16
29

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"UNA PARTICULA DE LA GEOMETRIA EUCLIDIANA"

T E S I S

Que para obtener el Título de

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a

BENJAMIN LOPEZ SIETE

FALLA DE ORIGEN

México, D. F. 1 9 9 0

C O N T E N I D O

Prólogo

Es de gran interés ganar la confianza del estudiante, y hacer que pierda el temor que luego le provoca la Matemática, trato de compenetrarme en sus actividades con este cuaderno de trabajo, que mucho ha de ayudarlo porque esta encaminado a todo aquel estudiante con problemas en la materia, haciendo fácil y atractiva la iniciación, quiero entender las dificultades que éllos tienen en la realización de sus estudios y aprovechar su experiencia, orientándolo y aprender juntos el mecanismo que presupone un cambio en los procedimientos geométricos como sería observar, apreciar, comprender y utilizar algunas ideas básicas del fascinante mundo de la Geométria; es menester subrayarlo, porque casi siempre olvidamos que hay diferentes concepciones encontradas de enfoque en su clima cultural y pedagógico, también puede estimular o inhibir la labor de algunos a toda contribución original que se le pueda ocurrir, mutilando así la exploración de sus ideas en el campo de las aplicaciones, busco la mejor manera de motivarlos a entender los conceptos básicos de la asiganatura con este material, donde él aproveche su beneficio y pierda el miedo en su introducción. Es también, la invitación para todo aquel profesor interesado en él, para escoger los ejemplos que considere importantes y adaptables para su curso, un trabajo cotidiano que por experiencia lo conocemos; como dar un curso, hacer y aplicar exámenes parciales, extraordinarios, asesorias, étc., en donde el profesor logre fragmentar su curso según lo considere pertinente.

Gran parte del material recopilado para preparar este trabajo, procede de libros ya conocidos y autores de gran prestigio académico en sus investigaciones y publicaciones, dedicadas algunas de ellas a estudiantes de Bachillerato. Algunas obras son accesibles al alumno, y las menciono al final, son indispensables para retroalimentar la información, sugerencias del análisis de -

estas cuestiones tan importantes, además se recomiéndan para enriquecer su biblioteca personal e incrementar su acervo en materia geométrica dándole prioridad a invertir más tiempo para la investigación de complementar: artículos, comentarios y problemas abiertos para su divulgación.

Para los autores con todo respeto mi afecto, mi agradecimiento, mi reconocimiento, por reunir todos los atributos en la formación de este cuaderno de trabajo y formular así, "una partícula de la geometría euclidiana" con apego a los libros donde hemos tomado el saludable concepto de cultura.

Un enfoque agradable que reúne varias expresiones, comentarios y problenas acccesibles, donde el planteamiento en algunos de éllos se dá, adelanto procedimientos en otros problemas que poseen más realidad o dificultad, el trato no suele a la postre, ser un flan, pero si tenemos la esperanza de aumentar la presencia de nuestro esfuerzo sin perder rigor científico, ante los autores y críticos que ya ocupan un lugar familiar en lo académico.

México, D. F., a 23 de Enero de 1990.

A T E N T A M E N T E

B E N J A M I N L O P E Z S I E T E

S I M B O L O G I A

$\therefore$	Por lo tanto
$=$	Igual a
$\cong$	Congruente a
$//$	Paralelo a
$\not\parallel$	No es paralelo a
$//_s$	Paralelas a
$\perp$	Perpendicular a
$\perp_s$	Perpendiculares
$\widehat{b}$	Angulo b
$\widehat{PQR}$	Angulo PQR
$\sim$	Semejante a
Δ	Triángulo
Δs	Triángulos
$\overline{AB}$	Recta AB ó segmento $\overline{AB}$
$\square$	Cuadrilátero
$\measuredangle s$	Angulos
$\approxeq$	Isomórfos a
NC_5	Noción común 5
D_8	Definición 8
Σ	Es la suma de
∞	Infinito
$f(x)$	Función de x
sen x	Seno de x
cos x	Coseno de x
tan x	Tangente de x
cot x	Cotagente de x
A$\odot$R	Círculo A de radio r
$\odot$	Círculo
$\odot_s$	Círculos
AB	Arco AB
L▽M	Sector circular LM
sec x	Secante de x
csc x	Cosecante de x
lim x	Es el límite de x
$\square$PQRS	Cuadrilátero PQRS
π	El número π
R	Angulo recto
180°	Ciento ochenta grados
$\pi/2$	Radianes
$(7.5)°$	Siete punto cinco de grado
$\mathbb{R}$	Conjunto de números reales
$\mathbb{N}$	Conjunto de números naturales
	Bibliográfia de consulta
(...)	Bibliográfia crítica

COMO UTILIZAR EL TRABAJO

En este cuaderno de trabajo se recomienda mucho pensar en las actividades, cuestiones y problemas que en él se plantean. Y lo cual, para el lector debe proporcionar una partícula de elementos básicos, necesarios e indispensables para poder así, hacer una labor individual o colectiva al presentar un examen, preparar algún tema, alguna práctica, etcétera.

Los ejercicios son variados en el estilo de respuesta, los puede encontrar de opción multiple, por completar, abiertos, de trazo, para investigar, de hacer cálculos, conceptuales, etc.

. En los de opción multiple solo hay que buscar la respuesta analizando todas las que se le presentan.

. Los ejercicios por completar, se tiene que algunos ya estan empezados, solo faltaría concluirlos.

. Los ejercicios abiertos, considero lo de siempre, hay que dejar algo al estudiante para que su trabajo también cobre su esfuerzo y dedicación.

. En los ejercicios para investigar, habra que consultar en la bibliografía la claridad de los conceptos, definiciones, términos técnicos, etcétera y procurar retenerlos.

. Los ejercicios de trazo tienen por así decirlo que hacerse con regla y compás, para disfrutar de la teoría euclidiana en los más remotos tiempos; algunos se prestan para ser practicados en el taller de: costura, herrería, carpintería, pintura, etc.

. Los de cálculo, tendrá que plantearse algunas ecuaciones u operaciones para darle solución al problema.

. Si se pide memorizar los postulados y nociones comunes, hágalo, es la idea fundamental para demostrar teoremas.

. Los problemas conceptuales caerían en el terreno de la investigación por ejemplo: punto, plano, recta, étc.

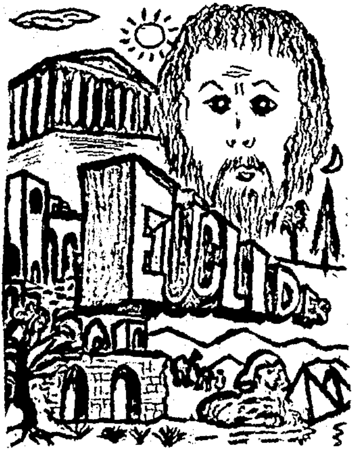
. Las proposiciones o teoremas, que empiezan en la página 119 están más claras sus indicaciones para cómo abordar esta original manera de trabajarlas, solo recuerde que las literales numeradas t_1, D_1, P_3 son la etiqueta de un teorema, definición, noción común o postulado según el número que tenga.

El manejo de este cuaderno debe ser labor del estudiante-profesor avalar la concepción descrita y cuidadosamente elegida para su curso, dado que el estudiante tiene que reforzar sus ideas en la bibliografía señalada por el profesor de su curso y esto puede ser, diccionarios, enciclopedias, textos, guías, programas, folletos, apuntes tomados en clase, asesorías, prácticas, trazos, y todo aquello que pueda ayudarlo a trabajar con la Geometría Euclidiana.

Si encontrara dificultades en la labor de preparar su examen o tema, pienso que algún profesor del área podrá asesorarlo; naturalmente implica haber leído, para tener la mínima idea de lo que es el complicado arte geométrico para ajustar ideas muy vagas quizá, pero muestran el deseo de hacer las cosas con armonía obligatoriamente.

En el apéndice de mi trabajo se anexa un comentario sobre algunas cónicas y veintitres definiciones de los elementos de la Geometría de Euclídes de las cuales, algunas tendrán que ver con las respuestas de los ejercicios y las demostraciones de sólo algunos teoremas propuestos, con los cuales puede usted y el profesor adaptar o armar un minicurso, y dentro de las reglas de la razón sí así lo requiere hacerlo progresar confirmando resultados en este trabajo y su bibliografía, pero aquí radica precisamente la explicación e investigación de cada concepto, problema o figura, para con esto atrevernos a decir que es una "Partícula de la Geometría Euclidiana", precisamente por lo reducido que es la profundidad en torno a los temas del cuaderno; esto es pensando en el estudiante de Bachillerato.

"EUCLIDES, LA TRASCENDENCIA DE UN PUNTO"



Apunte biográfico con una partícula de su vida y obra, dos aspectos por conocer de un modo igual y no están más allá de la disputa.

Se registra en la historia de las Matemáticas escasas referencias del mas famoso geómetra por naturaleza "Euclides", siendo su nombre sinónimo de la Geometría Elemental, él ostenta las ideas características con la regla y el compás, sin perder actualidad, vierte el pensamiento geométrico de sus antecesores dándole cuerpo y forma en la obra magistral llamada "Los Elementos". Su obra, ejemplo de una cuasi perfección, fue modelo y guía que iluminó múltiples pensadores tales como psicólogos jurisprudentes, artistas, científicos, etcétera durante más de 2000 años. Ha dado el sustento abstracto en su pensamiento pero nadie puede participar completamente en el debate sin estar familiarizado con el sistema euclidiano.

Griegos y árabes discuten en torno a su vida, pero tanto los primeros como los últimos no poseen fuentes definitivas. La literatura crítica (...) muestra una interpretación clara y precisa de sus ideas.

Las fuentes de investigación (...) señalan que Euclides el geómetra fue Hijo de Néucrates y Berenice, nieto de Zenarco, todos ellos griegos; natural de la ciudad meridional de Tiro,localizada a las orillas del Mar Mediterráneo (hoy país de Líbano) y domiciliado en lo que conocemos como la ciudad de Damasco.

Fue educado en Atenas y posteriormente vivió en Alejandría, otra ciudad que -- se encuentra en el delta del Nilo. Esto ocurre alrededor del año 295 antes de la era cristiana, aunque una fecha concreta de su nacimiento no se conoce de - manera exacta.

Al amparo de todas las probabilidades y como el fruto del esfuerzo de -- los comentaristas Pappus (300 d. de C.) y Proclo (410-485 d. de C.) bizantino este último, su fiel seguidor y comentarista, nos permiten valorar mejor sus opiniones en el terreno de la geometría. Así lo demuestra sus comentarios con un valor puramente histórico, sin contar con lo dudoso de su origen. Fué más joven a los alumnos de Platón y más viejo a Eratóstenes (275-198 a. de C.) y Arquímides (287-212 a. de C.). Se dice que fue un hombre de estudio genial, - modesto e incondicionalmente honrado, afable y con afecto de reconocer el trabajo original de otros; con los cuales mostró amabilidad y paciencia. Podríamos decirlos así; que estuvo en una situación de privilegio, además de favorable y con la tutela del Rey de Alejandría Ptolomeo, su hijo el joven Príncipe Ptolomeo I, le preguntó al maestro que si no había una manera corta y fácil de aprender geometría, a cuya pregunta replica el maestro: "Oh príncipe, no hay camino real que conduzca a la geometría". Esto por supuesto en un tono - afable y bondadoso, pero no puede entenderse que él fuera por ello servil y - adulador con los poderosos. (...)

Se cuenta también que enseñaba Matemáticas en el famoso Museum, lugar --- destinado a las nueve musas que protegían las ciencias y las artes, academia - dotada de amplias instalaciones e insertada en el palacio ptolomeico en Alejandría; y el pionero de la ilustre Escuela Alejandrina donde se mantuvo mucho tiempo. Al parecer recibió educación matemática en la escuela Platónica de Atenas. Se advierte que los historiadores de la Matemática griega no dan - cabal crédito a todos los datos aportados por los árabes, ya que éstos tuvieron la propensión de rellenar inevitables lagunas de la historia con noticias inconexas en este animado ajetreo, y enlazar su cultura con la de los griegos y pueblos orientales; pero, aún así, no hay que negar credibilidad a sus aportaciones y aproximación de las diversas posiciones que intentaron definir la - vida de Euclides. La base de esta afirmación radica en el silencio de sus comentarios que guarda Proclo referentes al geómetra, donde no hubiera pasado --

(...) 10. 18

por alto esta consideración al referirse a la escuela Alejandrina, siendo como era el transmisor de sus tradiciones. Y algo más, según datos capturados por Proclo, Euclides tuvo ideas platónicas puras como razón de ser y llevar aportes metodológicos a la Matemática en donde es indudable el idealismo platónico con la filosofía del maestro

Toda esta expansión fue llevada dentro de un clima de ambiente progresivo y desenvolvimiento científico; gracias a los esfuerzos y dedicación de sus predecesores de Euclides, como Tales de Mileto (640-546 a. de C.), Pitágoras (580-500 a. de C.), Eudoxo de Cnido (403-355 a. de C.), Platón (428-347 a. de C.). Este último se interesó por la geometría al grado de poner una inscripción en el aula que decía: "Nadie traspase esta puerta sino sabe geometría", así era el nombre de la Academia, singularmente importante, por que, para Platón, la Matemática se caracterizaba por su aspecto intelectual "apoyándose en ideas puras por las que empieza, procede y concluye la demostración, diríamos un análisis regresivo que se determina a través del conocimiento; es decir, demostraciones rigurosas, preparando el camino que Euclides había de transitar. Y que el mismo Euclides pone por objeto final de sus elementos la construcción de las figuras platónicas (cuerpos regulares).

Dentro de su vida y obra se dan otros factores permanentes; que ordena varios trabajos de Eudoxo de Cnido, que mejora los de Teteto (?), que reunió y dió demostraciones de todo lo que sus predecesores no habían probado con suficiente rigor, componiendo así los "Elementos de Geometría", que hoy comentamos, admiramos y analizamos especialmente por el orden que allí reina, por la elección de teoremas y problemas tomados como fundamentales, ya que no inserta todos los que podía dar, sino solamente aquellos que son aptos para los Elementos, y también por la variedad de razonamientos, los cuales tienen un valor eterno por sus vigorosas corrientes, dado que convence unas veces partiendo de los hechos, otras de las causas, pero siempre son irrefutables, exactos y dotados de una experta disciplina de carácter científico. (...)

La multiplicada obra euclideana identificada en griego con el nombre de "Στοιχεῖα" y en latín "elementa", la cual conocemos actualmente por los "Elementos", palabra con la que los antiguos griegos designaban las colecciones

(?) Matemático (...) 15, 18, 19

de teoremas y problemas de geometría que se deducían unos de otros a partir - de ciertos principios. Todavía muchas soluciones que dió Euclides a problemas esenciales en la geometría, han provocado "consecuencias útiles" para el pensamiento abstracto de ayer y hoy; la persistencia de los teoremas matemáticos, que se mantienen inconmovibles hace ya más de 20 siglos: no hay duda que se-- guirán siendo durante mucho tiempo el ejemplo más cumplido que se pudiera - citar de una "teoría deductiva" con el aparato lógico que la sostenía, no era en modo alguno irreprochable.

Provoca el malestar de los filósofos la primera impresión que produce el sistema: es ser frágil en su vínculo unitario, el grado de evidencia ya no es el mismo, las proposiciones se refieren a construcciones, otras a propiedades y el quinto postulado tiene todo el aspecto exterior de un teorema.

Y bien, el proceso histórico que dió lugar a la crítica principia, a pesar de la claridad de un problema, el recurso lógico es: buscar un resultado extraño para nuestra intuición, que no riña con la lógica. Es claro que hoy, después de más de 2000 años de crítica, no valoramos igualmente ese esfuerzo y la admisión táctica e implícita de otros postulados. Por lo tanto, esa sensación de malestar desaparece si se analiza el sistema a fondo, reconocer en el sistema, la base de las construcciones geométricas y por tanto la existencia de las figuras.

De esta manera, aunque no vacila el geómetra, tiene el problema de convencer, que muchas proposiciones eran conocidas antes de él, pero faltaba organizarlas lógicamente, que fue lo que hizo finalmente. Su contenido, proviene en gran parte de los pitagóricos, Eudoxo, Platón y Aristóteles, por los - cuales Euclides era adepto, y fue por ellos que adquirió poderosas ideas. Y su trato con filósofos mejora, aunque pierde algo de significado por el quinto postulado, pero gana el interés de sistematizar la geometría de aquel tiempo; hay varios teoremas en los "Elementos", a bien decir, que no son de él y repito; su verdadera grandeza radica en la ordenación de la geometría de su - época con un sistema deductivo. El encuentra pocas propiedades geométricas - sencillas y se propone a demostrar todas las restantes como una consecuencia lógica de ellas, les llama axiomas o postulados, también definiciones y axiomas. La distribución se da en dos grupos: postulados y nociones comunes. No da demostración alguna para estos. Euclides eligió como postulados a proposiciones que tuvieran sus raíces en la experiencia común; los imaginó como ciertos y evidentes de acuerdo a la realidad.

Impregnado por la filosofía que tuvo Euclides de los diferentes sofistas de casi todas las escuelas principales del Mediterráneo como son Samos, Quíos, Atenas, Rodas, Alejandría, etc. Da un nuevo auge para las bases en los procedimientos de la dialéctica y sus viscisitudes; la intención principal es que - hay entre las ciencias, grados diversos de abstracción y racionalidad, que - permiten ordenar en serie hechos, ideas y palabras; esta consideración da a - su vez, la posibilidad de una nueva lectura abstracta, racional, concreta, empírica y material; y por la simplicidad ganada, podemos emplear las palabras de lógica formal. Por que, también fue considerado el Padre de la Lógica Matemática, por que compendía y abarca el panorama de la realidad física con su - libre pensamiento, donde una simple abstracción explica con desacostumbrada - claridad la idea de "concepto" o "término" para punto, recta y plano y conjuga a la vez estos objetos en figuras o esquemas, problemas profundos y superficiales, verdades o absurdos para algunos pensadores, provocando así la desconfianza de los matemáticos. Por eso, los "Elementos" estan lejos de alcanzar la perfección aspirada por Euclides, pero han merecido la admiración de - la humanidad estableciendo un modelo de demostración rigurosa en su procedimiento axiomático, que tanto bien le ha hecho a la Matemática Moderna.

Hablar del "quinto postulado" sería caminar y tocar la piedra con la - cual tropezaron los más doctos precursores de Euclides, la piedra que cimenta en la actualidad toda la geometría y que, sólo la crítica constructiva tenía el derecho a obscurecer el gran monumento de su obra, pues todos aquellos intentos por demostrar dicho postulado a través de veinte siglos fracasaron; de ahí, la firmeza de esa vieja geometría, modelo de arte, y hoy sin duda es el antecedente de las nuevas geometrías. Y según los críticos, el axioma de las paralelas jamás fue susceptible a una demostración para eliminarlo como postulado y poder así limar la cresta natural de aquella piedra del camino.

Su obra se formó por trece libros cuyos temas son conocidos, se abren - con una serie de definiciones (claro es, en el vocablo utilizado por Euclides y son más bien "terminos") de tal manera que su función consiste esencialmente en fijar la existencia, de modo único, de los entes fundamentales: punto, recta, circunferencia y poder así construir su geometría. Los libros I, II, IV, y VI, tratan de líneas, ángulos, áreas y figuras planas regulares, tienen ---- características pitágoricas, el libro III habla de círculos, el libro V y no - muy conocido, justifica propiedades de las proporciones atribuidas a Eudoxo, - y el VI habla de las figuras semejantes, es decir, la aplicación de esta teo-- ría a las magnitudes geométricas; los libros VII, VIII y IX son aritméticos y dan una descripción básica de lo que hoy conocemos como la Teoría de Números. El libro X toca el tema de la irracionalidad del número, muy importante para los analistas; es clave puntualmente para el método exhaustivo; después del -- libro XI de geometría elemental del espacio en donde se estudia algunas propiedades de las rectas y planos; el XII, que trata de cuestiones planas y del espacio, incluye los teoremas para cuya demostración se hace uso del método de - exhaución y finalmente tenemos el libro XIII, que comprende una serie de pro-- piedades de geometría plana y del espacio, trata de la construción y compara-- ción de los cinco poliédros regulares inscritos en una esfera y con la demos-- tración de que no pueden existir otros, de los cinco conocidos como regulares de Pitágoras y alabados por Platón, así pues, se cierran los "Elementos" de -- Euclides. En uno de los trabajos más lúcido y bellos que se haya escrito en la Matemática, una obra geomética de la Euclides había tratado abundantemente con su disponibilidad característica y es útil recordar la consecuencia obtenida al haber recogido suficientes datos específicos y arreglarlos con admirable orden para exponerlos, fenómeno muy interesante conforme a las exigencias de-- mandadas por la cultura griega. Es tanta la substancia derramada, que de - - acuerdo a los cánones de la historiografía científica, se inició a desentrañar al material técnico ya construído, algunos fragmentos han llegado hasta noso-- tros para los cursos elementales que tuvimos en aquellos años mozos y preescolares en donde indudablemente nunca se nos mencionó la procedencia de la geometría que estamos trabajando y que perduró en la enseñanza durante más de dos - milenios.

NOTA: Antes de continuar, la señal (...) significa la referencia - a los libros númerados de esta bibliografía que tiene el cuaderno. Por ejemplo: (...) 24 , 10 , 12 , 16 .

Sin embargo, sin esta obra tal como nos la presentó sería imposible en-- contrar verdades nuevas, además no se llega a éstas combinando ciegamente los resultados obtenidos, como ya desde la antiguedad, y quizá en el seno mismo - del recinto alejandrino se ocuparon de revisar otros trabajos en su extructura original, en donde decenas de problemas poco o mal asistidos científicamente fueron intervenidos y esto caracteriza varios hechos, antes de Euclides y después de él como acaese, por ejemplo con el teorema de Pitágoras, proposición número 47 de los Elementos libro I.

Todos los que de algún modo hemos tenido la oportunidad de estudiar el teorema pitagórico, pensamos o creemos que fue el propio Pitágoras quien lo invento, pero la historia muestra cosas diferentes.

En un caso particular esta es la de-- mostración griega del teorema para un triángulo isósceles. Donde Sócrates en el Menón de Platón, usa el esquema que señala - la figura (e_0) para convencer a un joven esclavo de la verdad de un teorema.

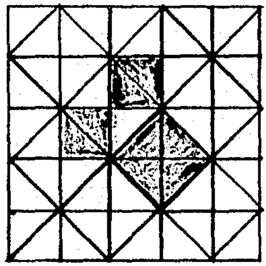


Fig. (e_0)

Críticos contemporáneos y entre ellos Arthur Schopenhauer en su tratado de filosofía, "The World as Will and Idea" lanza sin razón aparente, un fuerte ataque a la demostración euclidiana del teorema, según la cita dice "estamos obligados a admitir que la conclusión es cierta, pero nos sentimos estafados de alguna manera", al no digerir esta verdad, somos como un médico que conoce la enfermedad y como curarla, pero no comprende el por qué de la cura resulta efectiva. Resulta exagerada su especulación, sin embargo, con esta es-- tructura espacial un lector puede decirlo pragmáticamente como él lo señala - eludiendo el camino recorrido por Euclides, e ir allí directamente. Pero, no obstante, estamos hablando de conocimientos matemáticos y su observación ca-- bría si analizamos la profundidad del comentario didácticamente en la actualidad, y siento sinceramente que no estaba equivocado Schopenhauer; como tampoco resultaría mala la aportación de otro personaje tal como fue un Presidente de los E.E.U.U. James A. Garfield con una de tantas demostraciones de la proposición 47 tomo I de los Elementos, donde aparece por primera vez un Semanario en Boston llamado "The New Englad Jornal of Educatión" 1o. de Abril de 1876. Vea figura (e_1).

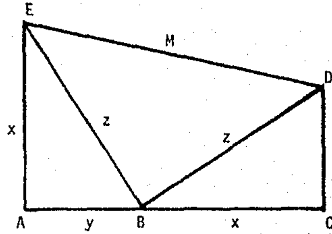


fig. (e_1)

Esta es su demostración; recuerde el área de un trapecio con base mayor y menor; si duda que $\triangle EBD$ no es rectángulo, trace un punto medio M en ED y construya una semicircunferencia con radio MD, lo cual es seguro que contenga al punto B y E, luego entonces por el teorema de Tales el $\widehat{EBD}$ es recto.

El área total es igual a el área del triángulo EBD más 2 áreas de los triángulos ABE y BCD que son rectángulos por construcción, en donde resultaron estos últimos ser congruentes. Digo que, al igualar áreas obtengó:

$$\frac{(x + y)\ (x + y)}{2} = \frac{z \cdot z}{2} + 2\ \frac{x \cdot y}{2}$$

$$\frac{(x + y)^2}{2} = \frac{z^2}{2} + x \cdot y$$

Multiplicamos por 2 toda la igualdad, al fin estamos en pleno siglo XX.

$$(x + y)^2 = z^2 + 2xy$$

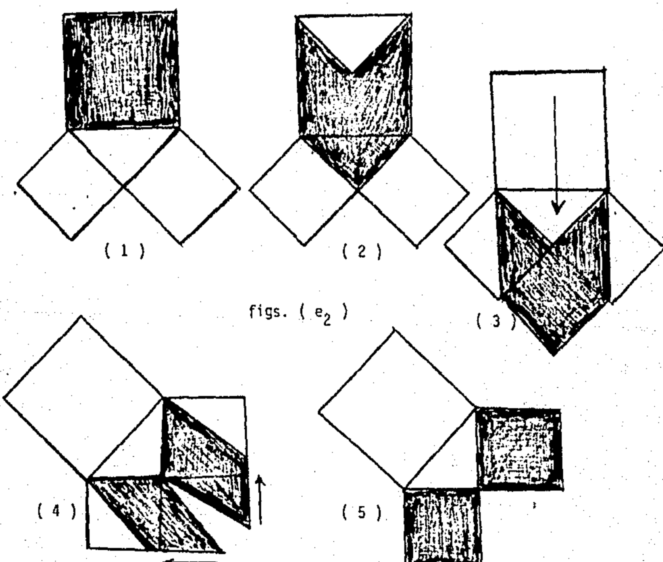
$$x^2 + 2xy + y^2 = z^2 + 2xy$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$ resultado esperado.

Demostraciones de este importante teorema con poco esfuerzo aparente, de una larga cadena de razonamientos deductivos con un sólos objetivo de llegar a la comprensión, y tenemos bastantes, usted lector decide cual ha comprendido mejor después de haber visto una tercera de estos personajes que he citado; la griega, mostrada por Sócrates, y la de un aficionado presidente o la deliciosa demostración de Barvalle.

Las preferencias de la obra euclidiana pueden ser tan grandes como se desee, pero la armonía es increíble e interesante cuando esculpen su forma de pensar en los contrastes artísticos, psicológicos, científicos y demás, de estas diversas almas que simpatizan con la delicia geométrica en su respectiva época, como pasatiempo e investigación.

No menos hermosa, elegante, sutil y dinámica, puede ser otra demostración que la presentada en cinco pasos y publicada en 1945 del teorema pitagórico y pertenece a un matemático de Nueva York, Herman Barvalle, es quizás la más bella para mi gusto, por lo elocuente. Vea figuras (e_2). (...)



figs. (e_2)

En unas cuantas palabras sencillas, delicadas y narrativas, Euclides resumió la situación y dió la fórmula plagada de detalles en forma sensitiva y suave para los matemáticos que le continuaron.

Muestra algunos principios de concepto, veintitres definiciones para la geometría plana, cinco importantes postulados entre otros, cinco nociones comunes y empieza a conjugarlos deductivamente y esto es el chispaso de una flama que nunca más se apagará, y ésto es lo que yo llamo "UNA PARTICULA DE LA GEOMETRIA EUCLIDIANA", los comentarios, demostraciones y las consecuencias -- quedan en una lista muy corta de problemas domésticos que encontrará en el -- resto de este cuaderno para alumnos del Bachillerato, como el Colegio de Ciencias y Humanidades, y especialmente del plantel sur, acorde con sus programas actuales.

Sin duda alguna, hoy día el producto de su trabajo provoca, motiva e -- inspira a otros a seguir su método; y así destaca uno de los triunfos científicos jamás escritos.

Un hombre del que casi no se sabía gran cosa, sólo su inmortal obra, sin embargo, sus postulados expuestos en los primeros ejercicios de esta tesis sobre todo el quinto, donde otros estudiosos lo sintetizan diciendo "Que por un punto exterior a una recta sólo puede trazarse una y sólo una recta paralela a la primera". Confundian las críticas y los ricos comentarios de sus predecesores, y una vez recopilada su obra, él presupone la deducción material que le da forma, y ésta exige trabajo inductivo previo a reunir el material que organiza al encontrar un sistema mínimo de principios conceptuales que se puedan deducir en su funcionamiento a falta de una demostración propiamente dicha. Y para los límites trazados de objetividad lleva un carácter cuasi-mecánico en nuestros razonamientos, pero aûn así tenemos conciencia que la gente dedicada, aficionada, artista y científica prometen resultados en las di-- versas geometrías se llamen como se llamen, a partir de ésta, además somos enseñantes hoy día potencialmente y aûn no queda satisfactoriamente acentuada - la conformación de la Geometría con la cual nos iniciamos.

I N T R O D U C C I O N

El sentimiento de la evidencia es engañoso y su dominio varía según el - temperamento intelectual de cada uno en el curso mismo de una demostración, y para necesidades de ésta, donde la experiencia en nuestra escala de la deducción geomética clásica se revela defectuosa en muchos puntos, no sin poder -- justificarla, sino por una suerte llamada la evidencia intuitiva, tanto por - su uso propiamente científico como por sus implicaciones filosóficas, para -- llegar a ser una ciencia racional. De ahí el papel pedagógico privilegiado -- que tiene la Geometría, y desde entonces no ha dejado de reconocérsele. Si se le hace estudiar a los niños, es menos para enseñar algunas verdades, que para disciplinar un espíritu sano, considerando que su práctica da y desarrolla el hábito del razonamiento rigurozo. (...)

Una demostración o una definición no es más buena o mala, es solamente - mejor o menos buena que otra; y esta cualidad, a su vez, varía según el lector o el oyente. Pedagógicamente, la buena definición, la buena demostración, es la que el alumno comprende. Esto puede llevar lejos. Para un estudiante, - la verdadera definición de la recta, triángulo, elipse, etcétera; no es la -- que aprende de memoria, sino algo como: "una línea hecha con regla", "una figura de tres lados rectos", "un círculo alargado", etcétera, etc. La buena demostración no es la que escribe en el cuaderno, es la figura que la acompaña. Si solamente la buena demostración es el argumento eficaz ¿dónde nos detendríamos?

Se discute aún para saber si la consideración de las figuras es esencial a la especulación geométrica. Eminentemente que sí, por que se observa que -- las demostraciones geométricas clásicas son tomadas como modelos; entonces es verdad que la intuición, contemplación y aún su construcción deben intervenir ahí.

Esto nos hace pensar que un concepto entre los primero principios como recurso a proposiciones primeras invoca a la imposibilidad de demostrar todo, y las razones que valen para la demostración, valen evidentemente para la definición. Se define un término mediante otros términos y estos a su vez mediante otros, de suerte que para evitar la regresión al infinito es necesario sin duda detenerse en algunos "términos no definidos" los cuales dan un tipo de alfabeto geométrico, que sirva para deletrear, es decir entran como elementos para componer las definiciones, pero ellos mismos son indefinibles. Estos indefinibles son los que conviene enunciar a la cabeza de una teoría deductiva y no las definiciones, estos intervendrán posteriormente, para justificar proposiciones nuevas con la ayuda de las proposiciones primeras. Definir "término" que también puede traducirse a "concepto" o "deficinión" y como definiciones no tienen más que su apariencia se reducen a simples descripciones empíricas, comparables a las que daría un diccionario, son propiamente "DESIGNACIONES", esto podría pensar alguno de nosotros, pero para Aristóteles y Platón, "término" desde su punto de vista, tiene un significado REAL antes que NOMINAL, esto es, nos indica el objeto al cual se le atribuye de cualquier modo la "EXISTENCIA" fuera de nosotros en un mundo inteligible. Así el pensamiento une conceptos elementales para engendrar conceptos más elevados. Por otra parte, la más notable definición Euclidiana aparece a menudo como "fórmula recopilativa" de un desarrollo histórico de los conceptos y precisamente a través de la historia, reciben una explicación plausible. (...)

Por ejemplo, punto, recta, plano carecen de una definición precisa, pero lo que se puede asegurar es que cada uno de ellos es una noción abstracta y para manejarla se requiere de una representación concreta de ellos, de aquí la importancia de las figuras.

Toda materia cualquiera que sea implica tener herramienta propia para llevar a cabo investigaciones, prácticas o pruebas de estudio; así por ejemplo: un biólogo necesita principalmente un microscopio, probetas, mechones y demás. Un astronomo requiere de un teléscopio, cámara fotográfica, básicamente, y otras cosas.

Las herramientas en geometria son: el lápiz, regla, compás, transporta--

(...) 9 , 15

dor, juego de escuadras, etcétera, etc. La utilización asecuada de esta herramienta garantiza y dá facilidades en un intento por definir, postular, trazar algo auxiliar y hacer una que otra demostración sencilla etc.

Si deseamos que se detecten problemas que requieren de asesoría matemática, sin duda nuestros recursos propios son buscar y dar la solución a problemas simples en las diversas necesidades fundamentales.

Lo cierto es que, en el desarrollo auténtico de estudiar se recomienda - tener capacidad de lo concreto, para comprender el cambio controlado que nos proporcionan los símbolos, los números y las figuras. Valorar las perspectivas de un largo desarrollo que permitió diferenciar niveles de experiencia y optar por recopilar información diversificada en la extructura formal para -- que coadyuve a formular la participación en el ámbito geométrico y observar - formas que satisfagan un criterio complementario.

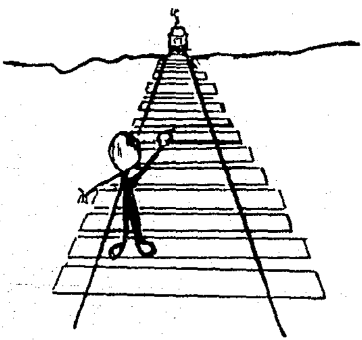


Fig. (e_3)

Por ejemplo, es de interés, si consideramos como líneas rectas los rieles de una vía en un tramo plano, al observar los rieles éstos son paralelos sin duda alguna, sin embargo el - paralelismo de los rieles de vía del tren, "cambia" al verlos en sentido - perpendicular con respecto al horizonte, estos aparentan cortarse en algún punto, fig. (e_3); pero la realidad en la Geometría Euclidiana muestra que - no puede ser.

Esta forma de verlo así, busca acceso debajo de toda evidencia entregar una idea más al postular "el punto al infinito", y poder así argumentar, o -- deslizar la sospecha de que las líneas paralelas se cortan en un punto, ase--

gurarlo por naturaleza. La cual ya existe en otras geometrías, las llamadas - no euclidianas; comprender dicho postulado en una primera impresión, parecéria una exposición espectacular, e incluso ante nuestros ojos, bajo nuestros pies pude darse tal autenticidad, como mediación de la realidad.

Solo la reflexión proporciona la justa medida, y al mencionar la tendencia a nuevas geometrías esto implica dar crédito a que en éstas existen - cuadriláteros con seis vértices en-- tre otras variedades; si partimos de la idea de abstraer lo siguiente, -- preguntándonos:

¿Con cuántos puntos trazamos una --- recta? ______________.

¿Con cuántas rectas determinamos un punto? ______________.

Y ahora ¿con cuántas rectas formamos un cuadrilátero ? ____________.

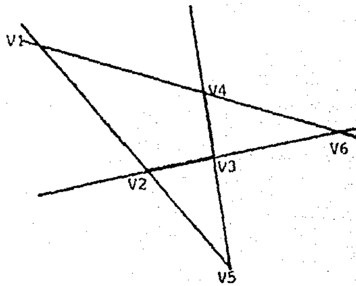


Fig. (a)

De estas cuestiones primitivas, puede verse en la figura (a) un bosquejo de tal cuadrilátero.

Seguramente estará preguntándose ¿Qué sucede con un cuadrado o rectángulo? Si se combina la caricatura (e_3) y las figuras (a) (b) y (c), obtendrá sus respuesta.

Fig. (b)

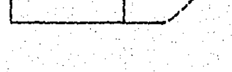


Fig. (c)

Más aún, pongamos una idea en exceso, exploremosla de acuerdo a lo que miramos, es decir, si pudieramos prolongar la vía del tren sobre la superficie del planeta se podría afirmar que la línea recta no existe,______. Estaría usted de acuerdo con esta trivialidad de que la recta es una circunferencia ¿si o no? ______, pero antes analice la figura (d). Esto sería condimento para otra geometría cuyos orígenes fueron la crítica permanente de una extructura creativa a la Geometría Euclidiana.

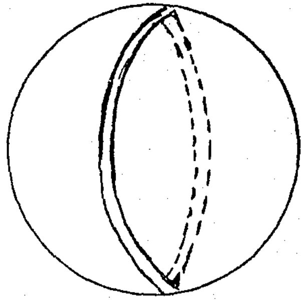


fig. (d)

Si usted duda de los efectos anteriores también dude en este principio de carácter universal y puede constatarlo.

Convenzace o proteste sobre esto que mira en la figura (e), que su lápiz se dobla al ser introducido al recipiente con líquido agua, ¿Por qué ocurre esto e investiguelo?

Su argumentación no elimina la posibilidad de tener hoy día la clara idea de constituir una verdad evidente. Como acaese con la definición número 7 euclidiana, más en sus efectos podemos responsabilizar e involucrar otras verdades.

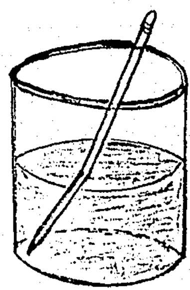


fig. (e)

D_7 "Una superficie es plana si podemos trazar sobre ella una línea recta en cualquier posición".

Si apreciamos este principio que caracteriza a la geometría Euclidiana, y sin entrar en una discusión detallada de los pormenores, lo cual se podría dar comúnmente de manera sofisticada hoy día en la matemática moderna, conllevaría a plantearnos con estudiantes de otros niveles escolares diferentes pre guntas recreativas con sentido crítico de una forma de apoyo en la simplicidad, sencillez para estimular una actividad esencial, no daña la madurez de quienes se han entregado al conocimiento profundo de la Geometría.

Al trazar una recta sobre la superficie, la admitimos como tal; vea D_7 y figuras (f), (g) y (h), pero si sobre esa superficie encimamos una alfombra, papel o un mantel en donde estos toquen todos los puntos de dicha superficie, es claro que, esta seguirá siendo plana, y es más podemos trazar otra u otras rectas sobre ella, sin embargo al arrugar la alfombra, papel etc., una vez trazadas las rectas, ocurre un fenómeno muy extraño, la línea existe, pero ya no es recta, y por ende la superficie tampoco es plana y esto nos plantea algunas preguntas: ¿Cómo podríamos explicar lo sucedido? ¿No será que la línea recta es algo relativo? ¿En los ángulos también esta sucediendo algo común a la anterior pregunta?, ¿Cómo es que el punto de intersección P permanece invariable? ¿Será qué todo depende de la superficie sobre la que se trabaja? ¿Los puntos que forman éstas líneas disminuyen o aumentan? ¿Sí estiramos la superficie, devolviéndola a su posición original, el diseño de las líneas se recuperará? ¿Cómo alojaríamos un razonamiento; el de tener en la mano una hoja de papel hecha bola, desdoblarla y sobre ella trazar líneas rectas? ¿Será que estamos poniendo entre dicho la geometría plana? ¿Qué será un ángulo? ¿Qué será un punto? ¿Que será una línea? ¿Qué será el plano euclidiano? ¿Qué consecuencias acarrea alterar reglas ya establecidas en un sistema geométrico formalizado? etcétera.

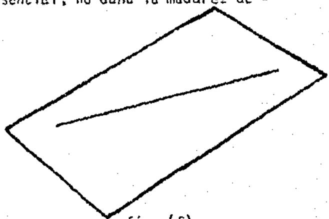


fig. (f)

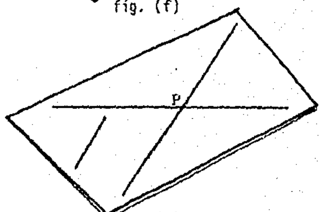


fig. (g)

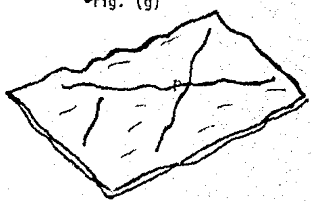
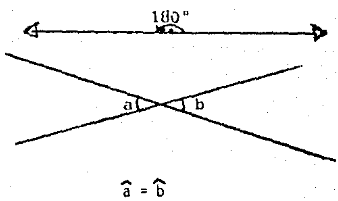
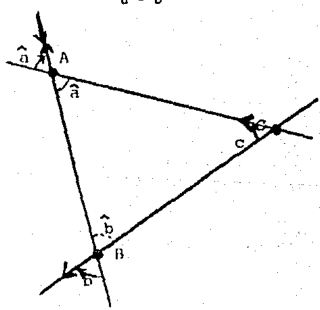


fig. (h)

Pero, al momento que el lector deba entrar en los detalles, significa poner gran cuidado con su experiencia, ser razonable en lo ya observado, que su herramienta sea compatible con la lista de términos apropiados. El problema, como todos sabemos no es apremiante, la intuición es una facultad elástica como criterio de verdad, los axiomas fueron afirmaciones verdaderas con respecto al plano y al espacio, pero si alteramos el plano, en nuestro caso (la superficie), dudosamente los postulados, definiciones, nociones comunes, teoremas se cumplen.

Pongamos más ejemplos, a fin de dar ideas al quehacer de los jóvenes estudiantes, por ejemplo en un artículo de la revista "Matemática y Enseñanza" de la facultad de Ciencias, encontre una configuración para demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos (180°). (...)

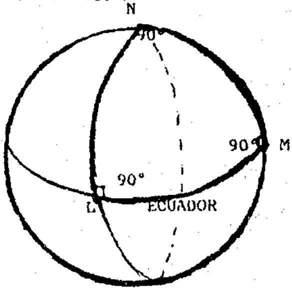




Los conocimientos e imaginación que requerirá el estudiante son pocos al respecto. Primero que conozca la medida de un ángulo llano, segundo que los ángulos opuestos al vértice formado por dos rectas sean iguales, tercero y último tener imaginación, para aceptar el siguiente recorrido sobre las líneas rectas del triángulo ABC, si avanzamos de A a B en línea recta salimos y llevamos una dirección al llegar al vértice B giramos sobre nuestro eje y apuntamos hacia ($B \leftarrow$), pero en esto, generamos un ángulo b, igual a $\hat{b}$. Si recorremos en reversa la línea BC, en la posición que ya teníamos, al llegar a C, hacemos otro giro generando c y quedamos apuntando en dirección al vértice ($A \leftarrow$), luego recorremos el lado $\overline{CA}$ con esta dirección y al llegar al vértice A giramos y generamos el ángulo a, terminando así ($\rightarrow\leftarrow$) nuestro recorrido. ¿Qué sucedio en la dirección de salida y de re-

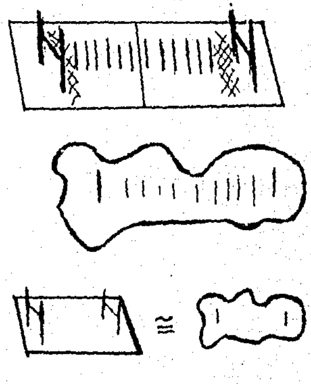
(...) 11

greso?. Simplemente gire 180°, es decir $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180°$.



Pensando macroscopicamente y abusando de nuestra imaginación, si este recorrido se pudiera realizar para un triángulo L M N de enormes lados sobre nuestro planeta, hipotéticamente partiendo del hecho que pisamos una superficie plana, concepción que se tenía en la Edad Media, obtendriamos un resultado interesante, al tomar la octava parte de la superficie terráquea según muestra la figura, resultarían giros de 90° en cada vértice del triángulo, y el efecto de la trayectoría de acuerdo a esto, sobran 90°. Lo cual contradice la anterior demostración; digo entonces, que la superficie que piso no es plana, luego la tierra es redonda.

En fin, formular así declaraciones pueden suministrarnos información importante a desarrollar en un sistema formal de las formas sin sentir la necesidad de los mayores argumentos. Simplemente llevar a cabo la percepción de las formas, hasta llegar a obtener conceptos de naturaleza geométrica, entre distinguir curvas cerradas y abiertas, interrelaciones entre ángulos recto y obtuso, superficies, cuerpos esféricos, cilíndricos, etcétera. Estos conceptos se adquieren de manera expontánea sin necesidad de que nadie nos las enseñe.

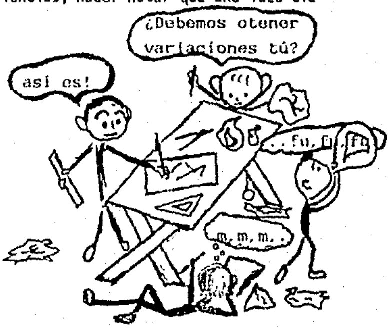


figs. (e 4)

Por que, ya siendo obedientes al diseño abstracto que posee una extructura determinada, con reglas expresas y bien establecidas en su campo, no podemos alterarlo; y si lo hacemos, podrán empobrecer o enriquecer nuestro tiempo libre. Por ejemplo en los esque--

mas (e_4). Algunos sabemos que en un juego "Y" existen ciertas reglas básicas, legales y expresas dentro de una área, administradas por A, B ó C personas, para llevar a cabo el evento deportivo. Sin embargo, nos damos cuenta -- que existe este mismo deporte en un terreno irregular, lo denominamos "la cascarita" e imita estas reglas, sin importar la irregularidad de la cancha, ¿no sé, si usted lo haya jugado alguna vez?

Esto significa que las deformaciones no alteran las reglas, puede ser un destello isomorfo y no es casual. Pongamos más ejemplos de innovaciones ya -- adaptados a comprender, novedosas experiencias; hacer notar que una idea clara y distinta, es lo real.



Podemos disponer de lápiz para hacer las gráficas, un curvigrafo, tela, papel, una liga, globos, un montón de plastilina y obtener formas. vea figuras (i), (ii) y -- (iii).

LAS FORMAS.

CON LA LIGA :

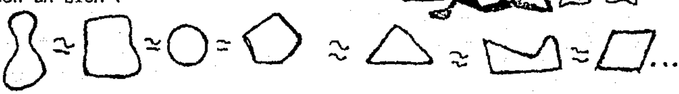


fig.(i)

CON EL CURVIGRAFO :

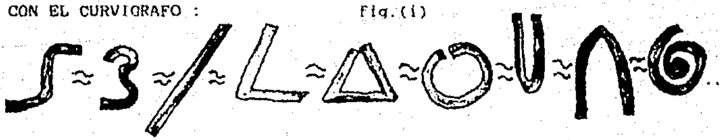


fig.(ii)

CON LA PLASTILINA :

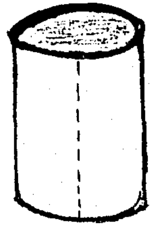
fig.(iii)

Como actividad y usando su lápiz o pluma, trace sobre la tela, papel o un globo desinflado, las figuras descritas por el curvígrafo o la liga; luego infle su globo, doble el papel o tela. Debe observar variaciones.

¿De dónde obtuvó las formas hechas con la plastilina?

_______________________.

Problema, se tiene un bote ya construido, de manera tal, que la cara lateral del mismo al despegar sus tapaderas y hacer el corte me queda un rectángulo de lados p y q. Es decir vea las figuras (iv) y (v)



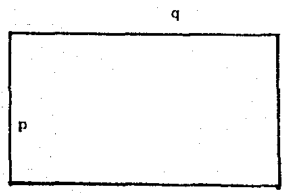


fig. (iv)

Diga que área tiene éste rectángulo ______.
Pero si usted ubiese tomado la misma parte del bote y le hace un corte en la forma que indica la fig. (v). ¿El área formada será la misma? _______.
¿Y los lados, los ángulos del rectángulo permaneceran invariantes?_______.

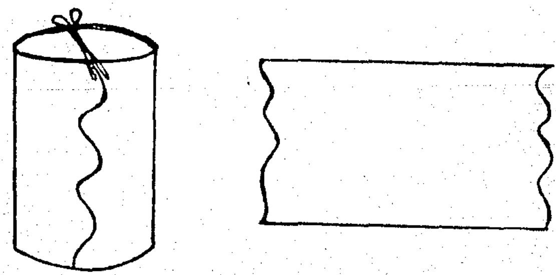
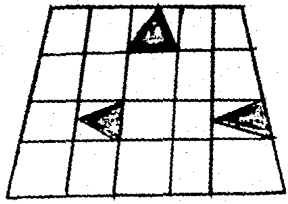
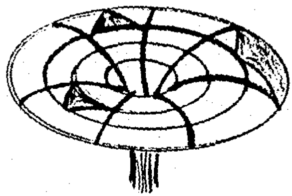


fig. (v)

- Es automática la distinción de este par de planos, uno de ellos es euclidiano, donde para cualquier triángulo se cumple que la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos, y el otro curvo, en donde esta misma propiedad es variable, además ya no son válidos los principios de Euclides, pero quiero darle un perfil orientador dentro de un comentario más estimable.

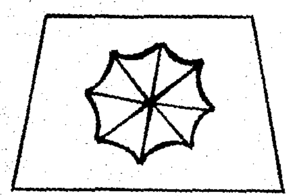


(i)

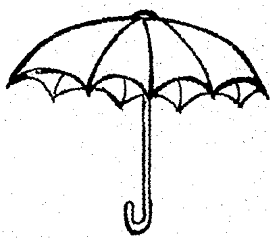


(ii)

- Desde luego, al hacer el diseño para un paraguas trazado sobre lo ya plano y recortando líneas en caso de ser tela, manejaríamos otros materiales adecuados como varilla especial que la harán tensa después, todo esto es cierto, pero es precisamente que estamos deformando el plano en otro al ser estirado, luego, su comportamiento de las figuras que grafiquemos una vez terminado el trabajo resultaría increíble reconocerlas, y demuestran estos entes ser una labor tangible, el ejemplo en sí es un desafío para nuestra óptica. Ver Figuras (e_5) en su respectivo inciso.



(iii)



(iv)

figs. (e_5)

Tomar en serio esta flexibilidad del pensar geométrico nos permite comprender las reglas impuestas por la mente, y pone de manifiesto una característica para el costo de la óptica, con ciertas relaciones en común hoy a la luz del día; responsablemente seguiremos buscando elementos tangibles, modelos algebráicos actuales así como herramientas para justificar las nuevas --- ideas, para un acceso más efectivo en el desarrollo contemporáneo de sus propósitos o logros interpretativos y modernos. Ideas que nunca dejarán de ser un desprendimiento de la substancia original implementadas por gente anterior a Tales de Mileto entre otros pensadores como: Sócrates, Platón, Aristóteles, Pitágoras, Eudoxo, Eratóstenes, Hipócrates, Arquitas de Tarento, Erón, Eudemo, Demócrito, Arquímides, Apolonio de Pergamo, Diofanto, etcétera. Imposible detenernos aquí con la lista de innumerables pensadores que ayudaron a -- desentrañar algunas verdades matemáticas. "Euclides el geómetra" personifica los ideales y el esfuerzo intelectual de sus antecesores en un esquema racional, elaborándose así, la geometría que hoy lleva su nombre.

1) Ejercicio correspondiente al párrafo anterior. Trace una recta en diagonal y colóque esta pequeña lista de hombres ilustres unos son anteriores mientras que otros son posteriores a Euclides, sobre ella ubíquelos cronológicamente.

2) Diga también: ¿Qué es el plano en las materias de Física, Biología y Astronomía? ¿Dé un punto correspondiente en cada uno de estos planos? y ¿Cuál será la herramienta indispensable para trabajar en el plano de la - Física?.

PARTE I

EJERCICIOS Y PREGUNTAS

3) ¿Qué proposiciones se admiten sin demostración en geometría?

____

4) Busque para cada uno de los siguientes conceptos 3 diferentes definiciones de: punto, recta y plano.

5) Aprenderse muy bien estos postulados:

P 1.- Una recta puede trazarse desde un punto cualquiera hasta otro.

P 2.- Cada recta finita puede prolongarse contínuamente y hacerse una recta limitada o indefinida.

P 3.- Una circunferencia puede describirse con un centro y -- una distancia.

P 4.- Todos los ángulos rectos son iguales.

P 5.- Si una recta que corte a otras dos forma con éstas, ángulos interiores del mismo lado de ella y sumados sean menores que dos rectos las dos rectas, si se prolongan- indefinidamente, se cortarán del lado en que dicha suma de ángulos sea menor que dos rectos.

P 6.- Toda figura puede hacerse cambiar de posición en el plano sin alterar su forma ni sus dimensiones.

6) Hacer lo mismo con las Nociones Comunes.

NC1.- Las cosas que sean iguales a la misma cosa también son iguales entre sí.

CN2.- Si a cantidades iguales se suman otras también iguales- los totales serán iguales.

CN3.- Si se restan cantidades iguales a otras también iguales, los residuos serán iguales.

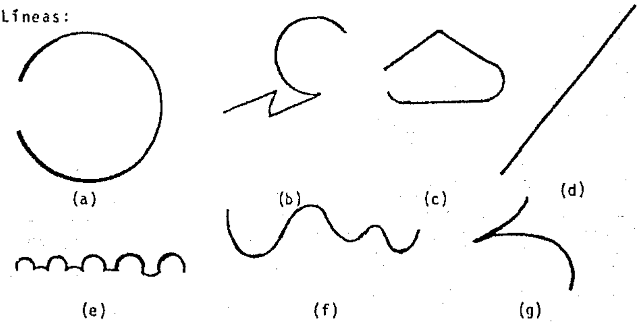
CN4.- Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.

CN5.- El todo es mayor que una parte.

NOTA: P 3 significa postulado número tres.
NC2 significa Noción Común número dos.

Según Euclides en su definición número 8: ángulo plano es la inclinación entre sí de dos líneas en su plano si éstas se cortan y no están en la misma recta. Por cierto podemos marcar diferencias en distintos tipos de líneas y ángulos por ejemplo:

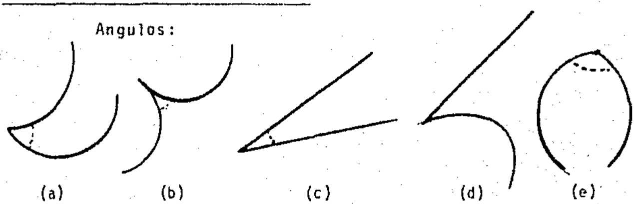
7) Líneas:



Todas, son líneas, pero sólo una de ellas es recta ¿cuál es?

____

8) Angulos:



Los cinco son ángulos pero sólo uno es rectilíneo ¿cuál es?

____

La definición 15 euclidiana de sus elementos indica a la letra. "Un círculo es una figura plana contenida en una línea, llamada circunferencia, tal que todas las rectas que van desde un punto particular hasta puntos de ella, quedando dentro de la figura son iguales".

9) ¿Cómo se llama el punto particular?

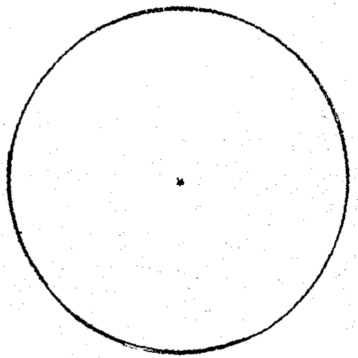


Fig. (e_6)

10) Marque con una regla sobre la figura (e_6) todas la líneas rec - tas importantes; tales como radio, diámetro, etc.

11) Problema. (imaginativo) si es- tuviera usted en la playa mi - rando el horizonte en una tar- de y cuando el sol se va ocul- tando cree que todas las lí -- neas ya mencionadas en el pro- blema anterior (9) puedan re - producirse en la figura (e_7).

De ser así hágalo en los res - tantes esquemas colocando el sol en cada gráfica.

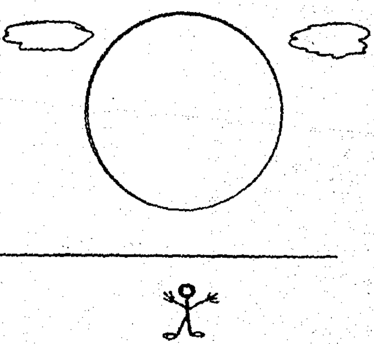
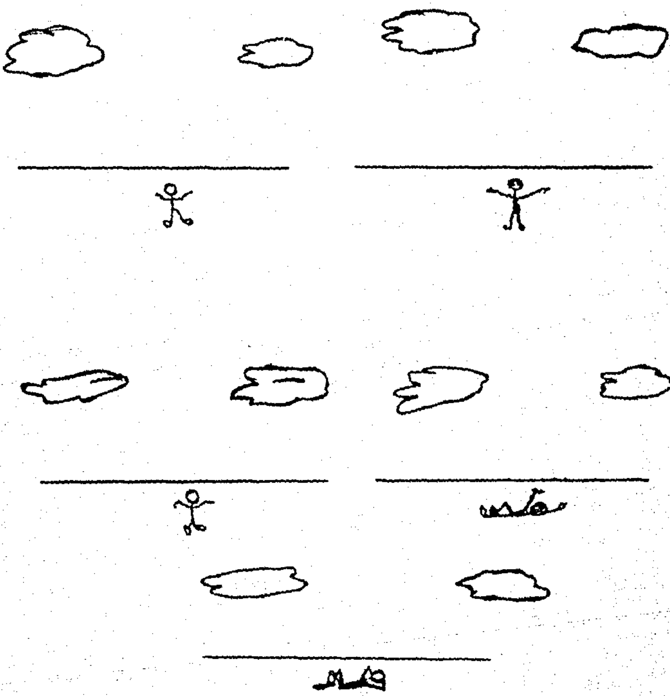


Fig. (e_7)



12) ¿Cómo se forma un ángulo?

____

13) ¿Qué herramienta usa para medir un ángulo?

____

14) ¿Cómo se llaman las unidades que usa para medir los ángulos?

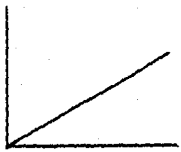
____

15) ¿Cómo se clasifican los ángulos?

16) ¿Cuántos ángulos conoce y que característica tiene cada uno? por ejemplo.

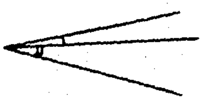
a) 

Agudo; ángulo menor que un ángulo recto.

b) 

Complementarios, son aquellos ángulos adyacentes cuya suma es -- igual a un ángulo recto.

Así como estos ejemplos grafique y defina otros cinco más.

c) 

Adyacentes:

d)

e)

f)

g)

- La recta se define como una línea que tiene todos sus puntos en una misma dirección.

17) La unicidad de élla la podemos constatar con una regla. ¿Cómo? __________

____

18) ¿Qué significa geométricamente la conocidisima frase: "completar cuadrados"?

19) Ilumina tu respuesta con algún ejemplo que consideres adecuado, mientras - use éste:

$$X^2 + 10x = 39$$

20) ¿Cuánto vale x^2 y y^2, si A = 1000 y donde $y=\frac{2}{3}x-d$? vea el - esquema.

21) Si dos ángulos tienen un mismo vértice y un lado en común y son exteriores el uno al otro ¿cómo se llaman? vea inciso c) problema 16

____

22) Con color y literales localice y marque algunos ángulos que aparecen en la figura (e_8), y dé el nombre de algunos de ellos.

_______________ _______________

_______________ _______________

_______________ _______________

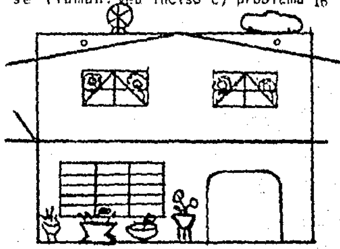


Fig. (e_8)

23) Haga otro esquema más rico con ángulos, estos pueden ser diferentes en su amplitud y que relacione estas ideas que usamos en la vida común, marque e indique su nombre de cada ángulo.

24) Si dos rectas en una superficie plana son cortadas por una tercera, dé los nombre de las relaciones que guardan algunos ángulos en la figura (e_9) y que ya están señalados; vea ejemplo:

$\hat{a}$ con $\hat{b}$ _______________

$\hat{a}$ con $\hat{c}$ _______________

$\hat{b}$ con $\hat{d}$ _______________

$\hat{c}$ con $\hat{d}$ _______________

$\hat{a}$ con $\hat{d}$ opuestos al vértice

$\hat{e}$ con $\hat{f}$ _______________

$\hat{e}$ con $\hat{g}$ _______________

$\hat{g}$ con $\hat{h}$ _______________

$\hat{h}$ con $\hat{f}$ _______________

$\hat{f}$ con $\hat{c}$ _______________

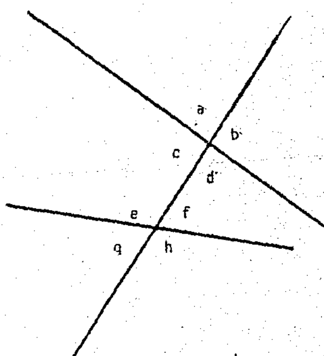


Fig. (e_9)

$\hat{d}$ con $\hat{e}$	____________	$\hat{b}$ con $\hat{g}$	____________
$\hat{e}$ con $\hat{h}$	____________	$\hat{a}$ con $\hat{e}$	____________
$\hat{f}$ con $\hat{g}$	____________	$\hat{b}$ con $\hat{f}$	____________
$\hat{d}$ con $\hat{f}$	____________	$\hat{c}$ con $\hat{g}$	____________
$\hat{c}$ con $\hat{b}$	____________	$\hat{d}$ con $\hat{h}$	____________
$\hat{b}$ con $\hat{h}$	____________	$\hat{c}$ con $\hat{e}$	____________
$\hat{a}$ con $\hat{h}$	____________	$\hat{a}$ con $\hat{g}$	____________

25) Si dos rectas son paralelas y las corta una tercera en el plano, diga ¿qué ángulos son iguales y cuáles suman dos rectos (180°)- de los señalados en la figura (e_{10})?

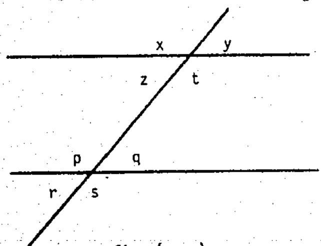


fig. (e_{10})

ángulos que son iguales por ser:

____ = ____ ____________

____ = ____ ____________

$\hat{x} = \hat{s}$ alternos - externos

____ = ____ ____________

____ = ____ ____________

____ = ____ ____________

ángulos que suman 180°

____ con ____ ____ con ____ ____ = ____ ____________

$\hat{p}$ con $\hat{x}$ ____ con ____ ____ = ____ ____________

____ con ____ ____ con ____ ____ = ____ ____________

____ con ____ ____ con ____ ____ = ____ ________

____ con ____ ____ con ____ ____ = ____ ________

____ con ____ ____ con ____ ____ = ____ ________

Vea los ejemplos y termine - de completar la lista. ____ = ____ ________

Si ya definió y entendió lo que es una recta, entonces procure definir las siguientes cuestiones:

26) ¿Qué son rectas paralelas?

____

27) ¿Cómo define rectas perpendiculares?

____

____

28) ¿Qué es una diagonal en un polígono?

____

29) ¿Cómo define la bisectriz de un ángulo?

____

____

30) ¿Qué líneas importantes tiene un triángulo trazadas de un vértice a su lado opuesto?

Menciónelas:

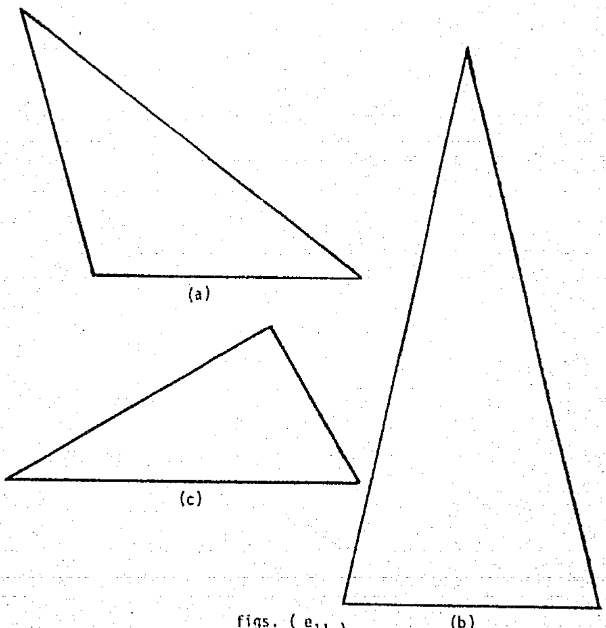
____

altura ________________________________

31) ¿Cómo se llaman los centros de algunas circunferencias formadas por estas líneas rectas? Vea uno de sus ejemplos.

Incentro, ________________________________

32) En los siguientes triángulos, trace para cada uno, un ejemplo concreto de estas circunferencias, nombre el centro y las líneas rectas que usó para figura (e_{11}) en los renglones de (a), (b) y (c).



figs. (e_{11})

(a) ______________________ formado por las ____________________

(b) ______________________ formado por las ________________

(c) ______________________ formado por las ________________

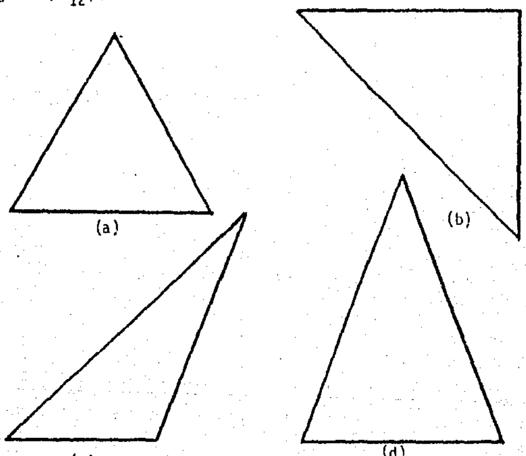
33) ¿Cómo se define la base y la altura de un triángulo?

____

34) ¿Cuántas alturas tiene un triángulo?

____

35) Trace las alturas de cada triángulo de los que están en la figuras(e_{12}).



figs. (e_{12})

36) ¿Puede el lado de un triángulo ser altura? ________ SI ________ NO

¿Como le llamaríamos al susodicho triángulo? ________________

_______________________ y cómo se llama ese lado? _______________

37) ¿Puede construírse un triángulo, si damos tres lados cualquiera?

________ SI ________ NO

En una hoja aparte haga algunos intentos con estos segmentos.
En los siguientes casos, recuerde, use solo regla y compás:

i) ______________________________ a

______________________________ b Los tres lados iguales

______________________________ c

ii) ______________________________ a

_________________________ b Los tres lados desiguales y cuya suma de dos sea mayor al tercero.

__________________________ c

iii) ___________ a

________ b Los tres lados desiguales y cuya suma es menor al tercero.

______________________________ c

iv) ____________ a

____________ b Con dos lados iguales y cuya suma es igual al tercero.

_________________________ c

v) ____________ a

____________ b Con dos lados desiguales y cuya suma sea igual al tercero.

_________________________ c

38) En determinados triángulos es muy común los términos cateto e hipotenusa; colóquese sobre el triángulo (a) y (b) el nombre que corresponda:

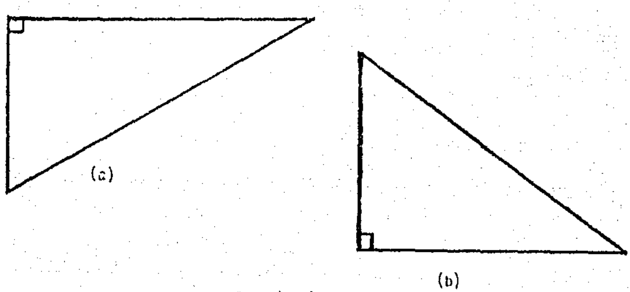


fig. (e_{13})

39) Del problema número 37 de este cuestionario resulta una importante propiedad para todo triángulo ¿cómo se llama?______________ ____________________ exprésela algebráicamente ____________________

40) ¿Qué clasificación tienen los triángulos según sus lados? mostrar esto con ejemplos gráficos y dé el nombre correspondiente a cada triángulo.

41) Hacer una gráfica para cada definición, para complemen - tar el ejercicio (32), en un triángulo.

i) Baricentro: Punto de intersección de las medianas de un triángulo. Dista de cada vértice los dos tercios de la mediana correspondiente.

ii) Circuncentro: Punto de intersección de las mediatri - ces de un triángulo cualquiera y de los radios de un polígono regular. Es el - centro de la circunferencia circunscrita a cualquier triángulo.

iii) Incentro: Punto de intersección de las bisectrices de un triángulo cualquiera y de las apotemas - de un polígono regular. Es el centro de la circunferencia inscrita en estas figuras.

iv) Ortocentro: Punto de intersección de las alturas de un triángulo.

v) Centro de gravedad: Punto de aplicación de la resul - tante de las fuerzas y que la gravedad ejerce sobre los distintos puntos de una figura.

42) ¿Cómo clasificaría los triángulos según sus ángulos? hacer esquemas y colocar en cada uno el nombre correspondiente.

43) ¿Qué nombre recibe el controno de un triángulo? ______________

44) Defina en su lenguaje vernáculo los esquemas de los problemas - (40) y (42). Por ejemplo:

Triángulo equilátero: es aquel triángulo que tiene tres lados - iguales.
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

45) ¿Conociendo sólo tres lados de un triángulo, se puede calcular su área? ________ ________.
SI NO

46) La notable fórmula de un sabio de alejandría es la siguiente

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{en donde}$$

$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ semiperímetro y se atribuye a:

A) Pitágoras C) Euclides E) René Descartes

B) Tales D) Pascal F) Herón

47) En hojas aparte grafique y muestre que efectivamente las propiedades principales de un triángulo cualquiera son las siguientes:

i) Un lado cualquiera siempre es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

ii) Un ángulo externo es igual a la suma de los dos ángulos internos no adyacentes a él.

iii) La suma de los tres ángulos interiores suman dos rectos (180°).

iv) Al mayor ángulo se opone mayor lado; y al mayor lado se opone mayor ángulo.

v) El área es igual a un medio de la base por su altura.

vi) La suma de sus ángulos exteriores al prolongar sus tres lados es igual a 4 rectos, es decir 360°.

48) Las seis propiedades ya expuestas en el ejercicio anterior, tiene una clasificación de esta lista: definición, teorema, postulado, axioma o corolario; colóquese lo correspondiente para cada inciso; por ejemplo:

i) ____________ ii) ____________
iii) ____________ iv) ____________
v) ____________ vi) ____________

49) La geometría utiliza varios conceptos, de carácter técnico, - entre ellos, contamos con:

A) Abstracción C) Definición E) Hipótesis

B) Deducción D) Axioma F) Tesis

Colóquese la letra que corresponda en las siguientes aceveraciones, vea el ejemplo:

__________ Permite generalizar aspectos observados en casos particulares.

__________ Proposición que permite explicar el significado de los términos técnicos utilizados.

__________ Acción que nos permite destacar los aspectos esenciales de una situación dada.

____E____ Permite argumentar apoyándose en hechos aceptados.

50) La figura (e_{14}) muestra tres caminos y tiene la forma de un triángulo. En la vida cotidiana, ¿qué camino sería más corto para ir a la escuela partiendo de su casa sobre el contorno del triángulo, cuyos vértices se ilustran?; aunque sea vastante obvio esto tiene relación con la pregunta número 47 y 37 ¿Qué lado es?.

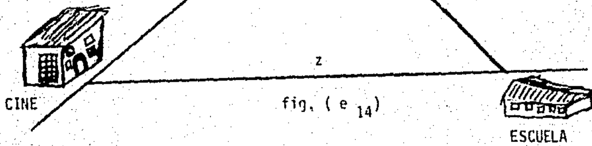


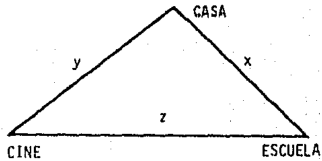
fig. (e_{14})

También la figura (e_{14}) cumple con las siguientes mediciones:

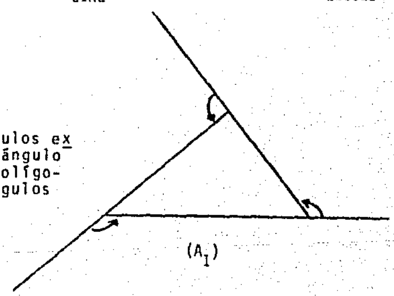
a_1) Al medir cada ángulo con un transportador la suma de los tres ángulos interiores será igual a dos rectos (180°).

a_2) Cualquiera de sus ángulos exteriores del triángulo, debe dar el valor de la suma de los dos interiores no adyacentes a él.

a_3) Si el triángulo está formado por la CASA, CINE y ESCUELA, diga como interpretaría el área en función de sus tres lados con la fórmula de Herón de Alejandría.

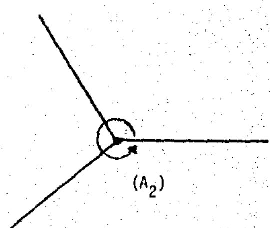


a_4) La suma de los ángulos exteriores de un triángulo o cualquier otro polígono es de cuatro ángulos rectos (360°).



(A_1)

Ponga atención a esto: "Si prolongamos sus tres lados y miramos la forma que toman, observaríamos lo siguiente en el área del triángulo desde una altura suficientemente muy grande", ver figuras (e_{15}), (A_1) y (A_2).

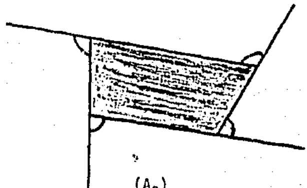


(A_2)

figs. (e_{15})

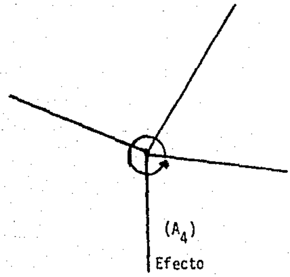
Quedaría la propiedad (vi) del problema (47) básicamente ilustrada, con un versátil carácter intuitivo.

En cuanto a un polígono de un mayor número de lados, el efecto sigue siendo el mismo, cuando prolongamos sus lados, la suma de sus ángulos siempre será igual a cuatro rectos, por ejemplo: vea las figuras -- (e_{16}) en sus respectivos incisos: A_3, A_4, A_5, A_6.



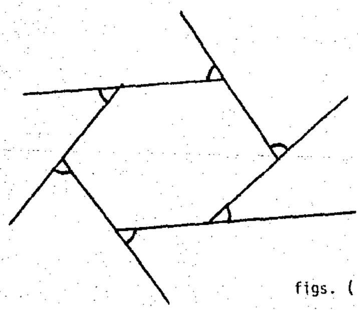
(A_3)

Cuadrilátero



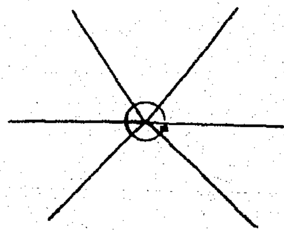
(A_4)

Efecto



(A_5)

Exágono



(A_6)

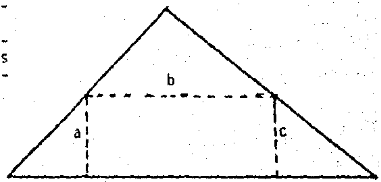
Efecto

figs. (e_{16})

51) Si comprara un terreno con forma de polígono de doce lados y convexo, ¿cuánto sumarían sus ángulos exteriores? ______________

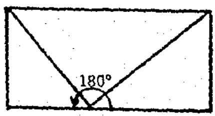
____________________ y ¿los ángulos interiores? ____________________

52) Dibuje un triángulo cualquiera en una hoja de papel y haga los dobleces siguientes: a, b y c como lo indican las figuras (e_{17}); la suma de los tres ángulos es igual a dos rectos, es decir 180°.



¿Será válido ésto?

____________________ ____________________
SI NO



figs. (e_{17})

En caso de No ¿en qué falla? ______________________________

____

53) Exprese algebráicamente las propiedades que tiene un triángulo, es decir interprete el ejercicio (47)

i) ____________________ iv) ____________________

ii) ____________________ v) ____________________

iii) ____________________ vi) ____________________

Haga la gráfica del triángulo y colóquese los símbolos que tenga que llevar.

54) ¿En un rectángulo cuánto miden cada uno de sus cuatro ángulos?

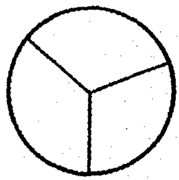
____

Está usted de acuerdo que si trazamos una diagonal, el rectángulo quedará dividido en dos triángulos iguales y además la suma de sus ángulos, interiores de cada uno es igual a dos rectos --

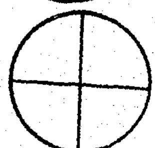
______________ ______________
SI NO

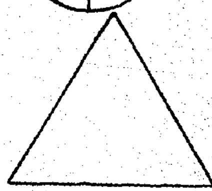
- Los triángulos iguales se les llama también CONGRUENTES y la - palabra es aplicable a segmentos, ángulos y polígonos.

Así por ejemplo, para practicar con la palabra congruente, definamos algunas cosas:



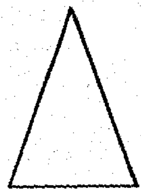
i) Los radios y diámetros de un círculo son todos ellos congruentes.





ii) ¿Cómo definiría un triángulo equilátero?.

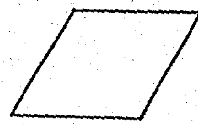
iii) Un triángulo isósceles es:



____

____

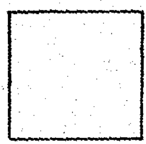
iv) ¿Cómo definiría un rombo?



____

____

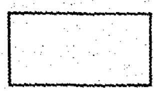
v) El cuadrado es:



____

____

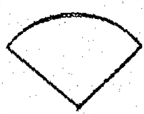
vi) Un rectángulo es:



____

____

vii) Un sector circular es:

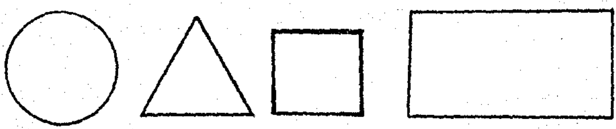


____

____

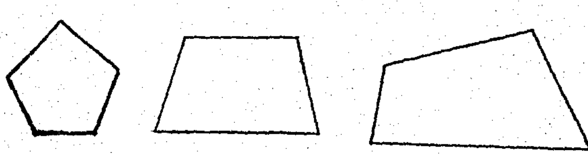
Vea D_{20}, D_{21}, D_{22} del apéndice.

55) De las figuras que aparecen en esta página cuál de ellas es equilatera:



círculo (1) | triángulo (2) | cuadrado (3) | rectángulo (4)

Elipse (5) | rombo (6)

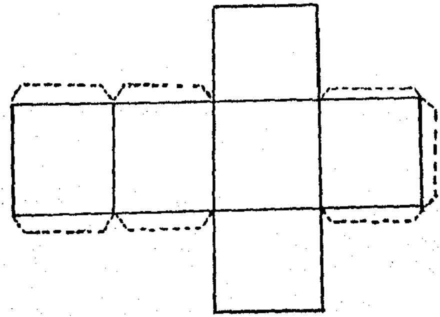


pentágono regular (7) | trapecio (8) | trapezóide (9)

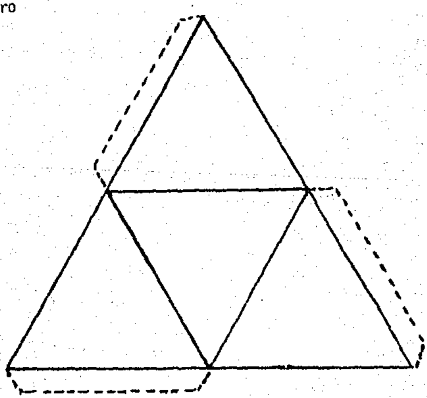
¿Cuáles fueron? ______________________________

56) Para continuar manejando y practicando la palabra congruente, señale en las siguientes gráficas las caras que resultan congruentes con algún color y de ser posible amplifique la gráfica en cartón o papel y ármela; resultará un poliedro regular de cada uno de los incisos de las figuras (e 18)

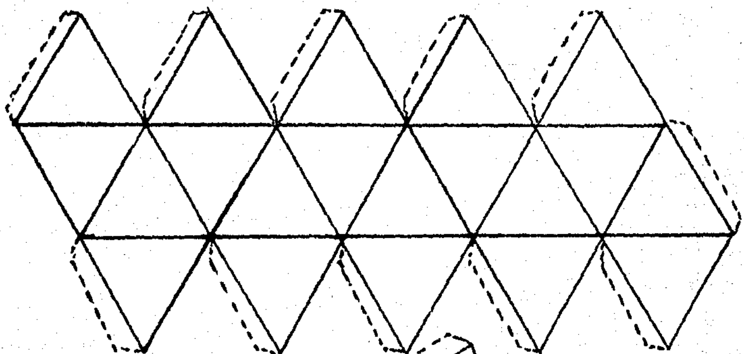
i) El cubo



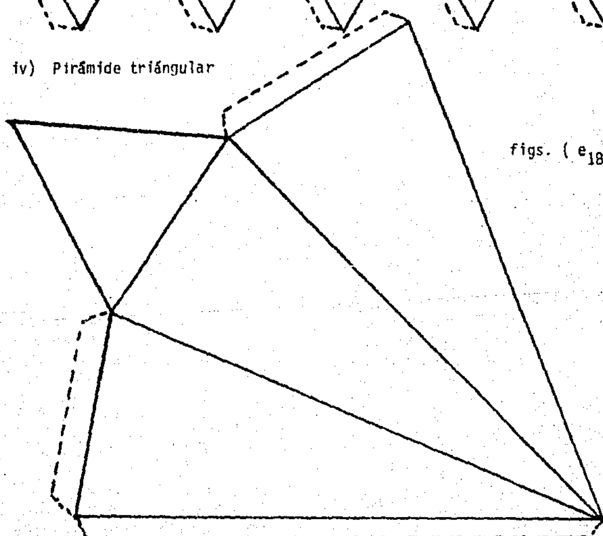
ii) El tetraedro



iii) El icosaedro

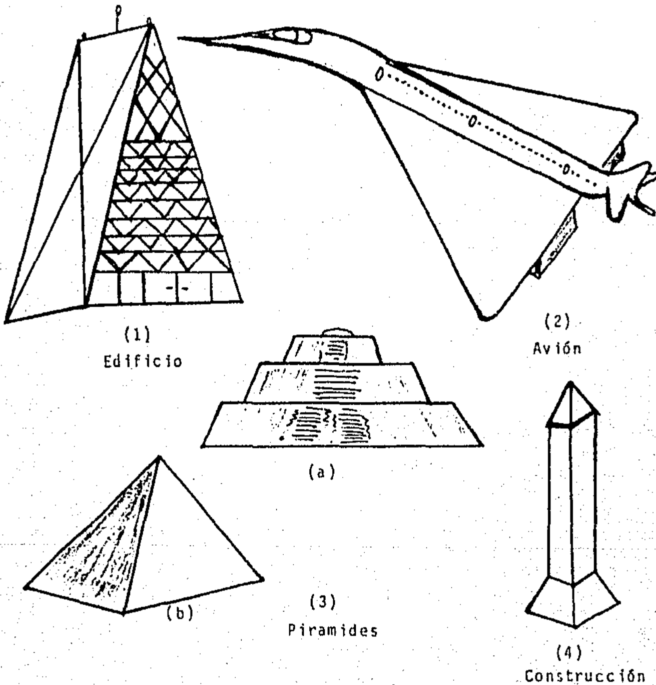


iv) Pirámide triángular



figs. (e_{18})

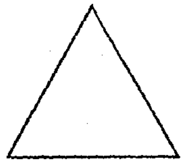
57) La congruencia en cuerpos prismáticos es muy usual, sobre todo en sus caras laterales se ve diariamente esta relación, en construcciones antiguas y modernas, así como un simple avión comercial. Ver figuras (e_{19}) sus respectivos incisos, e identifica en algunos cuerpos, la congruencia de figuras y márquese con algún color sobre éllas.



figs. (e_{19})

58) Si dos triángulos tienen sus tres ángulos respectivamente congruentes podríamos decir que los triángulos son iguales ¿SI o NO? ___________.

- En caso de decir "sí" haga la gráfica de otro triángulo equilátero más grande que (a) y compare con el otro. Está de acuerdo que cada uno de sus ángulos en los dos triángulos mide 60° ¿SI o NO? ¿Y cómo son los triángulos? ___________________.



(a)

59) ¿A qué se refiere el teorema de Tales? Ver figura (e_{20}) investigue y haga un intento por enunciarlo, coloque literales adecuadas en la figura porque así lo requiere.

____

____

____

____

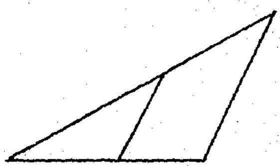
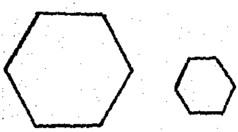
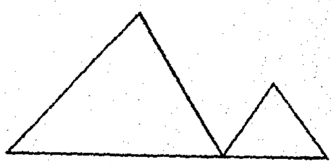


fig. (e_{20})

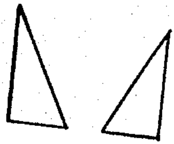
60) Las figuras geométricas expuestas en cada inciso a continuación tienen la misma forma, y por tanto son SEMEJANTES algunas de ellas; pero otras son CONGRUENTES, indique cuál es cuál en las figuras (e_{21}), respecto de los triángulos.



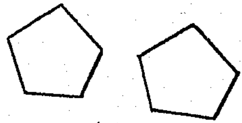
(a)



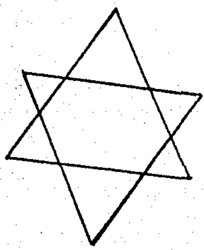
(b)



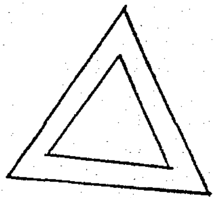
(c)



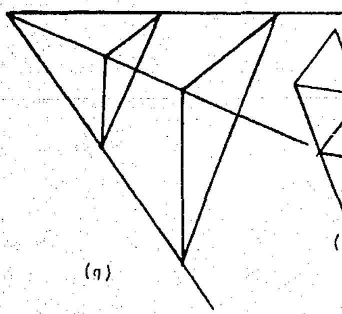
(d)



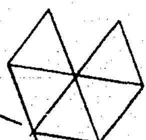
(e)



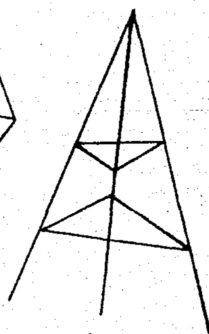
(f)



(g)



(h)



(i)

figs. (e_{21})

Por ejemolo; ¿cuáles fueron?

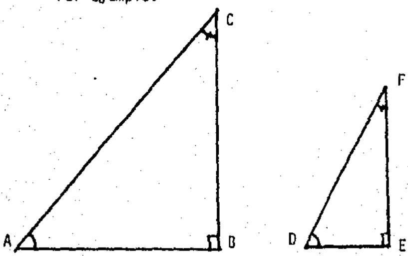
a) ______________ b) SEMEJANTES ______ c) ______________

d) ______________ e) ______________ f) ______________

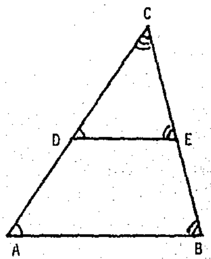
g) ______________ h) ______________ i) ______________

61) La palabra homólogo es muy común cuando se trabaja con la semejanza o congruencia de triángulos. Lados homólogos, son aquellos lados de la figura que se oponen a sus ángulos iguales con la que está comparando.

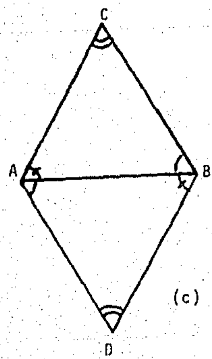
Por ejemplo:



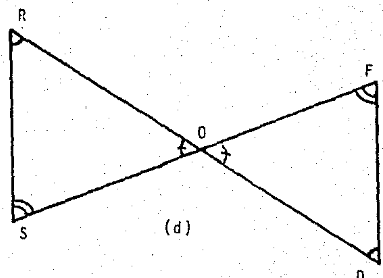
(a)



(b)



(c)



(d)

figs. (e_{22})

- Ejemplos para la figura (e_{22}) en sus respectivos incisos con la palabra homólogo, complételos.

a) ______________________________

b) ______________________________

c) Los triángulos ABC y ABD son congruentes y sus lados homólogos son: $\overline{AC}$ con $\overline{BD}$, $\overline{AB}$ con $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ con $\overline{BC}$

d) ______________________________

62) En el siguiente esquema tenemos un triángulo LMN y una recta paralela AB a uno de sus lados; de acuerdo, con el tradicional teorema de Tales la siguiente relación de sus lados homólogos es establecida por una de estas tres relaciones; diga cuál de ellas es correcta: _____

A) $\frac{LQ}{QM} = \frac{LP}{PN}$

B) $\frac{PQ}{NM} = \frac{LQ}{LM}$

C) $\frac{LP}{LQ} = PQ + NM$

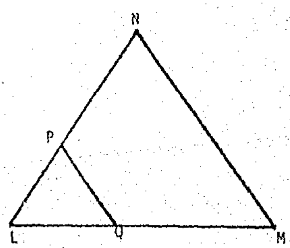
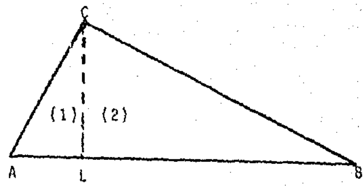


fig. (e_{23})

63) En el siguiente triángulo rectángulo, trazamos una perpendicular desde el vértice en donde se forma el ángulo recto a su lado --- opuesto, lo que se tiene son dos triángulos ¿ambos serán semejan-- tes? SI _____ o NO ______.



- Identifique sus lados homólogos de los triángulos (1) y (2) respectiva-- mente con respecto al triángulo ABC en caso afirmativo.

- Por ejemplo, el △ALC tiene un ángulo recto y comparte el mismo ángulo A del triángulo ABC, razón suficiente para decir que son semejantes los -- dos. Y por tanto , $\overline{AL}$ es a $\overline{AC}$ como $\overline{AC}$ es a $\overline{AB}$.

  Exprésélo algebráicamente, como una proporción de sus lados homólogos:

  ______ = ______ .

- Análogamente para esto último, relacione triángulo (2) con ABC y exprésélo albebráicamente:

64) El antiquísimo y tradiciona teorema cuyo enunciado dice: "El cuadrado de - la hipótenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"

Es atribuido a: ______________________________

A) Diofanto C) Arquímides E) Pitágoras

B) Sócrates D) Euclides F) Ptolomeo

65) Regresando al problema (63) y realizando algunos cálculos, tendríamos ya una de tantas demostraciones para el problema (64). (...)

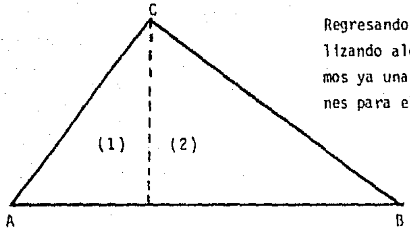
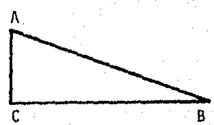


fig. (e_{24})

Es decir, trazamos la perpendicular $\overline{CL}$ desde el vértice C del triángulo -- rectángulo ABC y sumando miembro a miembro las igualdades $\overline{AC}^2 = AL \, . \, AB$ y $CB^2 = LB \, . \, AB$, que es el resultado de la semejanza de triángulos el (1) y (2). Se tiene:

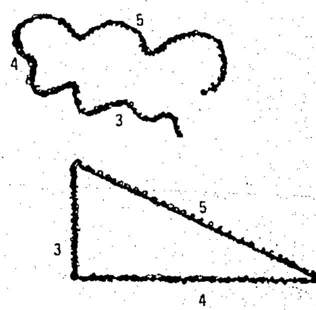
$$\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = (\overline{AL} + \overline{LB})\,\overline{AB} = \overline{AB}^2, \text{ es decir}$$



El teorema del ejercicio (64). ver figura (e_{24})

- Ilustre el resultado colocando áreas sobre triángulo ABC que es rectángulo.

- Los egipcios para trazar perpendiculares dividían una cuerda -- con nudos separados entre sí a - distancias de 3,4 y 5 unidades - separadas entre sí. Después en forma proporcional dichos números quedaron $(3n)^2+(4n)^2=9n^2+16n^2=25n^2$. lo que es igual a $(5n)^2$, algo ya más - general, y cuyas aplicaciones son innumerables.



figs. (e_{25})

(...) 16

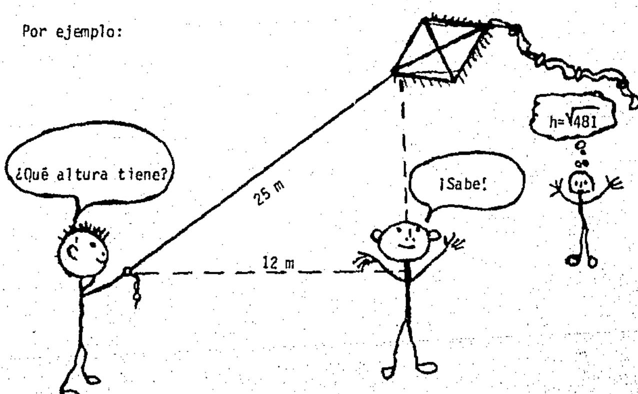
- Experimento.

Recorte un tramo de cuerda y haga los nudos de acuerdo a la figura (e_{25}) - formando un triángulo, los nudos serán los vértices de dicho triángulo. -- convenzase usted mismo que uno de los ángulos es recto.

- Si le damos a n el valor de 4, verifique que este importante teorema - se cumple. $(3n)^2 + (4n)^2 = (5n)^2$ es decir:

  si n = 4 tenemos $(3 \cdot 4)^2 + (4 \cdot 4)^2 = (\quad)^2 + (\quad)^2 =$ $(\quad)$ que es igual a $(\quad)^2$; lo cual cumple con $(\quad)^2 + (\quad)^2 = (\quad)^2$.

  Por ejemplo:

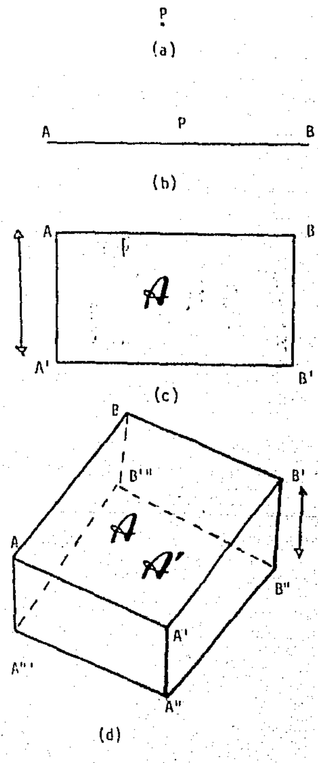


Hága un intento por aplicar el teorema y clacúlese la altura del "papalote".

- Lo ya establecido en este cuaderno será una buenea ayuda para la ocupación breve de algunos teoremas o proposiciones de la Geometría Euclidiana, que estarán al término de los ejercicios prácticos. Los conceptos, se deducen, unos de otros a partir de ciertos principios, como sería: el punto P, el segmento rectilíneo AB y la región Plana A.

Con tales conceptos, y mediante un esfuerzo mental, surgen sólo en apariencia expresiones importantes para explorar el proceder caprichoso de efectos naturales que irradiarán procedimientos para forjar los términos indefinibles, por ejemplo al prolongar indefinidamente P, el segmento AB de derecha a izquierda y esta línea en todos los sentidos se tendría construída mentalmente la "Recta" y "El Plano" incluso si le pensamos un poco, generaríamos un sólido. Ver figuras (e_{26}).

Estas ideas primitivas de la Geometría no se definen por no haber ninguna definición que sustituya la observación directa y repetida de ciertos objetos del mundo exterior, carecen de evidencia inmediata, el material que contienen es empírico, lo que implica recurrir a los datos de los sentidos. y sólo se les exige que sean compatibles e independientes.



figs. (e_{26})

66) ¿Qué representan las figuras (e_{26})?

(a) ______________________ (c) ______________________

(b) ______________________ (d) ______________________

67) Toda demostración de un teorema en geometría, y para ello ya es un acuerdo general aunque no sea explícito en el ambiente académico; consta de las siguientes partes:

a) Esquema o Figura
b) Hipótesis
c) Tesis
d) Razonamiento lógico
e) Conclusión

- Lo recomendable es que investigue estas cuestiones y las escriba a continuación:

a) ______________________

b) ______________________

____

c) ______________________

____

d) ______________________

____

e) ______________________

68) . . . . "CALCULAR EL AREA DE LA LINEA RECTA $\overline{AB}$"

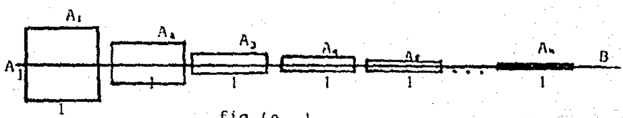


fig.(e_{27})

Hagamos una construcción geométrica sobre AB, y tomemos el área de los primeros rectángulos y uno de los últimos de la colección sobrepuesta, note como cada área respectiva disminuye en forma considerable. Dado que por construcción en cada rectángulo se hizo variar la altura respectiva enseguida del primero, disminuyendolo en la mitad del inmediato anterior y así sucesivamente, solamente la base de estos rectángulos es constante y vale 1.

Resulta pués, que al calcular su área de cada uno siguiendo la regla base por altura obtenemos:

$$A_1 = 1,\ \ A_2 = \frac{1}{2},\ \ A_3 = \frac{1}{4},\ \ A_4 = \frac{1}{8},\ \ A_5 = \frac{1}{16},\ - - -\ ,\ A_n = \boxed{}$$

Colóquese en el cuadro el término correspondiente a A_n.
La sospecha es que su valor sea cero, más no es tan evidente.

Sin esforzarnos demasiado en el concepto de límite, y aunque no nos dice exactamente por el momento que vale cero el área de uno de los últimos rectángulos, significa pués que si construimos más rectángulos con la misma ley, su valor de área para cada uno será casi cero y se dará el momento en algún lugar de la recta que su área vale cero, por lo tanto el problema esta resuelto.

Es una labor difícil de entender y sofisticada lo comprendo, más aún, lo invito a "calcular el área de un punto"; basese en la construcción de estos cuadrados donde el punto quede dentro de cada cuadrado cuyas medidas por lado son: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, etcétera, con estos pocos datos ya puede darme e n-esimo lado de uno de los últimos cuadrados
Y además el área de cada uno; hágalo :

- Cuando termine el proceso argumente estas preguntas, ¿porqué fue difícil de entender? ¿En qué resultó sofisticado el problema?

Aunque no se le haya ocurrido pensarlo jamás la versátil idea con este a parato que puede darnos el conjunto de todos los puntos sobre una recta, en la cual podríamos decirle o llamarle, el conjunto de los números reales positivos donde AB es la unidad, puede tener cualquier altura el rectángulo ABCD, A es el cero y B el uno, etc. Según vemos cada punto de la diagonal AC le estamos haciendo corresponder otro de la recta AE; pero antes, a AC le estamos haciendo corresponder un punto de AB; es decir; que cuando pase por todos y cada uno terminará el problema, piense un poco esto; tenemos según la figura (e_{23}) y (e_{29}).

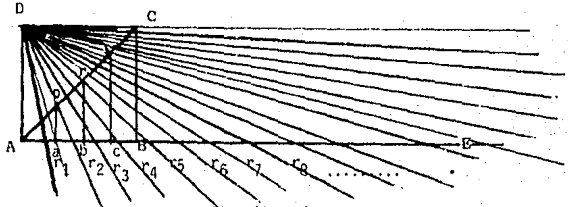


fig. (e_{28})

Esta relación entre puntos de cada segmento, cuando agote el primero $\overline{AB}$, habre agotado $\overline{AC}$, que a su vez habra agotado $\overline{AE}$.

Quizás sea más elocuente a la configuración aritmética, pero es abstracta y seguimos jugando con el infinito, aún sin saber nada de un concepto matemático capaz de desbordar la imaginación humana y lo sabia Zenón, Aquiles, Gaus, Cantor, etcétera, por ejemplo;

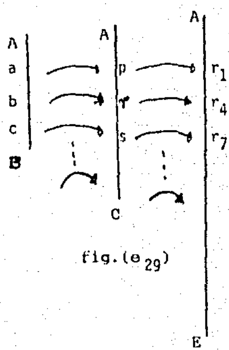
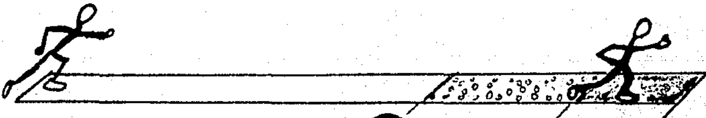
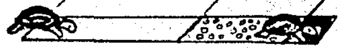


fig.(e_{29})

La paradoja del griego Zeñón de Elea, donde en una carrera desigual, Aquiles compite con una tortuga que lleva 10 metros de ventaja, pero nunca la alcanzará pués cada que Aquiles dé un paso en su plano, la tortuga dará otro en el suyo, pero rigurosamente proporcional al ya recorrido sacando ventaja - siempre la tortuga, y según esto se perpetuaría hasta lo infinito por mínima que sea esa ventaja.





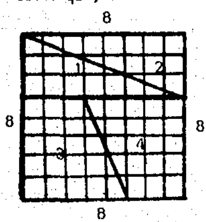
¿Qué es el infinito?

¿Existe si o no? ____________________.

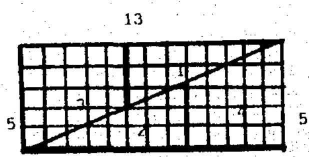
¿Cómo lo representamos en la actualidad? __________.

69) El cuadrado y rectángulo como test psicológico.

Esta es una ilusión sensata de una cuestión elemental alimentada por las ilustraciones de un ingenioso truco; tal es el caso para este par de - - áreas al compararlas una contra otra, y relacionar parte por parte, es - obvio que, si una área esta formada con las otras a los curiosos ojos de nosotros, se antoja decir que las áreas resultan iguales a partir de los datos disponibles, pero si surge una duda razonable, evite esta igualdad 0 = 1.



A1



A2

70) Problema Mâtemático, necesariamente auxiliado por la figura geométrica de cuatro lados y ângulos congruentes.
"Divida, un cuadrado en cinco cuadrados iguales". Cuándo logre hacerlo dé una descripción de lo sucedido.

71) Si ABCD es un cuadrado y la longitud por lado es 10 cm. haciendo centro en cada vértice y radio 5 cm. trazamos arcos circulares. Hallar el área de lo sombreado.

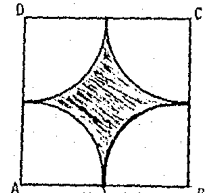


fig. (i)

72) Hállese el área de la parte sombreada de este semicírculo cuyas medidas para cada cuerda son 4 m. 3m. respectivamente.

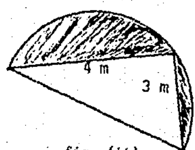


fig. (ii)

73) En el esquema de la figura (c), el radio $\overline{OB}$ es igual a $\overline{AB}$. Demuéstrese que el ângulo COD es igual al triple de A.

Vea figuras(e_{30}) en su respectivo inciso.

74) El área de un círculo es 100π . Hállese - el área del triángulo equilátero inscrito.

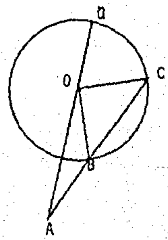


fig. (iii)

figs. (e_{30})

75) Los números sólo pueden ser captados por el pensamiento, son objetos de cálculo y medición, más la verdad es que ellos mismos maravillan nuestro esfuerzo de producir un efecto al mejorar por lo menos la armonía de la enseñanza.

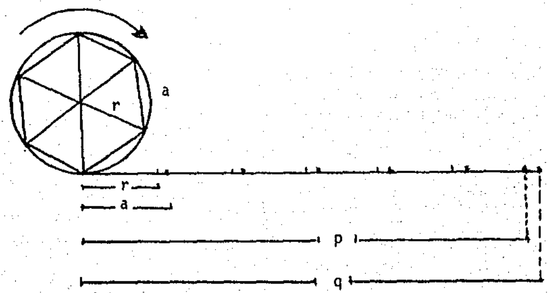


fig. (e_{31})

En este problema como en muchos otros, al medir los ángulos en radianes resulta ser una medida angular de un arco circular que nos expresa la longitud de arco en unidades lineales; donde "r" es el radio de nuestro círculo que es un lado del polígono; "a" es la longitud de arco que subtiende el ángulo central de 60° en este caso, y esta en las mismas unidades lineales que "r". Esto significa entonces, que "p" es la longitud del perímetro del exágono, "q" la longitud de la circunferencia de círculo, vea figura (e_{31}). Pero, si nos fijamos atentamente vemos que la línea "q" mide tres diámetros y un pedazo al hacer rodar el círculo, resulta curioso, así como lo atestiguan visual y en palabras otros ensayos en la observación.

- La situación es común si tomamos un dispositivo nuevo para poder conjeturar nuestra inventiva que no es sino el perfeccionamiento logrado por la búsqueda de la armonía numérica, anticipándonos a efectos claves. Figura (i)

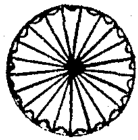


fig. (i)

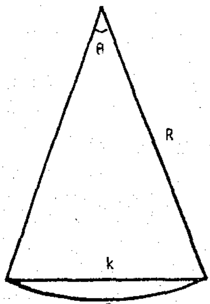
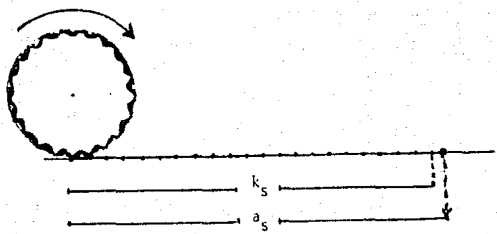


fig. (ii)

Por ejemplo tomemos una corcholata de un envase de refresco y contemos las puntas de su alrededor, son 21, localicemos el centro del círculo de la corcholata y traze todos los radios posibles, también si unimos todos los vértices tendremos un polígono regular de 21 lados, si los circunscribimos tomará una forma cada triángulo como la figura (ii).

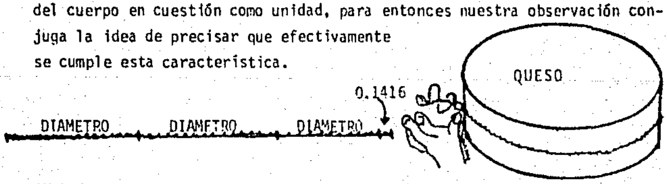
Tendremos entonces que: R = radio, k = uno de los lados del polígono, a = longitud de arco que subtiende el ángulo θ, en unidades lineales. Luego entonces, si hacemos rodar la corcholata se tiene: el perímetro del polígono 21 lados inscrito, más un exceso para la otra línea, lo cual sería la longitud de su circunferencia, es decir . Perímetro = k_s y circunferencia = a_s.



De hecho, se reafirma que tenemos tres diámetros y un pedazo.

En fin los variados valores de π se remontan a tiempos inmemorables, algunos lo empleaban como 3, otros $\left(\frac{16}{9}\right)^2$; Arquímides lo consideraba entre $3\frac{1}{7}$ y $3\frac{10}{71}$ y algunos de nosotros usamos 3.14159 o 3.1416 o incluso 3.15, pero los criterios de verdad misteriosamente se unifican y evoca una medición facilmente materializada por la construcción humana en su empleo es expontáneo.

76) Se puede confirmar la presencia del número π para todo aquel objeto que -- describa una circunferencia, por ejemplo, tome un cordón y enrolle el cuerpo redondo, del tamaño que guste, luego desenrollelo, y tome el diámetro del cuerpo en cuestión como unidad, para entonces nuestra observación conjuga la idea de precisar que efectivamente se cumple esta característica.



¿Habrá? ________________ y un ____________.

Hága otros experimentos con otros tamaños circulares.

77) ¿Cuánto vale un radian en grados? ______________.

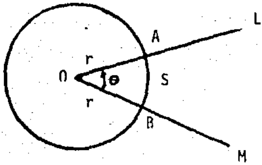
Para medir los ángulos se utilizan dos tipos de unidades: RADIANES Y GRADOS.

i) GRADOS:

Un círculo esta dividido en 360 ángulos iguales, es decir $1^\circ = \frac{1}{360^\circ}$ y cada grado a su vez esta dividido en 60' (minutos), cada minuto a su vez esta dividido en 60" (segundos) etc.

ii) RADIANES

Es una de las unidades que más se utiliza, entonces

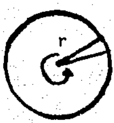


$$\theta(\text{radianes}) = \frac{S}{r} = \frac{\text{longitud } \widehat{AB}}{\text{radio}}$$

78) Problema: Un círculo tiene 360°¿cuánto tiene en radianes?

Sabemos que la longitud de la circunferencia es:

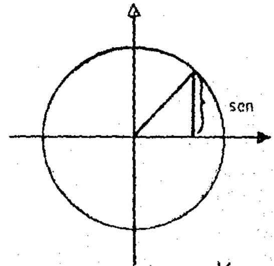
$C = 2\pi r \qquad 360^\circ = \frac{C}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ radianes

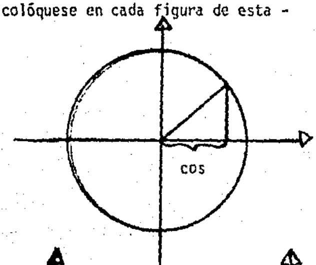


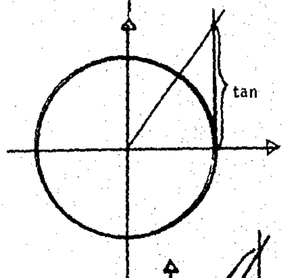
$$1 \text{ radian} = \frac{360^\circ}{2\pi} \quad y \quad (1)^\circ = \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ}$$

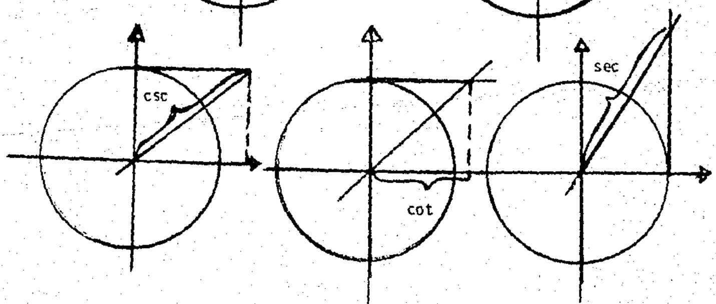
Con esto puede resolver el problema. (77).

Debe ser un encanto enterarse que la "trigonometría" surge como una de tantas propiedades de los triángulos rectángulos y aunque no sea un tema específico puede cotejarse como algo útil en el medio, más lo que describiré aquí con un punto y una distancia y un par de rectas perpendiculares busca acomodo para poder ensamblar la palabra función trigonométrica, si se vale; e identificar estas distancias que observamos en los esquemas con su respectivo nombre trigonométrico: seno, coseno, tangente, etcétera, sólo busque el ángulo "X" de cada una y colóquese en cada figura de esta lista.









PARTE II

CONSTRUCCIONES

79) Actividades con la regla y el compás de figuras clásicas a través de la historia utilizando la teoría euclidiana.

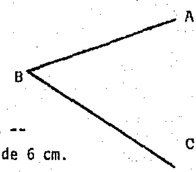
i) Por un punto dado M en la recta AB, levantar una perpendicular; la recta AB mide 3 cm.

ii) En el extremo de una recta AB que mide 6 cm. levantar una perpendicular.

iii) Por un punto P situado fuera de la recta LM, trazar una perpendicular a la recta; LM mide 9 cm.

iv) Por un punto P situado fuera de la recta RS, trazar una recta paralela; RS mide 8 cm.

v) Dado un ángulo ABC construir otro con la misma amplitud.



vi) Construir un triángulo en que dos de sus lados -- sean iguales al segmento rectilineo AB, que mide 6 cm. ¿Cómo se llama el triángulo?

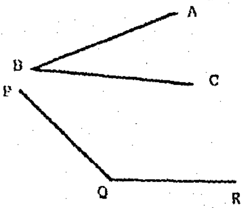
vii) Dividir un segmento dado QR en dos partes iguales.

viii) Trazar dos triángulos equiláteros por separado, cuyas medidas para sus lados de cada uno sean: 5 y 6 cm.

ix) Construir un triángulo isósceles en donde dos de sus lados miden 5 cm. y el ángulo comprendido sea igual a ABC del problema ( ).

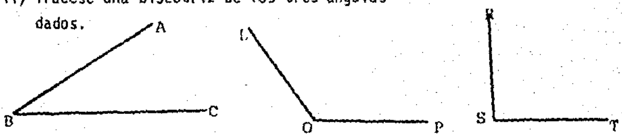
x) Construir un triángulo cuyos lados son iguales a tres rectas dadas: 8, 6 y 5 cm. respectivamente.

xi) Por un punto L dado de una recta, trazar - una recta que forme con la primera un ángu lo dado. Hágalo también para el ángulo ob- tuso.



xii) Dividir una recta dada AB en cuatro partes iguales.

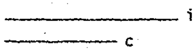
xiii) Trácese una bisectriz de los tres ángulos - dados.



xiv) Trazar un triángulo rectángulo, cuyos lados que forman el ángulo recto midan 4 y 6 cm. respectivamente.

xv) Trazar un cuadrado que mida por lado 7 cm.

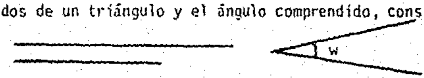
xvi) Construir un triángulo rectángulo, dado la hipotenusa y un cateto.



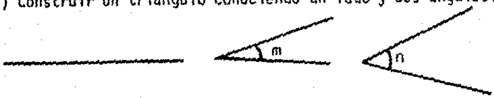
xvii) Por separado construya dos cuadrados de diferente tamaño, en uno inscri ba una circunferencia que toque sus cuatro lados, y en el otro circuns- cribir una circunferencia al cuadrado que pase por los cuatro vértices.

xviii) Trazar cuatro círculos concéntricos, cuyos radios de cada uno miden: 3, 4, 5 y 6 cm.

xix) Dados dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido, construir el - triángulo.



xx) Construir un triângulo conociendo un lado y dos ângulos.



xxi) Por dos puntos dados trazar una circunfernecia de radio dado.

xxii) Dados tres puntos no coolineales A, B y C, construya una circunferencia que pase por ellos.

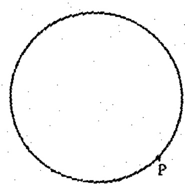
xxiii) Inscribir un círculo en el triângulo dado.

xxiv) Circunscribir un círculo a un triângulo dado.

xxv) Por un punto dado, trazar una tangente a un círculo dado. Se dan dos casos (a) y (b):

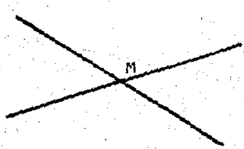
(a) Cuando el punto P está en circunferencia

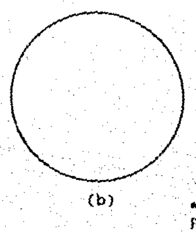
(b) Cuando el punto P está fuera de la cir-- cunferencia.



(a)

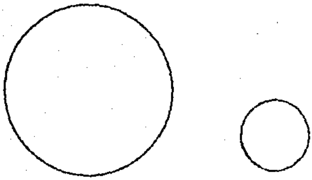
xxvi) Se dan dos segmentos de línea recta del mismo tamaño, ambos se intersectan en el punto medio M, si une los extremos ¿será un rectángulo? si esto ocurre circunscríbalo en una circunferencia.



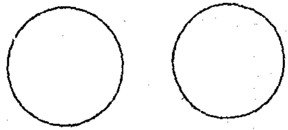


(b)

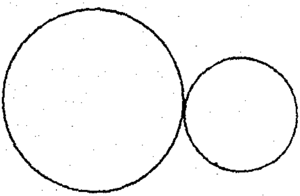
xxvii) Trazar una tangente común a dos círculos dados.



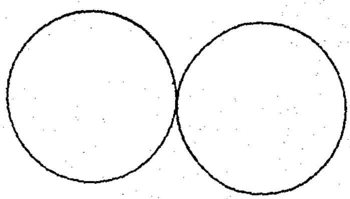
(a)



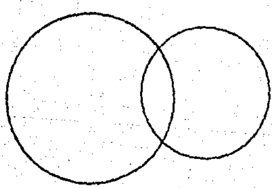
(b)



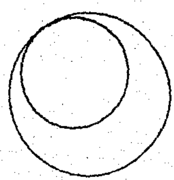
(c)



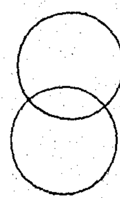
(d)



(e)



(f)



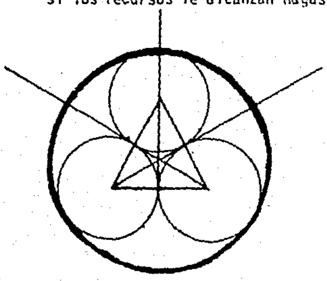
(g)

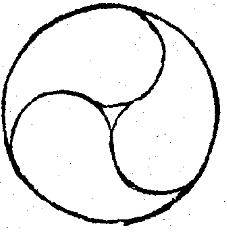
xxviii) Trazar un pentágono regular que por lado tenga el tamaño de un palillo, cerillo o lo que guste, use la regla y el compás, luego vea la forma de colocar en serie doce caras , y arme un dodecaedro (poliedro regular).

xxix) Inscriba un círculo en el pentágono del problema anterior que toque sus cinco lados.

xxx) Construir los restantes poliedros regulares y que midan de arista el tamaño de un palillo, complementando así el ejercicio 56.

xxxi) Construya estas figuras, una se deriva de la otra, hágalas más grande, si los recursos le alcanzan hágase su mantel o estámpelo en una camiseta.

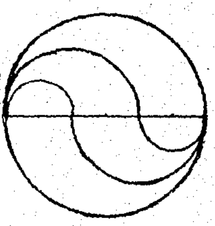




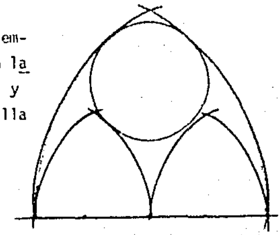
xxxii) Dado el perímetro de un triángulo equilátero, construir el triángulo.

xxxiii) Construir un rectángulo, dados un lado y el ángulo de las diagonales.

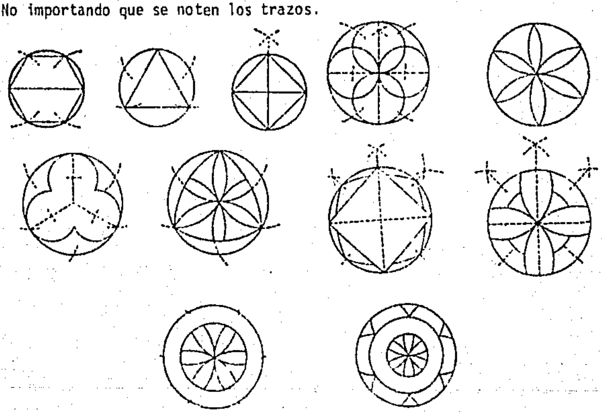
xxxiv) Trácese una recta de 6 cm. de longitud y divídala en doce partes iguales e imite la figura que se le presenta, o alguna combinación que pueda derivarse de ella, si puede haga so mantel o decore la figura en una playera.



xxxv) En la construcción de ventanas góticas, se emplea constantemente la figura que esta a un lado. Haga tres muestras de diferente tamaño, y si los recursos le alcanzan hagalo con varilla y solde.



xxxvi) Con regla y compás solamente trazar y amplificar las siguientes figuras. No importando que se noten los trazos.



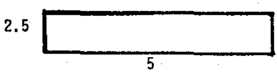
Conjugar toda esta gama de ideas de los señores Wentworth y Smith, ello da lugar a jóvenes y adultos para explorar con eficiencia: en lo artístico, técnicas de diseño, artesanal, oficios, etc. Y claro esta, es una labor muy importante compenetrar gradualmente en lo esencial como maestro, pero aún así la divulgación de la geometría se encuadra dentro de su propósito el hacer ciencia.

PARTE III

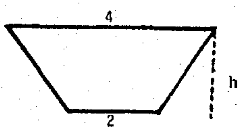
EJERCICIOS PRACTICOS

80) La compresión de estos conceptos básicos tendrá una interpretación geométrica, mostrando en distitntos problemas su aplicación correspondiente y favorecer la participación activa en la lectura de este trabajo, por ejemplo las figuras (e_{32}):

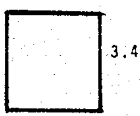
A la derecha de las figuras (e_{32}) encontramos las áreas calculadas de las mismas, en los espacios en blanco, coloque los incisos correspondientes.

A) 

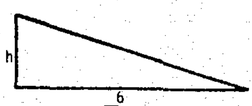
A = 3h ________________

B) 

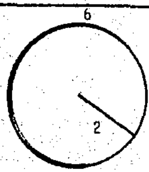
A = 11.56 ________________

C) 

A = 12.5664 ________________

D) 

A = 12.50 ________________

E) 

A = 3h ________________

figs. (e_{32}).

81) Si el cuadrado ABCD mide por lado a + b, y el cuadrado LMNP uno de sus lados mide c; podemos demostrar en otra forma el teorema de Pitágoras; si observamos la figura (e_{33}) tenemos lo siguiente:

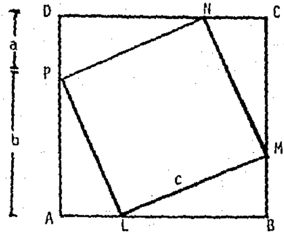


fig. (e_{33})

- El área del cuadrado grande es igual: $(a + b)^2$
- El área del cuadrado pequeño es igual: c^2
- El área de cada uno de los triángulos es: $ab/2$
- Interprete en lenguaje algebráico lo siguiente y haga las simplificaciones respectivas: "El área del cuadrado grande, es igual a el área del cuadrado pequeño más cuatro veces el área de uno de los triángulos".

____

____

82) La placa triángular es (isósceles) lo mostramos en la figura (e_{34}). Establecemos una relación de semejanza de triángulos ¿Cuál es?

A) $\dfrac{P_s}{a} = \dfrac{H}{l_k}$

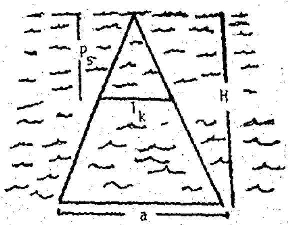


fig. (e_{34})

B) $\dfrac{P_s + 1_k}{H - P_s} = \dfrac{a}{H}$

C) $\dfrac{P_s}{H} = \dfrac{1_k}{a}$

D) $\dfrac{P_s}{2} = \dfrac{a}{2}$

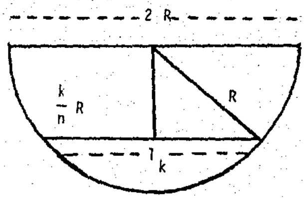


fig. (e_{35})

83) Sobre una placa circular estamos aplicando el teorema de Pitágo-- ras, para obtener el valor de 1_k; ¿qué relación es?

A) $1_k = R\sqrt{h^2 - k^2}$

B) $1_k = \dfrac{2R}{\sqrt{n^2 - k^2}}$

C) $1_k = 2R\sqrt{n^2 - k^2}$

D) $1_k = \dfrac{2R}{n}\sqrt{n^2 - k^2}$

84) Para calcular el volumen de un co- no, tenemos una relación con sus - lados homólogos en la semejanza de unos triángulos, que ahí se presen tan; señalela, la figura le ayuda- rá.

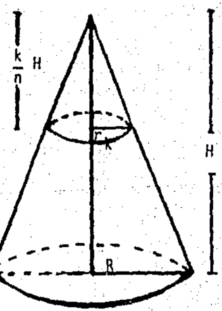


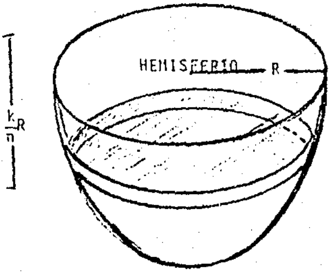
fig. (e_{36})

A) $r^2 + \frac{k^2 H^2}{n^2} = H^2$

B) $\frac{KH}{n} = \frac{r}{H}$

C) $\frac{r_k}{R} = \frac{k}{n}$

D) $r = \frac{kH}{n}$



85) Si se quiere calcular el volumen de una esfera nuevamente tendríamos que usar el teorema pítagórico en uno de los hemisferios, de acuerdo a los datos puestos en la figuras(e_{37}) ¿Cuál sería?

A) $kR + r = R$

B) $k^2R^2 - R^2 = r^2$

C) $(kR - r)^2 = R^2$

D) $r^2 = R^2 - k^2 R^2$

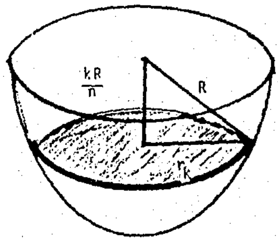


fig. (e_{37})

86) Si un lado de un terreno triángular es la cuarta parte del perímetro, el segundo mide 7 metros y el tercero es dos quintos del perímetro, ¿Cuál es el perímetro?

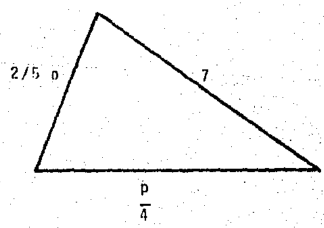


fig. (e_{38})

A) 40 m.

B) 20 m.

C) 140 m.

D) 80 m.

87) Encuentre las dimensiones de un terreno rectangular que tiene 84 metros de perímetro, si su ancho mide 2 quintos de largo, ver figura (e_{39}).

A) 20 y 10 m

B) 30 y 12 m

C) 20 y 14 m

D) 30 y 22 m

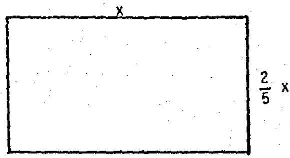
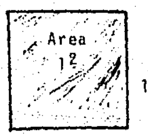


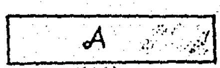
fig. (e_{39})

88) Antes de continuar calculando áreas, diremos que, el área de un cuadrado la podemos definir como lado al cuadrado; para con ésto, poder demostrar que - el área de un rectángulo es largo por ancho, es decir base por altu ra. Fórmula que hemos manejado - desde hace ya mucho tiempo coti-- dianamente.



(i)

- Si tenemos cuatro rectángulos como el que se muestra en (ii) formemos un cuadrado con ellos, en - la forma de (iii) de la figs.(e_{39})



(ii)

- El area del cuadrado mayor es:
  $(a + b)^2$

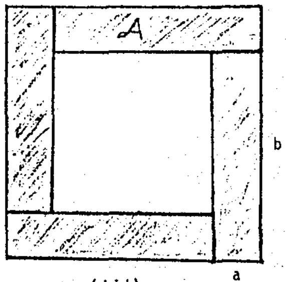
- El área del cuadrado menor formado por dentro es: ____________

- El área mayor menos el área menor es igual a: ____________

- Como sólo quiero el área de un sólo rectángulo, divido el resultado en cuatro y queda: A =

____

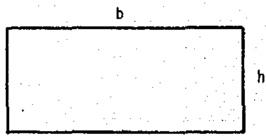
____



(iii)

fig. (e_{40})

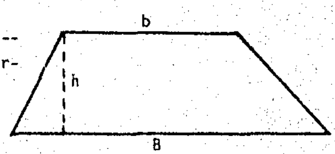
89) Con un pequeño razonamiento y basado en el resultado del problema (87) muestre que -- puede obtener la tan conocida fórmula del triángulo, para calcular su àrea: "base -- por altura sobre dos".



Escribala como una fórmula: ____________________

90) ¿Cómo lo haría para un trapecio con dos lados paralelos?

- Use los resultados de (88) y (89). -- será de gran interés llegar a la fórmula $\frac{(B + b)\, h}{2}$

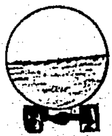


91) Yo "PETROLERA SEVEN" hago entrega al chofer y su ayudante, de un carro - pipa cilíndrico completo con líquido para su jornada cotidiana de surtir diferentes clientes; al devolvermela, hacemos cuentas y medimos el líquido sobrante con una vara que dá el diámetro del cilindro al introducirla. La pregunta es ¿Habrá - alguna fórmula práctica para calcular el líquido sobrante? Si ______ No _______.

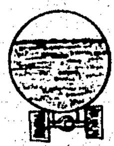
Observo cuatro casos naturales, un quinto sería estar vacio.

i) Cuando el tanque esta lleno.

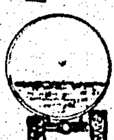
ii) Cuando el tanque esta a la mitad exactamente.



iii) Cuando sobra más de la mitad.



iv) Cuando sobra menos de la mitad.



figs. (e_{41})

Las dimensiones del tanque pipa.son;

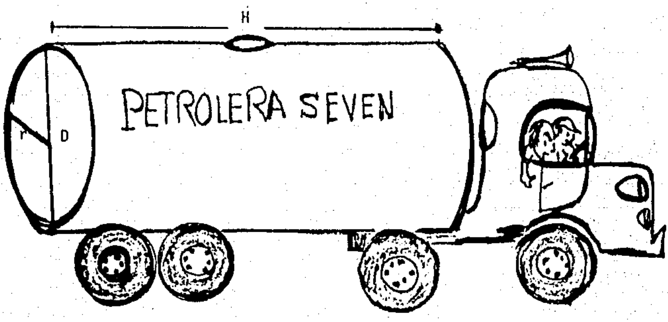


fig. (e_{42})

H= Altura del cilindro

D= diámetro

r= radio

k= profundidad de sumersión

La vara tendrá n unidades y será igual al diámetro D más su manija, vea figuras (e_{41}) y la figura (e_{42}).

92) Con una placa de lámina de 10 x 8 pulgadas se quiere hacer un recogedor recortando de las esquinas, cuadrados de 2 pulgadas por lado; ver la figura (e_{43}). Hacer dobleces a y b. La cantidad de lámina para cada uno debe ser de:

A) 64 pul.^{2}

B) $\frac{120}{2}$ pul.^{2}

C) 80 pul.^{2}

D) 72 pul.^{2}

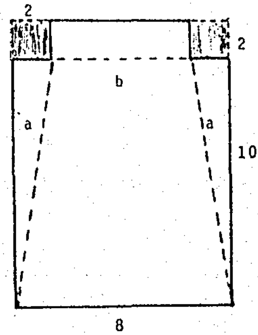


fig. (e_{43})

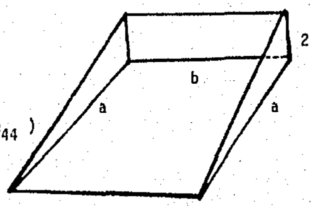


fig. (e_{44})

93) ¿ Qué valor toma la arista a ? Vea figura (e_{44}).

A) 7 pul.

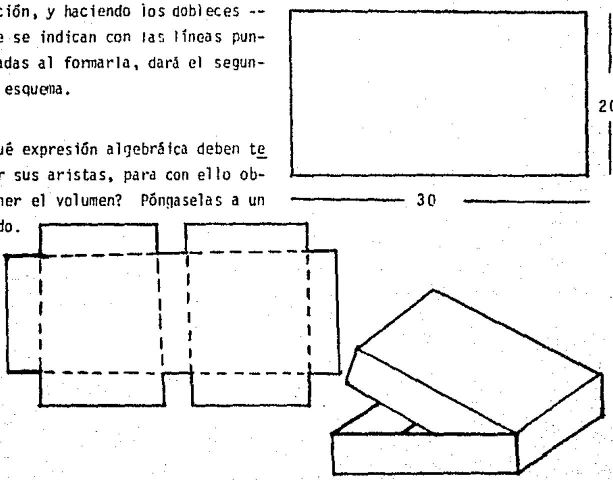
B) 7.745pul.

C) 7.101pul.

D) 7.35pul.

94) Con una placa de cartón de 30 por 20 cm. y recortando cuadros iguales de -- longitud x, tal como se observa en las figuras (e_{45}). Se quiere hacer una caja tapada, con un poco de imaginación, y haciendo los dobleces -- que se indican con las líneas punteadas al formarla, dará el segundo esquema.

¿Qué expresión algebráica deben tener sus aristas, para con ello obtener el volumen? Póngaselas a un lado.



figs. (e_{45})

95) Si "x" es igual a 4 cm. Haga el cálculo de su volumen.

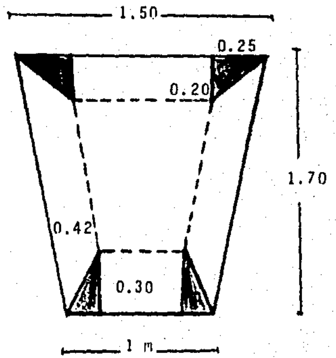
A) 216 cm^3

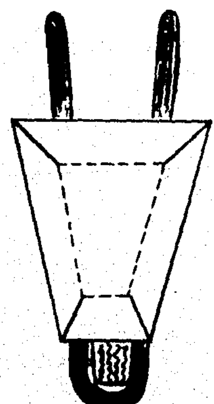
B) 864 cm^3

C) 222 cm^3

D) 844 cm^3

96) En el caso de querer construír una carretilla, ésta es la idea.
Tendríamos que dar una placa de lámina en forma de trapecio, recortar de las esquinas triángulos rectángulos en la forma que se muestra en las figuras (e_{46}).
Como la parte delantera debe ser más alta una vez formada la cuchara los triángulos serán en altura mayores, que la trasera. ¿Cuál será la suma total de lámina que restemos, dadas las medidas de la lámina?
Obtenga usted mismo el cálculo.





figs. (e_{46})

97) En el crucero de tres carreteras se ubican las esquinas A,B, y C. Los datos obtenidos se dan en la figura (e_{47}) marcados en ella misma: 35°, 88° ¿Cuáles serán los valores de los ángulos A, B y C ?

A) A = 35°, B = 81°y C= 90°
B) A = 45°, B = 92° C= 82°
C) A = 53°, B = 92° C= 88°
D) A = 43°, B = 92° C= 82°

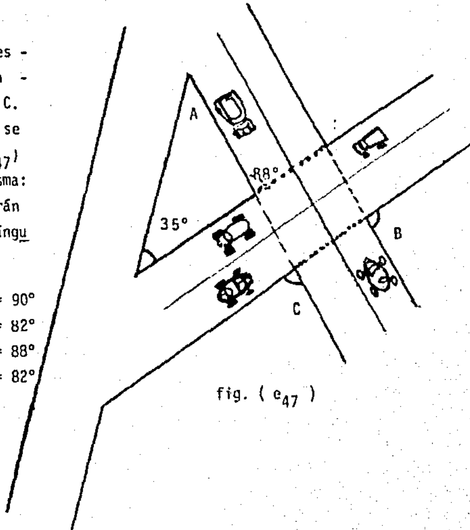


fig. (e_{47})

98) En el caso de nuestro planeta tierra al ser iluminado, nos indica que los rayos solares caen en linea recta, quiero decir perpendiculares; el caso es que no es así, por tal motivo en la medida que nos alejamos hacia el norte sobre la superficie, tenemos una cierta inclinación supongamos la figura (e_{48}) lo sucedido considerando K el el centro de la Tierra - - ¿Cómo son los ángulos $\hat{a}$ y $\hat{b}$?

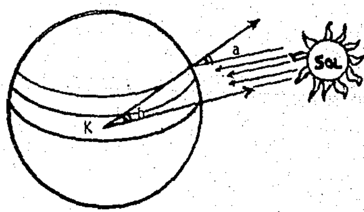
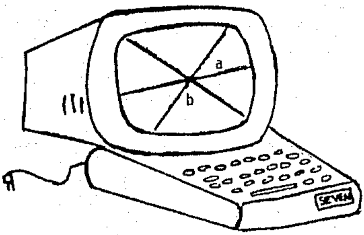
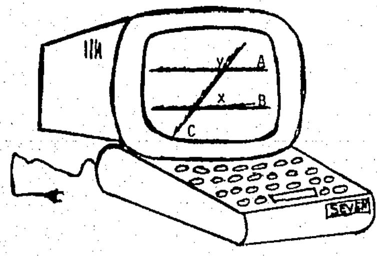


fig. (e_{48})

A) IGUALES
B) DIFERENTES
C) PERPENDICULARES
D) ANGULOS ALTERNOS - EXTERNOS





figs. (e_{49})

99) Resuelva los siguientes problemas que están puestos en la supuesta pantalla:

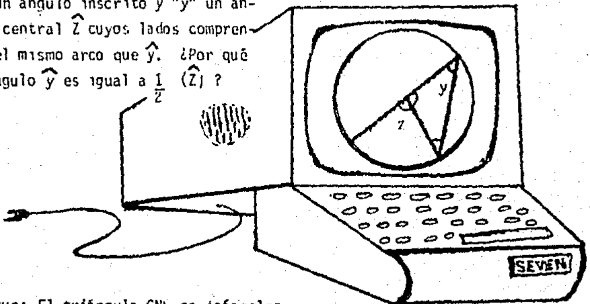
- Si $a = 40°$ y $b = 93°$

¿Cuánto miden los restantes ángulos?
Haga el cálculo.

- Ahora si variamos un poco la figura y asignamos otros valores para los ángulos a y b; - por ejemplo: $a = 69° \ 58'$
$b = 82° \ 49'$
¿Cuánto medirán los restantes? Ver figuras (e_{49}).

- Supóngase que se tiene otra figura en donde: A, B y C son líneas rectas y $x = 73°$ con -- $y + x = 32°$
Dígase si las rectas A y B son paralelas. ¿SI o NO?.
Cualquiera que sea su respuesta arguméntela.

100) En caso de tener una circunferencia con un ángulo inscrito $\widehat{y}$ "y" un ángulo central $\widehat{Z}$ cuyos lados comprenden el mismo arco que $\widehat{y}$. ¿Por qué el ángulo $\widehat{y}$ es igual a $\frac{1}{2}$ $(\widehat{Z})$?



Observe: El triángulo CNL es isósceles.

Luego $x + z = 2\,R$ ....Son suplementarios

$x + 2y = 2R$ ....La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 2R.

$x + 2y = x + Z$ ....Noción común # 1 (NC_1)

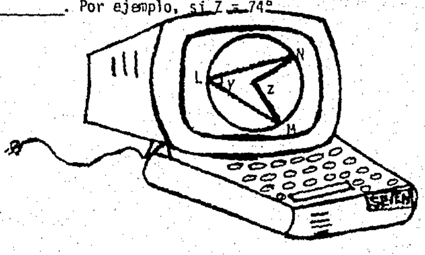
$2y = Z$ ....(NC_3) $\therefore$

$y = \frac{1}{2}$ (Z). o sea $y = \frac{z}{2}$

101) Si movemos sobre la circunfernecia el punto L un poco a la izquierda dejando M y N fijos ¿Será igual el resultado?

¿SI o NO? ____________. Por ejemplo, si $\widehat{Z} = 74°$

¿Cuánto mide $\widehat{y}$?



A) 74°
B) 48°
C) 37°
D) 38°

102) De acuerdo a la figura (e_{50}) ¿Podríamos afirmar que - - $\hat{a} = \frac{1}{2}\ \hat{b}$?

¿SI o NO? ______________

Obseve: $a = a_1 - a_2$

(i) $b = b_1 - b_2$ Haga sus diferencias.

$a_2 = \frac{1}{2}\ b_2$

(ii) $a_1 = \frac{1}{2}\ b_1$ Por el resultado del problema. (100) $\therefore$

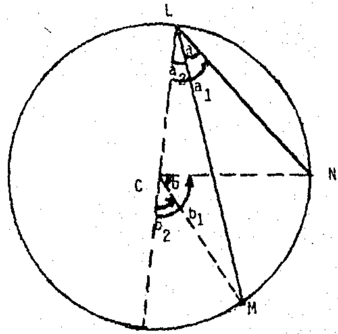
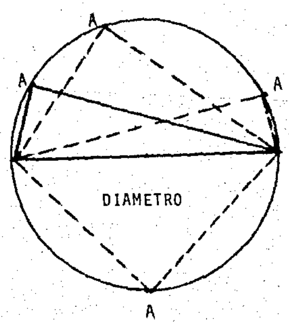


fig. (e_{50})

(iii) $a = a_1 - a_2 = \frac{1}{2} b_1 - \frac{1}{2}\ b_2 = \frac{1}{2}\ (\qquad) =$ ¡Complételo!

103) Con esto se quería decir que dada la circunfernecia y su diámetro, cual---- quier ángulo inscrito A en élla con lados en los ex-- tremos del diámetro es:

A) AGUDO
B) OBTUSO
C) RECTO
D) LLANO



104) Si el radio de la circunferencia es 4 cm. y la cuerda menor mide 4 cm. ¿Cuál es el perímetro y área del -- triángulo ABC.? figura (e_{51}).

A) $P=12+\sqrt{8}$ m. ; $A= 6 \cdot 8$ m^2

B) $P=4(2+\sqrt{3})$m.; $A= 8\sqrt{3}$ m^2

C) $P= 20.5$ m. ; $A=10.25$ m^2

D) $P = 18$ m. ; $A= 6\sqrt{8}$ m^2

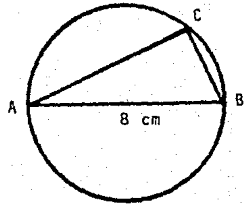


fig. (e_{51})

105) Calcular el área de la escuadra que mide por los lados de afuera 6, 8 y 10 pul, y uno de los lados de adentro mide 5. Ver la figura (e_{52}) Haga su cálculo.

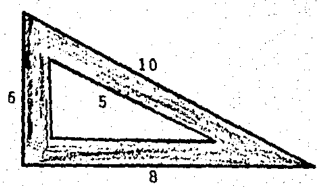
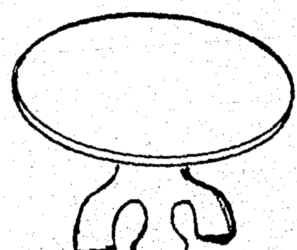


fig. (e_{52})

Area = ____________________ pul^2.

106) ¿Cómo localizar el centro de una mesa circular? ver figuras (e_{53})



(i) Sería correcto si trazo dos cuerdas cualquiera AB, CD, trazamos - BD y AC, y donde se intersectan - ¿será el punto que busco?
¿SI o NO? ____________________

(ii) O también si trazo las mismas - - cuerdas AB, CD. Y de cada una obtengo su punto medio M y M', -- además, por estos puntos trazo - una recta perpendicular en cada - uno la intersección ¿será lo que busco? ¿SI o NO? ____________

(iii) Si trazo dos cuerdas AB y BC que tengan un extremo en común, si obtengo la bisectriz BD del ángulo B, supongo que pasará por el centro y será el diámetro, luego, saco el punto medio M. ¿Será este - el centro que busco, SI o NO? ____

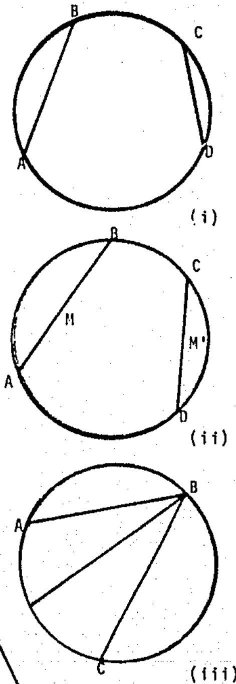


fig. (e_{53})

107) Busque el centro de una moneda - circular.

108) ¿Qué altura alcanza un cono recto cuyo diámetro de su base mide 8 m. y la longitud de su cara lateral mide 15 m. ?
Ver figura (e_{54}).

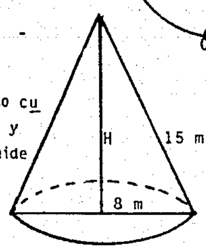


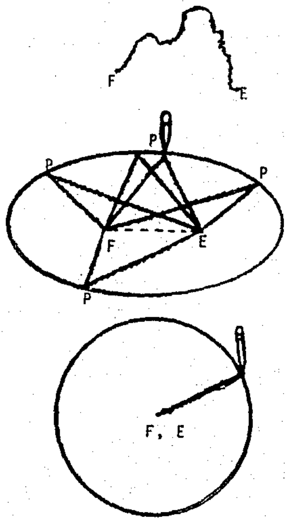
fig. (e_{54})

A) 16.2 m., B) $\sqrt{109}$ m., C) $\sqrt{290}$ m., D) $\sqrt{209}$ m.

109) El cordón suelto se sostiene en F y E, al ponerlo tenso con un lápiz se puede describir una curva cerrada, que no es propiamente una circunferencia.
¿Cómo se llama? __________________

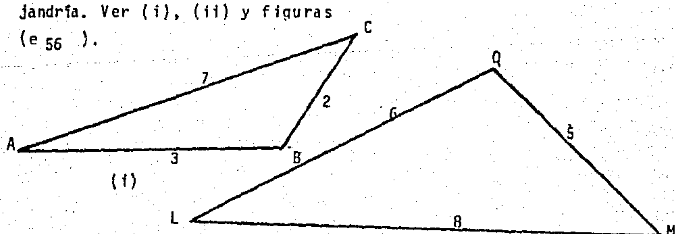
- Y, si F y E coinciden ¿Cómo se llamará la curva? __________________
Ver figuras (e_{55}).

- Si obtuviera los perímetros de cada uno de los triángulos (FEP) ¿Qué observaría? __________________



figs. (e_{55})

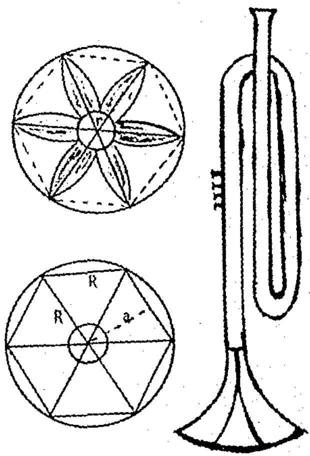
110) ¿Cuál es el área de los triángulos ABC y LMQ? use la fórmula de Herón de Alejandría. Ver (i), (ii) y figuras (e_{56}).



figs. (e_{56}) (ii)

111) "Calcular el área de una corneta".

El reducido texto del problema busca ser concebido, por ciérto, no muy fácil su aspecto inconfundible en su sentido tradicional, si queremos hacer un intento por modelarlo aunque se muestre tan desfavorable su distinción - en los esquemas. Indudablemente debe conservar hoy día un valor polémico, con argumentos propios lo ya indicado en las figuras (e_{57}), pero la sola idea al respecto busca acomodo en el gusto del lector según nuestro esbozo, en caso de llamar la atención más quizá resulte ser un modelo común de la esencia de nuestra intuición geométrica, digna para ser retomada convenientemente estas consideraciones, con una buena aproximación, y no muy fuera de la realidad; quiero decir con esto, que la trompa esta hecha y puede ser calculada su área, el resto se mide como la altura de un cilindro de radio "r", "a" es el apotema del exágono.



figs, (e_{57})

En nuestro problema la idea que tengo al respecto y las medidas que se dan en el esquema, se tiene: tres pétalos formados por los seis segmentos circulares:
$(A_{\theta}R - A_p) = 3$ pétalos, luego -- $2\,(A_{\theta}R - A_p) = 6$ pétalos, por lo tanto $A = (A_0R - A_{\theta}r) - 2\,(A_{\theta}R - A_p)$ es decir, esto dá el área de la trompa, solo habría que sumarle la parte con la cual formaríamos un cilindro de radio "r". Donde A_0R es el área del círculo mayor, $A_{\theta}r$ el menor, A_p área del polígono y A el área de la trompa. Haga la simplificación, además de sumarle la parte larga y dé una fórmula -- con esta idea.

112) Existe un postulado Euclidiano, que precipita el curso de la geometría en - todos sus órdenes y aplicaciones decisivas de las ciencias. Y que, han producido considerables avances en la humanidad.

¿Cuál es? ______________

¿Qué dice? ____

____

____

¿Será el germen de todas las geometrías actuales, que hasta hoy conoces: SI o NO? ______________

113) Termine el dibujo en perspectiva, tomando el segmento AB como horizonte, además el -- punto P. ¿Diga la relación - que guardan los ángulos: $\hat{a}$ - con $\hat{b}$ y con $\hat{c}$ y $\hat{d}$? Ver figura (e_{58}).

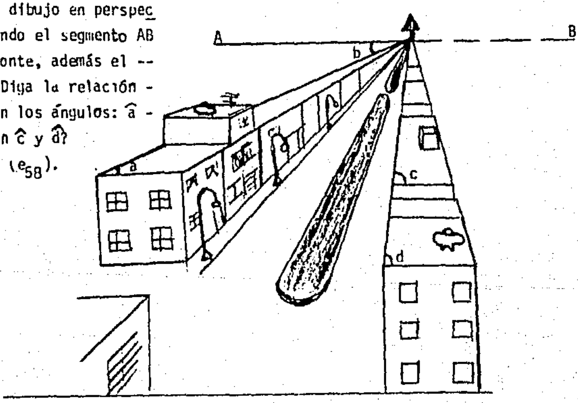


fig. (e_{58})

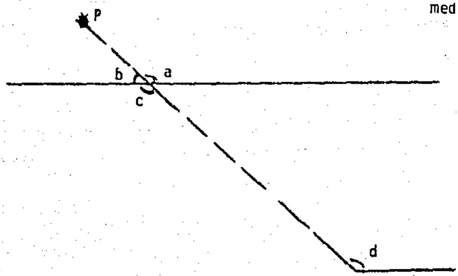
i) a con b ____________________ y son ____________

ii) c con d ____________________ y son ____________

114) En caso de mover el punto P a la izquierda y más arriba. Podria hacer un dibujo diferente al anterior ¿SI o NO? ______; Además si a = 150° ¿Cuánto medirá b =

c =

d =



¡ El que se le ocurra !

115) Intente hacer otro ejemplo para el cual use más de un puntos de fuga.

116) ¿Cuál es el ancho de una laguna con las dimensiones que se dan en la fig. (e_{59}), planté el problema y resuélvalo.

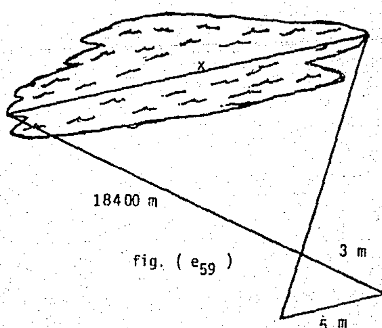
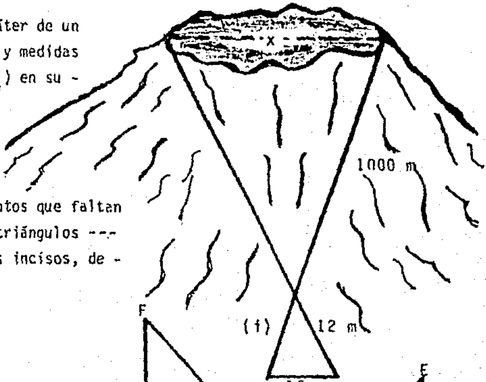
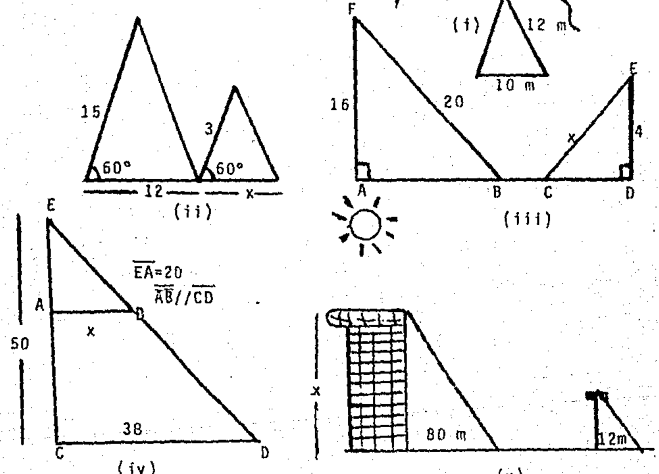


fig. (e_{59})

117) Qué diámetro tiene el cráter de un volcán en base al modelo y medidas que se dan. Ver Figs.(e_{60}) en su respectivo inciso.



118) ¿ Cuánto miden los segmentos que faltan marcados con x en los triángulos --- correspondientes en los incisos, de misma figura?



Figuras (e_{60})

119) Calcular la altura de un edificio a cierta hora del día, en la cual un poste que mide 10 m. de altura y el edificio proyecta una sombre de 12 m, y 80 m. -- respectivamente. Ver Fig. (v)

120) ¿Cuál será el ancho que tiene el río? El modelo geométrico lo -- ilustra la figura (e_{61}) y proporciona algunos valores.

A) 10 m

B) 11 m

C) 12 m

D) 13 m

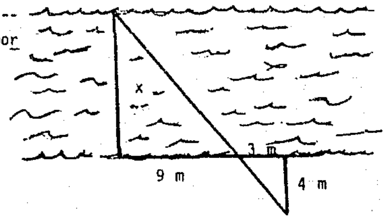
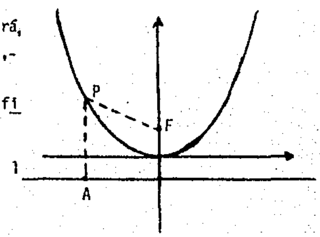


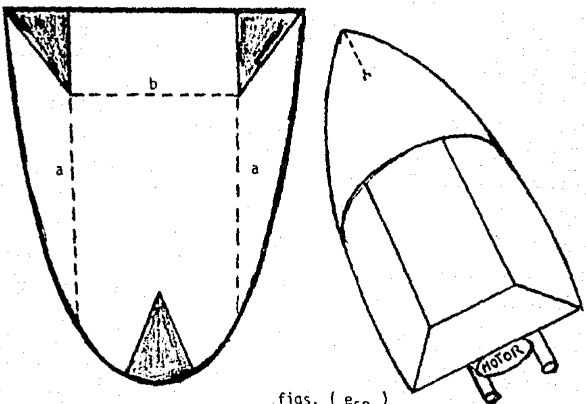
fig. (e_{61})

121) Si a usted le gusta navegar, le daré la idea para que haga su lancha; pero antes, algo de la definición de esta curva muy importante. La parábola; es el lugar que tienen los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo F llamado foco y de una recta fija "l" llamada directriz.

- Construya una parábola se divertirá, FP siempre será igual a AP hágalo,- varian AP y FP al deslizarse.
  Hay una diferencia entre esta gráfica y la presentada en (109)
  ¿Cuál es?



- Esta es la idea. Haga su maqueta, recorte las partes obscuras y doblece (a, b y a); el resto depende de soldar lámina y darle forma, vea figuras (e_{62}).



figs. (e_{62})

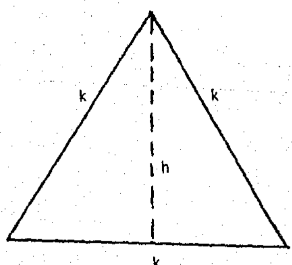
122) En un triángulo isósceles de lado k, la altura en función de sus lados:

A) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ k

B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ k

C) $\sqrt{3}$ k

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ k



123) Para el mismo triángulo ¿Cuál es su lado en función de su altura?

A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ h

B) $\sqrt{3}$ h

C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ h

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ h

124) Si el triángulo ABC esta inscrito y es equilátero ¿Cuánto miden los ángulos x y y ? P es el centro de la circunferencia ver figura (e_{63}).

A) x = 110° y = 40°

B) x = 120° y = 30°

C) x = 130° y = 20°

D) x = 140° y = 10°

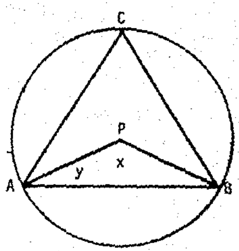


Fig. (e_{63})

125) ¿Qué fórmula de las que aparecen le sería útil para calcular la suma de -- los ángulos interiores de un polígono de n lados convexo? R = 90°.

A) f (n) = (n-1) R/n

B) f (n) = 2nR/n

C) f (n) = 2(n-2) R/n

D) f (n) = (n-2) 2R

126) Cada ángulo de un polígono regular de n lados es igual a una de estas -- dos fórmulas:

(A) $\hat{i} = \frac{360° (n-1)}{n}$ (B) $\hat{i} = \frac{180° (n-2)}{n}$

¿Cuál es? ______________________

127) En un cubo de azucar de 1 cm. de arista, una hormiga recorre de vértice a vértice, según se muestra en la figura (e_{64}) ¿Diga cuál fue su recorrido?

A) $\sqrt{2}$

B) $2\sqrt{3}$

C) $2\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3}$

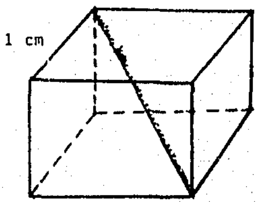


fig. (e_{64})

128) ¿Cuántos lados tiene un polígono regular en que cada ánguo es de 156°?

R= ____ lados.

129) Los ángulos de un cuadrilátero son x, 2x, 2x y 3x. ¿Cuáles son sus valo-- res?.

130) ¿Cuál es el valor de cada ángulo en los siguientes polígonos regulares: el pentágono, el exágono y el octágono?

______________ ______________ ______________

131) Los Poligonos. ¿Definase qué son, y cómo se clasifican?

- El número total de diagonales en un polígono convexo de n lados esta dado por la fórmula $n\,(n-3)/2$.

Una forma de mostrarlo sería:

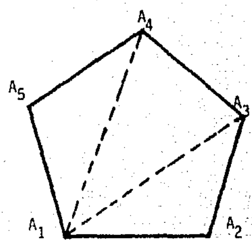
El número de lados del polígono es n, tengo entonces n vértices; luego, n-1 serian las líneas que se pueden trazar de un vértice a todos los restantes; $(n-1)-2$ es el número de líneas diagonales que salen de cada vértice, por que, dos líneas rectas no cumplen con la definición de diagonal, esto sucede en cada vértice, como son n, se tienen $n\left[(n-1)-2\right]$ diagonales; luego, una línea recta se puede trazar dado dos puntos, entonces si divido entre dos obtengo lo que necesito.

Resuelva estos ejemplos: ¿cuántas diagonales tiene un: triángulo, cuadrado, pentágono, exágono, eptágono, octágono, poligono de 12 lados? todos ellos son convexos, haga su gráfica con todas sus diagonales.

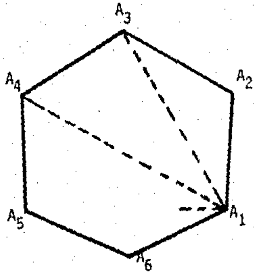
132) Si trazamos todas las diagonales posibles en estos tres polígonos, dejando un vértice fijo, el número de triángulos que aparecería será igual: "al número de lados que tenga dicho polígono menos dos, "y obtendriamos una fórmula muy comoda para cada polígono convexo que se presente al calcular su suma de sus ángulos interiores es igual a 2R (dos rectos) es decir:

n = número de lados
$n-2$ = número de triángulos
$2R = 180°$
$(n-2)2R$ = suma de ángulos interiores

Vea figuras (e_{65}), termine de trazar las diagonales y cuente el número de triángulos en cada muestra.

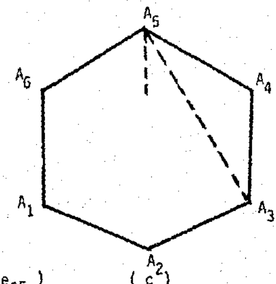


(a)



(b)

Figs. (e_{65})



(c)

Como una consecuencia del problema anterior; si buscamos el valor de cada ángulo en un polígono regular lo que hariamos sería dividir la suma de ángulos interiores entre el número de lados, obteniendo algo así:

$\hat{i} = \frac{(n-2)\ 2R}{n}$; donde $\hat{i}$ representa uno de los añgulos interiores.

133) ¿El triángulo se puede considerar un polígono? Si ____ o No______

¿Estas fórmulas se pueden aplicar al triángulo? Si ____ o No_______

Si $\hat{A}_i$ representa un conjunto de ángulos tales como:
$\{\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{A}_4, \ldots, \hat{A}_{n-1}, \hat{A}_n\}$ y la expresión $\sum_{i=1}^{n}\hat{A}i$, la suma de estos ángulos; tendríamos entonces la expresión siguiente para la suma de los ángulos interiores de un pentágono $\sum_{i=1}^{5}\hat{A}i = (5-2)\ 2R$ ¿Cuál sería el valor en grados? _________ , hágase el cálculo.

En un polígono de 20 lados, su suma de ángulos interiores sería:
$\sum_{i=1}^{20} Ai = (20-2)\ 2R$; hágase el cálculo y dê su valor en grados _________.

Si el polígono fuera de n lados ¿Qué fórmula le pondríamos para calcular la suma de sus ángulos interiores? $\sum A =$ termínelo.

En un exágono regular, la busqueda de uno de sus ángulos interiores será practicamente lo siguiente: $\hat{i} = \frac{(6-2)}{6}$ y resulta que $\hat{i} = 120°$

También podríamos usar : $\hat{i} = \frac{\sum_{k=1}^{6} Ak}{6} = \frac{(6-2)\ 2R}{6}$

134) Por ejemplo, en caso de querer calcular un ángulo interior de un polígono de 30 lados tenemos lo siguiente:

$\hat{i} = \dfrac{\sum_{k=1} \hat{A}_k}{30} = \dfrac{(30-2)\ 180°}{30} =$ ______________ = concluya el cálculo.

135) Si un ángulo interior de un polígono regular mide 140° ¿Cuántos lados tiene dicho polígono? _________.

136) Cinco de los ángulos interiores de un exágono son de 100°, 120°, 130°, 150° y 90° respectivamente. Hállese el valor del otro.

137) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un exágono?

A) 1080°

B) 1200°

C) 720°

D) 580°

138) ¿Cuál es el número de lados que tiene un polígono regular en donde uno de sus ángulos es igual 108°?

- ¿Qué fórmula va a usar? ______________________

- Realice el cálculo.

R = ____ lados ____

139) ¿Qué cantidad de varilla se usará para formar el esqueleto para una jaula de tender, con forma de un cubo cuya arista mide 2 m? Vea figuar (e_{66}) ¿Habrá alguna fórmula que generalice esto, para un valor k cualquiera de arista?.

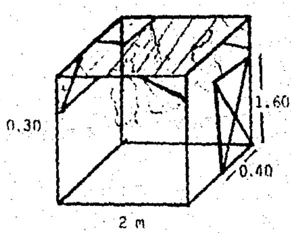


fig. (e_{66})

R = ________ m. fórmula: n (k) =

140) ¿Cuánto suman las longitudes de las varillas que sostienen una placa cuadrada perpendicular al piso de un anuncio comercial que mide 12 m. por lado y 6 m. de la placa al pie de la varilla? ver (e_{67}).

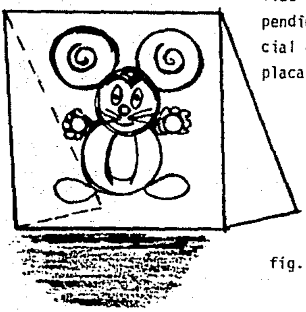


fig. (e_{67})

141) Encontrar la altura del faro, utilizando para ello los datos que se dan en la figura (e_{68}).

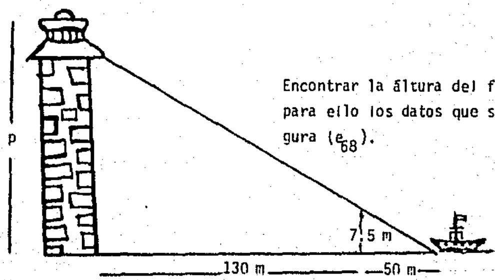
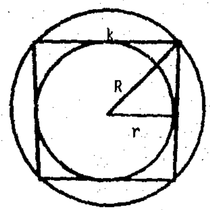
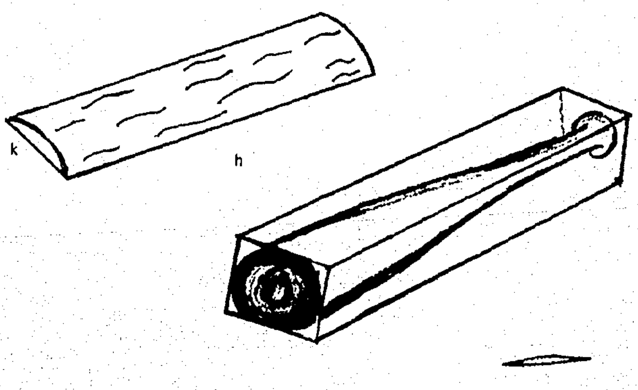


fig. (e_{68})

142) Uno de los ángulos externos de un triángulo es de 130°, y uno de los ángulos internos opuestos de 32°. Hállense los ángulos del triángulo.

143) Tantas ideas colectivas que subyacen en el ambiente geométrico, de los trazos, con auténtica información simple, si nos disponemos separadamente explorarlas encontraremos ejemplos como "la de un círculo circunscribiendo un cuadrado y además está inscrito un cuadrado de lado k", que parece no decir nada a simple vista, pero si usted observa lo siguiente, entre otras cosas cuando trazamos más líneas, surge la idea de como hacer tablas, un bat, y es la de tener una viga en forma prismática como lo señalan las figuras (e_{69}) lo cual al desperdiciar alguna madera, el sobrante se utiliza en hacer palillos. Si esto se hace en serie se obtendrían tablas, bats y palillos, todo esto gracias a el secreto de adelantarnos como muchos lo han hecho.





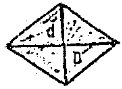
figs. (e_{69})

144) En las áreas sombreadas, cada cual tiene una fórmula para ser calculada, indique y coloque en el paréntesis la A que corresponda.
Ver figuras (e_{70}).

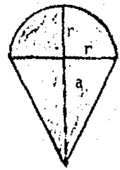
$A_1 = 3\ r\ a$ $\qquad A_2 = \pi(R^2 - r^2)$

$A_3 = d.D/2$ $\qquad A_4 = \dfrac{r^2 .\ n}{360°}$

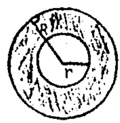
$A_5 = r/2\ (\pi r + 2a)$



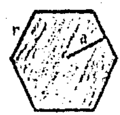
( )



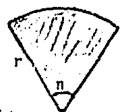
( )



( )



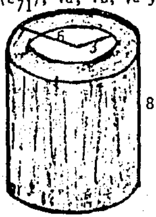
( )



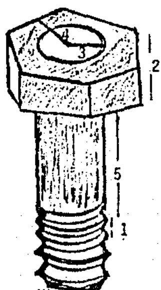
( )

fig. (e_{70})

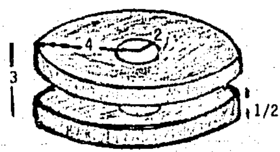
145) ¿Cuál sería el volumen de estos cuerpos? ver los datos en figuras (e_{71}), Va, Vb, Vc y Vd.



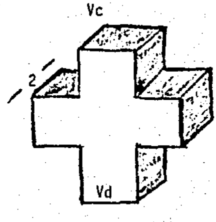
Va



Vb



Vc



Va = __________ Vb = __________

Vc = __________ Vd = __________

figs. (e_{71})

146) ¿Qué altura tiene la torre según datos que muestra la figura (e_{72}). Realice el cálculo.

R = ______________________

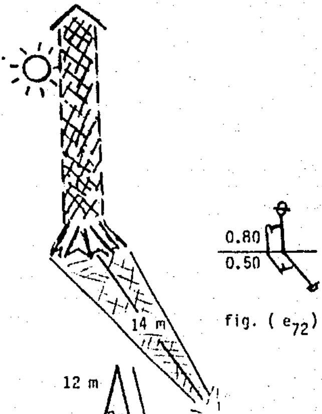
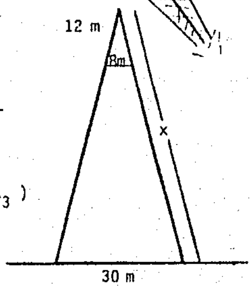


fig. (e_{72})

147) ¿Cuál será la longitud lateral de un edificio que tiene esta forma y las medidas señaladas graficamente? Ver figura (e_{73}).

R = ______________________



TORRE TLATELOLCO

fig. (e_{73})

148) Un terreno cuadrangular con las siguientes forma fig.(e_{74}), con $\hat{a} = \hat{b}$ y medidas correspondientes. ¿Cuál será el valor del lado x ?.

R = ______________________

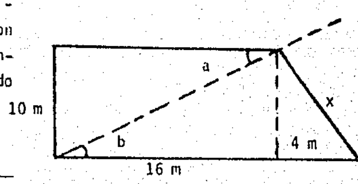


fig. (e_{74})

149) Una chica de 1.40 m de estatura coloca su espejo sobre el suelo y se situa de modo que pueda ver la parte superior de un árbol. ¿Qué altura tiene el árbol que se muestra en la figura (e_{75}) ?

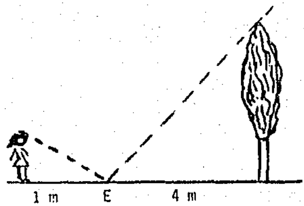


fig. (e_{75})

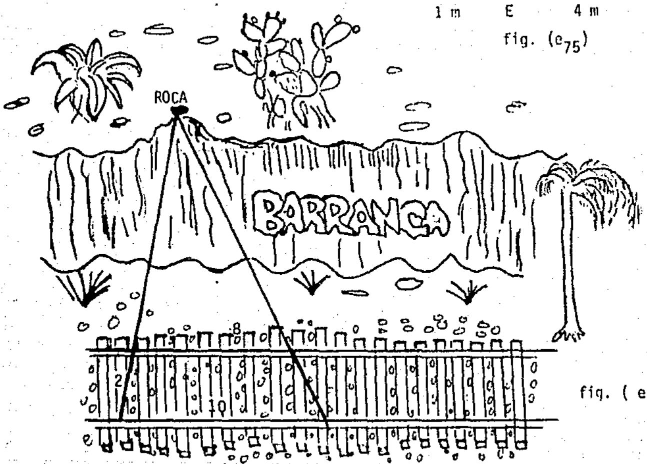


fig. (e_{76})

150) El ancho de la barranca está dado por la proporción:

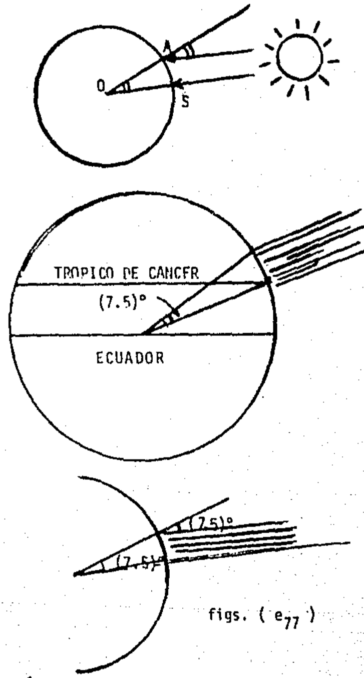
(A) $\frac{x}{2} = \frac{8}{10}$ (B) $\frac{8}{x} = \frac{2}{10}$ (C) $\frac{x}{2+x} = \frac{8}{10}$

¿Cuál fué? ____________. Ver figura (e_{76})

- Hágase el cálculo y dé el ancho de la barranca.

151) ¿Sabe cómo se podría medir la circunferencia de la tierra?

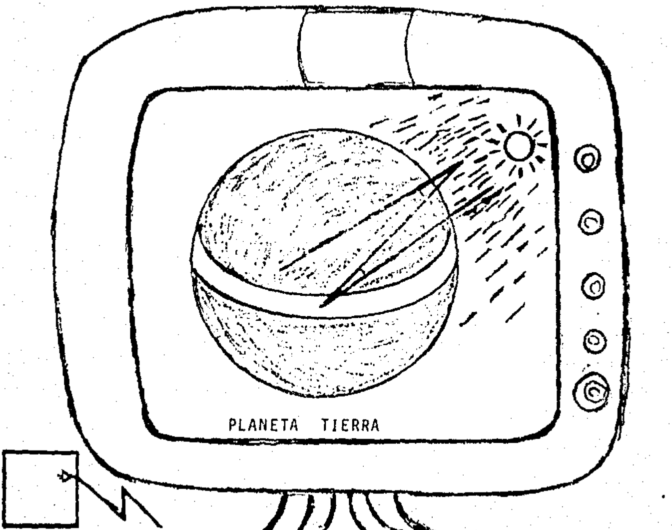
- En el año 240, A. de C., Eratóstenes la midió basándose en la curvatura terrestre.
En Siena, Egipto (ubicada en el Trópico de Cáncer), los rayos del sol eran precisamente perpendiculares, al medio día (12:00 hrs.) en el día del solsticio de verano. Al mismo tiempo, en Alejandría, población situada a 800 km., al norte, los rallos solares caían en un ángulo de 7.5°, respecto de la vertical. Con esta información y con rudimentos de geometría, vease figuras (e_{77}), Eratóstenes logró calcular la circunferencia gracias a la siguiente proporción: 7.5° es a 360° lo que 800 Km. (500 millas) es a la circunferencia de la tierra.



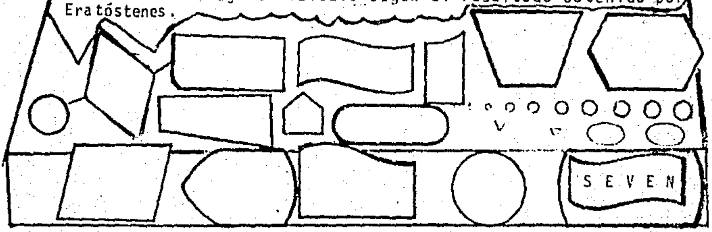
figs. (e_{77})

Obtenga usted mismo el cálculo de Eratóstenes.

¿Cuál fue? ______________________ Km.



152) Si ya tenemos el recurso aportado por Eratóstenes de haber calculado la redondes de la Tierra, es decir su circunferencia, donde utiliza el método más rústico, aunque aproximado del actual, sería oportuno usar la fórmula muy conocida de $C=\pi D$ y calcular el radio de la esfera terrestre. Haga el cálculo según el resultado obtenido por Eratóstenes.



PARTE IV

D E M O S T R A C I O N E S *

- Con el fin de formalizar algunos resultados, a continuación encontrará -- una lista de enunciados de algunos teoremas y problemas muestra, también, concretizar tres de nuestra lista y busco ajustarlos a cualquier proposición geométrica con estas características: esquema o figura, hipótesis, - tesis, razonamiento lógico y conclusión. Partes fundamentales en una demostración.

- En el apéndice encontrará los restantes teoremas y la demostración de solo unos cuántos, éstos estarán etiquetados con alguna letra mayúscula del alfabeto, coloque la que corresponda en el paréntesis vacio que está an-- tes del enunciado del teorema; a su vez, se tiene etiquetado su enunciado con una letra minúscula "t" con indices, ésta servirá para justificar algún paso en la demostración con ellos mismos.

- Más aclaraciones:

- Serán más los enunciados de los teoremas que las demostraciones hechas, - con el fin de provocar un grado más alto de dificultad.

- Busque la letra de su demostración y colóquela en el listado de teoremas; o, si esta trunca la demostración terminela, y colocar su letra respectiva en la lista

- Han de significar lo mismo: Teorema o Proposición en este cuaderno.

- Cuando se tenga iniciales ya sea para semejanza o congruencia de triángulos como: L.A.L.; A.A.A.; A.A.A., ... estas significan: lado, ángulo, lado; ángulo, ángulo, ángulo; ángulo, lado, ángulo; y así, según sea el caso.

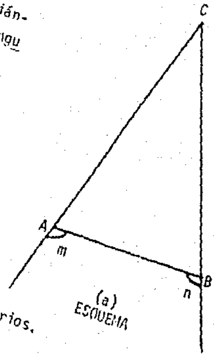
- Se sugiere hacer todo lo posible por demostrarlos, luego, sería útil copiarlos en su cuaderno destinado a matemáticas, con el propósito de checar y repasarlos. Podríamos aprovechar esto para iniciar la técnica de estas demostraciones e ilustrar el manejo de ellas apoyados por el ejercicio (67).

* Ejercicio (156) del apéndice.

153) Ejercicio.

"Suponiendo $\overline{AC} = \overline{BC}$, en el triángulo ABC demuéstrese que los ángulos m y n son iguales".

#1



(a) ESQUEMA

(b) Hipótesis: Sea el triángulo ABC - isósceles, con $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ prolongados.

(c) Tesis: $\widehat{m} = \widehat{n}$

(d) RAZONAMIENTO LOGICO:

i) $\widehat{m} + \widehat{A} = 2R$ Por ser ángulos suplementarios.

ii) $\widehat{n} + \widehat{B} = 2R$............ "

iii) $\widehat{m} + \widehat{A} = n + B$ .... NC_1.

iv) $\widehat{m} = \widehat{n}$ .... NC_3 y la hipótesis.

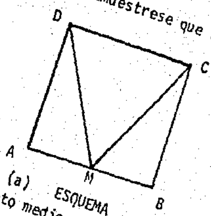
(e) Conclusión: $\widehat{m} = \widehat{n}$

154) Ejercicio.

Si ABCD es un cuadrado y M el punto medio de AB, demuéstrese que $\overline{DM} = \overline{MC}$

(b) Hipótesis: Sea ABCD un cuadrado y M el punto medio de AB.

(c) Tesis: $\overline{DM} = \overline{MC}$



(a) ESQUEMA

d) RAZONAMIENTO LOGICO

i) A = B, y $\overline{AM} = \overline{MB}$; Por hipótesis, por ser punto medio.
$\overline{AD} = \overline{BC}$ Def. de cuadrado.

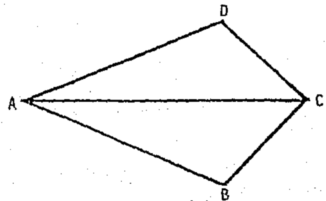
ii) $\Delta AMD \cong \Delta BMC$; Por tener L.A.L. respectivamente iguales.

iii) $\overline{DM} = \overline{MC}$; De la congruencia de triángulos.

(e) Conclusión $\overline{DM} = \overline{MC}$.

155) Ejercicio.

"Si, $\overline{AB} = \overline{AD}$ y $\overline{CB} = \overline{CD}$.
Demuéstrese que $\overline{AC}$ es la bisectriz de los ángulos BAD y DCB".



(a)
ESQUEMA

(b) Hipótesis: Sea el cuadrilátero ABCD, con $\overline{AD} = \overline{AB}$ y $\overline{CB} = \overline{CD}$; $\overline{AC}$ recta.

(c) Tesis: $\overline{AC}$ es bisectriz de $\widehat{BAD}$ y $\widehat{BCD}$.

(d) RAZONAMIENTO LOGICO

i) En el $\square$ABCD se forman dos triángulos: ABC y ACD.- Por Hipótesis.

ii) $\overline{AC}$ es común a los dos .... Por P_I

iii) $\Delta ABC \cong \Delta ACD$ .... Por ser Δ s congruentes L.L.L.

iv) De la igualdad de triángulos resulta que $\overline{AC}$ es la bisectriz de $\widehat{BAD}$ y $\widehat{BCD}$

(e) Conclusión: $\overline{AC}$ es bisectriz de $\widehat{BAD}$ y $\widehat{BCD}$.

P R O P O S I C I O N E S:

Ahora actúe, lea estas proposiciones localícese su letra mayúscula que tiene su demostración y póngase en el paréntesis vacío.

(   ), (t_1) Un ángulo exterior en un triángulo es igual a la suma de los dos no adyacentes a él, y por tanto mayor que cada uno de los dos.

(   ), (t_2) Sí dos paralelas son cortadas por un transversal, los ángulos correspondientes son iguales.

(   ), (t_3) Si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido son respectivamente congruentes a dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo, los dos triángulos son congruentes.

(   ), (t_4) Dos triángulos rectángulos son congruentes si la hipotenusa y un cateto del uno son respectivamente congruentes a la hipotenusa y un cateto del otro.

(   ), (t_5) La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a dos -- rectos.

(   ), (t_6) Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

(   ), (t_7) Si dos paralelas son cortadas por una transversal los ángulos alternos-internos son iguales.

( ), (t_8) Dos rectas situadas en un mismo plano y perpendiculares a una tercera no pueden encontrarse, por más que se prolonguen.

( ), (t_9) Si dos paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos-externos son iguales.

( ), (t_{10}) La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados convexo, es igual a dos rectos multiplicando por (n=2), El número de triángulos que se formarán al trazar todas las posibles diagonales a partir de un vértice fijo.

( ), (t_{11}) El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

( ), (t_{12}) El número de triángulos que se forman en un polígono, al trazar todas las posibles diagonales a partir de un vértice fijo, es igual al número de lados menos dos.

( ), (t_{13}) Todo ángulo inscrito en una circunferencia tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.

( ), (t_{14}) Cada ángulo externo de un polígono regular de n lados es igual a 2 rectos por (n-2) lados; dividido por el número de lados. Es decir: $\hat{i} = \frac{2R\,(n-2)}{n}$ donde n es el número de lados del polígono y R ángulo recto.

(   ), (t_{15}) En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales.

(   ), (t_{16}) La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a cuatro rectos.

(   ), (t_{17}) En todo cuadrado, demuéstrese que sus diagonales son iguales.

(   ), (t_{18}) Demostrar que dado un segmento de recta siempre se puede --- construir un triángulo equilátero.

(   ), (t_{19}) Demuestre que el área de un rombo es igual al semiproducto de la diagonal menor d con la diagonal mayor D.

(   ), (t_{20}) "La circunferencia y el círculo como límites".

. La circunferencia es el límite del perímetro de un polígono - circunscrito o inscrito cuyo número de lados aumenta indefinidamente. (Considerablemente).

.. El área de un círculo es el límite del área de un polígono -- inscrito o circunscrito cuyo número de lados aumenta considerablemente.

(   ), (t_{21}) La relación de la circunferencia al diámetro es un número - - constante llamado (letra griega).

(   ), (t_{22}) Puesto que $C: 2r = \pi$, se sigue que $C = 2\pi r$.

(   ), (t_{23}) El área de un polígono regular es igual a la mitad del producto del perímetro por el apotema.

(   ), (t_{24}) El área de un círculo es igual a la mitad del producto de la circunferencia por radio.

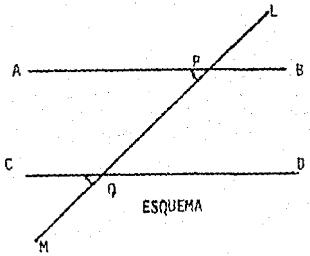
(   ), (t_{25}) El área de un círculo es igual πr^2.

D E M O S T R A C I O N E S

156) Ejercicio (A)

Hipótesis: Sea $\overline{AB} // \overline{CD}$ y $\overline{LM}$ Transversal que corta en P y Q

Tesis: $\widehat{MQC} = \widehat{MPA}$



RAZONAMIENTO LOGICO

i) $\widehat{MPA} = \widehat{LQD}$ Por ser ángulos alternos-internos........(t_7)

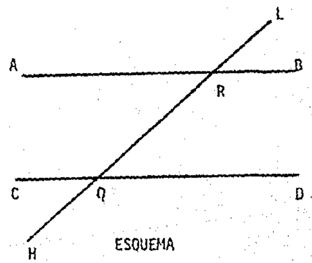
ii) $\widehat{MQC} = \widehat{LQD}$ Por ser ángulos opuestos al vértice......(t_6)

iii) $\widehat{MQC} = \widehat{MPA}$ NC_1

Conclusión: $\widehat{MQC} = \widehat{MPA}$.

157) Ejercicio (B)

Hipótesis: Sea AB // CD y LM transversal que corta en R y Q respectivamente.



Tesis: $\widehat{ARL} = \widehat{DQM}$

RAZONAMIENTO LOGICO

i) $\widehat{ARL} = \widehat{CQL}$ Por ser ángulos correspondientes.........(t_2)

ii) $\widehat{CQL} = \widehat{DQM}$ Por ser ángulos opuestos por el vértice..(t_6)

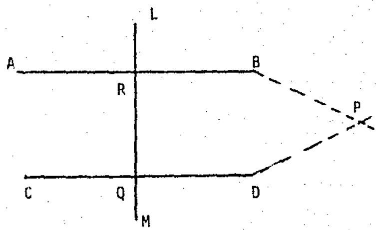
iii) $\widehat{ARL} = \widehat{DQM}$ NC_1.

Desde este problema dejo de poner "la conclusión" para no ser reiterativo. Tenemos que darnos cuenta de lo que buscamos, o sea la tesis.

158) Ejercicio (C)

Hipótesis: AB // CD y LM perpendiculara a ambas, y cortas en R y Q.

Tesis: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no se cortan - por más que se prolonguen.



ESQUEMA

RAZONAMIENTO LOGICO:

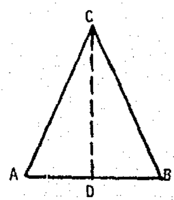
Supongamos $\overline{AB} \not\parallel \overline{CD}$ y prolongamos el lado derecho, de manera que se corten en un pungo P, esto significa que formaríamos un triángulo QPR con $\hat{R} + \hat{Q} + \hat{P} = 2R$ ¡ Lo cual contradice la hipótesis y a t_5 ! Como la mentira no se acepta entonces es verdadero, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no se cortan.

- Fue una demostración por deducción al absurdo negué la tesis y llegué argumentando a una contradicción, entonces acepto que es verdad.

159) Ejercicio (D)

Hipótesis: Sea el triángulo ABC isósceles donde $\overline{AC}$ es igual $\overline{BC}$.

Tesis: $\hat{A} = \hat{B}$



ESQUEMA

RAZONAMIENTO LOGICO:

i) Trazar la bisectriz $\overline{CD}$ de $\widehat{ACB}$

ii) Se forman dos triángulos con un lado en común $\overline{CD}$, Δs ADC y BDC. #

iii) $\widehat{ACD} = \widehat{BCD}$ . . . . Definición de bisectriz.

iv) $\Delta ADC = \Delta BCD$ . . . . Por (t_3) ∴

v) De la igualdad de los triángulos $\hat{A} = \hat{B}$.

Consecuencia del trazo.

160) Ejercicio (E)

Hipótesis: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se cortan en el punto P ,

Tesis: $\widehat{APC} = \widehat{BPD}$

Haga el esquema

RAZONAMIENTO LOGICO:

i) $\widehat{APC} + \widehat{CPB} = 2R$.......... Por ser ángulos suplementarios.

ii) $\widehat{CPB} + \widehat{BPD} = 2R$.......... Por ser ángulos suplementarios.

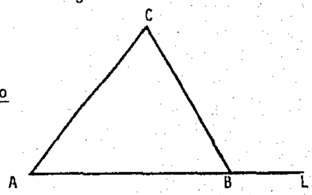
iii) $\widehat{APC} + \widehat{CPB} = \widehat{CPB} + \widehat{BPD}$ ....Por NC_1. $\therefore$

iv) $\widehat{APC} = \widehat{CPB}$.................Por NC_3.

161) Ejercicio (F)

Hipótesis: Sea el $\triangle ABC$ con $\overline{AB}$ prolongado hasta L.

Tesis: $\widehat{CBL} = \widehat{A} + \widehat{C}$



ESQUEMA

RAZONAMIENTO LOGICO:

i) $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2R$..................Por ($t_5$)

ii) $\widehat{B} + \widehat{CBL} = 2R$..................Por ser suplementarios

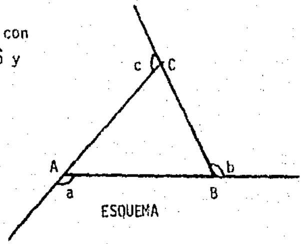
iii) $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{CBL}$..............Por NC_1 $\therefore$

iv) $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{CBL}$.................Por NC_3

162) Ejercicio (G)

Hipótesis: Sea el triángulo ABC con sus tres lados prolongados; $\hat{a}$, $\hat{b}$ y $\hat{c}$ ángulos exteriores.

Tesis: $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 4R$.



ESQUEMA

RAZONAMIENTO LOGICO:

i) $\left.\begin{array}{l}\hat{A} + \hat{a} = 2R \\ \hat{B} + \hat{b} = 2R \\ \hat{C} + \hat{c} = 2R\end{array}\right\}$ ....Por ser ángulos suplementarios.

ii) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2R$ ....Por (t_5)

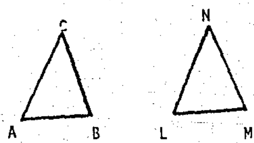
iii) $2R + \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 6R$ ....Suma de (i), Y toda cantidad puede ser sustituída por su igual.

iv) $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 4R$..................Por NC_3

163) Ejercicio (H)

Hipótesis: Sea $\triangle ABC$ y $\triangle LMN$ con: $\overline{AB} = \overline{LM}$, $\overline{AC} = \overline{LN}$ y $\hat{A} = \hat{L}$

Tesis: $\triangle ABC = \triangle LMN$.



ESQUEMA

RAZONAMIENTO LOGICO:

i) Colocar $\triangle ABC$ sobre $\triangle LMN$ de manera que A caiga sobre L, B sobre M y C sobre N.................Por P_6

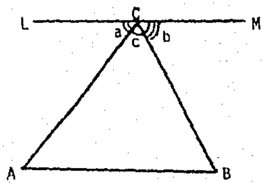
ii) Por tanto: $\hat{A} = \hat{L}$, $\overline{AB} = \overline{LM}$ y $\overline{AC} = \overline{LN}$...........Por hipótesis

iii) Como terminan en punto los lados iguales se tiene que $\overline{BC} = \overline{MN}$...........................Por P_1 $\therefore$

iv) $\triangle ABC = \triangle LMN$.

164) Ejercicio (I)

Hipótesis: Se el $\triangle ABC$ y $\overleftrightarrow{LM}$ recta paralela a $\overline{AB}$ que pasa por el vértice C.



ESQUEMA

Tesis: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2R.$

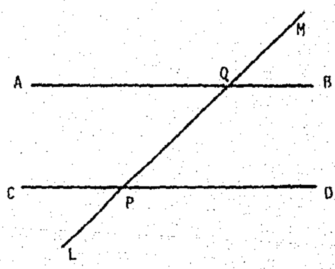
RAZONAMIENTO LOGICO:

i) $\widehat{A} = \widehat{a}$ ....Por (t_7)
$\widehat{B} = \widehat{b}$

ii) $\widehat{C} = \widehat{c}$ ....Propiedad de identidad,

¡ Termínelo !

165) Ejercicio (J)



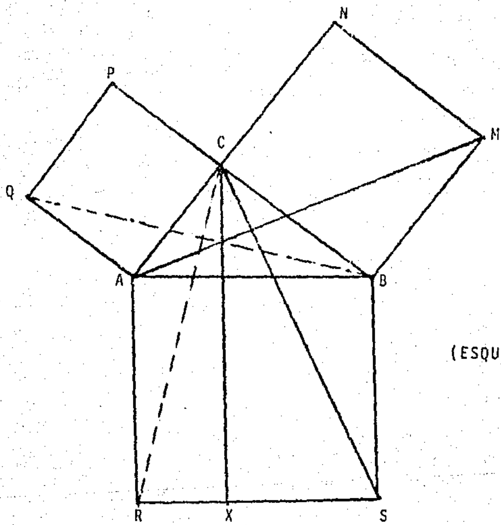
: $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$..........

Tesis: $\widehat{AQL} = \widehat{DPM}$

¡ Complete lo que falta !

166) Demuestre los restantes teoremas.

TEOREMA DE PITAGORAS



(ESQUEMA)

Proposición 47 de los Elementos Tomo I

En los triángulos rectángulos, el cuadrado construido sobre el lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados construidos-sobre los lados que forman el ángulo recto.

Hipótesis: Sea ABC un triángulo rectángulo con C ángulo recto.

Tesis: AS = AP + BN; es decir el cuadrado AS es igual a la suma de dos cuadrados AP y BN.

Razones:

i) Trazar $\overline{CX} // \overline{AR}$, y también líneas rectas CR y BQ ---(P_1)

ii) $\widehat{QAC} = \widehat{RAB}$ -------- (P_4). además A, C y N están en la misma recta.

iii) Como $\overline{AR} = \overline{AB}$; $\overline{AC} = \overline{AQ}$ -------- Definición de un cuadrado.∴

iv) $\widehat{QAB} = \widehat{QAC} + \hat{R} = \widehat{RAC}$ esto implica que el $\triangle AQB = \triangle ARC$ --- (Congruencia de triángulos L.A.L.) y por ende el $\square AX = 2\triangle ARC$.

(Tienen una misma base $\overline{AR}$ y una misma altura $\overline{RX}$).

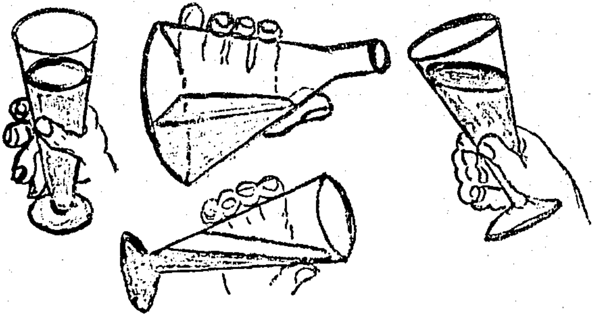
v) Así mismo el cuadrado $CQ = 2\triangle ABQ = 2\triangle ARC$

De igual manera se demuestra que $\square BX$ es equivalente al cuadrado BN. (Hágalo).

$$\square AS = \square AX + \square BX \quad \therefore \quad AS = BN + CQ$$

APENDICE

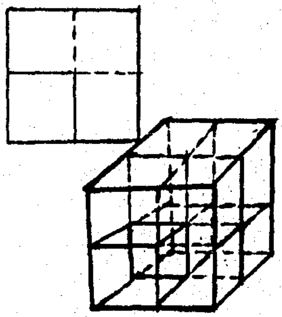
ALGUNAS CONICAS



A grandes rasgos "las secciones de las curvas cónicas", concuerdan unánimemente algunas especulaciones con la duplicación del cubo en forma extraordinaria, además su intento tiene cualidades que se divulgan en algunos manuales.

La misteriosa y anecdótica carta de Eratóstenes al rey Ptolomeo, en donde narra la metamorfósis de un problema primitivo cuya construcción geométrica apenas si tiene interés en aquel momento, sólo por el hecho de obtener la duplicación de la tumba del rey Glauco conservando su forma cúbica al duplicar cada lado, resultaba evidente conocer las carateristicas del comportamiento tanto para figuras planas como para las sólidas al ser graficadas, unas quedan cuadriplicadas y las otras octuplicadas. Ver figuras (e_{78}).

Ciertamente el capricho de Minos, rey de Creta, genera la idea como una cuestión de Geometría plana para trabajarlo con regla y compás, cuyos intentos en el proceso fueron inutiles al intentar resolverlo. También ocurre en la Isla Delos al querer duplicar un altar; y no por esto quedaron prensados los motivos geométricos para la respuesta, al proponer a los geómetras la cuestión de duplicar una figura sólida dada, conservando su forma, y al problema se le llamó "duplicación del cubo".



Todo esto fue tema de estudio en la Academia, surge entonces la necesidad de comunicarse con Platón y la gente que lo rodea para resolver la cuestión. El problema es atacado, las soluciones se atribuyen a Eudoxo, Menecmo, Hipócrates de Quíos, Arquitas de Tarento y el mismo Platón.

Hipócrates reduce el problema, al mostrar la forma de encontrar dos medias proporcionales en proporción continua entre dos líneas rectas; esto aminora la situación científica para el problema de "insertar dos medias en proporción continua" lo cual significa dar la triple igualdad (#), a : x = x : y = y : b, donde "a" y "b" son los segmentos dados y "x" é "y" los pedidos, es decir, tenemos lo siguiente:

fig. (e_{78})

$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ con lo que deducimos tres igualdades:

(i) $x^2 = ay$, (ii) $y^2 = bx$ y (iii) $xy = ab$, de donde conjugando dos de las expresiones anteriores en este caso (i) y (iii) resulta un curioso resultado $x^3 = a^2 b$ (**), de lo cual x es el lado de un cubo, equivalente a un paralepípedo rectángulo que tiene por base un cuadrado de lado "a" y por altura "b"; luego si hacemos b=2a, la igualdad (**) se traduce en $x^3 = 2a^3$, donde "x" es el lado del cubo doble de "a".

Son varias soluciones algunas padecen de claridad en nuestra vida cotidiana como la de Eudoxo mediante ciertas líneas curvas que se cortan; la hipocrática que transforma el problema en otro, como había hecho para cuadrar el círculo por el método de reducción, original suyo. Arquitas con el semicírculo y una de las más claras que se aprecia en este dato (Siglo IV a. de C.), él ofrece una atrevida construcción en tres dimensiones determinando un cierto punto como la intersección de tres superficies: un cono recto, un cilindro y un toro cuyo diámetro es cero; ésta intersección de las superficies dadas nos dice Arquitas, es una cierta curva (esto es, una curva de doble curvatura), y el punto requerido esta establecido como el punto en el cual el cono intersec ta esta curva. En esta construcción se advierte enseguida el empleo de los lugares geométricos, la determinación de los puntos, para ampliarlos al espacio y hacer el tránsito de los problemas "planos" a "sólidos", correspondientes. (...) Vea figura (e_{79}).

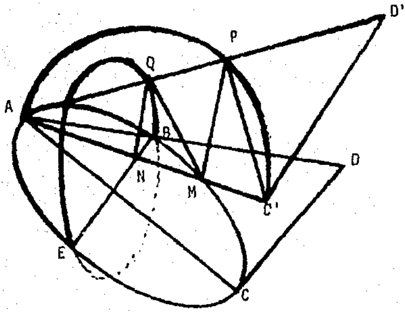
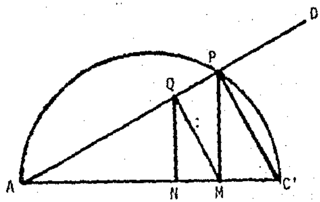


fig. (e_{79})

Fueron demostraciones apodícticas que rebasaban la infraestructura matemática de aquel tiempo, pero aún así tocaron el terreno conjetural.

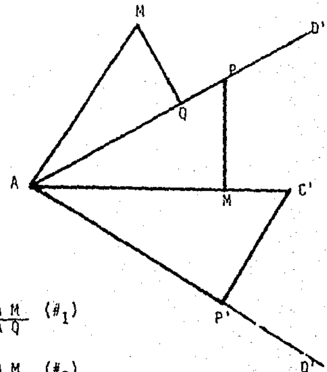
Según se observa en Arquitas al adentrarse más en su demostración; dice que al reunir AP al semicírculo BQE lo toca en Q, donde AC' es la línea que intersecta a el diámetro BE en N. Ahora ambos semicírculos están en ángulo recto a el plano del círculo ABC, por lo tanto esta línea de intersección QN esta en ángulo recto a ambas BE y AM; así que QN sigue estando en ángulo recto en BE, de donde se tiene: $QN^2 = BN \cdot NE = AN \cdot NM$ lo cual significa que el ángulo AQM es recto. Pero, el ángulo APC' también es recto, por lo tanto QM es paralela a PC'.

(...) 12



Así que por semejanza de triángulos y haciendo un desdoblamiento en serie dejando para éstos un triángulo fijo, resulta en la configuración del problema, un magnífico - pretexto como recurso al relacionar la flexibilidad que muestra esta extructura espacial y geométrica, poco familiar en algunos cursos intermedios donde las construcciones se basan en la especulación extricta - de la Matemática pura.

Los triángulos semejantes son: AQM, AMP y APC', y vea las expresivas figuras (e_{80}).



Así que tenemos $\dfrac{C'A}{AP} = \dfrac{AP}{AM} = \dfrac{AM}{AQ}$ (#$_1$)

Es decir $\dfrac{AC}{AP} = \dfrac{AP}{AM} = \dfrac{AM}{AB}$ (#$_2$)

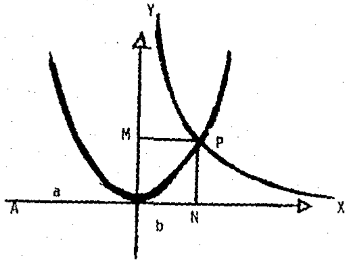
figs. (e_{80})

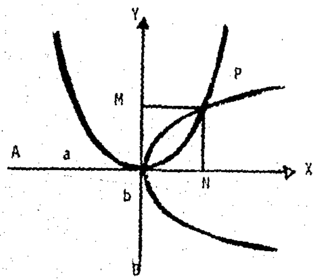
Luego AM y AP son medias proporcionales entre AB y AC.

Combinando los radios, tenemos $\dfrac{AC}{AB} = \left(\dfrac{AM}{AB}\right)^3$. Por lo tanto el cubo - descrito con AM como lado es a el cubo de lado AB, como AC es a AB.

En el caso particular donde AC = 2AB, AM^3 = 2AB, y el problema esta resuelto.

La aventura en los estudios de Menecmo al respecto de la duplicación del cubo, y que para ese entonces las referencias cronológicas decretan que Menecmo fue alumno de Eudoxo, y prácticamente la evolución sus conocimientos tuvie ron a bien, que ofrecer más al respecto sin quitar el dedo del renglón con el principio eudoxiano donde demandaba, que ciertas curvas se cortan; y efectivamente, si nos ubicamos en la actualidad con el plano carteciano y las ecuaciones de la triple igualdad (#) de este comentario (i), (ii) y (iii) al resol-- verse simultáneamente parábola - - hipérbola y parábola - parábola - que son los dos casos expuestos. - No pienso poner los detalles, por tal motivo puede adentranse en el ejemplo para poder desinteresada-- mente participar en lo que llamaron "la tríada de Menecmo".

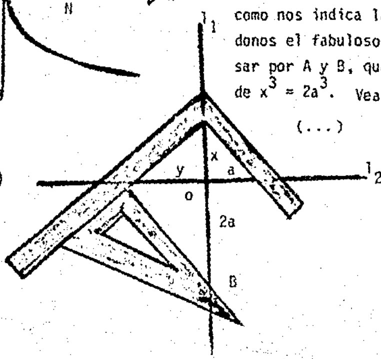




Y finalmente la espectacular demostración atribuida a el enigmático Platón donde usa un "gnomno" y una escuadra después de haber trazado dos rectas perpendiculares l_1 y l_2, y señalando a O como el punto donde se intersectan las rectas, además marca OA=a y OB=2a y desliza la escuadra sobre el "gnomno" - como nos indica la figura resultándonos el fabuloso resultado al pasar por A y B, que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$, donde $x^3 = 2a^3$. Vea figuras (e_{81}).

(. . .)

figs. (e_{81})

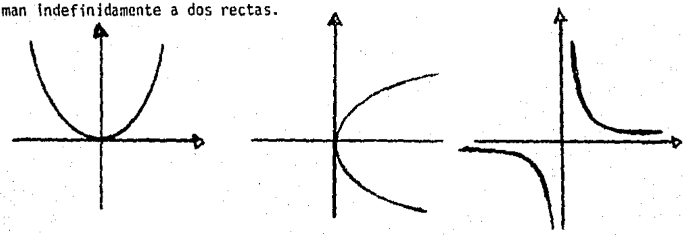


(. . .) 16

Y así se perfilaba un rico pilón al combinar las tres razones: dos parábolas y la hipérbola. Ver figuras (e_{82}).

En terminos actuales estas curvas se definen como lugares geométricos de puntos; las parábolas tienen vértice en el origen y son líneas curvas cuyos puntos equidistan de uno fijo (focos) y una recta fija (directrices).

La hipérbola curva cónica formada por dos ramas abiertas que se aproximan indefinidamente a dos rectas.



figs. (e_{82})

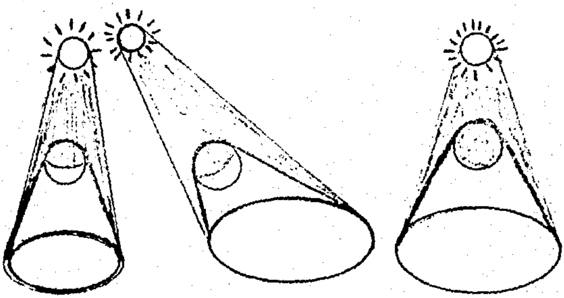
Lo cual significa que cuatro siglos antes de Cristo ya se sabía algo de las secciones de sendos conos y algunas de sus propiedades, muy a pesar del esquema de conocimientos matemáticos de entonces.

Se duda si Platón tuvo la sorprendente idea de duplicar el cubo, expuesto como hasta ahora se ve con un par de escuadras. Y al respecto las opiniones se hayan divididas, unas por lo mecánico del modelo, pero también, Démonos cuenta que "una idea nueva y limpia saca de apuros", examinado así; la disputa no terminará nunca porque lo mecánico de otras demostraciones como fueron la de Menecmo, Eratóstenes, Nicomédes y Diocles que le trabajaron en esto y pertenecientes a la época alejandrina lo hicieron con grandes esperanzas sin preveer la utilidad que hoy día nos presentan sus resultados.

No menos importante fueron otros dos problemas griegos de polémica muy característica y soporte extravagante que preocuparon las explicaciones de -

los científicos de aquellas épocas por su naturaleza cotidiana en el departamento de la Geometría Plana y fueron: "La Cuadratura del Círculo" y "La Trisección del ángulo".

- Adéntrese en este par de problemas como una actividad complementaria -



(a) (b) (c)

____________ ____________ ____________

figs. (e_{83})

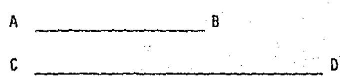
168) La posición del sol posee características inviolables para las cuales al querer traspasar un objeto esférico la luz, ésta se desvía y proyecta una sombra dando la sensación de ser una curva cónica, pero también la curva descrita al choque con el objeto produce otras curvas. Análize bien cada cual, de nombre correspondiente en las figuras (e_{83}) incisos (a), (b) y (c).

169) Gráfique tomando como referente un reloj de arena e intente con él imitar las curvas cónicas.

- Este es un problema para ser presentado en forma de títeres, obra teatral película, video, etcétera, etc. Con un evento de mucha trascendencia y ser coordinado por alumnos y profesores del Area de Matemáticas de la comunidad del Colegio de Ciencias y Humanidades y otro Bachillerato y mostrar facultades en forma adecuada protagonizado por los mismos estudiantes con un material que considero de impostergable interés para áquellos que se inclinan por el arte dramático.

170) En un pasaje de las obras completas de Platón se relata en varios párrafos (de los cuales dare la referencia a un tradicional problema) ¿Cómo duplicar el área de un cuadrado?. Esto es con el fin de mostrar la verdad de un teorema. Los que intervienen en estos diálogos son Menón, Sócrates y un Esclavo, y la referencia está en: la página 446 a la 449 del libro "PLATON OBRAS COMPLETAS" (...)

171) De este par de segmentos, diga cuál de éllos tiene mayor número de puntos; analicélos y muestre su explicación.



172) ¿Qué es un rectángulo dorado?

173) ¿Cuántas columnas tiene el Partenón?

(...) 23

DEFINICIONES EUCLIDIANAS

D_1.- Un punto es lo que no tiene parte o dimensión.

D_2.- Una línea es una longitud sin anchura.

D_3.- Los extremos o límites de una línea son puntos.

D_4.- Una recta es una línea que tiene todos sus puntos en la misma dirección.

D_5.- Una superficie es la que sólo tiene longitud y anchura.

D_6.- Los extremos o límites de una superficie son líneas.

D_7.- Una superficie plana es la que contiene a una recta en cualquier posición.

D_8.- Un ángulo plano es la inclinación entre sí de dos líneas de un plano si éstas se cortan y no están en una misma recta.

D_9.- Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas el ángulo se dice que es rectilíneo.

D_{10}.- Cuando una recta se levanta sobre otra formando ángulos adyacentes iguales, cada uno de lós ángulos iguales se llama ángulo recto, y la recta que se eleva sobre la otra se llama perpendicular a ésta otra.

D_{11}.- Un ángulo obtuso es mayor que un recto.

D_{12}.- Un ángulo agudo es menor que un recto.

D_{13}.- Un límite es lo que constituye un extremo de alguna cosa.

D_{14}.- Una figura es lo que esta contenido en un límite o varios límites.

D_{15}.- Un círculo es una figura plana contenida en una línea, llamada circunfe rencia, tal que todas las rectas que van desde un punto particular hasta puntos de ella, quedándo dentro de la figura, son iguales.

D_{16}.- El punto particular (de la definición D_{15}) se llama centro de la circun ferencia o del círculo.

D_{17}.- Un diámetro de un círculo o de una circunferencia es una recta que pasa por su centro y termina, en ambos sentidos en la circunferencia. Dicha recta biseca además a la circunferencia y al círculo.

D_{18}.- Un semicírculo es la figura contenida entre un diámetro y una semicir-- cunferencia, o sea, la mitad de la circunferencia cortada por él. El - centro del semicírculo es el mismo que el del círculo.

D_{19}.- Figura rectilínea son las contenidas entre rectas, figuras trilaterales (o triángulos) son las contenidas entre tres, cuadriláteras (o cuadrilá terales) las contenidas entre cuatro y las multilaterales (o polígonos) las contenidad entre más de cuatro rectas.

D_{20}.- De las figuras trilaterales, un triángulo equilátero es aquel cuyos - - tres lados son iguales, un triángulo isósceles tiene dos de sus lados - iguales y un triángulo escaleno tiene sus tres lados desiguales.

D_{21}.- Además de las figuras trilaterales, un triángulo rectángulo es la que - tiene un ángulo recto, un triángulo obtusángulo la que tiene un ángulo obtuso y un triángulo acutángulo lo que tiene sus tres ángulos agudos.

D_{22}.- De las figuras cuadrilaterales, un cuadrado es la que es equilátera y - sus ángulos son rectos; un cuadrilongo es la que tiene todos sus ángu-- los rectos pero no es equilátera; un rombo es la equilátera pero sin án gulos rectos, y un romboide la que tiene sus lados y ángulos opuestos - iguales unos a otros pero no es equilátera ni tiene ángulos rectos, los cuadriláteros distintos de los anteriores se llaman trapecios o trape--

zoides, según tengan un par de lados paralelos o no tengan ninguno.

D_{23}.- Rectas paralelas son las que, estando en el mismo plano y prolongando-- las indefinidamente en ambos sentidos, no se cortan ni en uno ni en el otro sentido. (...)

Estas 23 definiciones, son sin lugar a duda; las raices, en cualquier - libro de geometría elemental plana, que alguna vez tuvimos el esmero y la dedi cación de estudiarlo en nuestro primer contacto con la escuela; lo que sucede, es que, en aquel tiempo no se nos mencionó su procedencia de todas las ideas - escritas y traducidas con figuras, sin embargo, el provecho de haberlas adquirido deja ya una huella imborrable en nuestra formación escolar.

Significa entonces, que esto es solo una oropuesta para ponernos a ---- crear material accesible par todo aquel estudiante que adolesce de principios básicos de Geometría plana, muy a pesar que tengamos que iniciarnos con los -- viejos principios, ideas, la regla y el compás, problemas a su alcance, aprove char la tecnología que hoy poseemos, recopilar si usted gusta en un diskette - este material que hoy les brindo, procurar mejorar las irregularidades de los cursos recibidos, hacer una buena labor estudiante-profesor al trabajar juntos, incluso estudiante-estudiante, y podría decirlo así estudiante-padre-profesor, siempre con la esperanza firme de lograr hacer una buena labor culturalmente - porque, la Geometría también es cultura.

Nuestro país hoy día, tiene la más alta responsabilidad de dar servicio educativo a las nuevas generaciones de científicos, filósofos, artistas y técnicos, para su desarrollo económico-social para tomar una iniciativa de cambio, provocando así reflexiones de conciencia social en un esquema racional -- donde la esquematización impone un debate.

(...) 14

B I B L I O G R A F I A

@) Obras de consulta para complementar este trabajo:

1) Geometría Plana y del Espacio, por:
Jorge Wentworth y David Eugenio Smith.
Editorial Ginn y Compañía

2) Geometría Razonada y Trigonometría.
Profesor Francisco Zubieta R.
Editorial del Autor, México D. F., 1965.

3) Apuntes de Geometría, por: Emilio Lluis Riera, Humberto Cárdenas trigos y más autores.
Editorial C.E.C.S.A.

4) La Suma de Cantidades Infinitamente Pequeñas por el :
Profesor de Matemáticas de la Universidad de Leningrado
I.P. NATANSON.
EDITORIAL Limusa, México, 1978.

5) GEOMETRIA, De J. E. Thompson, B.S. en E.E.,A.M. Profesor de Matemáticas de la Escuela de Ingeniería, Instituto Pratt. Colección Matemáticas al Alcance de Todos, de U.T.E.H.A., S. A. de C. V., México.

6) ALGEBRA, por: Raymond A. Barnett
Segunda Edición (Primera en español) México 1984.
Editorial Mc. Graw-Hill.

7) Geometría y trigonometría por: Abelardo Guzmán Herrera.
Editorial Publicaciones Cultural, Primer Edición México, 1986.

8) Serie Notas de Clase, Un poco de Geometría,
Por Colectivo de Autores* ; Comunicación Interna Nº 3, 1979
Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. U.N.A.M.

(...) Bibliografía Crítica.

9) Los Elementos de Euclides Tomo I.
Federico Enriques; Roma. Mayo 1924.
QA31, E 877. Biblioteca Central, U.N.A.M.

10) Los Elementos.
Biblioteca Scriptorum Graecorum et Romanorum Mexicana.

11) Revista Matemática (MATEMATICA Y ENSEÑANZA) Números; 4 y 11.
Ed. Sociedad Matemática Mexicana, Fac. de Ciencias U.N.A.M.

12) History of Greek Mathematics, Thomas H. L. Heath.
Dover N.Y. 1963.

13 La Axiomática, de Robert Blanché, Cuaderno 21,.
Centro de Estudios Filosóficos de la U.N.A.M.

14) Estudio de las Geometrías, Tomos I y II de Howard Eves.
Editorial U.T.E.H.A., S. A. de C. V.

15) Geometría Axiomática de Leonard M. Blumenthal.
Universidad de Missouri, Editorial AGUILAR.
Madrid, España. Mayo de 1963.

16) LEXIKON DE MATEMATICAS de Francisco Vera.
Editorial Kapeluz, S. A. Buenos Aires, Argentina.
Libro de Edición Argentina 1960.

17) Comunicación Estraterrestre y Otros Pasatiempos Matemáticos.
De Martín Gardner. Ediciones Cátedra, S. A., 1986.

18) Dictionary of Sicientific Biography
Coulston Gillispie Charles; Editorialy, Volumen IV.
Páginas (414, 459)

19) Enciclopedia de la Colección Sigma, volumen 1.
Ediciones Grijalbo, S.A. Barcelona-México, D.F. 1968.

20) ¿Qué es La Matemática? de Richar Curant y Herbet Robbins, ambos Jefe del Departamento de Matemáticas de la Universi dad de Nueva York, y Profesor de Matemáticas respectivamente.
Editorial TOLLE? LEGE AGUILAR. 1971

21) Introduction to Analysis. De Norman B. Haaser (University of Notre Dame); Joseph P. La Salle (Brown University) y Joseph a. Sullivan (Boston Collage).
Por Blaisdell Publishing Company, 1959.

22) Lectures on Freshman Calculus, De ALLAN B. CRUSE / MILLIANNE GRANBERG / University of San Francisco.
Addison-Wesley Publishing Company 1971.

23) PLATON OBRAS COMPLETAS. (Menón, o de la Virtud) Traducción - del griego preámbulo y notas por: Francisco de P. Samaranch. Aguilar, S.A. de Ediciones 1966-1969, segunda edición-terce- ra reimpresión -1977.

24) Proclo "Elementos de Teología" Tr. Prol. y Notas de F. de P. Samaranch 2A Ed. Buenos Aires; Aguilar 1975.

HOJAS DE RESPUESTAS

3.- Definiciones y Postulados

7.- d

8.- c

9.- Centro

12.- Con líneas

13.- Transportador

14.- Grados y Radianes

15.- Vea D_{10}-D_{11}-D_{12}

16.- Opuestas por el vértice suplementarios, etc.

20.- 100 y 900

26.- Ver D_{23} Apéndice

27.- Ver D_{10} Apéndice

28.- Línea recta que une dos vértices no consecutivos.

29.- Línea que divide el ángulo en dos partes iguales.

30.- Vea ejercicio 41

33.- Base es donde descansa la figura; línea recta perpendicular de un vértice a - su lado opuesto.

34.- 3

36.- Sí, Rectángulo Cateto

37.- No

39.- Desigualdad del triángulo $a + b \geq c$

40.- Ver D_{20}

42.- Ver D_{21}

43.- Perímetro

45.- Sí

46.- F

47.- (i), (iii) y (v) teo (iv) Def. (ii),(vi) Corolarios

49.- En orden: D, C, A

50.- x

51.- 360°1800°

52.- No en general

54.- 90°; Sí

55.- (2), (3), (6) y (7)

58.- No; semejantes

59.- A la semejanza de triángulos

60.- Semejantes (a),(b),(f),(g) y (j) Congruentes (c),(d),(e) y (h)

61.- En (b) $\overline{DE}$ en homólogo a $\overline{AB}$. Por-ejemplo...

62.- B

63.- Sí; $\frac{AL}{AC} = \frac{AC}{AB}$

64.- E

66.- Punto, recta, superficie y sólido

68.- $1/2^{n-1}$, cero

71.- $25(4 - \pi)$

72.- $\frac{\pi(2.5)^2-4}{2}$

74.- $A = \frac{15\sqrt{300}}{2}$

76.- 3 diámetros y un pedazo

77.- $(57.29)°$

80.- B; C; E; A; D

82.- C

83.- D

84.- C

85.- Hágase

86.- 20

87.- B

89.- A=bh

92.- D

93.- 60 pul.

94.- x; 20 - 2x; $\frac{30 - 3x}{2}$

95.- B

97.- C

98.- A

99.- 40°, 47°y 93°continúe

101.- Si; C

102.- Si

103.- C

104.- B

105.- 18 pul.^{2}

106.- (ii): es polémico

108.- D

109.- Elipse; circunferencia; la suma de dos lados siempre- es una constante.

110.- No es triángulo ABC ¿por qué? Calcule el $\triangle$LMQ.

112.- Ver P_5

114.- b=30°, c=150°, d=150°

116.- 30666.666

118.- En(ii) 2.4; en (iii) 5, continúe.

119.- 200/3

120.- 12 m.

122.- D

123.- C

124.- B

125.- D

127.- $\sqrt{3}$

128.- 15 lados

129.- 45°, 90°y 135°

137.- C

138.- 5 lados

140.- $2\sqrt{180}$

141.- 135 m

142.- 98°, 50°y 32°

144.- A_3-A_5; A_2, A_1; A_4

148.- 10.770 m

149.- 5.6 m

150.- C

151.- 38400 km

152.- 6111.730065 km

COLOCAR LA t RESPECTIVA, VEA EJEMPLOS:

156.- (A) t_2

157.- ( ) ______

158.- ( ) ______

159.- ( ) ______

160.- ( ) ______

161.- (F) t_1

162.- ( ) ______

163.- ( ) ______

164.- ( ) ____

165.- ( ) ____

166.- ( ) ____

167.- (Proposición 47) Tomo I de los Elementos. $\underline{t_{11}}$ Complétese.

La cultura no es de nadie, es de todos, ¡ estudiemos !

A T E N T A M E N T E

BENJAMIN LOPEZ SIETE