UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGEBRAS MANSAS Y FORMAS CUADRATICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

(M A T E M A T I C A S)

P R E S E N T A :

BERTHA MARIA TOME ARREOLA

México, D. F. 1990

INDICE

INTRODUCCION

Sean k un campo algebraicamente cerrado y Λ una k-álgebra de dimensión finita, básica y conexa. Sea $Q = Q_{\Lambda}$ el carcaj ordinario de Λ. Entonces $\Lambda = kQ/I$ para algún ideal admisible I de kQ, [15]. Supondremos que Λ es dirigida, i.e., Q no tiene ciclos orientados.

El objeto principal de estudio en la teoría de representaciones de álgebras es la categoría mod Λ de Λ-módulos izquierdos finitamente generados.

Se dice que Λ *es de tipo de representación finito* si existe sólo un número finito de clases de isomorfía de Λ-módulos inescindibles.

El caso en que Λ es de tipo finito es el más estudiado. A la fecha se cuenta con criterios para saber si Λ es de tipo finito y clasificar sus módulos. Luego, el problema actual más relevante es el caso en que Λ es de tipo infinito.

Las álgebras de tipo infinito pertenecen a dos clases ajenas: las de tipo manso y las de tipo salvaje, [10], [12]. A reserva de dar la definición formal en (2.1), diremos que Λ es *mansa* si sus módulos inescindibles se pueden clasificar.

Actualmente se desea encontrar invariantes asociados a Λ de forma que caractericen el tipo de representación de Λ. En este sentido, el invariante aritmético que más promete es la *forma de Tits* q_Λ de Λ (ver (1.2)). Se sabe que si Λ es mansa entonces q_Λ es débilmente semipositiva (i.e., $q_\Lambda(z)\geq 0$ si z es un vector con coordenadas enteras no negativas), [24]. Se espera que en muchas ocasiones éste sea un criterio para tipo manso.

El primer resultado importante de esta tesis da un inverso parcial del resultado anterior. Se dice que Λ *tiene proyectivos aceptables* si los Λ-proyectivos inescindibles están en una componente preproyectiva o en tubos insertados-coinsertados estándar y éstos están ordenados (ver (2.6)). Obtenemos el siguiente:

Teorema. Si Λ tiene proyectivos aceptables entonces Λ es mansa si y sólo si q_Λ es débilmente semipositiva.

Además en este caso determinamos la estructura de Λ (tubular iterada) y la del carcaj de Auslander-Reiten Γ_Λ de Λ. Estos resultados han dado ya lugar a una publicación, [27].

Consideramos después el caso en que q_Λ es semipositiva. Suponemos además que Λ es *buena*, esto es, Λ es Schurian, $\tilde{\mathbb{A}}$-libre y satisface la condición (S) (ver (3.1)). Probamos el siguiente:

Teorema. Supongamos que Λ es buena y que Γ_Λ tiene una única componente preproyectiva sin inyectivos $\mathcal{P}$ tal que hay un proyectivo inescindible que no está en $\mathcal{P}$. Si q_Λ es semipositiva entonces Λ es mansa.

Además si q_Λ es semipositiva determinamos la estructura de A. Este teorema provee con una buena cantidad de ejemplos de álgebras mansas que no tienen proyectivos aceptables (lo que complementa en cierto sentido al otro teorema).

Herramientas muy útiles en este trabajo son las técnicas de inclinación, extensiones en un punto, categorías de espacios vectoriales, conjuntos parcialmente ordenados y álgebras torcidas. Para la mayoría de estos temas recomendamos al lector el libro de Ringel, [30].

A continuación presentamos un breve bosquejo del contenido de esta tesis.

El Capítulo 1 es meramente introductorio. En él introducimos la forma de Tits q_Λ de Λ y las nociones esenciales de extensiones en un punto, categorías de espacios vectoriales e inclinación.

En la primera mitad del Capítulo 2 damos la definición de álgebra mansa, ejemplos de las álgebras mansas tratadas en este trabajo y un resumen de algunos de los resultados presentados en [30] y [24] que facilitan la comprensión del resto del material aquí presentado.

La segunda mitad del Capítulo 2 comprende los resultados de [27], a saber: la caracterización de las álgebras tubulares domésticas por medio de su forma de Tits, la caracterización del tipo de representación de una extensión tubular de un álgebra mansa oculta por medio de su tipo de extensión y la construcción de las álgebras tubulares iteradas junto con la prueba del primer teorema anteriormente citado.

En el Capítulo 3 probamos el segundo de los teoremas antes mencionados. Incursionamos también en el caso en que hay dos proyectivos inescindibles que no están en la componente preproyectiva $\mathcal{P}$. Damos una prueba parcial del teorema en este caso. Obtenemos varias familias de álgebras con forma de Tits semipositiva. Para probar que son mansas, en algunos casos pedimos la hipótesis adicional de que la característica de k sea distinta de 2.

Finalizamos esta introducción con un comentario acerca de la notación.

A lo largo de este trabajo, k será un campo algebraicamente cerrado y las álgebras a considerar serán k-álgebras de dimensión finita, básicas y conexas. De hecho, la palabra álgebra será usada siempre en este contexto.

Sea Λ una de tales álgebras y sea $Q = Q_\Lambda$ el carcaj ordinario de Λ. Escribamos $\Lambda = kQ/I$ para algún ideal admisible I de kQ.

Como dijimos al principio, con mod Λ denotamos a la categoría de Λ-módulos izquierdos finitamente generados.

Con P_x (resp. I_x, S_x) denotamos al Λ-módulo proyectivo inescindible (resp. inyectivo, simple) asociado al vértice $x \in Q_0$.

Si $M \in \text{mod}\ \Lambda$ entonces $\underline{\dim}\ M = (\dim_k \text{Hom}_\Lambda(P_x, M))_{x\in Q_0}$. En particular, los vectores $e_x = \underline{\dim}\ S_x$ con $x \in Q_0$ forman la base canónica de $\mathbb{Z}^{Q_0}$. Con $K_0(\Lambda)$ denotamos al grupo de Grothendieck de Λ.

Con Γ_Λ denotamos al carcaj de Auslander-Reiten de Λ. Consideramos a los vértices de Γ_Λ como módulos inescindibles. Con τ_Λ denotamos a la translación de Auslander-Reiten.

Una clase de módulos $\mathcal{M}$ en mod Λ es una subcategoría plena de mod Λ cerrada bajo sumas directas, sumandos directos e isomorfismos. Dadas dos clases de módulos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ en mod Λ, denotamos por $\mathcal{M} \vee \mathcal{N}$ a la clase de módulos generada por $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$.

Para la notación no explícitamente introducida remitimos al lector a [30] y [28]. Suponemos que el lector está familiarizado con [30].

CAPITULO 1

PRELIMINARES

1.1 EXTENSIONES EN UN PUNTO

Sean A una k-álgebra de dimensión finita y R un A-módulo. La *extensión en un punto* de A por R es el álgebra $A[R] = \begin{pmatrix} A & R \\ 0 & k \end{pmatrix}$ con la suma y la multiplicación usuales de matrices. El carcaj de A[R] contiene a Q_A como subcarcaj pleno y un vértice adicional ω, llamado el vértice de extensión de A[R], que es fuente y tal que $R = \operatorname{rad} P_\omega$. La categoría mod A[R] puede describirse como sigue: los A[R]-módulos se identifican con las ternas (M,V,γ), donde M es un A-módulo, V es un k-espacio vectorial de dimensión finita y $\gamma: V \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(R,M)$ es k-lineal. Un A[R]-homomorfismo de (M,V,γ) a (M',V',γ') es un par (f,g), donde $f:M \longrightarrow M'$ es un A-homomorfismo, $g:V \longrightarrow V'$ es k-lineal y $\gamma' g = \operatorname{Hom}_A(R,f)\gamma$.

Dualmente se define la *coextensión en un punto* [T]A.

Hay dos inmersiones plenas distintas de mod A en mod A[R]: dado $M \in$ mod A, podemos enviarlo en $(M,0,0)$, o bien, podemos enviarlo en $\overline{M} = (M,\operatorname{Hom}_A(R,M),1_{\operatorname{Hom}(R,M)})$. Siempre identificaremos a mod A con la subcategoría plena de mod A[R] dada por las ternas (M,V,γ) con $V = 0$ y denotaremos a $(M,0,0)$ simplemente por M. Si

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

es una sucesión de Auslander-Reiten en mod A entonces .

$$0 \longrightarrow \overline{X} \xrightarrow{(f,1_{\mathrm{Hom}(R,X)})} (Y,\mathrm{Hom}_A(R,X),\mathrm{Hom}_A(R,f)) \xrightarrow{(g,0)} Z \longrightarrow 0$$

es una sucesión de Auslander-Reiten en mod A[R], [30,2.5].

Para trabajar con extensiones en un punto son útiles las técnicas de categorías de espacios vectoriales, [21], [29], [30]. Una *categoría de espacios vectoriales* K es una categoría de Krull-Schmidt (i.e., una k-categoría aditiva en la que los idempotentes se escinden) junto con un funtor aditivo $|\cdot|:K \longrightarrow \mathrm{mod}\ k$. La *categoría de subespacios* $\mathcal{U}(K)$ de una categoría de espacios vectoriales K tiene como objetos las ternas (X,V,γ), donde X es un objeto de K, V es un k-espacio vectorial de dimensión finita y $\gamma:V \longrightarrow |X|$ es un k-monomorfismo. Un morfismo de (X,V,γ) a (X',V',γ') es un par (f,g), donde $f:X \longrightarrow X'$ es un morfismo en K, $g:V \longrightarrow V'$ es un k-homomorfismo y $\gamma' g = |f|\gamma$.

Dado un A-módulo R, $\mathrm{Hom}_A(R,\mathrm{mod}\ A)$ es la categoría de espacios vectoriales cuyos objetos son de la forma $\mathrm{Hom}_A(R,X)$ con $X \in \mathrm{mod}\ A$ y cuyos morfismos son de la forma $\mathrm{Hom}_A(R,f):\mathrm{Hom}_A(R,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(R,Y)$ con $f:X \longrightarrow Y$ un A-homomorfismo. $|\mathrm{Hom}_A(R,X)|$ es el espacio vectorial subyacente a $\mathrm{Hom}_A(R,X)$. Hay una equivalencia de representaciones (i.e., un funtor pleno, denso, que refleja isomorfismos) entre la categoría de subespacios $\mathcal{U}(\mathrm{Hom}_A(R,\mathrm{mod}\ A))$ y la subcategoría plena de mod A[R] que consta de las ternas (X,V,γ) sin sumandos directos no nulos de la forma $(Y,0,0)$ con $\mathrm{Hom}_A(R,Y) = 0$ ó $(0,k,0)$.

1.2 FORMAS CUADRATICAS

Sea A una k-álgebra de dimensión finita, básica y conexa. Denotamos por C_A a la *matriz de Cartan* de A con coeficientes $c_{ij} = \dim_k \mathrm{Hom}_A(P_i,P_j)$. Si dim gl A < ∞ (por ejemplo, si Q_A no tiene ciclos orientados) entonces la matriz de Cartan de A es invertible. En este caso obtenemos una forma bilineal (no simétrica) definida por $\langle x,y\rangle = xC_A^{-t}y^t$, para $x, y \in \mathbb{Z}^{Q_0}$. La forma cuadrática asociada $\chi_A(z) = \langle z,z\rangle$ se llama la *forma de Euler* de A. Para cualesquier dos A-módulos X y Y se tiene:

$$\langle \underline{\dim}\, X, \underline{\dim}\, Y\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim_k \mathrm{Ext}_A^i(X,Y).$$

Sea A = kQ/I con I un ideal admisible de kQ y supongamos que Q no tiene ciclos orientados. La *forma cuadrática de Tits* q_A de A está definida por

$$q_A(z) = \sum_{i\in Q_0} z(i)^2 - \sum_{i,j\in Q_0} z(i)\, z(j) \dim_k \mathrm{Ext}_A^1(S_i,S_j) + \sum_{i,j\in Q_0} z(i)\, z(j) \dim_k \mathrm{Ext}_A^2(S_i,S_j),$$

para $z \in \mathbb{Z}^{Q_0}$. Sea $L \subset \bigcup_{i,j\in Q_0} I(i,j)$ un conjunto mínimo de relaciones que generen a I y sea $\ell(i,j) = |L \cap I(i,j)|$ para cada par $i, j \in Q_0$. En [5] se demuestra que para $z \in \mathbb{Z}^{Q_0}$,

$$q_A(z) = \sum_{i\in Q_0} z(i)^2 - \sum_{(i\to j)\in Q_1} z(i)\, z(j) + \sum_{i,j\in Q_0} \ell(i,j)\, z(i)\, z(j).$$

La forma bilineal simétrica asociada a q_A se denota por $(-,-)_A$. Si dim gl A ≤ 2 entonces $\chi_A = q_A$.

Dada una forma cuadrática $q:\mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}$, diremos que q es *semipositiva* (resp. *débilmente semipositiva*) si para todo $z \in \mathbb{Z}^n$ (resp. $z \in \mathbb{N}^n$), $q(z) \geq 0$. Además, si con $(-,-)$ denotamos a la forma bilineal simétrica asociada a q entonces para $x, y \in \mathbb{Z}^n$, $(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$.

1.3 MODULOS INCLINADOS Y ALGEBRAS INCLINADAS

Sea A una k-álgebra de dimensión finita. Un A-módulo T se llama un módulo inclinado si $\mathrm{Ext}^2_A(T,-) = 0$, $\mathrm{Ext}^1_A(T,T) = 0$ y el número de sumandos directos inescindibles no isomorfos de T es igual al rango de $K_0(A)$.

Dualmente se define la noción de un *módulo coinclinado*.

Dado un A-módulo M con $B = \mathrm{End}_A(M)$, consideraremos a M como un B-módulo derecho.

Un A-módulo inclinado T con $\mathrm{End}_A(T) = B$ define una teoría de torsión $(\mathcal{F}(T),\mathcal{G}(T))$ en mod A y una teoría de torsión $(\mathcal{Y}(T),\mathcal{X}(T))$ en mod B como sigue:

$$\mathcal{F}(T) = \{ {}_AM : \mathrm{Hom}_A(T,M) = 0 \} , \quad \mathcal{G}(T) = \{ {}_AM : \mathrm{Ext}^1_A(T,M) = 0 \}$$
$$\mathcal{Y}(T) = \{ {}_BN : \mathrm{Tor}^1_B(T,N) = 0 \} , \quad \mathcal{X}(T) = \{ {}_BN : T \otimes_B N = 0 \}$$

Por [9], $\Sigma_T=\mathrm{Hom}_A(T,-):\mathcal{G}(T) \longrightarrow \mathcal{Y}(T)$ y $\Sigma'_T=\mathrm{Ext}^1_A(T,-):\mathcal{F}(T) \longrightarrow \mathcal{X}(T)$ son equivalencias de categorías exactas. Además la transformación lineal $\sigma_T:K_0(A) \longrightarrow K_0(B)$ dada por $\sigma_T(\underline{\dim}\ M) = \underline{\dim}\ \Sigma_T M - \underline{\dim}\ \Sigma'_T M$ es un isomorfismo. Si dim gl A < ∞, σ_T preserva la forma bilineal $\langle -,- \rangle$ definida en (1.2), esto es, $\langle x,y \rangle_A = \langle \sigma_T x,\sigma_T y \rangle_B$ para todo par $x, y \in K_0(A)$, [30,4.1].

Un álgebra *inclinada* es un álgebra de la forma $End_A(T)$ con A hereditaria y T un A-módulo inclinado.

Si $B = End_A(T)$ es un álgebra inclinada entonces mod $B = \mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$. Como consecuencia, $\mathcal{Y}(T)$ es cerrada bajo predecesores y $\mathcal{X}(T)$ bajo sucesores. En particular, $\mathcal{Y}(T)$ es cerrada bajo τ_B y $\mathcal{X}(T)$ bajo τ_B^-, [30.4.2(1)].

CAPITULO 2

ALGUNAS ALGEBRAS MANSAS Y SUS CATEGORIAS DE MODULOS

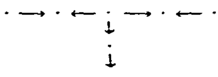
2.1 DEFINICION DE ALGEBRA MANSA Y ALGUNOS EJEMPLOS

Sean k un campo algebraicamente cerrado y Λ una k-álgebra de dimensión finita, básica y conexa.

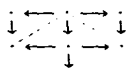
Λ es de *tipo de representación infinito* si existe una infinidad de clases de isomorfía de Λ-módulos inescindibles. Las álgebras de tipo infinito pertenecen a dos familias ajenas: las mansas y las salvajes [10], [12].

Λ es *mansa* si para cada dimensión d existe una familia finita de Λ-$k[x]$-bimódulos M_i, que son libres finitamente generados como $k[x]$-módulos derechos, tal que cada Λ-módulo inescindible de dimensión d es isomorfo a $M_i \otimes_{k[x]} k[x]/(x-\lambda)$ para algún i y algún $\lambda \in k$.

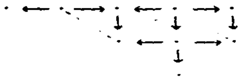
Si Λ es mansa entonces q_Λ es débilmente semipositiva [24,1.3]. A continuación damos algunos ejemplos de álgebras mansas:

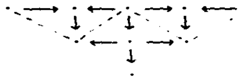


mansa hereditaria (2.2)

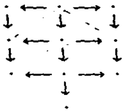


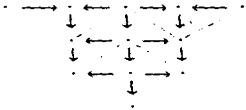
mansa oculta (2.2)

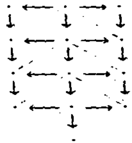




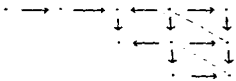
tubular doméstica (2.2) tubular (2.2)

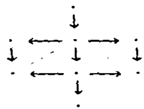




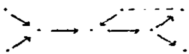


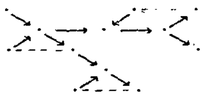
tubular 1-iterada tubular 2-iterada tubular 3-iterada



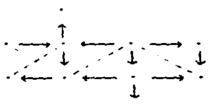


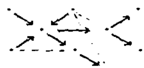
tubular 1-iterada (2.6) (24)



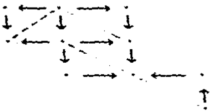


2-tubular (2.3) (3.3)

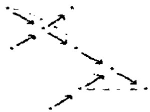




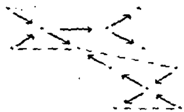
(3.3) (3.3)



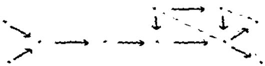
(3.3)



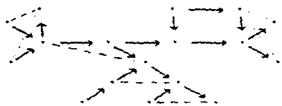
(3.3)



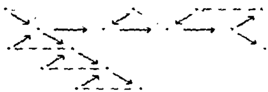
(3.3)



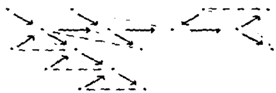
(3.4)



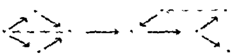
(3.4)



(3.5)

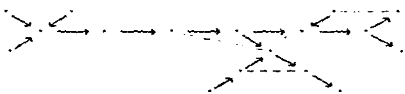


(3.5)

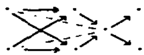


(3.5)

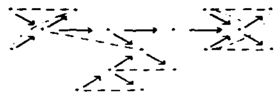
(3.5)



(3.5)



(3.6)



(3.6)

Λ es *salvaje* si existe un Λ-$k\langle x,y\rangle$-bimódulo M que es libre finitamente generado como $k\langle x,y\rangle$-módulo derecho y tal que $M \otimes_{k\langle x,y\rangle} -: \mathrm{mod}\ k\langle x,y\rangle \longrightarrow \mathrm{mod}\ \Lambda$ preserva inescindibles y refleja isomorfía.

También para categorías de espacios vectoriales distinguimos los distintos tipos de representación. Una categoría de espacios vectoriales K es de tipo de representación finito si $\mathcal{U}(K)$ es finita (i.e., tiene sólo un número finito de objetos inescindibles hasta isomorfía). K es salvaje si existe una inmersión exacta de la categoría de representaciones del carcaj Ω: en $\mathcal{U}(K)$ que da una equivalencia de representaciones con la categoría imagen. Si K es finita, K es mansa si para cualquier dimensión d hay un número finito de Λ-$k[x]$-bimódulos M_i que son libres finitamente generados sobre $k[x]$ y tales que todos los objetos inescindibles de dimensión d de $\mathcal{U}(K)$, salvo un número finito, son de la forma $M_i \otimes_{k[x]} M$ para algún i y algún $k[x]$-módulo inescindible M. Una categoría de espacios vectoriales arbitraria K es mansa si cada subcategoría plena finita es mansa.

En vista de lo observado en el último párrafo de (1.1), el álgebra $A[R]$ es mansa si y sólo si el álgebra A y la categoría de subespacios $\mathcal{U}(\mathrm{Hom}_A(R, \mathrm{mod}\ A))$ son mansas.

2.2 ALGEBRAS MANSAS OCULTAS Y EXTENSIONES TUBULARES DE ESTAS

En esta sección presentamos un resumen de algunos resultados conocidos.

Teorema [13]. Sea A un álgebra hereditaria, conexa y de tipo infinito. A es mansa si y sólo si A es el álgebra de caminos de un carcaj Q con gráfica subyacente $\tilde{A}_n$ $(n\geq 2)$, $\tilde{D}_n$ $(n\geq 4)$ ó $\tilde{E}_n$ $(n=6,7,8)$; en el caso $\tilde{A}_n$ se excluye la orientación cíclica.

Sea Q un carcaj con gráfica subyacente $\overline{Q} = \tilde{A}_n$, $\tilde{D}_n$ ó $\tilde{E}_n$ y al menos una fuente. Definimos el *tipo tubular* de Q como sigue: para $\overline{Q} = \tilde{D}_n$ $(n\geq 4)$ el tipo tubular es $(n-2,2,2)$, para $\overline{Q} = \tilde{E}_n$ $(n=6,7,8)$ el tipo tubular es $(n-3,3,2)$, para $\overline{Q} = \tilde{A}_n$ el tipo tubular depende de la orientación. Si $\overline{Q}_0 = \{0,1,2,\ldots,n\}$ con aristas i — $i+1$ para $0\leq i\leq n$ (módulo $n+1$), sea p el número de flechas $i \longleftarrow i+1$, sea q el número de flechas $i \longrightarrow i+1$ y supongamos que $p\geq q$, entonces el tipo tubular de Q es (p,q). El tipo tubular $(n_1,\ldots,n_r)$ puede representarse gráficamente por $T_{n_1,\ldots,n_r}$ = árbol con sólo un vértice de ramificación y una rama de longitud n_i para $i=1,\ldots,r$. Así, para los carcajes antes mencionados, $T_{n_1,\ldots,n_r}$ es un diagrama de Dynkin.

Sea A un álgebra hereditaria, conexa y mansa. Se tiene el siguiente teorema de estructura para mod A:

Teorema [30,3.6(5)]. Sea A el álgebra de caminos de un carcaj con gráfica subyacente $\tilde{A}_n$, $\tilde{D}_n$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$ ó $\tilde{E}_8$ y con al menos una fuente y sea $(n_1,\dots,n_r)$ su tipo tubular. Entonces Γ_A consta de una componente preproyectiva $\mathcal{P}$, una componente preinyectiva $\mathcal{I}$ y una $\mathbb{P}_1(k)$-familia tubular estable separante $\mathcal{T}$ de tipo $(n_1,\dots,n_r)$ que separa $\mathcal{P}$ de $\mathcal{I}$ [30,3.1].

En este caso $q_A = \chi_A$ es semipositiva y el radical de q_A, rad $q_A = \{ z \in \mathbb{Z}^n : q_A(z) = 0 \}$, tiene un generador positivo mínimo sincero ω. Además las clases de módulos $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{I}$ están dadas por los A-módulos inescindibles M que satisfacen $\langle \omega, \underline{\dim}\, M\rangle$ <0, =0, >0, respectivamente.

Un álgebra de la forma $B = \mathrm{End}_A(T)$ con A hereditaria, conexa, de tipo infinito y T un A-módulo inclinado preproyectivo se llama un *álgebra oculta*. Si además A es mansa, B se llama un *álgebra mansa oculta*.

Si $B = \mathrm{End}_A(T)$ es un álgebra mansa oculta, definimos el tipo tubular de B como el tipo tubular de A. Luego, éste es de la forma $(n_1,\dots,n_r)$ con $T_{n_1,\dots,n_r}$ un diagrama de Dynkin.

Teorema [30,4.3(3)]. Sea B un álgebra mansa oculta de tipo tubular $(n_1,\dots,n_r)$. Entonces Γ_B consta de una componente preproyectiva $\mathcal{P}$ con carcaj de órbitas de tipo $\tilde{T}_{n_1,\dots,n_r}$, una componente preinyectiva $\mathcal{I}$ con carcaj de órbitas de tipo $\tilde{T}_{n_1,\dots,n_r}$ y una $\mathbb{P}_1(k)$-familia tubular estable separante $\mathcal{T}$ de tipo $(n_1,\dots,n_r)$ que separa $\mathcal{P}$ de $\mathcal{I}$.

En este caso dim gl B ≤ 2, $q_B = \chi_B$ es semipositiva y rad q_B tiene un generador positivo mínimo sincero ω. Como en el caso hereditario, las clases $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{I}$ están dadas por los B-módulos inescindibles M tales que $<\omega,\underline{\dim}\, M> <0$, $=0$, >0, respectivamente.

La clasificación de las álgebras mansas ocultas aparece en [17] y [6].

Un álgebra B se llama *mínima de tipo infinito* si B es de tipo infinito pero B/BeB es de tipo finito para todo idempotente $e\neq 0$. En [17] se prueba que un álgebra B con una componente preproyectiva es mínima de tipo infinito si y sólo si B es el álgebra de caminos de un carcaj $\cdot \rightrightarrows \cdot$ con dos vértices y al menos dos flechas o B es mansa oculta.

Sean A_0 un álgebra, E_1, ..., E_t A_0-módulos y B_1, ..., B_t ramas (usualmente no vacías) [30,4.4,4.7]. La extensión $A_0[E_i,B_i]_{i=1}^{t}$ se define inductivamente: $A_0[E_1,B_1]$ se obtiene de la extensión en un punto $A_0[E_1]$ con vértice de extensión ω_1 agregando la rama B_1 en ω_1 y $A_0[E_i,B_i]_{i=1}^{t} = (A_0[E_i,B_i]_{i=1}^{t-1})[E_t,B_t]$. Sea ω_i el vértice común a la extensión $A_0[E_i]$ y a la rama B_i. Llamamos a ω_1, ..., ω_t los vértices de extensión de $A_0[E_i,B_i]_{i=1}^{t}$.

Supongamos que existe una familia tubular separante $\mathcal{T}$ en Γ_{A_0} que separa $\mathcal{P}$ de $\mathcal{I}$. El álgebra $A_0[E_i,B_i]_{i=1}^{t}$ se llama una *extensión tubular de* A_0 *usando módulos de* $\mathcal{T}$ si E_1, ..., E_t son módulos rayo en $\mathcal{T}$ ortogonales por pares [30,4.5].

Teorema [30.4.7(1)]. Sea A_0 un álgebra con una familia tubular separante $\mathcal{T}$ que separa $\mathcal{P}$ de $\mathcal{Q}$. Sea $A = A_0[E_i, B_i]_{i=1}^t$ una extensión tubular usando módulos de $\mathcal{T}$. Definimos clases de módulos $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{Q}_0$ en mod A como sigue: sea $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$, sea $\mathcal{T}_0$ la clase de módulos dada por todos los A-módulos inescindibles M tales que $M|_{A_0} \neq 0$ y pertenece a $\mathcal{T}$ o bien, con el soporte de M contenido en alguna rama B_i y $<\ell_{B_i}, \underline{\dim}\ M> < 0$ (ℓ_{B_i} es la función longitud de rama [30,4.4]); sea $\mathcal{Q}_0$ la clase de módulos dada por todos los A-módulos inescindibles M tales que $M|_{A_0} \neq 0$ y pertenece a $\mathcal{Q}$ o bien, con el soporte de M contenido en alguna rama B_i y $<\ell_{B_i}, \underline{\dim}\ M> > 0$.

Entonces mod A = $\mathcal{P}_0 \vee \mathcal{T}_0 \vee \mathcal{Q}_0$, con $\mathcal{T}_0$ una familia tubular separante que separa $\mathcal{P}_0$ de $\mathcal{Q}_0$. Además $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}[E_i, B_i]_{i=1}^t$ [30,4.5, 4.6(4)].

Sea A_0 un álgebra mansa oculta y sea $A = A_0[E_i, B_i]_{i=1}^t$ una extensión tubular de A_0 usando módulos de la I-familia tubular estable separante $\mathcal{T}$ con tubos T_ρ, $\rho \in I$. Sea r_ρ el rango de T_ρ. El *tipo de extensión de* A *sobre* A_0 está dado por la función $n: I \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $n_\rho = r_\rho + \sum_{E_i \in T_\rho} |B_i|$. Al escribir el tipo de extensión, anotamos sólo aquellos $n_i = n_{\rho_i} \neq 1$. Si A tiene tipo de extension $(n_1, \ldots, n_r)$, el rango de $K_0(A)$ está dado por $2 - r + \sum_{i=1}^{r} n_i$.

Sea A_0 un álgebra con una familia tubular separante $\mathcal{T}$. La familia $\mathcal{T}^*$, que consta de los módulos duales en mod A_0^{op}, es también una familia tubular separante. Llamamos a $A = {}_{i=1}^{t}[B_i, E_i]A_0$

una *coextensión tubular de* A_0 *usando módulos de* $\mathcal{T}$ si $A^{op} = A_0^{op}[DE_i, B_i^{op}]_{i=1}^{t}$ es una extensión tubular de A_0^{op} usando módulos de $\mathcal{T}^*$. En caso de que $\mathcal{T}$ sea una familia tubular estable, el *tipo de coextensión de* A *sobre* A_0 es el tipo de extensión de A^{op} sobre A_0^{op}.

Sea B una extensión tubular de un álgebra mansa oculta y sea $(m_1,\ldots,m_t)$ su tipo de extensión. Si $\mathbb{T}_{m_1,\ldots,m_t}$ es un diagrama de Dynkin, B se llama una *extensión tubular doméstica*.

Teorema [30,4.9(1)]. Si B es una extensión tubular dómestica de un álgebra mansa oculta B_0, de tipo de extensión $(m_1,\ldots,m_t)$ y A es cualquier álgebra mansa oculta de tipo tubular $(m_1,\ldots,m_t)$ entonces existe un A-módulo inclinado $T = T_1 \oplus T_2$ con T_1 preproyectivo y T_2 regular tal que $B_0 = \mathrm{End}_A(T_1)$ y $B = \mathrm{End}_A(T)$.

Consecuentemente, dim gl B ≤ 2, $q_B = \chi_B$ es semipositiva y el rango de rad q_B es 1.

Teorema [30,4.9(2)]. Sean B una extensión tubular doméstica de un álgebra mansa oculta B_0, $(m_1,\ldots,m_t)$ el tipo de extensión de B sobre B_0 y $(n_1,\ldots,n_t)$ el tipo tubular de B_0. Entonces Γ_B consta de una componente preproyectiva $\mathcal{P}$ con carcaj de órbitas de tipo $\tilde{\mathbb{T}}_{n_1,\ldots,n_t}$, una componente preinyectiva $\mathcal{J}$ con carcaj de órbitas de tipo $\tilde{\mathbb{T}}_{m_1,\ldots,m_t}$ y una $\mathbb{P}_1(k)$-familia tubular separante $\mathcal{T}$ de tipo de extensión $(m_1,\ldots,m_t)$ que separa $\mathcal{P}$ de $\mathcal{J}$. La componente preproyectiva $\mathcal{P}$ está dada por los B_0-módulos preproyectivos. La familia tubular $\mathcal{T}$ se obtiene de la $\mathbb{P}_1(k)$-familia de todos los B_0-módulos regulares por inserción de rayos.

El concepto dual es el de una *coextensión tubular doméstica*.

Sea A una extensión tubular de un álgebra mansa oculta. A se llama un *álgebra tubular* si su tipo de extensión es $\mathbb{T}$ = (2,2,2,2), (3,3,3), (4,4,2) ó (6,3,2)

El álgebra A se llama *cotubular* si A^{op} es tubular.

Teorema [30,5.2(3)]. Cualquier álgebra tubular es cotubular.

Ya que para un álgebra tubular el rango de $K_0(A)$ determina el tipo de extensión, el tipo de extensión y el de coextensión coinciden. Este se llamará el tipo de A.

Teorema [30,5.2(4)]. Sea A un álgebra tubular de tipo $\mathbb{T}$. Γ_A consta de las siguientes componentes: una componente preproyectiva $\mathcal{P}_0$, para cualquier $\gamma \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0,\infty\}$, una $\mathbb{P}_1(k)$-familia tubular separante $\mathcal{T}_\gamma$, siendo todas, salvo $\mathcal{T}_0$ y $\mathcal{T}_\infty$, estables de tipo $\mathbb{T}$, y una componente preinyectiva $\mathcal{I}_\infty$. La familia tubular $\mathcal{T}_\gamma$ separa a $\mathcal{P}_0 \vee \bigvee_{\delta<\gamma} \mathcal{T}_\delta$ de $\bigvee_{\delta>\gamma} \mathcal{T}_\delta \vee \mathcal{I}_\infty$.

Los A-proyectivos inescindibles pertenecen a $\mathcal{P}_0 \vee \mathcal{T}_0$ y los A-inyectivos inescindibles a $\mathcal{T}_\infty \vee \mathcal{I}_\infty$. De hecho, si A es extensión tubular de A_0 y coextensión tubular de A_∞, con A_0 y A_∞ mansas ocultas, entonces $\mathcal{P}_0$ es la componente preproyectiva de Γ_{A_0}, $\mathcal{T}_0$ se obtiene de la $\mathbb{P}_1(k)$-familia tubular estable separante de Γ_{A_0} por inserción de rayos, $\mathcal{T}_\infty$ se obtiene de la $\mathbb{P}_1(k)$-familia tubular estable separante de Γ_{A_∞} por inserción de corrayos e $\mathcal{J}_\infty$ es la componente preinyectiva de Γ_{A_∞}. La dimensión global de A es 2, $q_A = \chi_A$ es semipositiva y rad q_A tiene dos generadores, z_0 y z_∞, que son los generadores positivos sinceros de rad q_{A_0} y rad q_{A_∞}, respectivamente.

2.3 EXTENSIONES EN UN PUNTO DE ALGEBRAS MANSAS OCULTAS POR MODULOS REGULARES

Sea Λ_0 un álgebra mansa oculta y sea $\mathcal{T}_0$ la $\mathbb{P}_1(k)$-familia tubular estable separante de Γ_{Λ_0}. Los módulos en add $\mathcal{T}_0$ se llaman *regulares*. Como add $\mathcal{T}_0$ es una categoría abeliana, podemos hablar de la longitud regular de un módulo en $\mathcal{T}_0$. Sea $R \in \mathcal{T}_0$ y formemos la extensión $\Lambda = \Lambda_0[R]$. Entonces R = rad P_ω, donde ω es el vértice de extensión de Λ. Ya que dim proy$_\Lambda R = 1$, dim gl $\Lambda = 2$. Supongamos que Λ_0 no es de tipo $\tilde{\mathbb{A}}_n$, entonces el tipo tubular de Λ_0 está dado por (n_1,n_2,n_3) con $\mathbb{T}_{n_1,n_2,n_3} = \mathbb{D}_n$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$ ó $\mathbb{E}_8$. Sea n el rango del tubo donde está R. Si $n=n_j$ para algún $j \in \{1,2,3\}$, tomamos $m_i=n_i$ para $i \neq j$ y $m_j=n_j+1$. Si $n=1$, tomamos $m_i=n_i$ para $i=1,2,3$ y $m_4=2$. Decimos que Λ tiene *tipo de extensión* $(m_1,\ldots,m_r)$, donde $r \leq 4$. (Esta definición coincide con la dada en (2.2) cuando R es simple regular.)

Proposición [24]. Sean Λ_0 y Λ como arriba. Supongamos que la forma de Tits q_Λ de Λ es débilmente semipositiva. Entonces:

1) Si R no es simple regular, R es de longitud regular 2, Λ_0 es de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_m$ y $n = m-2$.

2) Si $\mathbb{T}_{m_1,\dots,m_r}$ no es Dynkin entonces $\mathbb{T}_{m_1,\dots,m_r} \in \{\tilde{\mathbb{D}}_4, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$.

Sean Λ_0 un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_m$ y R un Λ_0-módulo inescindible regular de longitud regular 2. La *extensión* $\Lambda = \Lambda_0[R]$ se llama *2-tubular* si su tipo de extensión es $(m-1,2,2)$. Dualmente, una *coextensión* $\Lambda = [T]\Lambda_0$ se llama *2-tubular* si Λ^{op} es una extensión 2-tubular.

Lema 1 [23]. Sea $\Lambda = \Lambda_0[R]$ una extensión 2-tubular. Entonces Γ_Λ tiene una componente con módulos estables no periódicos.

Demostración: Supongamos que R está en el tubo T_ρ de rango $n \geq 2$. Usando propiedades de las sucesiones de Auslander-Reiten para la extensión en un punto $\Lambda = \Lambda_0[R]$ y el hecho de que $n \geq 2$, obtenemos en T_ρ:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
M_{11} \arrow[dr] & & M_{21} \arrow[dr] & & M_{31} \arrow[dr] & & M_{41} \arrow[dr] & \\
& R=M_{12} \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_{22} \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_{32} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
& & M_{13} \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_{23} \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_{33} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & & M_{14} \arrow[ur] & & M_{24} \arrow[ur] & & M_{34}
\end{tikzcd}$$

en Γ_Λ:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
M_{11} \arrow[dr] & & M_{21} \arrow[dr] & & \overline{M_{13}} \arrow[dr] & & M_{23} \arrow[dr] & & \overline{M_{15}} \\
& M_{12} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & P_{\omega} \arrow[r] & M_{13}M_{21} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & M_{22} \arrow[r] & M_{14}M_{22} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \overline{M_{14}} \arrow[r] & M_{15}M_{23} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \\
& & M_{13} \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_{14}M_{21} \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_{15}M_{22} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
& & & M_{14} \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_{15}M_{21} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots & \\
& & & & M_{15} \arrow[ur] & & \cdots & &
\end{tikzcd}
$$

donde $\overline{M_{ij}} = (M_{ij}, \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(R, M_{ij}), 1)$ y MN es el único Λ-módulo inescindible cuya restricción a Λ_0 es $M \oplus N$.

Como P_{ω} es el único proyectivo en la componente de R, M_{11} es τ_{Λ}-estable y ya que $M_{11} \neq M_{2i}$ y $M_{11} \neq \overline{M_{1i}}$ para $i \in \mathbb{N}$, M_{11} no es τ_{Λ}-periódico.□

Ejemplo:

Sea A el álgebra dada por el siguiente carcaj con relaciones:

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
1 \arrow[dr] & & & \omega \arrow[dl] \arrow[rr, dash, dashed] & & 6 \\
& 3 \arrow[r] & 4 \arrow[rr] & & 5 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
2 \arrow[ur] & & & & & 7
\end{tikzcd}
$$

Entonces $A = A_0[R]$, donde A_0 es el álgebra de caminos del carcaj

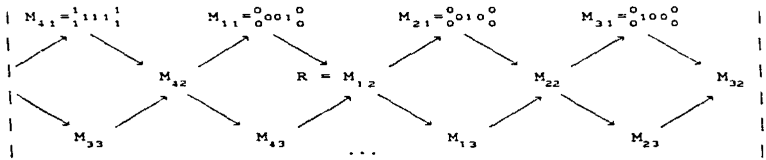
$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
1 \arrow[dr] & & & & 6 \\
& 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 5 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
2 \arrow[ur] & & & & 7
\end{tikzcd}
$$

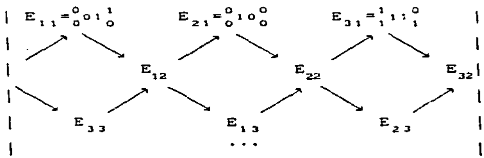
y $R = {}^{0}_{0}011{}^{0}_{0}$ (por comodidad representaremos a los módulos por sus vectores dimensión).

La componente preproyectiva de Γ_A es la de Γ_{A_0}. La componente preinyectiva de Γ_A es la de Γ_{B_0}, donde B_0 es el álgebra de caminos del carcaj:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] 1 \arrow[dr] & & & \omega \arrow[dl] \\ & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[ur] & & & 5 \end{tikzcd}$$

A continuación dibujamos el tubo de rango 4 de Γ_{A_0}, el tubo de rango 3 de Γ_{B_0} y la componente de Γ_A en donde está P_ω.





Para dibujar la componente de Γ_A en donde está P_ω (fig. 1), observamos que en mod A hay morfismos irreducibles $I_6 \longrightarrow E_{31}$, $I_7 \longrightarrow E_{31}$ y que $\overline{M_{21}} = E_{11}$, $\overline{M_{22}} = E_{12}$, $\overline{M_{23}} = \underline{E_{13}}$, $M_{31} = E_{21}$, $M_{32} = \underline{E_{22}}$ y $M_{41} = \underline{E_{31}}$.

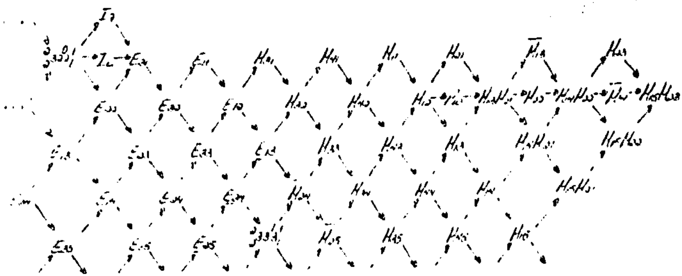


fig. 1

Lema 2. Sea $A = \mathrm{End}_B(T)$ con T un B-módulo inclinado, $\Sigma = \mathrm{Hom}_B(T,-)$ y $R = \Sigma X$ con $X \in \mathcal{F}(T)$. Entonces existe un $B[X]$-módulo inclinado T' tal que $A[R] = \mathrm{End}_{B[X]}(T')$.

Demostración: Sea ω el vértice de extensión de $B[X]$ y sea P_ω el $B[X]$-proyectivo inescindible con $\mathrm{rad}\, P_\omega = X$. Probaremos que $T' = T \oplus P_\omega$ es un $B[X]$-módulo inclinado y $A[R] = \mathrm{End}_{B[X]}(T')$.

Claramente, $\dim \mathrm{proy}_{B[X]} T' \leq 1$ y el número de sumandos inescindibles no isomorfos de T' es igual al rango de $K_0(B[X])$. Ahora,

$$\mathrm{Ext}^1_{B[X]}(T',T') = \mathrm{Ext}^1_{B[X]}(T,P_\omega) \cong D\mathrm{Hom}_{B[X]}(P_\omega, \tau_{B[X]}T).$$

Pero $\tau_{B[X]}T = \overline{\tau_B T} = \tau_B T$ ya que $\mathrm{Hom}_B(X,\tau_B T) \cong D\mathrm{Ext}^1_B(T,X) = 0$ pues $X \in \mathcal{F}(T)$. Luego, $\mathrm{Ext}^1_{B[X]}(T',T') = 0$. Finalmente,

$$\mathrm{End}_{B[X]}(T') = \begin{pmatrix} \mathrm{End}_{B[X]}(T) & \mathrm{Hom}_{B[X]}(T,P_\omega) \\ \mathrm{Hom}_{B[X]}(P_\omega,T) & \mathrm{End}_{B[X]}(P_\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & R \\ 0 & k \end{pmatrix} = A[R].$$

□

Lema 3. Sean $\Lambda = \Lambda_0[R]$ una extensión 2-tubular con vértice de extensión ω y E el soclo regular de R. Entonces q_Λ es semipositiva y $\mathrm{rad}\, q_\Lambda$ tiene 2 generadores: z_0, el generador positivo mínimo de $\mathrm{rad}\, q_{\Lambda_0}$ y $\underline{\dim}\, Y + e_\omega$, donde Y es un Λ_0-módulo preinyectivo tal que:

$$\dim \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(M,Y) = \begin{cases} 2 & \text{si } M \text{ es simple regular homogéneo o } M = R \\ 1 & \text{si } M \text{ es simple regular de período 2, } M = E \text{ o } M = \tau^{-}_{\Lambda_0}E \\ 0 & \text{si } M \text{ es simple regular de período } m-2 \text{ y } M \neq E,\ \tau^{-}_{\Lambda_0}E \end{cases}$$

Demostración: Sea A el álgebra de caminos del carcaj:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] 1 \arrow[dr] & & & & & m \\ & 3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & m-1 \arrow[urr] \arrow[drr] & & \\ 2 \arrow[ur] & & & & & m+1 \end{tikzcd}$$

Ya que Λ_0 es mansa oculta de tipo $\tilde{D}_m$, existe un A-módulo inclinado preproyectivo T tal que $\Lambda_0 = \mathrm{End}_A(T)$. Sean $\mathcal{T}_A$ y $\mathcal{T}_0$ las familias tubulares separantes de Γ_A y Γ_{Λ_0}, respectivamente y $\Sigma = \mathrm{Hom}_A(T,-)$. Entonces $\Sigma\tau_A X = \tau_{\Lambda_0}\Sigma X$ para $X \in \mathcal{T}_A$ y $\Sigma : \mathcal{T}_A \longrightarrow \mathcal{T}_0$ es una equivalencia [30,4.1,4.3]. Así, si T_ρ es el tubo de $\mathcal{T}_0$ donde está R, existen un tubo T'_ρ en $\mathcal{T}_A$ y un A-módulo inescindible $R' \in T'_\rho$ tales que $\Sigma : T'_\rho \longrightarrow T_\rho$ es un isomorfismo de carcajes con translación y $\Sigma R' = R$. Por lo tanto, $A[R']$ es 2-tubular. Por el lema anterior, $\Lambda = \mathrm{End}_{A[R']}(T')$. Luego, $q_\Lambda = q_{A[R']}$. Entonces, para ver que q_Λ es semipositiva, basta ver que $q_{A[R']}$ lo es. Ya que cada funtor reflexión S_n^+ es una inclinación [1,2.3] y que $\tau_A \cong C^+$ [8], podemos suponer que $\underline{\dim}\ R' = {}^{0}_{0}0\ldots011^{0}_{0}$ (existe un inescindible en la τ_A-órbita de R' con este vector dimensión [13]). Como

$$q_{A[R']}(x) = \tfrac{1}{4}\ (2x_1-x_3)^2+ \tfrac{1}{4}(2x_2-x_3)^2+ \tfrac{1}{2}(x_3-x_4)^2+ \ldots+ \tfrac{1}{2}(x_{m-3}-x_{m-2})^2$$
$$+ \tfrac{1}{2}(x_{m-2}-x_{m-1}-x_\omega)^2+ \tfrac{1}{2}(x_{m-1}-x_m-x_{m+1}-x_\omega)^2+ \tfrac{1}{2}(x_m-x_{m+1})^2,$$

q_Λ es semipositiva.

Probaremos ahora que el rango de rad q_Λ es 2. De las tablas en [13] se ve que existe un inescindible Z en la τ_A-órbita de R' tal que $\dim \mathrm{Hom}_A(Z, I_3) = 2$. Por lo tanto, existe un inescindible Y' en la τ_A-órbita de I_3 tal que $\dim \mathrm{Hom}_A(R', Y') = 2$. Se sigue que $Y = \Sigma Y'$ es Λ_0-preinyectivo y $\dim \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(R, Y) = 2$. Por otro lado, de la relación entre las matrices asociadas a χ_{Λ_0} y a χ_Λ [30,2.5] se obtiene que $1 \leq$ rango rad $q_\Lambda \leq 2$. Ahora, ya que $e_\omega = \underline{\dim}\ I_\omega =$

$\underline{\dim}\, P_\omega - \underline{\dim}\, R$ y $\dim \operatorname{proy}_\Lambda R = 1$,

$$q_\Lambda(\underline{\dim}\, Y + e_\omega) = 2 + (\underline{\dim}\, Y, e_\omega)_\Lambda = 2 + \langle \underline{\dim}\, Y, e_\omega \rangle + \langle e_\omega, \underline{\dim}\, Y \rangle$$
$$= 2 - \langle \underline{\dim}\, R, \underline{\dim}\, Y \rangle = 2 - \dim \operatorname{Hom}_{\Lambda_0}(R,Y) = 0.$$

Sea z_0 el generador positivo mínimo de rad q_{Λ_0}. Entonces z_0 y $\underline{\dim}\, Y + e_\omega$ generan a rad q_Λ.

Para ver que Y satisface las demás propiedades enlistadas en el enunciado del lema, basta observar en las tablas de [13] que si S es el soclo regular de Z entonces:

$$\dim \operatorname{Hom}_A(X, I_3) = \begin{cases} 2 & \text{si } X \text{ es simple regular homogeneo} \\ 1 & \text{si } X \text{ es simple regular de período 2, } X = S \\ & \text{o } X = \tau_A^- S \\ 0 & \text{si } X \text{ es simple regular de período m-2 y} \\ & X \neq S,\ \tau_A^- S \end{cases}$$
□

Concluimos esta sección con el siguiente teorema:

Teorema [24]. Sean Λ_0 un álgebra mansa oculta no de tipo $\tilde{A}_m$, R un Λ_0-módulo regular inescindible y $\Lambda = \Lambda_0[R]$. Entonces son equivalentes:

1) Λ es mansa.

2) q_Λ es débilmente semipositiva.

3) Λ es un álgebra tubular doméstica, tubular o 2-tubular.

2.4 CARACTERIZACION DE LAS ALGEBRAS TUBULARES DOMESTICAS POR MEDIO DE SU FORMA DE TITS

Sean Λ un álgebra y $\mathcal{T}$ un tubo en Γ_Λ [30,3.1]. Un vértice $v \in \mathcal{T}$ se llama *atrasado* si ninguna flecha que apunte hacia infinito [30,4.6] termina en υ. Para cualquier vértice $\omega \in T$ hay un único vértice atrasado υ y un camino seccional finito:

$$\upsilon = \upsilon[1] \longrightarrow \upsilon[2] \longrightarrow \dots \longrightarrow \upsilon[s] = \omega$$

En un tubo insertado [30,4.5] los vértices rayo [30,4.5] son vértices atrasados, pero no inversamente.

Dualmente se define un *vértice adelantado*.

Proposición [27]. Sea T un tubo insertado en Γ_Λ y sean $M_1, \dots, M_n$ los vértices atrasados de T. Entonces para cualquier M en T existen $j, j_1, \dots, j_s \in \{1,\dots,n\}$ tales que $M = M_j[s]$ y $\underline{\dim}\, M = \sum_{i=1}^{s} \underline{\dim}\, M_{j_i}$.

Demostración: Introducimos un orden parcial $\le$ en T. Si no hay flechas $M \xrightarrow{\alpha} M'$ que apunten hacia la boca de T [30,4.6], tomamos $W(M) = \{ M \}$. Supongamos que $M \xrightarrow{\alpha} M'$ apunta hacia la boca de T y que $M = M_j[s]$ para algún $j \in \{1,\dots,n\}$, entonces tomamos $W(M) = W(M') \cup \{ M_j[i] : i \le s \}$. Decimos que $M \le N$ si $M \in W(N)$.

Sea $M \xrightarrow{\alpha} N$ una flecha que apunta hacia infinito. Por inducción sobre el orden $\le$ probamos que α es mono y que $N/\mathrm{Im}\,\alpha \cong M_j$ para algún $j \in \{1,\dots,n\}$. De aquí se sigue el resultado.

Si $W(M) = \{ M \}$, la afirmación es clara. De otra manera, la sucesión de Auslander-Reiten que empieza en M tiene la forma:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\binom{\alpha}{\alpha'}} N \oplus N' \xrightarrow{(\beta,\beta')} \tau^{-}M \longrightarrow 0$$

Por hipótesis de inducción, β' es mono y $\tau^{-}M/\mathrm{Im}\,\beta' \cong M_i$ para algún $i \in \{1,\dots,n\}$. Obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto:

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha'"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \operatorname{cok}\alpha \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "-\beta'"] & \tau^{-}M \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Se sigue que α es mono y γ iso.□

Corolario. Sea $\mathcal{T}$ un tubo insertado y sea M en $\mathcal{T}$. Entonces $(\underline{\dim}\ \tau^{-n} M)_{n\geq 0}$ crece a lo más linealmente con n.

Una componente preinyectiva $\mathcal{J}$ de Γ_Λ es *completa* si cada inyectivo inescindible pertenece a $\mathcal{J}$ e $\mathcal{J}$ no tiene módulos proyectivos. Ejemplos de álgebras con componente preinyectiva completa son las álgebras tubulares domésticas.

Supongamos que $\mathcal{J}$ es una componente preinyectiva completa de Γ_Λ. Entonces dim gl $\Lambda \leq 2$ [30,2.4(1)]; además Λ es inclinada [30,4.2(3)]. Sea T un módulo rebanada en $\mathcal{J}$, entonces $A = \operatorname{End}_\Lambda(T)$ es hereditaria. Sean $\Sigma = \operatorname{Hom}_\Lambda(T,-)$, $\Sigma' = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(T,-)$, $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ y $\sigma: K_0(\Lambda) \longrightarrow K_0(A)$ como en (1.3). Sean $\phi = -C^{-t}C$ la matriz de Coxeter de Λ y ϕ_A la de A, entonces $\phi\sigma = \sigma\phi_A$.

La siguiente proposición es una generalización de [3,1.3].

Proposición [27]. Sea $\mathcal{J}$ una componente preinyectiva completa de Γ_Λ tal que el carcaj de órbitas $\mathcal{O}(\mathcal{J})$ es salvaje. Sea $M \in \Gamma_\Lambda \backslash \mathcal{J}$, entonces $(\underline{\dim}\ \tau^{-n}M)_{n\geq 0}$ crece exponencialmente.

Demostración: Conservamos la notación dada antes de la proposición. Aplicando [30,2.4(3)] obtenemos:

$$\underline{\dim}\ \tau^{-n}M - (\underline{\dim}\ M)\phi^{-n} = \sum_{j=0}^{n-1}(\underline{\dim}\ P_j)\phi^{-j},$$

donde P_j es un A-módulo proyectivo. Ya que $\tau^{-n}M \in \mathcal{F}$ y $P_j \in \mathcal{F}$, aplicando σ se tiene:

$$\underline{\dim}\ \Sigma'\tau^{-n}M - (\underline{\dim}\ \Sigma'M)\phi_\Lambda^{-n} = \sum_{j=0}^{n-1}(\underline{\dim}\ \Sigma'P_j)\phi_\Lambda^{-j}.$$

Esto es,

$$\underline{\dim}\ \Sigma'\tau^{-n}M - \underline{\dim}\ \tau_\Lambda^{-n}\Sigma'M = \sum_{j=0}^{n-1}\underline{\dim}\ \tau_\Lambda^{-j}\Sigma'P_j \geq 0.$$

Como $\Sigma'M$ no es Λ-preinyectivo, por [3], $(\underline{\dim}\ \tau_\Lambda^{-n}\Sigma'M)_{n\geq 0}$ crece exponencialmente. Por lo tanto, $(\underline{\dim}\ \Sigma'\tau^{-n}M)_{n\geq 0}$ crece exponencialmente, de donde $(\underline{\dim}\ \tau^{-n}M)_{n\geq 0}$ también.□

Teorema [27]. Supongamos que Γ_Λ tiene una componente preinyectiva completa. Entonces son equivalentes:

a) Λ es un álgebra tubular doméstica.

b) $\Lambda \cong \mathrm{End}_A(T)$ con A mansa hereditaria y ${}_AT$ inclinado.

c) Λ es mansa.

d) q_Λ es semipositiva.

e) q_Λ es débilmente semipositiva.

f) Γ_Λ está formado por componentes preproyectivas, preinyectivas y tubos insertados.

g) Γ_Λ tiene un tubo insertado.

Demostración: a) $\Leftrightarrow$ b) es [30,4.9(1)]. b) $\Leftrightarrow$ d) es clara ya que $q_\Lambda = \chi_\Lambda$. b) $\Rightarrow$ c) es clara. a) $\Rightarrow$ f) es [30,4.9(2)]. d) $\Rightarrow$ e) es clara.

c) $\Rightarrow$ g) Por [10,Cor. F], Γ_Λ tiene un tubo estable.

f) $\Rightarrow$ g) Por [30,4.3(6)], A tiene un cociente $\bar{A}$ que es mansa oculta. Sea M un $\bar{A}$-módulo regular, entonces M no puede ser A-preproyectivo ni preinyectivo. Por lo tanto, Γ_Λ tiene un tubo insertado.

e) $\Rightarrow$ b) Sea $\mathcal{S}$ una rebanada en la componente preinyectiva $\mathcal{I}$ de Γ_Λ. Por [30,4.2(3)], existen un álgebra hereditaria A y un A-módulo inclinado T tales que $\Lambda = \mathrm{End}_A(T)$ y $\mathcal{S} = \{ \Sigma I_x : x \in Q_A \}$, donde $\Sigma = \mathrm{Hom}_A(T,-)$. Supongamos que A es salvaje.

Sea $T = \bigoplus_{i=1}^{n} T_i$ una descomposición de T en suma directa de inescindibles. Ya que $\mathcal{I}$ no tiene proyectivos, ningún T_i es A-preinyectivo.

Sea M un A-módulo inescindible preinyectivo, entonces $X = \Sigma M \in \mathcal{I}$ y $\tau^n X = \Sigma \tau_A^n M$ para cualquier $n \geq 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos el vector $z_n = \underline{\dim}\, \tau^n X - \underline{\dim}\, X$. Por [30,4.1(7)],

$$z_n = (\underline{\dim}\, \tau_A^n M - \underline{\dim}\, M)\sigma = (\dim \mathrm{Hom}_A(T_i, \tau_A^n M) - \dim \mathrm{Hom}_A(T_i, M))_i .$$

Si T_i es preproyectivo (resp. regular), la i-ésima coordenada de z_n es positiva por [14] (resp. [3,1.3]). Por otro lado,

$$q_\Lambda(z_n) = q_A(\underline{\dim}\, \tau_A^n M - \underline{\dim}\, M) =$$
$$2 - (\dim \mathrm{Hom}_A(\tau_A^n M, M) - \dim \mathrm{Hom}_A(\tau_A^{n-1} M, M)).$$

Por [14], las coordenadas de $(\underline{\dim}\, \tau_A^m M)_{m\geq 0}$ crecen exponencialmente, por lo tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $q_\Lambda(z_n) < 0$.

g) $\Rightarrow$ b) Supongamos que ${}_\Lambda T$ es un módulo rebanada con $A = \mathrm{End}_\Lambda(T)$ hereditaria salvaje. Sea M un módulo en un tubo insertado de Γ_Λ. De las dos proposiciones anteriores obtenemos una contradicción con respecto al crecimiento de $(\underline{\dim}\, \tau^{-n} M)_{n\geq 0}$.$\square$

Corolario. Supongamos que Γ_Λ tiene una componente preproyectiva completa y una componente preinyectiva completa. Entonces son equivalentes:

a) Λ es mansa oculta.

b) q_Λ es semipositiva.

c) Γ_Λ tiene un tubo estable.

2.5 CARACTERIZACION DEL TIPO DE REPRESENTACION DE UNA EXTENSION TUBULAR DE UN ALGEBRA MANSA OCULTA POR MEDIO DE SU TIPO DE EXTENSION Y DE SU FORMA DE TITS

Sean Λ_0 un álgebra mansa oculta, Λ una extensión tubular de Λ_0 y $(m_1,\dots,m_r)$ el tipo de extensión de Λ sobre Λ_0. En (2.2) vimos que si $T_{m_1,\dots,m_r}$ es Dynkin o Dynkin extendido entonces Λ es mansa (y q_Λ es débilmente semipositiva). En esta sección probamos la afirmación inversa. Empezamos con algunos lemas.

Lema. Sea A un álgebra mansa hereditaria y sea $T = T_0 \oplus T_1$ un A-módulo inclinado con T_0 preproyectivo y T_1 regular. Sea $\Lambda = \mathrm{End}_A(T)$ el álgebra tubular doméstica correspondiente con componente preinyectiva $\mathcal{J}$. Entonces $\Gamma_\Lambda \setminus \mathcal{J} \subset \mathrm{Im}\,\Sigma$, donde $\Sigma = \mathrm{Hom}_A(T,-)$.

Demostración: El conjunto $\{\ \Sigma I_x : x \in Q_A\ \}$ es una rebanada en $\mathcal{J}$. Sea $M \in \Gamma_\Lambda \setminus \mathcal{J}$, entonces M es un predecesor de algún ΣI_x. Por [30,4.2(1)], $\mathrm{Im}\,\Sigma$ es cerrada bajo predecesores.□

Lema 1. Sean A, T y Λ como en el lema anterior. Sea $R \in \Gamma_\Lambda$. Supongamos que $\Lambda[R]$ es una extensión tubular de $\Lambda_0 = \mathrm{End}_A(T_0)$.

Entonces:

a) Existe un A-módulo simple regular R' tal que $R = \Sigma R'$.

b) Si $A[R']$ es salvaje entonces $\Lambda[R]$ es salvaje.

Demostración:

a) Por el lema anterior $R = \Sigma R'$ para algún $R' \in \Gamma_A$. Utilizando el hecho de que cualquier tubo homogéneo de Γ_A va a dar bajo Σ en un tubo homogéneo de Γ_Λ y que la familia tubular estable de Γ_A es separante, es fácil ver que R' debe ser regular. Probaremos que es simple regular.

Como $\Lambda[R]$ es una extensión tubular de Λ_0, hay sólo un morfismo irreducible $R \xrightarrow{\alpha} X$ que empieza en R. Luego, α es mono. Supongamos que R' no es simple regular y sea $R' \xrightarrow{\beta} Z$ un epi irreducible. Ya que $R' \in \mathcal{S}(T)$, $Z \in \mathcal{S}(T)$ y $R = \Sigma R' \xrightarrow{\Sigma\beta} \Sigma Z$ resulta irreducible. Por lo tanto, $T \otimes_\Lambda \tau^- R \cong T \otimes_\Lambda \operatorname{cok} \Sigma\beta \cong \operatorname{cok} \beta = 0$. Esto contradice que $\tau^- R \in \operatorname{Im} \Sigma$.

b) Sea $\mathcal{J}$ la componente preinyectiva de Γ_A. Ya que $A[R']$ es salvaje, la categoría de espacios vectoriales $\mathcal{U}(\operatorname{Hom}_A(R',\mathcal{J}))$ es salvaje. Construimos una inmersión exacta plena:

$$F:\mathcal{U}(\operatorname{Hom}_A(R',\mathcal{J})) \longrightarrow \mathcal{U}(\operatorname{Hom}_\Lambda(R,\operatorname{mod}\Lambda))$$

Si X es A-preinyectivo, $X \in \mathcal{S}(T)$ y $\Sigma_X:\operatorname{Hom}_A(R',X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(R,\Sigma X)$ es iso. Definimos $F(\operatorname{Hom}_A(R',X),V,\gamma) = (\operatorname{Hom}_\Lambda(R,\Sigma X),V,\Sigma_X\gamma)$ y similarmente en morfismos.

Esto prueba que $\Lambda[R]$ es salvaje.□

Proposición [27]. Sea Λ una extensión tubular de un álgebra mansa oculta Λ_0. Sea $(m_1,\ldots,m_t)$ el tipo de extensión de Λ y supongamos que $\mathbb{T}_{m_1,\ldots,m_r}$ no es Dynkin ni Dynkin extendido. Entonces:

a) q_Λ no es débilmente semipositiva.

b) Λ es salvaje.

Demostración: Es suficiente probar el resultado para el caso en que $\mathbb{T}_{m_1,\ldots,m_r}$ sea minimal no Dynkin ni Dynkin extendido. Por [30,4.4(4)], podemos suponer que $\Lambda = \Lambda'[R]$, donde Λ' es una extensión tubular de Λ_0 de tipo de extensión Dynkin o Dynkin extendido y $R \in \Gamma_{\Lambda'}$. Distinguimos estos casos.

1) Supongamos que el tipo de extensión de Λ' es Dynkin. Entonces Λ' es tubular doméstica y $\Lambda' = \mathrm{End}_A(T)$, donde A es mansa hereditaria y $T = T_0 \oplus T_1$ es un A-módulo inclinado con T_0 preproyectivo y T_1 regular. Sea $\Sigma = \mathrm{Hom}_A(T,-)$. Por el lema anterior, existe un A-módulo simple regular R' con $\Sigma R' = R$. Sea t el vértice en $Q_{A[R']}$ tal que $\mathrm{rad}\, P_t = R'$. Afirmamos que:

a') Existen $V_1, \ldots, V_m$ A-módulos preinyectivos y $a \in \mathbb{N}$ tales que

$$q_{A[R']}(\sum_{i=1}^{m} \underline{\dim}\, V_i + ae_t) < 0.$$

b') $A[R']$ es salvaje.

Esto implica a) y b). Ciertamente, sea s el vértice en Q_Λ tal que $\mathrm{rad}\, P_s = R$. Entonces:

$$q_\Lambda(\sum_{i=1}^{m} \underline{\dim}\, \Sigma V_i + ae_s) = q_{\Lambda'}(\sum_{i=1}^{m} \underline{\dim}\, \Sigma V_i) - a\sum_{i=1}^{m} \dim \mathrm{Hom}_{\Lambda'}(R, \Sigma V_i) + a^2 =$$

$$q_A(\sum_{i=1}^{m} \underline{\dim}\, V_i) - a\sum_{i=1}^{m} \dim \mathrm{Hom}_A(R', V_i) + a^2 = q_{A[R']}(\sum_{i=1}^{m} \underline{\dim}\, V_i + ae_t) < 0.$$

Que Λ es salvaje se sigue del lema anterior.

La afirmación se prueba caso por caso. Para probar a') se usan las tablas de [13] y para b') [29].

2) Supongamos que el tipo de extensión de Λ' es Dynkin extendido. Entonces Λ' es un álgebra tubular y

$$\operatorname{mod} \Lambda' = \mathcal{P} \vee \mathcal{T}_0 \vee \bigvee_{\gamma \in Q^+} \mathcal{T}_\gamma \vee \mathcal{T}_\infty \vee \mathcal{J}.$$

Ya que Λ es una extensión tubular de Λ_0, $R \in \mathcal{T}_0$. Entonces existe un módulo $X \in \mathcal{T}_1$ con $q_{\Lambda'}(\underline{\dim}\, X) = 0$ y $\mathrm{Hom}_{\Lambda'}(R,X) \neq 0$. Por lo tanto, $q_\Lambda(2\underline{\dim}\, X + e_*) = 1 - 2 \dim \mathrm{Hom}_{\Lambda'}(R,X) < 0$.

Tomemos una familia $\{ X_n : 1 \le n \le 5 \}$ de ladrillos ortogonales por pares en $\mathcal{T}_1$ [30,3.1] tal que $\mathrm{Hom}_{\Lambda'}(R,X_n) \neq 0$ para $1 \le n \le 5$. Hay una inmersión plena de la categoría de espacios vectoriales $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathrm{Hom}_{\Lambda'}(R,\{X_n\}_n))$ en mod Λ. Sea S el conjunto parcialmente ordenado que consta de cinco puntos no comparables entre sí. Hay una inmersión plena de la categoría de espacios vectoriales $\mathcal{U}$(add kS) en $\mathcal{U}$. Por [21], S es un conjunto parcialmente ordenado de tipo salvaje. Por lo tanto, las categorías $\mathcal{U}$ y mod Λ son salvajes.□

Obtenemos entonces el siguiente teorema:

Teorema. Sea Λ una extensión tubular de un álgebra mansa oculta Λ_0 y sea $(m_1,\ldots,m_r)$ su tipo de extensión. Son equivalentes:

a) Λ es mansa.

b) q_Λ es débilmente semipositiva.

c) $\mathbb{T}_{m_1,\ldots,m_r}$ es Dynkin o Dynkin extendido.

Demostración: a) ⇒ b) es [24,1.3]. b) ⇒ c) es la proposición anterior. c) ⇒ a) es [30,4.9(2),5.2(4)].□

2.6 ALGEBRAS TUBULARES ITERADAS

En esta sección construimos una familia de álgebras Λ para las cuales el hecho de que Λ sea mansa es equivalente a que su forma de Tits q_Λ sea débilmente semipositiva. Ya que la construcción de estas álgebras es una iteración del proceso dado por Ringel en [30] para definir las álgebras tubulares domésticas y tubulares, llamamos a estas álgebras *álgebras tubulares iteradas*.

Decimos que las álgebras tubulares domésticas, cotubulares domésticas y tubulares son *álgebras tubulares 0-iteradas*.

Sea Λ_0 un álgebra cotubular doméstica o tubular. En ambos casos Λ_0 es una coextensión $\Lambda_0 = {}_{i=1}^{t}[B_i,E_i]A_0$ de un álgebra mansa oculta A_0 y mod $\Lambda_0 = \mathcal{P}^0 \vee \mathcal{T}^0 \vee \mathcal{I}_0$, donde $\mathcal{I}_0$ es la componente preinyectiva de Γ_{Λ_0} y de Γ_{A_0} y $\mathcal{T}^0$ es una familia tubular separante que separa $\mathcal{P}^0$ de $\mathcal{I}_0$. Sean $E_1^0, \ldots, E_{t_0}^0$ un conjunto de A_0-módulos rayo ortogonales por pares y sean $B_1^0, \ldots, B_{t_0}^0$ un conjunto de ramas. Supongamos que $A_0[E_i^0,B_i^0]_{i=1}^{t_0}$ es un álgebra tubular doméstica o tubular. Entonces decimos que la extensión $\Lambda_1 = \Lambda_0[E_i^0,B_i^0]_{i=1}^{t_0}$ es un *álgebra tubular 1-iterada*.

Por [30,4.7(1)], mod $\Lambda_1 = \mathcal{P}^0 \vee \mathcal{T}^0[E_i^0,B_i^0]_{i=1}^{t_0} \vee \mathcal{I}'$, donde $\mathcal{T}^0[E_i^0,B_i^0]_{i=1}^{t_0}$ es una familia tubular separante que separa $\mathcal{P}^0$ de $\mathcal{I}'$. Queremos describir $\mathcal{I}'$.

Sea mod $A_0 = \mathcal{P}_0 \vee \mathcal{T}_0 \vee \mathcal{I}_0$, donde $\mathcal{T}_0$ es la familia tubular estable que separa $\mathcal{P}$ de $\mathcal{J}$. Entonces

$$\text{mod } A_0[E_i^0, B_i^0]_{i=1}^{t_0} = \mathcal{P}_0 \vee \mathcal{T}_0[E_i^0, B_i^0]_{i=1}^{t_0} \vee \hat{\mathcal{J}}.$$

Lema. Con la notación anterior, $\mathcal{J}' = \hat{\mathcal{J}}$.

Demostración: Sea $A^1 = A_0[E_i^0, B_i^0]_{i=1}^{t_0}$. Sea $X \in \hat{\mathcal{J}}$ y sea P_b un A^1-proyectivo inescindible con $\mathrm{Hom}_{A^1}(P_b, X) \neq 0$. Ya que P_b está en $\mathcal{P}_0 \vee \mathcal{T}_0[E_i^0, B_i^0]_{i=1}^{t_0}$, existe un tubo insertado T en $\mathcal{T}_0[E_i^0, B_i^0]_{i=1}^{t_0}$ con $\mathrm{Hom}_{A^1}(T, X) \neq 0$. Entonces existe un tubo T' en $\mathcal{T}^0[E_i^0, B_i^0]_{i=1}^{t_0}$ que se obtiene de T por inserción de corrayos y tal que $\mathrm{Hom}_{\Lambda_1}(T', X) \neq 0$. Luego, $X \in \mathcal{J}'$.

Sea $X \in \mathcal{J}'$ y sea b un vértice en $Q_{\Lambda_0} \setminus Q_{A_0}$. El Λ_0-inyectivo inescindible I_b^0 es también Λ_1-inyectivo y está en $\mathcal{T}^0[E_i^0, B_i^0]_{i=1}^{t_0}$, por lo tanto, $\mathrm{Hom}_{\Lambda_1}(X, I_b^0) = 0$. Luego, $X \in \text{mod } A^1$ y $X \in \hat{\mathcal{J}}$ por un argumento similar al anterior.□

Sea $\Lambda_1 = \Lambda_0[E_i^0, B_i^0]_{i=1}^{t_0}$ un álgebra tubular 1-iterada como antes. Supongamos que $A^1 = A_0[E_i^0, B_i^0]_{i=1}^{t_0}$ es un álgebra tubular con

$$\text{mod } A^1 = \mathcal{P}_0 \vee \mathcal{T}_0[E_i^0, B_i^0]_{i=1}^{t_0} \vee \bigvee_{\gamma \in Q^+} \mathcal{T}_\gamma^1 \vee \mathcal{T}_\infty^1 \vee \mathcal{J}_1.$$

En mod Λ_1 definimos $\mathcal{P}^1 = \mathcal{P}^0 \vee \mathcal{T}^0[E_i^0, B_i^0]_{i=1}^{t_0} \vee \bigvee_{\gamma \in Q^+} \mathcal{T}_\gamma^1$ y $\mathcal{T}^1 = \mathcal{T}_\infty^1$. Entonces mod $\Lambda_1 = \mathcal{P}^1 \vee \mathcal{T}^1 \vee \mathcal{J}_1$ e $\mathcal{J}_1$ es la componente preinyectiva de Γ_{Λ_1}.

Lema. Con la notación introducida arriba se tiene:

a) $\mathcal{T}^1$ es una familia tubular separante que separa $\mathcal{P}^1$ de $\mathcal{I}_1$.

b) Para cada $\gamma \in Q^+$, $\mathcal{T}^1_\gamma$ es una familia tubular separante que separa $\mathcal{P}^0 \vee \mathcal{T}^0[E^0_i,B^0_i]^{t_0}_{i=1} \vee \bigvee_{\delta<\gamma} \mathcal{T}^1_\delta$ de $\bigvee_{\delta>\gamma} \mathcal{T}^1_\delta \vee \mathcal{T}^1 \vee \mathcal{I}_1$.

Demostración:

a) $\mathcal{T}^1$ es una familia tubular estándar y

$$\mathrm{Hom}_{A_1}(\mathcal{I}_1,\mathcal{P}^1) = \mathrm{Hom}_{A_1}(\mathcal{I}_1,\mathcal{T}^1) = \mathrm{Hom}_{A_1}(\mathcal{T}^1,\mathcal{P}^1) = 0.$$

Sean $X \in \mathcal{P}^1$, $Y \in \mathcal{I}_1$ y $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_{A_1}(X,Y)$. Si $X \in \bigvee_{\gamma\in Q^+} \mathcal{T}^1_\gamma$, f se factoriza a través de cualquier tubo de $\mathcal{T}^1$. Si $X \in \mathcal{P}^0$, f se factoriza a través de cualquier tubo de $\mathcal{T}^0[E^0_i,B^0_i]^{t_0}_{i=1}$. Finalmente, si $X \in \mathcal{T}^0[E^0_i,B^0_i]^{t_0}_{i=1}$ y $X \in \mathrm{mod}\ A^1$ entonces $X \in \mathcal{T}_0[E^0_i,B^0_i]^{t_0}_{i=1}$ y por lo tanto, f se factoriza a través de cualquier tubo de $\mathcal{T}^1$. Si $X \notin \mathrm{mod}\ A^1$ entonces se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \\ & X^1 = X|_{A^1} \arrow[ur, "f^1"'] & \end{tikzcd}$$

con $X^1 \in \mathcal{T}_0[E^0_i,B^0_i]^{t_0}_{i=1}$. Ya que f^1 se factoriza a través de cualquier tubo de $\mathcal{T}^1$, f también.

b) Se prueba similarmente.□

Sea A_1 el álgebra mansa oculta de la cual A^1 es coextensión tubular. Sean $E^1_1, \ldots, E^1_{t_1}$ un conjunto de A_1-módulos rayo ortogonales por pares y $B^1_1, \ldots, B^1_{t_1}$ un conjunto de ramas tales que $A^2 = A_1[E^1_i,B^1_i]^{t_1}_{i=1}$ es un álgebra tubular doméstica o tubular. La extensión $\Lambda_2 = \Lambda_1[E_i^1, B_i^1]_{i=1}^{t_1}$ se llama un *álgebra tubular 2-iterada*.

Como antes, mod $\Lambda_2 = \mathcal{P}^2 \vee \mathcal{T}^2 \vee \mathcal{I}_2$, donde $\mathcal{I}_2$ es la componente preinyectiva de Γ_{Λ_2} y $\mathcal{T}^2$ es una familia tubular separante que separa $\mathcal{P}^2$ de $\mathcal{I}_2$. Más aún, si mod $A_1 = \mathcal{P}_1 \vee \mathcal{T}_1 \vee \mathcal{I}_1$ y A^2 es un álgebra tubular con

$$\text{mod } A^2 = \mathcal{P}_1 \vee \mathcal{T}_1[E_i^1, B_i^1]_{i=1}^{t_1} \vee \bigvee_{\gamma \in Q^+} \mathcal{T}^2_\gamma \vee \mathcal{T}^2_\infty \vee \mathcal{I}_2$$

entonces $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}^1 \vee \mathcal{T}^1[E_i^1, B_i^1]_{i=1}^{t_1} \vee \bigvee_{\gamma \in Q^+} \mathcal{T}^2_\gamma$ y $\mathcal{T}^2 = \mathcal{T}^2_\infty$.

Por inducción definimos las *álgebras tubulares n-iteradas*.

Proposición 1 [27]. Sea Λ un álgebra tubular iterada. Entonces:

a) Λ es mansa.

b) q_Λ es débilmente semipositiva.

Demostración:

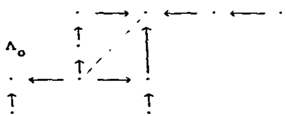
a) Se sigue de la descripción dada para mod Λ.

b) Se sigue de a) y de [24,1.3].□

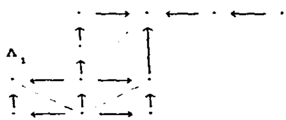
Ejemplos:

a) Λ_n es tubular n-iterada. q_{Λ_1} no es semipositiva.

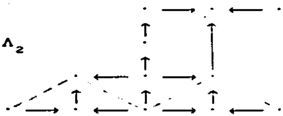
Λ_0



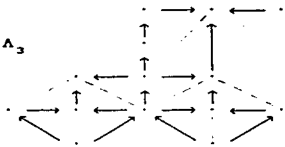
Λ_1



Λ_2

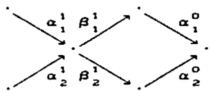


Λ_3



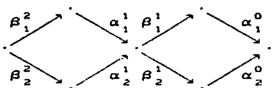
b) Sean $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in k^*$ distintos por pares.

Λ_0



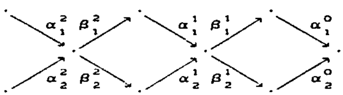
$$\alpha_1^0\beta_1^1\alpha_i^1 = \lambda_i\alpha_2^0\beta_2^1\alpha_i^1 \qquad i=1,2$$

Λ_1



$$\alpha_1^0\beta_1^1\alpha_i^1 = \lambda_i\alpha_2^0\beta_2^1\alpha_i^1 \qquad i=1,2$$
$$\beta_i^1\alpha_1^1\beta_i^2 = \lambda_i\beta_i^1\alpha_2^1\beta_2^2 \qquad i=1,2$$
$$\mathrm{rad}^4\Lambda_1 = 0$$

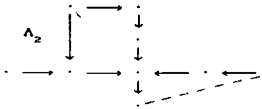
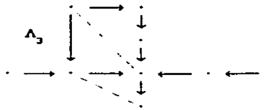
Λ_2



$$\alpha_1^0\beta_1^1\alpha_i^1 = \lambda_i\alpha_2^0\beta_2^1\alpha_i^1 \qquad i=1,2$$
$$\beta_i^1\alpha_1^1\beta_i^2 = \lambda_i\beta_i^1\alpha_2^1\beta_2^2 \qquad i=1,2$$
$$\alpha_1^1\beta_1^2\alpha_i^2 = \mu_i\alpha_2^1\beta_2^2\alpha_i^2 \qquad i=1,2$$
$$\mathrm{rad}^4\Lambda_2 = 0$$

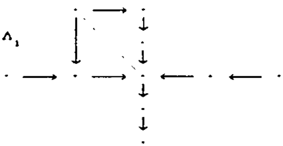
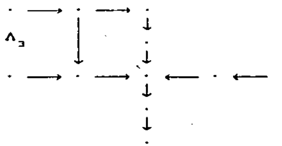
Similarmente podemos definir Λ_n tubular n-iterada para cualquier $n\geq 3$. Notamos que en el único tubo insertado y coinsertado de Γ_{Λ_1} hay un inescindible X con $\underline{\dim}\ X = 1\ \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\ 4\ \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\ 1$ y $q_{\Lambda_1}(\underline{\dim}\ X) = 3$.

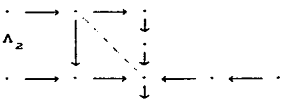
c) Λ_1, Λ_2 y Λ_3 son tubulares 1-iteradas con sólo un tubo insertado y coinsertado en su carcaj de Auslander-Reiten. q_{Λ_3} no es semipositiva.

Λ_1  Λ_2  Λ_3 

Para X en el tubo insertado y coinsertado de Γ_{Λ_1} con $\underline{\dim}$ X = $\begin{smallmatrix} & 1 & & 2 & 1 \\ & & 3 & & \\ 1 & 2 & & 1 & \end{smallmatrix}$, $q_{\Lambda_1}(\underline{\dim}\ X) = 2$. Para X en el tubo insertado y coinsertado de Γ_{Λ_3} con $\underline{\dim}$ X = $\begin{smallmatrix} & 1 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ & & 1 & & \end{smallmatrix}$, $q_{\Lambda_3}(\underline{\dim}\ X) = 2$. Por otro lado, $q_{\Lambda_2}(\underline{\dim}\ X) =$ 0 ó 1 para todo inescindible X en el tubo insertado y coinsertado de Γ_{Λ_2}.

d) Las siguientes álgebras son tubulares 1-iteradas.

Λ_1  Λ_3 

Λ_2 

Λ_1, Λ_2 y Λ_3 tienen un tubo insertado y coinsertado en su carcaj de

Auslander-Reiten. q_{Λ_3} no es semipositiva.

$$\Lambda_4 \qquad \begin{tikzcd} & & \cdot \arrow[d] & \cdot \arrow[l] \arrow[dd] & \\ & & \cdot \arrow[d] & & \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[d] & \cdot \arrow[l] & \cdot \arrow[l] \\ & & \cdot & & \end{tikzcd} \qquad \Lambda_5 \qquad \begin{tikzcd} & & \cdot \arrow[d] & \cdot \arrow[l] \arrow[dd] & \\ & & \cdot \arrow[d] & & \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[d] & \cdot \arrow[l] & \cdot \arrow[l] \\ & & \cdot \arrow[d] & & \\ & & \cdot & & \end{tikzcd}$$

Λ_4 y Λ_5 tienen un tubo insertado y un tubo coinsertado en su carcaj de Auslander-Reiten. q_{Λ_5} no es semipositiva.

En el Capítulo 3 estudiamos álgebras con forma de Tits semipositiva. La siguiente proposición da una condición necesaria mas no suficiente (ver álgebra Λ_3 del ejemplo c)) para que un álgebra tubular iterada tenga forma semipositiva.

Proposición 2. Sea $\Lambda = \Lambda_0[E_i^0, B_i^0]_{i=1}^{t_0}$ un álgebra tubular 1-iterada. Si q_Λ es semipositiva entonces $\Lambda_0 = {}_{i=1}^{t}[B_i, E_i]A_0$ es cotubular doméstica y $A = A_0[E_i^0, B_i^0]_{i=1}^{t_0}$ es tubular doméstica.

Demostración: Supongamos que Λ_0 es un álgebra tubular, extensión de B_0 y coextensión de $B_\infty = A_0$, con B_0 y B_∞ mansas ocultas. Como en (2.2), escribimos mod $\Lambda_0 = \mathcal{P}_0 \vee \mathcal{T}_0 \vee \bigvee_{\gamma\in Q^+} \mathcal{T}_\gamma \vee \mathcal{T}_\infty \vee \mathcal{I}_\infty$. Sea z_0 el generador positivo mínimo de rad q_{B_0} y sea M un B_0-módulo simple regular homogéneo. Sean a un vértice de extensión de Λ, E_j^0 el sumando inescindible de rad P_a que pertenece a mod A_0, $A^1 = A_0[E_j^0]$ y $\Lambda^1 = \Lambda_0[E_j^0]$. Entonces A^1 es tubular doméstica o tubular,

Λ^1 es tubular 1-iterada y dim gl $\Lambda^1 \leq 3$. Además Λ^1 es convexa en Λ; luego, q_{Λ^1} es semipositiva. Sea $n > q_{\Lambda^1}(\underline{\dim}\ P_a) \geq \chi_{\Lambda^1}(\underline{\dim}\ P_a) = 1$ y calculemos:

$$q_{\Lambda^1}(\underline{\dim}\ P_a - nz_0) = q_{\Lambda^1}(\underline{\dim}\ P_a) - n(\underline{\dim}\ P_a, z_0)_{\Lambda^1}.$$

Ya que dim $\mathrm{proy}_{\Lambda^1} M = \dim \mathrm{proy}_{\Lambda_0} M = 1$,

$$(\underline{\dim}\ P_a, z_0)_{\Lambda^1} \geq \langle \underline{\dim}\ P_a, z_0 \rangle + \langle z_0, \underline{\dim}\ P_a \rangle =$$

$$\dim \mathrm{Hom}_{\Lambda^1}(M, P_a) - \dim \mathrm{Ext}^1_{\Lambda^1}(M, P_a) = \dim \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(M, E^0_j).$$

Como $E^0_j \in \mathcal{T}_\infty$, $\mathcal{T}_0$ es separante y $\mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(P_x, E^0_j) \neq 0$ para algún vértice $x \in Q_{B_0}$ (en caso contrario, E^0_j pertenecería a $\mathcal{T}_0$), $\mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(M, E^0_j) \neq 0$. Luego, $q_{\Lambda^1}(\underline{\dim}\ P_a - nz_0) < 0$, lo que contradice el que q_{Λ^1} sea semipositiva. Por lo tanto, Λ_0 es cotubular doméstica.

Supongamos ahora que $A = A_0[E^0_i, B^0_i]_{i=1}^{t_0}$ es un álgebra tubular, coextensión tubular del álgebra mansa oculta A_∞. Sea z_∞ el generador positivo mínimo de rad q_{A_∞} y sea M un A_∞-módulo simple regular homogéneo. Sean b un vértice de coextensión de Λ_0, E_j el sumando inescindible de I_b/S_b que pertenece a mod A_0, $\Lambda^1 = [E_j]A_0$ y $\Lambda_1 = \Lambda^1[E^0_i, B^0_i]_{i=1}^{t_0}$. Entonces Λ^1 es cotubular doméstica, Λ_1 es tubular 1-iterada y dim gl $\Lambda_1 \leq 3$. Además A es convexa en Λ_1 y Λ_1 es convexa en Λ; luego, q_{Λ_1} es semipositiva. Si mod $\Lambda^1 = \mathcal{P}^1 \vee \mathcal{T}^1 \vee \mathcal{I}_0$ y mod $A = \mathcal{P}_0 \vee \mathcal{T}_0 \vee \bigvee_{\gamma \in Q^+} \mathcal{T}_\gamma \vee \mathcal{T}_\infty \vee \mathcal{I}_\infty$ entonces mod$_{\Lambda_1} = \mathcal{P}^1 \vee \mathcal{T}^1[E^0_i, B^0_i]_{i=1}^{t_0} \vee \bigvee_{\gamma \in Q^+} \mathcal{T}_\gamma \vee \mathcal{T}_\infty \vee \mathcal{I}_\infty$. Sea $n > q_{\Lambda_1}(\underline{\dim}\ I_b) \geq \chi_{\Lambda_1}(\underline{\dim}\ I_b) = 1$ y calculemos:

$$q_{\Lambda_1}(\underline{\dim}\ I_b - nz_\infty) = q_{\Lambda_1}(\underline{\dim}\ I_b) - n(\underline{\dim}\ I_b, z_\infty)_{\Lambda_1}.$$

Ya que $\dim \operatorname{iny}_{\Lambda_1} M \leq 1$ [30,2.4(2)],

$$(\underline{\dim}\ I_b, z_\infty)_{\Lambda_1} \geq \langle \underline{\dim}\ I_b, z_\infty \rangle + \langle z_\infty, \underline{\dim}\ I_b \rangle =$$

$$\dim \operatorname{Hom}_{\Lambda_1}(I_b, M) - \dim \operatorname{Ext}^1_{\Lambda_1}(I_b, M) = \dim \operatorname{Hom}_A(E_j, M).$$

Como $E_j \in \mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_\infty$ es separante y $\operatorname{Hom}_A(E_j, I_x) \neq 0$ para algún vértice $x \in Q_{A_\infty}$ (en caso contrario, E_j pertenecería a $\mathcal{T}_\infty$), $\operatorname{Hom}_A(E_j, M) \neq 0$. Luego, $q_{\Lambda_1}(\underline{\dim}\ I_b - nz_\infty) < 0$, lo que contradice el que q_{Λ_1} sea semipositiva. Por lo tanto, A es tubular doméstica.□

Sea Λ un álgebra dirigida (i.e., Q_Λ no tiene ciclos orientados). Decimos que Λ tiene *proyectivos aceptables* si el carcaj de Auslander-Reiten Γ_Λ de Λ tiene componentes $\mathcal{P}$, $\mathcal{C}_1$, ..., $\mathcal{C}_\ell$ tales que:

1) Cualquier Λ-módulo proyectivo inescindible está en $\mathcal{P}$ o en alguna $\mathcal{C}_i$.
2) $\mathcal{P}$ es una componente preproyectiva sin inyectivos.
3) Cada $\mathcal{C}_i$ es un tubo insertado-coinsertado estándar.
4) Si $\operatorname{Hom}_\Lambda(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j) \neq 0$ entonces $i \leq j$.

Las álgebras tubulares iteradas tienen proyectivos aceptables.

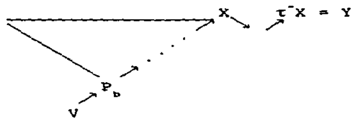
Supongamos que el álgebra Λ tiene proyectivos aceptables y sean $\mathcal{P}$, $\mathcal{C}_1$, ..., $\mathcal{C}_\ell$ como arriba. Supongamos que $\mathcal{C}_\ell = \mathcal{C}'_\ell[V,B]$, donde B es una rama y V es un módulo rayo en el tubo insertado-coinsertado $\mathcal{C}'_\ell$. Sea b el vértice en Q_Λ tal que V es un sumando directo de rad P_b (llamamos a b el vértice raíz de B) y consideremos el ala $W(P_b)$ de P_b en $\mathcal{C}_\ell$ como se definió en (2.4). Sean $e = \sum_{P_x \in W(P_b)} e_x$ y $\bar{\Lambda} = \Lambda/\Lambda e \Lambda$.

Proposición [27]. Con la notación introducida arriba se tiene:

a) $\Lambda = \bar{\Lambda}[V,B]$.

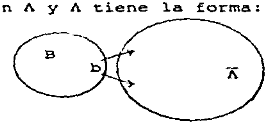
b) $\bar{\Lambda}$ tiene proyectivos aceptables y $\mathcal{C}'_\ell$ es una componente estándar de $\Gamma_{\bar{\Lambda}}$.

Demostración: Consideremos a $W(P_b)$ como en la siguiente figura:



Consideremos los módulos atrasados X y Y. Obtenemos que $\overline{X[i]}$ ($= X[i]|_{\bar{\Lambda}}$) $= V[i]$ y $\bar{\tau}\, Y[i] = V[i]$, donde $\bar{\tau}$ es la translación de Auslander-Reiten en $\Gamma_{\bar{\Lambda}}$.

a) Sean $s \in Q_{\bar{\Lambda}}$ y $s \longrightarrow t$ en Q_Λ, entonces $t \in Q_{\bar{\Lambda}}$. En efecto, si $t \in B$, ya que $Hom_\Lambda(P_t, P_s) \neq 0$, $P_s \in \mathcal{C}_\ell$. Pero como $P_t \in W(P_b)$ y $P_s \notin W(P_b)$, $Hom_\Lambda(P_t, P_s) = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\bar{\Lambda}$ es convexa en Λ y Λ tiene la forma:



Para probar que $\Lambda = \bar{\Lambda}[V,B]$ basta probar que no hay relaciones cero entre los vértices de $B\backslash\{b\}$ y los vértices en $Q_{\bar{\Lambda}}$. Para ello es suficiente demostrar que para cualquier camino dirigido

$$b_s \longrightarrow \dots \longrightarrow b_1 \longrightarrow b$$

en B se tiene que $\overline{P_{b_i}} = V$ (= $\overline{\mathrm{rad}\, P_b}$). Pero esto es claro ya que cada P_{b_i} está en el camino seccional que une a P_b con X en $\mathcal{C}_\ell$.

b) $\mathcal{C}'_\ell$ es una componente de $\Gamma_{\overline{\Lambda}}$. Probaremos que es estándar. Supongamos que $\mathcal{C}_\ell = \mathcal{C}[V_i, B_i]_{i=1}^t$ con $\mathcal{C}$ un tubo coinsertado, $V_t = V$ y $B_t = B$. Entonces $\mathcal{C}$ es una componente de Γ_{Λ_0}, donde $\Lambda_0 = \Lambda/\Lambda e_0\Lambda$ y $e_0 = \sum_{x\in UB_i} e_x$. Como en a), obtenemos que $\Lambda = \Lambda_0[V_i, B_i]_{i=1}^t$ y $\overline{\Lambda} = \Lambda_0[V_i, B_i]_{i=1}^{t-1}$. Por construcción, dim $\mathrm{iny}_{\Lambda_0}\mathcal{C} = 1$. Supongamos que $\mathcal{C} = {}_{i=1}^{t'}[B'_i, V'_i]\mathcal{C}'$ con $\mathcal{C}'$ un tubo estable. Dualmente, $\mathcal{C}'$ es una componente de $\Gamma_{\Lambda'_0}$, donde $\Lambda'_0 = \Lambda_0/\Lambda_0 e'_0 \Lambda_0$ y $e'_0 = \sum_{x\in UB'_i} e_x$; además $\Lambda_0 = {}_{i=1}^{t'}[B'_i, V'_i]\Lambda'_0$. Sea $X \in \mathcal{C}'$ y sea z un vértice en $Q_{\Lambda'_0}$, entonces $\mathrm{Hom}_{\Lambda'_0}(X, P'_z) = \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(X, P_z)$, donde P'_z y P_z son proyectivos inescindibles en mod Λ'_0 y mod Λ_0, respectivamente. Luego, dim $\mathrm{iny}_{\Lambda'_0}\mathcal{C}' = 1$ y por [30,3.1], $\mathcal{C}'$ es estándar en mod Λ'_0. Por [30,4.5], $\mathcal{C}$ es estándar en mod Λ_0 y $\mathcal{C}'_\ell = \mathcal{C}[V_i, B_i]_{i=1}^t$ es estándar en mod $\overline{\Lambda}$.

Ya que $\mathcal{P}$, $\mathcal{C}_1$, ..., $\mathcal{C}_{\ell-1}$, $\mathcal{C}'_\ell$ son todas las componentes de $\Gamma_{\overline{\Lambda}}$ que contienen proyectivos, $\overline{\Lambda}$ tiene proyectivos aceptables.□

Teorema [27]. Sea Λ un álgebra con proyectivos aceptables. Entonces son equivalentes:

a) Λ es tubular iterada.

b) Λ es mansa.

c) q_Λ es débilmente semipositiva.

Demostración: a) $\Rightarrow$ b) y a) $\Rightarrow$ c) ya se demostraron.

Sean $\mathcal{P}$, $\mathcal{C}_1$, ..., $\mathcal{C}_t$ como en la definición y $\mathcal{C}'_t$ y $\bar{\Lambda}$ como en la proposición anterior. Procedemos por inducción sobre el número p de proyectivos en los tubos insertados y coinsertados $\mathcal{C}_1$, ..., $\mathcal{C}_t$.

c) $\Rightarrow$ a) Si p=0, $\mathcal{P}$ es una componente preproyectiva completa. Por (2.4,Teo.), Λ es un álgebra cotubular doméstica.

Supongamos que p>0. Como $\bar{\Lambda}$ es convexa en Λ, $q_{\bar{\Lambda}}$ es débilmente semipositiva. Por hipótesis de inducción $\bar{\Lambda}$ es tubular n-iterada. Sea mod $\bar{\Lambda} = \mathcal{P} \vee \mathcal{T} \vee \mathcal{J}$, donde $\mathcal{J}$ es la componente preinyectiva de $\Gamma_{\bar{\Lambda}}$ y $\mathcal{T}$ es la familia tubular separante que separa $\mathcal{P}$ de $\mathcal{J}$ en $\Gamma_{\bar{\Lambda}}$. Con la notación introducida al principio de esta sección, $\bar{\Lambda} = \Lambda_n = \Lambda_{n-1}[E_i,B_i]_{i=1}^t$, donde Λ_{n-1} es un álgebra tubular (n-1)-iterada, A_{n-1} es mansa oculta y $A^n = A_{n-1}[E_i,B_i]_{i=1}^t$ es un álgebra tubular doméstica o tubular (sin pérdida de generalidad, n≥1). Entonces mod $A^n = \mathcal{P}' \vee \mathcal{T}' \vee \mathcal{J}$, donde $\mathcal{T}'$ es una familia tubular que separa $\mathcal{P}'$ de $\mathcal{J}$.

Por un argumento similar al dado al inicio de la parte 2) de la prueba de la proposición de (2.5), podemos demostrar que $\mathcal{C}'_t$ se obtiene de un tubo en $\mathcal{T}'$ por inserción de corrayos. Si A^n es tubular doméstica entonces por (2.5,Prop.), $A^n[V,B]$ es un álgebra tubular doméstica o tubular pues $q_{A^n[V,B]}$ es semipositiva. Luego, $\Lambda = \bar{\Lambda}[V,B]$ es también tubular n-iterada.

Si A^n es tubular entonces A^n es una coextensión tubular de un álgebra mansa oculta A_n. Por (2.5), $A_n[V,B]$ es tubular doméstica o tubular y por lo tanto, Λ es un álgebra tubular $(n+1)$-iterada.

b) $\Rightarrow$ a) se sigue, como c) $\Rightarrow$ a), de la proposición de (2.5).□

CAPITULO 3

ALGUNAS ALGEBRAS CON FORMA DE TITS SEMIPOSITIVA

3.1 DETERMINACION DE LA MANSEDUMBRE DE UN ALGEBRA POR MEDIO DE SU FORMA DE TITS

Sean k un campo algebraicamente cerrado y Λ una k-álgebra de dimensión finita, básica y conexa. Sea $Q = Q_\Lambda$ el carcaj ordinario de Λ y sea $\Lambda = kQ/I$ para algún ideal admisible I de kQ. Supondremos que Λ es dirigida (i.e., Q_Λ no tiene ciclos orientados). Sea q_Λ la forma de Tits de Λ. En (2.1) hemos dicho que si Λ es mansa entonces q_Λ es débilmente semipositiva. La afirmación inversa, aunque no cierta en general [5], ha sido demostrada para algunas familias de álgebras, a saber:

a) álgebras inclinadas [18]

b) extensiones en un punto de mansas ocultas no de tipo $\tilde{\mathbb{A}}_n$ [24]

c) álgebras tubulares iteradas [27].

El álgebra Λ es *Schurian* si $\dim_k e_y \Lambda e_x \leq 1$ para cada par de vértices x, $y \in Q_0$. Λ es *$\tilde{\mathbb{A}}$-libre* si no existe ninguna subálgebra plena Λ' de Λ tal que $\Lambda' = kQ'$, donde Q' es un carcaj con gráfica subyacente $\overline{Q'} = \tilde{\mathbb{A}}_n$ $(n \geq 1)$. Decimos que el Λ-proyectivo inescindible P_x tiene *radical separado* si los soportes de cualesquier dos sumandos inescindibles no isomorfos de rad P_x están contenidos en distintas componentes conexas de los subcarcajes Q_x de Q que se obtienen quitando todos los vértices y tales que existe un camino dirigido de y a x. Λ *satisface la condición* (S) si todos los Λ-proyectivos inescindibles tienen radical separado [4].

El álgebra Λ es *buena* si es Schurian, $\tilde{\Lambda}$-libre y satisface la condición (S). Se conjetura que si Λ es buena y q_Λ es débilmente semipositiva entonces Λ es mansa [25]. En este trabajo se dan los primeros pasos en el caso en que q_Λ es semipositiva. Probamos el siguiente resultado:

Teorema. Sea Λ un álgebra buena. Supongamos que Γ_Λ tiene una única componente preproyectiva sin inyectivos $\mathcal{P}$ y que hay un proyectivo inescindible que no está en $\mathcal{P}$. Si q_Λ es semipositiva entonces Λ es mansa.

Además, damos una prueba parcial del teorema anterior en el caso en que hay dos proyectivos inescindibles que no están en la componente preproyectiva $\mathcal{P}$. En este caso supondremos que la característica de k es distinta de 2.

3.2 RESULTADOS AUXILIARES

El siguiente resultado es parte de una situación más general considerada en [26].

Teorema 1. Sean Λ_o un álgebra, T un Λ_o-módulo inclinado y Λ = $\mathrm{End}_{\Lambda_o}(T)$. Supongamos que la teoría de torsión asociada a T en mod Λ se escinde. Si Λ_0 es mansa entonces Λ también lo es.

Para la demostración se requerirán algunas consideraciones de álgebra homológica.

Sea $A = k[x]$ y sea M un Λ_0-A-bimódulo que es libre finitamente generado como A-módulo derecho. Consideremos la siguiente transformación natural:

$$\phi_{Y,X}: \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(Y,M)\otimes_A X \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(Y,M\otimes_A X)$$

$$\phi_{Y,X}(f\otimes x)(y) = f(y)\otimes x$$

Lema.

1) $\phi_{Y,X}$ es monomorfismo para todo $Y \in \mathrm{mod}\ \Lambda_0$ y todo $X \in \mathrm{mod}\ A$. Si X es libre o Y es proyectivo entonces $\phi_{Y,X}$ es isomorfismo.

2) Si $M\otimes_A X \in \mathcal{F}(T)$ entonces $\phi_{T,X}$ es isomorfismo.

3) Si $M\otimes_A X \in \mathcal{F}(T)$ entonces $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda_0}(T,M)\otimes_A X \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\Lambda_0}(T,M\otimes_A X)$ es isomorfismo.

Demostración:

1) Observemos que ϕ_{Y,A^n} es isomorfismo para $n\geq 1$. Como A es un dominio de ideales principales, existe una presentación proyectiva de la forma:

$$0 \longrightarrow A^m \longrightarrow A^n \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

Como M_A es libre, obtenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow M\otimes_A A^m \longrightarrow M\otimes_A A^n \longrightarrow M\otimes_A X \longrightarrow 0$$

Aplicamos $\mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(Y,-)$ a esta sucesión para obtener un diagrama exacto y conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(Y,M)\otimes_A A^m & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(Y,M)\otimes_A A^n & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(Y,M)\otimes_A X & \longrightarrow & 0 \\ \phi_{Y,A^m}\downarrow\cong & & \phi_{Y,A^n}\downarrow\cong & & \phi_{Y,X}\downarrow & & \\ 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(Y,M\otimes_A A^m) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(Y,M\otimes_A A^n) & \xrightarrow{\mu} & \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(Y,M\otimes_A X) & & \end{array}$$

Por el lema de la serpiente, $\phi_{Y,X}$ es mono.

2) Supongamos que $M\otimes_A X \in \mathcal{G}(T)$, esto es, $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda_0}(T,M\otimes_A X) = 0$. El siguiente diagrama es exacto y conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(T,M\otimes_A A^n) & \xrightarrow{\mu} & \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(T,M\otimes_A X) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{Ext}^1_{\Lambda_0}(T,M\otimes_A A^m) & \to & \mathrm{Ext}^1_{\Lambda_0}(T,M\otimes_A A^n) & \to & 0 \\ & & & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \\ & & & & \mathrm{Ext}^1_{\Lambda_0}(T,M)^m & \xrightarrow{\nu} & \mathrm{Ext}^1_{\Lambda_0}(T,M)^n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Como A-módulo, $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda_0}(T,M)$ es finitamente generado. En efecto, si $0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow T \longrightarrow 0$ es una presentación proyectiva de T y $P_1 \oplus Q = \Lambda_0^s$ entonces $\mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(P_1,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\Lambda_0}(T,M) \longrightarrow 0$ es exacta y $\mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(P_1,M)$ es sumando directo de M^s, que es A-libre finitamente generado.

Como $0 \longrightarrow A^m \longrightarrow A^n$ es exacta y A es dominio de ideales principales, $m \leq n$. Entonces obtenemos:

$$\mathrm{Ext}^1_{\Lambda_0}(T,M)^m \xrightarrow{\nu} \mathrm{Ext}^1_{\Lambda_0}(T,M)^n \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Ext}^1_{\Lambda_0}(T,M)^m$$

donde γ es el morfismo canónico. Por [31,3.6], $\gamma\nu$ es iso. Luego, ν es iso y cok μ = Im δ = ker ν = 0. Por lo tanto, μ y $\phi_{T,X}$ son epis.

3) Supongamos que $M\otimes_A X \in \mathcal{F}(T)$, esto es, $\mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(T,M\otimes_A X) = 0$. Por 1), $\mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(T,M)\otimes_A X = 0$.

Sea $0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow T \longrightarrow 0$ una presentación proyectiva de T. Obtenemos sucesiones exactas de A-módulos derechos:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\Lambda_0}(T,M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\Lambda_0}(P_0,M) \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\Lambda_0}(P_1,M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\Lambda_0}(T,M) \longrightarrow 0$$

Luego, $0 = \operatorname{Hom}_{\Lambda_0}(T,M)\otimes_A X \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\Lambda_0}(P_0,M)\otimes_A X \longrightarrow K\otimes_A X \longrightarrow 0$ es exacta y

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\Lambda_0}(P_0,M)\otimes_A X \cong K\otimes_A X \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{P_0,X}"', "\cong"] & \operatorname{Hom}_{\Lambda_0}(P_1,M)\otimes_A X \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{P_1,X}"', "\cong"] & \operatorname{Ext}^1_{\Lambda_0}(T,M)\otimes_A X \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\overline{\phi}"] & 0 \\
\operatorname{Hom}_{\Lambda_0}(P_0,M\otimes_A X) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\Lambda_0}(P_1,M\otimes_A X) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1_{\Lambda_0}(T,M\otimes_A X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es exacto y conmutativo. Por lo tanto, el morfismo inducido $\overline{\phi}$ es iso.□

Demostración del Teorema 1:

Sea $d_1 \in \mathbb{N}^m$, donde m es el rango de $K_0(\Lambda)$. Deseamos parametrizar la variedad $\operatorname{ind}_{d_1}\Lambda$ [10]. Sin pérdida de generalidad, existe un Λ-módulo inescindible Z_1 tal que $\underline{\dim}\ Z_1 = d_1$. Ya que $\sigma: K_0(\Lambda_0) \longrightarrow K_0(\Lambda)$ es isomorfismo, existe un único $d_0 \in K_0(\Lambda_0)$ tal que $\sigma(d_0) = d_1$. Como la teoría de torsión asociada a T en mod Λ se escinde, o existe $Y_1 \in \mathcal{G}(T)$ tal que $Z_1 = \operatorname{Hom}_{\Lambda_0}(T,Y_1)$ o existe $Y_1 \in \mathcal{F}(T)$ tal que $Z_1 = \operatorname{Ext}^1_{\Lambda_0}(T,Y_1)$. Supondremos que $Z_1 = \operatorname{Hom}_{\Lambda_0}(T,Y_1)$ con $Y_1 \in \mathcal{G}(T)$ (el otro caso es similar). Entonces $d_1 = \underline{\dim}\ Z_1 = \sigma(\underline{\dim}\ Y_1)$ y $d_0 = \underline{\dim}\ Y_1$.

Como Λ_0 es mansa, existen Λ_0-A-bimódulos $M_1, \ldots, M_n$ tales que M_i es A-módulo derecho libre finitamente generado y para cada Λ_0-módulo inescindible Y con $\underline{\dim}\ Y = d_0$ se tiene que $Y \cong M_i\otimes_A S$

para algunos $i \in \{1,\dots,n\}$ y S un Λ-módulo simple.

Sea Z un Λ-módulo inescindible con $\underline{\dim}\, Z = d_1$. Como antes, $Z \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(T,Y)$ con $Y \in \mathcal{G}(T)$ o $Z \cong \mathrm{Ext}^1_{\Lambda_0}(T,Y)$ con $Y \in \mathcal{F}(T)$. Supongamos que sucede lo segundo, entonces $d_1 = \underline{\dim}\, Z = \sigma(-\underline{\dim}\, Y)$; pero no es posible que $-\underline{\dim}\, Y = d_0 = \underline{\dim}\, Y_1$. Luego, $Z \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(T,Y)$ con $Y \in \mathcal{G}(T)$ inescindible y $\underline{\dim}\, Y = d_0$.

Sean $j \in \{1,\dots,n\}$ y S un Λ-módulo simple tales que $Y \cong M_j \otimes_\Lambda S$. Entonces, por 2) del lema anterior, $Z \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(T, M_j \otimes_\Lambda S) \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(T,M_j) \otimes_\Lambda S$. Además $\mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(T,M_j)$ es un Λ-módulo derecho finitamente generado, pues es submódulo de $\mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(P_0,M_j)$ que es Λ-libre finitamente generado.

Así, $\{ \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(T,M_i),\ \mathrm{Ext}^1_{\Lambda_0}(T,M_i) : i = 1,\dots,n \}$ es un conjunto de Λ-Λ-bimódulos que son Λ-módulos derechos finitamente generados, de forma que todo Λ-módulo inescindible Z con $\underline{\dim}\, Z = d_1$ es de la forma $Z \cong E \otimes_\Lambda S$ con S un Λ-módulo simple y $E \in \{ \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(T,M_i),\ \mathrm{Ext}^1_{\Lambda_0}(T,M_i) : i = 1,\dots,n \}$. Por [11, Prop. 1, Lemas 2 y 3], Λ es mansa.□

Para facilitar la comprensión del siguiente resultado recordamos que los módulos sobre la coextensión en un punto $[R]A = \begin{pmatrix} k & DR \\ 0 & A \end{pmatrix}$ de A por R se identifican con las ternas $(V,M,\overline{\gamma})$, donde V es un k-espacio vectorial de dimensión finita, M es un A-módulo y $\overline{\gamma}: M \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(DR,V)$ es un A-homomorfismo, o bien, por medio de la cadena de isomorfismos:

$$\mathrm{Hom}_A(M,\mathrm{Hom}_k(DR,V)) \cong \mathrm{Hom}_A(M,\mathrm{Hom}_k(DV,R)) \cong$$
$$\mathrm{Hom}_k(DV,\mathrm{Hom}_A(M,R)) \cong \mathrm{Hom}_k(D\mathrm{Hom}_A(M,R),V)$$

con las ternas (V,M,γ), donde V es un k-espacio vectorial, M es un A-módulo y $\gamma: D\mathrm{Hom}_A(M,R) \longrightarrow V$ es k-lineal.

Teorema 2. Sean $A_0 = \mathrm{End}_{B_0}(T)$ con T un B_0-módulo inclinado, $\Sigma = \mathrm{Hom}_{B_0}(T,-)$ y $R = \Sigma X$ con $X \in \mathcal{F}$. Entonces existe un $[X]B_0$-módulo inclinado T' tal que $[R]A_0 = \mathrm{End}_{[X]B_0}(T')$. Más aún, si la teoría de torsión asociada a T en mod A_0 se escinde entonces la teoría de torsión asociada a T' en mod $[R]A_0$ se escinde.

Demostración: Sean $B = [X]B_0$, $A = [R]A_0$ y ω el vértice de coextensión de B. Probaremos que $T' = P_\omega \oplus \underline{T}$, donde $\underline{T} = (D\mathrm{Hom}_{B_0}(T,X),T,1_{D\mathrm{Hom}(T,X)})$, es un B-módulo inclinado tal que $A = \mathrm{End}_B(T')$.

a) Para ver que dim proy$_B\underline{T} \leq 1$, por [30,2.4(1)], debemos probar que $\mathrm{Hom}_B(D(B_B),\tau_B\underline{T}) = 0$. Sea

$$0 \longrightarrow \tau_{B_0}T \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} T \longrightarrow 0$$

una sucesión de Auslander-Reiten en mod B_0. Entonces

$$0 \longrightarrow \tau_{B_0}T \xrightarrow{(f,0)} (Z,D\mathrm{Hom}_{B_0}(T,X),D\mathrm{Hom}_{B_0}(g,X)) \xrightarrow{(g,1)} \underline{T} \longrightarrow 0$$

es una sucesión de Auslander-Reiten en mod B. Por lo tanto, $\tau_B\underline{T} = \tau_{B_0}T$. Luego, $\mathrm{Hom}_B(D(B_B),\tau_{B_0}T) = \mathrm{Hom}_B(I_\omega,\tau_{B_0}T) = \mathrm{Hom}_{B_0}(X,\tau_{B_0}T) \cong D\mathrm{Ext}^1_{B_0}(T,X) = 0$ ya que $X \in \mathcal{F}$.

b) $\mathrm{Ext}^1_B(T',T') = \mathrm{Ext}^1_B(\underline{T},P_\omega) \oplus \mathrm{Ext}^1_B(\underline{T},\underline{T}) = 0$ ya que $\mathrm{Ext}^1_B(\underline{T},P_\omega) \cong D\mathrm{Hom}_B(P_\omega,\tau_B\underline{T}) = 0$ y $\mathrm{Ext}^1_B(\underline{T},\underline{T}) \cong D\mathrm{Hom}_B(\underline{T},\tau_B\underline{T}) = D\mathrm{Hom}_{B_0}(T,\tau_{B_0}T) \cong$

$\mathrm{Ext}^1_{B_0}(T,T) = 0$.

c) El número de sumandos directos inescindibles no isomorfos de T' es igual al rango de $K_0(B)$.

Esto prueba que T' es inclinado. Finalmente,

$$\mathrm{End}_B(T') = \begin{pmatrix} \mathrm{End}_B(P_\omega) & \mathrm{Hom}_B(P_\omega,\underline{T}) \\ \mathrm{Hom}_B(\underline{T},P_\omega) & \mathrm{End}_B(\underline{T}) \end{pmatrix}$$

Ahora, $\mathrm{End}_B(P_\omega) = k$, $\mathrm{End}_B(\underline{T}) = \mathrm{End}_{B_0}(T) = A_0$ y ya que P_ω es simple proyectivo, $\mathrm{Hom}_B(\underline{T},P_\omega) = 0$ y $\mathrm{Hom}_B(P_\omega,\underline{T}) = \mathrm{Hom}_k(k,D\mathrm{Hom}_{B_0}(T,X)) \cong D\Sigma X = DR$ como k-A_0-bimódulos. Luego, $\mathrm{End}_B(T') = A$.

Supongamos que la teoría de torsión $(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ asociada a T en mod A_0 se escinde. Sean $(\mathcal{F}',\mathcal{G}')$ la teoría de torsión asociada a T' en mod B, $(\mathcal{Y}',\mathcal{X}')$ la teoría de torsión asociada a T' en mod A, $\Sigma_{T'} = \mathrm{Hom}_B(T',-)$ y $\Sigma'_{T'} = \mathrm{Ext}^1_B(T',-)$. Queremos probar que $(\mathcal{Y}',\mathcal{X}')$ se escinde.

Sea $N = (N_\omega,N_0,\gamma:D\mathrm{Hom}_{A_0}(N_0,R) \longrightarrow N_\omega)$ un A-módulo inescindible. Consideremos primero el caso en que $N_\omega = 0$, esto es, $N = N_0$ es un A_0-módulo inescindible. Ya que $(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ se escinde, $N \in \mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$. Observemos que para $Z \in \mathrm{mod}\, B_0$ se tiene:

$\Sigma_{T'}Z = \mathrm{Hom}_B(P_\omega\oplus\underline{T},Z) = \mathrm{Hom}_{B_0}(T,Z) = \Sigma_T Z$ y

$\Sigma'_{T'}Z = \mathrm{Ext}^1_B(P_\omega\oplus\underline{T},Z) = \mathrm{Ext}^1_B(\underline{T},Z) \cong D\mathrm{Hom}_B(Z,\tau_B\underline{T}) = D\mathrm{Hom}_{B_0}(Z,\tau_{B_0}T) \cong \mathrm{Ext}^1_{B_0}(T,Z) = \Sigma'_T Z$.

Así, si $N \in \mathcal{X}$, $N = \Sigma'_T Y$ para algún B_0-módulo inescindible $Y \in \mathcal{F} = \{ {}_{B_0}Z : \mathrm{Hom}_{B_0}(T,Z) = 0 \}$. Por lo tanto, $N = \Sigma'_{T'}Y$ con $Y \in \mathcal{F}' =$

$\{\ {}_BM : \mathrm{Hom}_B(T',M) = 0\ \}$; luego, $N \in \mathcal{X}'$. Similarmente, si $N \in \mathcal{Y}$ entonces $N \in \mathcal{Y}'$.

Consideremos ahora el caso en que $N_\omega \neq 0$. Ya que N es inescindible, $\gamma \neq 0$; luego, $\mathrm{Hom}_{A_0}(N_0,R) \neq 0$. Sea $N_0 = \overset{t}{\underset{i=1}{\oplus}} N_i$ una descomposición de N_0 en suma directa de inescindibles. Por ser N inescindible, $\mathrm{Hom}_{A_0}(N_i,R) \neq 0$ para todo $i \in \{1,\ldots,t\}$. Así, para $1 \leq i \leq t$, se tiene que $N_i = \Sigma_T Y_i$ para algún B_0-módulo inescindible $Y_i \in \mathcal{S}$. Sea $Y_0 = \overset{t}{\underset{i=1}{\oplus}} Y_i$, entonces $Y_0 \in \mathcal{S}$ y $\Sigma_T Y_0 = N_0$. Consideremos el B-módulo $Y = (Y_\omega, Y_0, \gamma' : \mathrm{DHom}_{B_0}(Y_0,X) \longrightarrow Y_\omega)$, donde $Y_\omega = N_\omega$ y γ' es la composición $\mathrm{DHom}_{B_0}(Y_0,X) \cong \mathrm{DHom}_{A_0}(N_0,R) \xrightarrow{\gamma} N_\omega$. Afirmamos que $Y \in \mathcal{S}'$ y $\Sigma_{T'} Y = N$.

$Y \in \mathcal{S}'$ ya que $\mathrm{Ext}^1_B(T',Y) = \mathrm{Ext}^1_B(\underline{T},Y) \cong \mathrm{DHom}_B(Y,\tau_B\underline{T}) = \mathrm{DHom}_{B_0}(Y_0,\tau_{B_0}T) \cong \mathrm{Ext}^1_{B_0}(T,Y_0) = 0$.

Sea $Z = (Z_\omega, Z_0, \varphi : \mathrm{DHom}_{A_0}(Z_0,R) \longrightarrow Z_\omega) = \Sigma_{T'} Y$. Es fácil ver que $\Sigma_{T'} P_\omega$ es el A-simple proyectivo y $\Sigma_{T'} \underline{T}$ es la suma directa de los restantes A-proyectivos inescindibles. Entonces Z_ω es el k-espacio vectorial $\mathrm{Hom}_B(P_\omega,Y)$, Z_0 es el A_0-módulo $\mathrm{Hom}_B(\underline{T},Y)$ y

$$\overline{\varphi} : \mathrm{Hom}_B(\underline{T},Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(DR, \mathrm{Hom}_B(P_\omega,Y))$$

está dada por la composición. Además existen un isomorfismo de k-espacios vectoriales $\alpha : \mathrm{Hom}_B(P_\omega,Y) \cong Y_\omega = N_\omega$ y un isomorfismo de A_0-módulos $\beta : \mathrm{Hom}_B(\underline{T},Y) \cong \mathrm{Hom}_{B_0}(T,Y_0) = \Sigma_T Y_0 = N_0$ tales que $\alpha\varphi = \gamma \mathrm{DHom}(\beta,R)$. Luego, $Z = \Sigma_{T'} Y \cong N$ y $N \in \mathcal{Y}'$.

Por lo tanto, la teoría de torsión $(\mathcal{Y}',\mathcal{X}')$ se escinde.□

Como consecuencia del teorema anterior y del lema correspondiente para extensiones en un punto (2.3, Lema 2), obtenemos el siguiente resultado.

Corolario. Sean $A_0 = \mathrm{End}_{B_0}(T)$ con T un B_0-módulo inclinado, $\Sigma = \mathrm{Hom}_{B_0}(T,-)$, $R = \Sigma X$ y $U = \Sigma Z$ con $X, Z \in \mathcal{F}$. Entonces:

a) Existe un $(B_0[X])[Z]$-módulo inclinado T' tal que $(A_0[R])[U] = \mathrm{End}_{(B_0[X])[Z]}(T')$.

b) Existe un $[Z]([X]B_0)$-módulo inclinado T' tal que $[U]([R]A_0) = \mathrm{End}_{[Z]([X]B_0)}(T')$. Más aún, si la teoría de torsión asociada a T en mod A_0 se escinde entonces la teoría de torsión asociada a T' en mod $[U]([R]A_0)$ se escinde.

c) Existe un $[Z](B_0[X])$-módulo inclinado T' tal que $[U](A_0[R]) = \mathrm{End}_{[Z](B_0[X])}(T')$.

Demostración: Los procedimientos dados en el lema y en el teorema pueden iterarse ya que en ambos casos los funtores $\Sigma_{T'}$ y $\Sigma'_{T'}$ extienden a los funtores Σ_T y Σ'_T, respectivamente.□

Sean A un álgebra tubular doméstica y $\mathcal{T}$ un tubo insertado en Γ_A. Diremos que los módulos rayo de $\mathcal{T}$ son de nivel 1 y que un módulo $M \in \mathcal{T}$ es de nivel $n>1$ si existe un camino seccional en $\mathcal{T}$ de longitud $n-1$

$$M = M_n \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_1 = E$$

con E un módulo rayo.

Sean B un álgebra mansa oculta, $T = T_0 \oplus T_1$ un B-módulo inclinado con T_0 preproyectivo y T_1 regular y $A = \mathrm{End}_B(T)$ el álgebra tubular doméstica correspondiente. Sea $\Sigma = \mathrm{Hom}_B(T,-)$ y sea R un A-módulo inescindible en un tubo insertado de Γ_A. Por los lemas de (2.5), $R = \Sigma X$ para algún B-módulo inescindible regular X.

Lema 1. Con la notación introducida arriba, R es de nivel n si y sólo si X es de longitud regular n.

Demostración: Probaremos primero que R es módulo rayo si y sólo si X es simple regular. En (2.5, Lema 1) vimos que si R es módulo rayo entonces X es simple regular. Supongamos entonces que X es simple regular. Sabemos que existen un módulo rayo E y un morfismo no nulo $E \longrightarrow R$. Ya que $E = \Sigma Z$ con Z simple regular, se tiene un morfismo no nulo $Z \longrightarrow X$ que debe ser iso. Luego, R es módulo rayo.

Sea $n>1$ y supongamos que X es de longitud regular n. Entonces existe una cadena de epis irreducibles entre inescindibles

$$X = Y_n \longrightarrow Y_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_2 \longrightarrow Y_1 = Z$$

con Z simple regular. Luego, $Y_{n-1}, \ldots, Y_1 \in \mathcal{T}(T)$ y se tiene una cadena de morfismos irreducibles entre inescindibles

$$R = \Sigma X \longrightarrow \Sigma Y_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Sigma Y_2 \longrightarrow \Sigma Z = E$$

con E módulo rayo. Supongamos que $\Sigma Y_{i+1} = \tau \Sigma Y_i = \Sigma \tau Y_i$ para algún $i \in \{1,\ldots,n-1\}$. Entonces hay un mono $Y_{i+1} \longrightarrow \tau Y_i$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, el camino es seccional y R es de nivel n.

Supongamos ahora que R es de nivel n y sea

$$R = E_n \longrightarrow E_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_1 = E$$

un camino seccional con E módulo rayo. Sea $E_i = \Sigma Y_i$ para $1 \le i \le n$.

Entonces hay una cadena de morfismos no nulos entre inescindibles

$$X = Y_n \longrightarrow Y_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow Y_2 \longrightarrow Y_1 = Y$$

con Y simple regular. Ya que $Y_2, \dots, Y_n$ están en el corrayo de Y, los morfismos son epis propios. Por lo tanto, la longitud regular de X es $\geq n$. El argumento anterior prueba que es n.□

Concluimos esta sección con el siguiente resultado.

Lema 2. Sean B_0 el álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] 1 \arrow[dr] & & & & & m \\ & 3 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & m-1 \arrow[urr] \arrow[drr] & & \\ 2 \arrow[ur] & & & & & m+1 \end{tikzcd}$$

con $m \geq 5$, Z un B_0-módulo simple regular de período $m-2$, X un B_0-módulo inescindible regular de período $m-2$ y de nivel 2 en el álgebra tubular doméstica $B = B_0[Z]$ y $B_1 = B[X]$. Entonces existe una extensión 2-tubular $C = C_0[Y]$ y un C-módulo inclinado T tal que $B_1 = \mathrm{End}_C(T)$ y la teoría de torsión asociada a T en mod B_1 se escinde.

Demostración: Sea ω el vértice de extensión del álgebra tubular doméstica $B = B_0[Z]$. Entonces $S = \oplus_{j=1}^{m+1} I_j \oplus \tau I_\omega$ es un módulo rebanada en mod B (calcúlese la componente preinyectiva de Γ_B). Sea $C_0 = \mathrm{End}_B(S)$, entonces C_0 es mansa hereditaria de tipo tubular $(m-1,2,2)$. Por lo tanto, existe un C_0-módulo inclinado $T = T_0 \oplus T_1$ con T_0 preproyectivo y T_1 regular tal que $B = \mathrm{End}_{C_0}(T)$ [30,4.9(1)]. Sea $\Sigma = \mathrm{Hom}_{C_0}(T,-)$. Por el lema anterior, $X = \Sigma Y$ para algún C_0-módulo inescindible regular Y de longitud regular 2. Ya que $\Sigma T_1 = P_\omega$, T_1 es simple regular de período $m-1$. Se sigue que Y es de período m-1. Luego, la extensión $C = C_0[Y]$ es 2-tubular. Por (2.3, Lema 2), existe un C-módulo inclinado T' tal que $B_1 = \mathrm{End}_C(T')$. Dualizando la demostración del Teorema 2 se ve que la teoría de torsión asociada a T' en mod B_1 se escinde ya que el único inescindible en la componente preinyectiva de Γ_B que no está en $\mathcal{Y}(T)$ es I_ω y $\mathrm{Hom}_B(X, I_\omega) = 0$.□

Cuando m=4, la demostración anterior es válida sólo en el caso en que los dos simples regulares en la boca del tubo donde está X tengan vectores dimensión $\begin{smallmatrix}1&&1\\&1&\\1&&1\end{smallmatrix}$ y $\begin{smallmatrix}0&&0\\&1&\\0&&0\end{smallmatrix}$.

3.3 UN PROYECTIVO INESCINDIBLE FUERA DE LA COMPONENTE PREPROYECTIVA

Supondremos que Λ es buena, q_Λ es semipositiva, Γ_Λ tiene una única componente preproyectiva sin inyectivos $\mathcal{P}$ y hay sólo un proyectivo inescindible P_a que no está en $\mathcal{P}$. Sea $\Lambda_0 = \Lambda/\Lambda e_a \Lambda$ y sea $R = \mathrm{rad}\, P_a$.

Lema. Λ_0 es cotubular doméstica, R es inescindible y $\Lambda = \Lambda_0[R]$.

Demostración: Si hay una flecha $x \longrightarrow y$ en Q_Λ con $x \in Q_{\Lambda_0}$ entonces $y \in Q_{\Lambda_0}$. De aquí se sigue que Λ_0 es convexa en Λ y que q_{Λ_0} es semipositiva. Como Λ_0 tiene una componente preproyectiva completa, Λ_0 es cotubular doméstica (2.4,Teo.). Por otro lado, a es fuente en Q_Λ; luego, $\Lambda = \Lambda_0[R]$. Además, ya que Λ es buena, R debe ser inescindible.□

Supongamos que $\Lambda_o = {}_{i=1}^{t}[B_i, E_i]A_o$ es una coextensión tubular doméstica del álgebra mansa oculta A_o y que $\text{mod}\, A_o = \mathcal{P}_o \vee \mathcal{T}_o \vee \mathcal{I}_o$. Entonces $\text{mod}\, \Lambda_o = \mathcal{P} \vee \mathcal{T} \vee \mathcal{I}_o$, donde $\mathcal{T}$ es una familia tubular separante que se obtiene de la familia tubular estable separante $\mathcal{T}_o$ por inserción de corrayos.

Lema. Con las hipótesis anteriores, $R \in \mathcal{T}$.

Demostración: Supongamos que $R \in \mathcal{I}_o$. Ya que $\dim \text{proy}_{\Lambda_o} R \leq 2$, $\dim \text{gl}\, \Lambda \leq 3$. Sean z_o el generador positivo mínimo de rad q_{A_o} y E un A_o-módulo simple regular homogéneo. Sea $n > q_\Lambda(\underline{\dim}\ P_*) \geq \chi_\Lambda(\underline{\dim}\ P_*) = 1$ y calculemos

$$q_\Lambda(\underline{\dim}\ P_* - nz_o) = q_\Lambda(\underline{\dim}\ P_*) - n(\underline{\dim}\ P_*, z_o)_\Lambda.$$

Como $\dim \text{proy}_\Lambda E = 1$,

$$\begin{aligned}(\underline{\dim}\ P_*, z_o)_\Lambda &= \langle \underline{\dim}\ P_*, z_o\rangle + \langle z_o, \underline{\dim}\ P_*\rangle \\ &= \langle z_o, \underline{\dim}\ R\rangle + \langle z_o, \underline{\dim}\ I_*\rangle \\ &= \dim \text{Hom}_\Lambda(E,R) - \dim \text{Ext}^1_\Lambda(E,R) \\ &= \dim \text{Hom}_\Lambda(E,R).\end{aligned}$$

Como $\mathcal{T}$ es separante, $\dim \text{Hom}_\Lambda(E,R) > 0$, luego, $q_\Lambda(\underline{\dim}\ P_* - nz_o) < 0$, lo que contradice el que q_Λ sea semipositiva. Por lo tanto, $R \in \mathcal{T}$.□

Sea $R_o = R|_{A_o}$. Hay tres situaciones que considerar:

1) $R_o \neq 0$ y $R_o = R$, i.e., $R \in \text{mod}\, A_o$.

2) $R_o \neq 0$ y $R_o \neq R$.

3) $R_o = 0$, i.e., $R \in \text{mod}\, B_i$ para algún $i \in \{1, \ldots, t\}$.

1) Supongamos que $R \in \text{mod}\, A_o$ y consideremos la extensión $A =$

$A_o[R]$. Como Λ es buena, A_o no es de tipo $\tilde{A}_n$ y ya que A es convexa en Λ, q_A es semipositiva. Luego, la longitud regular de R es 1 ó 2 y A es tubular doméstica, tubular ó 2-tubular (2.3,Prop.). Trataremos por separado cada uno de estos casos. Notamos que si Λ_o es mansa oculta (i.e., todas las ramas son vacías) entonces $\Lambda_o = A_o$ y $\Lambda = A$ es un álgebra mansa (2.3,Teo.). En lo que sigue supondremos que Λ_o no es mansa oculta.

a) La longitud regular de R es 1.

En este caso el álgebra $\Lambda = \Lambda_o[R]$ es tubular 1-iterada y por lo tanto, mansa (2.6,Prop. 1). Además, como q_Λ es semipositiva, Λ no puede ser tubular (2.6,Prop. 2).

b) La longitud regular de R es 2.

En este caso A_o es de tipo $\tilde{D}_m$ y R es de período $m-2$. Además, como Λ es buena, $m>4$ (si $m=4$, $\underline{\dim}\, R = \begin{smallmatrix}1&&1\\&2&\\1&&1\end{smallmatrix}$ [17], [13]). Probaremos que $\Lambda = \mathrm{End}_B(T)$, donde B es un álgebra 2-tubular, T es un B-módulo coinclinado y la teoría de torsión asociada a T en mod Λ se escinde. Ya que B es mansa, Λ también lo es.

Lema. Sean Λ_o una coextensión tubular doméstica del álgebra mansa oculta A_o de tipo $\tilde{D}_m$ con $m>4$, R un A_o-módulo inescindible regular de longitud regular 2 y período $m-2$, E el soclo regular de R y $\Lambda = \Lambda_o[R]$. Si q_Λ es semipositiva entonces $\tau_{A_o} E$ es un módulo corrayo en mod Λ_o y dim gl $\Lambda = 2$.

Demostración: Sea b un vértice de coextensión de Λ_o y supongamos que el sumando directo inescindible de I_b/S_b que pertenece a mod A_0 es $M = \tau_{A_0}E$. Consideremos el álgebra $A_1 = [M]A$. Ya que dim gl A = 2 y dim iny$_A M = 2$ [30,2.4(2)], dim gl $A_1 = 3$. Además, como A_1 es convexa en Λ, q_{A_1} es semipositiva. Sea $\underline{\dim}\ Y + e_a$ uno de los generadores de rad q_A (2.3,Lema 3) y calculemos $q_{A_1}(e_b - 2(\underline{\dim}\ Y + e_a))$. Como dim iny$_{A_1} M = 2$, se tiene:

$$(e_b, \underline{\dim}\ Y + e_a)_{A_1} \geq (e_b, \underline{\dim}\ Y)_{A_1} \geq \langle \underline{\dim}\ Y, e_b \rangle_{A_1} = -\langle \underline{\dim}\ Y, \underline{\dim}\ M \rangle$$

$$= -\dim \operatorname{Hom}_{A_1}(Y,M) + \dim \operatorname{Ext}^1_{A_1}(Y,M) - \dim \operatorname{Ext}^2_{A_1}(Y,M).$$

Sea $P(Y)$ la cubierta proyectiva de Y en mod A_1 y sea

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P(Y) \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

exacta. Como $A_1 = ([M]A_0)[R]$ y Y es A_0-preinyectivo, los sumandos directos inescindibles de K y $P(Y)$ pertenecen a la componente preproyectiva de Γ_{A_1} que es la de $\Gamma_{[M]A_0}$. Luego, $\operatorname{Ext}^2_{A_1}(Y,M) \cong \operatorname{Ext}^1_{A_1}(K,M) = 0$ ya que $[M]A_0$ es cotubular doméstica. Así,

$$(e_b, \underline{\dim}\ Y + e_a)_{A_1} \geq \dim \operatorname{Ext}^1_{A_0}(Y,M) = \dim \operatorname{Hom}_{A_0}(E,Y) = 1$$

y por lo tanto, $q_{A_1}(e_b - 2(\underline{\dim}\ Y + e_a)) < 0$, lo cual es una contradicción.

Del hecho de que $\tau_{A_0}E$ sea un módulo corrayo en mod Λ_0 se sigue que dim proy$_{\Lambda_0} R = 1$, de donde dim gl $\Lambda = 2$.□

La siguiente proposición caracteriza a esta familia de álgebras.

Proposición. Sean Λ_0 una coextensión tubular doméstica de un álgebra mansa oculta A_0 de tipo $\tilde{D}_m$ con $m>4$, R un A_0-módulo inescindible regular de longitud regular 2 y período m-2, E el soclo regular de R y $\Lambda = \Lambda_0[R]$. Entonces q_Λ es semipositiva si y sólo si el tipo de coextensión de Λ_0 sobre A_0 es (n-2,2,2) con n>m y E, $\tau^-_{A_0}E$ y $\tau_{A_0}E$ son módulos corrayo en mod Λ_0.

Demostración:

$\Rightarrow$) Dada un álgebra mansa oculta B_0 de tipo tubular el tipo de coextensión de Λ_0 sobre A_0, existe un B_0-módulo coinclinado $T = T_1 \oplus T_2$ con T_1 regular y T_2 preinyectivo tal que $\Lambda_0 = \mathrm{End}_{B_0}(T)$ [30,4.9(1)]. Sea $\Sigma = D\mathrm{Hom}_{B_0}(-,T)$. Por los lemas de (2.5), $R = \Sigma X$ para algún B_0-módulo inescindible regular X. Sea $B = B_0[X]$. Por (3.2,Teo. 2), existe un B-módulo coinclinado T' tal que $\Lambda = \mathrm{End}_B(T')$. Como dim gl $\Lambda = 2$, $q_\Lambda \sim q_B$. Por lo tanto, q_B es semipositiva, de donde la longitud regular de X es menor o igual que 2 (2.3,Prop.). Si X fuera simple regular, por (3.2,Lema 1), R sería módulo corrayo en mod Λ_0. Luego, la longitud regular de X es 2 y B es 2-tubular, esto es, B_0 es de tipo $\tilde{D}_n$ con n>m. Además, por (3.2, Lema 1), R es de nivel 2 en mod Λ_0, de donde E y $\tau^-_{A_0}E$ son módulos corrayo en mod Λ_0. Por el lema anterior $\tau_{A_0}E$ también lo es.

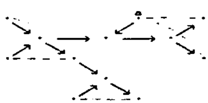
$\Leftarrow$) Por [30,4.9(1)], dada un álgebra mansa oculta B_0 de tipo $\tilde{D}_n$, existe un B_0-módulo coinclinado $T = T_1 \oplus T_2$ con T_1 regular y T_2 preinyectivo tal que $\Lambda_0 = \mathrm{End}_{B_0}(T)$. Sea $\Sigma = D\mathrm{Hom}_{B_0}(-,T)$. Como E y $\tau^-_{A_0}E$ son módulos corrayo en mod Λ_0, R es de nivel 2 en mod Λ_0. Ya que además R es de período m-2 en mod A_0, $R = \Sigma X$ para algún B_0-módulo inescindible regular X de longitud regular 2 (3.2,Lema 1) y período n-2. Luego, la extensión $B = B_0[X]$ es 2-tubular. Por (3.2, Teo. 2), existe un B-módulo coinclinado T' tal que $\Lambda = End_B(T')$. Ya que dim gl $\Lambda = 2$, q_{Λ} _ q_B que es semipositiva.□

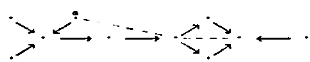
Como consecuencia obtenemos que el rango del tubo de Γ_{A_0} en que está R es mayor o igual que 4, i.e., A_0 es de tipo $\tilde{D}_m$ con $m \geq 6$.

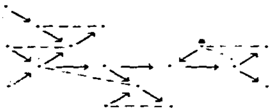
Teorema. Sean Λ_0 una coextensión tubular doméstica de un álgebra mansa oculta A_0 de tipo $\tilde{D}_m$ con $m \geq 6$, R un A_0-módulo inescindible regular de longitud regular 2 y período m-2 y $\Lambda = \Lambda_0[R]$. Supongamos que q_{Λ} es semipositiva. Entonces existen una extensión 2-tubular $B = B_0[X]$ y un B-módulo coinclinado T' tales que $\Lambda = End_B(T')$. Más aún, Λ es mansa.

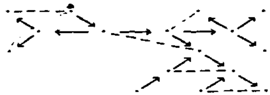
Demostración: Tomando a B_0 hereditaria en la prueba de la proposición anterior obtenemos que $\Lambda = End_B(T')$, donde $B = B_0[X]$ es una extensión 2-tubular, T' es un B-módulo coinclinado y la teoría de torsión asociada a T' en mod Λ se escinde (3.2,Teo. 2). El que Λ sea mansa es consecuencia de (3.2,Teo. 1).□

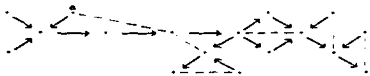
Ejemplos:

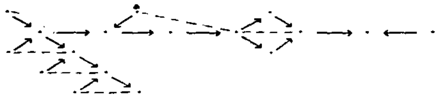


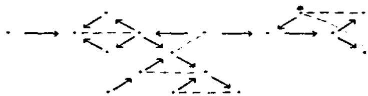


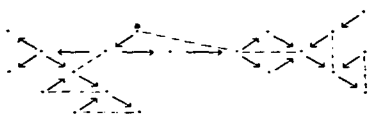












2) Supongamos que $0 \neq R_0 = R|_{A_0} \neq R$. Por [30,4.5(1),4.6(4)], R_0 es un A_0-módulo inescindible que pertenece al tubo de Γ_{A_0} en que está R. Sea $A = A_0[R_0]$. Ya que A es convexa en $\Lambda = \Lambda_0[R]$, q_A es semipositiva. Como Λ es buena, se sigue de (2.3,Prop.) que la longitud regular de R_0 es menor o igual que 2 y si es 2, A_0 es de tipo $\tilde{D}_m$ con $m>4$ y R_0 es de período mayor que 2. En este caso obtenemos los siguientes resultados:

Lema. Sean $\Lambda_0 = {}_{i=1}^{t}[B_i,E_i]A_0$ una coextensión tubular doméstica de un álgebra mansa oculta A_0, R un Λ_0-módulo inescindible en la familia tubular separante $\mathcal{T}$ de mod Λ_0 tal que $0 \neq R_0 \neq R$ y $\Lambda = \Lambda_0[R]$. Si q_Λ es semipositiva entonces R es de nivel menor o igual que 2.

Demostración: Dada un álgebra mansa oculta B_0 de tipo tubular el tipo de coextensión de Λ_0 sobre A_0, existen un B_0-módulo coinclinado T tal que $\Lambda_0 = \mathrm{End}_{B_0}(T)$ y un B_0-módulo inescindible regular X tal que $\Sigma X = R$, donde $\Sigma = D\mathrm{Hom}_{B_0}(-,T)$. Sea $B = B_0[X]$, entonces existe un B-módulo coinclinado T' tal que $\Lambda = \mathrm{End}_B(T')$.

Si dim $\mathrm{proy}_{\Lambda_0} R = 1$ entonces dim gl $\Lambda = 2$ y $q_\Lambda - q_B$. Por lo tanto, q_B es semipositiva y la longitud regular de X es menor o igual que 2. Por (3.2,Lema 1), R es de nivel menor o igual que 2.

Si dim $\mathrm{proy}_{\Lambda_0} R = 2$ entonces existe $b \in Q_{\Lambda_0}$ vértice raíz de alguna rama B_i tal que $\mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(I_b,\tau R) \neq 0$ y $\mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(R,I_b) = 0$. No perdemos generalidad si suponemos que i=t y tomamos $\Lambda_0' =$

${}_{i=1}^{t-1}[B_i,E_i]A_0$. Entonces $R \in \mathrm{mod}\,\Lambda_0'$, dim $\mathrm{proy}_{\Lambda_0'} R = 1$ y el nivel de R es el mismo en mod Λ_0' que en mod Λ_0. Además $\Lambda' = \Lambda_0'[R]$ es convexa en Λ, por lo que $q_{\Lambda'}$ es semipositiva. Por el caso anterior, R es de nivel menor o igual que 2 en mod Λ_0'.□

Proposición. Sean Λ_0, A_0, R y Λ como en el lema anterior. Si R es de nivel 2 y E es el soclo regular de R_0 entonces q_Λ es semipositiva si y sólo si A_0 es de tipo $\tilde{D}_m$, el tipo de coextensión de Λ_0 sobre A_0 es $(n-2,2,2)$ con $n>m\geq 4$ y $\tau_{\Lambda_0}E$ es módulo corrayo en mod Λ_0. En este caso, dim $\mathrm{proy}_{\Lambda_0} R = 1$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea b un vértice de coextensión de Λ_0 y supongamos que el sumando directo inescindible de I_b/S_b que pertenece a mod A_0 es $M = \tau_{\Lambda_0}E$. Podemos suponer que b es el vértice raíz de la rama B_t y tomar $\Lambda_0' = {}_{i=1}^{t-1}[B_i,E_i]A_0$. Entonces Λ_0' es cotubular doméstica, R es de nivel 2 en mod Λ_0' y M es módulo corrayo en mod Λ_0'. Luego, dada un álgebra mansa oculta B_0 de tipo tubular el tipo de coextensión de Λ_0' sobre A_0, existen un B_0-módulo coinclinado T tal que $\Lambda_0' = \mathrm{End}_{B_0}(T)$, un B_0-módulo inescindible regular X de longitud regular 2 tal que $\Sigma X = R$ y un B_0-módulo simple regular Z tal que $\Sigma Z = M$ (de hecho, $\tau_{B_0}^{-} Z$ es el soclo regular de X).

Sean $B = B_0[X]$ y $\Lambda' = \Lambda_0'[R]$, entonces existe un B-módulo coinclinado T_1 tal que $\Lambda' = \mathrm{End}_B(T_1)$. Como dim gl $\Lambda' = 2$, $q_B = q_{\Lambda'}$, que es semipositiva pues Λ' es convexa en Λ. Por (2.3,Prop.), B es 2-tubular. Sean $B_1 = [Z]B$ y $\Lambda_1 = [M]\Lambda'$, entonces existe un

B_1-módulo coinclinado T_2 tal que $\Lambda_1 = \mathrm{End}_{B_1}(T_2)$. Denotemos con a a los vértices de extensión de B y Λ', con b a los vértices de coextensión de B_1 y Λ_1 y calculemos $q_{\Lambda_1}(e_b - 2\sigma(\underline{\dim}\ Y + e_a))$, donde $\underline{\dim}\ Y + e_a$ es uno de los generadores de rad q_B (2.3,Lema 3). Como dim gl $\Lambda' = 3$, $\sigma(\underline{\dim}\ Y + e_a) = \sigma(\underline{\dim}\ Y) + e_a$ y $e_b = \underline{\dim}\ P_b = \underline{\dim}\ I_b - \underline{\dim}\ M$ se tiene:

$$(e_b,\sigma(\underline{\dim}\ Y + e_a))_{\Lambda_1} = (e_b,\sigma(\underline{\dim}\ Y))_{\Lambda_1} = <\sigma(\underline{\dim}\ Y),e_b>_{\Lambda_1}$$

$$= -<\sigma(\underline{\dim}\ Y),\underline{\dim}\ M>_{\Lambda_1} = -<\underline{\dim}\ Y,\underline{\dim}\ Z>_{B_1}.$$

Como en el lema del caso anterior,

$$-<\underline{\dim}\ Y,\underline{\dim}\ Z>_{B_1} = \dim \mathrm{Hom}_{B_0}(\tau^{-}_{B_0}Z,Y) = 1.$$

Por lo tanto, $q_{\Lambda_1}(e_b - 2\sigma(\underline{\dim}\ Y + e_a)) < 0$, lo cual es una contradicción ya que q_{Λ_1} es semipositiva pues Λ_1 es convexa en Λ.

Concluimos que M es un módulo corrayo en mod Λ_0 y que $\Lambda = \mathrm{End}_B(T_1)$, donde B es una extensión 2-tubular y T_1 es un B-módulo coinclinado. Se sigue que el tipo de coextensión de Λ_0 sobre Λ_0 es $(n-2,2,2)$ y Λ_0 es de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_m$ con $n>m\geq 4$.

⇐) Las hipótesis implican que existen un álgebra mansa oculta B_0 de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_n$ y un B_0-módulo coinclinado T tales que $\Lambda_0 = \mathrm{End}_{B_0}(T)$. Además existe un B_0-módulo inescindible regular X de longitud regular 2 y período n-2 tal que $R = \Sigma X$. Sea $B = B_0[X]$, entonces existe un B-módulo coinclinado T' tal que $\Lambda = \mathrm{End}_B(T')$. Como $\tau_{\Lambda_0}E$ es módulo corrayo en mod Λ_0, dim $\mathrm{proy}_{\Lambda_0} R = 1$, de donde dim gl Λ = 2. Así, $q_\Lambda \sim q_B$ que es semipositiva pues B es 2-tubular.□

Teorema. Sean Λ_o una coextensión tubular doméstica de un álgebra mansa oculta A_o, R un Λ_o-módulo inescindible en la familia tubular separante $\mathcal{T}$ de mod Λ_o tal que $0 \neq R_o \neq R$ y $\Lambda = \Lambda_o[R]$. Si q_Λ es semipositiva entonces Λ es mansa.

Demostración: Sean B_o un álgebra mansa hereditaria de tipo tubular el tipo de coextensión de Λ_o sobre A_o, T el B-módulo coinclinado tal que $\Lambda_o = \mathrm{End}_{B_o}(T)$, X el B_o-módulo inescindible regular tal que $\Sigma X = R$, $B = B_o[X]$ y T' el B-módulo coinclinado tal que $\Lambda = \mathrm{End}_B(T')$ y la teoría de torsión asociada a T' en mod Λ se escinde.

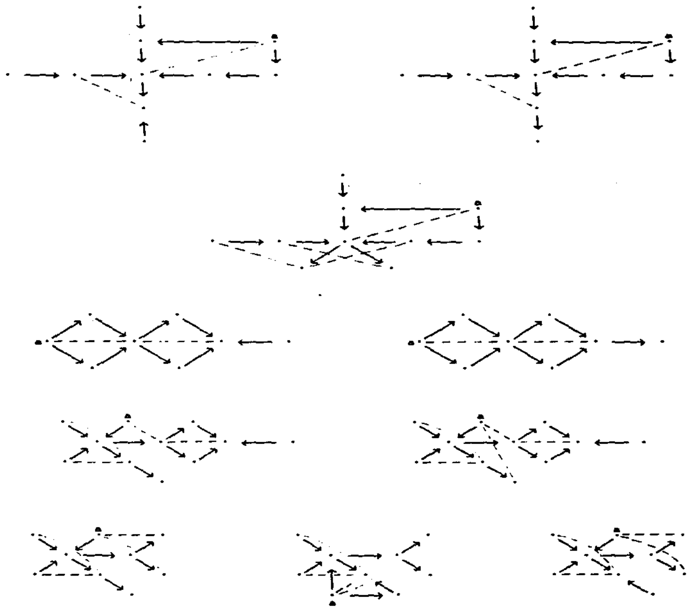
Si $\dim \mathrm{proy}_{\Lambda_o} R = 1$ entonces $\dim \mathrm{gl}\, \Lambda = 2$ y $q_\Lambda = q_B$. Por lo tanto, q_B es semipositiva y B es un álgebra mansa (2.3,Teo.). Por (3.2,Teo. 1), Λ es mansa.

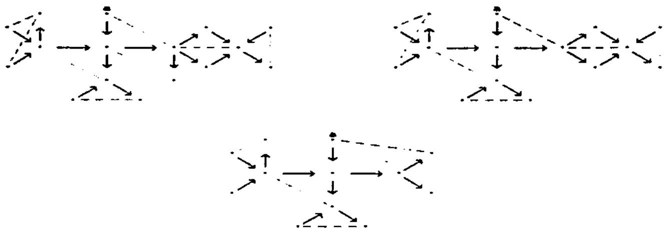
Si $\dim \mathrm{proy}_{\Lambda_o} R = 2$, se sigue de los dos resultados anteriores que R es de nivel 1, esto es, X es simple regular. Un análisis caso por caso muestra que B es tubular doméstica o tubular. Sea Λ'_o como en la prueba del lema.

tipo tubular de A_o	tipo de coextensión de Λ'_o sobre A_o	tipo tubular de B_o	tipo de extensión de B sobre B_o
(3,3,2)	(4,3,2)	(5,3,2)	(6,3,2)
(2,2,2)	(3,3,2)	(4,3,2)	(5,3,2)
(2,2,2)	(3,3,2)	(5,3,2)	(6,3,2)
(2,2,2)	(4,3,2)	(5,3,2)	(6,3,2)
(2,2,2)	(m,2,2) $m>2$	(n,2,2) $n>m$	(n+1,2,2)
(3,2,2)	(4,3,2)	(5,3,2)	(6,3,2)
(3,2,2)	(3,3,2)	(3,4,2)	(3,5,2)
(3,2,2)	(3,3,2)	(3,5,2)	(3,6,2)
(3,2,2)	(3,4,2)	(3,5,2)	(3,6,2)
(m,2,2) $m\geq 4$	(n,2,2) $n>m$	(p,2,2) $p>n$	(p+1,2,2)

Por (3.2,Teo. 1), Λ es mansa.□

Ejemplos:





3) Cuando R es módulo sobre alguna rama B_i obtenemos resultados similares a los anteriores, a saber:

Lema. Sean $\Lambda_o = {}_{i=1}^{t}[B_i, E_i]A_o$ una coextensión tubular doméstica de un álgebra mansa oculta A_o, R un Λ_o-módulo inescindible tal que $R \in \mathrm{mod}\ B_i$ para algún $i \in \{1,\ldots,t\}$ y $\Lambda = \Lambda_o[R]$. Si q_Λ es semipositiva entonces R es de nivel menor o igual que 2.

Demostración: Dada un álgebra mansa oculta B_o de tipo tubular el tipo de coextensión de Λ_o sobre A_o, existen un B_o-módulo coinclinado T tal que $\Lambda_o = \mathrm{End}_{B_o}(T)$ y un B_o-módulo inescindible regular X tal que $\Sigma X = R$, donde $\Sigma = D\mathrm{Hom}_{B_o}(-,T)$. Sea $B = B_o[X]$, entonces existe un B-módulo coinclinado T' tal que $\Lambda = \mathrm{End}_B(T')$.

Si $\dim \mathrm{proy}_{\Lambda_o} R = 1$ entonces $\dim \mathrm{gl}\ \Lambda = 2$ y $q_\Lambda \sim q_B$. Por lo tanto, q_B es semipositiva y la longitud regular de X es menor o igual que 2 (2.3,Prop.), de donde R es de nivel menor o igual que 2 (3.2,Lema 1).

Si dim $\text{proy}_{\Lambda_0} R = 2$ entonces existe $x \in Q_{B_i}$ tal que $\text{Hom}_{\Lambda_0}(I_x, \tau R) \neq 0$. Sea b maximal con esta propiedad y sea $e = \sum e_x$, donde $x \in Q_{B_i}$ depende de b [30,4.4]. Sea $\Lambda_0' = \Lambda_0/\Lambda_0 e \Lambda_0$, entonces $R \in \text{mod } \Lambda_0'$, dim $\text{proy}_{\Lambda_0'} R = 1$ y el nivel de R es el mismo en mod Λ_0' que en mod Λ_0. Además $\Lambda' = \Lambda_0'[R]$ es convexa en Λ, por lo que $q_{\Lambda'}$ es semipositiva. Por el caso anterior, R es de nivel menor o igual que 2 en mod Λ_0'.□

Proposición. Sean Λ_0, A_0, R y Λ como en el lema anterior. Si R es nivel 2 entonces q_Λ es semipositiva si y sólo si A_0 es de tipo $\tilde{D}_m$, el tipo de coextensión de Λ_0 sobre A_0 es $(n-2,2,2)$ con $n>m\geq 4$ y dim $\text{proy}_{\Lambda_0} R = 1$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que dim $\text{proy}_{\Lambda_0} R = 2$ y sea $b \in Q_{B_i}$ maximal tal que $\text{Hom}_{\Lambda_0}(I_b, \tau R) \neq 0$. Sea E el módulo corrayo tal que hay un morfismo irreducible $E \longrightarrow R$. Entonces $M = \tau_{\Lambda_0} E$ es sumando directo de I_b/S_b. Sean $e = \sum e_x$, donde $x \in Q_{B_i}$ depende de b y $\Lambda_0' = \Lambda_0/\Lambda_0 e \Lambda_0$. Λ_0' es cotubular doméstica, R es de nivel 2 en mod Λ_0' y M es módulo corrayo en mod Λ_0'. El resto de la demostración es igual al de la proposición del caso anterior.

$\Leftarrow$) La demostración es la misma que la de la proposición del caso anterior.□

Teorema. Sea $\Lambda_0 = {}_{i=1}^{t}[B_i, E_i]A_0$ una coextensión tubular doméstica del álgebra mansa oculta A_0, R un Λ_0-módulo inescindible tal que $R \in \text{mod } B_i$ para algún $i \in \{1,\dots,t\}$ y $\Lambda = \Lambda_0[R]$. Si q_Λ es semipositiva entonces Λ es mansa.

Demostración: Sean B_o un álgebra mansa hereditaria de tipo tubular el tipo de coextensión de Λ_o sobre A_o, T el B_o-módulo coinclinado tal que $\Lambda_o = End_{B_o}(T)$, X el B_o-módulo inescindible regular tal que $\Sigma X = R$, $B = B_o[X]$ y T' el B-módulo coinclinado tal que $\Lambda = End_B(T')$ y la teoría de torsión asociada a T' en mod Λ se escinde.

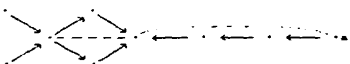
Si $\dim proy_{\Lambda_o} R = 1$ entonces $\dim gl\ \Lambda = 2$ y q_{Λ} _ q_{B}. Por lo tanto, q_B es semipositiva y B es un álgebra mansa. Luego, Λ es mansa.

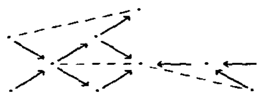
Si $\dim proy_{\Lambda_o} R = 2$, se sigue de los dos resultados anteriores que R es de nivel 1, esto es, X es simple regular. Un análisis caso por caso muestra que B es tubular doméstica o tubular.

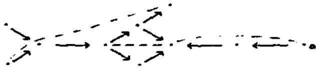
tipo tubular de A_o	tipo de coextensión de Λ_o sobre A_o	tipo de extensión de B sobre B_o
(2,2,2)	(5,3,2)	(6,3,2)
(3,2,2)	(3,5,2)	(3,6,2)
(m,2,2) $m\geq 4$	(n,2,2) $n>m$	(n+1,2,2)

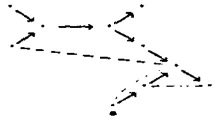
Luego, Λ es mansa.□

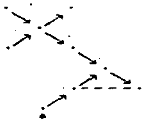
Ejemplos:

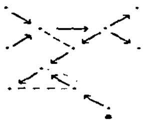


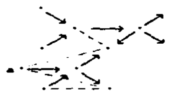


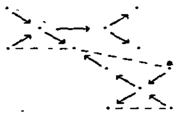


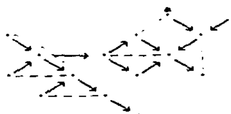


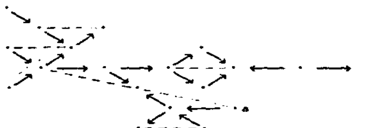


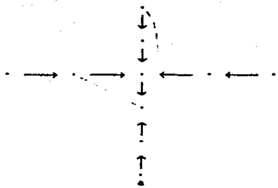


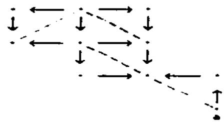












3.4 DOS PROYECTIVOS INESCINDIBLES FUERA DE LA COMPONENTE PREPROYECTIVA

En esta y las siguientes secciones supondremos que Λ es buena, q_Λ es semipositiva, Γ_Λ tiene una única componente preproyectiva sin inyectivos $\mathcal{P}$ y que hay dos proyectivos inescindibles P_a y P_b que no están en $\mathcal{P}$.

Sea $\Lambda_0 = \Lambda/\Lambda e_a\Lambda + \Lambda e_b\Lambda$. Como en el caso anterior, Λ_0 es una coextensión tubular doméstica de un álgebra mansa oculta A_0, sólo que en este caso admitimos la posibilidad de que las ramas sean vacías. Ya que Λ es conexa, podemos suponer que hay una flecha del vértice a a algún vértice de Q_{Λ_0}. Sean R = rad P_a y U = rad P_b. En este caso hay que considerar las siguientes situaciones:

1. Hay una flecha α entre a y b.

1) α va de b a a.

2) α va de a a b.

2. No hay ninguna flecha entre a y b.

1) rad $P_a \not\cong$ rad P_b.

2) rad $P_a \cong$ rad P_b.

1. Nos restringiremos a analizar el caso en que el soporte de R está contenido en $Q_{A_0} \cup \{b\}$.

1) Supongamos que hay una flecha $b \xrightarrow{\alpha} a$. Entonces $A = (A_0[R])[U]$. Como A es buena y q_A es semipositiva, R es un A_0-módulo inescindible en la familia tubular separante de mod A_0. Supongamos que $R \in$ mod A_0 y consideremos la extensión $A = A_0[R]$. Entonces la longitud regular de R es 1 y A es tubular doméstica o tubular (sólo si las ramas son vacías) o la longitud regular de R es 2 y A es 2-tubular.

Proposición. Si α no es la única flecha que sale de b entonces A es tubular doméstica, $U = \overline{R[2]} = \tau_A^{-}R$ y el tipo de extensión de A sobre A_0 es $(n-2,2,2)$ con $n \geq 6$.

Daremos la prueba de la proposición en varios lemas.

Supongamos que hay otra flecha $b \xrightarrow{\beta} z$ con $z \in Q_{A_0}$. Como A es buena, U es inescindible. De hecho, $z \in Q_{A_0}$ y existe un vértice $x \in$ sop R tal que hay un camino dirigido no nulo de z a x y una relación de conmutatividad de b a x. Luego, $U \in$ mod A, por lo que $U = (U_0, k, \gamma : k \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A_0}(R, U_0))$, donde $U_0 \neq 0$. Sea $A_1 = A[U]$, entonces dim gl $A_1 \leq 3$ y q_{A_1} es semipositiva.

Lema. Si A es tubular entonces α es la única flecha que sale de b.

Demostración: Sea $\operatorname{mod} A = \mathcal{P}_0 \vee \mathcal{T}_0 \vee \bigvee_{\gamma \in Q^+} \mathcal{T}_\gamma \vee \mathcal{T}_\infty \vee \mathcal{I}_\infty$ y sea U como arriba. Ya que $P_a \in \mathcal{T}_0$ y $\operatorname{Hom}_A(P_a, U) = 0$, $U \in \mathcal{T}_0 \vee \mathcal{I}$, donde $\mathcal{I} = \bigvee_{\gamma \in Q^+} \mathcal{T}_\gamma \vee \mathcal{T}_\infty \vee \mathcal{I}_\infty$. Supongamos que $U \in \mathcal{I}$. Sean z_0 el generador positivo mínimo de rad q_{A_0} y E un A_0-módulo simple regular en un tubo homogéneo de $\mathcal{T}_0$. Como dim $\operatorname{proy}_{A_1} E = 1$, $U_0 = 0$ y $\mathcal{T}_0$ es separante, obtenemos:

$$(\underline{\dim}\, P_b, z_0)_{A_1} = \langle z_0, \underline{\dim}\, P_b \rangle = \langle z_0, \underline{\dim}\, U \rangle = \dim \operatorname{Hom}_A(E, U) > 0.$$

Luego, si $n > q_{A_1}(\underline{\dim}\, P_b) = \chi_{A_1}(\underline{\dim}\, P_b) = 1$, $q_{A_1}(\underline{\dim}\, P_b - n z_0) < 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $U \in \mathcal{T}_0$.

Sean A_∞ el álgebra mansa oculta de la cual A es coextensión tubular, z_∞ el generador positivo mínimo de rad q_{A_∞} y E un A_∞-módulo simple regular en un tubo homogéneo de $\mathcal{T}_\infty$. Ya que dim $\operatorname{proy}_{A_1} U = 1$, $I_a \in \mathcal{I}_\infty$, $\operatorname{Hom}_A(U, I_a) = 0$ y $\mathcal{T}_\infty$ es separante, obtenemos:

$$(e_b, z_\infty)_{A_1} = \langle e_b, z_\infty \rangle = -\langle \underline{\dim}\, U, z_\infty \rangle = -\dim \operatorname{Hom}_A(U, E) < 0.$$

Por lo tanto, $q_{A_1}(e_b + 2z_\infty) < 0$, lo cual es una contradicción.□

Lema. Si A es 2-tubular entonces α es la única flecha que sale de b.

Demostración: Sea $U_0 = \bigoplus_{i=1}^{n} U_i$ una descomposición de U_0 en suma directa de inescindibles y sea $\operatorname{mod} A_0 = \mathcal{P}_0 \vee \mathcal{T}_0 \vee \mathcal{I}_0$. Ya que U es inescindible, $\operatorname{Hom}_{A_0}(R, U_i) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Como $R \in \mathcal{T}_0$,

$U_i \in \mathcal{T}_0 \vee \mathcal{I}_0$ para $1 \le i \le n$. Sean z_0 el generador positivo mínimo de rad q_{A_0} y E un A_0-módulo simple regular homogéneo. Calculemos $q_{A_1}(\underline{\dim}\ P_b - nz_0)$, donde $n > q_{A_1}(\underline{\dim}\ P_b) \ge 1$. Como dim proy$_{A_1}$ E = 1, $\tau_A E = E$ y $\mathrm{Hom}_A(U_0, E) = 0$, se tiene que:

$$(\underline{\dim}\ P_b, z_0)_{A_1} \ge \langle z_0, \underline{\dim}\ P_b\rangle = \langle z_0, \underline{\dim}\ U\rangle =$$

$$\dim \mathrm{Hom}_A(E,U) - \dim \mathrm{Hom}_A(U,E) = \dim \mathrm{Hom}_{A_0}(E,U_0).$$

Si U_0 tiene sumandos preinyectivos, $\dim \mathrm{Hom}_{A_0}(E,U_0) > 0$, de donde $q_{A_1}(\underline{\dim}\ P_b - nz_0) < 0$, lo cual es una contradicción. Luego, todos los sumandos inescindibles de U_0 están en $\mathcal{T}_0$ en el tubo de R. De hecho, si $0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow R \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0$ es una sucesión de Auslander-Reiten en mod A_0, los sumandos inescindibles de U_0 están en el rayo de R o en el rayo de E_2. Como sop $E_2 \subset$ sop R y A es Schurian, U_0 debe ser inescindible (de longitud regular menor que el rango del tubo de R).

Recordemos que rad q_A tiene dos generadores, z_0 y $\underline{\dim}\ Y + e_a$, donde Y es un A_0-módulo preinyectivo con $\dim \mathrm{Hom}_{A_0}(E_1,Y) = \dim \mathrm{Hom}_{A_0}(E_2,Y) = 1$ y $\dim \mathrm{Hom}_{A_0}(Z,Y) = 0$ para todo simple regular $Z \ne E_1, E_2$ en el tubo de R (2.3, Lema 3).

Calculemos $q_{A_1}(e_b - 2z_0)$. Como dim iny$_{A_1}$ E = 1, se tiene que:

$$(e_b, z_0)_{A_1} \ge \langle e_b, z_0\rangle = -\langle \underline{\dim}\ U, z_0\rangle =$$

$$-\dim \mathrm{Hom}_A(U,E) + \dim \mathrm{Hom}_A(E,U) = 0.$$

Si $(e_b, z_0)_{A_1} > 0$, q_{A_1} no es semipositiva. Supongamos entonces que $(e_b, z_0)_{A_1} = 0$. Veremos que en este caso $q_{A_1}(e_b + 2(\underline{\dim}\ Y + e_a)) < 0$.

Ya que $0 = \langle e_b, z_0\rangle = (e_b, z_0) + \sum_j z_0(j) \dim \operatorname{Ext}^3_{A_1}(S_b, S_j)$, se tiene que $\operatorname{Ext}^3_{A_1}(S_b, S_j) = 0$ para todo $j \in Q_{A_0}$. Sea

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P_a \oplus P \longrightarrow U \longrightarrow 0$$

exacta, donde $P_a \oplus P$ es la cubierta proyectiva de U ($P \in \operatorname{proy} A_0$). Entonces $\operatorname{Ext}^1_{A_1}(K, S_j) \cong \operatorname{Ext}^2_{A_1}(U, S_j) \cong \operatorname{Ext}^3_{A_1}(S_b, S_j) = 0$ para todo $j \in Q_{A_0}$. Luego, $\operatorname{Ext}^1_{A_0}(K, \bigoplus_{j \in Q_{A_0}} S_j) = 0$, de donde $K \in \operatorname{proy} A_0$ y por lo tanto, $\dim \operatorname{proy}_A U = 1$.

Así, $\dim \operatorname{gl} A_1 = 2$ y

$$(e_b, \underline{\dim}\, Y)_{A_1} = \langle e_b, \underline{\dim}\, Y\rangle = -\langle \underline{\dim}\, U, \underline{\dim}\, Y\rangle =$$

$$-\langle \underline{\dim}\, U_0 + e_a, \underline{\dim}\, Y\rangle = -\langle \underline{\dim}\, U_0, \underline{\dim}\, Y\rangle + \langle \underline{\dim}\, R, \underline{\dim}\, Y\rangle$$

$$= -\dim \operatorname{Hom}_{A_0}(U_0, Y) + \dim \operatorname{Hom}_{A_0}(R, Y) = 0 \text{ ó } 1,$$

dependiendo del rayo en que esté U_0. Pero si $1 = (e_b, \underline{\dim}\, Y)_{A_1} = -\langle \underline{\dim}\, U, \underline{\dim}\, Y\rangle = -\dim \operatorname{Hom}_A(U, Y) + \dim \operatorname{Ext}^1_A(U, Y)$ entonces $\operatorname{Ext}^1_A(U, Y) \neq 0$, de donde $\operatorname{Ext}^1_{A_0}(U_0, Y) \neq 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $(e_b, \underline{\dim}\, Y)_{A_1} = 0$ y $(e_b, \underline{\dim}\, Y + e_a)_{A_1} = (e_b, e_a)_{A_1} = -1$, de donde $q_{A_1}(e_b + 2(\underline{\dim}\, Y + e_a)) = -1$.□

Demostración de la Proposición:

Según los lemas anteriores A debe ser tubular doméstica. Sea $\operatorname{mod} A = \mathcal{P}_0 \vee \mathcal{T} \vee \mathcal{I}$. Como en el primer lema, $U \in \mathcal{T}$ (en el tubo de R y en el rayo de P_a). Entonces $\dim \operatorname{proy}_A U = 1$, de donde $\dim \operatorname{gl} A_1 = 2$.

Ya que A es tubular doméstica, dada un álgebra mansa oculta

B_0 de tipo tubular el tipo de extensión de A sobre A_0, existe un B_0-módulo inclinado $T = T_0 \oplus T_1$ con T_0 preproyectivo y T_1 regular tal que $A = \mathrm{End}_{B_0}(T)$ [30,4.9(1)]. Sea $\Sigma = \mathrm{Hom}_{B_0}(T,-)$. Por (2.5, Lema 1), $U = \Sigma X$ para algún inescindible regular X. Sea $B = B_0[X]$, entonces existe un B-módulo inclinado T' tal que $A_1 = \mathrm{End}_B(T')$ (2.3,Lema 1). Luego, $q_B \sim q_{A_1}$, de donde q_B es semipositiva. Por lo tanto, la longitud regular de X es menor o igual que 2. Por (2.5, Lema 1), $P_a = \Sigma E$ para algún simple regular E (de hecho, $E = T_1$). Ya que $\mathrm{Hom}_{B_0}(E,X) \cong \mathrm{Hom}_A(P_a,U) \neq 0$ y $X \ncong E$, la longitud regular de X es 2 y B_0 es de tipo $\tilde{D}_n$.

Lo anterior prueba que el tipo de extensión de A sobre A_0 es (n-2,2,2). Como Λ es $\tilde{A}$-libre, A_0 es de tipo $\tilde{D}_m$ con $m \geq 4$; luego, $n \geq 5$. Sólo falta probar que $U = \overline{R[2]}$. La sucesión de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow \tau^-_{B_0} E \longrightarrow 0$$

está en $\mathcal{G}(T)$. Por lo tanto, la sucesión

$$0 \longrightarrow P_a \longrightarrow U \longrightarrow \Sigma\tau^-_{B_0} E \longrightarrow 0$$

es exacta en mod A. Sea $M = \Sigma\tau^-_{B_0} E$, entonces $\tau_A M = \tau_A \Sigma \tau^-_{B_0} E = \Sigma E = P_a$. Por lo tanto, $M = \tau^-_A P_a = \tau^-_{A_0} R$ y ya que $\dim \mathrm{Ext}^1_A(\tau^-_A P_a, P_a) = \dim \mathrm{Hom}_A(P_a,P_a) = 1$, $U \cong \overline{R[2]} = \tau^-_A R$. De aquí se sigue que $m \geq 5$ y por lo tanto, $n \geq 6$.□

Proposición. Si α no es la única flecha que sale de b entonces el tipo de coextensión de Λ_0 sobre A_0 es (n-2,2,2) con $n \geq 5$ y R, $\tau^-_{A_0} R$ y $\tau_{A_0} R$ son módulos corrayo en mod $\Lambda_0[R]$.

Demostración: Por la proposición anterior, A_0 es de tipo $\tilde{D}_m$ con $m\geq 5$ y R es simple regular de período $m-2$. Como en la prueba de la proposición anterior, sean B_0 el álgebra mansa oculta y T el B_0-módulo inclinado tales que $A = \mathrm{End}_{B_0}(T)$, $\Sigma = \mathrm{Hom}_{B_0}(T,-)$, X el B_0-módulo inescindible regular tal que $\Sigma X = U$, $B = B_0[X]$ el álgebra 2-tubular y T' el B-módulo inclinado tales que $A_1 = \mathrm{End}_B(T')$. Ya que $q_{A_1} \sim q_B$ y rad q_B tiene dos generadores, w_0 y $\underline{\dim}\ Y + e_b$, rad q_{A_1} tiene también dos generadores, $z_0 = \sigma(w_0)$ y $\underline{\dim}\ \Sigma Y + e_b = \sigma(\underline{\dim}\ Y + e_b)$.

Sea z un vértice de coextensión de A_0 y sea M el sumando directo inescindible de I_z/S_z que pertenece a mod A_0. Supongamos que M es de período 2. Entonces $M = \Sigma Z$, donde Z es un B_0-simple regular de período 2. Consideremos el álgebra $A_2 = [M]A_1$. Ya que dim gl $A_1 = 2$ y dim $\mathrm{iny}_{A_1} M = 1$, dim gl $A_2 = 2$. Además A_2 es convexa en $\Lambda = (\Lambda_0[R])[U]$, por lo que q_{A_2} es semipositiva. Pero $q_{A_2}(e_z - 2(\underline{\dim}\ \Sigma Y + e_b)) < 0$ ya que

$$(e_z,\underline{\dim}\ \Sigma Y + e_b)_{A_2} = <\underline{\dim}\ \Sigma Y + e_b, e_z>_{A_2} =$$

$$- <\underline{\dim}\ \Sigma Y + e_b,\underline{\dim}\ M>_{A_1} = - <\underline{\dim}\ Y + e_b,\underline{\dim}\ Z>_B =$$

$$- <\underline{\dim}\ Y,\underline{\dim}\ Z> + <\underline{\dim}\ X,\underline{\dim}\ Z> = \dim \mathrm{Hom}_{B_0}(\tau_{B_0}^{-} Z, Y) = 1.$$

Luego, M no puede ser de período 2.

Supongamos ahora que $M = R$ y sea $A_2 = [R]A_1$. Como dim $\mathrm{iny}_{A_2} R = 2$, dim gl $A_2 = 3$. Como antes, q_{A_2} es semipositiva. Sea $P_a = \Sigma E$, con E B_0-simple regular en el rayo de X, como en la prueba de la proposición anterior. En este caso,

$$(e_z,\underline{\dim}\ \Sigma Y + e_b)_{A_2} \geq (e_z,\underline{\dim}\ \Sigma Y)_{A_2} \geq \langle\underline{\dim}\ \Sigma Y, e_z\rangle_{A_2} =$$

$$-\ \langle\underline{\dim}\ \Sigma Y,\underline{\dim}\ R\rangle_{A_2} = -\ \langle\underline{\dim}\ \Sigma Y,\underline{\dim}\ P_a\rangle_{A_2} + \langle\underline{\dim}\ \Sigma Y, e_a\rangle_{A_2}.$$

Ya que $\dim \operatorname{iny}_{A_2} P_a = \dim \operatorname{iny}_{A_1} P_a = 1$ y $\dim \operatorname{iny}_{A_2} S_a = 1$, obtenemos:

$$\langle\underline{\dim}\ \Sigma Y,\underline{\dim}\ P_a\rangle_{A_2} = \langle\underline{\dim}\ \Sigma Y,\underline{\dim}\ P_a\rangle_{A_1} = \langle\underline{\dim}\ Y,\underline{\dim}\ E\rangle_B$$

$$\text{y} \quad \langle\underline{\dim}\ \Sigma Y, e_a\rangle_{A_2} = \dim \operatorname{Hom}_A(\Sigma Y, S_a) = 1.$$

Por lo tanto,

$$(e_z,\underline{\dim}\ \Sigma Y + e_b)_{A_2} \geq -\ \langle\underline{\dim}\ Y,\underline{\dim}\ E\rangle_B = \dim \operatorname{Hom}_{B_0}(\tau_{B_0}^{-}E, Y) = 1.$$

Luego, $q_{A_2}(e_z - 2(\underline{\dim}\ \Sigma Y + e_b)) < 0$, lo cual es una contradicción.

Supongamos enseguida que $M = \tau_{A_0}^{-}R$ y sea $A_2 = [M]A_1$. Como $m\geq5$, $\dim \operatorname{iny}_{A_1} M = 1$ y por lo tanto, $\dim \operatorname{gl} A_2 = 2$. Además $M = \Sigma Z$, donde $Z = \tau_{B_0}^{-}E$ es el B_0-simple regular en el corrayo de X. Por lo tanto,

$$(e_z,\underline{\dim}\ \Sigma Y + e_b)_{A_2} = \langle\underline{\dim}\ \Sigma Y + e_b, e_z\rangle_{A_2} =$$

$$-\ \langle\underline{\dim}\ \Sigma Y + e_b,\underline{\dim}\ M\rangle_{A_1} = -\ \langle\underline{\dim}\ Y + e_b,\underline{\dim}\ Z\rangle_B =$$

$$-\ \langle\underline{\dim}\ Y,\underline{\dim}\ Z\rangle + \langle\underline{\dim}\ X,\underline{\dim}\ Z\rangle = \dim \operatorname{Hom}_{B_0}(X,Z) = 1.$$

Luego, $q_{A_2}(e_z - 2(\underline{\dim}\ \Sigma Y + e_b)) < 0$, lo que contradice el hecho de que q_{A_2} sea semipositiva.

Finalmente, supongamos que $M = \tau_{A_0}R$ y sea $A_2 = [M]A_1$. Ya que $\dim \operatorname{iny}_{A_1} M = 2$, $\dim \operatorname{gl} A_2 = 3$. Además $M = \Sigma Z$, donde $Z = \tau_{B_0}^{2}E$ y q_{A_2} es semipositiva. Calculemos $q_{A_2}(e_z - 2(\underline{\dim}\ \Sigma Y + e_b))$. Como $m\geq5$, $\tau_{B_0}^{2}E \neq \tau_{B_0}^{-}E$, de donde $\dim \operatorname{proy}_{A_2} \Sigma Y = 1$. Por otro lado, $(\underline{\dim}\ \Sigma Y)(a)$

$= \dim \mathrm{Hom}_{\Lambda}(P_a, \Sigma Y) = \dim \mathrm{Hom}_{B_0}(E,Y) = 1$ y $\mathrm{Ext}^3_{\Lambda_2}(S_a, S_z) \cong \mathrm{Ext}^2_{\Lambda_2}(R, S_z) \cong \mathrm{Ext}^1_{\Lambda_2}(R,M) \cong \mathrm{Ext}^1_{\Lambda_0}(R,M) \neq 0$. Entonces

$$(e_z, \underline{\dim}\, \Sigma Y + e_b)_{\Lambda_2} \geq (e_z, \underline{\dim}\, \Sigma Y)_{\Lambda_2} > \langle \underline{\dim}\, \Sigma Y, e_z \rangle_{\Lambda_2}$$
$$= - \langle \underline{\dim}\, \Sigma Y, \underline{\dim}\, M \rangle_{\Lambda_1} = - \langle \underline{\dim}\, Y, \underline{\dim}\, Z \rangle_B = 0.$$

Por consiguiente, $q_{\Lambda_2}(e_z - 2(\underline{\dim}\, \Sigma Y + e_b)) < 0$, lo cual es una contradicción.□

Veremos a continuación que la condición anterior caracteriza a estas álgebras y además que son mansas si car $k \neq 2$. Para ello probamos el siguiente resultado.

Proposición. Supongamos que α no es la única flecha que sale de b y sea $\Lambda = (\Lambda_0[R])[U]$. Sea $(n-2,2,2)$ el tipo de coextensión de Λ_0 sobre A_0 con $n \geq 5$ y sea B_0 un álgebra mansa hereditaria de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_n$. Entonces existen un B_0-módulo simple regular X de período $n-2$ y un $(B_0[X])[Z]$-módulo inclinado T, con $Z = \overline{X[2]}$, tales que $\Lambda = \mathrm{End}_{(B_0[X])[Z]}(T)$. Además la teoría de torsión asociada a T en mod Λ se escinde.

Demostración: Por [30,4.9(1)], existe un B_0-módulo coinclinado $T = T_1 \oplus T_2$ con T_1 regular y T_2 preinyectivo tal que $\Lambda_0 = \mathrm{End}_{B_0}(T)$. Sea $\Sigma = D\mathrm{Hom}_{B_0}(-,T)$. Ya que R es un módulo corrayo en mod Λ_0, de período $m-2$ en mod A_0 (A_0 es de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_m$ con $m \geq 5$), $R = \Sigma X$ para algún B_0-módulo simple regular X de período $n-2$ (2.5,Lema 1). Sea $B = B_0[X]$. Por (3.2,Teo. 2), existe un B-módulo coinclinado T' tal que $\Lambda_0 = \mathrm{End}_B(T')$ y la teoría de torsión asociada a T' en mod $\Lambda_0[R]$

se escinde. Observamos que $\Lambda_0[R]$ es tubular 1-iterada.

Sea P_a' el B-proyectivo inescindible con rad $P_a' = X$. La sucesión exacta de B-módulos en $\mathcal{G}(T')$

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow P_a' \longrightarrow I_a' \longrightarrow 0$$

va a dar, al aplicarle $\Sigma_{T'} = D\mathrm{Hom}_B(-,T')$, a la sucesión exacta de $\Lambda_0[R]$-módulos

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow \Sigma_{T'}P_a' \longrightarrow I_a \longrightarrow 0.$$

Como $\tau^-_{\Lambda_0[R]}R = \overline{R[2]} = U$ pues $\tau^-_{\Lambda_0}R$ es módulo corrayo en mod $\Lambda_0[R]$, $\dim \mathrm{Ext}^1_{\Lambda_0[R]}(I_a,R) = \dim \mathrm{Hom}_{\Lambda_0[R]}(U,I_a) = 1$. Por lo tanto, $\Sigma_{T'}P_a' \cong P_a$. Consideremos la sucesión exacta de B-módulos:

$$0 \longrightarrow P_a' \longrightarrow \overline{X[2]} \longrightarrow \tau^-_{B_0}X \longrightarrow 0$$

Ya que $D\mathrm{Ext}^1_{B_0}(\tau^-_{B_0}X,T) \cong \mathrm{Hom}_{B_0}(T,X) \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(D\Lambda_0,R) = 0$ pues R es módulo corrayo en mod Λ_0, $\tau^-_{B_0}X \in \mathcal{G}(T)$. Luego, la sucesión anterior está en $\mathcal{G}(T')$ y al aplicarle $\Sigma_{T'}$ va a dar a la sucesión exacta de $\Lambda_0[R]$-módulos:

$$0 \longrightarrow P_a \longrightarrow \Sigma_{T'}\overline{X[2]} \longrightarrow \tau^-_{\Lambda_0}R \longrightarrow 0$$

Como $\tau^-_{\Lambda_0}R$ y R son módulos corrayo en mod $\Lambda_0[R]$,

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Ext}^1_{\Lambda_0[R]}(\tau^-_{\Lambda_0}R,P_a) &= \dim \mathrm{Ext}^1_{\Lambda_0[R]}(\tau^-_{\Lambda_0[R]}P_a,P_a)\\ &= \dim \mathrm{Hom}_{\Lambda_0[R]}(P_a,P_a) = 1.\end{aligned}$$

Luego, $\Sigma_{T'}\overline{X[2]} \cong \overline{R[2]} \cong U$.

Sean $Z = \overline{X[2]}$ y $B_1 = B[Z]$. Similarmente, existe un B_1-módulo coinclinado T'' tal que $\Lambda = (\Lambda_0[R])[U] = \mathrm{End}_{B_1}(T'')$ y la teoría de torsión asociada a T'' en mod Λ se escinde.□

Corolario. Si α no es la única flecha que sale de b y $\Lambda = (\Lambda_0[R])[U]$ entonces q_Λ es semipositiva si y sólo si el tipo de coextensión de Λ_0 sobre A_0 es $(n-2,2,2)$ con $n\geq 5$ y R, $\tau^{-}_{\Lambda_0}R$ y $\tau_{\Lambda_0}R$ son módulos corrayo en mod $\Lambda_0[R]$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Ya se probó.

$\Leftarrow$) Como en la proposición anterior, $\Lambda = \mathrm{End}_{B[Z]}(T'')$, donde $B = B_0[X]$ es un álgebra tubular doméstica de tipo de extensión $(n-1,2,2)$ sobre el álgebra mansa oculta B_0 de tipo $\tilde{D}_n$, $Z = \overline{X[2]}$ y T'' es un $B[Z]$-módulo coinclinado. Además dim gl $\Lambda = 2$, por lo que $q_\Lambda \sim q_{B[Z]}$. Por (3.2,Lema 2), existen una extensión 2-tubular $C = C_c[Y]$ y un C-módulo inclinado T tales que $B[Z] = \mathrm{End}_C(T)$. Luego, $q_\Lambda \sim q_{B[Z]} \sim q_C$, de donde q_Λ es semipositiva.□

Según la proposición anterior y (3.2,Teo. 1), para ver que Λ es mansa necesitamos probar el siguiente resultado.

Proposición. Sea B_0 el álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] 1 \arrow[dr] & & & & & n \\ & 3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n-1 \arrow[urr] \arrow[drr] & & \\ 2 \arrow[ur] & & & & & n+1 \end{tikzcd}$$

con $n\geq 5$. Sean X un B_0-módulo simple regular de período $n-2$ y $Z = \overline{X[2]}$. Si car $k \neq 2$ entonces el álgebra $B = (B_0[X])[Z]$ es mansa.

Demostración: Ya que cada funtor reflexión S_n^+ es una coinclinación [1] y que $C^+ \cong DTr$ [8], por (3.2,Cor.), podemos suponer que B es el álgebra dada por el carcaj con relaciones:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] & & & b \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, dashed, no head] & a \arrow[d] \arrow[dr, dashed, no head] & \\
& 3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n-2 \arrow[r] & n-1 \arrow[r] \arrow[dr] & n \\
2 \arrow[ur] & & & & & n+1
\end{tikzcd}$$

Sea g el automorfismo de B dado por $g(1)=2$, $g(2)=1$ y $g(i)=i$ para $i\neq 1,2$. Consideremos el álgebra torcida $B[g]$. Por [28,2.3], $B[g]$ es Morita equivalente al álgebra A dada por el carcaj con relaciones:

$$\begin{tikzcd}
& & & & b \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, dashed, no head] & a \arrow[d] \arrow[dr, dashed, no head] & \\
& 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n-2 \arrow[r] & n-1 \arrow[r] \arrow[dr] & n \\
0 \arrow[ur] \arrow[ddr] & & & & & & n+1 \\
& & & & & & (n+1)' \\
& 3' \arrow[r] & 4' \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & (n-2)' \arrow[r] & (n-1)' \arrow[ur] \arrow[r] & n' \\
& & & & b' \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, dashed, no head] & a' \arrow[u] \arrow[ur, dashed, no head] &
\end{tikzcd}$$

Sea h el automorfismo de A dado por $h(i)=i'$, $h(i')=i$ para $i,i'\neq 0$ y $h(0)=0$. El álgebra torcida $A[h]$ es Morita equivalente a B. Por [26,3.3], $A[h]$ es mansa si y sólo si A lo es. Así, para ver que B es mansa basta ver que A es mansa.

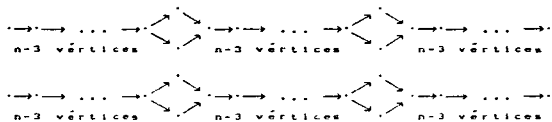
Sean A_1 el álgebra dada por el carcaj con relaciones:

$$\begin{tikzcd}
& & & b \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, dashed, no head] & a \arrow[d] \arrow[dr, dashed, no head] & \\
3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n-2 \arrow[r] & n-1 \arrow[r] \arrow[dr] & n \\
& & & & & n+1
\end{tikzcd}$$

A_2 el álgebra dada por el carcaj con relaciones:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & (n+1)' \\
3' \arrow[r] & 4' \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & (n-2)' \arrow[r] & (n-1)' \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & & b' \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, dash, dashed] & a' \arrow[u] & n'
\end{tikzcd}
$$

$\overline{A} = A_1 \times A_2$ y $R = \operatorname{rad} P_0$. Entonces $R = P_3 \oplus P_{3'}$ y $A = \overline{A}[R]$. Ya que A_1 y A_2 satisfacen la condición (S) y tienen forma de Tits débilmente positiva, por [5,3.3], A_1 y A_2 son de tipo finito; luego, $\overline{A}$ también lo es. De los carcajes de Auslander-Reiten de A_1 y A_2 vemos que $(\operatorname{Hom}_{\overline{A}}(R, \operatorname{mod} \overline{A}))$ es el parcialmente ordenado asociado al diagrama:



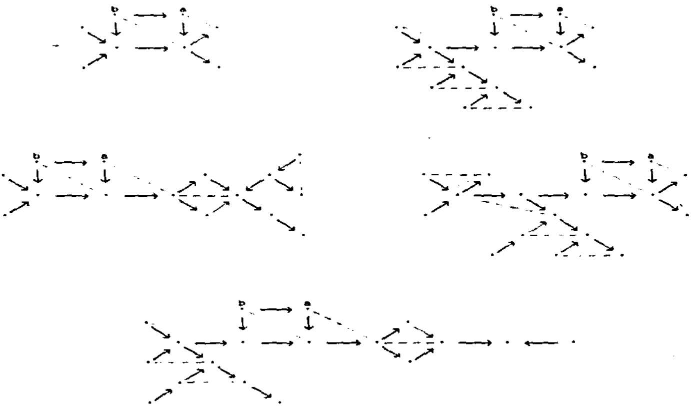
Por el criterio de Nazarova [21], [29], $\mathcal{U}(\operatorname{Hom}_{\overline{A}}(R, \operatorname{mod} \overline{A}))$ es mansa. Por lo tanto, A es mansa.□

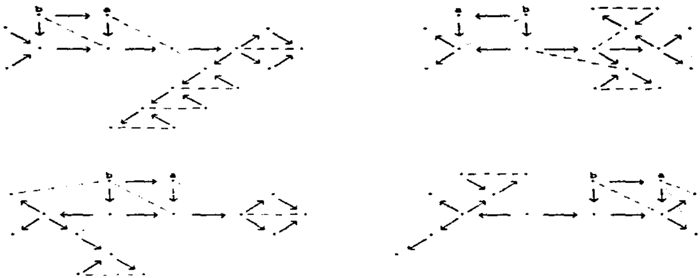
Como corolario obtenemos que si α no es la única flecha que sale de b y car $k \neq 2$ entonces $\Lambda = (\Lambda_0[R])[U]$ es mansa. Resumiendo los resultados anteriores obtenemos:

Teorema. Sea Λ un álgebra buena tal que q_Λ es semipositiva y Γ_Λ tiene una única componente preproyectiva sin inyectivos $\mathcal{P}$ de forma que hay dos proyectivos inescindibles P_a y P_b que no están en $\mathcal{P}$. Sean $R = \operatorname{rad} P_a$, $U = \operatorname{rad} P_b$, Λ_0 el álgebra cotubular doméstica dada por $\Lambda_0 = \Lambda/\Lambda e_a\Lambda + \Lambda e_b\Lambda$ y A_0 el álgebra mansa oculta de la cual

Λ_0 es coextensión tubular. Supongamos que $R \in \operatorname{mod} A_0$ y que hay una flecha $b \xrightarrow{\alpha} a$. Sea $A = A_0[R]$. Si α no es la única flecha que sale de b entonces A_0 es de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_m$ con $m \geq 5$, A es tubular doméstica de tipo de extensión $(n-2,2,2)$ sobre A_0, donde $n \geq 6$, el tipo de coextensión de Λ_0 sobre A_0 es $(n-2,2,2)$, donde $n \geq 5$, R, $\tau^-_{A_0}R$ y $\tau_{A_0}R$ son módulos corrayo en mod $\Lambda_0[R]$ y $U = \tau^-_{\Lambda_0[R]}R$. Además, si car $k \neq 2$, $\Lambda = (\Lambda_0[R])[U]$ es mansa.

Ejemplos:





Cuando $b \xrightarrow{\alpha} a$ es la única flecha que sale de b, obtenemos:

Lema. Supongamos que α es la única flecha que sale de b. Entonces no hay ninguna relación de b a algún vértice en el soporte de R.

Demostración: Supongamos que existe una relación de b a $j \in$ sop R. Sean $A_1 = A[U]$ y z_0 el generador positivo mínimo sincero de rad q_{A_0}. Entonces

$$q_{A_1}(e_b - 2z_0) = 1 - 2(e_b, z_0)_{A_1} = 1 - 2z_0(j) < 0.$$

Esto es una contradicción ya que q_{A_1} debe ser semipositiva por ser A_1 convexa en Λ.□

Proposición. Supongamos que α es la única flecha que sale de b. Entonces la longitud regular de R es 1 y Λ es mansa.

Demostración: Por el lema anterior, rad $P_r = P_s$. Supongamos que la longitud regular de R es 2. Entonces $A = A_0[R]$ es 2-tubular y rad q_A tiene dos generadores, z_0 y $\underline{\dim}\ Y + e_a$ (2.3, Lema 3). Sea $A_1 = A[P_a]$, entonces dim gl $A_1 = 2$ y q_{A_1} es semipositiva. Pero $q_{A_1}(e_b + 2(\underline{\dim}\ Y + e_a)) = -1$ ya que

$$(e_b, \underline{\dim}\ Y + e_a)_{A_1} = \langle e_b, \underline{\dim}\ Y + e_a \rangle = \langle e_b, e_a \rangle = -1.$$

Luego, la longitud regular de R debe ser 1.

Cuando la longitud regular de R es 1, $A_1 = A_0[R,B]$ con B la rama dada por α. Como q_{A_1} es semipositiva, por (2.5, Prop.), A_1 es tubular doméstica o tubular (sólo si $A_0 = A_0$) y $A = A_0[R,B]$ es tubular 1-iterada o tubular. Por (2.6, Prop. 1), A es mansa.□

Corolario. Sean $A = A_0[R]$, $R = \text{rad}\ P_a$ y $A_1 = A[P_a]$. Si A es 2-tubular entonces q_{A_1} no es semipositiva y A_1 es salvaje.

2) Supondremos ahora que la flecha entre a y b va de a a b. En este caso rad $P_a = R_0 \oplus P_b$, donde R_0 es un A_0-módulo inescindible regular.

Proposición. Si hay una flecha $a \xrightarrow{\alpha} b$ entonces la longitud regular de R_0 es 1 y A es mansa.

Demostración: Supongamos que la longitud regular de R_0 es 2. Sea $A_1 = [I_a]A$, donde $A = A_0[R_0]$ es 2-tubular. Entonces dim gl $A_1 = 2$ y q_{A_1} es semipositiva. Pero $q_{A_1}(e_b + 2(\underline{\dim}\ Y + e_a)) = -1$ ya que

$$(e_b, \underline{\dim}\ Y + e_a)_{A_1} = \langle \underline{\dim}\ Y + e_a, e_b \rangle = \langle e_a, e_b \rangle = -1.$$

Por lo tanto, la longitud regular de R_0 es 1 y $A_1 = A_0[R_0, B]$, donde B es la rama dada por α. Como en la proposición anterior, Λ es mansa.□

3.5 CUANDO NO HAY MORFISMOS ENTRE LOS DOS PROYECTIVOS INESCINDIBLES FUERA DE LA COMPONENTE PREPROYECTIVA

Consideremos ahora el caso 2., en que no hay ninguna flecha entre a y b. Ya que Λ es buena y q_Λ es semipositiva, R y U son Λ_0-módulos inescindibles en la familia tubular separante de mod Λ_0. Nos restringiremos a analizar el caso en que R, U $\in$ mod Λ_0.

1) Supongamos que R $\neq$ U. Aquí hay esencialmente tres casos que considerar:

a) La longitud regular de R y de U es 1.

b) La longitud regular de R es 2 y la de U es 1.

c) La longitud regular de R y de U es 2.

a) En este caso $A_1 = (A_0[R])[U]$ es una extensión tubular de A_0 y ya que q_{A_1} es semipositiva, A_1 es tubular doméstica o tubular (sólo si $\Lambda_0 = A_0$). En cualquier caso, $\Lambda = (\Lambda_0[R])[U]$ es tubular iterada y por lo tanto, mansa.

b) Ya que la longitud regular de R es 2, A_0 es de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_m$ $(m>4)$, el tipo de coextensión de Λ_0 sobre A_0 es $(n-2,2,2)$ con $n\geq m$ y si E es el soclo regular de R entonces E, $\tau^-_{A_0}E$ y $\tau_{A_0}E$ son módulos corrayo en mod $\Lambda_0[R]$. Además dim gl $\Lambda_0[R] = 2$ (3.3, Prop. 1).

Lema. Sean Λ_0 un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_m$ con $m\geq 5$, R un

A_0-módulo inescindible regular de longitud regular 2 y período m-2, E el soclo regular de R, U un A_0-módulo simple regular y A_1 = $(A_0[R])[U]$. Entonces q_{A_1} es semipositiva si y sólo si U es de período m-2 y es distinto de E y $\tau^{-}_{A_0}E$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Sean $A = A_0[R]$, a el vértice de extensión de A, b el de A_1 = $A[U]$ y $\underline{\dim}\, Y + e_a$ el generador de rad q_A descrito en (2.3,Lema 3). Entonces:

$$\dim \operatorname{Hom}_{A_0}(M,Y) = \begin{cases} 2 \text{ si } M \text{ es simple regular homogéneo,} \\ 1 \text{ si } M \text{ es simple regular de período 2, } M = E \text{ o } M = \tau^{-}_{A_0}E, \\ 0 \text{ si } M \text{ es simple regular de período m-2 y } M \neq E,\ \tau^{-}_{A_0}E. \end{cases}$$

Supongamos que q_{A_1} es semipositiva y calculemos

$$q_{A_1}(2(\underline{\dim}\, Y + e_a) + e_b) = 1 + 2(\underline{\dim}\, Y + e_a, e_b)_{A_1}.$$

Ya que $\dim \operatorname{proy}_{A_1} U = 1$ y Y es preinyectivo, se tiene que:

$$(\underline{\dim}\, Y + e_a, e_b)_{A_1} = \langle e_b, \underline{\dim}\, Y + e_a\rangle =$$

$$- \langle \underline{\dim}\, U, \underline{\dim}\, Y\rangle = - \dim \operatorname{Hom}_{A_0}(U,Y).$$

Por lo tanto, si q_{A_1} es semipositiva entonces U es de período m-2 y es distinto de E y $\tau^{-}_{A_0}E$.

$\Leftarrow$) $A_1 = (A_0[U])[R]$, donde $A_0[U]$ es tubular doméstica de tipo de extensión (m-1,2,2) sobre A_0. Por lo tanto, dada un álgebra mansa oculta B_0 de tipo $\tilde{D}_{m+1}$, existe un B_0-módulo inclinado T tal que $A_0[U] = \operatorname{End}_{B_0}(T)$. Sea $\Sigma = \operatorname{Hom}_{B_0}(T,-)$. Ya que R es de nivel 2 en mod $A_0[U]$, existe un B_0-módulo inescindible regular X de longitud regular 2 tal que $\Sigma X = R$ (3.2,Lema 1). Como el tubo de R es de rango mayor o igual que 3, el tubo de X también lo es. Luego, $B_0[X]$ es 2-tubular. Por (2.3,Lema 2) existe un $B_0[X]$-módulo inclinado T' tal que $A_1 = \mathrm{End}_{B_0[X]}(T')$. Luego, $q_{A_1} - q_{B_0[X]}$, de donde q_{A_1} es semipositiva.□

Corolario. Con las hipótesis del lema anterior, q_{A_1} es débilmente semipositiva si y sólo si q_{A_1} es semipositiva.

Lema. Sean A_0 un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{D}_m$ con $m \geq 5$, Λ_0 una coextensión tubular doméstica de A_0, de tipo de coextensión $(n-2,2,2)$ con $n>m$ y U un A_0-módulo simple regular de período $m-2$. Supongamos que $q_{\Lambda_0[U]}$ es semipositiva. Entonces U es un módulo corrayo en mod Λ_0 o la rama que se pega en U en Γ_{Λ_0} tiene longitud 1 (i.e., $U = I_z[2]$ para algún vértice z en Q_{Λ_0}).

Demostración: Supongamos que U no es un módulo corrayo en mod Λ_0 y sea z el vértice de coextensión de Λ_0 tal que el sumando directo inescindible de I_z/S_z que pertenece a mod A_0 es U. Queremos probar que la rama con vértice raíz z (2.6) tiene longitud 1. Supongamos lo contrario. No perdemos generalidad si suponemos que la rama tiene longitud 2 y que es la rama espacio cociente (el otro caso es similar). Sea x el vértice de Q_{Λ_0} tal que $I_x/S_x = I_z$.

Consideremos la extensión tubular doméstica $A_1 = A_0[U]$. Entonces existen un álgebra mansa oculta B_0 de tipo $\tilde{D}_{m-1}$ y un

B_0-módulo inclinado T tales que $A_1 = \mathrm{End}_{B_0}(T)$. Sea $\Sigma = \mathrm{Hom}_{B_0}(T,-)$. Ya que U es de nivel 2 en mod A_1 y de período $m-2$ en mod A_0, existe un B_0-módulo inescindible regular X de longitud regular 2 y período $m-1$ tal que $\Sigma X = U$. Sean $A_2 = [U]A_1$ y $B = [X]B_0$. Por (3.2, Teo. 2) existe un B-módulo inclinado T' tal que $A_2 = \mathrm{End}_B(T')$. Como $\dim \mathrm{iny}_{A_1} U = 1$, $\dim \mathrm{gl}\, A_2 = 2$. Así, si $A_3 = [I_z]A_2$ entonces $\dim \mathrm{gl}\, A_3 = 2$.

Por otro lado, si denotamos también con z al vértice de coextensión de B, la sucesión exacta de B-módulos

$$0 \longrightarrow P'_z \longrightarrow I'_z \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

pertenece a $\mathcal{G}(T')$ y al aplicarle $\Sigma_{T'} = \mathrm{Hom}_B(T',-)$ va a dar a la sucesión exacta de A_2-módulos

$$0 \longrightarrow P_z \longrightarrow \Sigma_{T'} I'_z \longrightarrow U \longrightarrow 0.$$

Como $\dim \mathrm{Ext}^1_{A_2}(U,P_z) = \dim \mathrm{Hom}_{A_2}(P_z,\tau_{A_2}U) = \dim \mathrm{Hom}_{A_2}(\tau_{A_2}U,I_z) = 1$, $\Sigma_{T'} I'_z = I_z$. Sea $B_1 = [I'_z]B$. Por (3.2,Teo. 2), existe un B_1-módulo inclinado T'' tal que $A_3 = \mathrm{End}_{B_1}(T'')$. Ya que $\dim \mathrm{gl}\, A_3 = 2$, $q_{A_3} \sim q_{B_1}$. Además, como $q_{\Lambda_0[U]}$ es semipositiva y A_3 es convexa en $\Lambda_0[U]$, q_{A_3} es semipositiva. Sin embargo, vimos en el segundo corolario de (3.4) que q_{B_1} no lo es. Luego, la longitud de la rama con vértice raíz z tiene longitud 1.□

Como corolario de los dos lemas anteriores obtenemos la siguiente proposición.

Proposición. Sean A_0 un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_m$ con $m\geq 5$,

Λ_0 una coextensión tubular doméstica de A_0, de tipo de coextensión $(n-2,2,2)$ con $n\geq m$, R un A_0-módulo inescindible regular de longitud regular 2 y período m-2, E el soclo regular de R, U un A_0-módulo simple regular y $\Lambda = (\Lambda_0[R])[U]$. Supongamos que q_Λ es semipositiva. Entonces U es de período m-2 y es un módulo corrayo en mod Λ_0 distinto de E y $\tau^-_{\Lambda_0}E$, o bien, la rama que se pega en U en Γ_{Λ_0} tiene longitud 1.

Teorema. Sean Λ_0 un álgebra cotubular doméstica, coextensión tubular del álgebra mansa oculta A_0 de tipo $\tilde{D}_m$ con $m\geq 5$ y $(n-2,2,2)$ el tipo de coextensión de Λ_0 sobre A_0, donde $n\geq m$. Sean R un A_0-módulo inescindible regular de longitud regular 2 y período m-2, U un A_0-módulo simple regular y $\Lambda = (\Lambda_0[R])[U]$. Si q_Λ es semipositiva y car $k \neq 2$ entonces Λ es mansa.

Demostración: Dada un álgebra mansa hereditaria B_0 de tipo $\tilde{D}_n$, existe un B_0-módulo coinclinado T tal que $\Lambda_0 = \mathrm{End}_{B_0}(T)$. Sea $\Sigma = D\mathrm{Hom}_{B_0}(-,T)$. Ya que q_Λ es semipositiva, R es de nivel 2 en mod Λ_0 y existe un B_0-módulo inescindible regular X de longitud regular 2 y período n-2 tal que $\Sigma X = R$. Sea S el soclo regular de X. Si U es un módulo corrayo en mod Λ_0 entonces existe un B_0-módulo simple regular Z de período n-2 y distinto de S y de $\tau^-_{B_0}S$ tal que $\Sigma Z = U$. Si U no es un módulo corrayo en mod Λ_0 entonces existe un B_0-módulo inescindible regular Z de longitud regular 2 y período n-2, distinto de $\tau^-_{B_0}X$ y de $\tau_{B_0}X$, tal que $\Sigma Z = U$. Observamos que en el primer caso $n\geq m\geq 5$, en tanto que en el segundo, $n>m\geq 6$.

Sea $B_1 = (B_0[X])[Z]$, entonces existe un B_1-módulo coinclinado T' tal que $A = \mathrm{End}_{B_1}(T')$ y la teoría de torsión asociada a T' en mod A se escinde (3.2,Cor.). Para ver que A es mansa, basta ver que B_1 lo es (3.2,Teo. 1). Este es el contenido de los siguientes resultados.□

Lema. Sean B_0 el álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] 1 \arrow[dr] & & & & m \\ & 3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & m-1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[ur] & & & & m+1 \end{tikzcd}$$

con $m \geq 5$, X un B_0-módulo inescindible regular de longitud regular 2 y período $m-2$, E el soclo regular de X y Z un B_0-módulo simple regular de período $m-2$, distinto de E y de $\tau^{-}E$. Entonces $B_1 = (B_0[X])[Z]$ es mansa.

Demostración: Ya que $B_1 = (B_0[Z])[X]$ con $B_0[Z]$ tubular doméstica y X de nivel 2 en mod $B_0[Z]$, se sigue de (3.2,Lema 2) que existen una extensión 2-tubular $C = C_0[Y]$ y un C-módulo inclinado T tal que $B_1 = \mathrm{End}_C(T)$ y la teoría de torsión asociada a T en mod B_1 se escinde. Por (3.2,Teo. 1), B_1 es mansa.□

Lema. Sean B_0 el álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] 1 \arrow[dr] & & & & m \\ & 3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & m-1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[ur] & & & & m+1 \end{tikzcd}$$

con $m \geq 7$ y X y Z dos B_0-módulos inescindibles regulares de longitud regular 2 y período $m-2$ tales que Z es distinto de $\tau^{-}X$ y de τX. Si car $k \neq 2$ entonces $B_1 = (B_0[X])[Z]$ es mansa.

Demostración: Supongamos primero que $Z \neq \tau^{-}X$, τX y $\tau^{2}X$. Sin perder generalidad podemos suponer que $\underline{\dim}\ X = {}^{0}_{0}0\ldots011^{0}_{0}$. Entonces $\underline{\dim}\ Z \neq {}^{0}_{0}0\ldots0110^{0}_{0}$, ${}^{1}_{1}1\ldots12^{1}_{1}$ y ${}^{1}_{1}21\ldots1^{1}_{1}$. Así B_1 es el álgebra dada por el carcaj con relaciones

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] & & & & b \arrow[dl] \arrow[dr, dashed, no head] & & & & a \arrow[dl] \arrow[r, dashed, no head] & m \\
& 3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & j \arrow[r] & j+1 \arrow[r] & j+2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & m-2 \arrow[r] & m-1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
2 \arrow[ur] & & & & & & & & & m+1
\end{tikzcd}$$

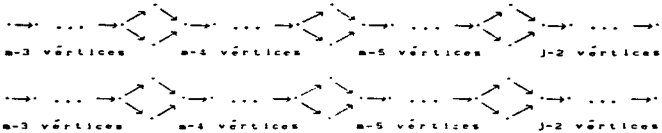
donde $3 \leq j \leq m-4$.

Sea g el automorfismo de B_1 dado por $g(1)=2$, $g(2)=1$ y $g(i)=i$ para $i \neq 1,2$. Por [28,2.3], el álgebra torcida $B_1[g]$ es Morita equivalente al álgebra A dada por el carcaj con relaciones:

$$\begin{tikzcd}
& & & & b \arrow[dl] \arrow[dr, dashed, no head] & & & & a \arrow[dl] \arrow[r, dashed, no head] & m \\
& 3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & j \arrow[r] & j+1 \arrow[r] & j+2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & m-2 \arrow[r] & m-1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & & & & & & & & m+1 \\
0 \arrow[uur] \arrow[ddr] & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & m' \\
& 3' \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & j' \arrow[r] & (j+1)' \arrow[r] & (j+2)' \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & (m-2)' \arrow[r] & (m-1)' \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & & & b' \arrow[ul] \arrow[ur, dashed, no head] & & & & a' \arrow[ul] \arrow[r, dashed, no head] & (m+1)'
\end{tikzcd}$$

Sea h el automorfismo de A dado por $h(0)=0$, $h(i)=i'$ y $h(i')=i$ para $i,i' \neq 0$. El álgebra torcida $A[h]$ es Morita equivalente a B_1. Por [26,3.3], para ver que B_1 es mansa basta ver que A lo es.

Sean A_1 (resp. A_2) el álgebra dada por el carcaj con relaciones con vértices $\{3,\ldots,m+1,a,b\}$ (resp. $\{3',\ldots,(m+1)',a',b'\}$), $\bar{A} = A_1 \times A_2$ y $R = \operatorname{rad} P_0$. Entonces $R = P_3 \oplus P_{3'}$ y $A = \bar{A}[R]$. Por [5,3.3], A_1 y A_2 son de tipo finito, luego, $\bar{A}$ también lo es. Además, por el criterio de Nazarova, $\mathcal{U}(\operatorname{Hom}_{\bar{A}}(R,\operatorname{mod}\bar{A}))$ es mansa ya que $\operatorname{Hom}_{\bar{A}}(R,\operatorname{mod}\bar{A})$ es un parcialmente ordenado de la forma:

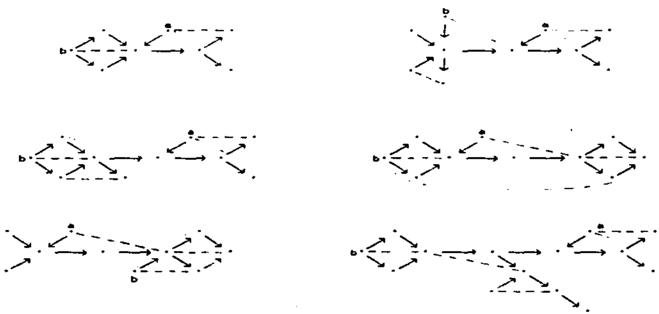


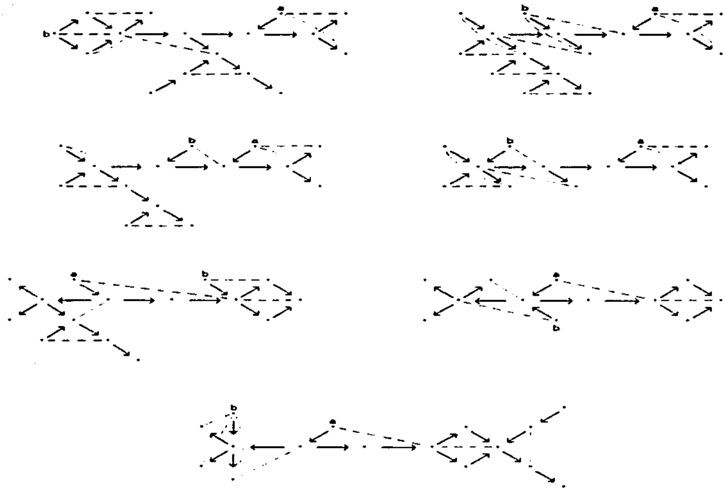
donde $1 \leq j-2 \leq m-6$.

Supongamos ahora que $Z = \tau^2 X$. No perdemos generalidad si suponemos que $\underline{\dim}\ Z = {}^{0}_{0}0\ldots01100^{0}_{0}$. Entonces $\underline{\dim}\ X = {}^{0}_{0}0\ldots011^{0}_{0}$ y B_1 es una de las álgebras consideradas en el primer caso.□

Con estos lemas queda completa la demostración del teorema.

Ejemplos:





Observamos que algunas de estas álgebras tienen tres raices nulas linealmente independientes.

c) Como en el caso anterior, A_0 es de tipo $\tilde{D}_m$ con $m>4$, el tipo de coextensión de Λ_0 sobre A_0 es $(n-2,2,2)$ con $n=m$ y si S y T son los soclos regulares de R y U, respectivamente entonces $\tau_{A_0}S$, S,

$\tau^{-}_{A_0}S$, $\tau_{A_0}T$, T y $\tau^{-}_{A_0}T$ son módulos corrayo en mod A_0, por lo que $\dim \mathrm{gl}\,(A_0[R])[U] = 2$ (3.3,Prop. 1).

Lema. Sean A_0 un álgebra mansa oculta de tipo $\tilde{D}_m$, X y Z dos A_0-módulos inescindibles regulares de longitud regular 2 y período $m-2$ y $A_1 = (A_0[X])[Z]$. Entonces q_{A_1} es semipositiva si y sólo si Z es distinto de $\tau_{A_0}X$ y $\tau^{-}_{A_0}X$. Consecuentemente, $m\geq 6$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea $A = A_0[X]$, entonces A es un álgebra 2-tubular. Sean z_0 y $\underline{\dim}\, Y + e_a$ los generadores de rad q_A descritos en (2.3,Lema 3). Supongamos que $Z = \tau_{A_0}X$. Entonces $q_{A_1}(2(\underline{\dim}\, Y - e_a) + e_b) = -1$ ya que

$$(\underline{\dim}\, Y + e_a, e_b)_{A_1} = (\underline{\dim}\, Y, e_b)_{A_1} = -\langle \underline{\dim}\, Z, \underline{\dim}\, Y\rangle$$
$$= -\dim \mathrm{Hom}_{A_0}(\tau_{A_0}X, Y) = -1.$$

Similarmente, si $Z = \tau^{-}_{A_0}X$ entonces $q_{A_1}(2(\underline{\dim}\, Y - e_a) + e_b) = -1$.

$\Leftarrow$) Existen un álgebra B_1, como las descritas en el último lema de b), y un B_1-módulo inclinado T tales que $A_1 = \mathrm{End}_{B_1}(T)$. Así, $q_{A_1} \sim q_{B_1}$ que es semipositiva ya que

$$\begin{aligned} q_{B_1}(x) = {} & \tfrac{1}{4}(2x_1-x_3)^2 + \tfrac{1}{4}(2x_2-x_3)^2 + \tfrac{1}{2}(x_3-x_4)^2 + \dots + \tfrac{1}{2}(x_{j-1}-x_j)^2 + \\ & \tfrac{1}{2}(x_j-x_{j+1}-x_b)^2 + \tfrac{1}{2}(x_{j+1}-x_{j+2}-x_b)^2 + \tfrac{1}{2}(x_{j+2}-x_{j+3})^2 + \dots + \\ & \tfrac{1}{2}(x_{m-3}-x_{m-2})^2 + \tfrac{1}{2}(x_{m-2}-x_{m-1}-x_a)^2 + \tfrac{1}{2}(x_{m-1}-x_m-x_{m+1}-x_a)^2 + \\ & \tfrac{1}{2}(x_m-x_{m+1})^2. \square \end{aligned}$$

Corolario. Con las hipótesis del lema anterior, q_{Λ_1} es débilmente semipositiva si y sólo si q_{Λ_1} es semipositiva.

Teorema. Sean Λ_0 un álgebra cotubular doméstica, de tipo de coextensión $(n-2,2,2)$ sobre el álgebra mansa oculta A_0 de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_m$, donde $n \geq m \geq 7$, R y U dos A_0-módulos inescindibles regulares de longitud regular 2 y período $m-2$ y $\Lambda = (\Lambda_0[R])[U]$. Si car $k \neq 2$ y q_Λ es semipositiva entonces Λ es mansa.

Demostración: Dada un álgebra mansa hereditaria B_0 de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_n$, existe un B_0-módulo coinclinado T tal que $\Lambda_0 = \mathrm{End}_{B_0}(T)$. Sea $\Sigma = D\mathrm{Hom}_{B_0}(-,T)$. Entonces existen dos B_0-módulos inescindibles regulares X y Z de longitud regular 2 y período $n-2$ tales que $\Sigma X = R$ y $\Sigma Z = U$. Sea $B_1 = (B_0[X])[Z]$. Por (3.2,Cor.), existe un B_1-módulo coinclinado T' tal que $\Lambda = \mathrm{End}_{B_1}(T')$ y la teoría de torsión asociada a T' en mod Λ se escinde. Por lo tanto, Λ es mansa si B_1 lo es. Ya que $q_{B_1} \sim q_\Lambda$, q_{B_1} es semipositiva. Por el lema anterior, $Z \neq \tau_{B_0}X$, $\tau^-_{B_0}X$. Del último lema de b) se sigue que B_1 es mansa.□

Corolario. Sean Λ_0 un álgebra cotubular doméstica, coextensión tubular del álgebra mansa oculta A_0 de tipo $\tilde{\mathbb{D}}_m$ con $m \geq 6$, R y U dos A_0-módulos inescindibles regulares de longitud regular 2 y período $m-2$, S y T los soclos regulares de R y U, respectivamente y $\Lambda = (\Lambda_0[R])[U]$. Entonces q_Λ es semipositiva si y sólo si el tipo de coextensión de Λ_0 sobre A_0 es $(n-2,2,2)$, donde $n \geq m$, $\tau_{A_0}S$, S, $\tau^-_{A_0}S$,

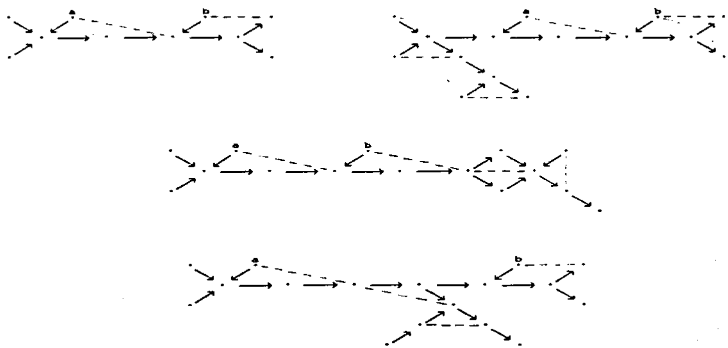
$\tau_{\Lambda_o}T$, T y $\tau^{-}_{\Lambda_o}T$ son módulos corrayo en mod Λ_o y U es distinto de $\tau_{\Lambda_o}R$ y $\tau^{-}_{\Lambda_o}R$.

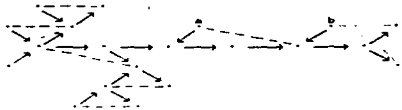
Demostración:

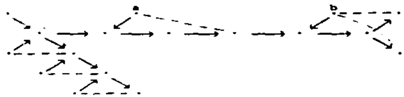
$\Rightarrow$) Con la notación introducida en la demostración del teorema, sólo es necesario observar que $\tau_{\Lambda_o}R = \Sigma\tau_{B_o}X$ y $\tau^{-}_{\Lambda_o}R = \Sigma\tau^{-}_{B_o}X$.

$\Leftarrow$) Las hipótesis implican que $\Lambda = \mathrm{End}_{B_1}(T')$, donde B_1 es un álgebra como las descritas en el último lema de b) y T' es un B_1-módulo coinclinado. Luego, $q_\Lambda \sim q_{B_1}$ que es semipositiva.□

Ejemplos:







Observamos que estas álgebras tienen tres raices nulas linealmente independientes.

3.6 CUANDO LOS DOS PROYECTIVOS INESCINDIBLES FUERA DE LA COMPONENTE PREPROYECTIVA TIENEN EL MISMO RADICAL

2) Finalmente, supongamos que $R \cong U$. Sean $A = A_0[R]$, $A_1 = A[U]$ y $A = (A_0[R])[U]$. Recordemos que si q_A es semipositiva entonces o la longitud regular de R es 1 y A es tubular doméstica o tubular (solo si $A_0 = A_0$) o la longitud regular de R es 2 y A es 2-tubular.

Lema. Si A es tubular entonces q_A no es semipositiva.

Demostración: Si A es tubular el tipo de extensión de A sobre A_0 es $T = (3,3,3)$, $(4,4,2)$, $(6,3,2)$ o $(2,2,2,2)$.

Si $T = (3,3,3)$ entonces A_0 es de tipo tubular $(3,3,2)$ y R es de periodo 2. Sea B_0 el álgebra de caminos del carcaj:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & \cdot \arrow[d] & & \\
 & & \cdot \arrow[d] & & \\
\cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot & \cdot \arrow[l] & \cdot \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

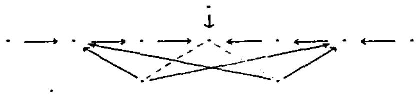
Entonces existen un B_0-módulo inclinado preproyectivo T tal que $A_0 = \mathrm{End}_{B_0}(T)$ y un B_0-módulo simple regular X de período 2 tal que $\Sigma X = R$. Sea $B_1 = (B_0[X])[X]$. Por (3.2,Cor.), existe un B_1-módulo inclinado T' tal que $A_1 = \mathrm{End}_{B_1}(T')$. Como dim gl $A_1 = 2$, $q_{A_1} \sim q_{B_1}$. Por lo tanto, q_{A_1} es semipositiva si y sólo si q_{B_1} lo es. No perdemos generalidad si suponemos que $\underline{\dim}\, X = \begin{smallmatrix} & & 0 & & \\ & & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}$. Así, B_1 es el álgebra asociada al carcaj con relaciones:

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdot \arrow[d] & & \\
 & \cdot \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[rrd, "\delta_1" near end] & \cdot \arrow[d, "c"] & \cdot \arrow[l, "\gamma_2"'] \arrow[d, "\alpha_2"] \arrow[lld, "\delta_2"' near end] & \\
\cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r, "\beta_1"'] & \cdot & \cdot \arrow[l, "\beta_2"] & \cdot \arrow[l]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{l}
\beta_1\alpha_1 = c\gamma_1 = \beta_2\delta_1 \\
\beta_2\alpha_2 = c\gamma_2 = \beta_1\delta_2
\end{array}$$

Sea $z = \begin{smallmatrix} & & 1 & & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{smallmatrix}$, entonces $q_{B_1}(z) < 0$. Luego, q_{A_1} no es semipositiva.

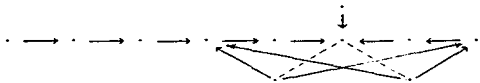
Los otros casos se tratan similarmente. Simplemente indicamos el álgebra B_1 y el vector z que sirven para ver que q_{A_1} no es semipositiva.

Para $\mathbb{T} = (4,4,2)$, B_1 es el álgebra asociada al carcaj con relaciones



y $z = 1\;2\;\underset{1}{1}\;\overset{0}{0}\;\underset{1}{1}\;2\;1.$

Para $T = (6,3,2)$, B_1 es el álgebra asociada al carcaj con relaciones



y $z = 1\;2\;3\;4\;\underset{1}{3}\;\overset{1}{2}\;\underset{1}{2}\;2.$

Si $T = (2,2,2,2)$ entonces Λ no es buena, ni q_Λ semipositiva.□

Lema. Si A es 2-tubular entonces q_Λ no es semipositiva.

Demostración: Si A es 2-tubular entonces A_0 es de tipo $\tilde{D}_m$ y R es de longitud regular 2 y período m-2. Como Λ es buena, $m \geq 5$ (si $m=4$, q_Λ no es semipositiva). Sea B_0 el álgebra de caminos del carcaj:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
1 \arrow[dr] & & & & m \\
& 3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & m-1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
2 \arrow[ur] & & & & m+1
\end{tikzcd}$$

Como en el lema anterior, $A_0 = \mathrm{End}_{B_0}(T)$, donde T es inclinado preproyectivo y $R = \Sigma X$, donde X es inescindible regular de longitud regular 2 y período m-2. Si $B_1 = (B_0[X])[X]$ entonces $A_1 = \mathrm{End}_{B_1}(T')$, donde T' es un B_1-módulo inclinado; además $q_{A_1} \sim q_{B_1}$.

Sin perder generalidad, podemos suponer que B_1 es el álgebra dada por el carcaj con relaciones:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] & & & & & a \arrow[dl] \arrow[rr, dashed, no head] & & m \\
& 3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & m-2 \arrow[rr] & & & m-1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
2 \arrow[ur] & & & & & b \arrow[ul] \arrow[rr, dashed, no head] & & m+1
\end{tikzcd}$$

Para $z = {}^{1}_{1}2\ldots2^{1}_{1}{}^{0}_{0}$, $q_{B_1}(z) < 0$. Por lo tanto, q_{A_1} no es semipositiva.□

Como consecuencia de los dos lemas anteriores obtenemos:

Proposición. Si q_A es semipositiva entonces A es tubular doméstica.

En este caso obtenemos:

Lema. A_0 es de tipo $\tilde{D}_m$, R es de período $m-2$ y el tipo de extensión de A sobre A_0 es $(m-1,2,2)$.

Demostración: Ya que A es tubular doméstica, existen un álgebra mansa oculta B_0 de tipo tubular el tipo de extensión de A sobre A_0 y un B_0-módulo inclinado $T = T_0 \oplus T_1$, con T_0 preproyectivo y T_1 regular, tales que $A = \mathrm{End}_{B_0}(T)$. Como R es de nivel 2 en mod A, existe un B_0-módulo inescindible regular X de longitud regular 2 tal que $\Sigma X = R$ (X es la única extensión de T_1 por $\tau_{B_0}T_1$). Entonces $A_1 = \mathrm{End}_B(T')$, donde $B = B_0[X]$ y T' es un B-módulo inclinado (2.3, Lema 2). Ya que dim gl $A_1 = 2$, $q_B \sim q_{A_1}$ que es semipositiva. Por lo tanto, B es 2-tubular, esto es, B_0 es de tipo $\tilde{D}_n$ y X es de período $n-2$. Como A es buena, A_0 es de tipo $\tilde{D}_m$, donde $m \geq 4$. Luego, R es de período $m-2$ y el tipo de extensión de A sobre A_0 es

$(m-1,2,2)$.□

Proposición. El tipo de coextensión de Λ_0 sobre A_0 es $(n-2,2,2)$ y R y $\tau_{A_0}R$ son módulos corrayo en mod Λ_0.

Demostración: Como en la prueba del lema anterior, sean $B = B_0[X]$ el álgebra 2-tubular y T' el B-módulo inclinado tales que $A_1 = \mathrm{End}_B(T')$. Sea $\Sigma = \mathrm{Hom}_B(T',-)$, entonces $R = \Sigma X$ y rad q_{A_1} tiene dos generadores: el generador positivo mínimo de rad q_{A_0} y $\underline{\dim}\,\Sigma Y + e_b$, donde Y es el B_0-módulo preinyectivo inescindible descrito en (2.3, Lema 3).

Sea z un vértice de coextensión de Λ_0 y sea M el sumando directo de I_z/S_z que pertenece a Γ_{Λ_0}. Supongamos que M es de período 2 y que no está en el tubo de R en caso de que $m=4$. Entonces $M = \Sigma Z$, donde Z es B_0-simple regular de período 2. Sea $A_2 = [M]A_1$. Como dim gl $A_1 = 2$ y dim iny$_{A_1}M = 1$, dim gl $A_2 = 2$. Además A_2 es convexa en Λ, por lo que q_{A_2} es semipositiva. Pero $q_{A_2}(e_z - 2(\underline{\dim}\,\Sigma Y + e_b)) < 0$ ya que

$$(e_z,\underline{\dim}\,\Sigma Y + e_b)_{A_2} = \langle \underline{\dim}\,\Sigma Y + e_b, e_z\rangle_{A_2} =$$
$$-\langle \underline{\dim}\,\Sigma Y + e_b, \underline{\dim}\,M\rangle_{A_1} = -\langle \underline{\dim}\,Y + e_b, \underline{\dim}\,Z\rangle_B =$$
$$-\langle \underline{\dim}\,Y, \underline{\dim}\,Z\rangle + \langle \underline{\dim}\,X, \underline{\dim}\,Z\rangle = \dim \mathrm{Hom}_{B_0}(\tau^{-}_{B_0}Z, Y) = 1.$$

Por lo tanto, M está en el tubo de R, esto es, el tipo de coextensión de Λ_0 sobre A_0 es $(n-2,2,2)$, donde $n\geq m$.

Supongamos ahora que $M = R$ y sea $A_2 = [R]A_1$. Como dim iny$_{A_1}R$

$= 1$ pues $\tau^{-}_{A_1} R = P_a R[2]$ (2.3, Lema 1), dim gl $A_2 = 2$. Como antes, q_{A_2} debe ser semipositiva. Sin embargo, $q_{A_2}(e_z - 2(\underline{\dim}\ \Sigma Y + e_b) < 0$ ya que en este caso

$$(e_z, \underline{\dim}\ \Sigma Y + e_b)_{A_2} = \dim \mathrm{Hom}_{B_0}(\tau^{-}_{B_0} X, Y) + \dim \mathrm{Hom}_{B_0}(X, X) = 2.$$

Finalmente, supongamos que $M = \tau_{A_0} R$. Con la notación introducida en la prueba del lema anterior, $M = \Sigma\tau^2_{B_0} T_1$. Sea $A_2 = [M]A_1$. Como dim $\mathrm{iny}_{A_1} M = 2$, dim gl $A_2 = 3$. Así, en este caso

$$(e_z, \underline{\dim}\ \Sigma Y + e_b)_{A_2} = (e_z, \underline{\dim}\ \Sigma Y)_{A_2} =$$
$$\langle \underline{\dim}\ \Sigma Y, e_z \rangle_{A_2} = - \langle \underline{\dim}\ \Sigma Y, \underline{\dim}\ M \rangle_{A_2} =$$
$$- \dim \mathrm{Hom}_{A_1}(\Sigma Y, M) + \dim \mathrm{Ext}^1_{A_1}(\Sigma Y, M) - \dim \mathrm{Ext}^2_{A_2}(\Sigma Y, M).$$

Veremos que $\mathrm{Ext}^2_{A_2}(\Sigma Y, M) = 0$. Ya que $A_2 = (([M]A_0)[R])[U]$, los proyectivos inescindibles de mod A_2 son los proyectivos inescindibles del álgebra cotubular doméstica $[M]A_0$, P_a y P_b. Como $\Sigma Y \in$ mod A y $\dim \mathrm{Hom}_A(P_a, \Sigma Y) = \dim \mathrm{Hom}_{B_0}(T_1, Y) = 1$, la cubierta proyectiva de ΣY en mod A_2 es de la forma $P_a \oplus P$ con $P \in$ proy $[M]A_0$. Consideremos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P_a \oplus P \longrightarrow \Sigma Y \longrightarrow 0$$

No es difícil ver que K debe ser $[M]A_0$-preproyectivo, por lo que $\mathrm{Ext}^2_{A_2}(\Sigma Y, M) = \mathrm{Ext}^1_{A_2}(K, M) = \mathrm{Ext}^1_{[M]A_0}(K, M) = 0$. Luego,

$$(e_z, \underline{\dim}\ \Sigma Y + e_b)_{A_2} = - \langle \underline{\dim}\ \Sigma Y, \underline{\dim}\ M \rangle_{A_2} =$$
$$- \langle \underline{\dim}\ \Sigma Y, \underline{\dim}\ M \rangle_{A_1} = - \langle \underline{\dim}\ Y, \underline{\dim}\ \tau^2_{B_0} T_1 \rangle_B =$$
$$\dim \mathrm{Ext}^1_{B_0}(Y, \tau^2_{B_0} T_1) = \dim \mathrm{Hom}_{B_0}(\tau_{B_0} T_1, Y) = 1.$$

Por lo tanto, $q_{A_2}(e_z + 2(\underline{\dim}\,\Sigma Y + e_b)) < 0$, lo cual es una contradicción pues q_{A_2} debe ser semipositiva por ser A_2 convexa en Λ.□

Teorema. Sean Λ_0 una coextensión tubular doméstica del álgebra mansa oculta A_0, R un A_0-módulo simple regular y $\Lambda = (\Lambda_0[R])[R]$. Si q_Λ es semipositiva entonces $A = A_0[R]$ es tubular doméstica, A_0 es de tipo $\tilde{D}_m$ con $m \geq 4$, R es de período $m-2$ en mod A_0, el tipo de coextensión de Λ_0 sobre A_0 es $(n-2,2,2)$ con $n \geq m$ y R y $\tau_{A_0} R$ son módulos corrayo en mod Λ_0. Además Λ es mansa.

Demostración: Sólo falta probar que Λ es mansa. Dada un álgebra mansa hereditaria B_0 de tipo $\tilde{D}_n$, existe un B_0-módulo coinclinado T tal que $\Lambda_0 = \mathrm{End}_{B_0}(T)$. Sea $\Sigma = D\mathrm{Hom}_{B_0}(-,T)$, entonces $R = \Sigma X$, donde X es un B_0-módulo simple regular de período $n-2$. Sea $B_1 = (B_0[X])[X]$, entonces existe un B_1-módulo coinclinado T' tal que $\Lambda = \mathrm{End}_{B_1}(T')$ y la teoría de torsión asociada a T' en mod Λ se escinde. Por lo tanto, Λ es mansa si B_1 lo es. A continuación veremos que B_1 es mansa.□

Lema. Sea B_0 el álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] 1 \arrow[dr] & & & & & m \\ & 3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & m-1 \arrow[urr] \arrow[drr] & & \\ 2 \arrow[ur] & & & & & m+1 \end{tikzcd}$$

con $m \geq 4$ y sea X un B_0-módulo simple regular de período $m-2$. El álgebra $B_1 = (B_0[X])[X]$ es mansa.

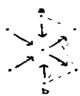
Demostración: Por (3.2, Lema 2), existen una extensión 2-tubular $C_0[Y]$ y un $C_0[Y]$-módulo inclinado T' tales que $B_1 = \mathrm{End}_{C_0[Y]}(T')$ y la teoría de torsión asociada a T' en mod B_1 se escinde. Por (3.2, Teo. 1), B_1 es mansa.□

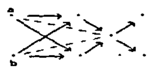
Aclaramos que si m=4, la demostración anterior sólo se aplica en el caso en que los dos simples regulares en la boca del tubo donde está X tengan vectores dimensión $\begin{smallmatrix}1&&1\\&1&\\1&&1\end{smallmatrix}$ y $\begin{smallmatrix}0&&0\\&1&\\0&&0\end{smallmatrix}$.

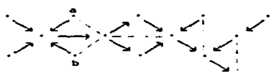
Corolario. Sean A_0, Λ_0, R y Λ como en el teorema. Si A_0 es de tipo $\tilde{D}_m$ con $m\geq 4$, el tipo de coextensión de Λ_0 sobre A_0 es $(n-2,2,2)$ con $n\geq m$ y R y $\tau_{A_0}R$ son módulos corrayo en mod Λ_0, de período m-2 en mod A_0 entonces q_Λ es semipositiva.

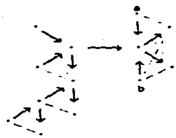
Demostración: Ya que $\tau_{A_0}R$ es un módulo corrayo en mod Λ_0, dim $\text{proy}_{\Lambda_0}R = 1$, de donde dim gl Λ = 2. De las pruebas del teorema y del lema se obtiene que $q_\Lambda \sim q_{B_1} \sim q_{C_0[Y]}$. Esta última forma es semipositiva ya que $C_0[Y]$ es 2-tubular.□

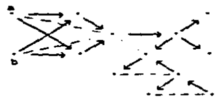
Ejemplos:

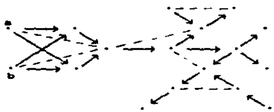


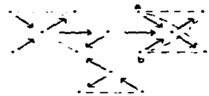


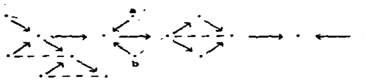


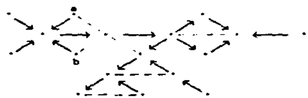












BIBLIOGRAFIA

[1] Auslander M., Platzek M. I. and Reiten I.: Coxeter functors without diagrams. Trans. Amer. Math. Soc. 250, 1-46 (1979).

[2] Auslander M. and Reiten I.: Representation theory of Artin algebras III. Comm. Alg. 3, 239-294 (1975).

[3] Baer D.: Wild hereditary Artin algebras and linear methods. Manuscripta math. 55, 69-82 (1986).

[4] Bautista R., Larrión F. and Salmerón L.: On simply connected algebras. J. London Math. Soc. (2), 27, 212-220 (1983).

[5] Bongartz K.: Algebras and quadratic forms. J. London Math. Soc. 28, 461-469 (1983).

[6] Bongartz K.: Critical simply connected algebras. Manuscripta math. 46, 117-136 (1984).

[7] Bongartz K.: A criterion for finite representation type. Math. Ann. 269, 1-12 (1984).

[8] Brenner S. and Butler M.C.R.: The equivalence of certain functors occurring in the representation theory of Artin algebras and species. J. London Math. Soc. 14, 17-32 (1976).

[9] Brenner S. and Butler M.C.R.: Generalization of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors. In Representation Theory II. Springer LNM 832, 103-169 (1980).

[10] Crawley-Boevey W.W.: On tame algebras and bocses. Proc. London Math. Soc. (3) 56, 451-483 (1988).

[11] Dowbor P. and Skowronski A.: On the representation type of locally bounded categories. Tsukuba J. Math. Vol. 10 No. 1, 63-72 (1986).

[12] Drozd J.: Tame and wild matrix problems. In Representation Theory II. Spinger LNM 832, 242-258 (1980).

[13] Dlab V. and Ringel C.M.: Indecomposable representations of graphs and algebras. Mem. Amer. Math. Soc. 173 (1976).

[14] Dlab V. and Ringel C.M.: Eigenvalues of Coxeter transformations and the Gelfand-Kirillov dimension of the preprojective algebra. Proc. Amer. Math. Soc. 83, 228-232 (1981).

[15] Gabriel P.: Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras. In Representation Theory I. Springer LNM 831, 1-71 (1980).

[16] Happel D. and Ringel C.M.: Tilted algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 274, 399-443 (1982).

[17] Happel D. and Vossieck D.: Minimal algebras of infinite representation type with preprojective component. Manuscripta math. 42, 221-243 (1983).

[18] Kerner O.: Tilting wild algebras. Por aparecer en J. London Math. Soc.

[19] Marmaridis N. and de la Peña J.A.: Quadratic forms and preinjective modules. Por aparecer en J. of Algebra.

[20] Kleiner M.: Partially ordered sets of finite type. Engl. trans.: J. Soviet Math. 23, 607-615 (1975).

[21] Nazarova L. A.: The representation of partially ordered sets of infinite type. Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat. 39, 963-991 (1975).

[22] Nazarova L. A. and Roiter A. V.: Representations of partially ordered sets. Engl. trans.: J. Soviet Math. 23, 585-607 (1975).

[23] de la Peña J. A.: Simply connected algebras which are minimal not tame concealed. Publicaciones Preliminares del Instituto de Matemáticas No. 132 (1987).

[24] de la Peña J. A.: On the representation type of one point extensions of tame concealed algebras. Manuscripta math. 61, 183-194 (1988).

[25] de la Peña J. A.: Algebras with hypercritical Tits form. Por aparecer en Topics in Algebra. Banach Center Pub. Series Vol. 26 (1990).

[26] de la Peña J. A.: Functors preserving tameness. Por aparecer en Fundamenta Math.

[27] de la Peña J. A. and Tomé B.: Iterated tubular algebras. Por aparecer en Journal of Pure and Applied Algebra.

[28] Reiten I. and Riedtmann C.: Skew group algebras in the representation theory of Artin algebras. J. Alg. 92, 224-282 (1985).

[29] Ringel C. M.: Tame algebras. In Representation Theory I. Springer LNM 831, 137-287 (1980).

[30] Ringel C. M.: Tame algebras and integral quadratic forms. Springer LNM 1099 (1984).

[31] Rotman J.: An introduction to homological algebra. Academic Press (1979).