

T-247 0420
V.
DES

U. N. A. M.
FACULTAD DE INGENIERIA

PROCEDIMIENTOS GENERALES DE INTEGRACION
DE ECUACIONES HIPERBOLICAS QUE APARECEN
EN LA HIDROMECHANICA.

Tesis que para obtener el grado de
MAESTRO EN INGENIERIA
presenta el ingeniero civil
OSCAR VEGA ROLDAN

MEXICO, D. F. 1966.



DEPFI

T. UNAM

1966

VEG

I N D I C E

	Pág.
CAPITULO I.- GENERALIDADES.....	1-10
I-1).- Introducción.....	1
I-2).- Las ecuaciones diferen- ciales de segundo or- den y primer grado....	2-5
I-3).- Las ecuaciones hiperbó- licas en la mecánica - de los líquidos.....	5-10
CAPITULO II.- METODOS DE INTEGRACION.....	11-24
II-1).- Integración directa...	11-17
II-2).- Integración numérica - usando un esquema de - diferencias finitas...	17-21
II-3).- Integración a lo largo de las características.	21-24
CAPITULO III.- MEDIOS DE SOLUCION.....	25-42
III-1).- Generalidades.....	25-26
III-2).- Medios gráficos.....	26-37
III-3).- Máquinas computadoras.	37-42
CAPITULO IV.- EJEMPLOS DE APLICACION.....	43-67
IV-1).- Tránsito de una onda - de avenida.....	43-63
IV-2).- Sobrepresión por golpe de ariete.....	63-67
CAPITULO V.- CONCLUSIONES.....	68-73
BIBLIOGRAFIA.....	74-76
APENDICE.- Programas FORTRAN y MIDAS para -- analizar el tránsito de una aveni- da por un cauce.....	77-85

C A P I T U L O I

GENERALIDADES

I-1).- Introducción.-

Los fenómenos de escurrimiento no permanente de los fluidos a lo largo de un conducto se representan adecuadamente por medio de un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales - lineales de primer orden, simultáneas en dos funciones (por ejemplo; velocidad, presión) que definen el estado de movimiento del medio en cada sección del conducto y en cada instante.

Estas ecuaciones, combinadas convenientemente, dan lugar a una sola ecuación diferencial, de segundo orden y primer grado, que se clasifica dentro del tipo llamado hiperbólico.

El objeto de este trabajo es presentar diversos procedimientos de integración de las ecuaciones hiperbólicas y su aplicación dentro del campo de la hidráulica.

I-2).- Las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden y primer grado.-

I-2-1.- Las características.- Clasificación de las ecuaciones.-

Consideremos la ecuación diferencial;

$$ar + bs + ct = e \quad (I.1)$$

en que como es costumbre, r, s, t , representan las segundas derivadas parciales de cierta función "u" respecto a x , respecto a ambas variables, respecto a y . Los coeficientes a, b, c, e , son funciones de x, y, u, p, q , siendo p, q , las primeras parciales de u respecto a x , respecto a y .

Consideremos ahora una curva en el dominio de integración de la ecuación en el plano xy . A lo largo de ella, además de cumplirse (I.1) se tiene, por definición de diferencial:

$$du = p dx + q dy \quad (I.2)$$

$$dp = r dx + s dy \quad (I.3)$$

$$dq = s dx + t dy \quad (I.4)$$

Si conocemos los valores de u, p, q en los puntos de la curva, el sistema lineal no homogéneo (I.1, I.3, I.4) nos permitirá obtener en ellos los valores de las segundas derivadas r, s, t . En general habrá una solución única, salvo si el determinante del sistema se anula:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0$$

es decir si:

$$a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - b \frac{dy}{dx} + c = 0 \quad (I.5)$$

En el caso de que se cumpla (I.5), el sistema será incompatible o indeterminado, según el rango de su matriz sea igual o menor que 3. El sistema no puede ser incompatible si suponemos la existencia de las segundas derivadas de la función u en el dominio de integración de la ecuación diferencial, y por consiguiente el rango de la matriz es menor que 3. Esto implica que de cumplirse (I.5) también se satisfarán simultáneamente las relaciones:

$$e(dx)^2 + a(dy dq - dp dx) - b(dq dx) = 0 \quad (I.6)$$

$$e(dy dx) - a(dp dy) - c(dq dx) = 0 \quad (I.7)$$

$$e(dy)^2 - b(dp dy) + c(dp dx - dq dy) = 0 \quad (I.8)$$

obtenidas al igualar a cero los determinantes asociados a las incógnitas r , s , t .

Ahora bien, la posibilidad de cumplimiento de la condición (I.5) depende de los valores de los coeficientes a , b , c en cada punto. Según sea el discriminante $b^2 - 4ac$ mayor, igual o menor que cero, la ecuación (I.5) tendrá dos, una o ninguna solución real. Por otra parte, toda solución de la ecuación (I.5) da la dirección de una curva del plano xy que pasa por el punto en que se calculen los coeficientes, y que recibe el nombre de "característica" de la ecuación diferencial. El hecho de que en cada punto puedan existir dos, una o ninguna dirección de curvas características nos proporciona una manera de clasificar las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden y primer grado:

DISCRIMINANTE $b^2 - 4ac$	Nº DE CARACTERÍSTICAS POR CADA PUNTO	TIPO DE ECUACION
positivo	dos	hiperbólico
nulo	una	parabólico
negativo	ninguna	elíptico

I-2-2.- Significación de las características.-

Analicemos brevemente las consecuencias de la verificación de la ecuación (I.5). Hemos dicho que dicha verificación trae consigo la de las relaciones (I.6), (I.7), (I.8) y la indeterminación del sistema (I.1, I.3, I.4). Esta indeterminación impli que puedan existir diferentes funciones $u(x,y)$ que sobre las -- curvas características tomen valores iguales, junto con sus pri-- meras derivadas, pero cuyas segundas derivadas no tomen ya los-- mismos valores. Si las segundas derivadas difieren, la varia-- ción de las primeras derivadas en la vecindad del punto será -- distinta. En puntos vecinos se obtendrán así distintos valores de las primeras derivadas, o sea, diferentes grados de varia--- ción de la función. Esto producirá por último distintos valo-- res para las diferentes soluciones, que diferirán aún más mien-- tras más nos alejemos de la curva inicial. Concluimos que no -- se puede plantear correctamente un problema en que las condicio-- nes iniciales se planteen a lo largo de una curva caracterfsti-- ca, pues no conduciría a una solución única.

En cambio, como puede observarse, a lo largo de las caracterfsticas la ecuación diferencial parcial se transforma en una ordinaria (I.6, I.7 ó I.8) que junto con (I.2) permite obtener la solución buscada. Convendrá entonces efectuar la integración sobre una malla formada por las características.

I-2-3.- Las condiciones adicionales.-

Al resolver la ecuación diferencial de un problema físico-específico, es necesario contar con ciertas condiciones adicionales que permitan la determinación de las constantes de integración. Cuando se trata de ecuaciones en las derivadas parciales, a ciertos tipos de ecuaciones corresponden unívocamente -- ciertos tipos de condiciones adicionales que permitan plantear el problema correctamente. Se puede hacer una clasificación de ecuaciones en base a los tipos de condiciones accesorias necesarias. En particular, las ecuaciones del tipo hiperbólico exigen casi siempre que el campo de integración tenga una frontera abierta; es decir, el problema es de propagación en el campo de solución a partir de ciertas condiciones iniciales.

I-3).- Las ecuaciones hiperbólicas en la mecánica de los líquidos.-

El problema de resolver una ecuación hiperbólica corresponde físicamente a la propagación de una perturbación en un medio continuo. En efecto, los problemas de flujo transitorio, es decir, la propagación de ondas en conducciones, conducen a ecuaciones de tipo hiperbólico.

En los párrafos siguientes estableceremos las ecuaciones que rigen dos de los flujos transitorios más importantes de la ingeniería hidráulica: la propagación de ondas de presión en -- conductos cerrados (golpe de ariete) y la propagación de ondas de gravedad en canales (tránsito de avenidas).

I-3-1.- Las ecuaciones de Allievi.-

Sea una tubería en que escurre un líquido sujeto a variaciones de presión con el tiempo. Llamemos "x" a la abscisa curvilínea medida hacia aguas arriba a lo largo del conducto, a partir de un origen cualquiera. Supongamos que la presión p y la velocidad v son funciones derivables de x y de la variable tiempo, t. Aceptemos además las siguientes hipótesis:

- a).- Las pérdidas de carga a lo largo del conducto son despreciables.
- b).- La celeridad de la onda de presión es mucho mayor que la velocidad del líquido.

Ambas hipótesis se pueden justificar a posteriori.

Apliquemos la ecuación de Euler:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{dv}{dt}$$

en un tramo de conducto de longitud dx. Si α es el ángulo que forma el eje de la tubería con la horizontal, en cada punto, se tendrá: $X = -g \operatorname{sen} \alpha$, $u = -v$. Llamando además H a la carga de presión obtenemos:

$$g \frac{\partial H}{\partial x} = -g \operatorname{sen} \alpha + \frac{dv}{dt}$$

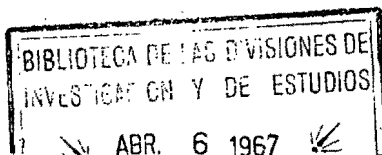
Tomando en cuenta que la cota z del eje de la tubería es en una sección de abscisa x igual a la integral de $\operatorname{sen} \alpha$:

$$z = \int_0^x \operatorname{sen} \alpha \, dx,$$

si medimos las cotas desde el nivel del origen de abscisas, y que entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{sen} \alpha,$$

podemos reorganizar la expresión anterior, que desarrollando la derivada de la velocidad queda:



$$g \frac{\partial}{\partial x} (H + z) = -v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

Aprovechando la segunda hipótesis puede demostrarse que el primer término del segundo miembro es despreciable. Por otra parte, $H + z$ representa la energía potencial por unidad de masa del líquido que se encuentra en la sección considerada, es decir, la altura piezométrica medida a partir del plano horizontal que pasa por el origen de la coordenada x . Poniendo $h = H + z$, queda:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (I.9)$$

que es la ecuación que expresa las características dinámicas -- del movimiento.

Escribamos ahora la ecuación de continuidad. En todo lo que sigue despreciaremos diferenciales de orden superior.

La diferencia de velocidades entre dos secciones que distan dx es $\frac{\partial v}{\partial x} dx$, por lo que en un tiempo dt se almacena entre ellas un volumen:

$$\Delta V_1 = A \frac{\partial v}{\partial x} dx dt$$

en que A es el área de la sección transversal.

Esto implica que debido a un aumento de presión el líquido se comprima y las paredes del conducto se dilaten.

Si el aumento de presión es $\frac{\partial p}{\partial t} dt$, en el tiempo dt el volumen de líquido contenido en el tramo dx se reduce una cantidad:

$$\Delta V_2 = v \frac{\Delta p}{E'} = A dx \frac{\partial p}{\partial t} dt \frac{1}{E'}$$

siendo E' el módulo de elasticidad del líquido.

Por su parte, la sección transversal sufre un aumento por la dilatación de la pared. Llamando D al diámetro, e al espesor de las paredes del tubo y E al módulo de elasticidad del material del mismo, se tiene sucesivamente:

$$dD = \frac{D}{E} d\sigma = \frac{D}{E} d\left(\frac{pD}{2e}\right) = \frac{D}{2Ee} \left(D \frac{\partial p}{\partial t} dt + p dD\right)$$

$$dD \left(1 - \frac{Dp}{2Ee}\right) = \frac{D}{2Ee} D \frac{\partial p}{\partial t} dt$$

$$\text{o aproximadamente; } dD = \frac{D^2}{2Ee} \frac{\partial p}{\partial t} dt,$$

por lo que el aumento de volumen por expansión del tubo es:

$$\Delta V_3 = d\left(\frac{\pi}{4} D^2\right) dx = \frac{\pi}{2} D dD dx = \frac{D^3}{4Ee} \frac{\partial p}{\partial t} dt dx =$$

$$= \frac{AD}{Ee} \frac{\partial p}{\partial t} dt dx$$

Poniendo ahora: $\Delta V_1 = \Delta V_2 + \Delta V_3$ y reduciendo:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{1}{E'} + \frac{D}{Ee}\right) \frac{\partial p}{\partial t},$$

y llamando:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\gamma}{g} \left(\frac{1}{E'} + \frac{D}{Ee}\right)$$

$$\text{resulta luego: } \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t} \gamma$$

Tomando en consideración que la cota z es independiente del tiempo, y recordando que hemos llamado h a la suma de z y la carga de presión, queda:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g}{a^2} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (I.10)$$

en que aparece la magnitud "a" que es la celeridad con que se transmite la onda de presión.

Las ecuaciones (I.9) y (I.10) son las ecuaciones de Allievi para el cálculo del golpe de ariete en una tubería. Haciéndolas simultáneas se obtiene de inmediato:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0$$

que es la ecuación diferencial de 2ª orden del golpe de ariete.-
El discriminante da:

$$b^2 - 4ac = 0 + \frac{4}{a^2} = \frac{4}{a^2} > 0, \text{ y entonces la ecuación es hiperbólica.}$$

I-3-2.- Las ecuaciones de De Saint-Venant.-

Sea un canal prismático en el que escurre un fluido en movimiento no permanente. La ecuación diferencial de Bernoulli se escribe:

$$d\left(\frac{P}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g}\right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} ds - S_f ds$$

Aproximando ds con dx , haciendo la carga de presión igual al tirante Y y recordando que la pendiente del fondo S_0 es la negativa de la parcial de z respecto a x , se obtiene:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = S_0 - S_f \quad (I.12)$$

En esta ecuación de equilibrio dinámico, S_0 representa como hemos dicho la pendiente del fondo del canal, y S_f la del gradiente hidráulico.

Consideremos por otra parte la ecuación de continuidad. En un tramo de longitud dx y en un tiempo dt se almacena un volumen:

$$\Delta V_1 = -\frac{\partial Q}{\partial x} dx dt,$$

en que Q representa el gasto instantáneo. Este volumen se almacena ocupando un espacio:

$$\Delta V_s = T dY dx$$

en que T es el ancho de la superficie libre.

Igualando el volumen que se almacena con el espacio que ocupa resulta:

$$T \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

que si se desarrolla $Q = Av$ se transforma sucesivamente en:

$$T \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} A + v \frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

$$T \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} A + v T \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + D \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \quad (I.13)$$

en que $D = A/T$ es el tirante medio hidráulico de la sección.

Las expresiones (I.12) y (I.13) son las ecuaciones de De -- Saint-Venant del movimiento no permanente en canales.

Combinemos estas ecuaciones. De (I.12) podemos despejar $\frac{\partial Y}{\partial x}$ y derivarla con respecto al tiempo. Reemplazando ambos valores en la derivada respecto a x de (I.13) y ordenando se obtiene:

$$\left(gD - v^2 \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} + 2v \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - g \left(s_0 - s_f \right) \frac{\partial v}{\partial x} - g \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (I.14)$$

El discriminante de esta ecuación de segundo orden, que gobierna las variaciones de velocidad en el flujo transitorio que tiene lugar en un canal abierto, vale:

$$b^2 - 4ac = 4 v^2 - 4 (gD - v^2) = 4gD > 0,$$

y por lo tanto la ecuación es hiperbólica.

C A P I T U L O I I

METODOS DE INTEGRACION

II-1).- Integración Directa.-

II-1-1.- Las ecuaciones de Allievi.-

Como se comprueba fácilmente por derivación, la integral general de las ecuaciones (I.9) y (I.10), lograda por d'Alembert, es el sistema:

$$h - h_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (\text{II.1})$$

$$v - v_0 = -\frac{g}{a} \left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right] \quad (\text{II.2})$$

en que h , v son la altura piezométrica y la velocidad en la sección de abscisa x en el instante t ; h_0 , v_0 lo son en el instante inicial. F y f son funciones arbitrarias ligadas por la relación:

$$F\left(t - \frac{L}{a}\right) + f\left(t + \frac{L}{a}\right) = 0 \quad (\text{II-3})$$

en que L es la longitud del conducto, de tal modo que siempre que la diferencia de argumentos es $2L/a$ se cumple $F + f = 0$.

Las funciones F y f quedan indeterminadas, por lo que la integración directa no es suficiente por sí sola para analizar un problema determinado. Para que esta solución sea determinada se deben efectuar ciertas operaciones sobre las ecuaciones (II.1) y (II.2).

Multiplicando (II.2) por a/g , sumándola y restándola de (II.1) y ordenando:

$$h - h_0 = \frac{a}{g} (v - v_0) + 2 F(t - \frac{x}{a}) \quad (II.4)$$

$$h - h_0 = - \frac{a}{g} (v - v_0) + 2 f(t + \frac{x}{a}) \quad (II.5)$$

Consideremos ahora dos puntos P y P' en un tramo de conducción de diámetro y espesor constantes, y sean x la abscisa de P y $x + d$ la de P' . Llamemos F_1 al valor que toma la función F en la sección P en el instante t . En el instante $t' = t + d/a$ y para el punto P' el argumento de F vale: $t + d/a - (x + d)/a$, es decir $t - x/a$, y por lo tanto F toma el valor F_1 . Designando con índice (') a las magnitudes correspondientes a la sección P' en el tiempo t' , y sin él a las correspondientes a la sección P en el tiempo t , podemos poner en la (II.4):

$$h - h_0 = \frac{a}{g} (v - v_0) + 2F_1$$

$$h' - h'_0 = \frac{a}{g} (v' - v'_0) + 2F_1$$

ecuaciones que restadas conducen a:

$$h - h' = \frac{a}{g} (v - v') \quad (II.6)$$

en que se ha tenido en cuenta que $v_0 = v'_0$, y que si despreciamos las pérdidas de carga entre P y P' , también $h_0 = h'_0$.

De manera análoga, consideremos ahora un punto P'' de abscisa $x - d$ en el tramo de diámetro y espesor constantes que contiene a P . Si la función f toma el valor en f_1 en la sección P en el instante t , tomará el mismo valor en P'' cuando el tiempo sea $t'' = t + d/a$, pues $t'' + (x - d)/a = t + d/a + (x - d)/a = t + x/a$. Utilizando el índice $(\prime\prime)$ para las magnitudes que se refieren a la sección P'' en el tramo t'' , y no poniendo índice a las relativas a la sección P en el instante t , obtenemos de la ecuación (II.5):

$$h - h_0 = - \frac{a}{g} (v - v_0) + 2f_1$$

$$h'' - h''_0 = - \frac{a}{g} (v'' - v''_0) + 2f_1$$

que restadas y con las mismas condiciones que en el caso anterior dan:

$$h - h'' = - \frac{a}{g} (v - v'') \quad (\text{II.7})$$

Si las ecuaciones (II.6) y (II.7) se plantean entonces entonces entre diferentes secciones en tiempos que cumplen las condiciones impuestas, se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas, que se completa con las condiciones de los extremos para resolver el problema. Estas dos ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones conjugadas del golpe de ariete.

II-1-2.- Las ecuaciones de De Saint-Venant.

Las ecuaciones (I.12) y (I.13) se han integrado en algunos casos particulares, dos de los cuales presentaremos a continuación.

A).- Integración según De Saint-Venant.-

Supongamos un canal rectangular en que la pendiente del gradiente de energía sea aproximadamente igual a la del fondo y en-

que la velocidad sea solamente función del tirante: $S_f = S_0$; --
 $v = v(Y)$. Las ecuaciones de De Saint-Venant quedan:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial(Yv)}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.9})$$

Se tendrá:

$$\frac{\partial(Yv)}{\partial x} = (Y \frac{dv}{dY} + v) \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (\text{II.10 a})$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{dY} \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (\text{II.10b})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dY} \frac{\partial Y}{\partial t} \quad (\text{II.10 c})$$

Substituyendo en (II.8) y (II.9) y eliminando $\frac{\partial Y}{\partial t}$ de las --
 dos ecuaciones resultantes, obtenemos:

$$\sigma - Y \left(\frac{dv}{dY}\right)^2 = 0$$

de donde:

$$v = \pm 2\sqrt{gY} + \text{constante}$$

Si $Y = Y_0$ (tirante a régimen permanente), $v = v_0$, y entonces:

$$v = v_0 \pm 2\sqrt{g} (\sqrt{Y} - \sqrt{Y_0}) \quad (\text{II.11})$$

Reemplazando (II.11) en (II.9), poniendo $\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}$, tomando en cuenta a (II.10a) y simplificando:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + (v_0 \pm 3\sqrt{gY} \mp 2\sqrt{gY_0}) = 0$$

y por último:

$$x = f(Y) - (v_0 \pm 3\sqrt{gY} \mp 2\sqrt{gY_0}) t \quad (\text{II.12})$$

La ecuación (II.12) permite seguir el paso de una onda a lo largo del canal, y la (II.11) da la velocidad media en la sección en que se presenta el tirante Y . La forma de la función arbitraria $f(Y)$ debe determinarse en cada caso particular para adaptarse a las condiciones del problema. Es conveniente hacer resaltar, por otra parte, que la hipótesis $S_f = S_0$ no se cumple en la práctica más que en régimen uniforme.

B).- Integración usando el cálculo operacional.-

En un canal rectangular llamemos η a la sobreelevación de la superficie libre debida a la onda, de modo que $Y = Y_0 + \eta$. Llamemos ξ a la variación de la abscisa de una sección transversal de la vena líquida debida al afecto transitorio.

Supongamos que la velocidad es muy pequeña, y también lo es la variación del tirante con la abscisa, condiciones que por ejemplo se cumplen en un canal de navegación. La ecuación de continuidad (I.13) se escribe:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + Y \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

y poniendo: $v = \frac{\partial \xi}{\partial t}$; $\eta \frac{\partial v}{\partial x} = 0$:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + Y_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial x} = 0$$

de donde:

$$\eta = - Y_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (\text{II.13})$$

pues si $\eta = 0$ (movimiento permanente), entonces $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$.

En la ecuación dinámica (I.12) pongamos $S_0 = 0$, $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = - Y_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$, y $\frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, con lo que:

$$- Y_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + S_f = 0$$

Y si hacemos la pendiente de energía proporcional a la velocidad (pues hemos supuesto que es pequeña), queda:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + f \frac{\partial \xi}{\partial t} - g Y_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{II.14})$$

siendo f el factor de proporcionalidad conveniente.

Las ecuaciones (II.13) y (II.14) fueron deducidas por Airy y son las que rigen el escurrimiento en canales de navegación - en régimen transitorio debido a mareas, pudiendo aplicarse a -- otro tipo de canales si las velocidades y la pendiente son muy pequeñas y si el canal es rectangular o muy ancho.

Veremos cómo se integran en un canal de carga en la condiciones descritas para el caso de un rechazo instantáneo. Suponiendo el origen de las abscisas en las compuertas, las condiciones de frontera serán:

$$\begin{aligned} \text{para } x = 0 & \quad \xi = v_0 t \\ \text{para } x = L & \quad \eta = 0 \end{aligned}$$

En la ecuación (II.14), multiplicando por $\exp(-pt) dt$, ordenando e integrando entre cero e infinito;

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\xi) - \frac{(p+f)p}{g Y_0} f(\xi) = 0,$$

ecuación cuya solución es $f(\xi) = A \exp(ax) + B \exp(-ax)$ (II.15)

siendo $a = \sqrt{\frac{(p+f)p}{g Y_0}}$ y utilizando $f(\)$ para indicar la transformada de Laplace. A y B son funciones de x .

Transformemos de manera semejante la ecuación (II.13):

$$f(\eta) = - Y_0 \frac{\partial}{\partial x} f(\xi),$$

y con (II.15):

$$f(\eta) = Y_0 a \left[B \exp(-ax) - A \exp(ax) \right] \quad (\text{II.16})$$

Debemos obtener también la transformada de las condiciones de frontera:

$$\text{para } x = 0 \quad f(\xi) = \frac{v_0}{p},$$

que llevada a (II.15) da:

$$\frac{v_0}{p} = A + B \quad (\text{II.17})$$

$$\text{para } x = L \quad f(\eta) = 0,$$

que en (II.16) da:

$$B = A \exp(2ax) \quad (\text{II.18})$$

Con (II.17) y (II.18) se calculan los valores de A y B que reemplazados en (II.15) y (II.16) permiten, mediante la anti-transformación, obtener la sobreelevación η y la velocidad transitoria $\frac{\partial f}{\partial t}$ en cada sección y en cada instante. La forma de las expresiones que resultan no se presta para ordenar los cálculos de modo de facilitar su ejecución; por el contrario, es bastante complicada.

II-2).- Integración numérica usando un esquema de diferencias finitas.-

En vista de las dificultades que presenta la integración directa de las ecuaciones que nos interesan, y de los avances logrados en la computación numérica, plantearemos ahora el problema de efectuar su integración a través de un esquema de diferencias finitas.

El método consiste en determinar los valores de la función para ciertas parejas de valores (x, y) de las variables independientes, que forman una malla en el plano xy . En lo que sigue reemplazaremos a la variable "y" por la "t" de tiempo que interviene en las ecuaciones.

El esquema de cálculo se obtiene substituyendo las derivadas por cocientes de diferencias, por ejemplo de la manera siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x + 2\Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - 2\Delta x, t)}{(2\Delta x)^2}$$

y de manera semejante para las otras derivadas.

II-2-1.- Limitaciones en la elección de incrementos.

En principio, al hacer una integración numérica, hay libertad para elegir la magnitud de los incrementos de las variables independientes, y la única limitación está dada por la aproximación deseada. Sin embargo, en el caso de una ecuación hiperbólica hay otra limitación. La relación de incrementos de las variables independientes debe mantenerse dentro de ciertos límites para que el esquema converja a la solución correcta.

En efecto, sean L y M dos puntos de la recta $t = t_0$ en el plano cartesiano xt . Consideremos la característica del primer tipo que pasa por L y la del segundo tipo que pasa por M (fig. 2-1). Ambas se cortan en el punto N cuya coordenada t es mayor que t_0 . Sea $2\Delta x$ la amplitud del intervalo limitado por L y M en la recta $t = t_0$. Se demuestra que el valor de la función

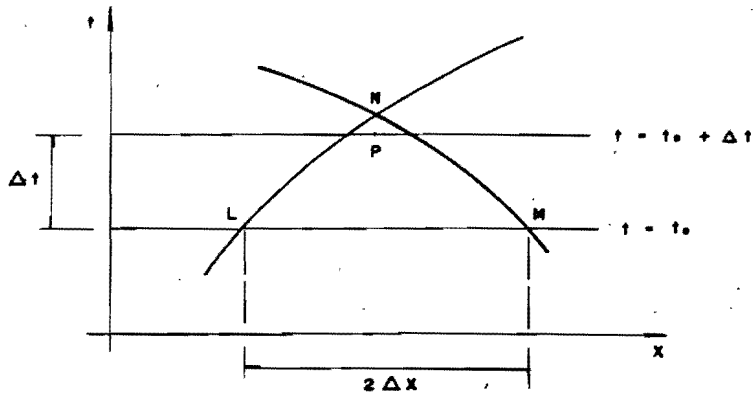


Fig. 2.1

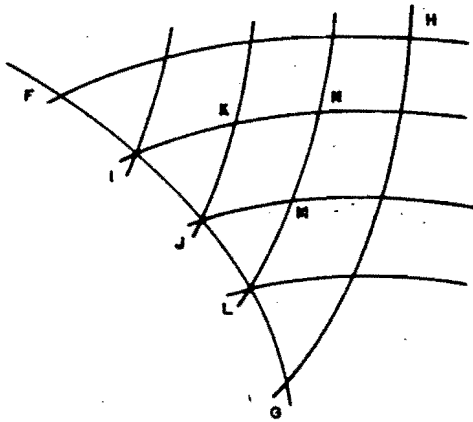


Fig. 2.2

en cualquier punto interior al triángulo formado por la recta $t = t_0$ y las dos características consideradas, queda determinado por los valores de la función y de su derivada respecto a t en los puntos del segmento L-M. En cambio, todo punto fuera de esta región queda influenciado por puntos de la recta $t = t_0$ -- que están fuera del segmento L-M.

De lo anterior se concluye que al pasar de $t = t_0$ a $t = t_0 + \Delta t$ es necesario que el punto P al que avanza la solución que de dentro de la región de influencia del segmento L-M. De allí la limitación en el valor de $\Delta t/\Delta x$.

II-2-2.- Estabilidad.

Otro problema que se presenta al trabajar con un esquema de diferencias es el de la propagación de los errores de aproximación que aparecen forzosamente en cada paso. Estos errores pueden acumularse y crecer al propagarse, destruyendo la eventual convergencia del sistema. Se dice entonces que el esquema es inestable..

La inestabilidad de un esquema de cálculo puede hacer que al reducir el tamaño de las celdas de la malla por necesidades de aproximación, la solución se aparte de la correcta debido al aumento del número de pasos, y en consecuencia, del número de errores que se acumulan.

Para dar una idea más clara del significado de estabilidad se introduce el concepto de "desviación acumulada", que es la diferencia entre el valor calculado y el correcto, en un punto cualquiera de la malla. Dicha desviación está influenciada por los errores de redondeo en los otros puntos. Supongamos que --

los posibles valores de los errores forman un conjunto acotado, y que son siempre menores que un valor $\delta > 0$ (en valor absoluto). Se dice entonces que un sistema es estable si la desviación acumulada tiende a cero con δ y no crece más rápidamente que cualquier potencia de $1/\Delta x$ cuando Δx tiende a cero.

En realidad, la distribución de errores es prácticamente un proceso aleatorio, y los efectos de los errores pueden compensarse entre sí, pero es sumamente difícil estudiar el problema estadístico que así se introduce.

Generalmente no es posible ni siquiera determinar a priori el orden de magnitud de la desviación acumulada, y la estabilidad de un proceso sólo puede analizarse por comparación con la solución conocida por otro procedimiento. Como una ecuación diferencial puede reemplazarse de varias maneras por un esquema de diferencias finitas, la estabilidad depende también de la elección del esquema.

II-3).- Integración a lo largo de las características.-

Según decíamos arriba, a lo largo de las características la ecuación diferencial parcial se transforma en una ordinaria, y permite atacarla por un método más simple. Expondremos ahora el procedimiento numérico correspondiente.

En efecto, supongamos conocidos los valores de la función $u(x,t)$ y de sus primeras derivadas p, q en los puntos del arco FG de una curva no característica en el plano xt (fig. 2.2). Tracemos las características que pasan por dos puntos I, J. Las direcciones de las características, dadas por la ecuación (I.5) en que cambiamos la variable y por t , son:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{II.19})$$

que podemos llamar $\frac{dt}{dx} = m$; $\frac{dt}{dx} = n$. Hemos dicho que de cumplirse (I.5) debe también cumplirse (I.7) a lo largo de las dos características, es decir:

$$e dt - a dp - c dq = 0 \quad (\text{II-20})$$

La característica IK del tipo m y la del tipo n JK se cortan en K. Si los puntos I, J están próximos podemos pensar que IJK en un triángulo, de modo que IK es un segmento de recta de pendiente m_I y JK otro de pendiente n_J . En primera aproximación podremos poner:

$$t_K - t_I = m_I (x_K - x_I) \quad (\text{II.21})$$

$$t_K - t_J = n_J (x_K - x_J) \quad (\text{II.22})$$

de donde se obtienen x_K y t_K . Por otro lado, de la (II.20) obtenemos:

$$\begin{aligned} (\text{sistema II.23}) \quad & e_I (t_K - t_I) - a_I (p_K - p_I) m_I - c_I (q_K - q_I) = 0 \\ & e_J (t_K - t_J) - a_J (p_K - p_J) n_J - c_J (q_K - q_J) = 0 \end{aligned}$$

Del sistema anterior podemos obtener los valores de p_K y q_K , y substituyendo en $du = p dx + q dt$, es decir, en:

$$u_K - u_I = (x_K - x_I) \frac{1}{2} (p_I + p_K) + (t_K - t_I) \frac{1}{2} (q_I + q_K),$$

calculada sobre IK, determinaremos en primera aproximación el valor de la función en el punto K. Usando ahora (II.19) podemos calcular los valores de m_K y n_K .

Para lograr mejores aproximaciones a los valores de p_K , q_K , u_K , podemos ahora repetir el proceso, tomando para m y n los valores promedio en IK y JK respectivamente, y promediando también los valores de los coeficientes a, c, e . En general conviene más elegir los puntos I, J lo suficientemente cercanos, para que los valores obtenidos en primera aproximación sean aceptables.

Una vez obtenida la solución en K y M (ver fig. 2.2) se puede avanzar al punto N , y así sucesivamente. Observamos que los puntos que quedan dentro del triángulo FGH dependen sólo de los valores dados inicialmente en el arco FG , y que en cambio los puntos fuera de la región FGH son influenciados por puntos iniciales fuera de FG . Volvemos al concepto de región de influencia citado en II.2.1.

Massau (1899) llega al método de las características mediante otro enfoque que describiremos brevemente sin entrar en detalle:

Toda ecuación diferencial parcial puede reemplazarse por un sistema de ecuaciones de primer orden. Supongamos ahora que ya estamos trabajando con ese sistema. Por medio de una transformación lineal siempre posible, se obtiene otro sistema en el que cada ecuación contiene a la derivada en sólo una dirección, y que se llama "forma normal" del sistema.

En el caso de una ecuación de 2ª orden de tipo hiperbólico, puede hacerse aún más, pues mediante una transformación de coordenadas se obtienen las ecuaciones en forma "canónica", en que también aparece la derivada en una sola dirección, pero además ahora se trata de las direcciones de las coordenadas.

Las direcciones que así se determinan son las de las características de la ecuación original.

Las dos ecuaciones obtenidas, y las dos direcciones de las características, forman un sistema que se resuelve de manera -- análoga a la descrita arriba, y que permite calcular por último los valores de la función en una malla de puntos fijados en las intersecciones de las características.

El método de integración sobre las características presenta el inconveniente de proporcionar la solución en una serie de puntos que no se pueden determinar a priori, dificultando la obtención de datos, pero esta dificultad puede subsanarse, como veremos en el capítulo IV.

C A P I T U L O I I I

MEDIOS DE SOLUCION

III-1).- Generalidades.-

Podemos emncionar fundamentalmente dos medios auxiliares - en la solución de un sistema de ecuaciones como los que nos ocupan: el uso de gráficas y el de máquinas computadoras.

Los medios gráficos pueden clasificarse en dos tipos, según la solución se obtenga gráficamente en su totalidad, o sólo se utilicen algunas construcciones gráficas como ayuda durante el proceso. Al primer tipo pertenece el método de Schnyder y Bergeron para resolver el problema del golpe de ariete; al segundo, el de Pim Nam Lin para la aplicación del método de las características al cálculo de ondas en canales.

Los medios electromecánicos pueden a su vez clasificarse según se reduzcan a efectuar las operaciones aritméticas necesarias para resolver numéricamente el problema, utilizando una --

computadora digital, o en cambio permitan hacer una simulación del proceso físico a partir de un modelo matemático, por medio de una máquina analógica. En los últimos años se han logrado métodos que simulan en una computadora digital el comportamiento de una analógica.

III-2).- Medios Gráficos.-

III-21.- El método de Schnyder.- Bergeron para el problema del golpe de ariete.-

Este método, desarrollado independientemente por Othmar -- Schnyder (1929) y Louis Bergeron (1933), y estudiado posteriormente por Angus (1937), consiste esencialmente en utilizar un plano cartesiano $v-h$, en el que la velocidad y la carga que en cada instante se presentan en cada sección del conducto quedan representadas por las coordenadas de un punto. Las ecuaciones (II.6) y (II.7), que se llaman "ecuaciones conjugadas del golpe de ariete", son entonces las de dos familias de rectas paralelas: unas con pendiente a/g , que por concisión llamaremos "rectas positivas", y otras de pendiente $-a/g$, "rectas negativas".

Consideremos tres secciones del conducto y designémoslas P' , P , P'' , respectivamente de aguas arriba hacia aguas abajo, de modo que tanto el tramo $P'P$ como el PP'' tengan diámetro y espesor constantes. Sean a_1 la celeridad de la onda en el primer tramo y a_2 la celeridad en el segundo. Llamemos d_1 a $x' - x$ y d_2 a $x - x''$. Las condiciones que se presenten en un instante t en la sección P estarán dadas por las coordenadas del punto común a dos rectas, una positiva de pendiente a_2/g que pasa por el punto cuyas coordenadas representan las condiciones que ocurren en P'' en el instante t'' , y otra negativa de pendiente

$-a_1/g$ que pasa por el punto cuyas coordenadas son las condiciones que se presentan en P' en el instante t' , siempre que $t' = t - d_2/a_2$ y $t' = t - d_1/a_1$.

Las condiciones en los extremos del conducto se obtienen mediante la intersección de una recta positiva o negativa con la curva que defina la relación que físicamente exista entre velocidad y carga en el extremo correspondiente, en el instante de que se trate. Esta curva se establece según el tipo de extremo, por ejemplo:

a).- vaso o gran almacenamiento con nivel constante:

$$h = h_0$$

b).- Descarga libre controlada por válvula:

$$v = r/\sqrt{2gh}$$

es decir, una familia de parábolas, en que el parámetro r depende del tipo de válvula y de su relación de abertura en cada instante.

c).- Extremo cerrado:

$$v = 0$$

d).- Bombas centrífugas y turbinas a reacción; Expresiones que ligán a v con h , proporcionadas por el fabricante.

Si se desea hacer la corrección por pérdidas de carga, pueden introducirse fácilmente suponiéndolas concentradas en una o varias secciones.

III-2-2.- El método de Lin para el problema de ondas en canales.-

Este procedimiento, desarrollado por Pim Nam Lin (1952), -

consiste en hacer la integración de las ecuaciones de De Saint-Venant a lo largo de sus características, con el auxilio de --- unas gráficas que se preparan ex profeso.

Utilizando un método similar al descrito en la sección I. 2.1, se obtienen las ecuaciones de las características de la -- ecuación (I.14).

$$\frac{dx}{dt} = v \pm \sqrt{gD}, \quad (\text{III.1})$$

y para que existan soluciones con algún sentido, deben cumplirse también condiciones del tipo (I.6) a (I.8), que se reducen - a:

$$d(v \pm \sqrt{gD}) = g (S_0 - S_f) dt, \quad (\text{III.2})$$

si suponemos el canal rectangular o suficientemente ancho, de - modo que podamos poner $dy = dD$.

Llamando "c" a \sqrt{gD} , y substituyendo las diferenciales por - diferencias, se obtienen las cuatro expresiones:

$$\Delta_u x = (v + c) \Delta t \quad (\text{III.3})$$

$$\Delta_d x = (v - c) \Delta t \quad (\text{III.4})$$

$$\Delta_u (v + 2c) = g (S_0 - S_f) \Delta t \quad (\text{III.5})$$

$$\Delta_d (v - 2c) = g (S_0 - S_f) \Delta t \quad (\text{III.6})$$

en que los índices u y d se refieren a una sección aguas arriba y otra aguas abajo de la considerada.

La (III.5) puede escribirse:

$$v + 2c = v_u + 2c_u + g S_0 \Delta t - g \frac{S_f + S_{fu}}{2} \Delta t$$

expresión que si ponemos:

$$K = \frac{1}{2} g (S_o - S_f) \Delta t \quad (\text{III.7})$$

$$K_u = \frac{1}{2} g (S_o - S_{fu}) \Delta t \quad (\text{III.8})$$

$$G_u = v_u + 2c_u + K_u \quad (\text{III.9})$$

se transforma en:

$$v + 2c = G_u + K \quad (\text{III.10})$$

De manera análoga, de (III.6) se obtiene:

$$v - 2c = G_d + K \quad (\text{III.11})$$

en que:

$$G_d = v_d - 2c_d + K_d \quad (\text{III.12})$$

$$K_d = \frac{1}{2} g (S_o - S_{fd}) \Delta t \quad (\text{III.13})$$

Combinando (III.10) y (III.11) podemos poner:

$$c = \frac{G_u - G_d}{2} \quad (\text{III.14})$$

$$v - K = \frac{G_u + G_d}{2} \quad (\text{III.15})$$

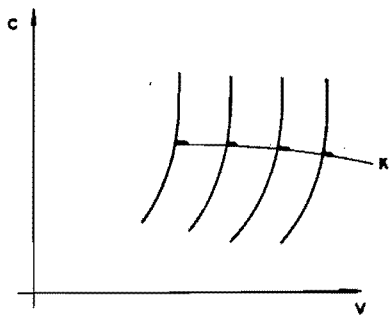
Por otra parte, si utilizamos la fórmula de Manning:

$$S_f = \left(\frac{v n}{R^{2/3}} \right)^2$$

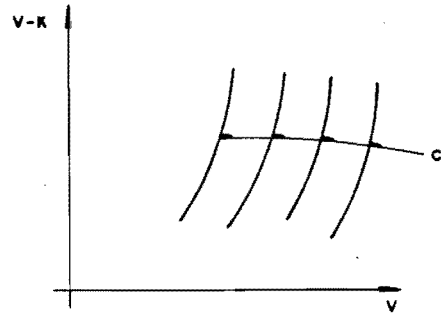
al substituir en (III.7), suponiendo $R = D$, obtenemos:

$$v = \sqrt{\frac{g \Delta t S_o - 2 K}{n^2 g^{7/3} \Delta t}} c^{4/3} \quad (\text{III.16})$$

Con esta expresión, haciendo variar K ó c , se obtienen dos gráficas como las que se muestran en la (fig. 3.1). Por otra parte, los valores que se van calculando se registran simultáneamente en gráficas del tipo mostrado en la fig. 3.2.

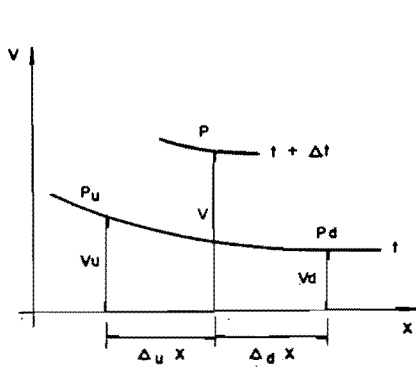


" Gráfico 1 "

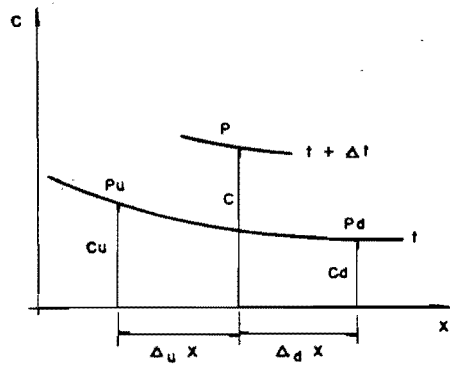


" Gráfico 2 "

Fig. 3.1



" Gráfico 3 "



" Gráfico 4 "

Fig. 3.2

Los pasos que se siguen en la aplicación del método son -- los que indicamos a continuación:

a).- Frontera izquierda.-

- 1.- Se supone $\Delta_d x$. De las gráficas 3 y 4 se obtienen v_d y c_d .
- 2.- De la gráfica 1 se obtiene K_d .
- 3.- Se calcula G_d con la expresión (III.12).
- 4.- Se toma c de los datos de la frontera izquierda.
- 5.- Se calcula $v - K$ con la expresión (III.11).
- 6.- De la gráfica 2 se obtiene v .
- 7.- Se calcula $\Delta_d x = (c + c_d - v - v_d) \frac{\Delta t}{2}$
- 8.- Si $\Delta_d x$ así calculada difiere de la supuesta, se corrige el valor y se repiten los pasos 1 a 7.
- 9.- Si $\Delta_d x$ calculada es igual a la supuesta, se llevan los valores calculados de v y c para el trazo de las nuevas curvas en las gráficas 3 y 4.

b).- Frontera derecha.-

- 1.- Se supone $\Delta_u x$. De las gráficas 3 y 4 se obtienen v_u y c_u .
- 2.- De la gráfica 1 se obtiene K_u .
- 3.- Se calcula G_u con la expresión (III.9).
- 4.- Se toma c de los datos de la frontera derecha.
- 5.- Se calcula $v - K$ despejando de (III.10).
- 6.- De la gráfica 2 se obtiene v .
- 7.- Se calcula $\Delta_u x = (c + c_u + v + v_u) \frac{\Delta t}{2}$.
- 8.- Si $\Delta_u x$ difiere de la supuesta, se corrige y se repiten los pasos anteriores.

9.- Si $\Delta_u x$ resulta igual a la supuesta, se llevan los valores calculados de v y c para el trazo de las nuevas curvas en las gráficas 3 y 4.

c).- Puntos interiores.-

1.- Se suponen $\Delta_d x$ y $\Delta_u x$. Se leen v_d y v_u en la gráfica 3, y c_d y c_u en la gráfica 4.

2.- De la gráfica 1 se obtienen K_d y K_u .

3.- Se calculan G_d y G_u con las expresiones (III.12) y (III.9).

4.- Se calcula c con la expresión (III.14).

5.- Se calcula $v - K$ con la expresión (III.15).

6.- En la gráfica 2 se lee v .

7.- Se calculan $\Delta_d x$ y $\Delta_u x$ con las expresiones:

$$\Delta_d x = (c + c_d - v - v_d) \frac{\Delta t}{2}$$

$$\Delta_u x = (c + c_u + v + v_u) \frac{\Delta t}{2}$$

8.- Si $\Delta_d x$ y $\Delta_u x$ difieren de las supuestas, se corrigen y se repiten los pasos 1 a 7.

9.- Si $\Delta_d x$ y $\Delta_u x$ coinciden con los valores supuestos, se registran los valores calculados de v y c en las gráficas 3 y 4 para el trazo de las nuevas curvas.

✓ III-2-3.- El método de las características para el estudio del golpe de aríete. ^{en el capítulo I se obtuvo la ecuación del golpe de aríete}

~~En el capítulo I se obtuvo la ecuación del golpe de aríete~~

es:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.11}) \quad (II)$$

que es equivalente al sistema:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (\text{I.9})$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g}{a^2} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{I.10})$$

Para obtener las características resulta más sencillo trabajar con estas dos ecuaciones que con la de 2ª orden, según veremos a continuación.

Pongamos las expresiones (I.9) y (I.10) en la forma:

$$g \frac{\partial h}{\partial x} + 0 \frac{\partial h}{\partial t} + 0 \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (\text{III.17})$$

$$0 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} + 0 \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (\text{III.18})$$

y tomemos en cuenta que por la definición de diferencial se --- tiene:

$$dx \frac{\partial h}{\partial x} + dt \frac{\partial h}{\partial t} + 0 \frac{\partial v}{\partial x} + 0 \frac{\partial v}{\partial t} = dh \quad (\text{III.19})$$

$$0 \frac{\partial h}{\partial x} + 0 \frac{\partial h}{\partial t} + dx \frac{\partial v}{\partial x} + dt \frac{\partial v}{\partial t} = dv \quad (\text{III.20})$$

Para obtener las características debemos anular el determinante formado por los coeficientes de las cuatro ecuaciones anteriores:

$$\begin{vmatrix} g & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{g}{a^2} & -1 & 0 \\ dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{vmatrix} = 0$$

o sea:

$$g (dt)^2 - \frac{g}{a^2} (dx)^2 = 0$$

que conduce a:

$$dx = -a dt \quad (\text{III-21-a})$$

$$dx = -a dt, \quad (\text{III-21-b})$$

pero para que el sistema resulte compatible, debe anularse también el determinante asociado con cualquiera de las incógnitas, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{g}{a} & -1 & 0 \\ dh & dt & 0 & 0 \\ dv & 0 & dx & dt \end{vmatrix} = 0$$

es decir:

$$dv - \frac{g}{a} dh \frac{dx}{dt} = 0$$

Y si en ésta sustituimos las (III-21), obtenemos:

$$dv = \frac{g}{a} dh \quad (\text{III-22-a})$$

$$dv = -\frac{g}{a} dh, \quad (\text{III-22-b})$$

de manera que a lo largo de una característica del tipo (III-21-a) se satisface la expresión (III-22-a), y a lo largo de una del tipo (III-21-b), se cumple la (III-22-b).

Supongamos ahora una tubería en que la celeridad es constante de sección a sección, y en que conocemos la carga h y la velocidad v en dos puntos A y B en un instante t . Designémoslas con h_A, v_A, h_B, v_B .

Para conocer h y v en la sección C en el instante $t + \Delta t$ (ver fig. 3.3), es decir, en el punto del plano xt en que se cortan la característica del primer tipo que pasa por A, y la

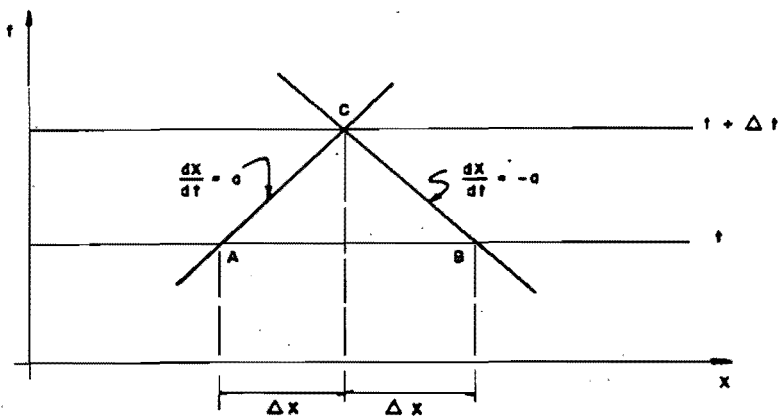


Fig. 3.3

del segundo tipo que pasa por B, debemos resolver el sistema:

$$v_A + \Delta_1 v = v_B + \Delta_2 v$$

$$h_A + \Delta_1 h = h_B + \Delta_2 h$$

$$\Delta_1 h = \frac{a}{g} \Delta_1 v \quad (\text{III.23})$$

$$\Delta_2 h = - \frac{a}{g} \Delta_2 v$$

en que cualquiera de los dos miembros de las primeras dos ecuaciones de las primeras dos ecuaciones da las condiciones v y h --
deseadas.

A los puntos de frontera solamente llegan características de un tipo, de manera que los términos que en el sistema -----(III.23) provengan del otro tipo de características deberán --reemplazarse por los que se obtengan de las relaciones $v - h$ --que rijan en la frontera.

En realidad, el método resulta más bien analítico; las ayudas gráficas se reducirán a las curvas $v - h$ que den las condiciones de frontera.

Observamos por último que la integración de las ecuaciones (III.22) conduce, por cierto de manera bastante simple, a las ecuaciones conjugadas del golpe de ariete:

$$h_2 - h_1 = \frac{a}{g} (v_2 - v_1)$$

$$h_2 - h_1 = - \frac{a}{g} (v_2 - v_1) ,$$

de las que a su vez se deduce, como hemos visto, el método gráfico de Bergeron.

Estas ecuaciones relacionan velocidades y cargas en puntos e instantes sujetos a las condiciones:

$$x_2 - x_1 = a (t_2 - t_1)$$

$$x_2 - x_1 = - a (t_2 - t_1) ,$$

respectivamente, y que como puede observarse, no son sino el -- resultado de integrar las ecuaciones (III-2+).

III-3).- Máquinas Computadoras.-

III-3-1.- Computadoras digitales.-

En términos generales, la organización de una computadora digital es la siguiente:

1).- El operador, mediante la unidad de entrada de la máquina, introduce el programa y los datos del problema por resolver.

2).- La máquina los almacena en su memoria.

3).- Una unidad de control toma una a una las instrucciones contenidas en el programa y da las órdenes necesarias para que se efectúen las operaciones indicadas con los datos que correspondan.

4).- La unidad aritmética de la máquina efectúa las operaciones..

5).- Siguiendo órdenes del control, los resultados se almacenan en la memoria o se imprimen de alguna forma, y por medio de la unidad de salida llegan a poder del operador.

La elaboración de un programa exige las siguientes etapas:

1).- Definición de un organigrama, es decir, de un diagrama de organización de ideas para la resolución del problema.

2).- Trazo del diagrama de flujo, o sea, de un diagrama --

que muestre la secuencia de las operaciones a ejecutar y las relaciones entre ellas.

3).- Codificación.- Es la traducción del diagrama de flujo mediante la aplicación de claves o "lenguajes" que interpretará la computadora.

4).- Pruebas del programa en la máquina.

La computadora digital es una excelente ayuda en la resolución de todo tipo de problemas, si se puede expresar como una secuencia de operaciones aritméticas, y aún hay problemas que sin ella no podrían ser atacados, pero su utilidad se manifiesta especialmente en procesos en que una misma serie de operaciones se repite reiteradamente, ya sobre diferentes datos, ya con el fin de aproximarse sucesivamente a un resultado.

III-3-2.- Computadoras analógicas.

Cuando las mismas ecuaciones describen matemáticamente a dos procesos físicos diferentes, de manera que sólo cambia el significado de las variables, es evidente que ambos procesos -- presentan una analogía. Es posible entonces, estableciendo -- una correspondencia biunívoca entre las variables que intervienen en ambos procesos, y ajustando las condiciones de frontera equivalentes, lograr que uno de ellos sea una representación -- fiel del otro, un "modelo analógico".

Las mediciones efectuadas en ese modelo, mediante las transformaciones adecuadas, permiten calcular características del -- proceso representado; uno de los sistemas físicos funciona entonces como una computadora en la que se resuelven las ecuaciones que describen el proceso que se lleva a cabo en el otro sistema.

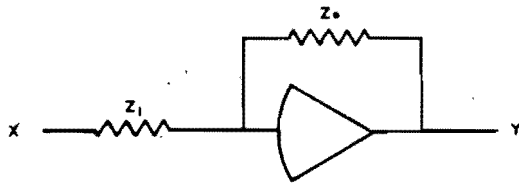
Aunque de hecho es posible lograr de muchas maneras una -- analogía, se reserva en especial el nombre de "computadora analógica" a un conjunto de dispositivos, en su mayor parte electrónicos, que son capaces de simular físicamente ciertos procesos básicos (o, lo que viene a resultar lo mismo, de efectuar -- ciertas operaciones matemáticas), que pueden interconectarse -- formando circuitos que se ajusten a las condiciones requeridas -- para simular procesos más complicados. La variable dependiente que se usa en ellas es el voltaje, y la independiente, el tiempo.

Entre las razones que han motivado que sea el medio eléctrico el más utilizado para servir de analogía se encuentran: -- la amplitud del dominio de variabilidad que se puede dar a la variable voltaje, la facilidad de la interconexión y la existencia de aparatos de registro accionados eléctricamente y de técnicas altamente desarrolladas. En particular, una de las características fundamentales de una máquina analógica es su capacidad de simular un proceso de integración (en la máquina se hace -- respecto al tiempo), lo que la hace especialmente indicada para resolver ecuaciones diferenciales, es decir, para simular procesos que matemáticamente se expresan por medio de ellas.

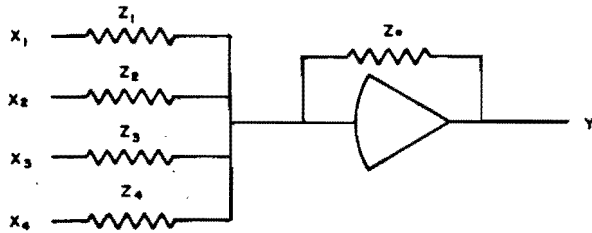
En la figura 3 .4 se muestran esquemáticamente algunos de los dispositivos que forman parte de una computadora analógica:

Multiplicado por constante.- Si el voltaje entregado al -- dispositivo es x , el que se obtiene es:

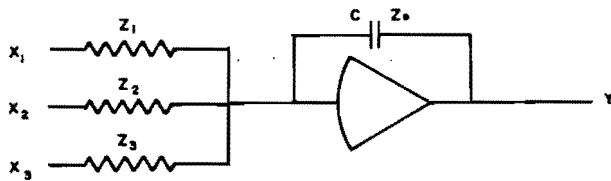
$$y = - \frac{z_0}{z_1} x , \text{ siendo } z_0 \text{ y } z_1 \text{ las impedancias de los elementos mostrados.}$$



Multiplicador por constante



Sumador



$$Y = - \int \left(\frac{Z_0}{Z_1} X_1 + \frac{Z_0}{Z_2} X_2 + \frac{Z_0}{Z_3} X_3 \right) dt$$

Integrador

Fig. 3.4

Sumador.- Si al dispositivo anterior se le conectan varias entradas con voltajes x_1, x_2, x_3, \dots , e impedancias z_1, z_2, z_3, \dots , se obtiene un voltaje.

$$y = - \left(\frac{z_0}{z_1} x_1 + \frac{z_0}{z_2} x_2 + \frac{z_0}{z_3} x_3 + \dots \right)$$

Integrador.- Añadiendo al sumador un condensador es posible efectuar la integral con respecto al tiempo de los voltajes que se entregan, y multiplicarlos al mismo tiempo por alguna constante.

La computadora analógica resuelve normalmente ecuaciones diferenciales ordinarias, sin embargo, las ecuaciones parciales -- pueden ser resueltas si es que se pueden substituir por un sistema de ecuaciones ordinarias, reemplazando algunas derivadas por cocientes de diferencias.

III-3-3.- El MIDAS.-

El Midas (Modified Integration Digital Analog Simulation)- es un programa que permite simular en las computadoras digitales del tipo 709 de la IBM el comportamiento de una máquina analógica; podemos describirlo básicamente como una subrutina que proporciona directamente ciertos elementos operacionales (integradores, sumadores, multiplicadores, etc), de modo que la programación se reduce a hacer un diagrama de bloques que indique la forma en que dichos elementos deben interconectarse para la resolución de un problema. Ese diagrama es en todo similar al alambrado de una computadora analógica, y ocupa precisamente su lugar.

Excepto una subrutina llamada LOGIC, que permite tomar de-

cisiones haciendo uso de comparadores, y que está escrita en -- lenguaje máquina, todas las instrucciones que componen el MIDAS están escritas en FORTRAN II, una de las variedades del lenguaje más difundido en los sistemas de computadoras digitales. So- lamente deben seguirse algunas reglas sencillas de formato al - codificar un programa, por lo que su aplicación no es complica- da.

Para la elaboración del diagrama de bloques existen símbo- los especiales. La mayor parte de ellos son unos pequeños cua- drados que contienen la clave del tipo de elemento de que se tra- ta, y que se ligan con otros por medio de líneas que simbolizan las diferentes entradas y salidas del elemento. En el capítulo siguiente presentaremos un ejemplo en el que se aclararán algu- nos detalles de este método.

C A P I T U L O I V

EJEMPLOS DE APLICACION

IV-1).- Tránsito de una onda de avenida.-

En el año de 1963 se construyó en el Instituto de Ingeniería de la U.N.A.M. el modelo hidráulico de un canal por el que se hizo pasar una onda de avenida, y los resultados de las mediciones efectuadas se compararon con los obtenidos por el método de las características y se publicaron en la revista "Ingeniería" de abril del mismo año (Contribución al estudio de ondas de avenida en canales.- J.L. Sánchez B., A. Capella V. e I. Herrera R.). El mismo problema nos servirá para ilustrar comparativamente los diferentes procedimientos expuestos.

Los datos del problema son los siguientes: Un canal de sección trapecial, con 6.00 m de ancho de plantilla y taludes 1,5:1 conduce normalmente un gasto de $30\text{m}^3/\text{s}$, con una pendiente de 0.0002 y un tirante de 2.60m. La rugosidad queda expresada por una "n" de Manning de 0.017. En su extremo aguas abajo, descar-

ga a un almacenamiento a nivel constante; la elevación de la superficie libre del agua es 5.07 m sobre la plantilla del canal en esa sección, lo cual produce un remanso que se extiende a lo largo de 26 km. En un momento dado, se presenta una onda de avenida en la sección en que comienza el remanso; el hidrograma de esta onda se conoce, y se desea investigar su evolución a lo largo del canal y a través del tiempo.

En las figuras 4.1 y 4.2 se muestran los datos geométricos del canal, los valores de las velocidades y tirantes en algunas secciones (condiciones iniciales obtenidas del remanso -- que hemos calculado), y el diagrama de niveles de la avenida.

IV-1-1.- Integración por diferencias finitas.

Para desarrollar el esquema de diferencias, expresemos primero las ecuaciones de De Saint Venant en forma conveniente. La ecuación (I.13) proviene de:

$$T \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 ,$$

que podemos escribir:

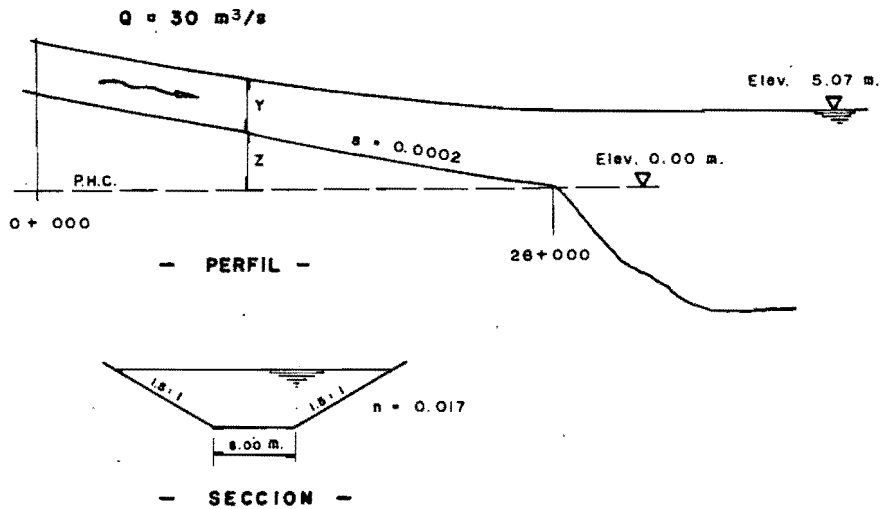
$$T \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Av) = 0 \quad (IV.1)$$

en que H representa el nivel de la superficie libre en cada sección referido a un plano horizontal de comparación elegido arbitrariamente, es decir:

$$H = Y + z$$

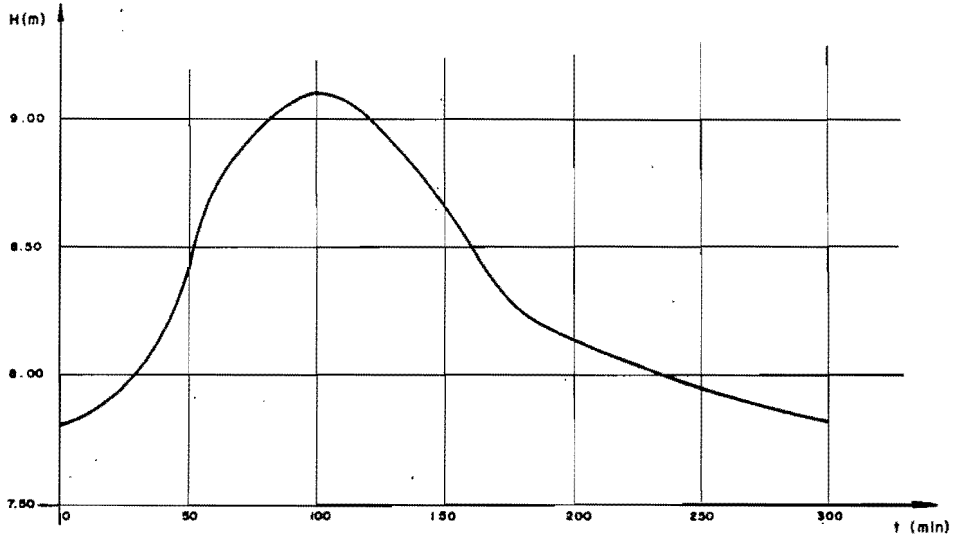
si z es la elevación de la plantilla en cada sección, constante respecto al tiempo.

Por otra parte, en la ecuación (I.12) podemos tomar en ---



Estación	Y (m)	Z (m)	H = Y + Z	V (m/seg)
0 + 000	2.60	5.20	7.80	1.165
2 + 000	2.61	4.80	7.41	1.159
4 + 000	2.63	4.40	7.03	1.147
6 + 000	2.66	4.00	6.66	1.129
8 + 000	2.72	3.60	6.32	1.094
10 + 000	2.81	3.20	6.01	1.045
12 + 000	2.95	2.80	5.75	0.976
14 + 000	3.15	2.40	5.55	0.888
16 + 000	3.39	2.00	5.39	0.798
18 + 000	3.88	1.60	5.28	0.908
20 + 000	4.00	1.20	5.20	0.825
22 + 000	4.34	0.80	5.14	0.553
24 + 000	4.70	0.40	5.10	0.489
26 + 000	5.07	0.00	5.07	0.435

Fig. 4.1: Datos geométricos y condiciones iniciales.



t (min)	H (m)	t (min)	H (m)	t (min)	H (m)
0	7.80				
10	7.84	110	9.07	210	8.09
20	7.89	120	9.00	220	8.06
30	8.00	130	8.92	230	8.02
40	8.14	140	8.80	240	7.98
50	8.36	150	8.67	250	7.94
60	8.70	160	8.50	260	7.91
70	8.84	170	8.34	270	7.88
80	8.96	180	8.24	280	7.85
90	9.03	190	8.17	290	7.82
100	9.08	200	8.13	300	7.80

Fig. 4.2: Elevaciones del nivel del agua en la sección 0 + 000.

cuenta que S_0 , la pendiente del fondo, es igual a la negativa - de la parcial de z respecto a x , y entonces, sustituyendo:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x} - S_0,$$

y considerando que la pendiente hidráulica S_f es proporcional - al cuadrado de la velocidad, de modo que $g S_f = P v^2$, queda:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial g} = - P v^2 \quad (\text{IV.2})$$

Los coeficientes $A(x,t)$, $T(x,t)$, $P(x,t)$, son funciones que dependen del río o canal por estudiar, y su determinación es de suma importancia por la influencia que tienen sobre las caracte- rísticas hidráulicas del escurrimiento, pero en general en un - problema dado puede ser muy difícil, y aún imposible, determi- nar correctamente su forma. Sin embargo, se puede aspirar a co- nocer sus valores en una serie de secciones fijas y en instan- tes determinados.

Al plantear el esquema de diferencias no debe olvidarse -- que en este tipo de ecuaciones la relación de los incrementos - de ambas variables debe quedar dentro de ciertos límites para - garantizar la convergencia. En este caso las características - son:

$$\frac{dx}{dt} = v \pm \sqrt{g D}$$

y debe tomarse:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{v + g \sqrt{gD}}$$

Para los datos de que disponemos, suponiendo una velocidad máxima de 2 m/s y un tirante medio hidráulico que no exceda de- 4 m, se tiene:

$$v + \sqrt{gD} = 2 + \sqrt{9.8(4)} = 8.3\text{m/s}$$

o sea, Δt en segundos deberá ser menor que Δx en metros, dividida entre 8.3. Si al hacer el cálculo aparecieran una velocidad y un tirante medio hidráulico que hicieran que $v + \sqrt{gD}$ fuese mayor de 8.3, se deberá corregir la relación de incrementos. De hecho, para lograr una buena aproximación, podría tomarse esa relación bastante menor.

Al tratar de resolver el problema, se planteó un esquema sencillo de diferencias finitas y se programó para ser procesado en una computadora electrónica, pero a pesar del cuidado que se tuvo con el control de incrementos, aparecieron resultados -- sin sentido, como velocidades negativas y tirantes muy grandes, que nos hicieron pensar que la forma en que se desarrollaba el esquema introducía muchos errores de promedio y aproximación, -- produciendo una gran inestabilidad.

Después de corregir repetidas veces el esquema y la relación de incrementos, se llegó a las ecuaciones que detallamos a continuación. El índice superior representa el instante y el inferior, la abscisa de la sección a que se refieren las magnitudes de que se trate, medidos como múltiplos de los incrementos Δt y Δx previamente elegidos.

A).- Puntos interiores.- (El cálculo se lleva solamente a puntos en que ambos índices son pares o impares simultáneamente; $0 \neq x \neq L$; $t > 1$).

$$H_x^t = H_x^{t-2} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(Av)_x^{t-1} - (Av)_x^{t-1}}{T_x^{t-2}}$$

$$v_x^t = v_x^{t-2} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[v_x^{t-2} v_{x-1}^{t-1} - v_x^{t-2} v_{x+1}^{t-1} + g (H_{x-1}^{t-1} - H_{x+1}^{t-1}) \right] \\ - 2\Delta t (P V V)_x^{t-2}$$

B).- Puntos de frontera izquierda.- ($x = 0$; H_0^t es dato).

a).- Si t es par.-

$$v_0^t = v_0^{t-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[v_0^{t-1} v_0^{t-1} - v_0^{t-1} v_1^{t-1} + g (H_0^{t-1} - H_1^{t-1}) \right] \\ - \Delta t (P V V)_0^{t-1}$$

b).- Si t es impar.-

$$v_0^t = v_0^{t-1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[v_0^{t-1} v_0^{t-1} - v_0^{t-1} v_2^{t-1} + g (H_0^{t-1} - H_2^{t-1}) \right] \\ - \Delta t (P V V)_0^{t-1}$$

C).- Puntos de frontera derecha.- ($x = L$; H_L^t se conoce en función de v_L^t).

a).- Si ambos índices son simultáneamente pares o impares.-

$$v_L^t = v_L^{t-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[v_{L-1}^{t-1} v_L^{t-1} - v_L^{t-1} v_L^{t-1} + g (H_{L-1}^{t-1} - H_L^{t-1}) \right] \\ - \Delta t (P V V)_L^{t-1}$$

b).- Si los índices no son simultáneamente pares o impares.-

$$v_L^t = v_L^{t-1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[v_{L-2}^{t-1} v_L^{t-1} - v_L^{t-1} v_L^{t-1} + g (H_{L-2}^{t-1} - H_L^{t-1}) \right] \\ - \Delta t (P V V)_L^{t-1}$$

D).- Puntos de la línea $t = 1$, excepto los de frontera; sólo si x es impar.-

$$H_x^1 = H_x^0 + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \frac{(AV)_{x-1}^0 - (AV)_{x+1}^0}{T_x^0}$$

$$V_x^1 = V_x^0 + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[V_{x-1}^0 V_x^0 - V_x^0 V_{x+1}^0 + g (H_{x-1}^0 - H_{x+1}^0) \right] - \Delta t (P V V)_x^0$$

Con estas ecuaciones se hizo el programa que resultó definitivo, pues al probarlo dió valores satisfactorios. En él se utilizó la fórmula de Manning para el cálculo del coeficiente P de pérdidas de energía. Al aplicarlo al problema que nos hemos propuesto, se utilizó un $\Delta x = 2000$ m y un $\Delta t = 20$ seg.

En el apéndice se muestra un listado de la codificación -- FORTRAN del programa, y en las figuras 4.3 a 4.6 se presentan algunos resultados en forma de gráficas.

IV-1-2.- El método de las características.

Aunque como hemos dicho, el problema fue ya resuelto por el método de las características, hemos creído conveniente repetirlo introduciendo algunas modificaciones de menor importancia.

En efecto, la aplicación del método tal como lo hemos expuesto, supone que el canal es rectangular o muy ancho, de modo que dy se pueda aproximar con dd y el radio hidráulico R pueda ponerse igual al tirante medio D en cada sección.

En el caso que nos ocupa, el canal tiene sección trapecial y esas aproximaciones no son muy buenas. Buscando mejorar la precisión sin aumento de trabajo apreciable, decidimos efectuar una regresión lineal de Y vs D y una regresión lineal homogénea de R vs D , utilizando el método de los mínimos cuadrados, con -

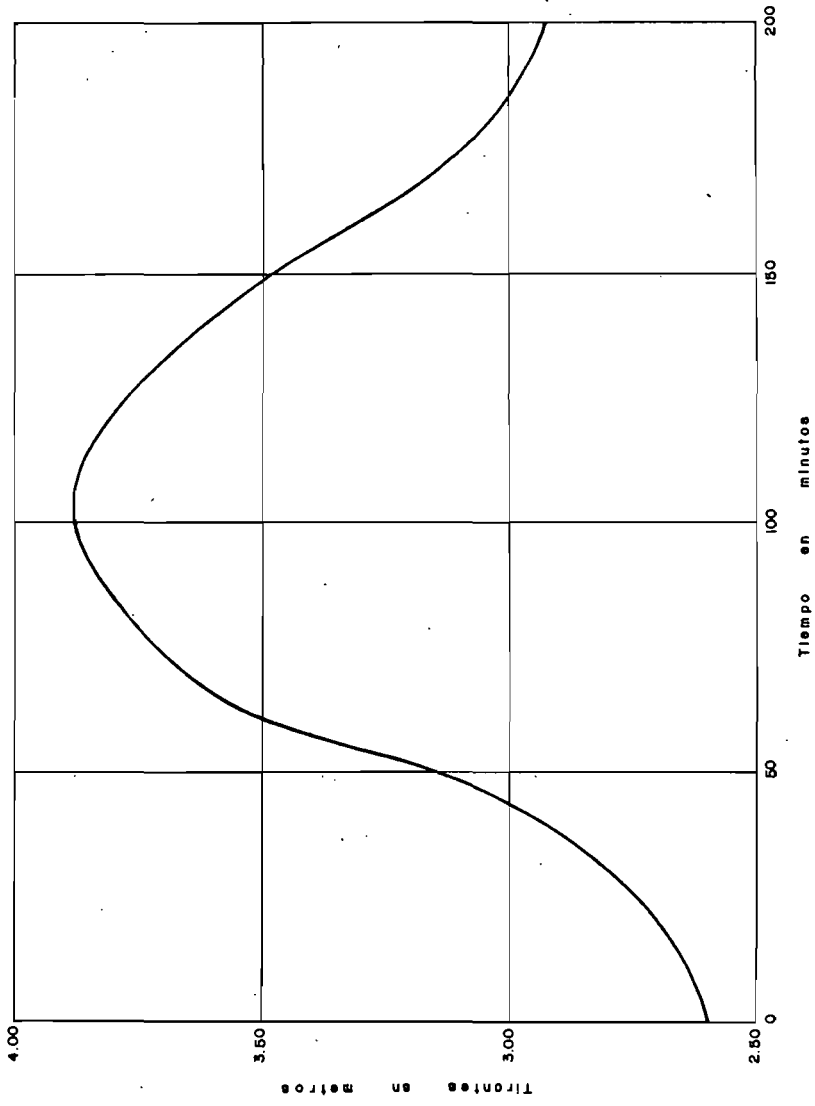


Fig. 4.3.- Tirantes en la sección 0+000

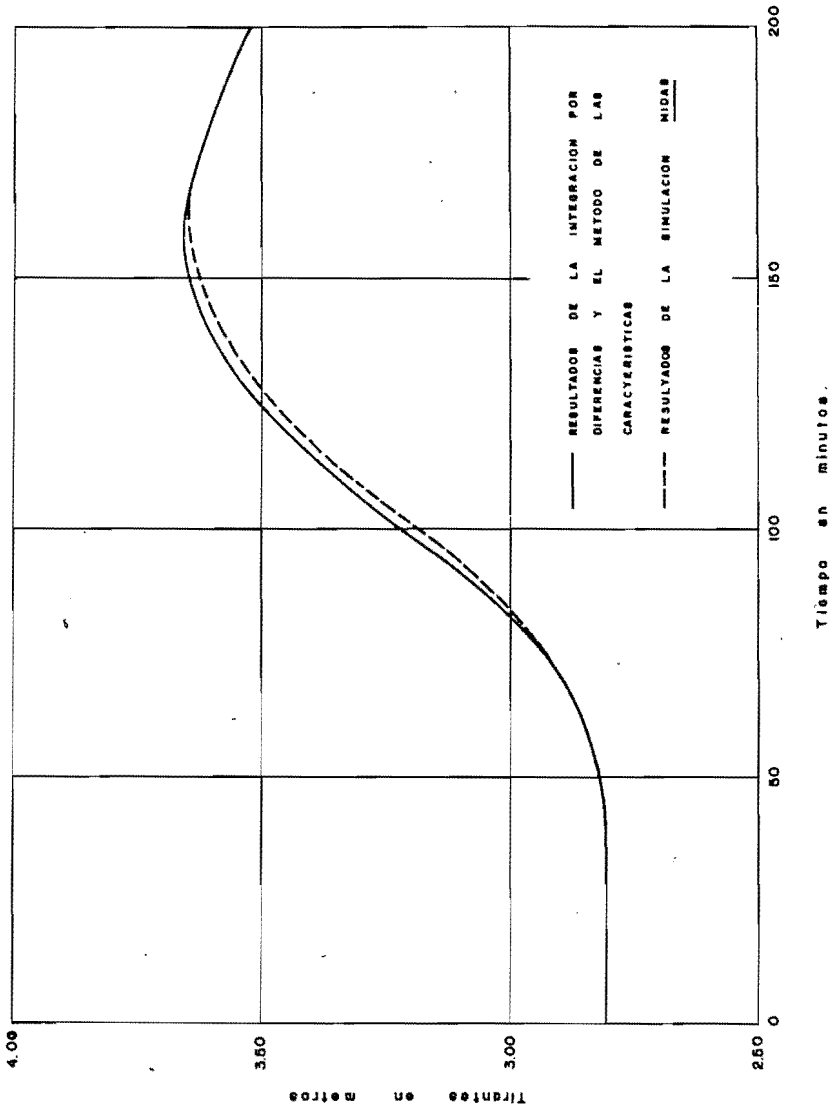


Fig. 4.4.- Tirantes en la sección 10+000

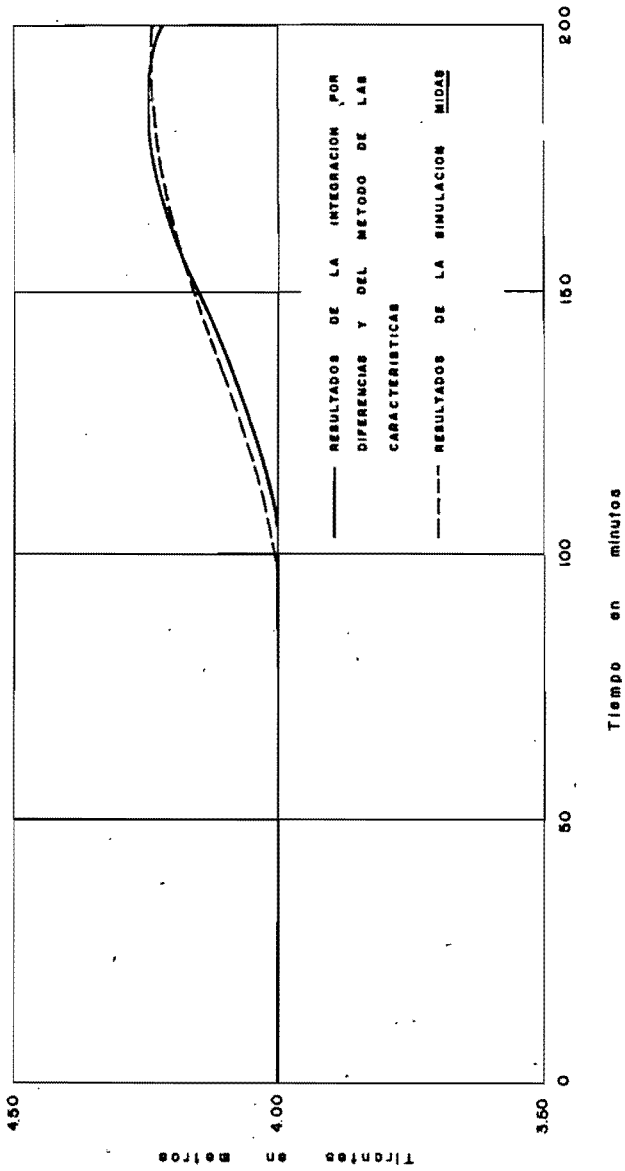


Fig. 4.5.- Tirantes en la sección 20 + 000

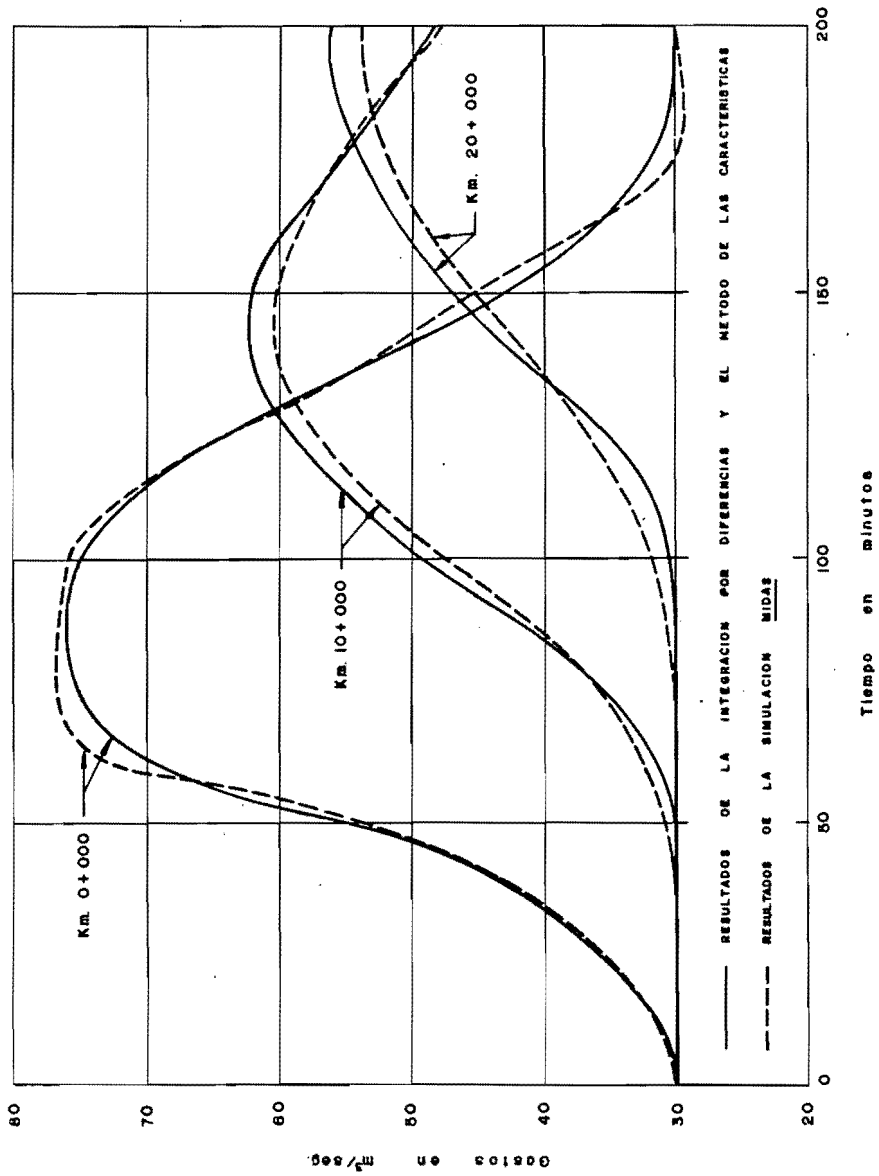


Fig. 4.6- Hidrogramas.

lo que se encontró: $dY = 1.7726 dD$ y $R = 0.8859 D$ como valores promedio dentro del rango de valores del tirante que pueden ser significativos.

Con esto se modifican algunas de las ecuaciones del párrafo III-2-2, que quedan:

$$G_u = v_u + 3.5452 c_u + K_u \text{ en lugar de (III.9)} \quad (IV.3)$$

$$v + 3.5452 c = G_u + K \text{ en lugar de (III.10)} \quad (IV.4)$$

$$G_d = v_d - 3.5452 c_d + K_d \text{ en lugar de (III.12)} \quad (IV.5)$$

$$v - 3.5452 c = G_d + K \text{ en lugar de (III.11)} \quad (IV.6)$$

$$c = \frac{G_u - G_d}{7.0904} \text{ en lugar de (III.14)} \quad (IV.7)$$

$$v = 0.9224 \sqrt{\frac{g \Delta t S_o - 2K}{n^2 g^{7/3} \Delta t}} c^{4/3} \text{ en lugar de (III.16)} \quad (IV.8)$$

Los resultados que arrojó el cálculo así efectuado coincidieron prácticamente con los obtenidos en la integración por --diferencias, por lo que no vale la pena incluirlos por separado; las gráficas de las figuras 4.3 a 4.6 pueden considerarse entonces representativas de los cálculos efectuados por cualquiera de los dos métodos.

IV-1-3.- Utilización del MIDAS.-

Al simular el comportamiento de una máquina analógica, el -MIDAS permite la integración continua en un sentido, pero la solución de ecuaciones diferenciales parciales en las que intervienen dos variables independientes requiere el uso de cocientes de diferencias finitas.

Para resolver el problema del tránsito de avenidas pongamos las ecuaciones (I.12) y (I.13) en la forma:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + v \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial Y}{\partial x} = g S_0 - P V^2$$

$$T \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Reemplazando las derivadas respecto a x por cocientes de diferencias, en que el índice 1 corresponda a la sección inmediata aguas arriba de la considerada, y el índice 2 a la inmediata aguas abajo, las ecuaciones pueden escribirse:

$$\frac{dV}{dt} = g S_0 - P V^2 + v \frac{V_1 - V_2}{2 \Delta x} + g \frac{Y_1 - Y_2}{2 \Delta x}$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{Q_1 - Q_2}{2 T \Delta x}$$

en las que Δx representa la distancia entre las diferentes secciones en las que se supone dividido el canal.

Estas ecuaciones pueden integrarse con respecto al tiempo, y son válidas en cualquier sección del canal en que se desee seguir el paso de la onda, excepto en las dos secciones extremas. Para éstas se deberán desarrollar otras ecuaciones que tomen en cuenta las condiciones de frontera.

En nuestro problema, las condiciones de frontera quedan expresadas adecuadamente por los sistemas siguientes:

Extremo agua arriba.-

$$\frac{dV}{dt} = g S_0 - P V^2 + v \frac{V - V_2}{\Delta x} + g \frac{Y - Y_2}{\Delta x}$$

$$Y = Y(t)$$

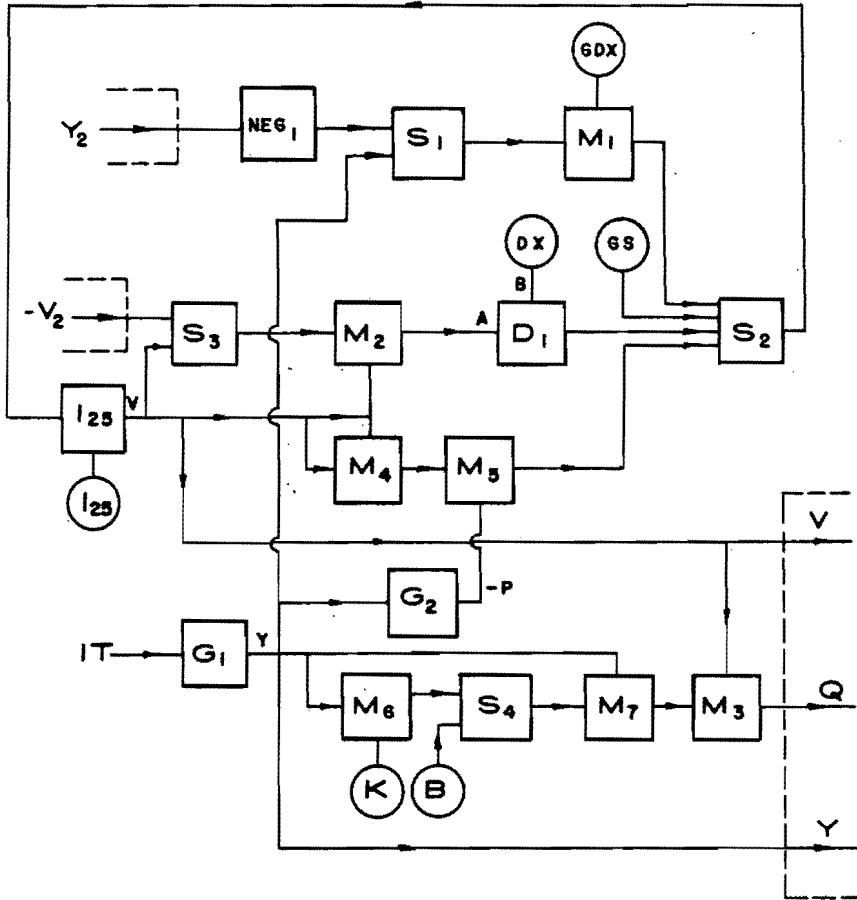


Fig. 4.7 - Diagrama de bloques para la sección extrema de aguas arriba.

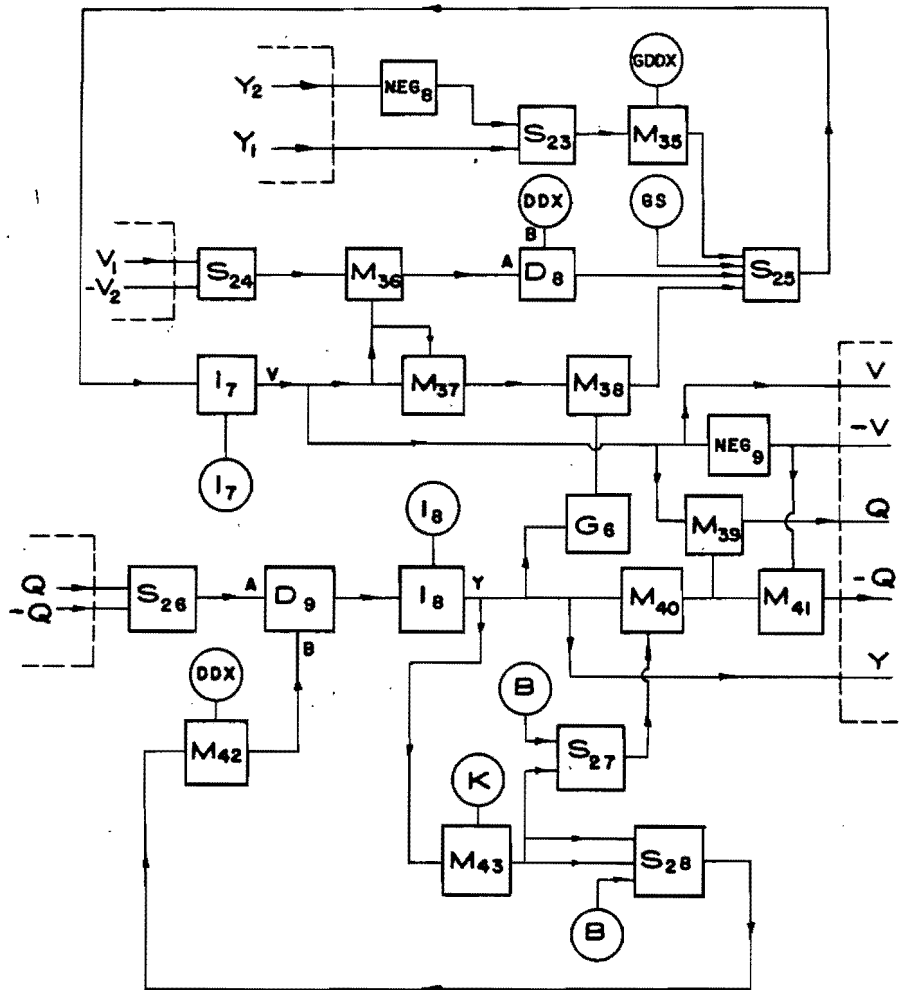


Fig. 4.8.- Diagrama de bloques- Célula tipo.

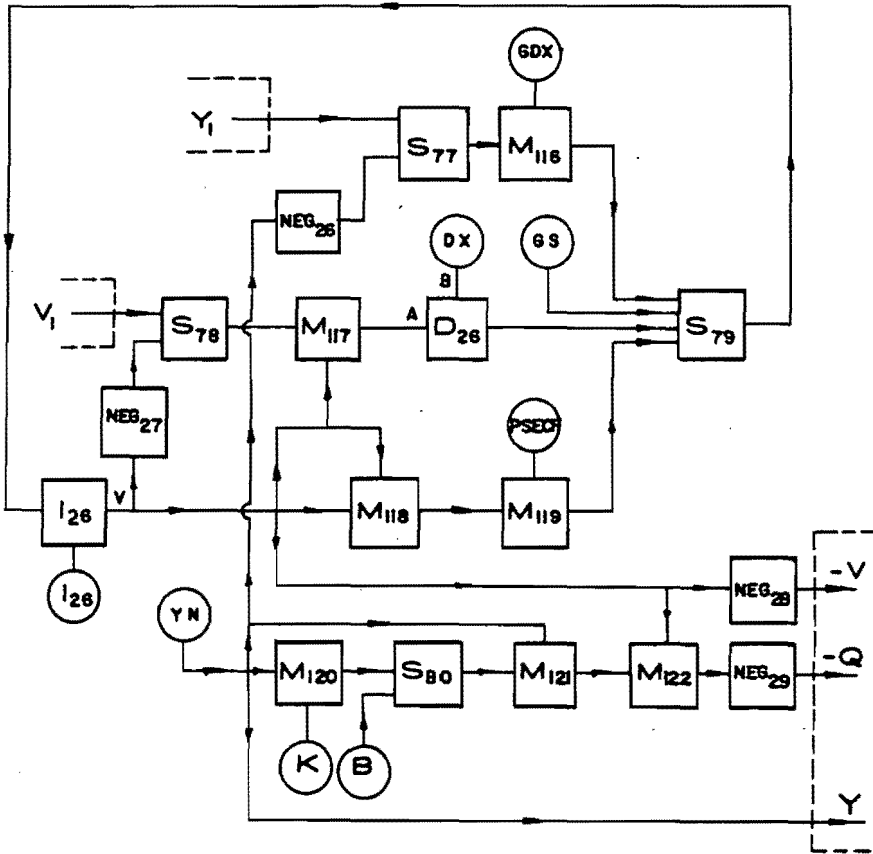


Fig. 4.9 - Diagrama de bloques para la sección extrema aguas abajo.

Extremo aguas abajo.-

$$\frac{dv}{dt} = gS_0 - PV^2 + v \frac{V_1 - V}{\Delta x} + g \frac{Y_1 - Y}{\Delta x}$$

Y = constante

Las figuras 4.7, 4.8, 4.9 muestran los diagramas de --- bloques para resolver simultáneamente las ecuaciones anteriores. La "célula tipo" de la figura 4.8 se repetirá para cada una de las secciones no extremas del canal.

El significado de los símbolos es el siguiente;

- NEG cambio de signo
- S sumado (admite hasta seis entradas)
- M Multiplicador
- D divisor (efectúa el cociente A/B)
- I integrador
- G generador de funciones (interpola linealmente entre datos)

Los integradores llevan señaladas sus condiciones iniciales; las otras magnitudes encerradas en círculos con las constantes del proceso;

- B = ancho de plantilla del canal
- K = inclinación de los taludes
- DX = Δx
- GS = $g S_0$
- GDX = $g/\Delta x$
- GDDX = $g/2\Delta x$
- DDX = $2\Delta x$

Todo elemento va seguido de un número que permite su identificación.

Al codificar deben seguirse la reglas que indicamos:

a).- Empezar con las tarjetas.-

XEQ (execute)

CALL MIDAS

b).- A continuación poner las tarjetas con los nombres de las constantes, parámetros y condiciones iniciales de los integradores. En la columna 7 se iniciales de los integradores. En la columna 7 se indica respectivamente CON, PAR o IC, y a partir de la columna 15 se indican sus nombres (no más de seis por tarjeta). Entre las constantes se deben declarar TR (tiempo de seado entre cada impresión) y TFINAL (tiempo que marca el fin del proceso).

c).- Se hace después una lista de los elementos que intervienen en el programa, escribiéndolos a partir de la columna 7, y frente a ellos, de la columna 15 en adelante, se indican las claves de las entradas separadas por comas.

d).- Se pone la declaración END, e inmediatamente después-- se proporcionan los datos, en el mismo orden en que son nombrados en el programa, y en formato 6F10. Para las tablas de los generadores de función debe declararse antes el número de parejas de datos.

e).- Todos los datos deben darse con punto decimal o en forma de potencias de 10.

f).- Al tenrminar el listado de elementos operacionales de be indicarse:

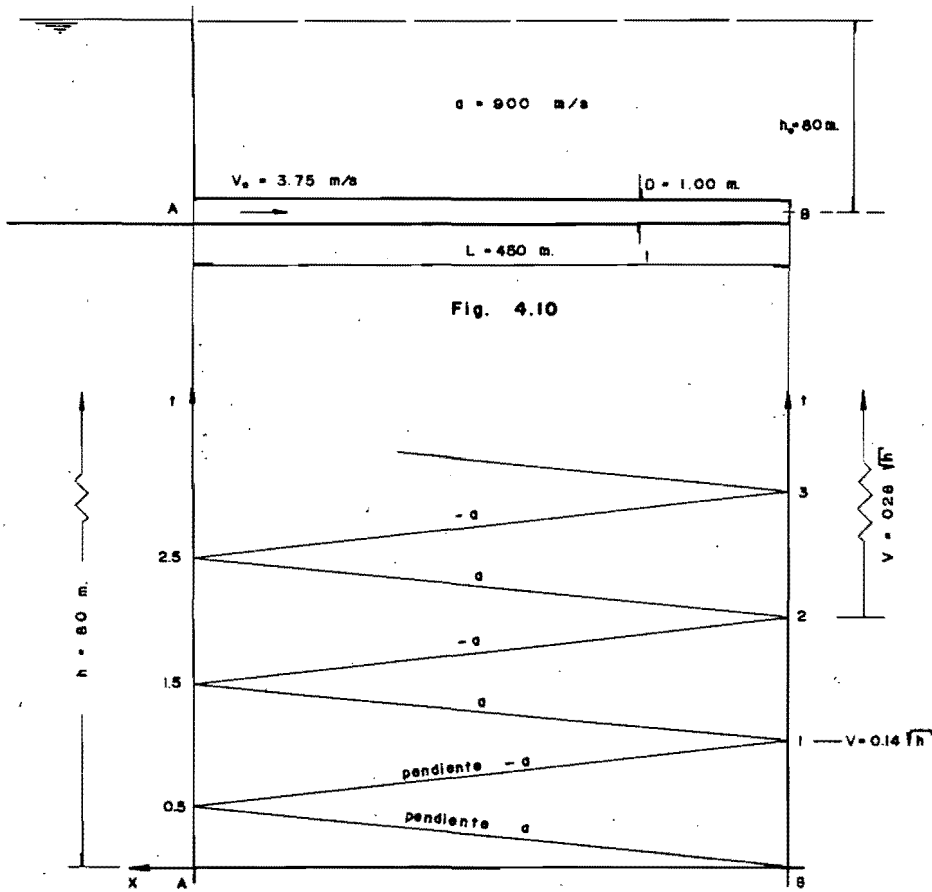


Fig. 4.11

FIN IT,TFINAL

empezando en las columnas 7 y 15 respectivamente. Esta declaración indica que el proceso debe terminar cuando la variable independiente IT alcance el valor TFINAL.

g).- Entre la tarjeta FIN y la END se proporcionan las especificaciones de salida.

En las figuras 4.3 a 4.6 hemos trazado gráficamente los resultados del problema resuelto con el MIDAS, lo que permite la fácil comparación con los obtenidos por los otros métodos. Una muestra del listado de tarjetas usadas se presenta en el apéndice.

IV-2).- Sobrepresión por golpe de ariete.-

Sea una instalación como la mostrada en la figura 4.10 y calculemos las variaciones de la presión junto a la válvula debidas a una apertura parcial de la misma, con objeto de ilustrar ^{el} los procedimientos de las características ~~y de Bergeron~~.

Supongamos que la ley de apertura es lineal, y que se efectúa totalmente en un tiempo de 3 segundos, y veamos que pasa con una maniobra de dos segundos de duración.

Condiciones de frontera.-

Vaso	A.-	$h = 80m.$
Válvula	B.-	cerrada $v = 0$
		abierta $v = k/h$

Para apertura total, $k_3 = 3.75/80 = 0.42$

Para parcial, $k_2 = 2 k_3/3 = 0.28$

$k_1 = k_3/3 = 0.14$

IV-2-1.- Método de las características.-

Tenemos $a = 900$ m/s; $L = 450$ m, de modo que los puntos extremos ligados por una recta característica se encontrarán defasados un tiempo $\Delta t = \Delta x/a$, es decir 0.5 seg. Según esto, avanzaremos en el cálculo del punto B_0 al $A_{0.5}$, de éste al B_1 , y así sucesivamente; ver la figura 4.11.

Al llegar a puntos de la frontera B deberemos combinar.

$$v_B = k/\sqrt{h_B}$$

con las expresiones que valen a lo largo de las características de pendiente $-a$ provenientes de la frontera A, a saber:

$$h_B = h_A + \Delta h$$

$$v_B = v_A + \Delta v = v_A - \frac{g}{a} \Delta h,$$

obteniendo luego:

$$\Delta h \Big|_A^B = \frac{a}{2g^2} (2g v_A + a k^2 - k \sqrt{4a g v_A + a^2 k^2 + 4g^2 h_A})$$

No vale la pena graficar esta expresión, es preferible calcular en cada paso los términos necesarios.

Al llegar a puntos de la frontera A bastará poner:

$$h_A = 80$$

$$\Delta h = h_A - h_B$$

$$v_A = v_B + \Delta v = v_B + \frac{g}{a} \Delta h,$$

en que las condiciones conocidas son las del otro extremo, calculadas 0.5 seg. antes.

Cálculo.-

$$B_0.- \quad v = 0 \quad h = 80 \text{ m}$$

$$A_{0.5}- \quad v = 0 \quad h = 80 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} B_1.- \quad \Delta h &= \frac{900}{192} (0 + 0.0196 \times 900 - 0.14 \sqrt{0 + 0.0196 \times 810000 + 384 \times 80}) \\ &= 4.69 (17.64 - 0.14 \sqrt{15880 + 30720}) \\ &= - 58.70 \text{ m.} \end{aligned}$$

$$\Delta v = 58.70 \times 0.0109 = 0.639 \text{ m/s}$$

$$\therefore v = 0.639 \text{ m/s} \quad h = 21.30 \text{ m.}$$

$$A_{1.5}- \quad h = 80 \text{ m.}$$

$$\Delta h = 80 - 21.30 = 58.70 \text{ m}$$

$$\Delta v = 58.70 \times 0.0109 = 0.639 \text{ m/s}$$

$$\therefore v = 1.278 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} B_2.- \quad \Delta h &= 4.69 (19.6 \times 1.278 + 0.0784 \times 900 - 0.28 \sqrt{35200 \times 1.278 + 0.0784 \times 810000 + 30720}) \\ &= 4.69 (25.05 + 70.55 - 0.28 \sqrt{44900 + 63500 + 30720}) \\ &= - 41.70 \text{ m.} \end{aligned}$$

$$\Delta v = 41.70 \times 0.0109 = 0.455 \text{ m/s}$$

$$\therefore v = 1.733 \text{ m/s} \quad h = 38.30 \text{ m.}$$

$$A_{2.5}- \quad h = 80 \text{ m.}$$

$$\Delta h = 80 - 38.30 = 41.70 \text{ m}$$

$$\Delta v = 41.70 \times 0.0109 = 0.455 \text{ m/s}$$

$$\therefore v = 2.188 \text{ m/s}$$

$$B_3.- \quad \Delta h = 4.69 (19.6 \times 2.188 + 70.55 - 0.28 \sqrt{77000 + 63500 + 30720})$$

$$= -11.6 \text{ m}$$

$$\Delta v = 11.60 \times 0.0109 = 0.116 \text{ m/s}$$

$$\therefore v = 2.314 \text{ m/s} \qquad h = 68.40 \text{ m}$$

Las cargas h tendrán asintóticamente a 80 m y las velocidades a $0.28\sqrt{80}$, o sea, a 2.5m/s.

IV-2-2.- Método de Schnyder-Bergeron.-

En el plano v-h las condiciones de frontera A quedan representadas por la recta $h = 80$, y las de la frontera B por las parábolas $v = k/h$, con $k = 0.14, 0.28$ y 0.42 , según se obtuvo antes. Las rectas de cálculo tienen pendientes $\pm a/g$, es decir, $\pm 91.8 \text{ seg.}$

El diagrama completo se muestra en la figura 4.12, y de él tomamos los siguientes valores, que pueden compararse con los calculados en el párrafo anterior:

SECCION-TIEMPO	v(m/s)	h(m)
B ₀	0	80
A _{0.5}	0	80
B ₁	0.639	21.30
A _{1.5}	1.285	80
B ₂	1.732	38.20
A _{2.5}	2.188	80
B ₃	2.311	68.10

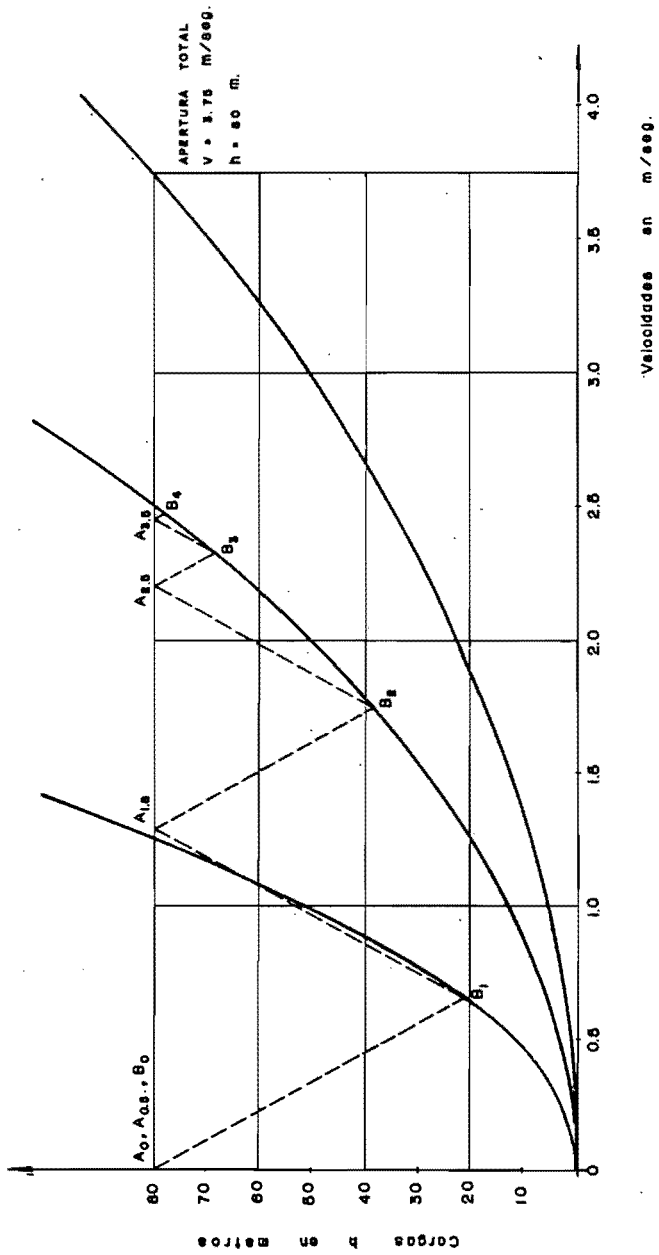


Fig. 4.12: Diagrama de Bergeron

C A P I T U L O V

CONCLUSIONES

La integración de las ecuaciones diferenciales de segundo orden y primer grado, de tipo hiperbólico; es de gran importancia en el campo de la hidráulica. En efecto, como hemos visto, este tipo de ecuaciones aparece al tratar con flujos no permanentes, es decir, con problemas de propagación de ondas. El cálculo de la forma en que se propagan es indispensable para poder diseñar correctamente las conducciones en las que se presentarán dichos fenómenos transitorios.

Al comparar los diferentes procedimientos que he expuesto en los capítulos anteriores, para integrar dichas ecuaciones hiperbólicas, se pueden hacer las siguientes observaciones:

Ante todo, la integración directa de las ecuaciones por los métodos del Cálculo, no conduce a ninguna solución apropiada, pues o bien deja una indeterminación, como sucede en el caso del golpe de ariete, o sólo es posible en algunas condiciones particulares, como se ha mostrado en el caso de ondas en cana-

les. Por otro lado, la parte ya numérica del cálculo es laboriosa, y requiere que el calculista posea una buena base matemática para su comprensión. Son entonces preferibles los procedimientos de solución por diferencias finitas, ya sea que se usen medios gráficos o electromecánicos de cálculo.

El problema del golpe de ariete no presenta ya mayores dificultades, dada la versatilidad y sencillez del método de Schnyder-Bergeron. Al aplicarlo, es fácil hacer intervenir las condiciones de frontera, y no es tampoco complicado tomar en cuenta la fricción, si se supone que las pérdidas de energía producidas por ella se concentran en una o varias secciones a lo largo de la conducción. También es simple el cálculo de la sobrepresión en secciones intermedias, una vez que se conoce su variación en las extremas. Para tuberías sencillas, el método de Bergeron es, además, bastante rápido.

La integración de las ecuaciones de Allievi a lo largo de sus características es, sin embargo, tanto o más simple, y presenta todas las ventajas que hemos ennumerado para el método de Bergeron. En particular, estimo que proporciona una forma clara y elegante de llegar a las ecuaciones conjugadas que son la base del procedimiento gráfico, y sólo se necesita un cierto nivel de conocimientos matemáticos (por otra parte no muy elevado) para que este punto de vista permita una comprensión más completa del comportamiento del fenómeno. En cuanto a precisión se refiere, se ha visto en el ejemplo que los resultados son prácticamente los mismos, como era de esperarse sabiendo que en realidad se están aplicando los mismos principios, y sólo podría quedar en duda la aproximación que se obtuviese. Es-

ta es, aparentemente, tan buena en un procedimiento como en el otro. Debo decir sin embargo, que la programación para una computadora electrónica haría aún más simple y rápida la determinación de las variaciones de presión en un conducto, y permitiría además tomar en cuenta, fácilmente, todas las singularidades -- del mismo. La máquina computadora sería especialmente útil en los casos de tuberías bifurcadas, con pozos de oscilación, etc.

Por el contrario, el problema del tránsito de avenidas por cauces, más complicado, se encuentra aún con ciertas dificultades de detalle en su solución. El método de las características, tal como lo presenta Lin, es simple y claro, pero bastante laborioso. El ejemplo que se presentó en el capítulo anterior requirió un buen número de horas-calculista para su resolución completa. Los resultados que arroja el método son bastante --- aceptables, según mostró la comparación con el modelo reducido que se detalla en la referencia 14, y hace unos años proporcionaba el único medio razonable de atacar el problema. No obstante, su aplicación a cauces no uniformes ya no es tan sencilla - (ver ref. 6), sobre todo si las irregularidades fueran frecuentes. En la Secretaría de Recursos Hidráulicos se ha programado ya este procedimiento, para su procesamiento en una computadora digital, con lo que se ha ganado mucho en cuanto a facilidad y rapidez de su aplicación.

La integración de las ecuaciones a través de un esquema -- de diferencias finitas tiene, en principio, la dificultad de que el sistema debe llenar ciertos requisitos para garantizar su -- estabilidad y convergencia, pero una vez subsanada, no hay ya - mayores obstáculos. Sin embargo, este método exige francamente

el uso de una computadora electrónica. La precisión de los resultados es similar a la que da el método de las características, como pude comprobar al resolver el mismo problema por ambos métodos. El tiempo de procesado en la computadora fue de poco más de veinte minutos, y aunque el tiempo necesario para poner a punto el programa fue de muchas horas, una vez que el programa está hecho, es muy rápida la solución de un problema cualquiera, pues sólo hará falta codificar y perforar los datos, y proporcionarlos a la máquina.

El uso del esquema de diferencias finitas presenta además la posibilidad de tomar en cuenta fácilmente ciertas irregularidades, incluyendo aportaciones laterales de gastos (que existen prácticamente siempre que se trata de un cauce natural). Esto ha sido ya aplicado, con resultados satisfactorios, en los ríos Ohio, Mississippi y Tennessee, por ingenieros del Instituto de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Nueva York (ver ref. 10). De hecho, basta con añadir algunos términos a las ecuaciones de De Saint-Venant, para considerar esas aportaciones laterales (ref. 7, 10), y en la Comisión Federal de Electricidad existe ya el programa correspondiente para computadora digital. Esta generalización permitirá, por ejemplo, predecir la forma del hidrograma de una avenida en un sitio determinado de un río con días de anticipación, conociendo las características de la onda en una sección que se encuentre muchos kilómetros aguas arriba, y la magnitud y distribución de los caudales laterales, pudiendo así tomar las precauciones necesarias en el sitio en cuestión.

Falta sólo por analizar el uso de la computación analógi-

ca. Este medio de cálculo no está muy difundido, y no tengo noticias de que haya sido empleada una computadora analógica de uso general para problemas de tránsito de avenidas por cauces. Existen modelos analógicos especiales (ref. 8, 12), que simulan en particular un tramo de río, pero ni siquiera éstos han sido utilizados profusamente.

La computadora analógica de uso general puede no contar -- con suficientes elementos para formar los varios circuitos que se necesitan para la solución de las ecuaciones de la onda en canales, por el número de secciones que se debe considerar, a menos que se trate de una máquina de muy gran capacidad; la utilización del MIDAS puede corregir esa deficiencia. Por otra parte, la programación de los circuitos para una analógica o el MIDAS es sumamente sencilla, y permite también tomar en cuenta irregularidades del cauce. Si, por ejemplo, se tratara de un cauce natural en el que la forma de la sección variara de cualquier manera, bastaría reemplazar la parte del circuito que efectúa el cálculo del área por un generador (G) al que se suministrarían en forma de tabla los datos del área en cada sección, para diferentes valores del tirante.

Al comparar los resultados obtenidos con los que arrojaron otros métodos, en el problema propuesto, se ve que las diferencias en los valores calculados de tirantes y de gastos no exceden del 5%, por lo que se puede pensar que todos ellos son igualmente confiables. El tiempo de procesado es similar (el programa MIDAS corrió en cosa de treinta minutos), y la única aparente desventaja de este proceso de simulación es que por ahora -- hay pocas computadoras digitales que lo acepten. Creo, sin em-

bargo, que debo hacer hincapié en la sencillez de la programación analógica, y en que la confección de los circuitos o alambrados da una visión más profunda de la naturaleza del problema y de la interdependencia de los diferentes elementos.

En resumen, aunque los procedimientos gráficos dan en general resultados suficientemente buenos, me parece que el advenimiento en gran escala de la computación electrónica ha proporcionado a la ingeniería hidráulica un arma muy poderosa para la resolución de los problemas de integración de ecuaciones hiperbólicas, y que en consecuencia, se podrán obtener soluciones más rápidas y precisas en los casos de flujos transitorios, que darán lugar a proyectos mejores y más económicos.

Espero que este modesto trabajo sea de alguna utilidad a los ingenieros interesados en los problemas hidráulicos, y quiero sinceramente agradecer la ayuda, directa o indirecta, que me prestaron para llevarlo a cabo mis profesores, compañeros y amigos, tanto de la U.N.A.M. como la Comisión Federal de Electricidad y la Secretaría de Recursos Hidráulicos.

B I B L I O G R A F I A

ECUACIONES HIPERBOLICAS.-

Teoría general.-

- 1.- Courant, R. y Hilbert, D.- Methods of Mathematical Physics.- Interscience Publ.- New York, 1953.

Diferencias finitas.-

- 2.- Collatz, L.- Numerische Behandlung von Differentialgleichungen.- Springer Verlag.- Berlin, 1955.
- 3.- Forsythe, G. E.; Wassow, W. R.- Finite - Difference Methods for Partial Differential Equations.- -- John Wiley & Sons, New York, 1960.
- 4.- Fox, L.- Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations.- Pergomon Press, Oxford, 1962.

Método de las características.-

- 5.- Modern Computing Methods.- Her Majesty's Stationary Office, London, 1959.

ONDAS EN CANALES.-

- 6.- Capella, A.- Cálculo de ondas de avenida a lo lar-

- go de cauces no uniformes (tesis de maestría).- Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M., México 1963.
- 7.- Chow, ven Te.- Handbook of Applied Hydrology.- --- McGraw Hill, New, York, 1964.
 - 8.- Chow Ven Te.- Open Channel Hydraulics.- McGraw - - Hill, New York, 1959.
 - 9.- Dronkers, J.J.- Tidal Computations in Rivers and - Coastal Waters.- North Holland Publishing Company. Amsterdam, 1964.
 - 10.- Isaacson, E., Stoker, J.J., Troesch, A.- Numerical Solution of Flow Problems in Rivers.- Journal of - the Hydraulics Division (A.S.C.E.), Vol. 84, No. - HY5, Oct. 1958.
 - 11.- Lamb, H.- Hydrodynamics.-Dover, New York, 1945.
 - 12.- Linsley, R. K., Foskett, L.W., Kohler, M.A.- Elec- tronic device speeds flood forecasting.- Enginee- ring News Record, Vol. 141, No. 26, Dec. 23, 1948.
 - 13.- Rich, George.- Hydraulic Transients.-Dover, New -- York, 1963.
 - 14.- Sánchez, J.L. y Capella, A.- Contribución al estu- dio de ondas de avenidas en canales.- Revista "In- geniería", Vol. XXXIII, No. 2, México, 1963.

GOLPE DE ARIETE.-

- 14.- Bergeron, L.- Du Coup de Bélier en Hydraulique au- Coup de Foudre en Electricité.- Dunod, París, 1949.
- 15.- Jaeger, Ch.- Hydraulique Technique.- Dunod, París - 1954.

- 17.- Parmakian, J.- Waterhammer Analysis.- Dover, New York, 1963.
- 18.- Schlag, A.- Hydraulique Générale.- Dunod, Paris, - 1957.
- 19.- Scimemi, E.- Compendio di Idraulica.- CEDAM, Padova, 1959.

COMPUTADORAS DIGITALES.-

- 20.- McCracken, D.D.- A guide to FORTRAN programming.-- Johy Wiley & Sons, New York, 1961.
- 21.- Sherman, Ph.- Programming and Codig Digital Computers.- John Wiley & Sons, New York, 1963.

COMPUTADORAS ANALOGICAS Y SIMULACION MIDAS.-

- 22.- Hoyos, Darío F. de.- Usos de la Computadora Analógica PACE 231 - R en la Solución de Problemas de Hidráulica (tesis de maestría).- Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M., México 1966.
- 23.- Truitt, T.D. and Rogers, A.F.- Basics of Analog -- Computers.- John F. Rider Publ., Inc., New York, - 1962.
- 24.- Primer on Analog Computation.- Bulletin No. ALAC - 64002 - 1.- Electronic Associates, Inc., 1964.

- o -

- A P E N D I C E -

PROGRAMA FORTRAN PARA LA SOLUCION
DE LAS ECUACIONES DE SAINT VENANT

```

TRANSITO DE ONDAS DE AVENIDA POR CAUCES DE SECCION TRAPEZIAL
UTILIZANDO LAS ECUACIONES DE BARRE DE SAINT VENANT
DIMENSION H(20),Z(20),TH(40),HH(40),VV(15),HV(15),V(20),A(20)
1 FORMAT (I2,F8.2,3F6.2,F4.2,F4.3,F7.0,I5)
3 FORMAT (6F10.3)
4 FORMAT (8F8.3)
5 FORMAT (10F6.3)
6 FORMAT (3I6,4F12.4)
7 FORMAT (5H//)
READ 1, NS, OI, DX, DT, P, HK, WN, TTT, IDX
TC = 2.*SORTF(1.+HK**2)
TT = 0
K1 = 1
K2 = 1
K3 = 2
K4 = 1
RNS = NS
CPFI = NS12
CPFL = RNS/2.
IF(CPFI-CPFL) 26, 27, 26
26 K5 = 1
GO TO 28
27 K5 = 2
28 READ 3, H(I), Z(I)
READ 4, TH(J), HH(J)
READ 5, VV(J), HV(J)
22 ITT = IT
DO 21 K = 1, NS
KM = IDX * (K-1)
Y = H(K) - Z(K)
A(K) = (B+HK*Y)*Y
T = R+2.*HK*Y
R = A(K)/(B+TC*Y)
P = (9.8*HN**2.)/R**1.33
V(K) = OI/A(K)
Q = OI
23 PRINT 6, ITT, K, KM, Y, A(K), V(K), Q
PRINT 7
24 NSPU = NS-1
25 TT = TT + 1
ITT = ITT
NA = 1
201 CONTINUE
K = NA
Y = H(K) - Z(K)
A(K) = (R+HK*Y)*Y
T = R+2.*HK*Y
R = A(K)/(B+TC*Y)
P = (9.8*HN**2.)/R**1.33
GO TO (31, 32, 33) K4
31 GO TO (35, 36) K1
32 GO TO (37, 38) K2
33 K4 = 1
GO TO (39, 40) K1
35 VU = V(1)+DT*((V(1)*V(1)-V(1)*V(2))+0.8*(H(1)-H(2)))/DX-P*V(1)*V(1)
202 CALL GOGO (TH, TT, HH, HU)
KM = IDX * (NA - 1)

```



DEPM

```

Y = HU - Z(NA)
AU = (R+HK*Y)*Y
QU = VU * AU
PRINT 6, ITT, NA, KM, Y, AU, VU, QU
K4=2
VSPU = V(NS-1)
HSPU = H(NS-1)
GO TO (41, 42) K1
41 DO 43 N = K3, NSPU, 2
NA = N
GO TO 201
37 H(N) = H(N)+DT*((A(N-1)*V(N-1)-A(N+1)*V(N+1))/(2.*DX))/T
V(N) = V(N)+DT*((V(N-1)*V(N)-V(N)*V(N+1)+9.8*(H(N-1)-H(N+1)))/2.*D
IX = P*V(N)*V(N))
203 Y=H(N)-Z(N)
ANU = (B+HK*Y)*Y
ONU = ANU*V(N)
KM = IDX*(NA-1)
PRINT 6, ITT, NA, KM, Y, ANU, V(N), ONU
43 CONTINUE
K2=2
K4=3
NA=NS
GO TO 201
39 K1 = 2
44 VSU = V(NS)+DT*((VSPU*V(NS)-V(NS)*V(NS)+9.8*(HSPU-H(NS)))/DX-P*V(NS)
1)*V(NS)
45 CALL GOGO (VV, VSU, HV, HSU)
H(1) = HU
V(NS) = VSU
V(1) = VU
KM = IDX*(NS-1)
Y=HSU-Z(NS)
ASU = (R+HK*Y)*Y
OSU = VSU*ASU
PRINT 6, ITT, NS, KM, Y, ASU, V(NS), OSU
PRINT 7
GO TO 180
133 GO TO 25
36 GO TO (46, 35) K2
46 VU = V(1)+DT*((V(1)*V(1)-V(1)*V(1)+9.8*(H(1)-H(3)))/(2.*DX)-P*V(1)
1)*V(1))
GO TO 202
40 GO TO (65, 66) K5
47 VSU = V(NS)+DT*((V(NS-2)*V(NS)-V(NS)*V(NS)+9.8*(H(NS-2)-H(NS)))/(2
1.*DX)-P*V(NS)*V(NS))
GO TO 45
66 GO TO (44, 47) K2
65 GO TO (47, 44) K2
42 GO TO (48, 49) K2
48 K3=2
K2=2
GO TO 50
49 K3=3

```

```

K2=1
50 DO 60 L=K3, NSPU, 2
   NA = L
   GO TO 201
38 H(L) = H(L)+DT*((A(L-1)*V(L-1)-A(L+1)*V(L+1)/DX)/T
   V(L) = V(L)+DT*((V(L)*V(L-1)-V(L)*V(L+1)+9.8*(H(L-1)-H(L+1))/DX-2.
   1*P*V(L)*V(L)
   KM = [DX*(NA-1)
   Y = H(L)-Z(L)
   ANU = (B+HK*Y)*Y
   QNU = ANU*V(L)
   PRINT A, [TT, NA, KM, Y, ANU, V(L), QNU]
60 CONTINUE
   K4 = 3
   NA = NS
   GO TO 201
180 IF (ITT-ITT) 133, 90, 90.
90 STOP
END
SUBROUTINE GOGO (DATO1, VARIN, DATO2, VARD)
  DIMENSION DATO1(40), DATO2(40)
  LL=1
78 IF (DATO1(LL)-VARIN) 79, 80, 80
79 LL=LL+1
  GO TO 78
80 BACH = DATO2(LL)
  TYCHO = DATO2(LL-1)
  BRAHC = DATO1(LL-1)
  VARD = TYCHO + (VARIN-BRAHC)*(BACH-TYCHO)/(DATO1(LL)-BRAHC)
  RETURN
END

```

MUESTRA DEL LISTADO DEL
PROGRAMA MIDAS

TRANSITO DE AVENIDAS EN CANALES TRAPECIALES CASO PARTICULAR
 SE CONOCE EL HIDROGRAMA DE ENTRADA EN LA SECCION EXTREMA ARRIBA
 Y SE MANTIENE CONSTANTE EL NIVEL EN EL EXTREMO AGUAS ABAJO

CON K,B,DX,GDX,GS,DDX
 CON GDDX,PSECF,YN,TR,TFINAL
 CON KM1,KM2,KM3,KM4,KM5,KM6
 CON KM7,KM8,KM9,KM10,KM11,KM12
 CON KM13,KM14
 IC I25,I26,I1,I2,I3,I4
 IC I5,I6,I7,I8,I9,I10
 IC I11,I12,I13,I14,I15,I16
 IC I17,I18,I19,I20,I21,I22
 IC I23,I24

PROGRAMA

G1 IT
 S1 NEG1,G1
 M1 S1,GDX
 S2 M1,GS,D1,M5
 NEG1 I2
 D1 M2,DX
 M2 S3,I25
 S3 NEG3,I25
 I25 S2
 M4 I25,I25
 M5 M4,G2
 G2 G1
 M6 G1,K
 S4 M6,B
 M7 S4,G1
 M3 M7,I25
 NEG2 I4
 S5 NEG2,G1
 M8 S5,GDDX
 S6 I25,NEG5
 M9 S6,I1
 D2 M9,DDX
 S7 M8,GS,D2,M11
 I1 S7
 M10 I1,I1
 M11 M10,G3
 NEG3 I1
 G3 I2
 M12 M13,I1
 S8 M3,M23
 D3 S8,M15
 I2 D3
 M13 I2,S9
 M14 M13,NEG3
 M15 S10,DDX
 S9 M16,B
 M16 I2,K
 S10 M16,M16,B
 NEG4 I6
 S11 NEG4,I2
 M17 S11,GDDX
 S12 I1,NEG7
 M18 S12,I3
 D4 M18,DDX
 S13 M17,GS,D4,M20
 I3 S13

TIEMPO	TIRANT	VELOC	GASTO	KILOM
0.	2.6200E 00	1.1655E 00	3.0322E 01	0.
	2.6100E 00	1.1593E 00	3.0001E 01	2.0000E 00
	2.6300E 00	1.1470E 00	3.0000E 01	4.0000E 00
	2.6600E 00	1.1290E 00	3.0001E 01	6.0000E 00
	2.7200E 00	1.0942E 00	3.0000E 01	8.0000E 00
	2.8100E 00	1.0451E 00	2.9999E 01	1.0000E 01
	2.9500E 00	9.7550E-01	3.0000E 01	1.2000E 01
	3.1500E 00	8.8800E-01	3.0000E 01	1.4000E 01
	3.3900E 00	7.9830E-01	2.9999E 01	1.6000E 01
	3.6800E 00	7.0760E-01	2.9998E 01	1.8000E 01
	4.0000E 00	6.2500E-01	3.0000E 01	2.0000E 01
	4.3400E 00	5.5260E-01	3.0003E 01	2.2000E 01
	4.7000E 00	4.8910E-01	2.9999E 01	2.4000E 01
	5.0700E 00	4.3490E-01	2.9998E 01	2.6000E 01
6.0000E 02	2.6400E 00	1.2189E 00	3.2051E 01	0.
	2.6022E 00	1.1132E 00	2.8687E 01	2.0000E 00
	2.6067E 00	1.2127E 00	3.4752E 01	4.0000E 00
	2.6982E 00	9.2542E-02	2.5088E 00	6.0000E 00
	2.5444E 00	1.0354E 00	2.5861E 01	8.0000E 00
	2.7942E 00	9.7568E-01	2.7783E 01	1.0000E 01
	2.9434E 00	9.6191E-01	2.9488E 01	1.2000E 01
	3.1474E 00	8.8620E-01	2.9903E 01	1.4000E 01
	3.3899E 00	8.0110E-01	3.0103E 01	1.6000E 01
	3.6795E 00	7.0773E-01	2.9997E 01	1.8000E 01
	3.9987E 00	6.2957E-01	3.0205E 01	2.0000E 01
	4.3407E 00	5.5755E-01	3.0279E 01	2.2000E 01
	4.6980E 00	4.9055E-01	3.0068E 01	2.4000E 01
	5.0700E 00	4.4514E-01	3.0705E 01	2.6000E 01
1.2000E 03	2.6900E 00	1.3588E 00	3.6680E 01	0.
	2.5668E 00	9.5908E-01	2.4248E 01	2.0000E 00
	3.0700E 00	1.1985E 00	3.9020E 01	4.0000E 00
	2.8370E 00	8.5068E-02	2.4751E 00	6.0000E 00
	2.2688E 00	1.0897E 00	2.3247E 01	8.0000E 00
	2.7468E 00	7.7577E-01	2.1565E 01	1.0000E 01
	2.8955E 00	9.2020E-01	2.7560E 01	1.2000E 01
	3.1342E 00	8.6005E-01	2.8847E 01	1.4000E 01
	3.3853E 00	7.9463E-01	2.9800E 01	1.6000E 01
	3.6778E 00	7.0795E-01	2.9986E 01	1.8000E 01
	3.9955E 00	6.2946E-01	3.0163E 01	2.0000E 01
	4.3414E 00	5.6095E-01	3.0471E 01	2.2000E 01
	4.6953E 00	4.9248E-01	3.0160E 01	2.4000E 01
	5.0700E 00	4.4512E-01	3.0703E 01	2.6000E 01
1.8000E 03	2.8000E 00	1.5649E 00	4.4693E 01	0.
	2.5933E 00	8.7892E-01	2.2542E 01	2.0000E 00
	3.1917E 00	1.0634E 00	3.6612E 01	4.0000E 00
	2.9830E 00	6.1164E-01	1.9111E 01	6.0000E 00
	2.1676E 00	1.2552E 00	2.5170E 01	8.0000E 00
	2.7214E 00	6.2932E-01	1.7267E 01	1.0000E 01
	2.8063E 00	8.7911E-01	2.5187E 01	1.2000E 01
	3.1050E 00	7.9342E-01	2.6255E 01	1.4000E 01
	3.3651E 00	7.7040E-01	2.8641E 01	1.6000E 01
	3.6712E 00	6.9854E-01	2.9509E 01	1.8000E 01
	3.9901E 00	6.2483E-01	2.9881E 01	2.0000E 01
	4.3402E 00	5.5970E-01	3.0390E 01	2.2000E 01
	4.6944E 00	4.9371E-01	3.0227E 01	2.4000E 01

	MAXIMA	MINIMA
IT	1.8000E 04	0.
TR	6.0000E 02	6.0000E 02
MININT	-1.0000E 37	1.0000E 37
K	1.5000E 00	1.5000E 00
B	6.0000E 00	6.0000E 00
DX	2.0000E 03	2.0000E 03
GDX	4.9000E-03	4.9000E-03
GS	1.9600E-03	1.9600E-03
DDX	4.0000E 03	4.0000E 03
GDDX	2.4500E-03	2.4500E-03
PSECF	-7.0500E-04	-7.0500E-04
YN	5.0700E 00	5.0700E 00
TFINAL	1.8000E 04	1.8000E 04
KM1	0.	0.
KM2	2.0000E 00	2.0000E 00
KM3	4.0000E 00	4.0000E 00
KM4	6.0000E 00	6.0000E 00
KM5	8.0000E 00	8.0000E 00
KM6	1.0000E 01	1.0000E 01
KM7	1.2000E 01	1.2000E 01
KM8	1.4000E 01	1.4000E 01
KM9	1.6000E 01	1.6000E 01
KM10	1.8000E 01	1.8000E 01
KM11	2.0000E 01	2.0000E 01
KM12	2.2000E 01	2.2000E 01
KM13	2.4000E 01	2.4000E 01
KM14	2.6000E 01	2.6000E 01
I25	1.9080E 00	7.1807E-01
I26	7.0644E-01	3.3230E-01
I1	1.5266E 00	6.6216E-01
I2	3.8818E 00	2.5627E 00
I3	1.4621E 00	7.7966E-01
I4	4.0070E 00	2.6300E 00
I5	1.2061E 00	-1.7490E-02
I6	4.1185E 00	2.6600E 00
I7	1.7302E 00	1.0302E 00
I8	3.1949E 00	2.1665E 00
I9	1.3296E 00	6.2406E-01
I10	3.6393E 00	2.7214E 00
I11	1.3997E 00	8.7611E-01
I12	3.4274E 00	2.7144E 00
I13	1.1802E 00	6.9694E-01
I14	3.6702E 00	3.0636E 00
I15	1.1441E 00	7.1884E-01
I16	3.7272E 00	3.2645E 00
I17	1.0039E 00	5.9283E-01
I18	3.9730E 00	3.6208E 00
I19	9.5730E-01	5.6328E-01
I20	4.1693E 00	3.9267E 00
I21	8.5309E-01	4.4469E-01
I22	4.4591E 00	4.3092E 00
I23	7.9566E-01	4.1512E-01
I24	4.7392E 00	4.6754E 00
G1	3.8798E 00	2.6200E 00
S1	3.2140E-01	-3.0131E-01
NEG1	-2.5627E 00	-3.8818E 00
M1	1.5748E-03	-1.4764E-03
S2	3.7307E-04	-2.5007E-04
D1	6.0188E-04	2.1142E-06