



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

Facultad de Ingeniería  
Dirección  
Núm. 73-  
Exp. Núm. 73/214.2/1

RECEBIDO  
FEB 1966

A la Pasante señorita Norma Gela MONDRAGON NUÑEZ  
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el señor profesor Ingeniero Odón de Buen L., para que lo desarrolle como tesis en su examen profesional de Ingeniero MECANICO ELECTRICISTA.

ESTABILIDAD DE CIRCUITOS NO LINEALES Y APLICACION  
A CIRCUITOS CON DIODOS DE TUNEL, EN MAQUINAS COM-  
PUTADORAS.

"El desarrollo de la tesis deberá hacerse de acuerdo con los siguientes incisos:

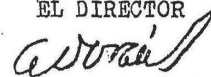
- 1.- Estudio de los conceptos básicos de la topología de circuitos.
- 2.- Formulación de las leyes de Kirchoff en relación con la topología de circuitos.
- 3.- Estudio de las funciones de Liapunov y su aplicación a la estabilidad de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- 4.- Análisis de la estabilidad de soluciones estacionarias de circuitos con elementos no lineales.
- 5.- Aplicación de los resultados anteriores a un circuito biestable con diodo de túnel, empleados en máquinas computadoras digitales."


Ruego a usted tomar debida nota de que en cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar examen profesional; así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares, en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Muy atentamente,

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
México, D.F. 11 de Marzo de 1966.

EL DIRECTOR

  
Ing. Antonio Dovalí J.

  
ADJ'MMO'eag.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**A COATLICUE**

Agradezco al Dr. Zdenek Vorel Mancl, investigador  
visitante en el Centro de Investigación y de Estu  
dios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional  
el haber dirigido este trabajo.

En este trabajo se hace el estudio de las condiciones necesarias para que las soluciones de un circuito no lineal que contiene diodos de tunel sean estables, ésto se logra aplicandole a una determinada "función de potencial" la idea de estabilidad de Liapunov.

**ESTUDIO DE LOS CONCEPTOS BASICOS DE LA  
TOPOLOGIA DE CIRCUITOS**

### 1.1 Teorema sobre Algebra lineal

Sea  $A$  una matriz de orden  $s \times r$  y rango  $k < r$ ; entonces existe una matriz  $X$  de orden  $r \times l$ ;  $l = r - k$ ; con rango máximo tal que satisface las siguientes condiciones:

1. Si  $x$  es un vector de dimensión  $r$  que satisface la ecuación

$$(1) \quad Ax = 0$$

entonces existe un vector  $y$  de dimensión  $l$  tal que

$$(2) \quad x = Xy$$

2. Si  $y$  es cualquier vector de dimensión  $l$  entonces el vector  $x$  definido por (2) satisface la ecuación (1); además:

- a)  $Ax = 0$  y las columnas de  $X$  forman un conjunto completo de soluciones linealmente independientes de (1).
- b) Para cada par de vectores  $x; y$ , que satisfagan (2) la equivalencia  $x \neq 0; y \neq 0$  es verdadera.
- c)  $X$  puede ser cualquier matriz, cuyas columnas formen un conjunto completo de soluciones linealmente independientes de la ecuación (1).

## 1.2 Topología y variables de una malla

Una malla es un concepto idealizado en la teoría de los circuitos que puede ser definida como un conjunto de puntos, llamados nodos y un conjunto de líneas que los conectan, llamadas ramas. No es de nuestra atención especial cuando nodos y ramas estén en un plano o cuando las ramas puedan ser descritas por líneas rectas.

CLASIFICACION DE LAS MALLAS.- Las mallas pueden constar únicamente de un elemento R, L, ó C; de dos RL, LC ó RC y el caso general en el cual existen los tres elementos R, L y C.

GRAFICA DE UNA MALLA.- Dejando a un lado las clases de elementos que existen en una malla, es importante saber como, de acuerdo con su geometría, los elementos están agrupados e interconectados en sus terminales; así dibujamos un esquema de ella sin tomar en cuenta la clase de elementos que intervienen en la malla. A este esquema lo llamamos gráfica de la malla.

GRAFICAS ORIENTADAS.- Definición. Sea  $H = \{h_1, h_2, \dots, h_r\}$  un conjunto finito, no vacío de elementos llamados ramas.

Sea  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$  un conjunto finito, no vacío de elementos llamados nodos.

Sea  $T$  una función de  $H$  en el producto cartesiano  $U \times U$  tal que si  $h_i \in H$ , entonces



$$T(h_1) = (u_{1_1}, u_{1_2})$$

$$u_{1_1} \in U$$

$$u_{1_2} \in U \text{ con } u_{1_1} \neq u_{1_2}$$

Nota. El producto cartesiano  $U \times U$  es el conjunto de todas las parejas ordenadas  $(u_i, u_j)$  tales que  $u_i \in U$  y  $u_j \in U$ .

Los nodos  $u_{1_1}, u_{1_2}$  se llamarán nodo inicial y nodo terminal respectivamente de la rama  $h_1$ . Decimos que  $h_1$  está orientada de  $u_{1_1}$  a  $u_{1_2}$ . La rama  $h_1 \in H$  y el nodo  $u_j \in U$  son incidentes si  $u_j$  es el nodo inicial o el nodo terminal de  $h_1$ . Dos ramas distintas  $h_i, h_j \in H$  son adyacentes si existe  $u_k \in U$  tal que iniciada en  $h_i$  y en  $h_j$ . La terna  $(H, U, T) = G$  será una gráfica orientada si para todo  $u_j \in U$  existe  $h_1 \in H$  tal que  $u_j$  y  $h_1$  sean incidentes. En este caso  $h_1$  y  $u_j$  serán una rama y un nodo de la gráfica orientada respectivamente. Una gráfica  $G_1 = (H_1, U_1, T_1)$  se llamará una subgráfica de  $G = (H, U, T)$  si  $H_1 \in H$ ,  $U_1 \in U$  y  $T_1(h_1) = T(h_1)$ . En este caso escribimos  $G_1 \subset G$ .

CICLOS.- Definición. La expresión  $K = \sum_{i=1}^r c_i h_i$  donde  $c_i =$  números complejos. se llama l-complejo.

Si  $K' = \sum_{i=1}^r c'_i h_i$  es también un l-complejo, se define

$$\alpha K + \alpha' K' = \sum_{i=1}^r (\alpha c_i + \alpha' c'_i) h_i$$

donde  $\alpha, \alpha', c_1, c_i^i$  son números complejos.  $K$  es cero si y solo si  $c_1 = 0, i = 1, 2, \dots, r$ . Los 1-complejos  $K_1, K_2, \dots, K_q$  son linealmente independientes si  $\sum_{i=1}^q \alpha_i K_i = 0$  implica  $\alpha_i = 0, i = 1, 2, \dots, q$ .

La expresión  $L = \sum_{i=1}^s c_i u_i$  donde  $c_i$  son números complejos se llama 0-complejo. Las nociones de  $\alpha L + \alpha' L', L = 0$  e independencia lineal se definen en forma análoga.

En el sistema de todos los 1-complejos definimos la operación  $\partial$  por medio de la relación  $\partial K = \sum_{i=1}^r c_i \partial h_i$  donde

$$\partial h_i = u_{i_2} - u_{i_1}$$

si  $T(h_i) = (u_{i_1}, u_{i_2})$  si  $K = 0$  para algún 1-complejo, entonces  $K$  se llamará ciclo.

**MATRIZ INCIDENTE.- Definición.** Matriz incidente o matriz de incidencia  $a = [a_{ik}]$  es una matriz con  $R$  filas y  $S$  columnas construida de acuerdo con:

$a_{ik} = +1$  si  $u_k = u_{i_2}$  es decir, si la rama  $ik$  tiene el nodo  $u_k$  como final

$a_{ik} = -1$  si  $u_k = u_{i_1}$  si la rama  $ik$  tiene el nodo  $u_k$  como inicial

$a_{ik} = 0$  si  $u_{i_1} \neq u_k \neq u_{i_2}$ .

La matriz  $a = [a_{ik}]$  tiene  $R$  renglones y  $S$  columnas y en cada renglón solo hay dos elementos distintos de cero  $+1,$

-1 ya que cada rama une dos nodos exactamente de acuerdo con la definición de gráfica orientada  $r \geq 1$ ,  $s \geq 2$  y por lo tanto rango de  $a$  es  $\geq 1$ .

Lema 1. Hagamos

$$h' = [h_1, h_2, \dots, h_r]; h_i \in H$$

$$u' = [u_1, u_2, \dots, u_s]; u_k \in U$$

si  $K = [K_{ik}]$  es cualquier matriz cuyos elementos son 1-complejos definimos  $\partial K = [\partial K_{ik}]$ . De estas definiciones obtenemos el Lema 1,

$$\partial g = au.$$

Demostración. Sea  $au = [b_1]$  entonces

$$b_1 = \sum_{K=1}^s a_{ik} u_k = u_{i2} - u_{i1} = \partial h_i$$

de donde  $\partial h = au = [\partial h_i]$ .

Lema 2. Si  $K$  es 1-complejo podemos escribir  $K = c'h$  donde  $c' = [c_1, c_2, \dots, c_r]$  con  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) números complejos.

Lema. Sea  $K = c'h$ ;  $K$  es un ciclo si y solo si  $a'c = 0$ .

Demostración.  $\partial K = c' \partial h$

por Lema 1:  $c' \partial h = c'(au) = (c'a)u = (a'c)'u$  entonces:  
si  $a'c = 0$  obviamente  $\partial K = (a'c)'u = 0$ , si  $\partial K = (a'c)'u = 0$   
de la definición de  $L = 0$  se sigue que  $a'c = 0$ .

Teorema 2. Rango de  $a$  menor que  $r$  ( $r =$  número de renglones de matriz incidente), hagamos  $A = a'$ , sea  $X$  la matriz del Teorema 1.

Teorema. Los elementos del vector  $X'h$  forman un conjunto completo de ciclos linealmente independientes.

Demostración.  $\partial X'h = X' \partial h = X'au = (a'X)'u$

por el Teorema 1:  $a'X = 0$  entonces  $\partial X'h = 0$ .

Supongamos que hay un vector  $\alpha$  tal que  $\alpha'X'h = 0$  de la definición de  $l$ -complejo igual a cero, se sigue de la última ecuación que  $\alpha'X' = 0$  de donde  $X\alpha = 0$ .

Como  $X$  tiene rango máximo, entonces  $\alpha = 0$  y consecuentemente los elementos de  $X'h$  son linealmente independientes.

Ya se demostró que los elementos de  $x'h$  son ciclos linealmente independientes. Se demostrará ahora que cualquier otro ciclo se puede expresar como una combinación lineal de estos.

Sea  $c'h$  un ciclo cualquiera, por el Teorema 1, existe un vector  $y$  tal que  $c = Xy$ , pero esto implica que  $c'h = y'X'h$  de donde se ve que ese ciclo queda expresado como una combinación lineal de los elementos de  $X'h$ .

MALLAS.- Sea  $K = \sum_{i=1}^r c_i h_i$  un  $l$ -complejo con  $c_i = 0, 1, -1$

únicamente. Sea  $G_K$  una subgráfica de  $G = (H, U, T)$  con la siguiente propiedad:

$h_1 \in H$  es una rama de  $G_K$  si y solo si  $c_1 \neq 0$ .

Sea  $G_K^*$  una gráfica la cual se obtiene de  $G_K$  cambiando la orientación de  $h_i$  siempre que  $c_i = -1$  un  $l$ -complejo

$K = \sum_{i=1}^r c_i h_i$  con  $c_i \in \{0, 1, -1\}$  se llama una cadena si  $G_K^*$

tiene la siguiente propiedad:

Las ramas  $h_i \in H$  para las cuales  $c_i \neq 0$  pueden ordenarse para formar una sucesión  $h_1, \dots, h_p$ . Siendo el nodo terminal de  $h_{i,j}$  el nodo inicial de  $h_{i,j+1}$ ;  $j = 1, 2, \dots, p-1$  un nodo  $U_j$  de  $G = (H, U, T)$  será de orden  $n$  si  $U_j$  es incidente con exactamente  $n$  ramas de  $H$ .

Una cadena  $K$  es elemental si cada nodo de la gráfica correspondiente  $G_K^*$  es, a lo más, de orden 2, esto es, si cada nodo de  $K$  es incidente con a lo más dos ramas de  $K$ .

Una cadena elemental que es simultáneamente un ciclo se llama una malla.

De las definiciones anteriores se deduce que el nodo inicial de la primera rama de  $G_K^*$  coincide con el nodo terminal de su última rama.

Lema 3. Una combinación lineal de ciclos es un ciclo.

Demostración. Sean los ciclos  $K_1, K_2, \dots, K_q$ . Sea  $\sum_{i=1}^q \alpha_i K_i$

donde  $\alpha_i$  son complejos, una combinación lineal de los ciclos  $K_1, K_2, \dots, K_g$  entonces:

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i K_i = \sum_{i=1}^q \alpha_i (c_i' h): \text{ por Lema 2.}$$

Aplicando la operación  $\partial$ :

$$\partial \sum_{i=1}^q \alpha_i K_i = \sum_{i=1}^q \alpha_i (c_i' \partial h) = \sum_{i=1}^q \alpha_i c_i' (a u)$$

$$= \sum_{i=1}^q \alpha_i (c_i' a) u = \sum_{i=1}^q \alpha_i (a' c_i)' u$$

como  $K_i (=1, 2, \dots, q)$  son ciclos,  $a' c_i = 0$ , entonces

$$\partial \sum_{i=1}^q \alpha_i K_i = 0.$$

Lo que significa que  $\sum_{i=1}^q \alpha_i K_i$  es un ciclo.

Lema 4. Sea  $c' h$  un ciclo con  $c$  tal que sólo dos de sus componentes sean distintas de cero. Entonces  $c' h = \gamma K$  donde  $\gamma$  es un número y  $K$  es una malla.

Demostración. Sea  $c' h$  un ciclo con  $c'$  tal que sólo  $c_i$  y  $c_j$  sean distintas de cero, la condición  $a' c = 0$  se pue-

de escribir

$$(1) \quad a_i c_i + a_j c_j = 0$$

donde  $a_K$  representa el renglón  $K$  de la matriz  $a$ ; como  $c_i$  y  $c_j \neq 0$  de (1) se sigue que:

$$a_{im} = 0 \iff a_{jm} = 0$$

si  $a_{im} = \pm 1$  y  $a_{jm} = \pm 1$  entonces de la ecuación (1) obtenemos

$$(2) \quad c_i + c_j = 0$$

si  $a_{im} = \pm 1$  y  $a_{jm} = \mp 1$  tenemos

$$(3) \quad c_i - c_j = 0$$

así obviamente las ecuaciones (2) y (3) representan todos los casos posibles.

En el caso de la ecuación (2) existen dos nodos  $u_{a_1}, u_{a_2} \in U$  tales que cada uno de ellos es el nodo inicial o terminal de ambas ramas  $h_i$  y  $h_j$ . Obviamente en este caso  $c^i h = \pm c_j (h_i - h_j)$ . En el caso de la ecuación (3) obtenemos análogamente  $c^i h = \pm c_j (h_i + h_j)$ . Estas dos últimas igualdades prueban el lema.

Teorema 3. Un ciclo se puede expresar como una combinación

lineal de mallas.

Sea  $K = \sum_{i=1}^r c_i h_i$  un ciclo, entonces existen mallas

$$K_i = \sum_{j=1}^r e_{ij} h_j, \quad i = 1, 2, \dots, l \text{ tales que}$$

$$K = \sum_{i=1}^l d_i K_i, \text{ además } e_{ij} \neq 0 \iff c_j \neq 0 \text{ para}$$

$$i = 1, 2, \dots, l$$

$$j = 1, 2, \dots, r$$

Demostración. Sea  $K = \sum_{i=1}^r c_i h_i$  un ciclo. Sea

$H = \{h_1, h_2, \dots, h_r\}$ , sea  $h_{\alpha_1}$  la primera rama del conjunto  $H$  tal que  $c_{\alpha_1} \neq 0$ . Ya que  $c \cdot h$  es un ciclo existe  $h_{\alpha_2}$  con  $c_{\alpha_2} \neq 0$  tal que es adyacente a  $h_{\alpha_1}$ . Prosiguiendo de esta manera se encuentra que un nodo de la rama  $h_{\alpha_p}$  es incidente con alguna rama  $h_{\alpha_m}$  para alguna  $m = 1, 2, \dots, p-1$ .

A partir del conjunto  $\{h_{\alpha_m} \dots h_{\alpha_p}\}$  el cual denotaremos  $\{h_{\alpha_2}, h_{\alpha_3}, \dots\}$  podemos formar la malla  $K = \sum_{j=1}^r e_{ij} h_j$  dando valores apropiados a  $e_{ij}$ .

Ahora formemos el ciclo  $K - c_{\alpha_1} h_{\alpha_1} = \sum_{i=1}^r c_i' h_i$ , (ver Lema 2)

de manera que éste no contenga la rama  $h_{\alpha_m} = h_{\alpha_1}$ . A partir

de éste 1-complejo formamos análogamente la sucesión

$$\{h_{\alpha_2}, h_{\alpha_3}, \dots\} \text{ y la malla } K = \sum_{j=1}^r e_{2j} h_j.$$



Ahora construimos el ciclo  $K - c_{\alpha_1^1} K_1 - c_{\alpha_1^2} K_2$  de modo que no esté contenido en él la rama  $h_{\alpha_1^2}$ . Prosiguiendo de esta manera obtenemos el ciclo  $K - c_{\alpha_1^1} K_1 - c_{\alpha_1^2} K_2 - \dots - c_{\alpha_1^{\ell-2}} K_{\ell-1}$  el cual tiene dos ramas.

Por el lema 4 podemos escribir

$$K - c_{\alpha_1^1} K_1 - c_{\alpha_1^2} K_2 - \dots - c_{\alpha_1^{\ell-1}} K_{\ell-1} - \gamma K_\ell$$

Despejando  $K$  obtenemos

$$K = \gamma K_\ell + c_{\alpha_1^1} K_1 + c_{\alpha_1^2} K_2 + \dots + c_{\alpha_1^{\ell-1}} K_{\ell-1} = \sum_{i=1}^{\ell} d_i K_i$$

donde

$$c_{\alpha_1^1} = d_1, c_{\alpha_1^2} = d_2, \dots, c_{\alpha_1^{\ell-1}} = d_{\ell-1}, \gamma = d_\ell$$

de la forma en que hemos construido las mallas se deduce que  $e_{ij} = 0 \iff c_j = 0$ .

DEFINICION DE ARBOL.- Una subgráfica  $\bar{G}$  de  $G$  es un árbol,

si para toda malla  $\sum_{i=1}^r c_i h_i$  existe al menos un índice

$\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, r$  para el cual  $h_\alpha$  no es una rama de  $\bar{G}$ . Brevemente (aunque en forma imprecisa) se puede decir que un árbol de  $G$ , es una subgráfica sin mallas.

**FORMULACION DE LAS LEYES DE KIRCHOFF EN  
RELACION CON LA TOPOLOGIA DE CIRCUITOS**

Ley de nodos. La suma algebraica de todas las corrientes que entran a un nodo es igual a cero.

$$a'_{i} = 0$$

de donde  $a'$  es la matriz de incidencia.

Ley de mallas. La suma de las tensiones eléctricas adecuadamente orientadas en cada circuito es igual a cero.

De nuestra definición de ciclo

$$c_i' h_i = 0$$

y por el Lema 2

$K = c'h$  es un ciclo si y solo si  $a'c = 0$ ,

nos queda

$$c'a = 0$$

$$c'av = c'v$$

entonces

$$c'v = 0$$

**ESTUDIO DE LAS FUNCIONES DE LIAPUNOV Y SU  
APLICACION A LA ESTABILIDAD DE ECUACIONES  
DIFERENCIALES ORDINARIAS**

### 3.1 Sistema autónomo de ecuaciones diferenciales

En cualquier aplicación posible se nos presentan dos clases de ecuaciones diferenciales. El primer tipo es una ecuación de orden  $n$

$$(*) \quad x^{(n)} = f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}, t)$$

en donde  $x^{(k)}$  es la  $k$ -ésima derivada de  $x$  respecto al tiempo.

El segundo tipo es un sistema de  $n$  ecuaciones de primer orden

$$(**) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \dot{x}_2 &= X_2(x_1, \dots, x_n, t) \\ \dot{x}_n &= X_n(x_1, \dots, x_n, t) \end{aligned}$$

En realidad el primer tipo puede ser reducido al segundo introduciendo las nuevas variables  $x_1, \dots, x_n$  por medio de las relaciones:

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_3 = \ddot{x}, \dots, x_n = x^{(n-1)}$$

esta substitución hace posible reemplazar al sistema (\*) por

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

⋮

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

que es un caso especial del sistema (\*\*).

Si en segundo tipo nosotros interpretamos  $x_1, \dots, x_n$  como las componentes de un vector  $x$  con  $n$  componentes; y  $X_1, \dots, X_n$  como las de un vector  $X$ ; obtenemos un aspecto más simple

$$(3.1.1) \quad \dot{x} = X(x, t)$$

Es posible que  $X$  depende de  $x$  únicamente y no depende del tiempo; entonces la ecuación (3.1.1) toma la forma

$$(3.1.2) \quad \dot{x} = X(x)$$

un sistema de esta naturaleza se llama "autónomo".

### 3.2 Estabilidad de sistemas autónomos

Tenemos el sistema autónomo (3.1.1) y el estado de equilibrio  $x = a$  cuya estabilidad se tratará. Es conveniente

para principiar tomar como punto fijo par nuestra discusión al origen; esto requiere hacer una transformación simple de coordenadas  $x^* = x - a$  hacemos esto reemplazando después  $x^*$  nuevamente por  $x$  y tendremos el sistema básico

$$(3.2.1) \quad \dot{x} = X(x) \quad X(0) = 0$$

y nuestro tema de discusión se reduce a la estabilidad del origen.

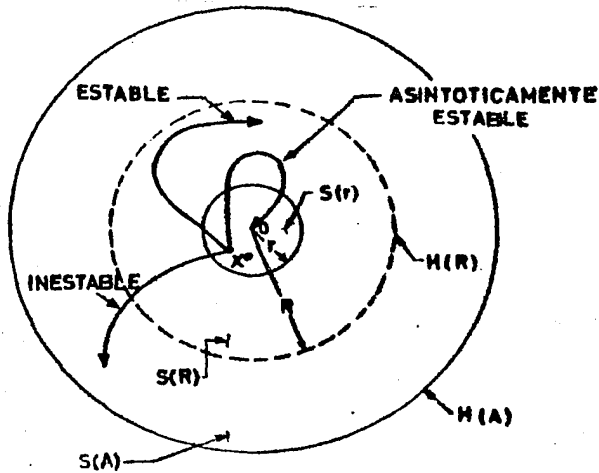
CONSIDERACIONES.- Denotaremos por  $S(R)$  la región esférica  $\|x\| < R$  y por  $H(R)$  la esfera  $\|x\| = R$ .

La región esférica cerrada anular,  $r \leq \|x\| \leq R$  por  $S_1^R$ . Supondremos que en una cierta región esférica abierta  $\Omega: \|x\| < S(A)$  el teorema de existencia vale para (3.2.1) y en particular nosotros notamos que las derivadas parciales  $\frac{\partial X_i}{\partial X_j}$  existen todas y son continuas en  $\Omega$ . También hacemos notar que a través de cada punto  $x$  de  $\Omega$  para una trayectoria única  $g$  del sistema (3.1.1). Designaremos por  $g^+$  la parte descrita por  $x(t)$  cuando  $t \geq 0$ ; y por  $g^-$  la parte descrita por  $x(t)$  cuando  $t \leq 0$ .

Entonces diremos que el origen es: Estable siempre y cuando para cada  $R < A$  existe una  $r \leq R$  tal que si una trayectoria (un movimiento)  $g^+$  se inicia en un punto  $x^0$  de la región esférica  $S(r)$ , entonces él permanecerá en la región esférica  $S(R)$  desde ése momento en adelante, es lo mismo que si una trayectoria empieza en  $S(r)$  nunca alcanzará la esfe-



ra vecina  $H(R)$  de  $S(R)$ .



**ASINTOTICAMENTE ESTABLE.**- Cuando es estable y además cada trayectoria  $g^+$  que empezando dentro de algún  $S(R_0)$ ,  $R_0 > 0$  tiende al origen conforme el tiempo, crece indefinidamente.

**INESTABLE.**- Cuando para alguna  $R$  y cualquier  $r$ , no importa que tan pequeño sea, siempre existe en la región esférica  $S(r)$ , un punto  $x$  tal que la trayectoria  $g^+$  a través de  $x$  alcance a la esfera vecina  $H(R)$ .

### 3.3 Un tipo especial de función

Decimos que la función escalar  $V(x)$  siendo positiva\*) de-

\*) Positiva definida quiere decir que todos sus valores son positivos menos en el punto cero; donde su valor es cero.

finida y con las siguientes propiedades:

- a)  $V(x)$  y sus primeras derivadas parciales son continuas en una cierta región abierta  $\Omega$  al rededor del origen.
- b)  $V(0) = 0$
- c) Fuera del origen (y siempre en  $\Omega$ )  $V(x)$  es positivo. En otras palabras,  $V$  es no-negativo y se anula solamente en el origen. El origen es un mínimo aislado de  $V$ . Es muy importante para nuestro estudio.

Como  $V$  tiene primeras derivadas parciales, tiene un gradiente,  $\text{grad } V$ , y a lo largo de las trayectorias de (3.2.1) tenemos:

$$\dot{V} = X \text{ grad } V$$

si además  $\dot{V} \leq 0$  en  $\Omega$ , entonces  $V$  es una Función de Liapunov.

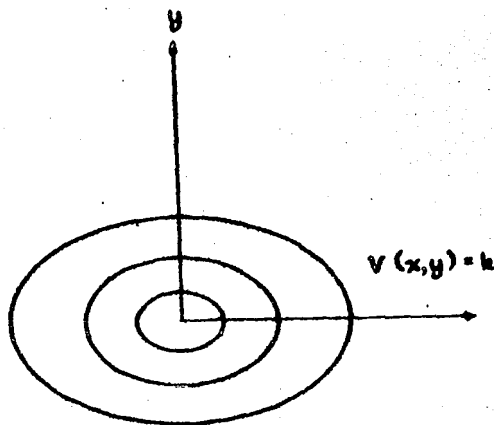
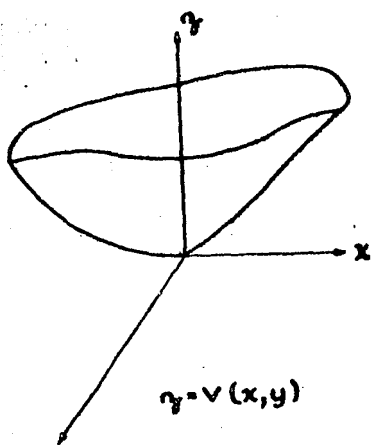
### 3.4 Interpretación geométrica de la función $V(x)$

Introducimos una nueva  $Z = V(x)$  y consideramos la naturaleza de este lugar en el espacio  $(x_1, \dots, x_n, Z)$  ó  $(x, z)$ . Por facilidad tomamos  $n = 2$  y en lugar de denotar a las coordenadas por  $x_1, x_2$  lo hacemos por  $x, y$ , quedándonos  $Z = U(x, y)$  y sabemos que es positiva definida cuando está cerca del origen.

Como  $V \geq 0$  para  $x, y$  pequeñas y  $V = 0$  sólo cuando  $x = y = 0$ , la superficie tiene el aspecto de un espejo para-

bólico apuntando hacia arriba. Si  $V$  es negativa definida lo único que sucede es que apunta hacia abajo.

En el caso  $n$ -dimensional, la situación es exactamente la misma y tendremos  $n$ -dimensionales espejos parabólicos.



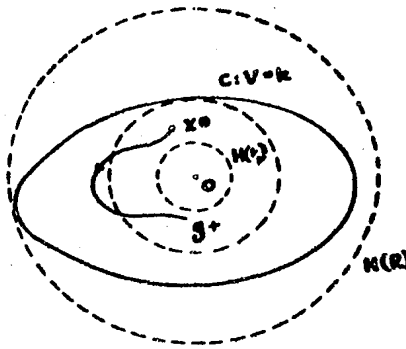
Una segunda representación geométrica de la función  $V(x)$  es igualmente interesante tomando nuevamente  $n = 2$  y  $x, y$  como las coordenadas cartesianas usuales, las curvas de nivel  $V(x,y) = k$  representan un conjunto de óvalos alrededor del origen. Puede pensarse como secciones del espejo parabólico intersectadas por planos horizontales proyectadas sobre el plano  $x, y$  (el plano  $Z = 0$ ). Para  $n > 2$  la situación es idéntica.

### 3.5 Teoremas de estabilidad de Liapunov

Los teoremas de Liapunov son la generalización de la idea de que si cerca del estado de equilibrio de un sistema físico, la energía del sistema siempre es decreciente, entonces el equilibrio es estable. Las funciones de Liapunov son simplemente una extensión del concepto de energía. La idea central del método de Liapunov es detectar la estabilidad para un sistema autónomo por medio de las propiedades de una función  $V(x)$  de Liapunov y hacer esto no directamente del conocimiento de las soluciones, sino directamente del sistema (3.2.1).

I. Teorema de Estabilidad. Si existe una función  $V(x)$  de Liapunov en alguna vecindad  $\Omega$  del origen, entonces el origen es estable.

II. Teorema de Estabilidad Asintótica. Si  $-\dot{V}$  es igualmente positiva definida en  $\Omega$ , entonces la estabilidad es asintótica.



Los óvalos  $V(x) = k$  son dibujados con líneas llenas y las esferas  $A(R)$  con líneas interrumpidas. Dado  $R < A$  y  $H(R)$ , se puede encontrar una constante  $k$  tal que el óvalo  $C$  definido por  $V(x) = k$  queda exactamente dentro de  $H(R)$  y entonces hay una  $r > 0$ , tal que  $A(r)$  queda dentro de  $C$ . Tomamos ahora cualquier trayectoria  $g^+$  cuyo punto inicial  $x^0$  está en  $S(r)$ , el interior de  $H(r)$ . En  $x^0$  tenemos  $V(x^0) < k$ , ahora como  $V$  es no-creciente a lo largo de las trayectorias,  $g^+$  nunca alcanzará  $C$  y por lo tanto nunca alcanzará a  $H(R)$ . Entonces cualquier trayectoria que empieza en  $S(r)$  debe permanecer en  $S(R)$ . Y esto significa estabilidad. Dado  $R$  la existencia de  $r$  es clara. Como  $V$  es positiva y continua sobre  $A(R)$ , se deduce de la compacidad de  $H(R)$  que  $V$  tiene un mínimo positivo  $k$  sobre  $H(R)^*$ , esto es,  $V(x) \geq h$  sobre  $H(R)$ . Ahora  $V(x)$  es continua y se anula en el origen. Por lo tanto, para  $r$  suficientemente pequeña  $V(x) < k$  para  $x$  en  $S(r)$ . Proposición I se conserva.

Bajo las condiciones de II,  $V(x)$  decrece a lo largo de  $g^+$ .  $V$  no puede encerrarse arriba de algún valor  $> 0$ , por que si se pudiera  $-V$  debería tender a cero pues de cierta esfera  $H(r_1)$  lo cual está fuera de lo establecido por el hecho de que es positiva definida y por lo tanto tiene un mínimo positivo  $m$  en la región anular  $+S_{r_1}^R$ ; entonces  $V(x)$

---

\*) Un conjunto en  $R_n$  (espacio euclidiano n-dimensional) es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

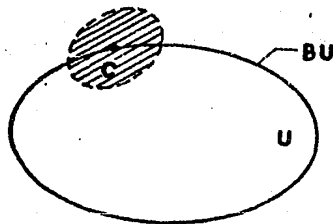
tiende firmemente a cero a lo largo de  $g^+$  y ésto puede suceder solamente si  $g^+$  tiende al origen, ésto es estabilidad asintótica.

**CONJUNTO CERRADO.**- Un conjunto cerrado  $F$  es simplemente el exterior de algún conjunto abierto  $U$ .

**CONJUNTO ABIERTO.**- Es un conjunto  $U$  con la propiedad que si un punto  $C$  esta en  $U$ , entonces la totalidad de la región esférica  $S(c,r)$  para alguna  $r$ , esta también en  $U$ .

**LIMITE BU DE UN CONJUNTO ABIERTO  $U$ .**- La totalidad de los puntos  $C$  que no estan en  $U$ , pero que cada región esférica  $S(c,r)$  contiene puntos de  $U$ .

**PROPIEDAD DE LOS CONJUNTOS COMPACTOS.**- Sea  $A$  compacto y sea  $f(x)$  una función (escalar) continua sobre  $A$ . Pueden encontrarse dos números  $\alpha$  y  $\beta$  tal que  $\alpha \leq f(x) \leq \beta$  para cada punto  $x$  de  $A$ . Además si  $f(x)$  es positivo en cada punto de  $A$  entonces se pueden elegir  $\alpha$  y  $\beta$  de tal modo que sean positivos.



### 3.6 Extensión de la estabilidad asintótica

En aplicaciones es obvio que la estabilidad asintótica es más importante que la estabilidad. La semejanza deseable es estabilidad asintótica a lo largo o como si tuvieramos estabilidad completa. Si no lo podemos asegurar se puede dejar con la aproximación de que cuando las perturbaciones no son demasiado grandes el sistema tiende a regresar al equilibrio queriendo decir que necesitamos saber algo acerca del tamaño de la región de estabilidad asintótica.

Aquí tenemos la diferencia básica entre sistemas lineales y no lineales: Para determinar estabilidad práctica, las aproximaciones lineales son insatisfactorias, definitivamente. En sistemas lineales la estabilidad es siempre completa, mientras que solamente en los sistemas no lineales puede no existir. En otras palabras, para determinar las posibles restricciones a la estabilidad asintótica, debemos examinar las nonlinearidades.

Definiciones. CONJUNTOS LIMITE.- Si  $x(t)$  es una solución de (3.2.1) su conjunto límite positivo  $\Gamma^+$  si siempre la curva  $x(t)$  tiende a la solución con tiempo infinito o  $p$  está en  $\Gamma^+$  si existe una secuencia creciente de tiempos  $t_n \rightarrow \infty$  con  $n$  y tal que  $x(t_n) \rightarrow p$  con  $n \rightarrow \infty$ . Si  $x(t)$  es limitada, entonces  $x(t)$  se acerca a su conjunto límite positivo  $\Gamma^+$  conforme  $t \rightarrow \infty$  esto es, dado cualquier  $\varepsilon > 0$  si  $N(\varepsilon)$  es la  $\varepsilon$ -vecindad de  $\Gamma^+$ , entonces hay un tiempo  $T$

tal que para  $t > T$ ,  $x(t)$  está en  $N(\epsilon)$ .

**CONJUNTO INVARIANTE.**- Un conjunto invariante  $G$  es caracterizado por la propiedad de que si un punto  $x_0$  está en  $G$  entonces su trayectoria completa (hacia atrás y adelante) está en  $G$ .

**PROPIEDAD IMPORTANTE.**- Si  $x(t)$  es limitada para  $t \geq 0$  entonces su conjunto límite positivo  $\Gamma^+$  es un conjunto no vacío, compacto e invariante.

De la definición de conjunto límite se deduce también esta propiedad:

Si  $x(t)$  es limitado para  $t \geq 0$  y si un conjunto  $M$  contiene  $\Gamma^+$ , entonces  $x(t)$  tiende a  $M$  como  $t \rightarrow \infty$ . Con estas definiciones estableceremos los siguientes teoremas para determinar la extensión de la estabilidad asintótica.

**Teorema.** Sea  $V(x)$  una función escalar con primeras derivadas parciales continuas. Sea  $\Omega$  la región donde  $V(x) < l$ . Supongamos que  $\Omega$  es limitada y que dentro de  $\Omega$ :

$$(a) \quad V(x) > 0 \quad \text{para } x \neq 0$$

$$(b) \quad \dot{V}(x) \leq 0$$

Sea  $R$  el conjunto de todos los puntos dentro de  $\Omega$ , donde  $\dot{V}(x) = 0$ , y sea  $M$  el conjunto invariante más grande en  $R$ . Entonces cada solución  $x(t)$  en  $\Omega$  tiende a  $M$  confor



me  $t \rightarrow +\infty$ .

Teorema. Si la condición (b) en el teorema anterior es reemplazado por  $V(x) < 0$  para toda  $x \neq 0$  en  $\Omega$  ( $b^*$ ), entonces el origen es asintóticamente estable, y lo más importante que cada solución en  $\Omega$  tiende al origen conforme  $t \rightarrow +\infty$  (la última conclusión tiene más alcance que el teorema de Liapunov de estabilidad asintótica).

ESTABILIDAD COMPLETA.- Cuando la región de estabilidad asintótica es todo el espacio, decimos que tenemos estabilidad completa. Los argumentos generales son válidos aquí.

En lugar del teorema primero daremos el siguiente cuya prueba es prácticamente la misma.

Teorema. Sea  $V(x)$  una función escalar con primeras derivadas parciales continuas para toda  $x$ . Supongamos que  $V(x) > 0$  para todo  $x \neq 0$  y  $\dot{V}(x) \leq 0$ . Sea  $E$  el lugar donde  $\dot{V} = 0$  y sea  $M$  el conjunto invariante más grande contenido en  $E$ . Entonces todas las soluciones limitadas para  $t > 0$  tienden a  $M$  como  $t \rightarrow \infty$ .

Además sabemos que  $V(x) \rightarrow \infty$  como  $\|x\| \rightarrow \infty$  entonces cada solución es limitada para  $t \geq 0$ ; y podemos concluir que todas las soluciones se acercan a  $M$  como  $t \rightarrow \infty$ . Si  $M$  es el origen, tendremos estabilidad completa.

**ANALISIS DE LA ESTABILIDAD DE SOLUCIONES  
ESTACIONARIAS DE CIRCUITOS CON  
ELEMENTOS NO LINEALES**

#### 4.1 Elementos no lineales

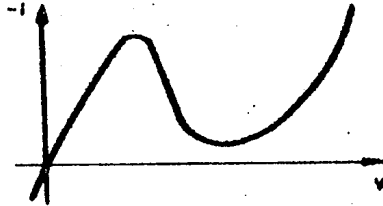
Las propiedades físicas de los elementos en las ramas de un circuito obedecen restricciones que relacionan corrientes de ramas con voltajes en las ramas, aparte de obedecer las leyes de Kirchhoff, consideraremos elementos puramente resistivos, capacitivos o inductivos.

El nombre resistor usualmente se refiere a dispositivos lineales pasivos, que tiene una resistencia  $R$  tal que la corriente y el voltaje en sus terminales están relacionados por  $v = -Ri$ . Un concepto más general es obtenido considerando un resistor como una función continua tal que la relación  $f(i,v) = 0$  valga, ésto define una curva continua en el plano  $(i,v)$  y lo llamaremos la característica del resistor. De  $f(i,v) = 0$  pudimos resolver para  $i$  ó  $v$  como función de la otra, no es necesario pedir que alguna función de las dos sea simple-valuada. Por ejemplo, un diodo de túnel es un resistor que tiene la característica mostrada en la figura en donde vemos claramente que  $v$  es función de  $i$  y no es simple valuada. Tampoco es requisito que la característica pase por el origen, es decir, que el elemento sea pasivo.

Un generador de voltaje o de corriente es por lo tanto un tipo especial de resistor para el cual la característica es paralela a uno de los ejes.

Haremos la suposición siguiente para garantizar la solución del problema de equilibrio: Existe  $\beta > 0$  tal que para  $|i|, |v| > \beta$  la característica del resistor esté en el

primer y tercer cuadrante y sea monótona creciente ahí.



Una relación entre voltaje y corriente puede expresarse por ejemplo como:

$$(4.1.1) \quad i_{\mu} = q_{\mu}(v_{\mu}) \quad \mu = 1, \dots, b$$

Es de gran importancia verificar que estas relaciones son compatibles con las leyes de Kirchhoff y que si existe una solución simultánea de las ecuaciones (4.1.1) con las de Kirchhoff, entonces existe equilibrio.

Teorema. Si en (4.1.1) suponemos que  $g_{\mu}$  es una función continua de  $v_{\mu}$  y

$$\int_0^{v_{\mu}} g_{\mu}(u) du \rightarrow \infty \quad \text{para} \quad |v_{\mu}| \rightarrow \infty; \quad \mu = 1, \dots, b$$

entonces existe una solución de las ecuaciones (4.1.1) y las leyes de Kirchhoff.

Demostración. La función  $G(v) = \sum_{\mu=1}^b \int_0^{v_{\mu}} g_{\mu}(u) du$ , en donde

$v = (v_1, \dots, v_b)$ , es una función continua diferenciable que tiende a  $\infty$  como  $|v|$  tiende a  $\infty$  en no importa que dirección. Si restringimos el vector  $v$  al subespacio  $V$  dado por la ley de voltaje de Kirchhoff ( $\beta v = 0$ ),  $G$  tenderá a infinito aquí también. Si  $v = v^0$  corresponde a un extremo de  $G$  sobre  $V$ , entonces el gradiente

$$\left. \frac{\partial G(v)}{\partial v_{\mu}} \right|_{v=v^0} = g_{\mu}(v_{\mu}^0), \mu = 1, \dots, b$$

está en el complemento ortogonal  $\mathcal{J}$  de  $V$ . La condición  $\beta v = 0$  la podemos escribir en la forma  $(b_{\nu}, v) = 0$ , en donde  $b_{\nu}$  son los renglones de  $\beta$ . De acuerdo con el método multiplicador de Lagrange, encontramos los extremos de  $G(v) - \sum_{\nu=1}^h \lambda_{\nu} (b_{\nu}, v)$ , que nos dan la condición  $G(v) - \sum_{\nu=1}^h \lambda_{\nu} b_{\nu} = 0$ , ya que  $G_V$  está en el espacio generado por

$b_1, \dots, b_h$ , digamos en  $\mathcal{J}$ . En efecto, esta propiedad es necesaria y suficiente para un extremo de  $G$  en  $V$ , así que sólo tenemos que demostrar la existencia de un extremo de la función  $G$  restringida a  $V$ , pero como  $G \rightarrow \infty$  como  $|v| \rightarrow \infty$  en  $V$  entonces seguramente  $G$  posee un mínimo en  $V$ , lo cual completa la demostración.

Leyes para los inductores y capacitores que pueden ser igualmente no lineales. Un inductor es una función que relaciona el flujo magnético a la corriente

$$\phi = -f(i)$$

en términos de la corriente y el voltaje.

$$v = \frac{d\phi}{dt} = -f'(i) \frac{di}{dt} = -L(i) \frac{di}{dt}$$

en donde  $L(i)$  es la inductancia que es no-negativa.

Un capacitor es una función que relaciona la carga y el voltaje

$$g = -f(v)$$

diferenciando obtenemos

$$i = \frac{dg}{dt} = -f'(v) \frac{dv}{dt} = -c(v) \frac{dv}{dt}$$

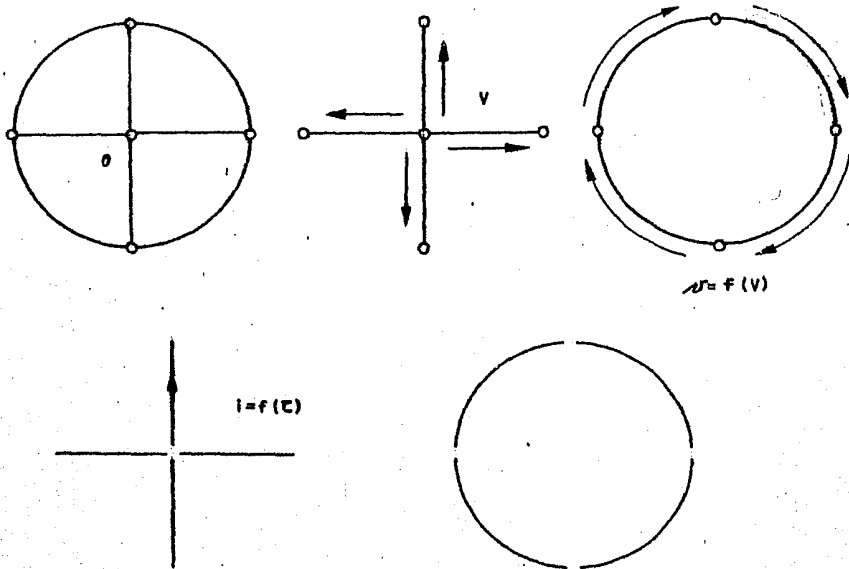
en donde  $c(v)$  es una capacitancia no-negativa.

#### 4.2 Conjunto completo de variables para una malla

Un conjunto de variables  $i_1, \dots, i_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+s}$  es completo si ellas pueden ser escogidas independientemente y sin violar alguna de las leyes de Kirchhoff y se determinan en cada rama, al menos una de las dos variables, sea la corriente o el voltaje.

Ahora describiremos un sistema completo de variables para una gráfica dada. Si queremos obtener un conjunto completo de variables formado de voltajes ( $r = 0$ ) escogemos un árbol máximo  $\mathcal{T}$  en la gráfica, asignamos aquí los voltajes arbitrarios sin violar las leyes de mallas de Kirchhoff ya que  $\mathcal{T}$

no contiene alguna malla; falta ahora encontrar los voltajes en los eslabones, añadiéndole a  $\tau$  los eslabones formamos una malla y los voltajes en los eslabones los determinamos en función de los voltajes escogidos arbitrariamente de la ecuación de mallas de Kirchhoff.



Si queremos un sistema completo de variables formado de corrientes unicamente, escogemos un árbol máximo y sus eslabones, descomponemos la gráfica en mallas independientes y comprobamos que un conjunto completo de variables lo forman las corrientes ( $r = l$ ,  $s = 0$ ).

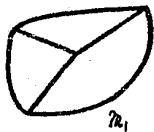
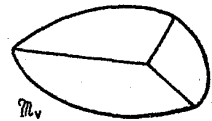
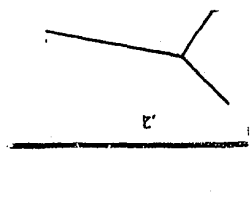
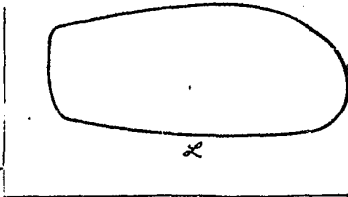
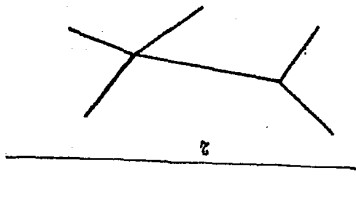
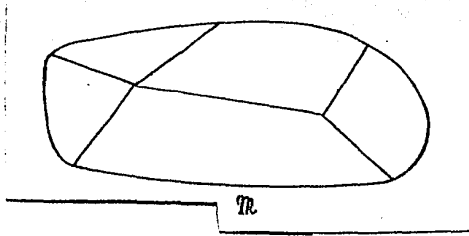
Construiremos el conjunto completo de variables en el caso "mixto", es decir, cuando los voltajes y corrientes sean ambos distintos de cero.

Escogemos un árbol máximo  $\tau$ , con sus eslabones  $\mathcal{L}$ , un

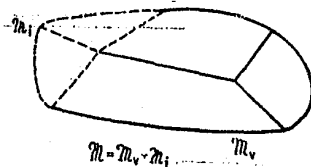
sub-árbol  $\tau'$  de  $\tau$  con sus eslabones  $\mathcal{L}'$  que forman una malla con ramas de  $\tau'$  solamente. Entonces  $\mathcal{L}'$  está contenida en  $\mathcal{L}$  y  $\tau'$  es un árbol máximo de la gráfica  $\tau' + \mathcal{L}'$ . El número de ramas en  $\tau', \mathcal{L}'$  serán denotados por  $t', l'$ , respectivamente. Entonces decimos que las corrientes  $i_1, \dots, i_r$  en las ramas de  $\mathcal{L} - \mathcal{L}'$  junto con los voltajes  $v_{r+1}, \dots, v_{r+s}$  en  $\tau'$  forman un conjunto completo de variables ( $r = l - l', s = t'$ ), ya que  $\tau'$  es un árbol máximo de  $\tau' + \mathcal{L}'$ . Los voltajes  $v_{r+1}, \dots, v_{r+s}$  son independientes y determinan todos los voltajes en  $\tau' + \mathcal{L}'$ . También tenemos que las corrientes  $i_1, \dots, i_r$ , siendo las corrientes en los eslabones, son independientes, falta mostrar que las corrientes, en las ramas que quedan fuera de  $\tau' + \mathcal{L}'$ , son también determinadas, para esto formamos las  $r$  mallas a través de los eslabones  $\mathcal{L} - \mathcal{L}'$  siendo sus corrientes de mallas  $i_1, \dots, i_r$ , como todas las  $l$  corrientes de mallas determinan completamente a todas las corrientes de las ramas  $i_1, \dots, i_r$  y las mallas formadas a través de  $\mathcal{L}'$  están completamente en  $\tau' + \mathcal{L}'$ , se deduce que las corrientes de todas las ramas que están afuera de  $\tau' + \mathcal{L}'$  son independientes de las corrientes de malla  $l'$  y por lo tanto están determinadas por las  $r = l - l'$  corrientes de malla  $i_1, \dots, i_r$ .

Vemos que el caso mixto contiene los dos primeros casos, si  $\tau'$  es vacío, tenemos  $s = 0$  y  $r = l$  que es el caso del conjunto de corrientes únicamente si  $\tau' = \tau$  tenemos  $r = l - l' = 0$ ,  $s = t$ , que es el caso de un conjunto de voltajes puros.





CONCENTRADOS LOS INDUCTORES



$$M = M_v + M_1$$

CONCENTRADOS LOS CAPACITORES

Es decir, en el caso mixto a la gráfica total  $\mathfrak{M}$  la subdividimos en dos:  $\mathfrak{M}_V = \mathfrak{Z}' + \mathfrak{Z}'$  que es la subgráfica en cuyas ramas los voltajes pueden ser determinados de  $v_{r+1}, \dots, v_{r+s}$  por la ley de mallas de Kirchhoff. Y la subgráfica  $\mathfrak{M}_I$  en cuyas ramas las corrientes pueden ser determinadas de  $i_1, \dots, i_r$  por la ley de nodos de Kirchhoff.

#### 4.3 Dos Teoremas sobre Redes

Consideramos una gráfica orientada con  $b$  ramas y  $n$  nodos, el conjunto de corrientes en las ramas  $i = (i_1, \dots, i_b)$  y el conjunto de voltajes en las ramas  $v = (v_1, \dots, v_b)$  son vectores en el espacio vectorial euclideo  $\mathcal{E}_b$  de dimensión  $b$ .

El producto escalar es definido por dos vectores  $x, y \in \mathcal{E}_b$  como

$$(x, y) = \sum_{\mu=1}^b x_{\mu} y_{\mu}$$

Sea  $\mathcal{J}$  el conjunto de todos los vectores en  $\mathcal{E}_b$  tal que si  $x \in \mathcal{J}$ , y las componentes de  $x$  son tomadas como las corrientes en las ramas de la gráfica orientada, entonces la ley de nodos de Kirchhoff se cumple para cada nodo. Similarmente si  $\mathcal{V}$  denota el conjunto de todos los vectores en  $\mathcal{E}_b$  tal que si  $x \in \mathcal{V}$  y las componentes de  $x$  son tomadas como los voltajes en las ramas, se cumple para cada malla la ley

de mallas de Kirchhoff.  $\mathcal{J}$  y  $V$  son subespacios de  $\mathcal{E}_b$  ya que ellos son definidos a través de ecuaciones lineales.

Teorema. Si  $i \in \mathcal{J}$  y  $v \in V$ , entonces  $(i, v) = 0$ , es decir  $\mathcal{J}$  y  $V$  son subespacios ortogonales de  $\mathcal{E}_b$ .

Demostración. Como  $v$  satisface la ley de mallas de Kirchhoff, existe un conjunto de voltajes de nodos  $(V_1, \dots, V_n)$  tal que  $v_\mu$  es la diferencia entre los voltajes del nodo final y del inicial. Si la corriente fluye del nodo  $k$  al nodo  $l$  se denotará por  $i_{kl}$ , si la  $\mu$ -ésima rama une a los nodos  $k$  y  $l$ , tenemos:

$$v_\mu i_\mu = (V_k - V_l) i_{kl} = (V_l - V_k) i_{lk}$$

el producto escalar lo podemos expresar:

$$(i, v) = \sum_{\mu=1}^b i_\mu v_\mu = \frac{1}{2} \sum_{k,l} (V_k - V_l) i_{kl}$$

o

$$(i, v) = \frac{1}{2} \left[ \sum_k V_k \left( \sum_l i_{kl} \right) - \sum_l V_l \left( \sum_k i_{kl} \right) \right]$$

como  $\sum_l i_{kl} = 0$  y  $\sum_k i_{kl} = 0$ , ya que se cumplen las leyes de Kirchhoff, tenemos  $(i, v) = 0$

Teorema.

$$\int_{\Gamma} \sum_{\mu=1}^b v_{\mu} di_{\mu} = \int_{\Gamma} \sum_{\mu=1}^b i_{\mu} dv_{\mu} = 0$$

Demostración. Como  $di = (di_1, \dots, di_p)$  es el límite de la diferencia de dos vectores en  $\mathcal{D}$  y como es un sub-espacio, entonces  $di \in \mathcal{D}$  y por el teorema anterior:

$$(v, di) = \sum_{\mu=1}^b v_{\mu} di_{\mu} = 0$$

integrando a lo largo de  $\Gamma$  obtenemos:

$$\int_{\Gamma} \sum_{\mu=1}^b v_{\mu} di_{\mu} = 0$$

integrando por partes

$$\int_{\Gamma} \sum_{\mu=1}^b v_{\mu} di_{\mu} = (i, v) - \int_{\Gamma} \sum_{\mu=1}^b i_{\mu} dv_{\mu}$$

como  $(i, v) = 0$  por el teorema anterior

$$\int_{\Gamma} \sum_{\mu=1}^b i_{\mu} dv_{\mu} = 0$$

#### 4.4 La Función P

A la función P la llamamos el potencial mixto y tiene la

propiedad

$$L_{\rho} \frac{di_{\rho}}{dt} = \frac{\partial P}{\partial i_{\rho}} \quad (\rho = 1, \dots, r)$$

$$C_{\sigma} \frac{dv_{\sigma}}{dt} = - \frac{\partial P}{\partial v_{\sigma}} \quad (\sigma = r+1, \dots, r+s)$$

que son las ecuaciones diferenciales que describen a un circuito RLC.

A P la definimos:

$$P(i^*, v^*) = \int_{\Gamma} \sum_{\mu > r+s} v_{\mu} di_{\mu} + \sum_{\sigma=r+1} i_{\sigma} v_{\sigma} \Big|$$

en donde  $i^* = (i_1, \dots, i_r)$  es el conjunto de corrientes a través de los inductores y  $v^* = (v_{r+1}, \dots, v_{r+s})$  es el conjunto de voltajes a través de los capacitores. Como  $v_{\mu}$  depende solamente de  $i_{\mu}$  para  $\mu > r+s$ , podemos escribir:

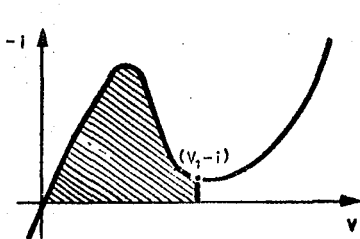
$$P(i^*, v^*) = \sum_{\mu > r+s} \int_{\Gamma} v_{\mu} di_{\mu} + \sum_{\sigma=r+1}^{r+s} i_{\sigma} v_{\sigma} \Big|_{\Gamma}$$

la integral  $\int_{\Gamma} v_{\mu} di_{\mu}$  está bien definida como integral de línea aún si  $v_{\mu}$  no fuera una función simple-valuada de  $i_{\mu}$ . Tomado como una integral de línea, la trayectoria de integración es a lo largo de la característica del resistor, a esta integral la llamaremos "Potencial de corriente" del elemento en la rama  $\mu$ .

La integral de línea  $\int_{\Gamma} i_{\mu} dv_{\mu}$  se llamará el "Potencial de voltaje" y vemos que

$$\int_{\Gamma} i_{\mu} dv_{\mu} + \int_{\Gamma} v_{\mu} di_{\mu} = i_{\mu} v_{\mu} \Big|_{\Gamma}$$

la interpretación de la potencial de corriente o del voltaje es una gráfica de un resistor con una función simple-valuada de una de las variables, por ejemplo: Si  $i_{\mu}$  es una función simple-valuada de  $v_{\mu}$ , entonces el potencial de voltaje es una integral ordinaria representada por el área asciurada de la figura, si suponemos que el punto fijo inicial de la trayectoria ocurrió en  $v_{\mu} = 0$



DIRECCION DE LA  
CORRIENTE INDUCIDA



Decimos que la potencial de corriente de una malla es la suma de las potenciales de corriente de sus resistores, análogamente lo decimos para el potencial de voltaje.

Acerca del signo de las características de un resistor, diremos que la corriente inducida a través de un resistor lineal  $R$  es en la dirección de la caída de voltaje. Es decir, fluye de  $+$  a  $-$ ; supongamos que la dirección asignada a esta rama de la gráfica orientada es de  $E$  a tierra, entonces de acuerdo con la convención de que  $i$  es negativa si fluye en sentido contrario al escogido y positivo si fluye en el mismo sentido, así el signo del voltaje lo tomamos, el voltaje en el nodo final menos el voltaje en el nodo inicial de la rama. La corriente en la rama es  $i_{\mu} = i$  (la corriente inducida, mientras que el voltaje en la rama es  $v_{\mu} = +E$ .

Sabemos que  $v_{\mu} = -Ri_{\mu}$  y la potencial de corriente es  $-\frac{1}{2} Ri_{\mu}^2$ . De todos modos debemos obtener el mismo resultado si a la rama le asociáramos una dirección opuesta, porque entonces  $v_{\mu} = E$ ,  $i_{\mu} = -i$ , y  $v_{\mu} = -Ri_{\mu}$  nuevamente.

Así la potencial de corriente de una batería  $E$  es  $+Ei_{\mu}$ .

Para construir  $P$  directamente del circuito necesitamos:

- a) Determinar la potencial de corriente para cada resistor,
- b) Determinar el producto  $i_{\sigma}v_{\sigma}$  para cada capacitor,
- c) Formar la suma de estos términos y expresarlos en términos de el conjunto de variables completas.

Si el circuito no contiene capacitores, la segunda suma desaparece y  $P$  queda:

$$P(i^*) = \int_{\Gamma} \sum_{\mu > r+s} v_{\mu} di_{\mu}$$

que es la potencial de corriente, y las ecuaciones diferenciales quedan:

$$L_{\rho} \frac{di_{\rho}}{dt} = \frac{\partial P}{\partial i_{\rho}} \quad \rho = 1, \dots, r$$

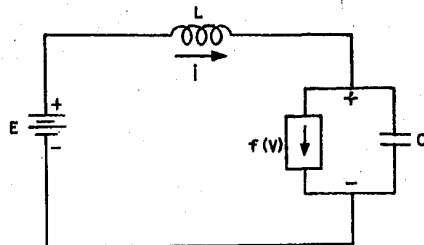
análogamente si no hay inductores:

$$P(v^*) = - \int_{\Gamma} \sum_{\sigma=1}^s i_{\mu} dv_{\mu}$$

que es el potencial de voltaje, y las ecuaciones diferenciales nos quedan:

$$C_{\sigma} \frac{dv_{\sigma}}{dt} = - \frac{\partial P}{\partial v_{\sigma}} \quad \sigma = r+1, \dots, r+s$$

Ejemplo. Consideremos el circuito de la figura con diodo de túnel, la corriente que fluye a través del rectángulo pequeño en la dirección mostrada es dada por la función no lineal  $f(v)$





la potencial de corriente del resistor es:

$$P(i) = \int_{\Gamma} \sum_{\mu > r+s} v_{\mu} di_{\mu}$$

$$- \int_{\Gamma} v d(f(v)) = -vf(v) + \int_0^v f(v)dv$$

la corriente a través del capacitor es  $i - f(v)$  y como es en dirección opuesta de  $v$ , el producto  $i_{\sigma} v_{\sigma}$  es  $-(i-f(v))v$ , quedándonos el potencial mixto

$$P(i^*, v^*) = Ei + \int f(v)dv - iv$$

que nos dá las ecuaciones diferenciales

$$L \frac{di}{dt} = \frac{\partial P}{\partial i} = E - v$$

$$C \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial P}{\partial v} = i - f(v)$$

### La función P para circuitos completos

Decimos que un circuito es completo si el conjunto de variables  $i_1, \dots, i_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+s}$  es completo donde las  $i_1, \dots, i_r$  denotan las corrientes a través de los inductores y  $v_{r+1}, \dots, v_{r+s}$  el voltaje a través de los capacitores. Veremos como construir P para este caso, recordemos que un circuito completo puede ser dividido en dos sub-redes:

$\mathfrak{M}_I$  y  $\mathfrak{M}_V$  tal que la corriente en las ramas de  $\mathfrak{M}_I$  y los voltajes en las ramas de  $\mathfrak{M}_V$  son determinados por el conjunto completo de variables,  $\mathfrak{M}_I$  contiene todos los inductores y  $\mathfrak{M}_V$  todos los capacitores.

De nuestra expresión para P

$$\begin{aligned}
 P(i^*, v^*) &= \sum_{\mu > r+s} \int_{\Gamma} v_{\mu} di_{\mu} + \sum_{\sigma=r+1}^t v_{\sigma} i_{\sigma} \Big| \\
 &= \sum_{\substack{\mu > r+s \\ \mathfrak{M}_I}} \int_{\Gamma} v_{\mu} di_{\mu} + \sum_{\mu > r+s} \int_{\Gamma} v_{\mu} di_{\mu} + \\
 &\quad + \sum_{\sigma=r+1}^{r+s} v_{\sigma} i_{\sigma} \Big|_{\Gamma}
 \end{aligned}$$

el primer término es simplemente la potencial de corriente de  $\mathfrak{M}_I$  y como  $i^*$  determina todas las corrientes en las ramas de  $\mathfrak{M}_I$ , podemos expresar éste término como una función de  $i^*$  y la denotaremos por  $F(i^*)$ .

Por lo visto antes

$$\sum_{\mu > r+s} \int_{\Gamma} v_{\mu} di_{\mu} = \sum_{\substack{\mu > r+s \\ \mathfrak{M}_I}} \left[ v_{\mu} i_{\mu} \Big|_{\Gamma} - \int_{\Gamma} i_{\mu} dv_{\mu} \right]$$

quedando

$$P(i^*, v^*) = F(i^*) + \sum_{\mathbb{M}_V} v_\mu i_\mu \Big|_\Gamma - \sum_{\substack{\mu > r+s \\ \mathbb{M}_V}} \int_\Gamma i_\mu dv_\mu$$

siendo la potencial de voltaje el último término en  $\mathbb{M}_V$  y lo denotaremos por  $G(v^*)$  así que:

$$P(i^*, v^*) = F(i^*) - G(v^*) + \sum_{\mathbb{M}_V} v_\mu i_\mu \Big|_\Gamma$$

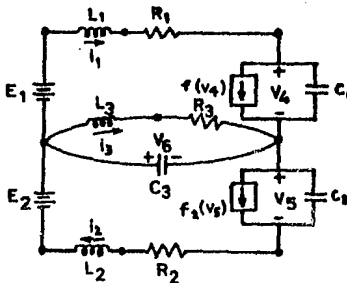
el último término puede expresarse también en términos de el conjunto completo de variables  $i_1, \dots, i_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+s}$ , para hacerlo necesitamos el siguiente

Lema. Existe una matriz  $\gamma = \gamma_{\rho\sigma} = +1, -1, 0$  de orden  $r \times s$  tal que

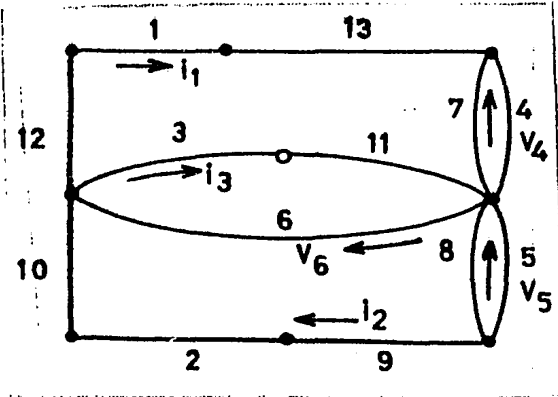
$$\sum_{\mathbb{M}_V} v_\mu i_\mu = \sum_{\rho=1, \sigma=1}^{r \cdot s} \gamma_{\rho\sigma} i_\rho v_{r+\sigma} = (i^*, \gamma v^*)$$

La demostración puede verse en la parte II de la referencia 1.

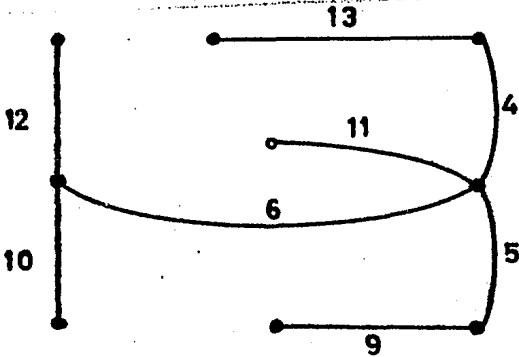
Ejemplo. Trabajaremos con el circuito mostrado en la figura



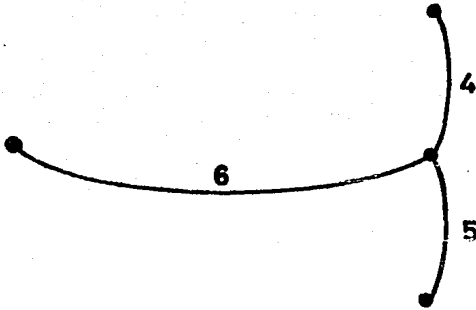
la gráfica para el circuito



escogemos un árbol máximo



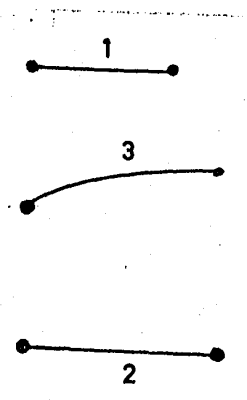
un sub-árbol



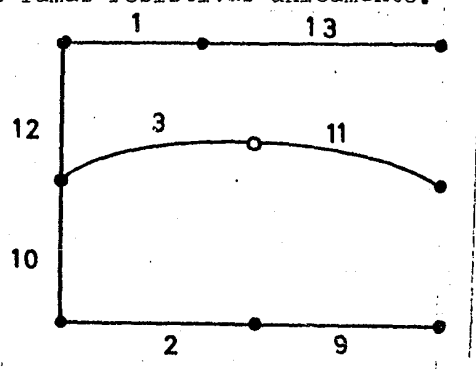
siendo  $L'$



y  $L-L'$

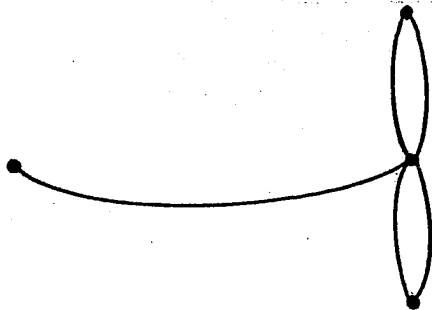


y  $i_1, i_2, i_3, v_4, v_5, v_6$  forman un conjunto completo de variables.  
 Construimos la potencial de corriente de  $\mathfrak{M}_1$  en donde sólo se debe a las ramas resistivas unicamente.



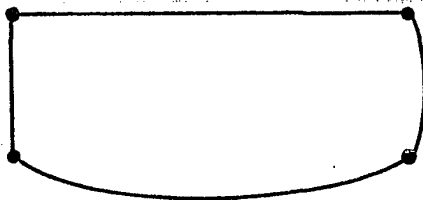
$$F(i_1, i_2, i_3) = -\frac{1}{2} R_2 i_2^2 + E_2 i_2 - \frac{1}{2} R_3 i_3^2 - \frac{1}{2} R_1 i_1^2 + E_1 i_1$$

ahora determinaremos la potencial de voltaje de  $\mathfrak{M}_v$ , debido a las ramas resistivas

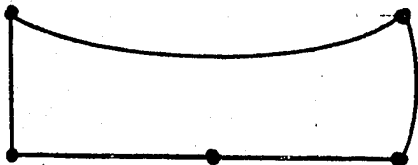


$$G(v_4, v_5, v_6) = - \int_0^{v_4} f_1(v) dv - \int_0^{v_3} f_2(v) dv$$

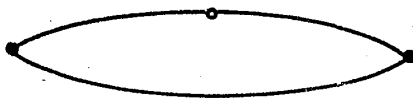
falta determinar el término  $(i^*, \gamma^*)$  lo cual lo haremos considerando las mallas



$A_1$



$A_2$



$A_3$

y sus intersecciones con  $\tau'$ .

El signo correcto lo obtenemos determinando de que modo las corrientes de mallas  $i_1, i_2, i_3$  fluyen a través de los voltajes  $v_4, v_5, v_6$  de  $\tau'$  lo que nos da

$$(i^*, \gamma v^*) = i_1(-v_4 + v_6) + i_2(-v_6 - v_5) + i_3(v_6)$$

Si tenemos el potencial mixto para el circuito es

$$\begin{aligned} P(i^*, v^*) &= E_1 i_1 + E_2 i_2 - \frac{1}{2} R_1 i_1^2 - \frac{1}{2} R_2 i_2^2 - \frac{1}{2} R_3 i_3^2 + \\ &+ \int_0^{v_4} f_1(v) dv + \int_0^{v_5} t_2(v) dv - \\ &- i_1 v_4 + i_1 v_6 - i_2 v_6 - i_2 v_5 + i_3 v_6 \end{aligned}$$

y vemos que se cumple.

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = E_1 - R_1 i_1 - v_4 + v_6 = \frac{\partial P}{\partial i_1}$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} = E_2 - R_2 i_2 - v_6 - v_5 = \frac{\partial P}{\partial i_2}$$

$$L_3 \frac{di_3}{dt} = -R_3 i_3 + v_6 = \frac{\partial P}{\partial i_3}$$

$$C_2 \frac{dv_5}{dt} = i_2 - f_2(v_5) = - \frac{\partial P}{\partial v_5}$$

$$C_3 \frac{dv_6}{dt} = -i_1 + i_2 - i_3 = - \frac{\partial P}{\partial v_6}$$

#### 4. Circuitos no-oscilantes

$$(4.1) \quad -J \frac{dx}{dt} = \frac{\partial P(x)}{\partial x}; \quad -J \frac{dx}{dt} = \text{grad } P$$

donde  $x = \begin{pmatrix} i \\ v \end{pmatrix}$ ; y  $J = \begin{matrix} -L & 0 \\ 0 & C \end{matrix}$  es positiva definida.

Los puntos estacionarios de  $P(x)$ , esto es donde  $\frac{\partial P(x)}{\partial x} = 0$  son los puntos de equilibrio de (4.1) y veremos bajo que condiciones todas las soluciones se aproximan al equilibrio como  $t \rightarrow \infty$  diferenciamos  $P(x)$  a lo largo de las soluciones (4.1)

$$\frac{dP(x)}{dt} = (x', Px) = -(x', Jx')$$

Si el circuito no contiene inductores nos queda:

$$\frac{dP}{dt} = -(x', Cx')$$

ya que  $J = C$  y obviamente  $P$  decrece a lo largo de las soluciones excepto en el equilibrio; ya que  $P(x) \rightarrow \infty$  como  $\|x\| \rightarrow \infty$  y con el criterio de Liapunov decimos que cada solución tiende a un punto de equilibrio como  $t \rightarrow \infty$ .

Similarmente, si el circuito no contiene capacitores

$$\frac{d(-P)}{dt} = -(x', Lx')$$

Ahora veremos como describir el sistema (4.1) por otro par  $J^*, P^*$  en lugar de  $J$  y  $P$ , tal que

$$-J^*x' = P_x^*(x)$$



y que  $J^*$  sea positiva definida ya que  $-x' = J^{-1}P_x(x)$  es una condición necesaria y suficiente para que un nuevo par  $J^*P^*$  describa las ecuaciones diferenciales en la forma anterior es  $J^*J^{-1}P_x = P_x^*$  tenemos que encontrar al par  $J^*P^*$ , tal que  $(x', J^*x')$  sea positiva definida y  $P^*(x) \rightarrow \infty$  como  $|x| \rightarrow \infty$ .

Si  $(J_1, P_1), (J_2, P_2)$  son dos pares que describen a (4.1) entonces una combinación lineal de ellos también lo representarán

$$(\alpha_1 J_1 + \beta J_2, \alpha P_1 + \beta P_2)$$

Si  $M$  es una matriz simétrica constante entonces el par  $J^* = P_{xx}MJ$   $P^* = \frac{1}{2}(P_x, MP_x)$  puede ser una buena selección ya que

$$P_x^* = (P_{xx}M)P_x$$

y por lo tanto

$$J^*J^{-1}P_x = P_{xx}MJJ^{-1}P_x = P_x^*$$

y obtenemos finalmente

$$J^* = (\lambda I + P_{xx}M)J, P^* = \lambda P + \frac{1}{2}(P_x, MP_x)$$

en donde  $\lambda$  es una constante arbitraria.

Ahora veremos un teorema muy importante para la estabilidad en donde  $P$  tiene la forma

$$P(i, v) = -\frac{1}{2} (i, A i) + B(v) + (i, \gamma v - a)$$

en donde  $A$  es una matriz simétrica constante; y  $a$  es un vector constante tal que las primeras  $r$  ecuaciones correspondientes a los inductores sean lineales.

$L = L(i)$ ;  $C = C(v)$  pueden ser no lineales pero tienen que ser positivas definidas.

Teorema. Si  $A$ , es positiva definida,  $B(v) + \|\gamma v\| \rightarrow \infty$  como  $\|v\| \rightarrow \infty$  y

$$\|L^{1/2}(i) A^{-1} \gamma C^{-1/2}(v)\| \leq 1 - \delta; \quad \delta > 0$$

para toda  $i, v$ , entonces las soluciones de (4.1) tienden al conjunto de puntos de equilibrio como  $t \rightarrow \infty$ .

Demostración. Escogemos  $M$  y  $\lambda$  del modo siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} 2A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda = 1$$

entonces

$$J^* = J + P_{XX} M J = \begin{bmatrix} L & 0 \\ -2\gamma^T A^{-1} L & C \end{bmatrix}$$

en donde  $\gamma^T =$  transpuesta de  $\gamma$  y

$$y(x', J^*x') = (y, y) - 2(z, C^{-1/2} \gamma^T A^{-1} L^{1/2} y) + (z, z)$$

en donde:  $y = L^{1/2} \frac{di}{dt}$  y  $z = C^{1/2} \frac{dv}{dt}$  con  $K = L^{1/2} A^{-1} \gamma C^{-1/2}$   
tenemos

$$(x', J^*x') = (y - Kz, y - Kz) + (z, z) - (Kz, Kz)$$

y  $\|K\| \leq 1 - \delta$  entonces

$$(x', J^*x') \geq |y - Kz|^2 + \delta |z|^2 \geq 0$$

lo cual es cero si y solo si  $\frac{di}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0$ ; entonces

$$P^* = P + (P_1, A^{-1} P_1)$$

es monótona decreciente excepto en el equilibrio y nos falta probar que  $P^*(x) \rightarrow \infty$  como  $\|x\| \rightarrow \infty$  para hacer esto a P la escribimos en la forma

$$P(\alpha, v) = -\frac{1}{2} (\alpha, A^{-1} \alpha) + U(v)$$

en donde  $\alpha = P_1 = -A_1 + \gamma v - a$  y

$$U(v) = \frac{1}{2} [(a - \gamma v), A^{-1}(a - \gamma v)] + B(v)$$

entonces

$$P^*(\alpha, v) = \frac{1}{2} (\alpha, A^{-1}\alpha) + U(v)$$

como A es positiva definida y  $B(v) + |\gamma v| \rightarrow \infty$  como  $|v| \rightarrow \infty$  es claro que  $U(v) \rightarrow \infty$  como  $|v| \rightarrow \infty$  falta ver que  $|\alpha| + |v| \rightarrow \infty$  como  $|i| + |v| \rightarrow \infty$  para esto tengamos la matriz

$$S = \begin{bmatrix} -A & \gamma \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

que es no singular y nos da la transformación

$$\begin{bmatrix} \alpha = a \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & \gamma \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix}$$

ó

$$y = Sx$$

ya que  $(y, y) = (Sx, Sx) \geq 0$ . Pero como S es no-singular y su valor propio es acotado despues de cero tal que  $(Sx, Sx) > 0$  para  $x \neq 0$ . Como  $(Sx, Sx) > \lambda_1 (x, x)$  en donde  $\lambda_1$ , es el valor propio mas pequeño de  $S^T S$  tenemos

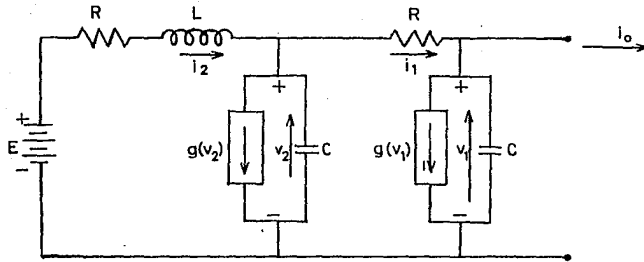
$$(y, y) = (Sx, Sx) \geq \lambda_1 (x, x)$$

en donde  $\lambda_1 > 0$ ; esto nos da

$$|\alpha + a|^2 + | |^2 \geq \lambda_1(|i|^2 + |v|^2)$$

lo cual implica  $|\alpha| + |v| \rightarrow \infty$  para  $|i| + |v| \rightarrow \infty$   
aplicando lo visto anteriormente en 2; concluimos que cada  
solución de (4.1) se aproxima al conjunto de puntos de equi-  
librio como  $t \rightarrow \infty$ .

APLICACION DE LOS RESULTADOS ANTERIORES A UN  
CIRCUITO BIESTABLE CON DIODO DE  
TUNEL, EMPLEADOS EN MAQUINAS  
COMPUTADORAS DIGITALES



CIRCUITO CON DOBLE DIODO USADO EN MAQUINAS COMPUTADORAS

La función potencial mixto para el circuito mostrado en la figura.

$$\begin{aligned}
 p(i, v) &= \sum_{k=1}^a \left[ -\frac{1}{2} R i_k^2 + i_k (v_{k-1} - v_k) + \int_0^{v_k} g(v) dv \right] \\
 &= -\frac{1}{2} R i_1^2 - \frac{1}{2} R i_2^2 + i_1 (E - v_1) + i_2 (E - v_2) + \\
 &+ \int_0^{v_1} g(v_1) dv + \int_0^{v_2} g(v) dv
 \end{aligned}$$

la cual escrita en forma vectorial queda:

$$p(i, v) = -\frac{1}{2} R(i, i) + (i, \gamma v) + B(v) - (a, i)$$

en donde  $\gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  y  $a = \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix}$

$$y \quad B(v) = \int_0^{v_1} g(v_1) dv + \int_0^{v_2} g(v_2) dv$$

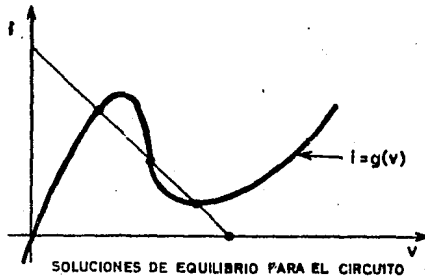
con nuestra función  $p$  establecida, veremos que sucede de acuerdo con nuestro teorema. El circuito tiene un número finito de soluciones de equilibrio.

Las ecuaciones de equilibrio:

$$g(v_2) = \frac{v_1 - 2v_2 + E}{R}$$

$$g(v_1) = \frac{v_2 - v_1}{R}$$

geométricamente las soluciones las encontramos por medio de la figura en donde  $i = g(v)$  es la característica del diodo.





se ve que tiene tres intersecciones y por lo tanto el número de puntos de equilibrio serán cuando más  $3^n$  en nuestro caso  $3^2 = 9$  puntos de equilibrio, ésto no es lo deseable y lo solucionamos al restringir los parámetros del circuito de acuerdo a las condiciones establecidas en nuestro teorema.

Vemos que  $B(v) \rightarrow \infty$  como  $|v| \rightarrow \infty$ .  $A$  es positiva definida ya que  $A = RI$  ( $I$  matriz idéntica)  $K = L^{1/2} A^{-1} \gamma C^{1/2}$  en nuestro caso  $K = \gamma \frac{L^{1/2}}{RC^{1/2}}$  vemos que  $\|\gamma\|^2 = 1$  y por lo tanto  $\|K\|^2 < \frac{L}{R^2 C}$  el teorema establece que la condición para que no haya oscilación es  $\|K\|^2 < 1$ ; y en nuestro caso  $\frac{L}{R^2 C} < 1$  es la condición para que no exista oscilación.

R E F E R E N C I A S

- E. A. Guillaumin. Introductory circuit theory, J. Wiley, New York, 1958.
- R. K. Brayton y J. K. Moser. A theory of non linear networks, I y II quarterly of Applied Mathematics, 1963.
- L. S. Pontryagin. Ordinary differential equations, Addison-Wesley, Publishing Comp. Inc., 1962.
- J. LaSalle y S. Lefschetz. Stability by Liapunov's direct method, Academic Press, 1961.