13

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

INGENIERIA

LA CLOTOIDE O ESPIRAL DE EULER COMO CURVA DE TRANSICION

T E S I S

Que para obtener el Título de:

INGENIERO TOPOGRAFO Y GEODESTA

P r e s e n t a :

Héctor Nolasco Chávez

MEXICO, D. F. 1986

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
60-1-119

Señor NOLASCO CHAVEZ HECTOR
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor Ing. Carlos Cañón Amaro, para que lo desarrolle como TESIS para su Examen Profesional de la carrera de INGENIERO TOPOGRAFO Y GEODESTA.

"LA CLOTOIDE O ESPIRAL DE EULER COMO
CURVA DE TRANSICION"

I. GENERALIDADES
II. ECUACIONES DE LOS ELEMENTOS NECESARIOS PARA EL TRAZO DE LA CLOTOIDE Y DEDUCCION DE LOS MAS IMPORTANTES.
III. LA CURVA CIRCULAR SIMPLE CON CLOTOIDES SIMETRICAS
IV. OTRAS FORMAS DE UTILIZAR LA CLOTOIDE COMO CURVA DE ENLACE
V. TRAZO DE CURVAS CIRCULARES SIMPLES CON CLOTOIDES SIMETRICAS

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento con lo especificado por la Ley de profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, a 20 de junio de 1986.
EL DIRECTOR

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

OARCH/RCCH/ragg.

I N D I C E .

Capítulo Página

Capítulo | Página

Capítulo Página

P R O L O G O

Cuando se está realizando el estudio topográfico de una vía de comunicación como lo son las carreteras y los ferrocarriles, especialmente en lo que se refiere al proyecto realizado en el gabinete, tenemos que la vía de comunicación consta de varios tramos rectos, "tangentes", con diferentes direcciones, las cuáles se tienen que unir, esta unión se realiza mediante una curva para evitar que el vehículo pase de una tangente a otra con cambios bruscos de dirección.

La curva circular es la más sencilla que puede usarse, pero tiene la gran desventaja de que la fuerza centrípeta es aplicada bruscamente cuando los vehículos salen de las tangentes produciendo en el vehículo que circula por estas vías una sacudida violenta; esto se evita con la introducción entre las tangentes y la curva circular de unas curvas que tienen la particularidad de permitir reducir gradualmente el radio de curvatura entre las tangentes y el arco circular, logrando con esto la aplicación gradual de la fuerza centrípeta; estas curvas son las llamadas curvas de transición.

El objeto de este trabajo es tratar de mostrar algunas de las causas para el uso de las curvas de transición en el trazo de carreteras, haciendo especial enfásis en la llamada curva -

clotoide.

También se pretende mostrar y corregir uno de los errores más comunes encontrados al estudiar este tema en los libros de Topografía, de vías de comunicación, y en general en los que hablan sobre él y es el de utilizar los términos fuerza y aceleración centrífuga en lugar de fuerza y aceleración centrípeta que como se muestra deberían de ser los correctos.

Se trata de sintetizar en este trabajo, acción muy vanidosa de mi parte, las fórmulas más comunmente usadas para el trazo de este tipo de curvas, la deducción de las más importantes y la simbología generalmente usada en caminos y en ferrocarriles.

En el trazado de la clotoide se explica brevemente el trazo por deflexiones y por coordenadas rectangulares.

Se muestran también los elementos de la curva circular simple con espirales de transición y los de la curva circular simple con espirales asimétricas.

C A P I T U L O 1.-

G E N E R A L I D A D E S.

1.1 Introducción.

Cuando un vehículo pasa de un tramo en tangente a otro en curva circular, las fuerzas que actúan sobre este sufren alteración como se verá más adelante, por lo tanto este cambio lo requiere hacer en forma gradual, tanto por lo que se refiere - al cambio de dirección como a la sobreelevación y a la ampliación necesarias. Para lograr esto se utilizan las curvas de - transición.

Al pasar el vehículo de una alineación recta a una curva, recibe otra fuerza aparte de las que van actuando sobre él que es la que hace que este pueda seguir la curva y no se "salga - por la tangente", esta fuerza es la fuerza centrípeta.

1.2 El movimiento circular uniforme.

En realidad cuando un vehículo circula sobre una curva lo que está realizando es un movimiento circular uniforme, que es el descrito por un móvil cuya trayectoria es una circunferencia, en el cuál el cuerpo describe dicha trayectoria con velocidad angular constante, es decir que a intervalos iguales de tiempo recorre arcos iguales.

Cabe mencionar que este movimiento circular es uniforme en cuanto al valor absoluto de la velocidad más no en cuanto al sentido vectorial de esta ya que las distancias se recorren a lo largo de una circunferencia y, por lo tanto, la dirección de dichas distancias no es constante sino que varía de punto a punto, esta dirección del vector velocidad es siempre tangente a la circunferencia y, por lo tanto, perpendicular al radio de la misma.

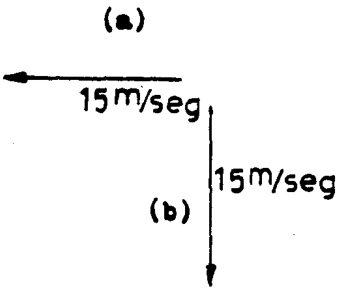


Fig. No. 1

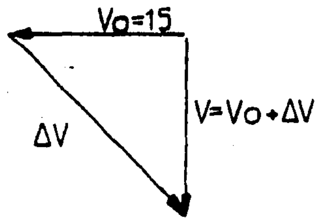


Fig. No. 2

Ejemplo:

Consideremos un automóvil que marcha a una velocidad de 15 m/seg. hacia el Oeste, y luego toma una curva y continúa a 15 m/seg. pero ahora viajando hacia el Sur.

Los vectores de velocidad respectivos están representados en la Fig. No. 1 (a) y (b) y en la Fig. No. 2.

Evidentemente el vector velocidad ha sido cambiado y debemos determinar el vector velocidad ΔV para que sumado a Vo - (vector velocidad original) nos de el vector velocidad final - (V); esto se logra mediante la expresión que nos permite conocer la aceleración media, que es por definición:

$$a = \frac{\Delta V}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

1.3 La fuerza centrípeta.

Ahora consideremos un objeto que se mueve en una circunferencia (Fig. No. 3) y veamos lo que sucede cuando este se mueve de un punto A de la circunferencia a un punto B de la - misma.

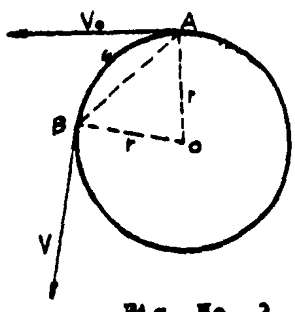


Fig. No. 3

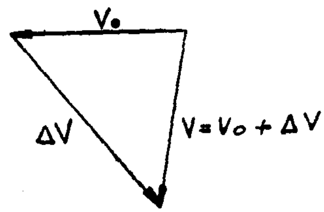


Fig. No. 4

Puesto que la velocidad del objeto ha cambiado en dirección pero no en magnitud, el cambio de velocidad es como se muestra en la Fig. No. 4 y la aceleración del objeto será:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Donde Δt = tiempo invertido por el objeto al desplazarse - de A a B.

Si tomamos el límite cuando Δt se aproxima a cero la letra a simbolizará la aceleración instantánea.

Si V es la velocidad del objeto y s la distancia recorrida (Fig. No. 3), el tiempo invertido es:

$$\Delta t = \frac{s}{V} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Sustituyendo en la ecuación (2)

$$a = \frac{V \Delta V}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

De las figuras Nos. 3 y 4.

El triángulo OAB y el triángulo de la fig. no. 4, son semejantes ya que:

$$\overline{BO} \perp V \qquad y \qquad \overline{AB} \perp \Delta V$$

y por lo tanto podemos escribir que:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\overline{AB}}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

pero si $\Delta t \to 0$, es decir, si suponemos que A y B están -

lo más cerca posible, entonces el arco $\widehat{AB}$ tiene aproximadamente la misma longitud que la cuerda que une a A y B o sea que $s = \widehat{AB} \doteq \overline{AB}$, y entonces $\Delta V = \frac{sV}{r}$, si $\Delta t \longrightarrow 0$ sustituyendo en la ecuación 4:

$$a = \frac{V\left(\frac{sV}{r}\right)}{s} = \frac{V^2 s}{sr} = \frac{V^2}{r} = a \dots\dots\dots (6)$$

que es la aceleración centrípeta y finalmente de la segunda Ley de Newton:

$$F = ma \quad ; \quad F = \frac{mV^2}{r} \dots\dots\dots\dots\dots (7)$$

de donde si w es el peso del vehículo y si

$$w = mg \quad ; \quad m = \frac{w}{g}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad, se tiene:

$$F = \frac{wV^2}{gr} \dots\dots\dots\dots\dots (7')$$

Donde:

F = fuerza centrípeta (en Kgs.)

w = peso del vehículo (en Kgs.)

V = velocidad del vehículo (en m/seg.)

g = aceleración de la gravedad (en m/seg.^{2})

r = radio de la curva (en m)

La expresión anterior nos permite conocer el valor de la fuerza centrípeta (del latín centrum, centro y petere, ir, dirigir), que es la que origina el movimiento circular uniforme y como su nombre lo indica es una fuerza dirigida hacia el centro de la circunferencia.

1.4 Motivos para el uso de las curvas de transición.

1.4.1 Aplicación gradual de la fuerza centrípeta.

Como se puede observar la expresión de la fuerza centrípeta está en función de el radio de la curva (r) entre otros elementos, lo que implica que si un cuerpo en movimiento cambia instantáneamente de una trayectoria en línea recta a otra en una curva de radio finito, la fuerza centrípeta (F) será aplicada instantáneamente y el cuerpo sobre el cuál se aplica recibirá una sacudida. Pero si el radio de curvatura se va reduciendo gradualmente desde el infinito en la línea recta hasta el valor (r), la magnitud de F (fuerza centrípeta) que actúa sobre el cuerpo aumentará gradualmente y la sacudida que recibirá será muy ligera.

1.4.2 Efectos psicológicos en el conductor.

Tampoco se debe olvidar el efecto psicológico que afectaría al conductor al pasar de un alineamiento en línea recta a - uno en curva, ya que una unión de esta clase, sin arco de transición, aparece como un codo más o menos marcado, según la magnitud del radio de curvatura, dentro de la perspectiva visual - del conductor, y un codo detiene la vista en su marcha y obliga al conductor a disminuir la velocidad ante la aparente dificultad.

1.4.3 <u>Conservación del ancho efectivo del camino</u>.

Si consideramos a un vehículo que se va aproximando a una curva del camino, el conductor, en el momento de entrar a esta, o después, intuitivamente, por su propia comodidad o sentido de la seguridad, girará el volante gradualmente desde la posición normal a la máxima desviación, reduciendo así la sacudida producto de la fuerza centrípeta, así como el consiguiente vaivén resultante y tendencia al deslizamiento, reduciendo así la probabilidad de volcarse.

Con esta vuelta gradual del volante el vehículo estará realizando su propia curva de transición, y si la curva consiste - en un arco de círculo que arranca de una tangente, el vehículo que circula por el encintado interior tenderá a salirse del camino, y el que circula por el encintado exterior tenderá a "cortar" la curva, dando como resultado que el ancho efectivo del -

camino quede considerablemente reducido, pero si colocamos curvas de transición entre el principio y el final de la curva circular, los conductores conciliarán el cambio de dirección que corresponde al camino con el de la marcha y mantendrán así el ancho efectivo de este, trayendo consigo una mayor seguridad para ellos.

1.5 Curvas de transición.

1.5.1 Definición.

Una curva de transición es aquella que liga una tangente con una curva circular, teniendo como característica principal que en su longitud se efectúa, de manera continua, el cambio en el valor del radio de curvatura, desde infinito para la tangente hasta el que corresponde para la curva circular.

1.5.2 Condiciones geométricas que deben de cumplir.

Lo más importante en una curva de transición, es que el cambio en el radio de curvatura se realice de una manera continua, precisamente. Es decir, que vaya decreciendo desde el infinito para la tangente hasta el valor mínimo preciso en la curva circular, siendo este valor el radio de dicha curva.

Es decir, si se observa la ecuación (6) que nos permite obtener el valor de la aceleración centrípeta, podemos ver como esta es inversamente proporcional al radio de curvatura para - una velocidad determinada, entonces resulta, que la transición ha de tener un radio de curvatura inversamente proporcional a - su desarrollo desde el punto de partida.

Esto quiere decir que si la aceleración centrípeta de un - vehículo que se mueve a velocidad uniforme vale $a = \frac{V^2}{r}$, es- ta variará desde cero para la tangente hasta $\frac{V^2}{Rc}$ para la cur va circular de radio Rc.

Por lo tanto la curva de transición debe proyectarse de - tal manera que la variación de la curvatura, y, por lo tanto, - la variación de la aceleración centrípeta sean constantes a lo largo de ella.

1.6 La clotoide o espiral de Euler.

1.6.1 Deducción de su expresión.

Si la longitud de la curva de transición es Le entonces la variación de la aceleración centrípeta por unidad de longi- tud será $\frac{V^2}{RcLe}$. En un punto cualquiera de la curva situado - a una distancia L del origen de la transición, el valor de la aceleración centrípeta será $\frac{V^2L}{RcLe}$ y si la curvatura en el - punto considerado es $\frac{1}{R}$ entonces el valor de la aceleración centrípera será también $\frac{V^2}{R}$, entonces igualando:

$$a = \frac{V^2 L}{Rc\ Le} = \frac{V^2}{R}$$

y por lo cuál: $RL = RcLe$

y como Rc y Le son de una magnitud constante para una curva determinada entonces podemos escribir que:

$$RcLe = K^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

donde K será una magnitud constante.

Entonces: $$RL = K^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8')$$

La expresión anterior es la ecuación de la curva conocida como clotoide (del gr. klothó, hilandera y de eidos, es, semejante a, parecido a) o espiral de Euler; que cumple con la condición de que el producto del radio en un punto de la curva determinado y la longitud del origen a ese punto es siempre constante, por otra parte al aumentar o reducir el parámetro K todas las medidas lineales varian en la misma proporción, permaneciendo los elementos que determinan su forma sin cambio alguno; lo que significa que todas las clotoides tienen la misma forma, y únicamente difieren entre si por su longitud, esto quiere decir que todas las clotoides son semejantes entre sí. (Fig. No. 5)

1.6.2 <u>Definición</u>.

Por definición, la clotoide o espiral de Euler, es una cur

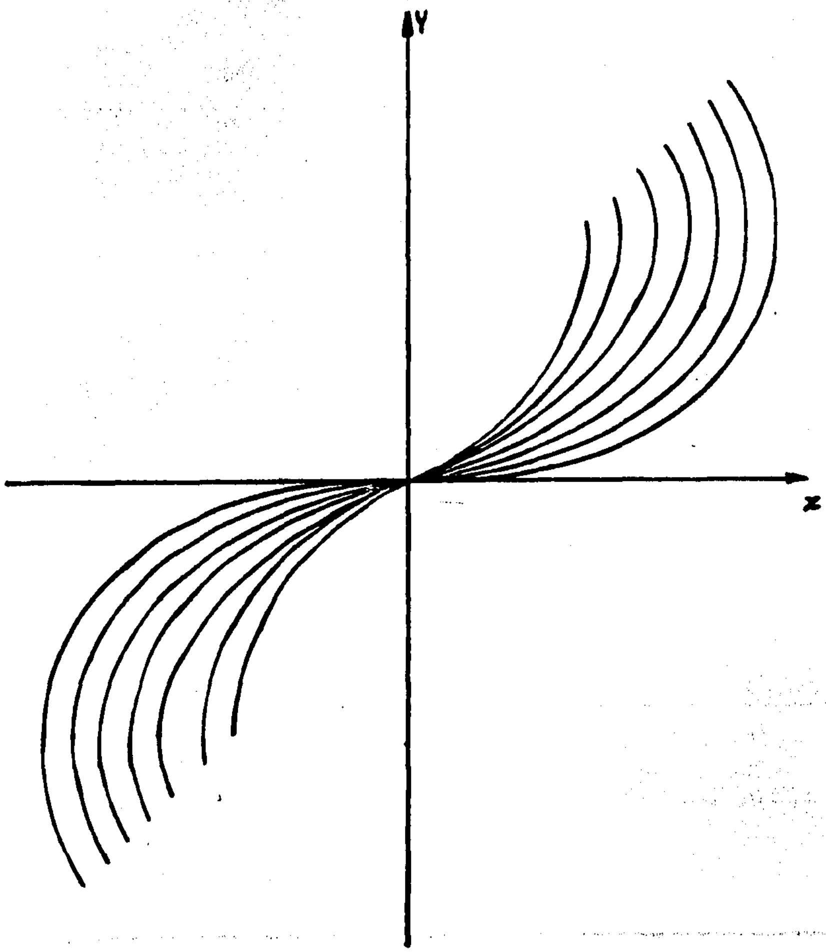


Fig. No. 5 Conjunto de clotoides.

va tal que los radios de curvatura de cada uno de sus puntos están en razón inversamente proporcional a los desarrollos de sus respectivos arcos, es decir, a las longitudes de la curva entre el origen de la transición y cada uno de estos puntos, siendo K^2 la constante de proporcionalidad.

La figura No. 6 nos muestra una vista de conjunto de la clotoide, en ella se observa que está compuesta por dos espirales que se enrollan alrededor de los puntos asintóticos J_1 y J_2.

1.6.3 Ventajas al utilizar la clotoide como curva de transición.

Esta es la curva más apropiada para efectuar transiciones, ya que para conseguir una marcha regular y cómoda se necesita que el radio de la curva vaya decreciendo en una forma inversamente proporcional al desarrollo de dicha curva; desde su punto de partida, cumpliendo esta curva con dicha condición.

1.7 Otras curvas que se pueden utilizar como transiciones.

Existen otro tipo de curvas que pueden servir para el mismo fin, cuando el ángulo de deflexión (Θe) es pequeño, como la parábola cúbica, cuya curvatura es proporcional a la proyección de la longitud de la tangente en su origen, o la -

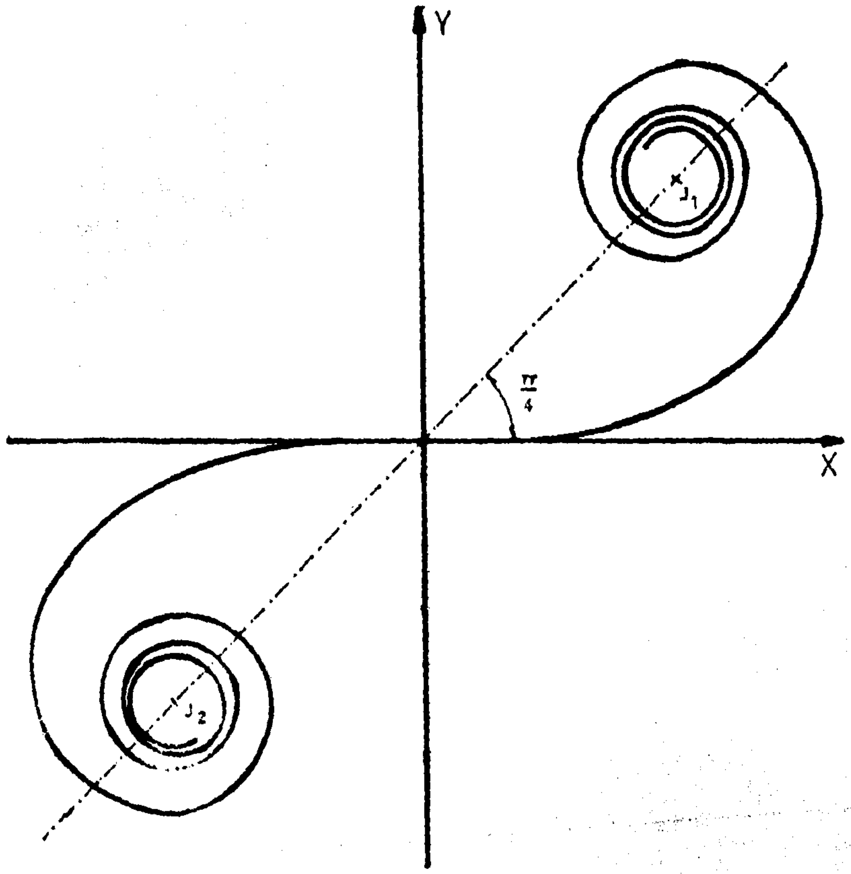


Fig. No. 6 La clotoide.

Lemniscata de Bernoulli, cuya curvatura es proporcional a la - distancia polar. (Fig. No. 7)

1.8 Las curvas espirales.

Existen también otras curvas llamadas curvas compuestas de transición o espirales que son las curvas compuestas de arcos circulares de longitudes constantes, cuyos grados van aumentando gradualmente, desde la tangente hasta la curva circular simple, de cero grados hasta el de la curva circular simple. (Fig No. 8)

En el campo no se trazan realmente estas curvas compuestas sino unos polígonos de lados constantes inscritos en ellas.

1.9 Ventajas al utilizar curvas de transición.

Algunas de las ventajas que se obtienen al utilizar curvas de transición son:

a) En una curva de transición, en la que la aceleración - centrípeta va aumentando gradualmente, la sensación - del conductor le informará perfectamente cuando va demasiado aprisa y así puede este reducir la velocidad a medida que disminuye el radio de curvatura.

b) La fuerza centrípeta varía gradualmente al entrar y sa

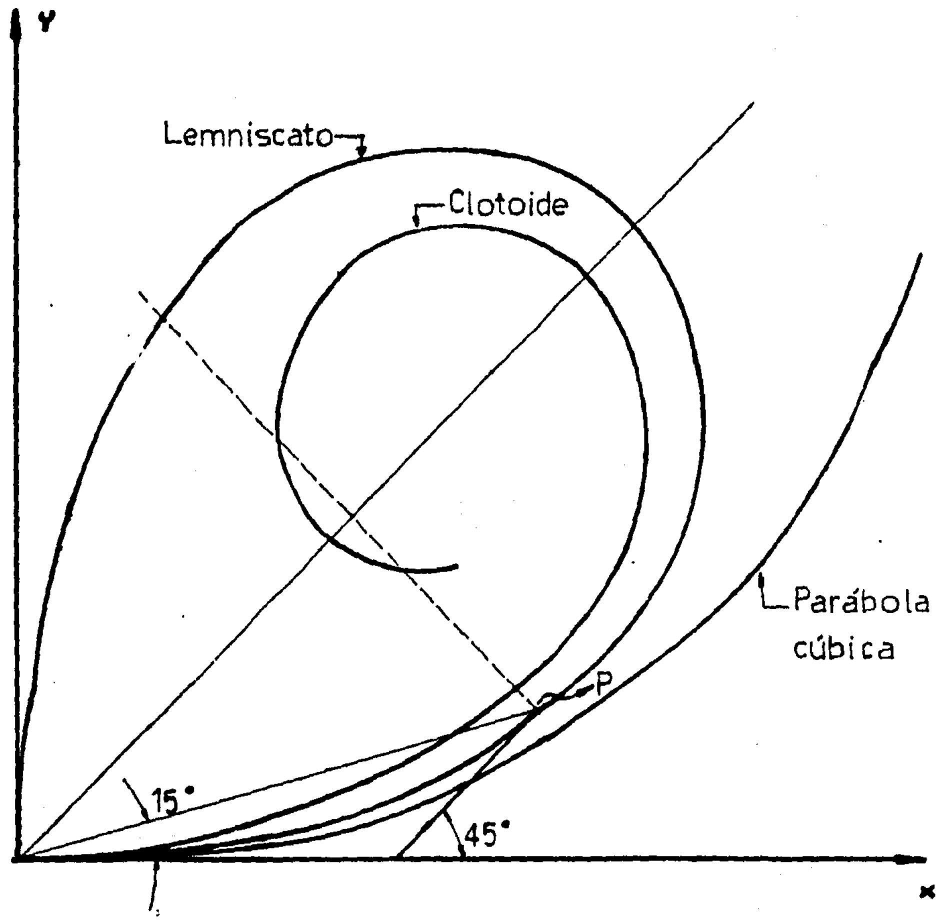


Fig. No. 7 Curvas de transición.

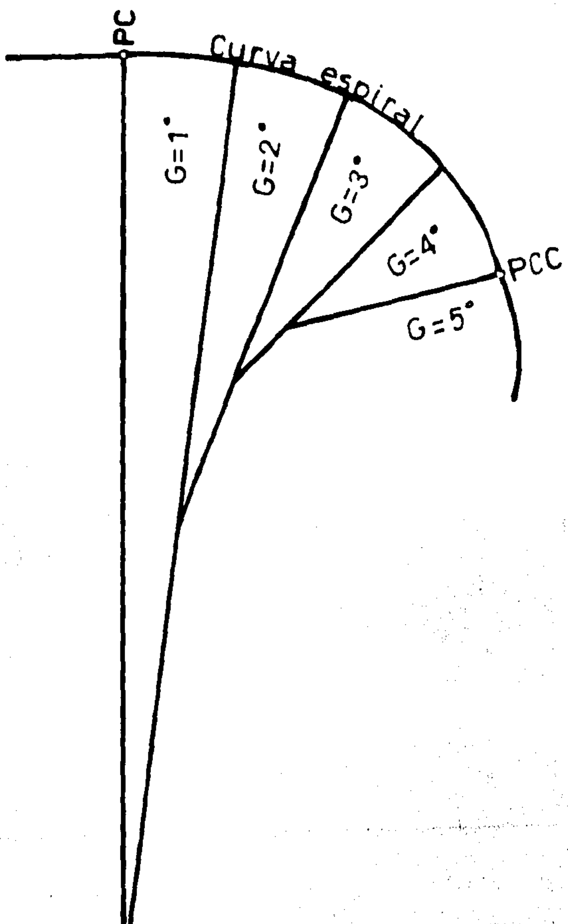


Fig No. 8 Curva espiral.

lir de una curva lo que reduce la invasión del carril próximo aumentando la seguridad del camino.

c) La longitud de la curva de transición provee un arreglo conveniente para aumentar gradualmente el peralte e ir aplicando asi poco a poco la fuerza centrípeta.

d) Cuando existe la necesidad de ensanchar la carpeta asfáltica en curva, la curva de transición facilita el ensanchamiento gradual.

e) Se mejora la apariencia del camino en lo referente al alineamiento como a la sobreelevación.

1.10 La fuerza y la aceleración centrífuga.

En esta parte mencionaré el porqué utilizo el término fuerza centrípeta y no fuerza centrífuga, asi como también con el término aceleración centrípeta y no aceleración centrífuga, que son los comunmente usados en la mayoría de los libros que hablan sobre este tema.

Considero que el peralte con que se construyen las curvas en las carreteras, en los ferrocarriles, etc.; es más que nada para ayudar a los conductores a tomar más cómodamente las curvas, ya que si la carretera está inclinada proporciona una fuerza centrípeta adicional que junto con las fuerzas de fricción de las llantas del vehículo con el pavimento nos proporcionan la fuerza que es la que hace que el vehículo siga un movimiento circular uniforme y, por lo tanto esta fuerza es la que se tiene que ir aplicando gradualmente si se quiere evitar que el vehículo sufra una sacudida violenta.

Ahora, se sabe, que en movimiento circular uniforme la aceleración de el móvil siempre va a estar dirigida hacia el centro de la circunferencia y de aqui que sea la aceleración centrípeta (del lat. centrum, centro y petere, ir, dirigir) y no la aceleración centrífuga (del lat. centrum, centro y fugere, huír) la que se tiene que ir aplicando también gradualmente.

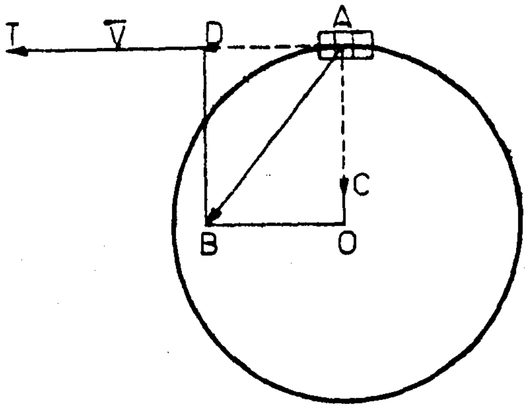


Fig. No. 9

En efecto, supongamos que en un instante dado el móvil A, cuya velocidad, como se sabe es tangente a la circunferencia, tenga una aceleración dirigida, por ejemplo, según la línea $\overline{AB}$ (Fig. No. 9).

Si se descompone dicha aceleración en dos componentes una $\overline{AC}$ en la dirección $\overline{AO}$ del radio de la circunferencia y la o tra en la dirección de la tangente $\overline{AT}$ a la circunferencia en el punto A (componente $\overline{AD}$), podemos observar que el vector $\overline{AD}$ como está en la misma dirección que el vector velocidad $\overleftarrow{V}$ no puede hacer otra cosa que sumarse a esta y aumentar en cada segundo la velocidad con que el móvil sigue la curva, pero entonces el valor absoluto de la velocidad no sería constante y por lo tanto el movimiento circular ya no sería uniforme.

En consecuencia para que el movimiento sea de este tipo, - dicha aceleración tangencial debe de ser nula.

Por lo tanto de las dos componentes del vector aceleración $\overline{AB}$, sólo queda la $\overline{AC}$, es decir, la dirigida hacia el centro de la circunferencia, y por lo tanto corrobora lo dicho anteriormente.

Además, la fuerza centrífuga más que una fuerza es una "au sencia" de la fuerza centrípeta por o en la persona que la - sufre.

En realidad la "fuerza" que sentimos nos lanza hacia afuera cuando vamos en un automóvil y este toma una curva, no es - más que un efecto de la ley de inercia, y es comparable con el que sienten los pasajeros de un autobús al ser lanzados hacia adelante cuando el vehículo frena bruscamente.

En este caso el pasajero cae hacia adelante porqué, según la primera Ley de Newton, continúa en su movimiento uniforme - rectilíneo mientras que el autobús es accionado por una fuerza (el frenazo) hacia atrás.

Análogamente, la persona que va en el automóvil "cae" hacia afuera de la curva porque no participa del frenazo hacia - adentro, es decir, de la fuerza centrípeta que afecta al automóvil, solo que en este caso se acostumbra decir que lo hace - debido a una "anti-fuerza centrípeta", es decir, a una fuerza centrífuga.

1.11 <u>Peralte o sobreelevación</u>.

Como se mencionó anteriormente una de las causas para el - uso de las curvas de transición es la aplicación gradual de la sobreelevación.

Esta sobreelevación o peralte con que se construyen las - curvas es necesario, ya que si la carretera está completamente horizontal, la única fuerza centrípeta es la fricción, ya que la reacción del suelo sobre el vehículo es vertical.

Pero si la carretera está inclinada un ángulo determinado (α), (ver figura No. 10) la reacción del piso que, como se - sabe, es siempre perpendicular a él, puede descomponerse en -

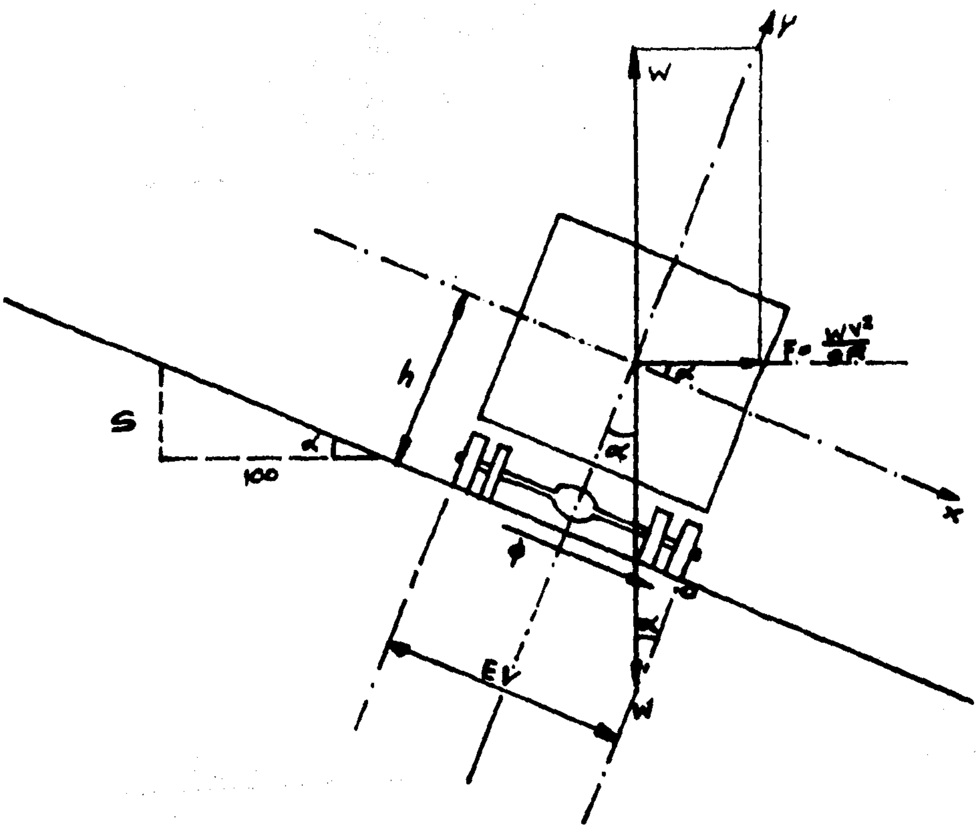


Fig. No. 10 Peralte o sobreelevación.

dos componentes: una vertical que equilibra el peso del vehículo, y otra horizontal que es la que proporciona la fuerza centrípeta adicional, de tal manera que unida a la producida por la fricción permita tomar la curva con la facilidad y comodidad requeridas. También podemos observar que aunque el móvil se mueva a lo largo de la curva con una velocidad angular constante la fuerza centrípeta es una fuerza no equilibrada.

En efecto, de la segunda Ley de Newton podemos ver que - $F = ma$ y como $F \neq 0$ entonces m y a deben de ser diferentes de cero también.

La aceleración predicha anteriormente debe tener la misma dirección y sentido que la fuerza y por lo tanto, debe estar - dirigida hacia el centro del círculo, esta aceleración es la - aceleración centrípeta y su valor como ya se vió es $a = \frac{V^2}{R}$

1.11.1 <u>Estabilidad en curvas</u>.

Un vehículo es estable cuando no tiene la tendencia a salirse de la trayectoria que le fija el conductor por medio del volante.

La inestabilidad del vehículo procede generalmente de las fuerzas transversales a que está sujeto, ya sea por asimetrías internas tales como carga mal distribuida, neumáticos desinflados y mecanismos de suspención defectuosos, o bien cuando la -

fuerza centrípeta es mayor que la necesaria para mantener el vehículo en la trayectoria circular.

La inestabilidad debido a la fuerza centrípeta puede manifestarse de dos maneras: por deslizamiento o por volcamiento. Cuando las fuerzas que tienden a hacer deslizar el vehículo son mayores que las fuerzas que mantienen al vehículo en su trayectoria, el vehículo desliza; cuando la resultante de las fuerzas que actúan sobre el vehículo sale fuera del polígono formado por los puntos de contacto de las ruedas con el pavimento, el vehículo vuelca.

1.11.2. Cuantía del peralte o sobreelevación.

Existen varios métodos para la determinación del peralte, algunos de ellos son los siguientes:

a) Conociendo el radio de la curva, la velocidad (dependiendo del tipo de camino) promedio, así como el peso del vehículo podremos obtener el valor de la fuerza centrípeta.

$$F = \frac{wV^2}{gR}$$

De la figura No. 10 podemos observar que:

Tan α = sobreelevación = S

$$S = \frac{\frac{wV^2}{gR}}{w} = \frac{wV^2}{wgR} \quad ; \quad S = \frac{V^2}{g\,R} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Donde:

S = sobreelevación = tan α

V = velocidad a lo largo de la curva

R = radio de la curva

g = aceleración debida a la gravedad

b) Considerese un vehículo que se mueve con una velocidad V (m/seg) sobre una curva horizontal de radio r que forma un ángulo alfa con la horizontal (ver figura No. 10). Las fuerzas que actúan sobre el vehículo son el peso w(Kg.), la fuerza centrípeta F (Kg) y la fuerza de fricción entre llantas y pavimento ϕ (Kg.)

La condición necesaria y suficiente para que no se produzca el vuelco es que el momento del peso respecto al eje en el punto O sea menor que el momento de la fuerza centrípeta respecto al mismo eje. Si el vehículo tiene un entrevía $\overline{EV}$ y la altura de su centro de gravedad es h, se tendrá:

$$fX = w\,\text{sen}\,\alpha + F\cos\alpha = (w\tan\alpha + F)\cos\alpha$$

$$fY = F\,\text{sen}\,\alpha - w\cos\alpha = (-w + F\tan\alpha)\cos\alpha$$

$$\sum Mo = fY\,\frac{\overline{EV}}{2} + fXh = 0 \quad ; \quad fX\,h = -fY\,\frac{\overline{EV}}{2}$$

$$h(w\tan\alpha + F) = \frac{\overline{EV}}{2}\,(w - F\tan\alpha)$$

despejando:

$$\tan\alpha = \frac{w\,\frac{\overline{EV}}{2} - hP}{hw + P.\frac{\overline{EV}}{2}} = S$$

Si $P = ma$; $a = \frac{V^2}{R}$; $m = \frac{w}{g}$

$$S = \frac{gR\,(\overline{EV}) - 2hV^2}{2gRh + V^2\,(\overline{EV})} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9')$$

Si el radio y la sobreelevación están fijos la velocidad máxima de seguridad para que no ocurra volcamiento será:

$$V = \sqrt{\frac{gR\,(\overline{EV}) - 2gRhS}{S\,(\overline{EV}) + 2h}}$$

La condición necesaria y suficiente para que el vehículo no se deslice al transitar por la curva es:

$$fX = 0$$

entonces

$$fX + \emptyset = 0$$

Donde:

$\emptyset = \mu\,.w.Y$ ó $\emptyset = \mu\, w \cos\alpha$

Siendo μ el coeficiente de fricción lateral.

Como el valor de fX ya se definió, se tiene:

$$(\,w \tan\alpha + P\,)\cos\alpha + \mu\, w \cos\alpha = 0$$

pero:

$$F = \frac{wV^2}{gR}$$

por lo cuál:

$$w\tan\alpha + \frac{wV^2}{gR} + \mu w = 0$$

Expresando la velocidad en Km/h y sustituyendo a g por su valor:

$$S = 0.00785 \frac{V^2}{R} - \mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9'')$$

Si el radio, la sobreelevación y el coeficiente de fricción lateral están fijos, la velocidad máxima segura para que no exista deslizamiento será:

$$V = \sqrt{\left(\frac{S + \mu}{0.00785}\right) . R}$$

1.12 Utilización de la Clotoide como curva de enlace.

La clotoide puede ser empleada para enlaces muy diversos, tales como:

a) La curva de transición: es un arco de clotoide desde el radio ∞ (unión a una recta) hasta el radio del arco circular siguiente. (Figura No. 11)

b) <u>La clotoide de vértice</u>: representa la transición entre dos rectas de direcciones distintas. Se compone de dos curvas clotoides con el mismo radio de curvatura y tangente común en su punto de contacto o de enlace. (Figura No. 12)

c) <u>La curva de inflexión</u>: es una curva en S , que une a - dos círculos de curvaturas opuestas, sin segmento rectilíneo intermedio. Consta de dos ramas de clotoide, cuyo punto de origen es común, siendo en este punto el radio ∞ y la tangente es común para ambos. (Figura No. - 13).

d) <u>La ovoide</u>: es una sucesión círculo-clotoide-círculo, - siendo del mismo sentido la curvatura de las tres curvas. El arco de clotoide tiene en los puntos de contacto con los círculos, tangentes comunes y radios iguales respectivamente. (Figura No. 14).

e) <u>La serie de clotoides</u>: es una sucesión de arcos de clotoide, en los que, siendo distintos los parámetros de - cada uno, las curvaturas están dirigidas y son crecientes en el mismo sentido, con tangentes comunes y la misma curvatura, para cada dos arcos sucesivos, en su punto de contacto. (Figura No. 15).

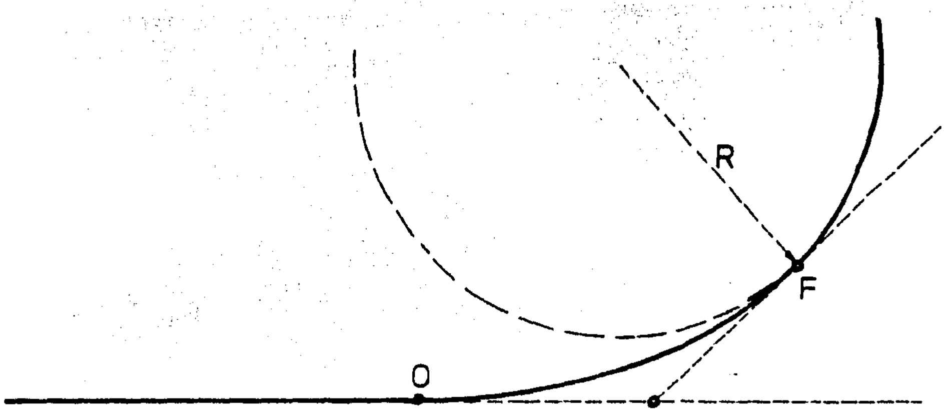


Fig. No. 11 Clotoide como curva de transición.

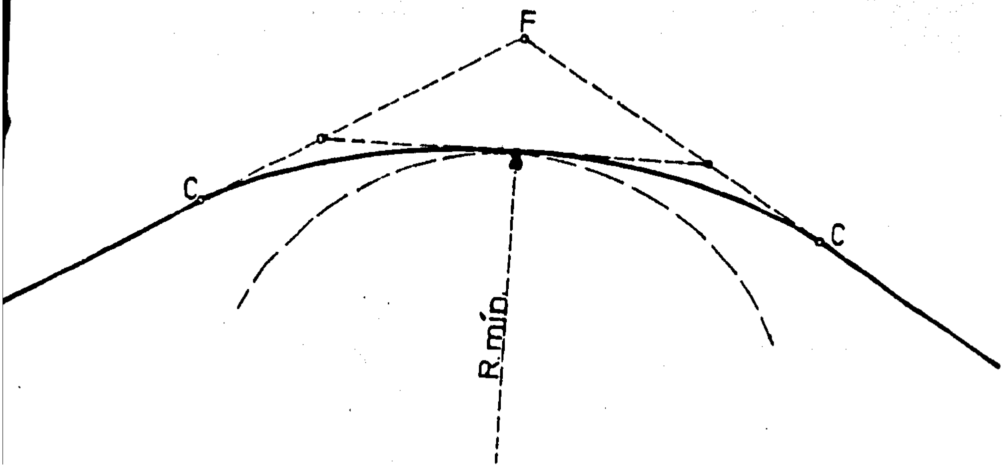


Fig. No. 12 Clotoide de vértice.

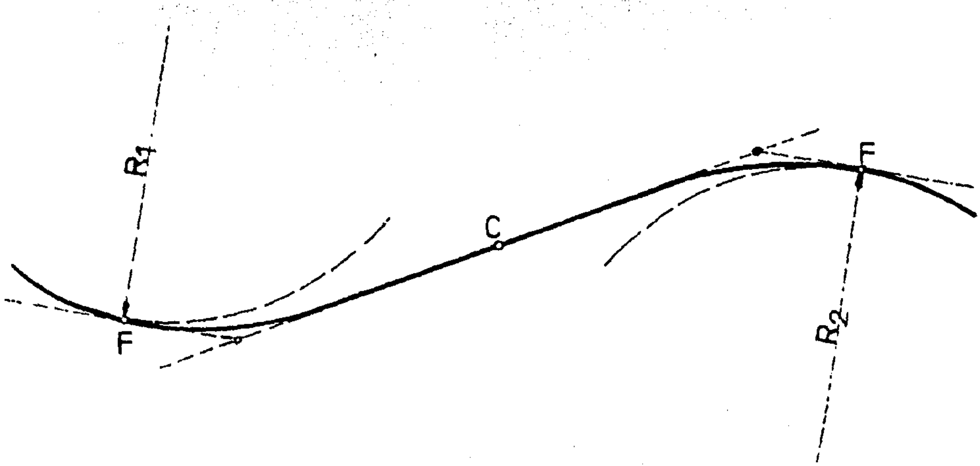


Fig. No. 13 Clotoide como curva de inflexión.

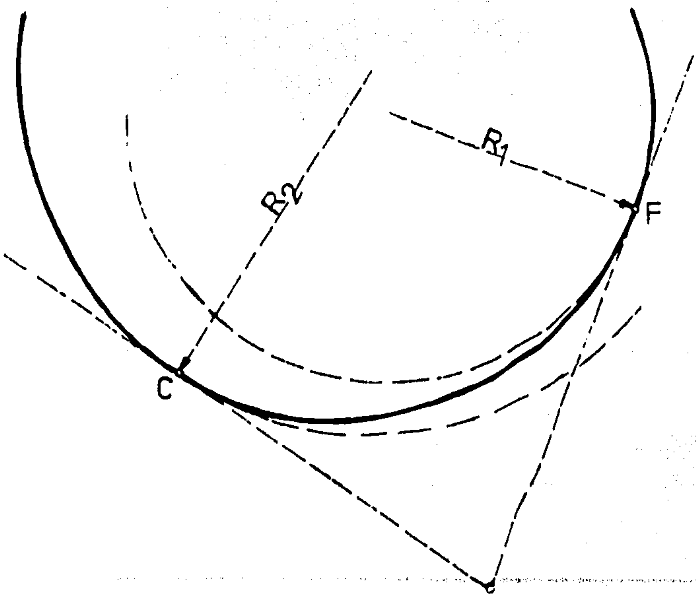


Fig. No. 14 Clotoide como ovoide.

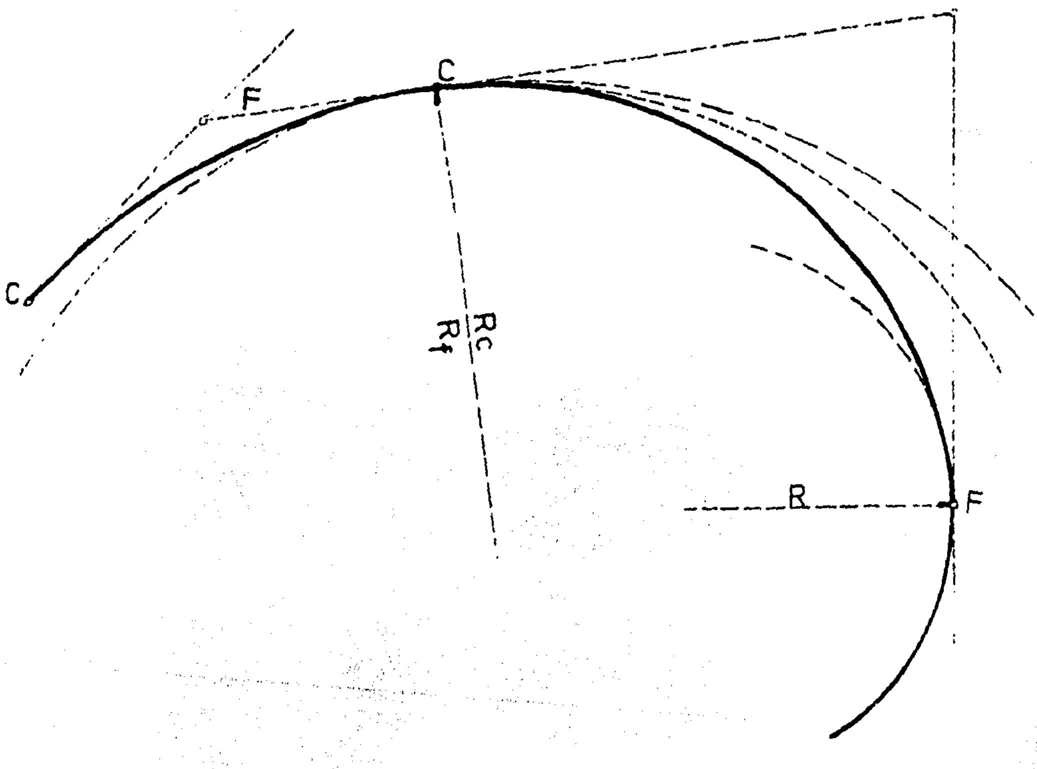


Fig. No. 15 Serie de clotoides.

C A P I T U L O 2.-

2. ECUACIONES DE LOS ELEMENTOS NECESARIOS PARA EL TRAZO DE LA CLOTOIDE Y DEDUCCION DE LOS MAS IMPORTANTES.

2.1 Elementos de la espiral de Euler o clotoide.

Los elementos de la clotoide o espiral de Euler, son los siguientes (ver figura No. 16), haciendo la aclaración que se utiliza la simbología generalmente usada en caminos, aunque aquí se coloca una columna con los símbolos usados generalmente en ferrocarriles para los mismos elementos.

S I M B O L O G I A.

CAMINOS	FERROCARRILES	
P	P	= Punto cualquiera sobre la clotoide
O	O	= Punto donde se inicia la clotoide
10	10	= Punto donde termina la clotoide
θe	τ	= Deflexión total de la clotoide
θp	τp	= Deflexión de la clotoide en un punto P
$\phi' c$	ω	= Angulo de la cuerda larga de la clotoide
ϕ'	ωp	= Angulo de la cuerda a un punto P
$\phi' AT$	ω AT	= Angulo respecto a la tangente en P, de una cuerda anterior que subtiende un arco de espiral de Euler ó clotoide JP, de longitud L_{JP}.
$\phi' AD$	ω AD	= Angulo respecto a la tangente en P, de -

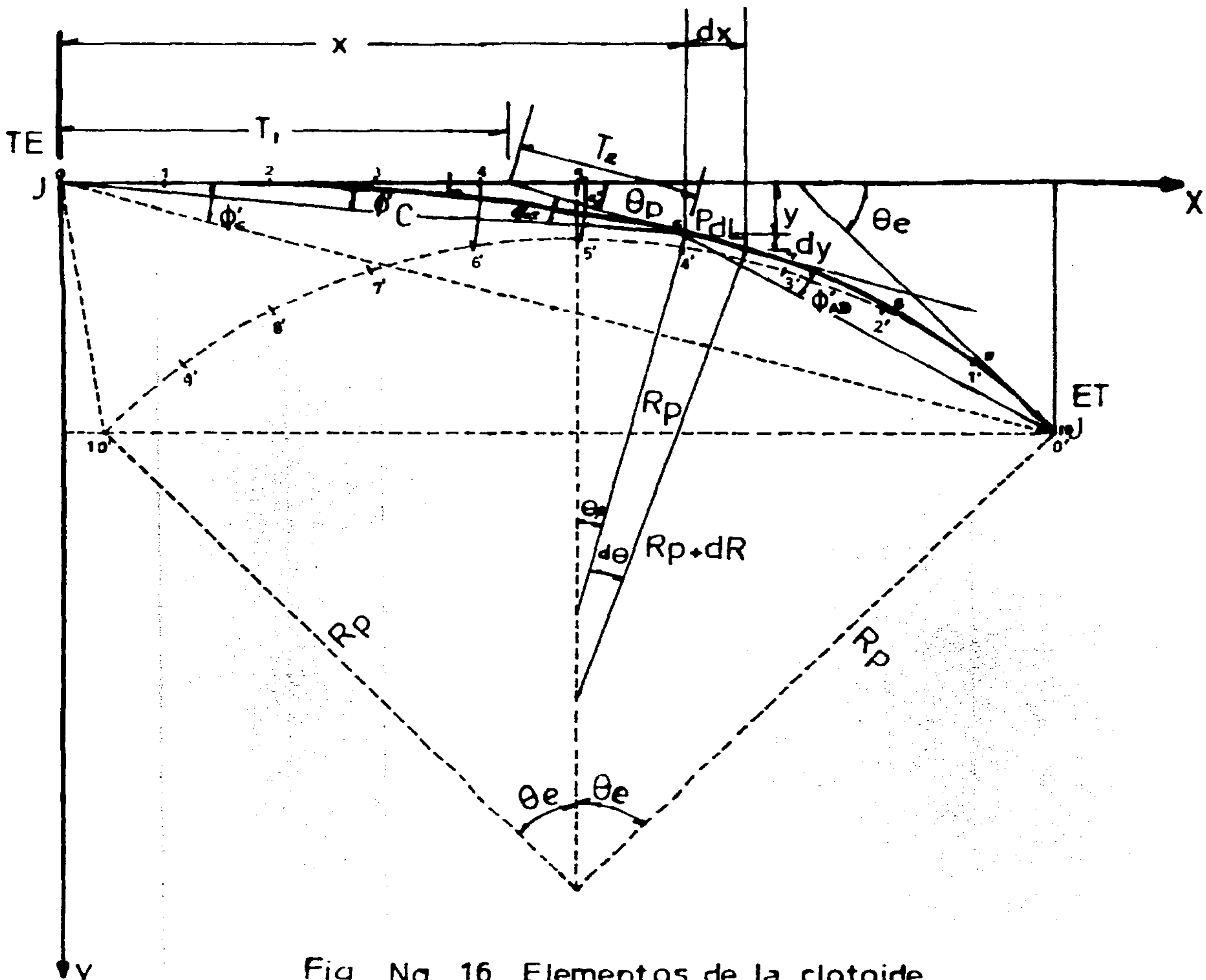


Fig. No. 16 Elementos de la clotoide.

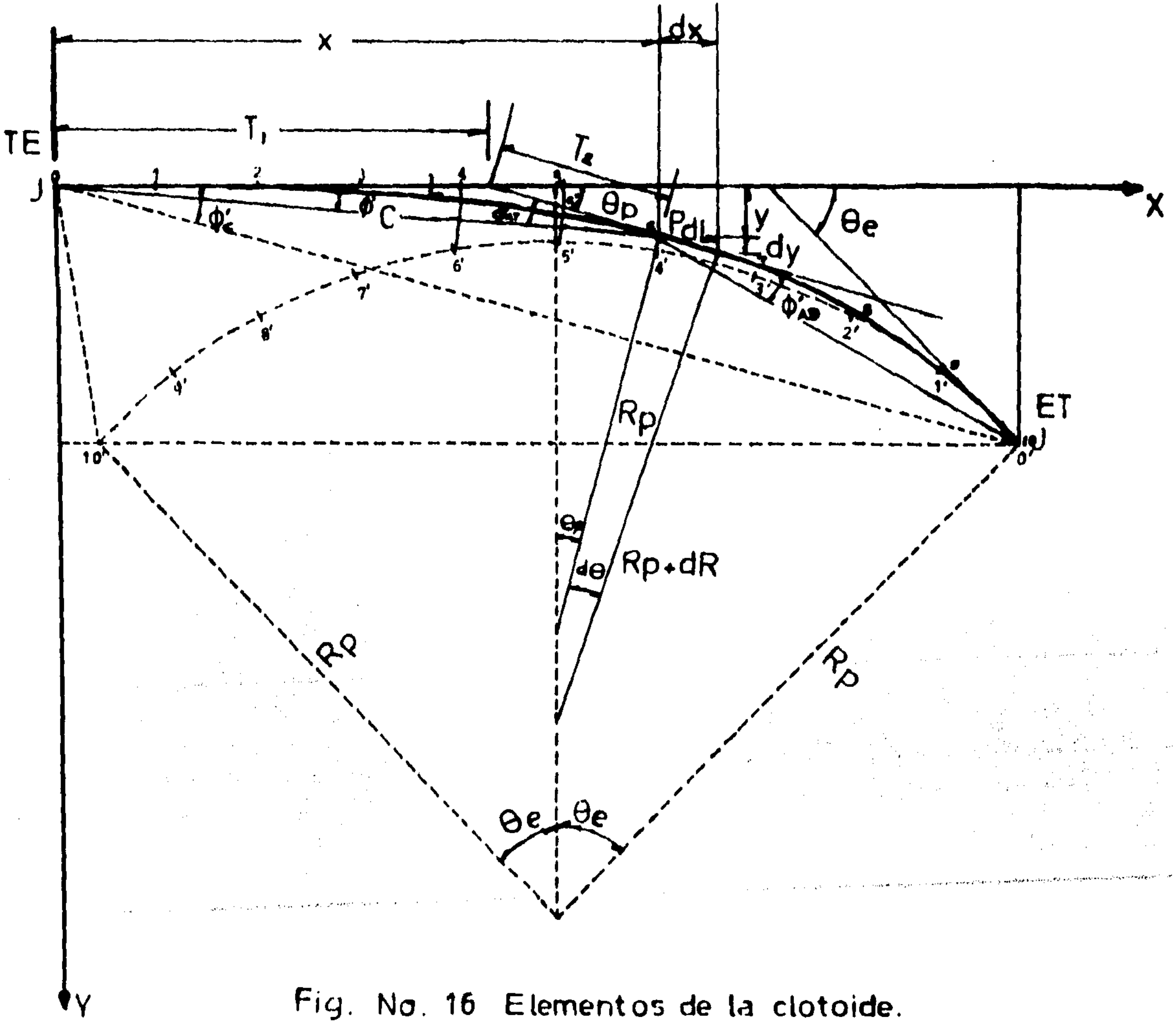


Fig. No. 16 Elementos de la clotoide.

		una cuerda posterior que subtiende un arco de espiral de Euler o clotoide JP de longitud L_{JP}
L	L	= Longitud de la clotoide del origen al punto P.
C	S	= cuerda de la clotoide desde el origen al punto P.
Rp	Rp	= Radio de curvatura de la clotoide en el punto P.
X,Y	X,Y	= Coordenadas del punto P
T_1	T_1	= Tangente larga al punto P
T_2	T_2	= Tangente corta al punto P

2.2 Deducción de el ángulo de deflexión (θ) de la clotoide en cualquier punto de la misma.

De la ecuación de la clotoide:

$$RL = K^2 \;, \quad \therefore \quad R = \frac{K^2}{L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

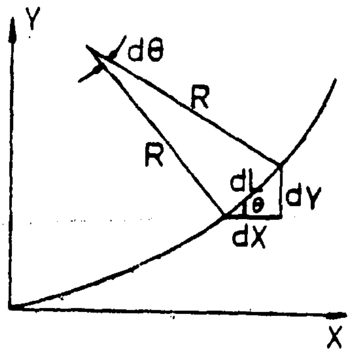


Fig. No. 17

De la fig. No. 17 si consideramos un $d\theta$ se tiene que:

$$R\,d\theta = dL \quad y \quad \therefore \quad d\theta = \frac{dL}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Si sustituimos en la ecuación anterior la ecuación (10) tenemos que:

$$d\theta = \frac{LdL}{K^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Integrando en ambos miembros de la expresión:

$$\int_0^{\theta} d\theta = \int_0^{L} \frac{LdL}{K^2}$$

$$\therefore \qquad \theta = \frac{L^2}{2K^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Y si se sabe de la ecuación de la clotoide que $K^2 = Rc\ Le$, sustituyendo:

$$\theta = \frac{L^2}{2Rc\ Le} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13')$$

Donde:

L : Longitud de la clotoide desde su inicio hasta el punto correspondiente.

Rc : Radio de la curva circular

Le : Longitud de la clotoide

En la expresión anterior el valor de θ está expresado en radiánes; para expresarlo en grados multipliquemos por $180°/\pi$:

$$\theta = \frac{L^2}{2Rc\ Le} \ \frac{180}{\pi} = \frac{90^\circ\ L^2}{\pi Rc\ Le} \quad . . . . (14)$$

Ahora, si las cuerdas con que se va a trazar la curva circular son de 20 m. como normalmente se acostumbra en caminos, tenemos que:

Si Gc = Grado de la curva circular

y $P = 2\pi Rc$ = Perímetro

Podemos establecer la siguiente relación:

$$\frac{Gc}{20} = \frac{360^\circ}{P} = \frac{360^\circ}{2\pi Rc}$$

$$Gc = \frac{360^\circ(20)}{2\pi Rc} = \frac{3600^\circ}{\pi Rc}$$

Simplificando:

$$Gc = \frac{1145.9156}{Rc} \quad . . . . (15)$$

y análogamente:

$$Rc = \frac{1145.9156}{Gc} \quad . . . . (16)$$

Que son las expresiones que nos permiten calcular el grado (Gc), de una curva circular así como su radio (Rc), cuando -

las cuerdas son de 20 m.

Ahora, sustituyendo en la expresión (14) la ecuación anterior:

$$\theta = \frac{90^{o} L^{2}}{\pi \frac{1145.9156}{Gc} Le} = \frac{90^{o} L^{2}\ Gc}{1145.9156(\pi)\ Le} = \frac{L^{2} Gc}{40\ Le}$$

$$\theta = \frac{L^{2}\ Gc}{40\ Le} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Donde:

L = Longitud de la clotoide desde su inicio al punto correspondiente.

Gc = Grado de la curva circular, para cuerdas de 20 m.

Le = Longitud de la clotoide.

2.3 <u>Deducción de las ecuaciones para obtener las coordenadas rectangulares (X e Y) de un punto cualquiera en la clotoide</u>.

2.3.1 <u>En función de L y θ</u>.

De la figura No. 17

$$\left. \begin{aligned} dX &= dL \cos \theta \\ dY &= dL \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Integrando en ambos miembros de las expresiones anteriores:

$$\int dX = \int dL \cos\theta$$

y $\qquad \int dY = \int dL \operatorname{sen}\theta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (18')$

Las cuáles no tienen solución directa; para poder integrar desarrollemos en serie de Mc clauren el seno θ y el coseno θ.

Para esto se tiene que:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \frac{1}{4!} \cdot$$

$$\cdot f^{lV}(0)x^4 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{n}(0)x^{n} \quad \ldots\ldots\ldots (19)$$

Para $\quad x = \theta \qquad$ y $\qquad f(x) = \operatorname{sen}\theta$

$f(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$	
$f'(x) = \cos\theta$	$f'(0) = \cos(0) = 1$
$f''(x) = -\operatorname{sen}\theta$	$f''(0) = -\operatorname{sen}(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos\theta$	$f'''(0) = -\cos(0) = -1$
$f^{lV}(x) = \operatorname{sen}\theta$	$f^{lV}(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$
$f^{V}(x) = \cos\theta$	$f^{V}(0) = \cos(0) = 1$
$f^{Vl}(x) = -\operatorname{sen}\theta$	$f^{Vl}(0) = -\operatorname{sen}(0) = 0$
$f^{Vll}(x) = -\cos\theta$	$f^{Vll}(0) = -\cos(0) = -1$
....	....
....	....

Ahora para $f(x) = \cos\theta$; $x = \theta$

$f(0) = \cos(0) = 1$

$f'(x) = -\operatorname{sen}(\theta)$ $\quad$ $f'(0) = -\operatorname{sen}(0) = 0$

$f''(x) = -\cos(\theta)$ $\quad$ $f''(0) = -\cos(0) = -1$

$f'''(x) = \operatorname{sen}(\theta)$ $\quad$ $f'''(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$

$f^{IV}(x) = \cos(\theta)$ $\quad$ $f^{IV}(0) = \cos(0) = 1$

$f^{V}(x) = -\operatorname{sen}(\theta)$ $\quad$ $f^{V}(0) = -\operatorname{sen}(0) = 0$

$f^{VI}(x) = -\cos(\theta)$ $\quad$ $f^{VI}(0) = -\cos(0) = -1$

Y entonces de la expresión (19)

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \ldots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \ldots$$

Sustituyendo en las expresiones (18)

$$\left.\begin{aligned} dX &= dL\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots\right) \\ dY &= dL\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots\right) \end{aligned}\right\} \ldots (20)$$

Ahora de la expresión (13) si hacemos a $2K^2$ = constante = C para una curva determinada entonces:

$$\theta = \frac{L^2}{C}$$

Integrando y sustituyendo en las expresiones (20)

$$X = \int_0^L \left(1 - \frac{L^4}{C^2\, 2!} + \frac{L^8}{C^4\, 4!} - \frac{L^{12}}{C^6\, 6!} + \ldots\right) dL =$$

$$= \left[L - \frac{L^5}{5C^2\, 2!} + \frac{L^9}{9\, C^4\, 4!} - \frac{L^{13}}{13\, C^6\, 6!} + \ldots \right]_0^L =$$

$$X = L\left(1 - \frac{L^4}{5C^2\, 2!} + \frac{L^8}{9 \times 4!\, C^4} - \frac{L^{12}}{13 \times 6!\, C^6} + \ldots\right)$$

Análogamente para Y:

$$Y = \int_0^L \left(\frac{L^2}{C} - \frac{L^6}{C^3\, 3!} + \frac{L^{10}}{C^5\, 5!} - \frac{L^{14}}{C^7\, 7!} + \ldots\right) dL =$$

$$= \left[\frac{L^3}{3\, C} - \frac{L^7}{7C^3\, 3!} + \frac{L^{11}}{11\, C^5\, 5!} - \frac{L^{15}}{15\, C^7\, 7!} + \ldots \right]_0^L =$$

$$Y = L\left(\frac{L^2}{3\, C} - \frac{L^6}{7 \times 3!\, C^3} + \frac{L^{10}}{11 \times 5!\, C^5} - \frac{L^{14}}{15 \times 7!\, C^7} + \ldots\right)$$

finalmente expresando los resultados anteriores en función de - θ , mediante la expresión:

$$\theta = \frac{L^2}{C}$$

$$\left.\begin{aligned} X &= L\left(1 - \frac{\theta^2}{5 \times 2!} + \frac{\theta^4}{9 \times 4!} - \frac{\theta^6}{13 \times 6!} + \ldots\right) \\ Y &= L\left(\frac{\theta}{3} - \frac{\theta^3}{7 \times 3!} + \frac{\theta^5}{11 \times 5!} - \frac{\theta^7}{15 \times 7!} + \ldots\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (21)$$

donde θ está en radianes.

Si queremos expresar θ en grados multipliquemos en las expresiones anteriores el valor de θ por $\frac{\pi}{180}$ y multipliquemos y dividamos por 100 con el fin de obtener el mayor número de dígitos posible:

$$X = \frac{L}{100} \left(100 - \frac{100 \left(\theta \frac{\pi}{180}\right)^2}{5 \times 2!} + \frac{100 \left(\theta \frac{\pi}{180}\right)^4}{9 \times 4!} - \right.$$

$$\left. - \frac{100 \left(\theta \frac{\pi}{180}\right)^6}{13 \times 6!} + \ldots \right)$$

$$Y = \frac{L}{100} \left(\frac{100 \left(\theta \frac{\pi}{180}\right)}{3} - \frac{100 \left(\theta \frac{\pi}{180}\right)^3}{7 \times 3!} + \frac{100 \left(\theta \frac{\pi}{180}\right)^5}{11 \times 5!} - \right.$$

$$\left. - \frac{100 \left(\theta \frac{\pi}{180}\right)^7}{15 \times 7!} + \ldots \right)$$

Haciendo operaciones y simplificando:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{L}{100} \left(100 - 0.304617\, \theta^2\, (10)^{-2} + 0.429591\, \theta^4\, (10)^{-7} - \right. \\ &\qquad \left. - 0.301987\, \theta^6\, (10)^{-12} + \ldots \right) \\ Y &= \frac{L}{100} \left(0.581776\, \theta - 0.126585\, \theta^3\, (10)^{-4} + 0.122691\, \theta^5 \right. \\ &\qquad \left. (10)^{-9} - 0.652558\, \theta^7\, (10)^{-15} + \ldots \right) \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Estas ecuaciones son las generalmente usadas en la práctica.

En las expresiones anteriores, según la aproximación deseada podremos elegir trabajar con el número de términos que mejor nos convengan, bastando para fines prácticos de trazo la elección hasta el segundo término en cada una de las ecuaciones.

2.3.2 Breve descripción de los elementos que las conforman.

También de las ecuaciones anteriores tenemos que:

X,Y : Coordenadas rectangulares (abscisa y ordenada, respectivamente) de un punto cualquiera sobre la clotoide.

Estas coordenadas, se miden considerando como el eje de las X's a la línea tangente a la clotoide en el inicio de esta, (o sea en el punto TE o ET, ver Figura No. 16) es decir, a la prolongación de la tangente que se une al arco de círculo mediante esta curva, en el sentido del cadenamiento. El origen de este sistema cartesiano es precisamente el punto TE o ET.

El eje de las Y's será una perpendicular a dicha tangente, midiendo hacia la izquierda o hacia la derecha de la tangente, según el sentido de la curva y del cadenamiento. (Ver Fig. No. 16).

Más adelante se describirá con más detalle el trazo de la clotoide por este método (el de coordenadas) y además por el de deflexiones.

También se tiene que:

L : Longitud de un arco de clotoide desde un punto determinado a otro cualquiera, siendo en este caso uno de los puntos el TE o el ET.

Generalmente en Ferrocarriles y Caminos se acostumbra dividir las curvas en 10 partes, a excepción de cuando son muy grandes o muy pequeñas.

Cuando son muy grandes se pueden dividir en más partes con el objeto de lograr un mejor trazado al tener más puntos de la curva, en caso contrario, cuando son muy pequeñas, si las necesidades lo requieren también se pueden dividir en 10 partes, si no a cada 5 m. es suficiente.

Más adelante se muestra un modelo matemático que nos permite obtener la longitud del arco de una clotoide desde un punto considerado P a otro punto cualquiera J, si dividimos la curva en N partes iguales. (Ver inciso 2.4.1)

Ahora se tiene también que:

θ : Deflexión de la clotoide en un punto cualquiera (P).

Esta deflexión es el ángulo comprendido entre la línea tangente a la clotoide en el punto P y la línea tangente en el inicio de esta o sea en el punto TE o ET.

Su valor se puede calcular mediante las expresiones (13') y (14) y si usamos cuerdas de 20 m. para el trazo de la curva circular, podemos utilizar la expresión (17).

2.3.3 En función de K y θ.

De la definición de curva clotoide que nos indica que es una curva tal que el arco de curvatura recorrido es proporcional a la curvatura, se puede decir que:

$$L = \text{constante} \cdot C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

donde:

L : Longitud del arco

C : Curvatura

Esta constante es una constante de proporcionalidad.

Pero sabemos que la curvatura es igual a:

$$C = \frac{1}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

donde:

R = Radio de curvatura.

De la figura No. 17 podemos ver que:

$$R = \frac{dL}{d\theta}$$

y entonces:

$$C = \frac{d\theta}{dL} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

donde:

θ : Deflexión de la clotoide en un punto cualquiera (P).

Si designamos por K^2 a la constante de la expresión (23) y si sustituimos la ecuación (25) en ella, tenemos que:

$$L = K^2 \frac{d\theta}{dL} \quad ; \quad d\,L\,L = K^2\, d\theta \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(26)$$

Que es la ecuación diferencial de la clotoide.

La integración de la fórmula anterior nos proporciona la longitud del arco de la clotoide en función de su ángulo de deflexión, entonces:

$$\int L\, d\, L = \int K^2\, d\theta$$

$$\therefore \quad \frac{L^2}{2} = K^2\, \theta \quad ; \quad L^2 = 2\, K^2 \theta$$

y entonces:

$$L = K\,\sqrt{2\,\theta}\;.\;(27)$$

Si sabemos que:

$$dX = \cos\theta \;\; dL$$

$$dY = \operatorname{sen}\theta \;\; dL$$

Despejando en la expresión (26) a dL y sustituyendo en las expresiones anteriores:

$$dX = \cos\theta \; \frac{K^2 d\theta}{L}$$

$$dY = \operatorname{sen}\theta \; \frac{K^2 d\theta}{L}$$

Sustituyendo en las expresiones anteriores la expresión - (27) y haciendo operaciones:

$$dX = \frac{K}{\sqrt{2\theta}} \cos\theta \; d\theta$$

$$dY = \frac{K}{\sqrt{2\theta}} \operatorname{sen}\theta \; d\theta$$

Aplicando integrales en ambos miembros de las expresiones anteriores:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{K}{\sqrt{2}} \int_0^\theta \frac{\cos\theta}{\sqrt{\theta}} \, d\theta \\ Y &= \frac{K}{\sqrt{2}} \int_0^\theta \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\theta}} \, d\theta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

A las fórmulas (28) se les conoce con el nombre de "Integrales de Fresnel" y para resolverlas aplicamos el mismo método utilizado para resolver las expresiones (18'), es decir, por medio de la serie de Mc clauren, podemos obtener los valores para X e Y, con la aproximación deseada, dependiendo del número de - términos usados:

Estos valores son:

$$\left.\begin{aligned} X &= K\sqrt{2\theta}\left(1 - \frac{\theta^2}{5 \times 2!} + \frac{\theta^4}{9 \times 4!} - \frac{\theta^6}{13 \times 6!} + \dots\right) \\ Y &= K\sqrt{2\theta}\left(\frac{\theta}{3} - \frac{\theta^3}{7 \times 3!} + \frac{\theta^5}{11 \times 5!} - \frac{\theta^7}{15 \times 7!} + \dots\right) \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Donde:

θ : Está en radianes y si se requiere introducir su valor en grados se aplica el mismo procedimiento descrito en hojas anteriores. Ver ecuaciones (22).

Ahora podemos ver de la expresión (27) que:

$$L^2 = K^2\, 2\theta \quad \dots\dots\dots\dots (30)$$

$$\theta = \frac{L^2}{2K^2} \quad \dots\dots\dots\dots (30')$$

Expresión análoga a la fórmula (13).

Si hacemos la siguiente relación:

$$\frac{L}{Le} = \frac{\theta}{\theta e} \quad \therefore \quad \frac{L}{\theta} = \frac{Le}{\theta e}$$

y sustituyendo en (30).

$$2\,K^2 = \frac{Le^2}{\theta e}$$

Sustituyendo en la ecuación (30').

$$\theta = \frac{L^2}{\frac{Le^2}{\theta e}} \quad \therefore \quad \theta = \left(\frac{L}{Le}\right)^2 \theta e \quad \dots\dots (31)$$

Que es la expresión que nos permite calcular θ en función de L, θe y Le, lo cuál es muy conveniente para realizar los cálculos en forma tabulada, ya que el único valor que va variando es L, permaneciendo Le y θe constantes para una curva - determinada.

2.4 Deducción de las expresiones para obtener los ángulos en - grados entre la tangente en un punto P de la clotoide y una cuerda cualquiera $\overline{PJ}$, adelante o atrás.

De la figura No. 16 también puede deducirse que:

$$C = \sqrt{X^2 + Y^2} = Y \csc \phi' = X \sec \phi' \quad . . . . . \quad (32)$$

$$T_1 = X - Y \cot\theta \quad . . . . \quad (33)$$

$$T_2 = Y \csc \theta \quad . . . . \quad (34)$$

También:

$$\phi' = \text{ang tan} \frac{Y}{X} \quad . . . . \quad (35)$$

En la práctica se ha llegado a que poniendo el valor de ϕ' en función de θ se tiene que:

$$\phi' = \frac{\theta}{3} - Z \quad . . . . \quad (36)$$

Donde ϕ' y θ están expresados en grados y Z es una - corrección dada para la expresión anterior:

$$Z = 3.1 \times 10^{-3}\,\theta^3 + 2.3 \times 10^{-8}\,\theta^5 \quad \ldots\ldots\ldots (37)$$

Donde θ está expresado en grados y Z en segundos.

Para valores menores que 16° el valor de Z es tan pequeño que suele despreciarse.

Para fines de trazo es útil contar con expresiones que nos permitan obtener el valor de el ángulo que forma una cuerda cualquiera de la clotoide respecto a la tangente en un punto cualquiera P, de la misma, tanto para cuerdas apoyadas en ese punto y otro punto atrás (ángulo ϕ' AT), como para cuerdas apoyadas en ese punto y otro adelante (ángulo ϕ' AD), lo cuál se puede observar en la figura No. 16.

Para poder deducir las expresiones de ϕ'AT y de ϕ'AD se considera la siguiente propiedad de la clotoide:

<u>Definición</u>:

La clotoide diverge de un arco de círculo tangente a ella, en la misma proporción que lo hace con respecto a una recta tangente a ella en el origen.

Puesto que la recta y el círculo tienen curvatura constante y la clotoide varía su curvatura desde 0 en la tangente al origen, hasta $\frac{1}{Rc}$, en el punto en donde es tangente al círculo: según esta propiedad, si 5' y 5 son los puntos medios del círcu lo y la clotoide, respectivamente, la distancia normal a la clo-toide $\overline{5.5'}$ es igual a la distancia normal a la tangente $\overline{5.5''}$; asimismo, para el arco de longitud Le del círculo y la clotoi-de, la distancia normal a la tangente en el punto TE entre tangente y clotoide es nula e igual a la distancia normal a la clotoide entre ésta y el círculo, en el punto ET.

De la figura No. 16 puede verse también que para un arco de longitud Ljp :

$$\phi'AT = \phi - \phi' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

y sabemos que:

$$\phi' = \frac{\theta p}{3} - Z$$

ϕ : Angulo de la cuerda que subtiende un arco de círculo de radio Rp y longitud Ljp.

Análogamente:

$$\phi'AD = \phi + \phi' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

2.4.1 <u>Longitud de un arco de espiral de Euler (clotoide) entre 2 puntos cualquiera J y P.</u>

Si dividimos una clotoide en N partes iguales, y se enumeran los puntos obtenidos en orden creciente: 0,1,2,3,......., J, ...,P,....N, se tendrá; que la longitud de un arco de clotoide entre 2 puntos J,P cualquiera de este, será igual a el valor absoluto de la diferencia entre J y P, dividido entre N y multiplicado por Le, esto es:

$$Ljp = \left| J-P \right| \frac{Le}{N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

Donde:

Ljp : Longitud del arco de clotoide desde el punto considerado P a un punto considerado cualquiera J. J y P son los números de orden de los puntos J y P y $\frac{Le}{N}$ es la longitud de un arco de los N de la clotoide.

2.4.2 <u>Deducción de las ecuaciones para obtener el valor de - Ø'AD y Ø'AT en función de J, P, N y θe</u>.

También de la definición de clotoide se tiene que:

$$RoLe = Rp\ Lp \quad \therefore \quad GpLe = Gc\ Lp \qquad Gp = \frac{Lp}{Le}\ Gc$$

y si.-

$$Lp = \frac{P}{N}\ Le$$

y

$$Le = \frac{N}{N}\ Le$$

Sustituyendo.-

$$Gp = \frac{\frac{P}{N}\ Le}{\frac{N}{N}\ Le}\ Gc \quad ; \qquad Gp = \frac{P}{N}\ Gc$$

Donde:

<u>Gc</u>: Es el grado de curvatura en el punto N o sea es el grado de curvatura de la curva circular.

<u>Gp</u>: Grado de curvatura en el punto P.

También sabemos que:

$$\phi = \frac{Gp\ Ljp}{40} = \frac{\frac{P}{N}\ Gc \cdot |J-P| \frac{Le}{N}}{40} = \frac{P \cdot |J-P|}{N^2} \cdot \frac{Gc\ Le}{40}$$

y si.-

$$\theta e = \frac{Gc\ Le^2}{40\ Le} = \frac{Gc\ Le}{40}$$

entonces.-

$$\phi = \frac{P\,|J-P|}{N^2}\ \theta e \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (41)$$

además:

$$\phi' = \frac{\theta}{3} - Z$$

Y si sabemos que:

$$\theta = \left(\frac{Ljp}{Le}\right)^2\ \theta e$$

entonces.-

$$\emptyset' = \frac{\theta e}{3}\left(\frac{Lip}{Le}\right)^2 - Z = \frac{\theta e}{3}\left[\frac{\frac{|J-P|}{N}\cdot Le}{Le}\right]^2 - Z \;.\;.\;(42)$$

Finalmente sustituyendo las ecuaciones (41) y (42) en las expresiones (38) y (39) se tiene que:

$$\begin{aligned}\emptyset'AD &= \left[3P\,(J-P) + (J-P)^2\right]\frac{\theta e}{3N^2} - Z\\ \emptyset'AT &= \left[3P\,(P-J) - (J-P)^2\right]\frac{\theta e}{3N^2} + Z\end{aligned} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(43)$$

Donde.-

<u>$\emptyset$'AD, $\emptyset$'AT</u> : Angulo en grados entre la tangente en el punto P - y una cuerda cualquiera $\overline{PJ}$, adelante o atrás.

<u>P , J</u> : Número de orden del punto P en donde se está midiendo $\emptyset$'AD o $\emptyset$'AT, y número de orden del otro extremo de la cuerda, J, respectivamente.

<u>N</u> : Número de cuerdas o arcos en que se ha dividido la espiral de Euler o clotoide.

<u>Z</u> : Corrección dependiente de θ, si θ es menor o igual que 16° suele despreciarse.

2.5 Deducción de la ecuación para obtener la longitud de la clotoide (Le).

Para poder deducir esta expresión consideremos a la clotoide como una curva espiral, es decir, como una serie de curvas compuestas de transición.

Estas curvas son las curvas compuestas de arcos circulares y como se dijo anteriormente las longitudes de dichos arcos son constantes y sus grados de curvatura van aumentando gradualmente, desde la tangente hasta la curva circular simple, esto es, desde 0° hasta el grado de la curva circular simple.

En la figura No. 18 se puede observar que la primera deflexión (θ_1) será igual a:

$$\theta_1 = \frac{v}{20} C$$

Para las siguientes deflexiones (θ_2, θ_3, ... θ_n), tomemos en cuenta que de la definición, las longitudes de estos arcos deben ser constantes, por lo tanto tendrán el mismo valor y bastará con multiplicar a $\frac{v}{20}$ C por 2,3, . . . n, para obtener el valor de θ_2, θ_3, . . . θ_n respectivamente, por lo tanto:

$$\theta_2 = 2 \frac{v}{20} C$$

$$\theta_3 = 3 \frac{v}{20} C$$

$$\theta_4 = 4 \frac{v}{20} C$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\theta_n = n \frac{v}{20} C$$

y si .-

$$n = \frac{\theta_c}{v} - 1$$

$$\theta_n = \left(\frac{Gc}{v} - 1\right) \frac{v}{20} \quad C$$

Como .-

$$\theta e = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta_n \ .$$

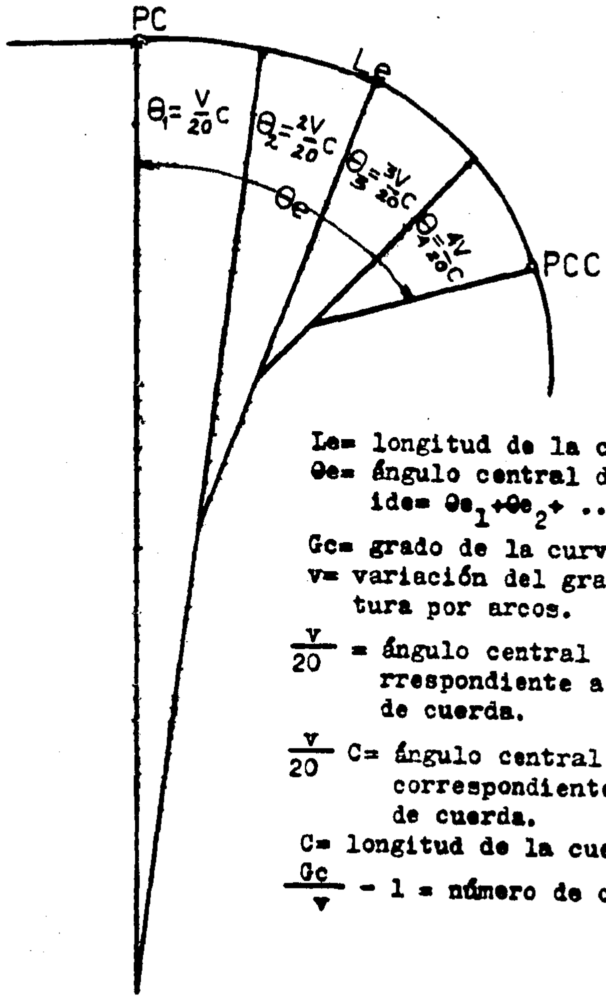
entonces.-

$$\theta e = \frac{v}{20} C + \frac{2v}{20} C + \frac{3v}{20} C + \ldots + \left(\frac{Gc}{v} - 1\right) \frac{v}{20} C$$

$$= \frac{v}{20} C \left[1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + \left(\frac{Gc}{v} - 1\right) \right] \ldots (44)$$

Pero como se puede observar si .-

$$\frac{Gc}{v} - 1 = n$$



Le= longitud de la clotoide= nC

θe= ángulo central de la clotoide= $\theta e_1 + \theta e_2 + \dots$

Gc= grado de la curva circular

v= variación del grado de curvatura por arcos.

$\frac{v}{20}$ = ángulo central del arco correspondiente a un metro de cuerda.

$\frac{v}{20}$ C= ángulo central del arco correspondiente a C metros de cuerda.

C= longitud de la cuerda.

$\frac{Gc}{v} - 1$ = número de cuerdas

Fig. No. 18 Longitud de la clotoide.

PARA

$$1 + \frac{Gc}{v} - 1 = 1 + n \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 1$$

$$2 + n - 1 = 1 + n \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 2$$

$$3 + n - 2 = 1 + n \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 3$$

. . . .

. . . .

$$\frac{n}{2} + (n - \frac{n}{2} + 1) = 1 + n \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad \frac{n}{2}$$

Podemos ver que el segundo factor del segundo miembro de la ecuación (44) lo podemos representar como la suma de $\frac{n}{2}$ términos de la forma $n + 1$, entonces podemos escribir:

$$\Theta e = \frac{v}{20} C (n + 1) \frac{n}{2}$$

$$= \frac{v}{20} C (1 + \frac{Gc}{v} - 1) \frac{\frac{Gc}{v} - 1}{2}$$

$$= \frac{vC}{20} \frac{Gc}{v} \frac{\frac{Gc}{v} - 1}{2}$$

$$= \frac{vC}{20} \frac{Gc}{2v} (\frac{Gc}{v} - 1)$$

$$\Theta e = \frac{C}{20} \frac{Gc}{2} (\frac{Gc}{v} - 1) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (45)$$

Pero sabemos que.-

$$n = \frac{Gc}{v} - 1$$

y además:

Le = nC = número de cuerdas de arcos circulares de grados crecientes:

Entonces.-

$$n = \frac{Le}{C}$$

Sustituyendo en la expresión (45) :

$$\theta e = \frac{CGc}{40} \quad (n)$$

$$= \frac{CGc}{40} \quad \frac{Le}{C}$$

$$\theta e = \frac{Gc\ Le}{40}$$

$$Le = \frac{40\ \theta e}{Gc} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (46)$$

Donde.-

Le : Longitud de la clotoide

θe : Deflexión total de la clotoide

Gc : Grado de la curva circular

2.6 Longitud mínima de la clotoide.

Muchas veces no es posible aplicar la longitud teórica de la clotoide obtenida con la fórmula (46), por lo que a continuación se describirán algunas fórmulas empíricas - que nos permitirán obtener esta longitud, con estas fórmulas se trata de obtener la longitud mínima de la clotoide.

Como se dijo antes las curvas de transición tienen como objeto permitir la aplicación gradual de la aceleración y de la fuerza centrípeta así como de la sobreelevación y ampliación necesarias, esta aplicación es más repentina - comforme la longitud de la clotoide es más corta.

La longitud mínima de la clotoide será aquella que nos permita aplicar gradualmente la fuerza o la aceleración - centrípeta, o en su caso la sobreelevación y ampliación,- de tal manera que no excedan de un cierto valor límite, - marcado este por el método que se este usando.

En 1909, W. H. Shortt, dedujo la primera fórmula para calcular la longitud mínima de la clotoide para curvas de ferrocarril, basándose en que la variación de la aceleración centrípeta debe ser constante cuando se recorre la - curva a una velocidad uniforme.

Si tenemos que la aceleración centrípeta en un punto cualquiera de la curva vale:

$$a = \frac{V^2 L}{Rc\ Le}$$

Si t es el tiempo que necesita el vehículo para recorrer la clotoide a velocidad uniforme V; en un punto cualquiera de la curva se tendrá que $L = Vt$, sustituyendo:

$$a = \frac{V^2 Vt}{RcLe} = \frac{V^3\ t}{RcLe}$$

Y como la variación de la aceleración centrípeta (con respecto al tiempo) es una constante, entonces:

$$\frac{da}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{V^3 t}{RcLe} \right) = C$$

$$\frac{V^3}{RcLe} = C \qquad \therefore \qquad Le = \frac{1}{C}\ \frac{V^3}{Rc} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

Donde.-

Le = Longitud mínima de la clotoide (m)

V = Velocidad del vehículo $\left(\frac{m}{seg}\right)$

Rc = Radio de la curva circular (m).

C = Coeficiente de variación de la aceleración centrípeta, coeficiente de comodidad $\left(\frac{m}{seg^3}\right)$

Si expresamos el valor de la velocidad en km/hr., entonces:

$$Le = \frac{1}{C} \frac{(V(\frac{m}{seg}))^3}{Rc} = \frac{1}{C} \frac{V^3}{Rc} \left(\frac{m}{seg} \right)^3 \left(\frac{1\ Km}{1000m} \right)^3 \left(\frac{3600\ seg}{1\ hr.} \right)^3$$

$$Le = 46.656 \frac{V^3}{CRc} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47')$$

El coeficiente C es un valor empírico que indica el grado de comodidad que se desea proporcionar. Para ferrocarriles, se aceptó el valor de 0.305 m/seg^3, en caminos se emplea un valor que va de 0.305 hasta 0.915 m/seg^3, En 1938, J. Barnett propuso un valor de 0.61 m/seg^3, valor que ha sido empleado ampliamente.

En 1949, M. V. Smirnoff propuso una fórmula semejante a la de Shortt, pero corrigiéndola para tener en cuenta la sobreelevación. Tal fórmula es:

$$Le = \frac{46.656}{C} V \left(\frac{V^2}{Rc} - 127S \right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

Donde.-

Le : Longitud mínima de la clotoide (m)

V : Velocidad del vehículo (km/hr)

Rc : Radio de la curva circular (m)

S : Sobreelevación de la curva circular, en valor absoluto.

C : Coeficiente de comodidad, fijado empíricamente entre 0.305 y 0.610 m/seg^3.

Por su parte, otras asociaciones recomiendan otra manera de calcular dicha longitud, con base en el aspecto estético del camino; consiste en igualar la longitud de la clotoide a la longitud necesaria para dar la sobreelevación correspondiente a la curva circular. Se establece que la clotoide debe tener suficiente longitud para permitir que la pendiente longitudinal de la orilla de la calzada con respecto al eje del camino tenga un valor máximo P. Basándose en consideraciones empíricas y tomando en cuenta la apariencia de las transiciones, establece que para caminos de dos carriles y velocidades entre 48 y 112 Km/hr, el valor de esta pendiente será de 1/150 y 1/250, respectivamente, de lo anterior:

$$P = \frac{1}{m} \quad y \quad m = 1.5625\ V + 75$$

donde:

P = Pendiente longitudinal de la orilla de la calzada con respecto al eje del camino, en valor absoluto.

m = Talud de la orilla de la calzada respecto al eje del camino. Es igual al recíproco de la pendiente.

V = Velocidad de proyecto (km/hr)

Entonces la longitud mínima de la clotoide para caminos de dos carriles será:

$$Le = \frac{aS}{P} = m\,aS \quad . . . . \quad (49)$$

donde.-

Le = Longitud mínima de la clotoide (m)

a = Semiancho de la calzada en tangente para caminos de dos carriles (m).

S = Sobreelevación de la curva circular, en valor absoluto.

Un criterio desarrollado en México por la Secretaría de Obras Públicas, para calcular dicha longitud, fija un valor constante a la velocidad con que el vehículo asciende o desciende por la clotoide de transición, cuando circula por ella a la velocidad de proyecto. Si el conductor mantiene su vehículo en el centro de su carril, el desnivel que sube o baja el vehículo al circular por la transición es:

$$d = \frac{aS}{2}$$

donde.-

d = Desnivel (m)

a = Semiancho de carpeta o ancho de carril (m).

S = Sobreelevación (m)

Si el vehículo recorre la clotoide de longitud Le a la velocidad de proyecto V, empleará un tiempo t de:

$$t = \frac{Le}{0.277\ V}$$

t: Tiempo (seg.)

Le: en m

V: en (km/hr)

Entonces la velocidad (Ve) en el ascenso o descenso de la transición expresada en m/seg. será:

$$Ve = \frac{d}{t} = \frac{aS/2}{Le/0.277V} = \frac{0.138\ V\ S\ a}{Le}$$

Esta velocidad debe ser de una magnitud tal, que permita circular al conductor de una manera cómoda y segura.

Para una velocidad de proyecto de 112 km/hr. se recomienda una pendiente de 1/250 entonces recorrerá 250 m. en 8.04 seg.

También el desnivel de la orilla de la calzada respecto al eje del camino será en 250 m. de 1 metro y, por lo tanto, el desnivel del eje será de la mitad, o sea de 0.50 m. Con lo que su velocidad de ascenso o descenso será:

$$Ve = \frac{0.50}{8.04} = 0.062 \frac{m}{seg}$$

Admitiendo, según experiencias, este valor como seguro y cómodo para altas velocidades de proyecto, entonces.-

$$Ve = 0.062 = \frac{0.138\ VaS}{Le}$$

$$le = \frac{0.138\ VaS}{0.062} \quad \therefore \quad Le = 2.22\ VaS$$

En la expresión anterior la longitud de transición es directamente proporcional al semiancho de la calzada, lo cuál aun que no influye en la comodidad y seguridad del usuario, proporciona una apariencia desagradable. Entonces se recomienda que la expresión anterior se multiplique por un semiancho de calzada de 3.65 m. y se aplique para cualquier semiancho de calzada, es decir:

$$Le = 2.22 \times 3.65\ V\ S$$

$$Le \doteq 8\ V\ S \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

donde.-

Le = Longitud mínima (m)

V = Velocidad de proyecto ($\frac{km}{hr}$)

S = Sobreelevación, en valor absoluto.

2.7 Cálculo de la longitud mínima de la clotoide en función de el peralte teórico y la sobreelevación o peralte máximo permitido. (Método de cálculo para ferrocarril o metro).

Para el cálculo de la clotoide se parte de la consideración de que la pendiente máxima de enlace para las sobreelevaciones o "peraltes", no debe ser mayor de 4 mm/m, quedando esta consideración definida por la expresión siguiente.-

$$Sm \leq \frac{180}{V} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

V = Velocidad máxima permitida para la cuál se calcula la curva de transición.

Por lo que en caso extremo se tendría.-

$$Sm = \frac{180}{45} = 4 \text{ mm/m}$$

Establecida la condición para el cálculo de la pendiente máxima se calcula también la velocidad máxima en función del radio nominal (Rn) por medio de la expresión .-

$$V = 5.13\sqrt{Rn} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

El valor obtenido por medio de la fórmula es redondeado a su valor inmediato inferior, ejemplo:

Si $R_n = 150$ m. $V = 5.13 \sqrt{150} = 62.83$

Por lo que se deja la velocidad de: $V = 60$ km/hr.

La aplicación de la mencionada fórmula es para radios $\geq$ de 250 m.

Por razones de orden práctico y de acuerdo a estudios realizados en países donde la investigación de este tipo de medio de transporte es más avanzada se considera una velocidad máxima de 80 km/hr.

Una vez que se tiene conocida la velocidad se calcula una sobreelevación o peralte teórico (Ht) por medio de:

$$Ht = \frac{11.8\ V^2}{Rn} \qquad (53)$$

Valor al cuál se le resta 30 mm. para encontrar el valor del peralte o sobreelevación práctica (Hrc), calculado este se redondea a su valor inmediato superior para conocer el valor del peralte práctico (Hr) que se va a aplicar.

Cuando el valor del peralte práctico calculado es mayor de 160 mm. se considera un peralte práctico de 160 mm. que es el valor máximo del peralte que se puede considerar por especificaciones de la construcción de los convoyes.

Ejemplo.-

$R_n = 150$ m $\qquad Ht = \dfrac{11.8(60)^2}{150}$

$V = 60$ km/hr. $\qquad Ht = 283.2$ mm.

$Hrc = 283.2 - 30 = 253.2 \text{ mm} > 160 \text{ mm}.$

$\therefore \quad Hr = 160$ mm.

Ej. $R_n = 500$ m. $\qquad Ht = \dfrac{11.8(80)^2}{500} = 151.04$ mm.

$V = 80 \dfrac{km}{h}$ $\qquad Hrc = 121.04$ mm.

$Hr = 122$ mm.

Establecida la velocidad máxima se calcula la pendiente de enlace $Sm \leqq \dfrac{180}{V}$ conocido este valor se calcula la longitud teórica de la clotoide requerida (Le) utilizando la fórmula :

$$Le = \frac{Hr}{Sm} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

Para nuestro ejemplo anterior:

$Sm = \dfrac{180}{80} = 2.25$ mm./m.

$Hr = 122$ mm.

$Le = \dfrac{122}{2.25} = 54.222$ m.

C A P I T U L O 3.-

3. LA CURVA CIRCULAR SIMPLE CON CLOTOIDES SIMETRICAS

3.1 Elementos de la curva circular con clotoides simétricas.

En la figura No. 19 podemos observar los elementos de la curva circular simple con clotoides simétricas; las literales que se usan son las correspondientes a la simbología generalmente usada en caminos, colocándose también otra columna con los símbolos utilizados generalmente en ferrocarriles para los mismos elementos.

S I M B O L O G I A

CAMINOS	FERROCARRILES	
PI	PI	= Punto de intersección de las tangentes
TE	CT	= Punto donde termina la tangente y empieza la clotoide.
EC	CC	= Punto donde termina la clotoide y empieza la curva circular.
ET	TC	= Punto donde termina la clotoide y empieza la tangente.
PSC	PSC	= Punto sobre la curva circular.
PSE	PSE	= Punto sobre la clotoide.

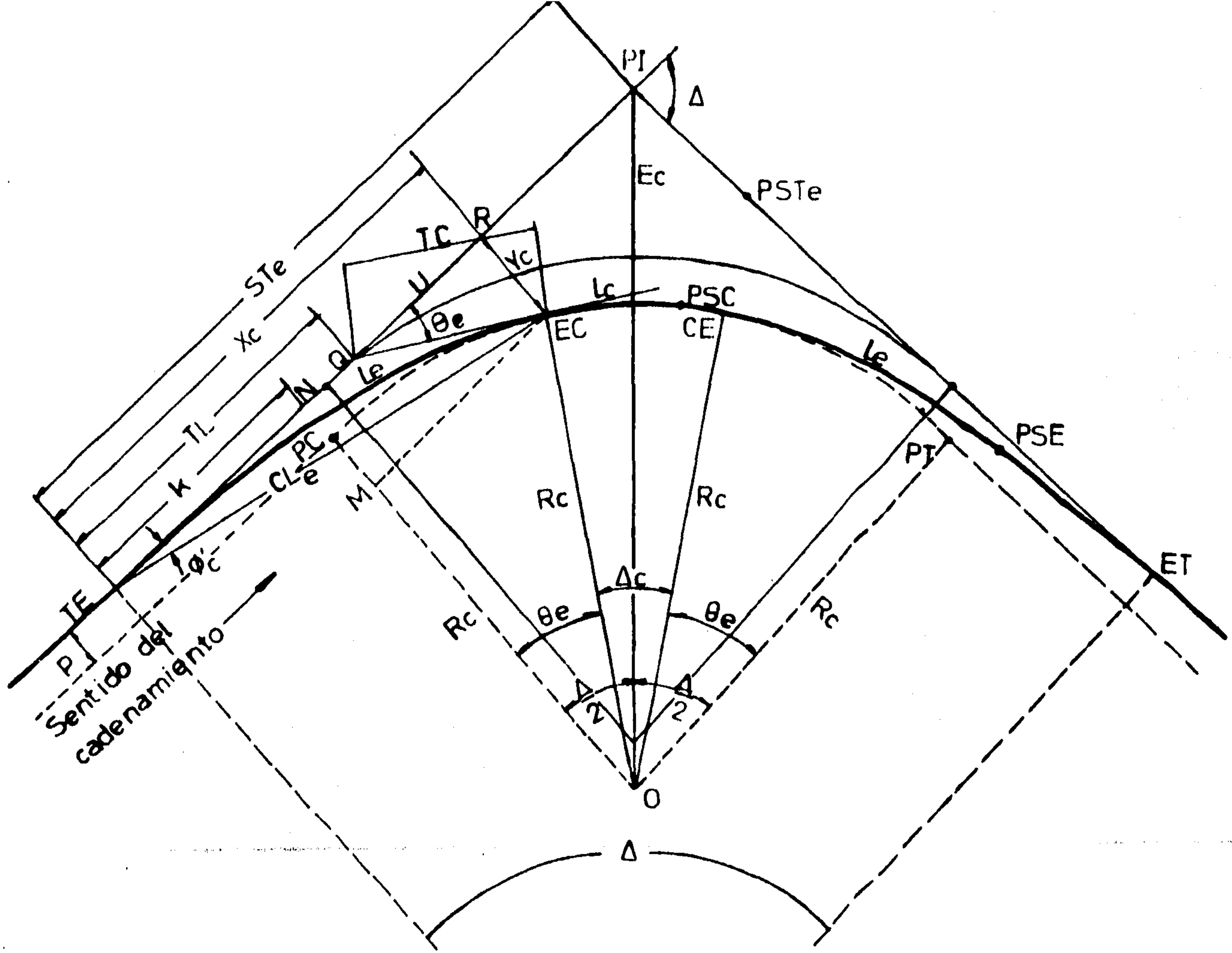


Fig. No. 19 Elementos de la curva circular con clotoides simétricas.

PSTe	PTc	= Punto sobre la subtangente
Δ	Δ	= Angulo de deflexión de las tangentes.
Δc	Δc	= Angulo central de la curva circular.
θe	τ	= Deflexión de la clotoide.
$\phi' c$	ω	= Angulo de la cuerda larga de la clotoide
St e	Tc	= Subtangente.
Xc, Yc	Xc, Yc	= Coordenadas del EC o del CE.
k, p	Xm=t , E	= Coordenadas del PC o del PT (Desplazamiento)
TL	TL	= Tangente larga
TC	TC=H	= Tangente corta
CLe	S	= Cuerda larga de la clotoide
Ec	Ec	= Externa
Rc	Rc	= Radio de la curva circular
Le	LcL	= Longitud de la clotoide de entrada o salida.
Lc	Lc	= Longitud de la curva circular.

3.2 <u>Descripción de algunos de estos elementos y deducción de algunas de las expresiones para obtener su valor.</u>

1. <u>Grado de curvatura de la curva circular (Gc)</u>. Es el ángulo que subtiende una cuerda unitaria, (la cuerda unitaria que normalmente se emplea es de 20 m), en la curva circular.

De la expresión (15).

$$Gc = \frac{1145.9156}{Rc}$$

Donde:

Rc : Es el radio de la curva circular, (en mts)

Gc : En grados sexagesimales.

2. Longitud de la clotoide o espiral de Euler (Le). Es la longitud medida sobre la curva entre el TE y el EC, o del CE al ET. La expresión que nos permite obtener su longitud teórica se deduce en el inciso (2.5) y su longitud mínima la determinamos mediante las fórmulas prácticas mostradas en el inciso (2.6) y (2.7).

3. Parámetro de la clotoide (K). Es la magnitud que define las dimensiones de la clotoide.

De la expresión (8) :

$$K = \sqrt{Rc\ Le}$$

4. Deflexión de la curva (Δ). Es el ángulo comprendido entre las normales en TE y ET. Su valor es igual a la deflexión de las tangentes y se representa por Δ .

$$\Delta = 2\theta e + \Delta c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

5. Deflexión a un punto cualquiera de la clotoide (θ). Es

el ángulo comprendido entre la tangente en TE o ET y la tangente en un punto cualquiera PSE.

De la expresión (13) :

$$\theta = \frac{L^2}{2K^2}$$

Y también de la expresión (31):

$$\theta = \left(\frac{L}{Le} \right)^2 \theta e$$

6. <u>Deflexión de la clotoide (θe)</u>. Es el ángulo comprendido entre las tangentes a la clotoide en sus puntos extremos.

De la expresión (13'), si.-

$$L = Le \quad ; \quad \theta = \theta e$$

$$\theta e = \frac{Le^2}{2Rc\ Le} = \frac{Le}{2\ Rc} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (56)$$

Con la expresión anterior se obtiene θe en radianes; si - la expresamos en grados; tomando en cuenta que:

$$Rc = \frac{1145.9156}{Gc} \quad \text{(expresión (16))}$$

Entonces:

$$\theta e = \frac{Le}{2 \times \frac{1145.9156}{Gc}} \quad \frac{180}{\pi}$$

$$\theta e = \frac{Gc\ Le}{40} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

7. <u>Longitud total de la curva (L)</u>. Es la suma de las longitudes de las dos clotoides de transición y de la longitud de la curva circular. Para curvas circulares con espirales simétricas se tiene que:

$$L = 2\ Le + Lc$$

Considerando las cuerdas unitarias de 20m. y sabiendo de la expresión (46) que:

$$Le = \frac{40\ \theta e}{Gc}$$

y que

$$Lc = \frac{20\ \Delta c}{Gc}$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$L = 2\ \left(\frac{40\ \theta e}{Gc}\right) + \frac{20\ \Delta c}{Gc}$$

$$= \frac{80\ \theta e + 20\ \Delta c}{Gc}$$

pero.- $\Delta c = \Delta - 2\ \theta e$

$$L = \frac{80\ \theta e + 20\Delta - 40\ \theta e}{Gc}$$

$$= \frac{40\ \theta e + 20\Delta}{Gc}$$

y si $$Le = \frac{40\ \theta e}{Gc}$$

entonces.-

$$L = Le + \frac{20\Delta}{Gc} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

Lo cuál nos indica que si insertamos clotoides al principio y al final de la curva circular, se incrementa la longitud total de la curva en Le.

8. <u>Coordenadas del EC y del CE de la curva (Xc, Yc).</u>

De las ecuaciones (21), tomando hasta el segundo término para fines prácticos:

$$Xc = Le\ (1 - \frac{\theta e^2}{10})$$

$$Yc = Le\ (\frac{\theta e}{3} - \frac{\theta e^3}{42})$$

En donde θe está en radianes. Si queremos expresar a θe en grados, de la ecuación (22), se tendrá:

$$Xc = \frac{Le}{100} (100 - 0.304617\ \theta_e^{2}\ (10)^{-2})$$

$$Yc = \frac{Le}{100} (0.581776\ \theta_e - 0.126\ 585\ \theta_e^{3}\ (10)^{-4})$$

9. <u>Coordenadas del PC de la curva circular (p,k).</u>

De la figura No. 19 se tiene que .-

$$p = Yc - \overline{PC-M}$$

Para obtener $\overline{PC-M}$ consideremos el triángulo EC-M-O :

$$\overline{MO} = \cos \theta e\ Rc$$

$$\overline{PC-M} = Rc - \overline{MO} = Rc - Rc \cos \theta e$$

$$= Rc\ (1 - \cos \theta e)$$

Pero $1 - \cos \theta e = \text{sen ver}\ \theta e$

entonces $\overline{PC-M} = Rc\ \ \text{sen ver}\ \theta e$

y por lo tanto:

$$p = Yc - Rc\ \text{sen ver}\ \theta e \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

Otra manera de calcular p es.-

$$p = Yc - (Rc - Rc \cos \theta e)$$

si

$$\cos \theta e = 1 - \frac{\theta e^2}{2} + \frac{\theta e^4}{24} + \ldots .$$

$$\theta e = \frac{Le^2}{2K^2} = \frac{Le^2}{2Rc\ Le} = \frac{Le}{2Rc}$$

Tomando hasta el 2o. término de la serie de Mc clauren que nos define a $\cos \theta e$, y sustituyendo la expresión anterior:

$$\cos \theta e = 1 - \frac{\left(\frac{Le}{2Rc}\right)^2}{2} = 1 - \frac{\frac{Le^2}{4Rc^2}}{\frac{2}{1}} = 1 - \frac{Le^2}{8\ Rc^2}$$

o sea que: $\quad Rc - Rc \cos \theta e = Rc - Rc\left(1 - \frac{Le^2}{8Rc^2}\right) = \frac{Le^2}{8\ Rc}$

Si además $Yc = \frac{Le^2}{6Rc}$ (de la expresión (21), tomando has ta el 1er. término) y sustituyendo a $\theta e = \frac{Le}{2\ Rc}$

Sustituyendo:

$$p = \frac{Le^2}{6Rc} - \frac{Le^2}{8Rc} = \frac{8Le^2 - 6Le^2}{48\ Rc} = \frac{2Le^2}{48Rc}$$

$$\therefore \quad p = \frac{Le^2}{24Rc} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (60)$$

Ahora para la coordenada k del PC, tenemos:

$$k = Xc - \overline{M\text{-}EC}$$

Nuevamente del triángulo $\overline{EC\text{-}M\text{-}O}$:

$$\overline{M\text{-}EC} = Rc \text{ sen } \theta e$$

y por lo tanto:

$$k = Xc - Rc \text{ sen } \theta e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

10. <u>Subtangente (Ste)</u>. Es la distancia entre el PI y el TE o ET de la curva, medida sobre la prolongación de la tangente, se denomina aquí como Ste.

De la figura No. 19

$$Ste = k + \overline{N\text{-}PI}$$

Pero del triángulo PI-N-O se tiene que:

$$\overline{N\text{-}PI} = (Rc + p) \tan \frac{\Delta}{2}$$

y por lo tanto:

$$Ste = k + (Rc + p) \tan \frac{\Delta}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

11. <u>Externa (Ec)</u>. Es la distancia entre el PI y la curva.

De la figura No. 19, se tiene que:

del triángulo PI-N-O:

$$Ec = \overline{PI-O} - Rc$$

y $\overline{PI-O} = (Rc + p) \sec \frac{\Delta}{2}$

entonces.-

$$Ec = (Rc + p) \sec \frac{\Delta}{2} - Rc \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (63)$$

12. Cuerda larga (CLe). Es la recta que une el TE y EC o el ET y el CE. De la expresión (32).

$$CLe = \sqrt{Xc^2 + Yc^2}$$

13. Angulo de la cuerda larga ($\phi'c$). Es el ángulo comprendido entre la tangente en TE y la cuerda larga.

De las ecuaciones (35) y (36).

$$\phi'c = \frac{\theta e}{3} - Z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (64)$$

donde.-

$$Z = 3.1 \times 10^{-3}\ \theta_e^{\,3} + 2.3 \times 10^{-8}\ \theta e^5$$

Cabe recordar que si $\theta e \leq 16^\circ$ la corrección Z suele despreciarse.

14. <u>Tangente larga (TL)</u>. Es el tramo de subtangente comprendido entre el TE o ET y la intersección con la tangente a EC o CE.

De la figura No. 19

$$TL = Xc - \overline{QR}$$

Del triángulo R-Q-EC

$$\overline{RQ} = Yc \cot \theta e$$

y entonces.-

$$TL = Xc - Yc \cot \theta e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

15. <u>Tangente corta (TC)</u>. Es el tramo de la tangente a CE o EC. Comprendida entre uno de estos puntos y la intersección con la subtangente correspondiente.

En la figura No. 19, del triángulo R-Q-EC:

$$\frac{Yc}{TC} = \text{sen } \theta e \qquad ; \quad \csc \theta e = \frac{TC}{Yc}$$

y entonces.-

$$TC = Yc \csc \theta e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

16. <u>Radio nominal (Rn)</u>. Es la suma obvia de el radio de la curva circular y la ordenada del PC de la curva circular -(p).

$$Rn = Rc + p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (67)$$

3.3 <u>Ejemplo numérico</u>.

3.3.1 <u>Cálculo de la longitud mínima de la clotoide en función de el peralte teórico y de el peralte máximo permitido o sobreelevación</u>.

<u>Datos</u>.

$$Rn = 460 \text{ m.}$$

De el inciso 2.7 tenemos que.-

a) Cálculo de la velocidad máxima.-

$$V = 5.13\sqrt{Rn} = 5.13\sqrt{460} = 110.026 > 80$$

$$\therefore \quad V = 80 \text{ km/hr.}$$

b) Cálculo de la pendiente máxima de enlace.

$$Sm = \frac{180}{80} = 2.25 < 4$$

$$\therefore \quad Sm = 2.25 \text{ mm/mto.}$$

c) Cálculo del peralte teórico:

$$Ht = \frac{11.8\ V^2}{Rn} = \frac{11.8\ (80)^2}{460} = 164.174$$

$$\therefore\ Ht = 164.174\ mm.$$

d) Cálculo del peralte práctico calculado:

$$Hrc = Ht - 30mm = 164.174 - 30 = 134.174\ mm.$$

e) Cálculo del peralte práctico (Hr).

Para obtener este valor, el valor obtenido en el peralte práctico calculado se redondea a su valor entero inmediato superior.

$$\therefore\ Hr = 135 < 160$$

$$\therefore\ Hr = 135\ mm.$$

f) Cálculo de la longitud mínima de la clotoide.-

$$Le = \frac{Hr}{Sm} = \frac{135}{2.25} = 60$$

$$\therefore\ Le = 60\ m.$$

3.3.2 <u>Cálculo de los elementos de la clotoide necesarios para su trazo.</u>

DATOS

PI = 2 + 428.184

Rn = 460 m.

$\Delta = 30^{\circ}\ 28'\ 40''$

Le = 60.000 m

c = 20 m.

3.3.2 (a) <u>Utilizando las fórmulas:</u>

1.) Cálculo de θe .-

$$\theta e = \frac{Gc\ Le}{40}$$

1a) Cálculo de Gc.-

$$Gc = \frac{1145.9156}{Rc}$$

1b) Cálculo de Rc.-

$$Rc = Rn - p$$

1o.-) Cálculo de p.-

$$p \doteq \frac{(Le)^2}{24Rc}$$

Para aplicar esta fórmula consideremos a $Rc \doteq Rn$ y encontremos el valor de p por aproximaciones sucesivas, esto es.-

$$p_1 = \frac{(60)^2}{24(460)} = 0.3261$$

Si $Rc = Rn - p$

$$Rc_1 = 460 - 0.3261 = 459.674$$

$$p_2 = \frac{(60)^2}{24(459.674)} = 0.3263$$

$$Rc_2 = 460 - 0.3263 = 459.674$$

$$\therefore \quad p = 0.3263 \text{ m.}$$

$$Rc = 459.674 \text{ m.}$$

Entonces:

$$Gc = \frac{1145.9156}{459.674} = 2^{\circ}.4928876$$

$$\therefore \quad Gc = 02^{\circ}\ 29'\ 34''$$

finalmente.-

$$\theta e = \frac{(02^\circ\ 29'\ 34'')\ (60)}{40}$$

$$\therefore \quad \theta e = 03^\circ\ 44'\ 21''$$

2.) Cálculo de las coordenadas Xc e Yc.

2a) Cálculo de Xc.-

$$Xc = \frac{Le}{100}\ (100 - 0.00305\ \theta e^2\ ) =$$

$$= \frac{60}{100}\ (100 - 0.00305\ (03^\circ\ 44'\ 21'')^2\ ) =$$

$$Xc = 59.9744\ m.$$

2b) Cálculo de Yc.-

$$Yc = \frac{Le}{100}\ (0.582\ \theta e - 0.0000126\ \theta e^3) =$$

$$= \frac{60}{100}\ (0.582\ (03^\circ\ 44'\ 21'') - 0.0000126(03^\circ\ 44'\ 21'')^3) =$$

$$Yc = 1.3053\ m.$$

3.) Cálculo de Δc:

$$\Delta c = \Delta - 2\,\theta e =$$

$$= 30^\circ\ 28'\ 40'' - 2(03^\circ\ 44'\ 21'') =$$

$$\Delta c = 22^\circ\ 59'\ 58''$$

4.) Cálculo de Ste .-

$$Ste = k + (Rc + p)\ \tan \frac{\Delta}{2} = k + Rn\ \tan \frac{\Delta}{2}$$

4a) Cálculo de k .-

$$k = Xc - Rc\ \text{sen}\ \theta e =$$

$$= 59.9744 - 459.674\ \text{sen}\ (03^\circ\ 44'\ 21'') =$$

$$\therefore\ k = 29.9970\ \text{m.}$$

4b) Cálculo de p .-

Podemos comprobar que el valor de p es el correcto, calculándolo de esta manera:

$$p = Yc - Rc\ \text{sen ver}\ \theta e$$

$$= 1.3053 - 459.674\ \text{sen ver}\ (03^\circ\ 44'\ 21'') =$$

$$= 0.3268\ \text{m} \qquad \therefore \qquad p = 0.3266\ \text{m.}$$

que difiere 5 diezmilímetros del obtenido anteriormente lo que nos indica que está correcto el cálculo.

Entonces.-

$$Ste = 29.9970 + 460.\tan \frac{(30^\circ\ 28'\ 40'')}{2} =$$

$$Ste = 155.312 \text{ m.}$$

5.) Cálculo de Lc .-

$$Lc = \frac{\Delta c}{Gc} \times 20$$

$$= \frac{22^\circ\ 59'\ 58''}{02^\circ\ 29'\ 34''} (20)$$

$$Lc = 184.529 \text{ m.}$$

6.) Cálculo de St .-

$$St = Rc \tan \frac{\Delta c}{2} =$$

$$= 459.674 \tan \left(\frac{22^\circ\ 59'\ 58''}{2} \right) =$$

$$St = 93.519 \text{ m.}$$

St = Subtangente de la curva circular

7.) Cálculo de las coordenadas rectangulares (X,Y) y polares (d, Δ) para su trazo en el campo.-

FORMULAS :

$$\theta_n{}^{o} = \left(\frac{Ln}{Le}\right)^2 \theta e$$

$$dn = \sqrt{Xn^2 + Y_n{}^2} = \text{distancia polar}$$

$$\theta_n = \theta rad = \theta_n^o \ \frac{\pi}{180}$$

$$\Delta n = \tan^{-1} \frac{Y}{X} = \text{deflexión}$$

$$X_n = L \left(1 - \frac{\theta^2}{10} \right)$$

$$Y_n = L \left(\frac{\theta}{3} \right)$$

Tomando cuerdas a cada 10 m., para el trazo de la clotoide:

Para L = 10 m.

$$\theta^o{}_{10} = \left(\frac{10}{60}\right)^2 \ (03^o\ 44'\ 21'') = 00^o\ 06'\ 13''.9$$

$$\theta_{10} = 00^o\ 06'\ 13''.9 \left(\frac{\pi}{180}\right) = 1.81279 \times 10^{-3}$$

$$X_{10} = 10 \left(1 - \frac{\theta^2}{10}\right) = 10.000 \qquad d_{10} = \sqrt{X^2{}_{10} + Y^2{}_{10}} = 10.000$$

$Y_{10} = 10\ (\frac{\theta}{3}) = 0.006$ $\qquad \Delta_{10} = \tan^{-1} (\frac{0.006}{10.000}) = 00^\circ\ 02'\ 04''$

Para L = 20 m.

$$\theta^\circ_{20} = (\frac{20}{60})^2 (03^\circ\ 44'\ 21'') = 00^\circ\ 24'\ 55''.6$$

$$\theta_{20} = 7.25\ 119 \times 10^{-3}$$

$X_{20} = 20\ (1 - \frac{\theta^2 20}{10}) = 20.000$ $\qquad d_{20} = \sqrt{X^2_{20} + Y^2_{20}} = 20.000$

$Y_{20} = 20\ (\frac{\theta 20}{3}) = 0.048$ $\qquad \Delta_{20} = \tan^{-1} \frac{Y20}{X20} = 00^\circ\ 08'\ 19''$

Para L = 30 m.

$\theta^\circ_{30} = 00^\circ\ 56'\ 05''.2$ $\qquad d_{30} = 30.000$

$\theta_{30} = 0.0163151$

$X_{30} = 29.999$ $\qquad \Delta_{30} = 00^\circ\ 18'\ 41''$

$Y_{30} = 0.163$

Para L = 40 m.

$\theta^\circ_{40} = 01^\circ\ 39'\ 42''.7$

$\theta_{40} = 0.0290047$ $\qquad d_{40} = 39.998$

$X_{40} = 39.997$ $\Delta_{40} = 00^\circ\ 33'\ 16''$

$Y_{40} = 0.387$

Para L = 50 m.

$\theta^o_{50} = 02^\circ\ 35'\ 48''$

$\theta_{50} = 0.0453199$ $d_{50} = 44.996$

$X_{50} = 49.990$

$\Delta_{50} = 00^\circ\ 51'\ 55''$

$Y_{50} = 0.755$

Para L = 60 m.

$\theta_e = \theta^o_{60} \ (\frac{60}{60})^2$ $\theta e = 03^\circ\ 44'\ 21''$

$\theta_{60} = 0.0652607$

$Xc = X_{60} = 59.9744$ $d_{60} = 59.989$

$Yc = Y_{60} = 1.3052$ $\Delta 60 = 01^\circ\ 14'\ 48''$

Como podemos ver las coordenadas anteriores no varían prácticamente en nada comparadas con las obtenidas en X_c y Y_c, - lo que demuestra la confiabilidad de nuestros cálculos.

Los datos que son puestos en los planos de proyecto de trazo son los siguientes:

DATOS DE LA CURVA CIRCULAR CON CLOTOIDES SIMETRICAS.

$\theta e= 03^{\circ}44'21''$	PI= 2+428.184	$\theta e= 03^{\circ}44'21''$
Xc= 59.9744 m.	$\Delta= 30^{\circ}28'40''$	Xc= 59.9744 m.
Yc= 1.3053	$\Delta c=$ 22 59 58	Yc= 1.3053
Le= 60.000	$Gc= 2^{\circ}.4928876$	Le= 60.000
	Ste= 155.312 m.	
	Lc= 184.529	
	St= 93.519	
	Rc= 459.674	
	Rn= 460.000	

Las coordenadas rectangulares y polares para el trazo de la clotoide las podemos ordenar como se muestra en la - tabla I.3.3

El kilometraje del TE es:

PI=	2+428.184
-Ste	-155.312
TE=	2+272.872
+Le=	60.000
EC=	2+332.872

ESTACION	No. PUNTO	LONGITUD ARCO	COORDENADAS RECTANGULARES		COORDENADAS POLARES	
			X	Y	d	Δ
TE 2+272.872	0	0	0.000	0.000	0.000	00° 00' 00"
282.872	1	10	10.000	0.006	10.000	00 02 04
292.872	2	20	20.000	0.048	20.000	00 08 19
302.872	3	30	29.999	0.163	30.000	00 18 41
312.872	4	40	39.997	0.387	39.998	00 33 16
322.872	5	50	49.990	0.755	49.996	00 51 55
EC 2+332.872	6	60	59.974	1.305	59.989	01 14 48

TABLA I. 3.3

3.3.2 b.-) Utilizando tablas.-

I.-) Utilizando las tablas contenidas en las páginas 342 y 343 de el "Manual del proyecto geométrico de Carreteras", editado por la Secretaría de Asentamientos Humanos y Obras Públicas (SAHOP), Ed. 1977.

Estas tablas que en el mencionado Manual están marcadas con el número 7-C en las páginas 342 y 343 y que en este trabajo se insertan tal cuál en las páginas 99 y 100; nos permiten obtener directamente los elementos de una clotoide de 100m. de longitud.

Si queremos obtener los elementos para una curva de longitud Le, los valores tabulados deben multiplicarse por el factor Le/100.

Estas tablas nos permiten obtener θe, p, k, Yc, Xc, TL, TC y Ø'c directamente. Los demás elementos de la curva, así como las coordenadas necesarias para su trazo los podemos calcular en la forma como se obtuvieron en el ejemplo anterior.

El valor de θe y Ø'c es proporcionado directamente. Para nuestro ejemplo anterior tenemos que:

Si p=0.3263

Entonces: $p\left(\frac{100}{Le}\right) = 0.3263\left(\frac{100}{60}\right) = 0.5438$

Con este valor entramos a la tabla y vemos que:

Para θe, interpolando:

θe	p
03° 40'	0.53
50	0.56
10	0.03
x	0.0138

$$x = \frac{10(0.0138)}{0.03} =$$

$$x = 4.'6$$

$$\therefore \quad \theta e_{100} = \begin{array}{r} 03^{\circ}\ 40' \\ +\ \ 04.6 \\ \hline 03\ \ 44.6 \end{array}$$

$\theta e = 03^{\circ}\ 44'\ 36''$

Para k:

$$k_{100} = 49.993$$

$$k = 49.993\left(\frac{60}{100}\right)$$

$k = 29.996$ m.

Para Yc:

Yc	p
2.133	0.53
2.229	0.56
0.096	0.03
x	0.0138

$$x = \frac{0.096(0.0138)}{0.03} =$$

$$x = 0.04416$$

$$\therefore \quad Yc_{100} = \begin{array}{r} +2.133 \\ 0.044 \\ \hline 2.177 \end{array}$$

$Yc= 2.177(\frac{60}{100})$ $Yc= 1.3062$ m.

Para Xc:

Xc	p
99.959	0.53
99.955	0.56
0.004	0.03
x	0.0138

$$x= \frac{0.004(0.0138)}{0.03}$$

$x= 0.00184$

$$Xc_{100}= \begin{array}{r} 99.959 \\ -\ 0.002 \\ \hline 99.957 \end{array}$$

$Xc= 99.957(\frac{60}{100})$ $Xc= 59.974$ m.

Para TL:

$TL_{100}= 66.681$

$TL= 66.681(\frac{60}{100})$ $TL= 40.009$ m.

Para TC:

$TC_{100}= 33.346$

$TC= 33.346(\frac{60}{100})$ $TC= 20.008$ m.

Para $\phi'c$

$\phi'c$	p
$01^\circ\ 13'\ 19''.8$	0.53
01 16 39.8	0.56
03 20.0	
$3'.33$	0.03
x	0.0138

$$x= \frac{3.33(0.0138)}{0.03}$$

$x= 1'.53= 01'\ 31''9$

$$\phi'c= \begin{array}{r} 01^\circ\ 13'\ 19''.8 \\ +\ \ 01\ \ 31.9 \\ \hline 01\ \ 14\ \ 51.7 \end{array}$$

$\phi'c= 01^\circ 14' 51''7$

θ	p	h	Y_c	X_c	TL	TC	ϕ'_c
0° 10	0.02	50.000	0.097	100.000	66.667	33.333	0° 3' 20.0"
0 20	0.05	50.000	0.194	100.000	66.667	33.333	0 6 40.0
0 30	0.07	50.000	0.291	99.999	66.667	33.334	0 10 0.0
0 40	0.10	50.000	0.388	99.999	66.667	33.334	0 13 20.0
0 50	0.12	50.000	0.485	99.998	66.667	33.334	0 16 40.0
1 0	0.15	49.999	0.582	99.997	66.667	33.335	0 20 0.0
1 10	0.17	49.999	0.679	99.996	66.668	33.335	0 23 20.0
1 20	0.19	49.999	0.776	99.995	66.669	33.335	0 26 40.0
1 30	0.22	49.999	0.873	99.993	66.669	33.335	0 29 60.0
1 40	0.24	49.999	0.970	99.992	66.670	33.336	0 33 20.0
1 50	0.27	49.998	1.067	99.990	66.670	33.336	0 36 40.0
2 0	0.29	49.998	1.163	99.988	66.671	33.337	0 39 60.0
2 10	0.32	49.998	1.260	99.986	66.672	33.338	0 43 20.0
2 20	0.34	49.997	1.357	99.983	66.673	33.339	0 46 40.0
2 30	0.36	49.997	1.454	99.981	66.673	33.339	0 49 60.0
2 40	0.39	49.996	1.551	99.978	66.674	33.340	0 53 19.9
2 50	0.41	49.995	1.648	99.976	66.675	33.341	0 56 39.9
3 0	0.44	49.995	1.745	99.973	66.676	33.342	0 59 59.9
3 10	0.46	49.995	1.842	99.969	66.677	33.343	1 3 19.9
3 20	0.49	49.994	1.939	99.966	66.679	33.344	1 6 39.9
3 30	0.51	49.994	2.036	99.962	66.680	33.345	1 9 59.9
3 40	0.53	49.993	2.133	99.959	66.681	33.346	1 13 19.8
3 50	0.56	49.993	2.229	99.955	66.682	33.347	1 16 39.8
4 0	0.58	49.992	2.326	99.951	66.684	33.349	1 19 59.8
4 10	0.61	49.991	2.423	99.947	66.685	33.350	1 23 19.8
4 20	0.63	49.990	2.520	99.943	66.687	33.351	1 26 39.9
4 30	0.65	49.990	2.617	99.938	66.688	33.353	1 29 59.7
4 40	0.68	49.989	2.714	99.934	66.690	33.354	1 33 19.7
4 50	0.70	49.989	2.810	99.929	66.692	33.356	1 36 39.7
5 0	0.73	49.987	2.907	99.924	66.693	33.357	1 39 59.6
5 10	0.75	49.986	3.004	99.919	66.695	33.359	1 43 19.6
5 20	0.78	49.986	3.101	99.913	66.697	33.361	1 46 39.5
5 30	0.80	49.985	3.198	99.908	66.699	33.363	1 49 59.5
5 40	0.82	49.984	3.294	99.902	66.701	33.364	1 53 19.4
5 50	0.85	49.983	3.391	99.896	66.703	33.366	1 56 39.4
6 0	0.87	49.982	3.488	99.890	66.705	33.368	1 59 59.3
6 10	0.90	49.981	3.585	99.884	66.707	33.370	2 3 19.3
6 20	0.92	49.980	3.681	99.878	66.709	33.372	2 6 39.2
6 30	0.94	49.979	3.778	99.871	66.712	33.374	2 9 59.2
6 40	0.97	49.977	3.875	99.865	66.714	33.376	2 13 19.1
6 50	0.99	49.976	3.971	99.858	66.716	33.378	2 16 39.0
7 0	1.02	49.975	4.068	99.851	66.719	33.381	2 19 58.9
7 10	1.04	49.974	4.165	99.844	66.721	33.383	2 23 18.9
7 20	1.07	49.973	4.261	99.836	66.724	33.385	2 26 38.8
7 30	1.09	49.971	4.358	99.829	66.727	33.388	2 29 58.7
7 40	1.11	49.970	4.455	99.821	66.729	33.390	2 33 18.6
7 50	1.14	49.969	4.551	99.813	66.732	33.393	2 36 38.5
8 0	1.16	49.968	4.648	99.805	66.735	33.395	2 39 58.4
8 10	1.19	49.966	4.744	99.797	66.738	33.398	2 43 18.3
8 20	1.21	49.965	4.841	99.789	66.741	33.401	2 46 38.2
8 30	1.24	49.963	4.937	99.780	66.744	33.403	2 49 58.1
8 40	1.26	49.962	5.034	99.771	66.747	33.406	2 53 18.0
8 50	1.28	49.960	5.130	99.763	66.750	33.409	2 56 37.9
9 0	1.31	49.959	5.227	99.754	66.753	33.412	2 59 57.7
9 10	1.33	49.957	5.323	99.744	66.756	33.415	3 3 17.6
9 20	1.36	49.956	5.420	99.735	66.760	33.418	3 6 37.5
9 30	1.38	49.954	5.516	99.725	66.763	33.421	3 9 57.3
9 40	1.40	49.953	5.612	99.716	66.766	33.424	3 13 17.2
9 50	1.43	49.951	5.709	99.706	66.770	33.427	3 16 37.1
10° 0'	1.45	49.949	5.805	99.696	66.773	33.430	3° 19' 56.9"

TABLA 7-C. ELEMENTOS DE LA CURVA DE TRANSICION DE 100 M DE LONGITUD

θ	p	k	Y_c	X_c	TL	TC	ϕ'_c
10° 10'	1.48	49.948	5.901	99.686	66.777	33.434	3° 23' 16.8"
10 20	1.50	49.946	5.998	99.675	66.781	33.437	3 26 36.6
10 30	1.53	49.944	6.094	99.665	66.784	33.440	3 29 56.4
10 40	1.55	49.942	6.190	99.654	66.788	33.444	3 33 16.2
10 50	1.57	49.940	6.287	99.643	66.792	33.447	3 36 36.1
11 0	1.60	49.939	6.383	99.632	66.796	33.451	3 39 55.9
11 10	1.62	49.937	6.479	99.621	66.800	33.454	3 43 15.7
11 20	1.65	49.935	6.575	99.609	66.804	33.458	3 46 35.5
11 30	1.67	49.933	6.671	99.598	66.808	33.462	3 49 55.3
11 40	1.69	49.931	6.767	99.586	66.812	33.465	3 53 15.1
11 50	1.72	49.929	6.863	99.574	66.816	33.469	3 56 34.9
12 0	1.74	49.927	6.959	99.562	66.821	33.473	3 59 54.6
12 10	1.77	49.925	7.056	99.550	66.825	33.477	4 3 14.4
12 20	1.79	49.923	7.152	99.538	66.829	33.481	4 6 34.2
12 30	1.81	49.921	7.246	99.525	66.834	33.485	4 9 53.9
12 40	1.84	49.919	7.343	99.512	66.838	33.489	4 13 13.7
12 50	1.86	49.916	7.439	99.499	66.843	33.493	4 16 33.4
13 0	1.89	49.914	7.535	99.486	66.847	33.498	4 19 53.2
13 10	1.91	49.912	7.631	99.473	66.852	33.502	4 23 12.9
13 20	1.94	49.910	7.727	99.460	66.857	33.506	4 26 32.7
13 30	1.96	49.908	7.823	99.446	66.862	33.511	4 29 52.4
13 40	1.98	49.905	7.919	99.433	66.867	33.515	4 33 12.1
13 50	2.01	49.903	8.014	99.419	66.871	33.519	4 36 31.8
14 0	2.03	49.901	8.110	99.405	66.876	33.524	4 39 51.5
14 10	2.06	49.898	8.206	99.390	66.881	33.529	4 43 11.2
14 20	2.08	49.896	8.302	99.376	66.887	33.533	4 46 30.9
14 30	2.10	49.893	8.397	99.361	66.892	33.538	4 49 50.5
14 40	2.13	49.891	8.493	99.347	66.897	33.543	4 53 10.2
14 50	2.15	49.888	8.588	99.332	66.902	33.548	4 56 29.9
15 0	2.18	49.886	8.684	99.317	66.908	33.552	4 59 49.5
15 10	2.20	49.883	8.780	99.302	66.913	33.557	5 3 9.2
15 20	2.22	49.881	8.875	99.286	66.919	33.562	5 6 28.9
15 30	2.25	49.878	8.971	99.271	66.924	33.567	5 9 48.4
15 40	2.27	49.876	9.066	99.255	66.930	33.572	5 13 8.1
15 50	2.30	49.873	9.161	99.239	66.935	33.578	5 16 27.7
16 0	2.32	49.870	9.257	99.223	66.941	33.583	5 19 47.3
16 10	2.34	49.868	9.352	99.207	66.947	33.588	5 23 6.9
16 20	2.37	49.865	9.447	99.190	66.953	33.593	5 26 26.5
16 30	2.39	49.862	9.543	99.174	66.959	33.599	5 29 46.1
16 40	2.42	49.859	9.638	99.157	66.965	33.604	5 33 5.6
16 50	2.44	49.856	9.733	99.140	66.971	33.610	5 36 25.2
17 0	2.46	49.854	9.828	99.123	66.977	33.615	5 39 44.8
17 10	2.49	49.851	9.923	99.106	66.983	33.621	5 43 4.3
17 20	2.51	49.849	10.018	99.089	66.989	33.627	5 46 23.8
17 30	2.54	49.845	10.113	99.071	66.995	33.632	5 49 43.4
17 40	2.56	49.842	10.208	99.053	67.002	33.638	5 53 2.9
17 50	2.58	49.839	10.303	99.036	67.008	33.644	5 56 22.4
18 0	2.61	49.836	10.398	99.018	67.015	33.650	5 59 41.9
18 10	2.63	49.833	10.493	98.999	67.021	33.656	6 3 1.4
18 20	2.66	49.830	10.588	98.981	67.028	33.662	6 6 20.9
18 30	2.68	49.827	10.683	98.962	67.034	33.668	6 9 40.3
18 40	2.70	49.824	10.778	98.944	67.041	33.674	6 12 59.8
18 50	2.73	49.820	10.873	98.925	67.048	33.680	6 16 19.2
19 0	2.75	49.817	10.967	98.906	67.055	33.686	6 19 38.7
19 10	2.78	49.814	11.062	98.887	67.062	33.693	6 22 58.1
19 20	2.80	49.811	11.157	98.867	67.069	33.699	6 26 17.6
19 30	2.82	49.808	11.251	98.848	67.076	33.705	6 29 37.0
19 40	2.85	49.804	11.346	98.828	67.083	33.712	6 32 56.4
19 50	2.87	49.801	11.440	98.808	67.090	33.718	6 36 15.8
20° 0'	2.90	49.799	11.535	98.788	67.097	33.725	6° 39' 35.2"

II.-) Utilizando las tablas de las páginas 299 a 302, contenidas en el libro "Topografía II" de el Ing. Alfredo Salazar Torres.

Una de estas tablas se inserta tal cuál en la página 108 y es la que vamos a ocupar para resolver nuestro mismo ejemplo anterior. Esta tabla es la "Hoja No. 6-8", de la página 300 en el libro mencionado. En estas tablas se considera a la clotoide como una curva espiral, que como ya se dijo anteriormente, su radio y su curvatura van variando gradualmente punto por punto; son curvas compuestas de arcos circulares de longitudes constantes, cuyos grados van aumentando gradualmente.

En este caso a cada punto de la curva compuesta se le llama (CC) con su número de orden como subíndice (1,2,3,4,etc.). El grado puede ir aumentando según una ley que nosotros podemos escoger como mejor nos convenga; una ley sería por ejemplo que los grados vayan aumentando de grado en grado.

Las tablas nos proporcionan los datos para que el trazo de la curva se realice como si trazaramos curvas simples, cuyo procedimiento de trazado se supone conocido.

Las tablas nos proporcionan varios elementos de la clotoide, los cuáles son:

SIMBOLOGIA CAMINOS	SIMBOLOGIA TABLAS	
Rn	D	Radio nominal
k	T	Abscisa del PC o del PT
θe	δ	Deflexión de la clotoide
p	d	Ordenada del PC o PT
CLe	$\overline{PC-PCC}$	Cuerda larga de la clotoide
Xc,Yc	X,Y	Coordenadas del EC o del CE
TE	PC	Punto donde termina la tangente y empieza la clotoide.

(Ver figura No. 19)

Estas tablas son para diferentes variaciones de los grados de curvatura, vienen para variaciones del $0^{\circ}15'$, para variaciones de $0^{\circ}30'$, y para variaciones de 01°, siendo estas variaciones para cuerdas de 10 m., es decir que en cada 10 m. de longitud el grado va aumentando $0^{\circ}30'$, por ejemplo.

Además nos proporcionan los valores de las deflexiones necesarias, según la variación que estemos usando, para poder trazar la curva como si fuera una curva circular simple, ya sea con el aparato instalado en el TE o bien en alguno de los CC.

También las tablas nos proporcionan el logaritmo de Rn, con el fin de poder verificar por logaritmos nuestros cálculos.

El siguiente ejemplo se hará con la simbología que se viene utilizando, toda vez que se hizó una analogía entre la simbología usada en caminos y la usada en las tablas.

La variación de los grados de curvatura será de 30' para cuerdas de 10 mts.

Entonces se tiene que.-

PI = 2 + 428.184

$\Delta = 30^{\circ}\ 28'\ 40''$

$Gc = 02^{\circ}\ 29'\ 34''$

variación de 30' por

arco de 10 m.

1.-) Cálculo de Ste.-

$$Ste = k + (R + p) \tan \Delta/2 = k + Rn \tan \Delta/2$$

Para obtener Rn se tiene.-

Gc	Rn = D
$2^{\circ}\ 00'$	573.098
2 30	458.617
30'	114.481
29' 34"=29!567	x

$$x = \frac{29!567(114.481)}{30'} = 112.827$$

$$\begin{array}{r} 573.098 \\ -\ 112.827 \\ \hline 460.271 \end{array}$$

$\therefore$ Rn = 460.271 m.

Ahora:

$\dfrac{\Delta}{2} = 15^{\circ}\ 14'\ 20''$; $\tan \Delta/2 = 0.2724229$

(valor obtenido por tablas trigonométricas o cualquier otro método).

$\therefore \quad Rn \tan \Delta/2 =$

$= 460.271\ (0.2724229) = 125.388$

Para obtener k se tiene.-

$x = \dfrac{29.567(4.998)}{30} = 4.926$

Gc	k = T
$2^\circ\ 00'$	14.999
30	19.997
$30'$	4.998
29.567	x

$$\begin{array}{r} 14.999 \\ \underline{4.926} \\ 19.925 \end{array}$$

k = 19.925 m.

como se puede observar k tiene distinto valor y es que usando estas tablas, la longitud de la curva depende exclusivamente de la variación del grado de curvatura.

Entonces.-

Ste = 19.925 + 125.388

Ste = 145.313 m.

Verificando el cálculo por logaritmos para tener mayor seguridad.-

$$\begin{array}{rr} \text{Log Rn} = & 2.663014 \\ \log \tan 15^\circ\ 14'\ 20'' = & \underline{9.435244} \\ & 2.098258 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \text{Antilogaritmo} = & 125.388 \\ k = & \underline{19.925} \\ & 145.313 \end{array}$$

Como se puede observar el cálculo está bien.

2.-) Cálculo del kilometraje en el TE

$$
\begin{aligned}
TE &= PI - Ste \\
&= 2 + 428.184 \\
&\underline{-145.313} \\
TE &= 2 + 282.871
\end{aligned}
$$

En el TE y EC como los puntos son obligados, no se completa la estación de 20 m. como normalmente se realiza el principio de las curvas, sino que se va llevando la fracción, y se completa la estación de 20 m. hasta el EC, o sea en la curva circular simple, por lo tanto para el primer punto visado, le agregamos 10 m. al kilometraje del TE.

3.-) Cálculo de la longitud de la clotoide.-

$$Le = \frac{40\theta e}{Gc}$$

De las tablas se tiene que.-

$$
\begin{array}{r}
Gc \\
2^\circ\ 00' \\
\underline{30} \\
30' \\
29.567
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\theta e \\
1^\circ\ 30' \\
\underline{2\ \ 30} \\
01^\circ\ 00' \\
x
\end{array}
\qquad
x = \frac{29.567'(01^\circ)}{30'} = 0.^\circ 9855666
$$

$$x = 00^\circ\ 59'\ 08''$$

$$
\begin{array}{r}
01^\circ\ 30' \\
\underline{59'\ 08''} \\
02^\circ\ 29'\ 08''
\end{array}
$$

$$\theta e = 02^\circ\ 29'\ 08''$$

$$Le = \frac{40\ (02^\circ\ 29'\ 08'')}{02^\circ\ 29'\ 34''}$$ $Le = 39.884$ m.

Finalmente podemos ordenar las deflexiones que obtenemos de la tabla en la forma que sigue:

a.-) Si las deflexiones las medimos a partir del TE, se toman los elementos de la parte donde dice deflexiones, de el 1er. renglón, o sea tránsito en PC (TE).

ESTACION	P.V.	DEFLEXIONES	OBSERVACIONES
TE 2 + 428.184	438.184	00° 07' 30"	CC1
	448.184	00 18 30	CC2
	458.184	00 35 15	CC3
	468.184	00 56 12	EC

teniendo el inicio de la curva circular simple (EC) esta se puede trazar por el método tradicional.

b.-) Ahora supongamos que por necesidad se tuviera que colocar el tránsito en CC_2 ; entonces las deflexiones se tomarían de el 3er. renglón o sea tránsito colocado en CC 01° 30' .

ESTACION	P.V.	DEFLEXIONES	OBSERVACIONES
	428.184	00° 26' 30"	TE
	438.184	00 15 00	CC1

CC_2 2 + 448.184	———	—————	CC2
	458.184	$00^\circ\ 22'\ 30''$	CC3
	468.184	$00^\circ\ 48'\ 07''$	EC

La clotoide de salida se calcula en forma análoga.

HOJA Nº 6-8
ESPIRALES
Variación 0° 30' x 10 M.

FUNCIONES DE LAS ESPIRALES

G DE LA CURVA CIRCULAR	D	Logaritmo de D	T	θ DE LA ESPIRAL EN CADA EXTREMO DE LA CURVA CIRCULAR	[illegible] DE LA CURVA Circular	Cuerda Entre El P.C. De La Espiral Y El P.C.C. De La Curva Circular	COORDENADAS DE LOS P.C.C. DE CADA ESPIRAL: ABSCISA X	ORDENADA Y
1°00'	1145.940	3.0591619	5.000	0° 15'	0.010	10.000	10.000	0.022
1°30'	764.013	2.8831007	10000	0°45'	0.046	20.000	20.000	0.109
2°00'	573.098	2.7582269	14999	1°30'	0.111	30000	29.998	0.305
2°30'	458.617	2.6614502	19.997	2°30'	0.214	39.997	39.992	0.654
3°00'	382.401	2.5825190	24.993	3°45'	0.385	49.992	49.977	1.200
3°30'	328.070	2.5159665	29.985	5° 15'	0.615	59.981	59.946	1.984
4°00'	287.455	2.4585699	34.972	7°00'	0.918	69.839	69.889	3.051
4°30'	256.017	2.4082688	39.951	9°00'	1.304	79.920	79.792	4.443
5°00'	231.056	2.3637173	44.916	11°15'	1.800	89.857	89.636	6.201
5°30'	210.823	2.3239180	49.867	13°45'	2.395	99.759	99.399	8.365
6°00'	194.178	2.2882000	54.798	16°30'	3.105	109.604	109.055	10.975
6°30'	180.340	2.2560921	59.698	19°30'	3.951	119.394	118.563	14.065
7°00'	168.729	2.2271800	64.567	22°45'	4.925	129.106	127.891	17.669

DATOS: CUERDAS DE 20M.

Grado G	Radio R	Logaritmo
0°30'	2291.838	3.3601835
1°00'	1145.930	3.0591581
1°30'	763.967	2.8830744
2°00'	572.987	2.7581440
2°30'	458.403	2.6612475
3°00'	382.016	2.5820818
3°30'	327.455	2.5151517
4°00'	286.537	2.4571807
4°30'	254.713	2.4060511
5°00'	229.256	2.3603207
5°30'	208.428	2.3189560
6°00'	191.073	2.2811993
6°30'	176.389	2.2464718
7°00'	163.804	2.2143240

NOTA.– Las deflexiones que están arriba de la diagonal son para determinar los C.C. hacia adelante y las que están abajo, para verificar las posiciones de los C.C. hacia atrás.– La intersección de la columna y el renglón de C.C. del mismo valor define la posición del tránsito en dicho C.C.–

Longitud de la espiral= $l = \frac{10 G}{0.5}$

D E F L E X I O N E S

Transito en	P.C. 0° 30'	C.C. 1° 00'	C.C. 1° 30'	C.C. 2° 00'	C.C. 2° 30'	C.C. 3° 00'	C.C. 3° 30'	C.C. 4° 00'	C.C. 4° 30'	C.C. 5° 00'	C.C. 5° 30'	C.C. 6° 00'	C.C. 6° 30'	C.C. 7° 00'
P.C. 0° 30'		0°07 1/2'	0°18 1/2'	0°35 1/4'	0°56 1/2'	1°22 1/4'	1°54'	2°30 1/4'	3°11 1/2'	3°57 3/4'	4°48 3/4'	5°44 3/4'	6°45 3/4'	7°52'
C.C. 1° 00'	0°07 1/2'		0°15'	0°33 1/2'	0°57 3/4'	1°26 1/2'	1°59 3/4'	2°39'	3°22 3/4'	4°11 1/2'	5°04 3/4'	6°03 3/4'	7°07 1/2'	8°15 3/4'
C.C. 1° 30'	0°26 1/2'	0°15'		0°22 1/2'	0°48 1/2'	1°20 3/4'	1°56 1/2'	2°37 3/4'	3°24'	4°15 1/4'	5°11 3/4'	6°12 1/2'	7°18 3/4'	8°29 3/4'
C.C. 2° 00'	0°54 3/4'	0°41 1/2'	0°22 1/2'		0°30'	1°03 1/2'	1°42 3/4'	2°26 1/2'	3°14 3/4'	4°09'	5°07 3/4'	6°11 1/2'	7°19 3/4'	8°33 3/4'
C.C. 2° 30'	1°33 1/2'	1°17 1/4'	0°56 1/2'	0°30'		0°37 1/2'	1°18 1/2'	2°05 1/4'	2°56 1/2'	3°52 3/4'	4°54'	6°00 3/4'	7°11 1/4'	8°27 1/4'
C.C. 3° 00'	2°22 3/4'	2°03 1/2'	1°39 3/4'	1°11 1/2'	0°37 1/2'		0°45'	1°33 1/2'	2°27 3/4'	3°26 1/2'	4°29 3/4'	5°39'	6°52 3/4'	8°11 1/2'
C.C. 3° 30'	3°21'	3°00 1/4'	2°33 1/2'	2°02 1/2'	1°26 1/2'	0°45'		0°52 1/2'	1°48 1/2'	2°50 1/4'	3°58 1/2'	5°07 1/2'	6°24'	7°45 3/4'
C.C. 4° 00'	4°29 3/4'	4°06'	3°37 3/4'	3°03 1/2'	2°24 3/4'	1°41 1/2'	0°52 1/2'		1°00'	2°03 1/4'	3°12 3/4'	4°28 1/4'	5°44 3/4'	7°09'
C.C. 4° 30'	5°48 3/4'	5°22 1/4'	4°51'	4°15 1/4'	3°33 1/2'	2°47 1/4'	1°56 1/2'	1°00'		1°07 1/2'	2°18 1/2'	3°35 3/4'	4°56 1/2'	6°22 3/4'
C.C. 5° 00'	7°17 3/4'	6°48 3/4'	6°14 3/4'	5°36'	4°52 3/4'	4°03 1/2'	3°09 3/4'	2°11 1/2'	1°07 1/2'		1°15'	2°33 1/2'	3°57 3/4'	5°26 1/2'
C.C. 5° 30'	8°56 1/4'	8°25 1/2'	7°48 3/4'	7°07 1/4'	6°21'	5°30 1/4'	4°33 1/2'	3°32 1/2'	2°26 1/2'	1°15'		1°22 1/4'	2°48 1/4'	4°20 3/4'
C.C. 6° 00'	10°45 1/2'	10°11 1/2'	9°32 1/4'	8°48 3/4'	7°59 3/4'	7°06'	6°07 3/4'	5°03 1/2'	3°54 1/4'	2°41 1/4'	1°22 1/2'		1°30'	3°03 1/2'
C.C. 6° 30'	12°44 1/4'	12°07 3/4'	11°26 1/4'	10°40 1/2'	9°48 1/2'	8°52 1/4'	7°51'	6°45 1/4'	5°33 1/2'	4°17 1/4'	2°56 1/2'	1°30'		1°37 1/2'
C.C. 7° 00'	14°53'	14°14 1/4'	13°30 1/4'	12°41 1/4'	11°47 3/4'	10°48 3/4'	9°44 3/4'	8°36'	7°22 3/4'	6°03 1/2'	4°39 3/4'	3°11 1/2'	1°37 1/4'	

C A P I T U L O 4 . -

4. OTRAS FORMAS DE UTILIZAR LA CLOTOIDE COMO CURVA DE ENLACE.

4.1 La clotoide como curva de inflexión.

La curva de inflexión es una curva en forma de S, que une dos arcos de circunferencia, de curvaturas contrarias, sin alineación recta intermedia.

Consta de dos ramas de clotoide, con radio $R=\infty$ en su punto de origen común, y la misma tangente en dicho punto.

Cada rama puede tener parámetro distinto. Sin embargo, generalmente, se escogen parámetros iguales.

Para el cálculo es preciso tener en cuenta, también, las clotoides exteriores enlazadas con los círculos. Por consiguiente, el trazado total es la sucesión clotoide-círculo-clotoide de inflexión-círculo-clotoide.

Tanto los parámetros K_1, K_2, K_3 , como los radios Rc_1, Rc_2 , pueden tener magnitudes cualesquiera. Además de los elementos citados, obtenidos gráficamente, es preciso que esté determinado el segmento N que se introduce como un valor obligado. Ver figura No. 20.

Se utiliza la misma simbología que se ha venido usando a lo largo de este trabajo, pero ahora el subíndice in dica a que clotoide se está refiriendo, por ejemplo:

K_1= Parámetro de la primera clotoide.

Ki= Parámetro de las clotoides de inflexión.

K_2= Parámetro de la segunda clotoide.

Y además se utilizan otros simbolos que más adelante se verá que significan.

Los datos con que se cuenta son los siguientes:

DATOS:

Coordenadas de los puntos de inflexión siguientes:

PI_9, PI_{12}, PI'_{10} y PI'_{11}

Además:

K_1, Rc_1, Ki, Rc_2, K_2, N.

Las incógnitas que debemos despejar para poder trazar la curva en el campo son las siguientes:

INCOGNITAS:

a.) Elementos de las clotoides para K_1, Ki y K_2, necesarios para su trazo en el campo.

b.) Coordenadas de los vértices o puntos de inflexión siguientes:

PI_{10}, PI_{11}

c.) Magnitud de las subtangentes:

T_1, Ste_{11}, Ste_{12}, T_2

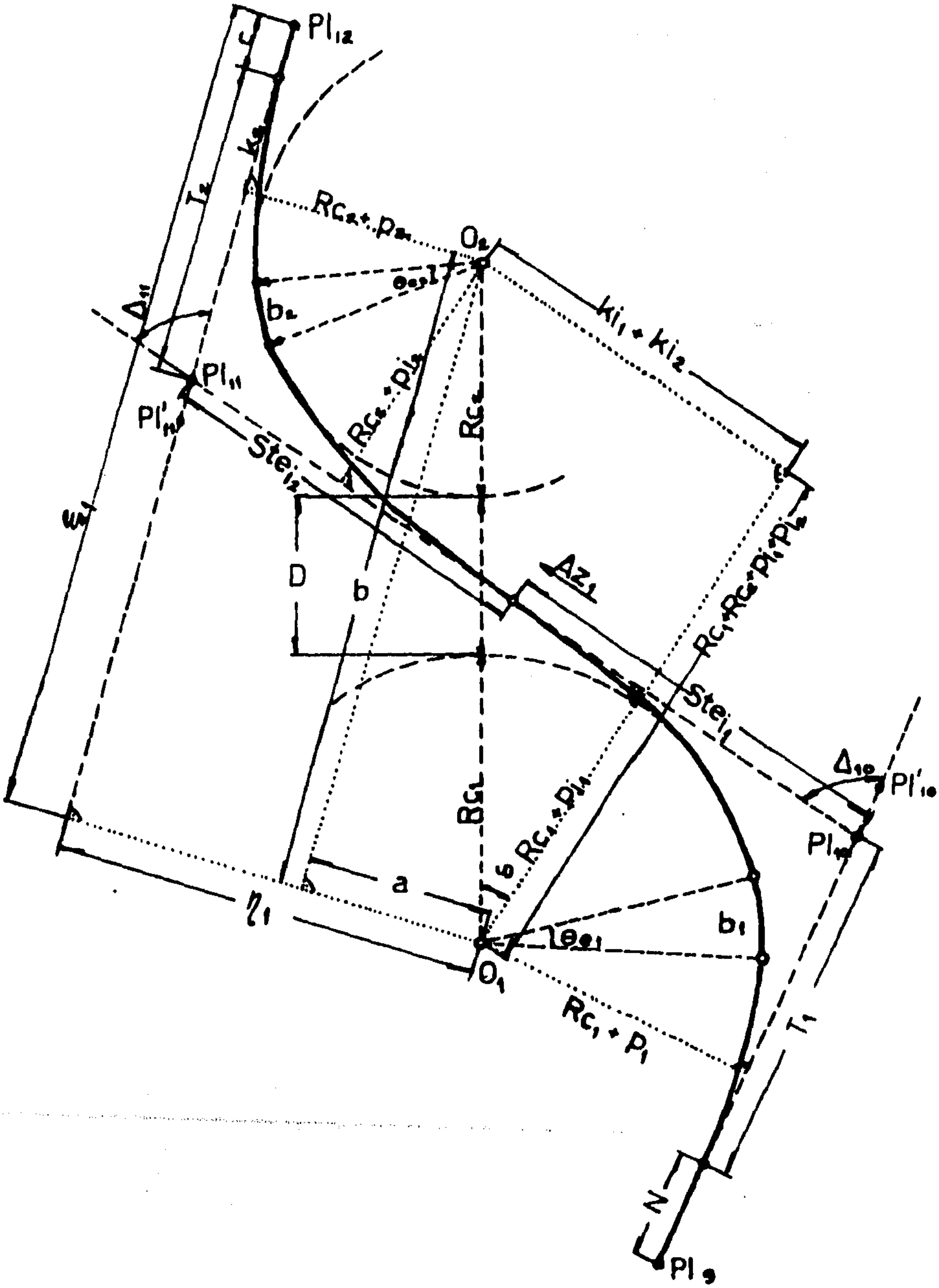


Fig. No. 20 La clotoide como curva de inflexión.

d.) Desarrollo de los arcos circulares:

$$\widehat{b}_1 \text{ y } \widehat{b}_2$$

SOLUCION:

1. Los elementos de las clotoides se pueden obtener con las fórmulas vistas anteriormente o se pueden obtener por medio de tablas como las descritas en el capítulo anterior.

2. Mediante los elementos obtenidos en (1) , obtener las coordenadas del centro O_1.

3. Referir las coordenadas de O_1 a la tangente $\overline{PI_{12}-PI'_{11}}$ dando como resultado: η_1 y ξ_1.

4. Hallar la distancia $\overline{O_1-O_2}$.-

   De la figura No. 20 se observa que:

   $$\overline{O_1-O_2}=\sqrt{(Rc_1+Rc_2+pi_1+pi_2)^2+(ki_1+ki_2)^2} \quad \text{. . . . . (68)}$$

5. Hallar los segmentos a, b y c.

   Nuevamente de la figura No. 20:

   $$a=(Rc_2+p_2)-\eta_1 \quad \text{. . . . . (69)}$$

   $$b=\sqrt{(\overline{O_1-O_2})^2-a^2} \quad \text{. . . . . (70)}$$

   $$c=\xi_1-b-k_2 \quad \text{. . . . . (71)}$$

6. Mediante los elementos con que se cuente hallar las coordenadas de O_2.

7. Hallar el acimut de la línea $\overline{O_1-O_2}$ (Az_0), mediante las coordenadas de O_1 y O_2 . Si se quiere como prueba, se pue

de hallar $\overline{O_1-O_2}$ a partir de las coordenadas calculadas.

8. Hallar el ángulo δ .

Nuevamente de la figura No. 20 .

$$\tan \delta = \frac{ki_1 + ki_2}{Rc_1 + Rc_2 + p_1 + p_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (72)$$

9. Hallar los ángulos de deflexión Δ_{10} y Δ_{11} . Para esto primero obtenemos los acimutes $Az_{\overline{9-10'}}$, y $Az_{\overline{11'-12}}$ mediante las coordenadas que se obtienen de estos vértices.

Ahora obtenemos el acimut de la línea $\overline{PI_{10}-PI_{11}}$, que es el acimut de la tangente de inflexión, lo designaremos como Az_1 y vale:

$$Az_1 = Az_0 \pm \delta \pm 90^{\circ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (73)$$

El signo de δ depende de diversos factores; lo mejor es deducirlo de un croquis a escala.

Finalmente Δ_{10} y Δ_{11} se obtienen como diferencias entre los acimutes ($Az_{\overline{9-10'}} - Az_1$) y ($Az_{\overline{11'-12}} - Az_1$). El signo de la diferencia se deduce también mediante un croquis.

10. Hallar las subtangentes T_1, Ste_{11}, Ste_{12}, T_2 mediante el método expresado en el capítulo anterior.

11. Hallar los elementos de la poligonal $PI_9 - PI_{10} - PI_{11} - PI_{12}$ a partir de las subtangentes N, T_1, Ste_{11}, Ste_{12}, T_2 y c, y de los ángulos Δ_{10} y Δ_{11}. De este modo se obtiene una comprobación y, al mismo tiempo, las coordenadas definiti

vas de los puntos de inflexión PI_{10} y PI_{11}. Según la experiencia, el error de cierre no debe ser mayor de $\pm$ 3 cm. ; en caso contrario existe algún error en los cálculos.

Las coordenadas de PI'_{11} y PI'_{12} ya no sirven y las podemos suprimir.

12. Finalmente hallamos los desarrollos de los arcos $\widehat{b}_1$ y $\widehat{b}_2$:

De la figura No. 20:

Si:

$$\begin{aligned} \theta e_1 &= \Delta_{10} - (\Delta_1 - \Delta_{i1}) \\ \theta e_2 &= \Delta_{11} - (\Delta_2 - \Delta_{i2}) \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots (74)$$

Entonces:

Si:

$$\frac{\widehat{b}_1}{\theta e_1} = \frac{Rc_1 \cdot \pi}{180^\circ}$$

Entonces:

$$\widehat{b}_1 = \frac{Rc_1 \cdot \pi \cdot \theta e_1}{180^\circ}$$

y $\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots (75)$

$$\widehat{b}_2 = \frac{Rc_2 \cdot \pi \cdot \theta e_2}{180^\circ}$$

4.2 <u>Curva circular simple con clotoides asimétricas.</u>

Algunas veces el terreno no permite utilizar la curva circular simple con clotoides simétricas y se tiene que utilizar este tipo de curva, también es debido a que algunas veces las subtangentes se superponen al introducir las curvas clotoides y hay necesidad de modificar la longitud de una de ellas; trayendo como consecuencia que se necesite calcular por separado los elementos de trazo para cada una de ellas.

En la figura No. 21 se puede observar que para cada curva clotoide existirán diferentes valores para cada uno de los elementos que las comforman, calculandose cada uno de estos en la forma que ya se vió anteriormente, a excepción de las subtangentes que se calculan como en seguida se expone:

Se tiene que:

$Ste_1 = k_1 + \overline{AB} - \overline{PI-B}$

Para k_1 ya se dedujo en el capítulo anterior como se calcula su valor y es igual a:

$k_1 = Xc_1 - Rc_1 sen\theta e_1$

De la figura No. 21 se puede ver que:

$\overline{A-B} = Rn_1 \tan \frac{\Delta}{2}$

Y también se puede ver que:

$\overline{PI-B} \parallel FP$

$BP \parallel IF$

$IM = p_1 - p_2 = FN$

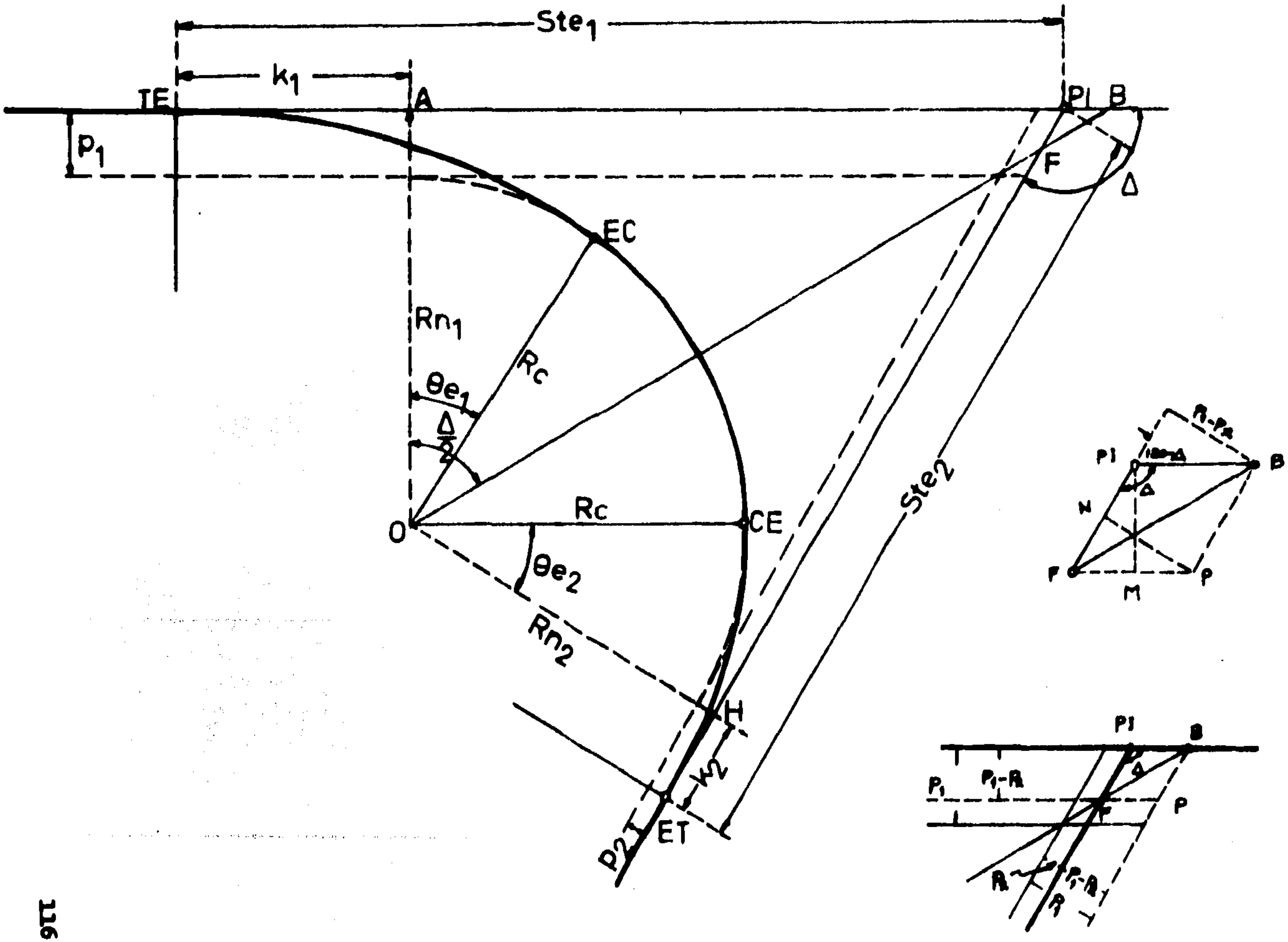


Fig. No. 21 Curva circular simple con clotoides asimétricas.

Se puede deducir por lo tanto que el cuadrilátero:

PI-F-P-B es un rombo.

Esto debido a que sus lados opuestos son paralelos y además las perpendiculares a estos lados y que pasan por el vértice opuesto a ellos, también lo son.

De lo anterior y de la misma figura se puede deducir que:

$$\overline{PI-B} = \overline{PI-F} = \frac{p_1 - p_2}{sen(180^\circ - \Delta)} = \frac{p_1 - p_2}{sen\,\Delta}$$

$$\therefore \quad \overline{PI-B} = (p_1 - p_2)csc\,\Delta$$

Y entonces:

$$Ste_1 = k_1 + Rn_1 tan\frac{\Delta}{2} - (p_1 - p_2)csc\,\Delta \quad . \; . \; . \; . \; . \; (76)$$

Sabiendo que:

$$Rn_1 = Rc_1 + p_1$$

Ahora para Ste_2:

$$Ste_2 = k_2 + \overline{H-F} + \overline{PI-F}$$

$$k_2 = Xc_2 - Rc_2 sen\Theta e_2$$

$$\overline{H-F} = Rn_2 tan\frac{\Delta}{2}$$

$$\overline{PI-F} = (p_1 - p_2)csc$$

En este caso $Rc = Rc_1 = Rc_2$

$$\therefore \quad Ste_2 = k_2 + Rn_2 tan\frac{\Delta}{2} + (p_1 - p_2)csc\,\Delta \quad . \; . \; (77)$$

También: $\quad Rn_2 = Rc + p_2$

C A P I T U L O 5 .-

5. TRAZO DE CURVAS CIRCULARES CON CLOTOIDES SIMETRICAS.

Este procedimiento de trazo se tomó del "Instructivo para el trazo de las curvas en el campo" que edita la Compañia Mexicana de Aerofoto, aunque se le hicieron algunas modificaciones.

Los pasos que se deben de seguir para el trazo de estas curvas son los siguientes:

1º Deberán ser recabados de los planos de proyecto de trazo, los siguientes datos:

Tomando los datos del ejemplo anterior:

			ℓ	X	Y
$\Theta e=03^\circ 44'21''$	PI=2+428.184	$\Theta e=03^\circ 44'21''$	0.000	0.000	0.000
Xc=59.9744m.	$\Delta=30^\circ 28'40''$	Xc=59.9744 m.	10.000	10.000	0.006
Yc= 1.3053	$\Delta c=22\ 59\ 58$	Yc= 1.3053	20.000	20.000	0.048
Le=60.0000	$Gc=2^\circ.4928876$	Le=60.0000	30.000	29.999	0.163
	Ste=155.312 m.		40.000	39.997	0.387
	Lc=184.529		50.000	49.990	0.755
	St= 93.159		60.000	59.974	1.305
	Rc=459.674				
	Rm=460.000				

Donde como ya se vió anteriormente:

X e Y: Son las coordenadas de los puntos sobre las clotoides (para el trazo por coordenadas).

d: Son las cuerdas de los puntos sobre las clotoides (para el trazo por deflexiones), los ángulos como ya se vió anteriormente en el ejemplo numérico se calculan trigonométricamente con los valores de las coordenadas.

Para los demás elementos se puede consultar la simbología que se da en la figura No. 19.

2º Intersectando las tangentes se localiza el punto de inflexión (PI).

3º Centrando el teodolito en el PI y visando un punto sobre la tangente, se mide la distancia Ste a partir del PI y sobre ambas tangentes, obteniendo así los puntos TE y ET.

4º A partir de los puntos TE y ET, se procede a medir hacia el PI y sobre la misma tangente la distancia Xc.

5º Conocido el punto Xc, procedemos a medir sobre la misma tangente y en dirección del TE la distancia U, con la que obtenemos el punto Q.

(Como se puede ver en la figura No. 19 $U = TC \cos \theta e$).

6º Centrando el aparato en el punto Q se visa el PI y se mide el ángulo θe, con lo que se define la tangente sobre la cuál se mide la distancia TC para obtener así el punto EC y a partir de este la subtangente de la curva circular.

7º Se traslada el aparato al punto Xc ya determinado con anterioridad, visando el PI, levantando una normal en dirección a la curva y midiendo la distancia Yc comprobamos la ubicación del EC.

NOTA: Si tanto lineal como angularmente coincide este punto con el EC ubicado anteriormente (ver punto 6º) se procede con el trazo, de lo contrario se revisan los pasos anteriores de trazo o los cálculos para encontrar el error y corregirlo. Estos mismos procedimientos se llevarán a cabo sobre las dos tangentes, obteniendo de esta manera los puntos principales de la curva (TE, EC, CE, ET).

5.1 <u>Métodos de trazo.</u>

Existen dos procedimientos para efectuar el trazo de una clotoide en el campo.

a.) Por deflexiones.

b.) Por coordenadas.

a.) Trazo por deflexiones:

Los datos necesarios para realizar el trazo por este procedimiento son: ángulos (deflexiones) y distancias (Δ y d - respectivamente).

Centrando el aparato en el TE visando al PI, medimos cada una de las cuerdas mediante la deflexión y la distancia correspondiente, hasta llegar al EC (última deflexión).

b.) Trazo por coordenadas:

Datos necesarios: coordenadas X e Y.

1º Conocidas las tangentes TE-PI (Ste_1) y ET-PI (Ste_2), que para este caso son iguales, ubicamos cada una de las abscisas X.

2º Centrando el aparato en cada uno de estos puntos y levantando una normal a las tangentes, medimos la ordenada Y.

3º Uniendo estos puntos se obtienen cada una de las cuerdas de la clotoide.

Este procedimiento se recomienda para el caso en que se trabaje sobre un eje auxiliar ó cuando se encuentra un obstáculo que impida el trazo por deflexiones.

El trazo de la curva circular se realiza de la manera tradicional a partir de los puntos EC y CE.

B I B L I O G R A F I A.

1.- ANSPECTOS GENERALES DE LA INGENIERIA TOPOGRAFICA EN EL DISEÑO Y CONSTRUCCION DE UNA LINEA ELEVADA DEL FERROCARRIL METROPOLITANO (METRO) EN LA CIUDAD DE MEXICO.
Por Ubertino González González. Tesis(ingeniero topógrafo y geodesta) UNAM, Fac. de Ingeniería.

2.- CALCULO Y TRAZADO DE CURVAS CLOTOIDES UTILIZANDO COMPUTADORES ELECTRONICOS.
Por Edgar CHargoy Ramírez. Tesis (ingeniero topógrafo y geodesta) UNAM, Fac. de Ingeniería.

3.- CURVAS DE TRANSICION EN CARRETERAS; MANUAL DE CLOTOIDES PARA PROYECTO Y REPLANTEO.
Por Alfred Krenz y Horst Osterloh.

4.- FUNDAMENTOS DE FISICA.
Por Frederick Bueche.

5.- INSTRUCTIVO PARA EL TRAZO DE CURVAS EN EL CAMPO.
Compañía Mexicana de Aerofoto.

6.- LECCIONES DE FISICA.
Por Alejandro Félix Estrada, Juan de Oyarzabal Orueta y Mario Velazco Hernández.

7.- MANUAL DEL PROYECTO GEOMETRICO DE CARRETERAS.
Secretaría de Asentamientos Humanos y Obras Públicas.

8.- TOPOGRAFIA.
Por el Ing. Sabro Higashida Miyabara.

9.- TOPOGRAFIA.
Por el Ing. Miguel Montes de Oca.

10.- TOPOGRAFIA II.

Por Alfredo Salazar Torres.

11.- TRABAJOS TOPOGRAFICOS PARA EL PROYECTO Y CONSTRUCCION DEL ANILLO PERIFERICO DE LA CIUDAD DE MEXICO, TRAMOS AV. ELECTRICISTAS Y PROLONGACION RIO DE TACUBAYA.

Por Victor Robles Almeraya. Tesis (ingeniero topógrafo y geodesta) UNAM, Fac. de Ingeniería.