.90</u>	950 1139	950 1139	1139	950 1139	3m. 4556	2850
<u>18.26</u>	950 1139	950 1139	1139	950 1139	3m. 4556	2850
<u>25.05</u>	1498 1736	1498 1736	1736	1498 1736	3m. 6944	4494
<u>30.28</u>	1498 1736	1498 1736	1736	1498 1736	3m. 6944	4494
<u>33.92</u>	1737 3600	1737 3600	3600	1737 3600	3m. 4400	5211
<u>36.00</u>	1737 2700	1737 2700	2700	1737 2700	4m. 10800	5211
	7m.	7m.		7m.		

R <sub>1</sub> =	100.0	98.9
R <sub>2</sub> =	111.2	110.5
R <sub>3</sub> =	83.0	82.0
R <sub>4</sub> =	79.3	78.5
R <sub>5</sub> =	59.3	57.0
R <sub>6</sub> =	51.8	59.9

Considerando	Sin Considerar
Cortantes	Cortantes

## TERCERA ALTERNATIVA.

V  
(Ton.)

S'K<sup>c</sup>  
cm.<sup>3</sup>      S'K<sup>t</sup>  
cm.<sup>3</sup>

<u>9.90</u>	777 1139	777 1139    1139	777 1139	3m. 4556	2331
<u>18.26</u>	777 1139	777 1139    1139	777 1139	3m. 4556	2331
<u>25.05</u>	1228 1736	1228 1736    1736	1228 1736	3m. 6944	3684
<u>30.28</u>	1228 1736	1228 1736    1736	1228 1736	3m. 6944	3684
<u>33.92</u>	1455 3600	1455 3600    3600	1455 3600	3m. 14400	4365
<u>36.00</u>	1455 2700	1455 2700    2700	1455 2700	4m. 10800	4365
	7m.	7m.	7m.		

R <sub>1</sub> =	93.2	92.2
R <sub>2</sub> =	98.6	97.8
R <sub>3</sub> =	74.0	73.2
R <sub>4</sub> =	70.2	69.4
R <sub>5</sub> =	52.9	50.6
R <sub>6</sub> =	45.6	53.2

Considerando      Sin Considerar  
Cortantes          Cortantes

## CUARTA ALTERNATIVA.

V  
(Ton.)

S'K<sup>c</sup> S'K<sup>t</sup>  
cm.<sup>3</sup> cm.<sup>3</sup>

<u>9.90</u>	642 1139	642 1139 1139	642 1139	3m.	4556	1926
<u>18.26</u>	642 1139	642 1139 1139	642 1139		3m.	4556
<u>25.05</u>	1021 1736	1021 1736 1736	1021 1736	3m.	6944	3063
<u>30.28</u>	1021 1736	1021 1736 1736	1021 1736	3m.	6944	3063
<u>33.92</u>	1225 3600	1225 3600 3600	1225 3600	3m.	14400	3675
<u>36.00</u>	1225 2700	1225 2700 2700	1225 2700	4m.	10800	3675
	7m.	7m.	7m.			

R <sub>1</sub> =	87.3	86.1
R <sub>2</sub> =	87.2	86.5
R <sub>3</sub> =	66.0	65.0
R <sub>4</sub> =	62.0	61.2
R <sub>5</sub> =	47.1	44.9
R <sub>6</sub> =	40.2	47.3

Considerando Sin Considerar  
Cortantes Cortantes

## CAPITULO V

OBTENCION DE LAS RIGIDECES DE ENTREPISO EN LAS DISTINTAS --  
ALTERNATIVAS POR METODOS EXACTOS (PENDIENTE-DEFORMACION).

El método Pendiente-Deformación se utiliza para el cálculo de las rigideces de entrepiso en forma indirecta ya que está deducido para conocer el valor de los momentos finales de barra sobre nudo en los extremos de las barras, utilizando como incógnitas los giros de los nudos y los desplazamientos laterales de los niveles.

Sin embargo, una vez conocidos los desplazamientos de los distintos niveles, basta dividir el valor del cortante de un entrepiso entre el desplazamiento lineal que se presenta en él, para obtener su rigidez de entrepiso.

En el caso del marco que se estudia, a cada nudo se le distingue por un número de dos cifras, indicando la primera de ellas la columna en que se encuentra el nudo y la segunda el nivel en que está el nudo.

Las columnas fueron numeradas de izquierda a derecha y los niveles, de abajo hacia arriba, comenzando con el cero en el nivel de empotramiento de las columnas del primer entrepiso.

Así, por ejemplo, el nudo 21 se encontrará ubicado en la segunda columna de izquierda a derecha en el primer nivel.

El primer paso del método consiste en el planteo de las ecuaciones que proporcionan el valor de los momentos finales de barra sobre nudo en los extremos de las barras que forman el marco, en función de los giros de los nudos y de los desplazamientos de los niveles.

Para las columnas estas ecuaciones son del tipo de la sig. :

$$M_{ij} = M'_{ij} - 4EK_i \theta_i - t_{ji} 4EK_j \theta_j + 6EK_{ij} \frac{\Delta}{L}$$

en la que:

$M_{ij}$  = momento final de barra sobre nudo en el extremo i de la barra ij

$M'_{ij}$  = momento de barra sobre nudo en estado de empotramiento debido a la carga externa en el extremo i de la barra ij .

$K_i$  = rigidez relativa en el extremo i de la barra ij .

$\theta_i$  = giro que se produce en el extremo i de la barra ij .

$t_{ji}$  = factor de transporte de j a i de la barra ij .

$K_j$  = rigidez relativa en el extremo j de la barra ij .

$\theta_j$  = giro que se produce en el extremo j de la barra ij .

$K_{ij}$  = rigidez relativa de la barra ij .

$\Delta$  = desplazamiento lineal relativo entre los extremos de la barra ij .

E = módulo de elasticidad del material que forme la barra.

L = longitud de la barra ij .

Para traveses, la expresión que proporciona el momento final de barra sobre nudo, es la anterior sin el último término en virtud de que el desplazamiento relativo entre sus extremos es nulo.

Como ejemplo, a continuación se muestran las ecuaciones que proporcionan los momentos finales de barra sobre nudo en el extremo 21 de las barras 20-21 , 21-22 , 11-21 y 21-31

$$M_{21-20} = M'_{21-20} - 4EK_{21-20}\theta_{21} - t_{20-21}4EK_{20-21}\theta_{20} + 6EK_{21-20} \frac{\Delta_1}{L_{21-20}}$$

$$M_{21-22} = M'_{21-22} - 4EK_{21-22}\theta_{21} - t_{22-21}4EK_{22-21}\theta_{22} + 6EK_{21-22} \frac{\Delta_2}{L_{21-22}}$$

$$M_{21-11} = M'_{21-11} - 4EK_{21-11}\theta_{21} - t_{11-21}4EK_{11-21}\theta_{11}$$

$$M_{21-22} = M'_{21-22} - 4EK_{21-22}\theta_{21} - t_{22-21}4EK_{22-21}\theta_{22}$$

Para un análisis exclusivo de cargas laterales como el que se practica al marco, los términos  $M'$  se reducen a cero ya que en las columnas no existe carga exterior entre sus extremos por considerarse que las fuerzas laterales se aplican en los nudos en los distintos niveles y para las traveses  $M'$  también valdrá cero por considerar que no obra sobre ellas la carga vertical.

Observando las expresiones anteriores se advierte que siendo  $M'$  nulo puede sacarse como factor común la constante " 4E "

Si el desplazamiento lineal se expresa en metros y la longitud de las barras también, el cociente  $\frac{\Delta}{L}$  resultará un número adimensional.

Si las rigideces relativas de las barras se expresan en  $\text{cm}^3$  y los giros así como los factores de transporte son adimensionales, para que los momentos finales resulten en Toneladas-Metro, el módulo de elasticidad E tendrá que expresarse en  $\frac{\text{Ton.}/\text{cm}^2}{100}$ .

Si  $E = 216\,000 \text{ Kg./cm}^2$ , para obtener momentos en Ton.-M., se convertirá el factor  $4E$  en :

$$4E = 4 \times 2.16 \text{ Ton./cm}^2 = 8.64 \text{ Ton./cm}^2$$

En el caso de que se trate con barras de sección constante o bien con piezas cuyas rigideces relativas en sus extremos sean iguales, resulta que los factores de transporte valen  $\frac{1}{2}$  y que  $K_{ij} = K_{ji}$  - por lo que las expresiones anteriores se pueden escribir como sigue:

$$M_{21-20} = \left[ 4E \left[ -K_{21-20} \theta_{21} - \frac{1}{2} K_{21-20} \theta_{20} + 1.5 K_{21-20} \frac{\Delta_1}{L_{21-20}} \right] \right]$$

$$M_{21-22} = \left[ 4E \left[ -K_{21-22} \theta_{21} - \frac{1}{2} K_{21-22} \theta_{22} + 1.5 K_{21-22} \frac{\Delta_2}{L_{21-22}} \right] \right]$$

$$M_{21-11} = \left[ 4E \left[ -K_{21-11} \theta_{21} - \frac{1}{2} K_{21-11} \theta_{11} \right] \right]$$

$$M_{21-31} = \left[ 4E \left[ -K_{21-31} \theta_{21} - \frac{1}{2} K_{21-31} \theta_{31} \right] \right]$$

Una vez planteadas las ecuaciones de momentos finales de barra sobre nudo en los extremos de las barras que forman el marco, en este caso 84 ecuaciones, se procede a obtener las condiciones de equilibrio.

Así, se tiene que las barras que llegan a un nudo proporcionan a éste momentos con valores diferentes, los cuales necesariamente deberán estar en equilibrio y por ello su suma será igual a cero.

En el caso del nudo 21, su equilibrio estará dado por la suma de las ecuaciones que proporcionan  $M_{21-20}$ ,  $M_{21-22}$ ,  $M_{21-11}$  y  $M_{21-31}$

La ecuación de equilibrio del nudo 21 es:

$$4E \left[ -\frac{1}{2}K_{21-20}\theta_{20} - \frac{1}{2}K_{21-11}\theta_{11} - (K_{21-20} + K_{21-22} + K_{21-11} + K_{21-31})\theta_{21} \right. \\ \left. - \frac{1}{2}K_{21-31}\theta_{31} - \frac{1}{2}K_{21-22}\theta_{22} + 1.5\frac{K_{21-20}}{L_{21-20}}\Delta_1 + 1.5\frac{K_{21-22}}{L_{21-22}}\Delta_2 \right] = 0$$

En forma semejante se plantean las ecuaciones de equilibrio para los restantes 23 nudos resultando un sistema de 24 ecuaciones con 30 incógnitas.

A pesar que el marco tiene 28 nudos únicamente se plantean 24 ecuaciones de equilibrio de nudos ya que carece de interés el plantear las de los nudos de los extremos inferiores de las columnas del primer entrepiso en virtud de que considerándolas empotradas, su giro resulta nulo.

Para resolver el sistema anterior, deberán plantearse seis ecuaciones adicionales, proporcionadas por el equilibrio de cortantes.

En el caso del marco en estudio, el cortante de barra sobre nudo se determina dividiendo la suma de los momentos finales de barra sobre nudo en los extremos de la columna entre la longitud de esta.

La condición de equilibrio será que los cortantes que los nudos proporcionen a las barras equilibren a la fuerza cortante externa que actúe en el entrepiso.

Así, por ejemplo, la condición de equilibrio de cortantes para el segundo entrepiso será :

$$\left[ \frac{M_{12-11} + M_{11-12}}{L_{11-12}} + \frac{M_{22-21} + M_{21-22}}{L_{21-22}} + \frac{M_{32-31} + M_{31-32}}{L_{31-32}} + \frac{M_{42-41} + M_{41-42}}{L_{41-42}} \right] + 33.92 = 0$$

Si el término independiente se divide entre 4E (8.64) la expresión quedará multiplicada por 4E ya que las ecuaciones de los momentos finales en los extremos de las barras también se encuentran multiplicadas por 4E.

Sustituyendo los valores de los momentos en la expresión anterior por las ecuaciones que los proporcionan en función de los giros de los nudos y de los desplazamientos relativos, se tiene :

$$\begin{aligned}
 & 4E \left[ 1.5 \frac{K_{12-11}}{L_{11-12}} \theta_{11} + 1.5 \frac{K_{12-11}}{L_{11-12}} \theta_{12} + 1.5 \frac{K_{22-21}}{L_{21-22}} \theta_{21} + 1.5 \frac{K_{22-21}}{L_{21-22}} \theta_{22} \right. \\
 & + 1.5 \frac{K_{32-31}}{L_{31-32}} \theta_{31} + 1.5 \frac{K_{32-31}}{L_{31-32}} \theta_{32} + 1.5 \frac{K_{42-41}}{L_{41-42}} \theta_{41} + 1.5 \frac{K_{42-41}}{L_{41-42}} \theta_{42} \\
 & \left. - 3.0 \left[ \frac{K_{12-11}}{(L_{11-12})^2} + \frac{K_{22-21}}{(L_{21-22})^2} + \frac{K_{32-31}}{(L_{31-32})^2} + \frac{K_{42-41}}{(L_{41-42})^2} \Delta \right] \right] = - \left[ 3.926 \right] \left[ 4E \right]
 \end{aligned}$$

En forma semejante se plantean las ecuaciones de equilibrio - para cortantes en los restantes entrepisos llegándose a un sistema de - treinta ecuaciones simultáneas con treinta incógnitas.

Efectuando la sustitución de las rigideces relativas, factores de transporte y longitudes de barras por sus respectivos valores, se presentan para las distintas alternativas en las hojas siguientes los sistemas de ecuaciones.

Los sistemas de ecuaciones se muestran debidamente ordenadas las incógnitas, en forma de matriz de rigideces.

Igualmente, se aprovechan las hojas siguientes para mostrar - los valores obtenidos para las incógnitas, una vez que los sistemas de - ecuaciones fueron resueltos con la ayuda de computadoras electrónicas.

Los resultados que se obtuvieron se encuentran inmediatamente arriba de las incógnitas, es decir, de los giros y desplazamientos.





SEGUNDA (B) ALTERNATIVA.

NOTA: TODOS LOS VALORES COLOCADOS ARRIBA DE LAS INCOGNITAS  $\Theta$  Y  $\Delta$  ESTAN MULTIPLICADOS POR  $10^3$

	0.89927	0.69332	0.69332	0.89927	0.84379	0.46042	0.64042	0.84379	0.26044	0.61589	0.61589	0.86044	0.71871	0.49698	0.49698	0.71871	0.65481	0.47750	0.47750	0.65481	0.31940	0.10284	0.20284	0.31940	3.64988	3.14052	3.74922	3.27148	3.16841	1.99958								
	$\Theta_{11}$	$\Theta_{21}$	$\Theta_{31}$	$\Theta_{41}$	$\Theta_{12}$	$\Theta_{22}$	$\Theta_{32}$	$\Theta_{42}$	$\Theta_{33}$	$\Theta_{23}$	$\Theta_{33}$	$\Theta_{43}$	$\Theta_{14}$	$\Theta_{24}$	$\Theta_{34}$	$\Theta_{44}$	$\Theta_{15}$	$\Theta_{25}$	$\Theta_{35}$	$\Theta_{45}$	$\Theta_{16}$	$\Theta_{26}$	$\Theta_{36}$	$\Theta_{46}$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_4$	$\Delta_5$	$\Delta_6$								
I	-8037	-8685			-1800																				+1012.5	+1800						= 0						
II	-8685	-9774	-8685			-1800																			+1012.5	+1800						= 0						
III		-8685	-9774	-8685			-1800																		+1012.5	+1800						= 0						
IV			-8685	-8037				-1800																	+1012.5	+1800						= 0						
V	-1800				-7073	-8685			-868																							+1800 +868	= 0					
VI		-1800			-8685	-8610	-8685			-868																							+1800 +868	= 0				
VII			-1800		-8685	-8610	-8685			-868																								+1800 +868	= 0			
VIII				-1800		-8685	-7073			-868																								+1800 +868	= 0			
IX					-868			-4970	-749			-868																						+868 +868	= 0			
X						-868			-749	-6468	-749		-868																					+868 +868	= 0			
XI							-868			-749	-6468	-749		-868																					+868 +868	= 0		
XII								-868			-749	-4970			-868																				+868 +868	= 0		
XIII									-868				-4373	-749			-5695																	+868 +569.5	= 0			
XIV										-868				-749	-5671	-749		-5695																+868 +569.5	= 0			
XV											-868			-749	-5671	-749		-5695																+868 +569.5	= 0			
XVI												-868			-749	-4373			-5695															+868 +569.5	= 0			
XVII													-5695				-3228	-475			-5695													+569.5 +569.5	= 0			
XVIII														-5695			-475	-4178	-475		-5695													+569.5 +569.5	= 0			
XIX															-5695		-475	-4178	-475		-5695													+569.5 +569.5	= 0			
XX																-5695		-475	-3228		-5695													+569.5 +569.5	= 0			
XXI																	-5695			-2089	-475													+569.5	= 0			
XXII																		-5695			-475	-3039	-475											+569.5	= 0			
XXIII																			-5695			-475	-3039	-475										+569.5	= 0			
XXIV																					-5695			-475	-2089									+569.5	= 0			
XXV	+1012.5	+1012.5	+1012.5	+1012.5																														-2025	= -4.888			
XXVI	+1800	+1800	+1800	+1800	+1800	+1800	+1800	+1800																											-4800	= -3.928		
XXVII					+868	+868	+868	+868	+868	+868	+868	+868																								-234.67	= -3.804	
XXVIII										+868	+868	+868	+868	+868	+868	+868																					-234.67	= -2.800
XXIX														+5695	+5695	+5695	+5695	+5695	+5695	+5695																	-108.67	= -2.113
XXX																	+5695	+5695	+5695	+5695	+5695	+5695	+5695	+5695	+5695												-108.67	= -1.168



TERCERA ALTERNATIVA.

NOTA: TODOS LOS VALORES COLOCADOS ARRIBA DE LAS INCOGNITAS  $\theta$  Y  $\Delta$  ESTAN MULTIPLICADOS POR  $10^3$ .

	0.02445	0.01892	0.01892	0.02445	0.09534	0.79615	0.79615	0.98534	1.01455	0.76140	0.76140	1.01455	0.85464	0.81978	0.81978	0.85464	0.77042	0.59051	0.59051	0.77042	0.59111	0.25989	0.25989	0.59111	3.90075	3.53666	4.18193	3.80022	3.91788	2.26398					
	$\theta_{11}$	$\theta_{21}$	$\theta_{31}$	$\theta_{41}$	$\theta_{12}$	$\theta_{22}$	$\theta_{32}$	$\theta_{42}$	$\theta_{13}$	$\theta_{23}$	$\theta_{33}$	$\theta_{43}$	$\theta_{14}$	$\theta_{24}$	$\theta_{34}$	$\theta_{44}$	$\theta_{15}$	$\theta_{25}$	$\theta_{35}$	$\theta_{45}$	$\theta_{16}$	$\theta_{26}$	$\theta_{36}$	$\theta_{46}$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_4$	$\Delta_5$	$\Delta_6$					
I	-7755	-7275			-1800																				+102.5	+1800					=	0			
II	-7275	-9210	-7275			-1800																			+102.5	+1800					=	0			
III		-7275	-9210	-7275			-1800																		+102.5	+1800					=	0			
IV			-7275	-7785				-1800																	+102.5	+1800					=	0			
V	-1800				-8791	-7275			-868																	+1800	+868			=	0				
VI		-1800			-7275	-8246	-7275			-868																+1800	+868			=	0				
VII			-1800		-7275	-8246	-7275				-868															+1800	+868			=	0				
VIII				-1800			-7275	-8791				-868														+1800	+868			=	0				
IX					-868				-4700	-614			-868													+868	+868			=	0				
X						-868			-614	-5929	-614			-868												+868	+868			=	0				
XI							-868		-614	-5929	-614			-868												+868	+868			=	0				
XII								-868		-614	-4700			-868												+868	+868			=	0				
XIII									-868			-4103	-614			-569.5										+868	+569.5			=	0				
XIV									-868			-614	-5331	-614		-569.5										+868	+569.5			=	0				
XV										-868		-614	-5331	-614		-569.5										+868	+569.5			=	0				
XVI											-868		-614	-4103		-569.5										+868	+569.5			=	0				
XVII												-569.5				-3055	-368.5					-569.5					+569.5	+569.5			=	0			
XVIII													-569.5			-368.5	-3632	-368.5				-569.5					+569.5	+569.5			=	0			
XIX														-569.5		-368.5	-3632	-368.5				-569.5					+569.5	+569.5			=	0			
XX															-569.5		-368.5	-3055				-569.5					+569.5	+569.5			=	0			
XXI																-569.5					-1916	-368.5					+569.5				=	0			
XXII																	-569.5				-368.5	-2693	-368.5				+569.5				=	0			
XXIII																		-569.5				-368.5	-2693	-368.5				+569.5				=	0		
XXIV																					-569.5				-368.5	-1916			+569.5				=	0	
XXV	+102.5	+102.5	+102.5	+102.5																						-202.5					=	-4.188			
XXVI	+1800	+1800	+1800	+1800	+1800	+1800	+1800	+1800																			-4800					=	-3.988		
XXVII					+868	+868	+868	+868	+868	+868	+868	+868																					=	-3.504	
XXVIII									+868	+868	+868	+868	+868	+868	+868	+868																		=	-2.900
XXX													+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5									=	-2.113	
XXXI																+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5									=	-1.148

CUARTA ALTERNATIVA.

NOTA: TODOS LOS VALORES COLOCADOS ARRIBA DE LAS INCOGNITAS  $\theta$  Y  $\Delta$  ESTAN MULTIPLICADOS POR  $10^3$

	0.18238	0.95822	0.95822	0.18238	1.14529	0.95114	0.95114	1.14529	1.18457	0.92494	0.92494	1.18457	1.00604	0.75940	0.75944	1.00604	0.90036	0.71981	0.71981	0.90036	0.47562	0.32902	0.32902	0.47562	4.17789	3.90088	4.68827	4.12868	3.93088	2.97320					
	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$	$\theta_8$	$\theta_9$	$\theta_{10}$	$\theta_{11}$	$\theta_{12}$	$\theta_{13}$	$\theta_{14}$	$\theta_{15}$	$\theta_{16}$	$\theta_{17}$	$\theta_{18}$	$\theta_{19}$	$\theta_{20}$	$\theta_{21}$	$\theta_{22}$	$\theta_{23}$	$\theta_{24}$	$\theta_{25}$	$\theta_{26}$	$\theta_{27}$	$\theta_{28}$	$\theta_{29}$	$\theta_{30}$	$\theta_{31}$	$\theta_{32}$			
I	-7525	-612.5			-1800																													0	
II	-612.5	-8750	-612.5			-1800																												0	
III		-612.5	-8750	-612.5			-1800																											0	
IV			-612.5	-7525				-1800																										0	
V	-1800				-8561	-612.5			-868																									0	
VI		-1800			-612.5	-7786	-612.5			-868																								0	
VII			-1800		-612.5	-7786	-612.5			-868																								0	
VIII				-1800		-612.5	-8561			-868																								0	
IX					-868				-4495	-510.5			-868																					0	
X						-868				-510.5	-5514	-510.5		-868																				0	
XI							-868				-510.5	-5514	-510.5		-868																			0	
XII								-868				-510.5	-4495		-868																			0	
XIII									-868				-3896	-510.5		-569.5																		0	
XIV										-868			-510.5	-4917	-510.5		-569.5																	0	
XV											-868			-510.5	-4917	-510.5		-569.5																0	
XVI												-868		-510.5	-3896		-569.5																	0	
XVII													-569.5			-2920	-321		-569.5															0	
XVIII														-569.5		-321	-3562	-321	-569.5															0	
XIX															-569.5		-321	-3562	-321	-569.5														0	
XX																-569.5		-321	-2920		-569.5													0	
XXI																	-569.5			-1781	-321													0	
XXII																		-569.5		-321	-2423	-321												0	
XXIII																			-569.5		-321	-2423	-321											0	
XXIV																				-569.5		-321	-1781											0	
XXV	+1012.5	+1012.5	+1012.5	+1012.5																														-4.188	
XXVI	+1800	+1800	+1800	+1800	+1800	+1800	+1800	+1800																										-3.928	
XXVII					+868	+868	+868	+868	+868	+868	+868	+868	+868	+868	+868	+868	+868	+868	+868															-3.804	
XXVIII										+868	+868	+868	+868	+868	+868	+868	+868	+868	+868															-2.900	
XXIX																				+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5		-2.113
XXX																					+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5	+569.5		-1.148

CALCULO DE LAS RIGIDECEZ DE ENTREPISO.

De acuerdo con lo expuesto al principio de este capítulo, una vez que se conocen los desplazamientos lineales que sufren los niveles la obtención de las rigideces de entrepiso resulta casi inmediata.

A continuación se muestra la forma de obtener las rigideces de entrepiso para la primera alternativa y posteriormente se proporcionan los resultados obtenidos para las restantes.

$$R_1 = \frac{36.00000000}{0.00329535} \frac{(\text{Ton.})}{(\text{M.})} \quad R_1 = 109.24 \text{ Ton/cm.}$$

$$R_2 = \frac{33.92000000}{0.00259316} \quad R_2 = 130.80 \text{ Ton/cm.}$$

$$R_3 = \frac{30.28000000}{0.00317723} \quad R_3 = 95.30 \text{ Ton/cm.}$$

$$R_4 = \frac{25.05000000}{0.00273438} \quad R_4 = 91.61 \text{ Ton/cm.}$$

$$R_5 = \frac{18.26000000}{0.00268157} \quad R_5 = 68.09 \text{ Ton/cm.}$$

$$R_6 = \frac{9.90000000}{0.00165236} \quad R_6 = 59.91 \text{ Ton/cm.}$$

Para las restantes alternativas se obtiene:

	SEGUNDA (A)	SEGUNDA (B)	SEGUNDA (C)	TERCERA	CUARTA
R <sub>1</sub>	99.59	98.63	98.59	92.29	86.16
R <sub>2</sub>	109.93	108.00	107.92	95.91	85.21
R <sub>3</sub>	82.11	80.76	80.63	72.41	64.86
R <sub>4</sub>	78.04	76.57	76.34	67.82	60.23
R <sub>5</sub>	58.98	57.92	57.79	51.91	46.45
R <sub>6</sub>	50.71	49.61	49.50	43.74	38.47

En la hoja siguiente en forma condensada se muestran las rigideces de entrepiso obtenidas por métodos aproximados y exactos.

TABLA COMPARATIVA DE LAS RIGIDEZES DE ENTREPISO OBTENIDAS.

En la tabla que a continuación se muestra, se encuentran los valores de las rigideces de entrepiso del marco propuesto, obtenidas - primeramente aplicando las Fórmulas de Wilbur que consideran que el - valor de los cortantes no influye en la rigidez de entrepiso, después por medio de las Fórmulas de Wilbur que sí consideran la influencia - de los cortantes y por último, por el método Pendiente-Deformación.

En esta forma, los resultados obtenidos se presentan como un resumen de fácil comparación.

	1a.	2a.A	2a.B	2a.C	3a.	4a.
$R_6 =$	(1) 70.8 (2) 62.6 (3) 59.91	61.0 53.0 50.71	59.9 51.8 49.61	49.50	53.2 45.6 43.74	47.3 40.2 38.47
$R_5 =$	(1) 68.0 (2) 70.2 (3) 68.09	58.2 60.4 58.98	57.0 59.3 57.92	57.79	50.6 52.9 51.91	44.9 47.1 46.45
$R_4 =$	(1) 94.8 (2) 95.4 (3) 91.61	80.2 80.9 78.04	78.5 79.3 76.57	76.34	69.4 70.2 67.82	61.2 62.0 60.23
$R_3 =$	(1) 97.8 (2) 98.3 (3) 95.30	83.6 84.4 82.11	82.0 83.0 80.76	80.63	73.2 74.0 72.41	65.0 66.0 64.86
$R_2 =$	(1) 134.5 (2) 135.1 (3) 130.80	112.3 113.2 109.93	110.5 111.2 108.00	107.92	97.8 98.6 95.91	86.5 87.2 85.21
$R_1 =$	(1) 109.7 (2) 110.6 (3) 109.24	99.5 100.8 99.59	98.9 100.0 98.63	98.59	92.2 93.2 92.29	86.1 87.3 86.16

(1) Valores obtenidos con Wilbur sin considerar cortantes.  
 (2) " " " " considerando "  
 (3) " " a partir del método Pendiente-Deformación

## CAPITULO VI

## OBTENCION Y COMPARACION DE LOS ELEMENTOS MECANICOS EN LAS BARRAS, EN LAS DISTINTAS ALTERNATIVAS. METODO PENDIENTE DEFORMACION.

La obtención de los momentos finales de barra sobre nudo en los extremos de las barras por medio del método Pendiente Deformación, se reduce a sustituir en las ecuaciones que proporcionan esos momentos finales, los valores de las incógnitas del sistema de ecuaciones planteado, es decir, giros y desplazamientos lineales.

Para el marco estudiado, los resultados obtenidos para las distintas alternativas se presentan en las hojas siguientes, así como los momentos finales en los extremos de las barras obtenidos a partir del Método del Factor, de Norris-Wilbur, con objeto de estar en condiciones de comparar los resultados del método exacto con los proporcionados por uno aproximado.

En esos resultados, los valores que se encuentran entre paréntesis corresponden al Método del Factor y los libres de paréntesis, al Pendiente Deformación.

Los resultados se encuentran en Toneladas-Metro y no se indica signo alguno en virtud de que los momentos producidos por un sismo tendrán signo positivo o negativo según sea el sentido en que actúen las fuerzas sísmicas.

Las fuerzas cortante y normal de las barras no se indican en vista de que son función de los momentos finales de los extremos de la pieza de que se trate.

(16) 3.40(3.34) ( 2.42) 2.87	(26) 2.31( 2.05) ( 2.05) 2.31	(36) 2.87( 2.42) ( 3.34) 3.40	(46)
3.40 (3.34)	5.18 (4.47)	5.18 (4.47)	3.40 (3.34)
(2.94) 2.06	(4.10) 4.21	(4.10) 4.21	(2.94) 2.06
(15) 7.67( 8.44) ( 6.37) 6.71	(25) 5.73( 5.67) ( 5.67) 5.73	(35) 6.71( 6.37) ( 8.44) 7.67	(45)
5.61 (5.50)	8.23 (7.94)	8.23 (7.94)	5.61 (5.50)
(5.74) 5.38	(8.20) 8.17	(8.20) 8.17	(5.74) 5.38
(14) 12.81(13.60) (10.36)11.04	(24) 9.25( 9.06) ( 9.06) 9.25	(34) 11.04(10.36) (13.60)12.81	(44)
7.43 (7.86)	12.12 (11.22)	12.12 (11.22)	7.43 (7.86)
(7.58) 6.57	(10.92) 11.46	(10.92) 11.46	(7.58) 6.57
(13) 15.68(17.00) (13.18)13.64	(23) 11.60(11.68) (11.68)11.60	(33) 13.64(13.18) (17.00)15.68	(43)
9.11 (9.42)	13.78 (13.94)	13.78 (13.94)	9.11 (9.42)
(8.82) 9.14	(13.24) 13.39	(13.24) 13.39	(8.82) 9.14
(12) 18.07(19.02) (15.18)16.24	(22) 14.54(13.76) (13.76)14.54	(32) 16.24(15.18) (19.02)18.07	(42)
8.93 (10.20)	17.39 (15.70)	17.39 (15.70)	8.93 (10.20)
(9.78) 7.80	(15.20) 16.76	(15.20) 16.76	(9.78) 7.80
(11) 19.83(23.51) (16.52)17.78	(21) 15.74(15.16) (15.16)15.74	(31) 17.78(16.52) (23.51)19.83	(41)
12.03 (13.73)	16.76 (16.48)	16.76 (16.48)	12.03 (13.73)
(20.19) 20.41	(21.60) 22.80	(21.60) 22.80	(20.19) 20.41
(10)	(20)	(30)	(40)

(16)	3.46( 3.26) (2.46 ) 2.94	(26)	2.48( 2.14) ( 2.14) 2.48	(36)	2.94(2.46 ) ( 3.26) 3.46	(46)
3.46 (3.26)		5.42 (4.60)		5.42 (4.60)		3.46 (3.26)
(2.84) 1.83		(4.15) 4.14		(4.15) 4.14		(2.84) 1.83
(15)	7.35( 8.18) ( 6.40) 6.63	(25)	5.86( 5.81) ( 5.81) 5.86	(35)	6.63( 6.40) ( 8.18) 7.35	(45)
5.54 (5.34)		8.35 (8.06)		8.35 (8.06)		5.54 (5.34)
(5.60) 5.24		(8.38) 8.26		(8.38) 8.26		(5.60) 5.24
(14)	12.54(13.26) (10.48)11.07	(24)	9.61( 9.36) ( 9.36) 9.61	(34)	11.07(10.48) (13.26)12.54	(44)
7.30 (7.66)		12.42 (11.46)		12.42 (11.46)		7.30 (7.66)
(7.34) 6.28		(11.12) 11.58		(11.12) 11.58		(7.34) 6.28
(13)	15.16(16.50) (13.30)13.57	(23)	11.92(12.04) (12.04)11.92	(33)	13.57(13.30) (16.50)15.16	(43)
8.88 (9.16)		13.91 (14.22)		13.91 (14.22)		8.88 (9.16)
(8.56) 9.02		(13.48) 13.59		(13.48) 13.59		(8.56) 9.02
(12)	17.64(18.50) (15.32)16.31	(22)	14.69(14.16) (14.16)14.69	(32)	16.31(15.32) (18.50)17.64	(42)
8.62 (9.94)		17.41 (16.00)		17.41 (16.00)		8.62 (9.94)
(9.48) 7.79		(15.46) 17.06		(15.46) 17.06		(9.48) 7.79
(11)	18.79(22.86) (16.30)17.25	(21)	15.64(15.20) (15.20)15.64	(31)	17.25(16.30) (22.86)18.79	(41)
11.10 (13.38)		15.83 (16.04)		15.83 (16.04)		11.10 (13.38)
(20.62) 21.34		(21.96) 23.73		(21.96) 23.73		(20.62) 21.34
(10)		(20)		(30)		(40)

(16) 3.46( 3.26) ( 2.46 ) 2.96	(26) 2.51( 2.14) ( 2.14) 2.51	(36) 2.95( 2.46) ( 3.26) 3.46	(46)
3.46 (3.26)	5.47 (4.60)	5.47 (4.60)	3.46 (3.26)
(2.83) 1.81	(4.16) 4.11	(4.16) 4.11	(2.83) 1.81
(15) 7.35( 8.15) ( 6.40) 6.61	(25) 5.86( 5.84) ( 5.84) 5.86	(35) 6.61( 6.40) ( 8.15) 7.35	(45)
5.54 (5.32)	8.36 (8.08)	8.36 (8.08)	5.54 (5.32)
(5.60) 5.22	(8.38) 8.27	(8.38) 8.27	(5.60) 5.22
(14) 12.50(13.26) (10.48)11.08	(24) 9.64( 9.38) ( 9.38) 9.64	(34) 11.08(10.48) (13.26)12.50	(44)
7.32 (7.66)	12.45 (11.48)	12.45 (11.48)	7.32 (7.66)
(7.34) 6.25	(11.10) 11.56	(11.10) 11.56	(7.34) 6.25
(13) 15.12(16.50) (13.28)13.53	(23) 11.95(12.04) (12.04)11.95	(33) 13.53(13.28) (16.50)15.12	(43)
8.91 (9.16)	13.92 (14.22)	13.92 (14.22)	8.91 (9.16)
(8.56) 9.01	(13.48) 13.58	(13.48) 13.58	(8.56) 9.01
(12) 17.63(18.46) (15.30)16.21	(22) 14.87(14.18) (14.18)14.87	(32) 16.21(15.30) (18.46)17.63	(42)
8.62 (9.90)	17.50 (16.00)	17.50 (16.00)	8.62 (9.90)
(9.50) 7.75	(15.48) 17.01	(15.48) 17.01	(9.50) 7.75
(11) 18.69(22.88) (16.30)17.17	(21) 15.62(15.16) (15.16)15.62	(31) 17.17(16.30) (22.88)18.69	(41)
10.94 (13.38)	15.78 (15.98)	15.78 (15.98)	10.94 (13.38)
(20.64) 21.43	(22.00) 21.85	(22.00) 21.85	(20.64) 21.43
(10)	(20)	(30)	(40)

16 3.88

3.88

2.28

15 8.39

6.11

5.83

14 14.21

8.38

7.33

13 17.21

9.88

9.84

12 20.03

10.19

9.41

11 21.23

11.82

21.89

10

2.48 26 2.95

5.43

4.10

5.52 25 6.93

8.35

8.22

9.24 24 11.37

12.39

11.50

11.25 23 14.12

13.87

13.55

13.70 22 17.29

17.44

16.88

14.49 21 18.09

15.70

23.82

20

2.07 36 3.49

5.56

4.20

4.89 35 7.77

8.46

8.36

8.00 34 13.00

12.64

11.72

9.94 33 15.83

14.05

13.70

12.59 32 18.80

17.69

17.18

13.22 31 19.83

15.87

23.91

30

2.96 46

2.96

1.29

6.21 45

4.92

4.53

10.68 44

6.15

5.02

12.82 43

7.80

8.13

15.09 42

6.96

6.01

16.01 41

10.00

20.99

40

SEGUNDA (C) ALTERNATIVA.

①⑥	3.50( 3.21) ( 2.50) 3.08	②⑥	2.61( 2.20) ( 2.20) 2.61	③⑥	3.08( 2.50) ( 3.21) 3.50	④⑥
3.50 (3.21)		5.69 (4.70)		5.69 (4.70)		3.50 (3.21)
(2.76) 1.62		(4.18) 4.04		(4.18) 4.04		(2.76) 1.62
①⑤	7.14( 7.96) ( 6.41) 6.55	②⑤	5.95( 5.93) ( 5.93) 5.95	③⑤	6.55( 6.41) ( 7.96) 7.14	④⑤
5.52 (5.20)		8.46 (8.16)		8.46 (8.16)		5.52 (5.20)
(5.48) 5.10		(8.54) 8.31		(8.54) 8.31		(5.48) 5.10
①④	12.36(12.98) (10.58)11.15	②④	9.85( 9.62) ( 9.62) 9.85	③④	11.15(10.58) (12.98)12.36	④④
7.23 (7.50)		12.69 (11.66)		12.69 (11.66)		7.23 (7.50)
(7.18) 6.03		(11.24) 11.60		(11.24) 11.60		(7.18) 6.03
①③	14.79(16.18) (13.34)13.47	②③	12.11(12.28) (12.28)12.11	③③	13.47(13.34) (16.18)14.79	④③
8.76 (9.00)		13.99 (14.38)		13.99 (14.38)		8.76 (9.00)
(8.42) 8.95		(13.62) 13.72		(13.62) 13.72		(8.42) 8.95
①②	17.38(18.18) (15.40)16.20	②②	15.01(14.38) (14.38)15.01	③②	16.20(15.40) (18.18)17.38	④②
8.43 (9.76)		17.49 (16.16)		17.49 (16.16)		8.43 (9.76)
(9.36) 7.84		(15.60) 17.12		(15.60) 17.12		(9.36) 7.84
①①	18.01(22.56) (16.10)16.73	②①	15.42(15.10) (15.10)15.42	③①	16.73(16.10) (22.56)18.01	④①
10.17 (13.20)		15.03 (15.60)		15.03 (15.60)		10.17 (13.20)
(21.00) 22.19		(22.20) 24.61		(22.20) 24.61		(21.00) 22.19
①⑩		②⑩		③⑩		④⑩

①6	3.55(3.16) (2.53) 3.14	②6	2.74(2.25) (2.25) 2.74	③6	3.14(2.53) (3.16) 3.55	④6	
3.55 (3.16)		5.88 (4.78)		5.88 (4.78)		3.55 (3.16)	
(2.69) 1.46		(4.22) 3.96		(4.22) 3.96		(2.69) 1.46	
①5	7.00(7.79) (6.44) 6.49	②5	5.99(6.02) (6.02) 5.99	③5	6.49(6.44) (7.79) 7.00	④5	
5.54 (5.10)		8.52 (8.24)		8.52 (8.24)		5.54 (5.10)	
(5.40) 5.01		(8.64) 8.32		(8.64) 8.32		(5.40) 5.01	
①4	12.21(12.78) (10.64) 11.15	②4	10.04(9.80) (9.80) 10.04	③4	11.15(10.64) (12.78) 12.21	④4	
7.20 (7.38)		12.87 (11.80)		12.87 (11.80)		7.20 (7.38)	
(7.04) 5.89		(11.36) 11.62		(11.36) 11.62		(7.04) 5.89	
①3	14.55(15.90) (13.42) 13.39	②3	12.24(12.46) (12.46) 12.24	③3	13.39(13.42) (15.90) 14.55	④3	
8.66 (8.86)		14.01 (14.52)		14.01 (14.52)		8.66 (8.86)	
(8.32) 8.93		(13.72) 13.82		(13.72) 13.82		(8.32) 8.93	
①2	17.13(18.02) (15.44) 16.14	②2	15.09(14.58) (14.58) 15.09	③2	16.14(15.44) (18.02) 17.13	④2	
8.20 (9.70)		17.41 (16.30)		17.41 (16.30)		8.20 (9.70)	
(9.20) 7.96		(15.68) 17.31		(15.68) 17.31		(9.20) 7.96	
①1	17.38(22.20) (15.96) 16.32	②1	15.20(15.12) (15.12) 15.20	③1	16.32(15.96) (22.20) 17.38	④1	
9.42 (13.00)		14.21 (15.40)		14.21 (15.40)		9.42 (13.00)	
(21.20) 22.98		(22.40) 25.39		(22.40) 25.39		(21.20) 22.98	
①0		②0		③0		④0	

## CAPITULO VII

## CONCLUSIONES

Una vez concluido el estudio comparativo del marco propuesto se ha llegado a las siguientes conclusiones:

## A.-Rigideces de Entrepiso.

1.-Las Fórmulas de Wilbur que no consideran la influencia de los cortantes, proporcionan resultados satisfactorios para las rigideces de entrepiso, ya que los valores obtenidos por este procedimiento resultan aproximadamente un 2.5% mayores que los resultados obtenidos a partir del método exacto.

Lo anterior es válido para los niveles inferiores e intermedios, ya que en el penúltimo la diferencia es en menos y en el último la diferencia nuevamente es en más y resulta de mayor consideración.

2.-Las Fórmulas de Wilbur que consideran el valor de los cortantes, proporcionan resultados que difieren de los del método exacto -- hasta en un 6% en más.

Sin embargo, el resultado obtenido para el último entrepiso -- difiere en muy poco al obtenido a partir del método exacto.

Por lo anterior, se recomienda utilizar Wilbur sin considerar cortantes, para todos los niveles a excepción del penúltimo y del último en los cuales sí debe considerarse la influencia de los cortantes en -- los entrepisos adyacentes.

3.-La contribución de la losa a todo lo largo de la trabe, da como resultado incrementos hasta de un 54% en la rigidez de los entrepisos, en tanto que si la contribución sólo se efectúa en la mitad de la longitud de la trabe, el incremento resulta únicamente del orden del 32% como máximo.

Si la contribución de la losa se realiza en las tres quintas partes centrales de la longitud de la trabe, el incremento máximo de la rigidez de entrepiso asciende a un 13%.

Los incrementos de rigidez de entrepiso a que antes se ha hecho mención, están referidos a la rigidez de entrepiso obtenida considerando que la losa en nada contribuye, es decir a la cuarta alternativa.

### B.--Momentos Finales en los Extremos de las Barras.

De la comparación de los resultados obtenidos por el método Pendiente Deformación y el método del Factor se observa que, en general el método del Factor proporciona valores más conservadores en las columnas exteriores y menos conservadores en las interiores, alcanzando estas diferencias valores hasta de un 13%

En cuanto a los momentos finales en los extremos de las trabes, el método del Factor proporciona resultados más conservadores para los extremos de trabes que se unen a columnas exteriores y menos conservadores para los extremos de trabes que se unen a columnas interiores. Estas diferencias han llegado a ser hasta de un 20%

Las alternativas 2A y 2B tienen resultados muy similares, por lo cual, si esto se conservara en marcos diferentes al estudiado, podría optarse por la alternativa que mayor facilidad presenta en el cálculo de las rigideces de sus trabes.

Dada la característica particular de este estudio no resulta procedente dar como definitivos los resultados obtenidos, ya que es necesario para ello continuar aún la investigación considerando la influencia de las cargas verticales.

Sin embargo, pudiera adelantarse el indicar que la segunda alternativa tiene aplicación en los niveles inferiores y medios en los cuales la influencia de las fuerzas laterales por lo general es superior a la de las cargas verticales.

También se presume que la tercera alternativa se encuentra justificada para aplicarse en los niveles superiores, en los cuales la influencia de la carga vertical en general resulta de mayor importancia que la de las fuerzas laterales.

Resulta conveniente recordar que el efecto de nudo hace que se incrementen los momentos finales en los extremos de las barras que a ese nudo concurren.

Sin embargo este efecto puede verse compensado si el análisis se efectúa considerando distancias a ejes, ya que en esta forma, la longitud libre de los elementos estructurales resulta un poco menor que la distancia entre ejes.

## REFERENCIAS.

- 1.-Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado.  
(A.C.I. 318-63)
- 2.-Reglamento para Construcciones del Distrito Federal.
- 3.-Folleto Complementario del Reglamento para Construcciones del Distrito Federal.--Diseño Sísmico de Edificios.--Emilio Rosenblueth y Luis Esteva.
- 4.-Publicación # 6 de la Sociedad de Ingeniería Sísmica Mexicana.--Análisis Estático de Edificios.--Luis Esteva.
- 5.-Analysis of Statically Indeterminate Structures.--John I. Parcel y Robert B. B. Moorman.
- 6.-Statically Indeterminate Structures.--Chu-Kia Wang.
- 7.-Matrix Methods of Structural Analysis.--R. K. Livesley.