UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ARAGON

"APUNTES DE MECANICA DE MATERIALES I"

T E S I S
Que para obtener el título de:
INGENIERO CIVIL
p r e s e n t a:
RAMON SORIANO GORDILLO

San Juan de Aragón, Méx. 1989.

P R O L O G O

Históricamente hablando, los principios fundamentales de la resistencia de materiales se desarrollan casi totalmente después de las leyes de la estática, ésta considera los efectos externos de una fuerza sobre un cuerpo (cambiando su estado de movimiento). Mientras que la resistencia de materiales trata de los efectos internos, es decir, los estados de esfuerzo y deformación producidos dentro de los límites del cuerpo.

Al elaborar ésta tesis se penso en la importancia que tiene ésta materia como base para el diseño en ingeniería. Una buena parte del trabajo se preparó con notas tomadas de clase y de las prácticas de laboratorio correspondientes al curso de Mecánica de Materiales I. Por esta razón, se ha escrito teniendo en cuenta principalmente el punto de vista del estudiante. Como se proporciona suficiente material y ejercicios, el texto puede servir para estimular a los alumnos a que continuen sus investigaciones en esta área de la ingeniería. También se espera que pueda servir como libro de consulta o de referencia.

El capítulo I relaciona los conceptos básicos más importan--

tes del curso. El estudiante debe de comprender a fondo la terminología empleada y analizar las formulas que daran por resultado los valores requeridos. Pero más importante es "visualizar" el comportamiento de los cuerpos sujetos a cargas. Los ejercicios numéricos en este capítulo se colocan hasta el final, con el objeto de que primero conozcan los conceptos expuestos.- Esta disposición no se continúa en los siguientes capítulos, debido a que la mayoría de los lectores habrán pasado las dificultades iniciales con el nuevo vocabulario, técnicas básicas de investigación y objetivos del curso.

En la realización de esta tesis influyeron los profesores de esta asignatura de la E.N.E.P. Aragón, los compañeros de la escuela y el trabajo (Subdirección de Laboratorios de la D.G.S.T. de la SCT), así como los libros consultados y reseñados en la bibliografía. En particular expreso mi gratitud al Ing. Pablo García San Martín, por su apoyo en la selección de gráficas y figuras, y en la revisión del original.

I N D I C E

Página

Página

Página

CAP. I. INTRODUCCION Y CONCEPTOS BASICOS

I-1. OBJETIVO DE LOS CURSOS DE MECANICA DE MATERIALES

El objetivo de estos cursos es proporcionar al estudiante de ingeniería, los conocimientos que le permitan investigar las relaciones que existen entre las fuerzas exteriores (cargas), aplicadas a una estructura de ingeniería, con la naturaleza de las fuerzas internas (esfuerzos) y las deformaciones resultantes.

Es práctica común denominar a la resistencia de materiales como "Mecánica de los sólidos deformables" y considerarla como una rama de la mecánica teórica, debido a que se basa en las leyes de la estática, sin conocimiento de las cuales el estudio de la resistencia de materiales sería imposible. Sin embargo, no debe preocuparnos mucho el título de esta materia o la forma en que se expongan los conceptos, lo importante es comprender los métodos analíticos que nos permitan determinar la resistencia, la rigidez y la estabilidad+ de los diversos elementos que

---

+ Estabilidad. Es la propiedad del sistema de mantener su estado de equilibrio durante las acciones exteriores.

soportan cargas.

Como podemos inferir fácilmente, todos los sólidos, en cierta medida, tienen las propiedades de resistencia y rigidez, esto quiere decir que, dentro de ciertos límites son capaces, sin sufrir grandes variaciones en sus dimensiones geométricas y sin llegar a la rotura, de soportar cargas.

Por otro lado tenemos que, la resistencia y la rigidez de una pieza estructural dependen de sus dimensiones, de su forma y también de ciertas propiedades físicas del material de que está constituida. Estas propiedades de los materiales están generalmente determinadas por el estudio experimental de su comportamiento en una máquina de ensaye. El estudio de la resistencia de materiales tiene por objeto predecir precisamente de qué modo influirán estas propiedades geométricas y físicas de la estructura en su comportamiento en las condiciones de servicio.

En resumen, en este curso se estudian las características del comportamiento mecánico de los materiales y los conceptos básicos para el dimensionamiento de elementos estructurales. Además, se incluyen numerosos ejercicios que nos permiten conocer el diseño de miembros sujetos a carga axial, flexión, torsión, etc., empleando cualquiera de los materiales comunes en construcción.

I-2. EL PROCESO DEL DISEÑO ESTRUCTURAL. SOLICITACIONES. RESPUESTAS.

En este trabajo, el término ESTRUCTURA se usa en el sentido de que nos permite representar edificios, puentes, máquinas y realmente cualquier cosa que se diseñe para soportar cargas aplicadas. Todas las estructuras de ingeniería, se construyen ensamblando diversas partes, generalmente llamadas MIEMBROS, para formar el producto terminado.

La resistencia de materiales no es un curso de diseño estructural (o de diseño de máquinas), pero proporciona las bases para un dimensionamiento científico en estos cursos. El objetivo del diseño consiste en determinar las dimensiones y características de los elementos de una estructura para que esta cumpla cierta función con un grado de seguridad razonable. Debido a esto es preciso conocer las relaciones que existen entre las características de una estructura (refuerzo, tamaño, etc.), las solicitaciones que debe soportar y los efectos que producen en ésta. En otras palabras, es necesario conocer las características ACCION-RESPUESTA de la estructura.

Las principales solicitaciones o acciones exteriores son: el peso propio, las cargas vivas, las presiones por viento, las aceleraciones por sismo y los asentamientos. La respuesta de una estructura o de un elemento, es su comportamiento bajo una acción determinada. Puede expresarse como deformación, agrietamiento, durabilidad, vibración. Desde luego la respuesta es función de las caracteristicas de la estructura o del elemento estructural considerado.

En los prodedimientos de diseño, el dimensionamiento se lleva a cabo a partir de las acciones interiores, calculadas por medio de un analisis de la estructura. Debe notarse que, para diseñar satisfactoriamente no siempre es necesario obtener las acciones interiores inducidas por las solicitaciones esteriores. Muchos diseños han sido desarrollados directamente a partir del estudio de modelos estructurales.

En general en este campo de estudio el ingeniero se enfrenta con dos tipos de problemas, DIMENSIONAMIENTO y REVISION. Los problemas de dimensionamiento son aquellos en los que es necesario determinar, de la manera más económica, el material, forma y tamaño que debera tener un cuerpo para resistir la acción de las fuerzas externas. En los probelmas de revisión los datos que se conocen son el tipo de material, la forma y tamaño del cuerpo, así como las cargas que este debe resistir y el proyectista tiene que calcular la magnitud de las fuerzas internas (esfuerzos) que se originan en dicho cuerpo, para decidir si su tamaño es suficiente o no.

I-3. RELACIONES CARGA-DEFORMACION. MATERIALES DUCTILES Y FRAGILES. COMPORTAMIENTO ELASTICO (LINEAL Y NO LINEAL) E INELASTICO.

Carga (P). Se dice que existe una carga, cuando se tiene una fuerza aplicada a una estructura de ingeniería.

Deformación total (ΔL ó u). Es la alteración o variación de la forma, en este estudio nos referimos al incremento longitudi nal, siempre y cuando no este referenciado a la unidad de longitud.

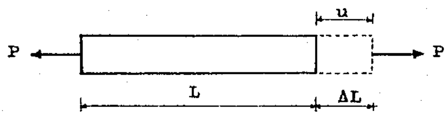


Fig. I-1. Croquis de una probeta sometida a la carga (P) y su deformación total (ΔL).

La barra de la figura I-1, se alarga ligeramente debido a la aplicación de la carga. En resistencia de materiales, estos cambios de longitud también se conocen como elongaciones, contracciones o bien, deformaciones totales.

Los laboratorios de ensaye de materiales están equipados con máquinas apropiadas que producen ciertas deformaciones típicas de las probetas o muestras de ensaye, tales como las de tensión, compresión, torsión y flexión.

De todos los ensayes mecánicos de los materiales de construcción, los que más ampliamente se utilizan son los de tensión. Para permitir una comparación de los resultados de los ensayes sobre un material, con los obtenidos a partir de ensayes sobre otro material, los procedimientos y las proporciones para las probetas (dependiendo del material que se este muestreando), han sido normalizados.

Relaciones carga-deformación. Ordinariamente las máquinas de ensaye a tensión, estan provistas de un dispositivo que traza - automáticamete, a cierta escala el DIAGRAMA DE ENSAYE representando la relación entre la carga (P) y la extensión (ΔL) de la muestra.

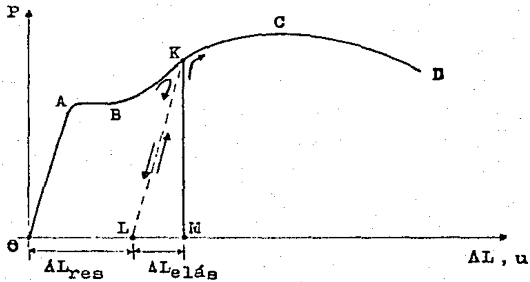


Fig. I-2. Diagrama carga-deformación total para el acero al carbono.

En la Fig. I-2, está representado el diagrama carga-deformación total típico para el acero al carbono, veamos algunas particularidades esenciales de este tipo de diagramas:

La zona de elasticidad (OA). Trabajando en esta zona, el material recobrará su forma original una vez retirada la carga, - es decir que, se comporta según la ley de Hooke.

La zona de fluencia general (AB). Aquí tiene lugar un aumento considerable de la longitud de la probeta, sin el aumento --

apreciable de la carga. La existencia del escalón de fluencia -(tramo AB del diagrama) no es característico de todos los metales.

La zona de endurecimiento (BC). En esta zona el alargamiento de la probeta va acompañado del correspondiente aumento de la -carga, pero de manera mucho más lenta (cientos de veces) que en el tramo elástico. En la etapa de endurecimiento en la probeta-se vislumbra el lugar de la futura rotura y comienza a formarse lo que generalmente se denomina CUELLO, estrechamiento local de la probeta (Fig. I-3). Si se observa cuidadosamente la probeta-durante el experimento, se notará que mientras el espécimen se-está alargando, su diámetro también se va reduciendo.

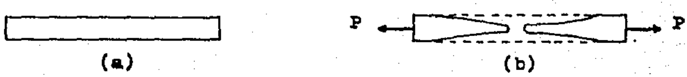


Fig. I-3. Antes (a) y después (b) de la carga.

La zona de fluencia local (CD). Aquí el alargamiento de la -probeta transcurre simultáneamente a la disminución de la fuerza, a pesar de que el esfuerzo (promedio) en la sección trans-versal del cuello aumenta. El alargamiento de la probeta tiene, en este caso, un caracter local.

El punto (D) corresponde a la rotura de la probeta. En el ca so de muchos materiales la rotura ocurre sin la apreciable aparición del cuello.

Si el espécimen sujeto a tensión se carga dentro de los límites correspondientesa la zona elástica y después se descarga, - los puntos trazados en el diagrama durante la descarga quedarán sobre la recta original (OA). Sin embargo, si el espécimen se - carga por encima de esta zona, como es el caso del punto (K), - en la Fig. I-2, entonces durante el proceso de descarga, la dependencia entre la fuerza (P) y la extensión (ΔL) se representará por la recta KL. El ensayo demuestra que esta recta es paralela a OA. Al descargar el espécimen no desaparece completamente el alargamiento, sino que disminuye sólo en una magnitud i-- gual a la parte elástica del alargamiento (segmento LM). El segmento OL representa el alargamiento residual y se denomina ALARGAMIENTO PLASTICO. Así pues,

$$OM = \Delta L_{elás} + \Delta L_{res}$$

Al cargarla de nuevo, el diagrama de tensión irá por la recta LK y después según la curva KCD (Fig. I-2), como si no existiera descarga intermedia alguna.

Para dar una valoración cuantitativa de las propiedades del- material, construimos de nuevo el diagrama de tensión, pero en- el sistema de coordenadas σ y ε. Para ello, dividimos entre -- "A" las ordenadas y entre "L"las abscisas, siendo A y L, respectivamente, el área de la sección transversal y la longitud de -

trabajo de la probeta antes de ser cargada. Puesto que estas magnitudes son constantes, el diagrama $\sigma = f(\varepsilon)$ de la Fig.I-4 tendrá el mismo aspecto que el diagrama de tensión $P = f(\Delta L)$ de la Fig. I-2.

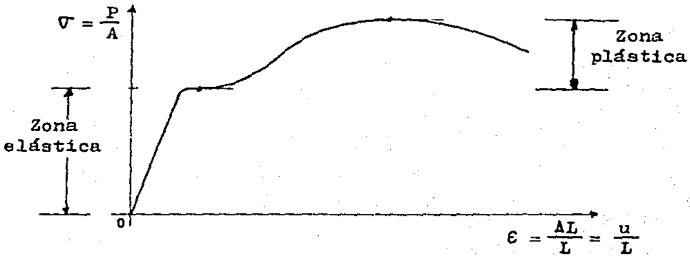


Fig. I-4. Diagrama esfuerzo-deformación unitaria para el acero al carbono.

Materiales dúctiles y frágiles. Los materiales metálicos usados en la ingeniería se clasifican generalmente en dúctiles y frágiles.

Un material es dúctil y maleable si puede soportar grandes deformaciones plásticas (residuales) antes de la rotura. La ductilidad está asociada con los esfuerzos de tensión (por ejemplo, un material puede ser estirado en alambres); la maleabilidad está asociada con los esfuerzos de compresión (por ejemplo, un material puede ser laminado en hojas delgadas). La mayoría de los materiales que son dúctiles también son maleables.

La frágilidad es la propiedad opuesta a la dúctilidad, y consiste en la capacidad del material de destruirse sin deformaciones residuales apreciables. Entonces un material frágil (o mejor dicho, quebradizo) se fracturará a deformaciones relativamente bajas. En estos materiales el ALARGAMIENTO A LA ROTURA[+] (δ) no supera el 2 – 5 % y, en toda una serie de casos, es del orden de centésimos de por ciento.

La ductilidad y la fragilidad pueden ilustrarse fácilmente mediante diagramas esfuerzo-deformación unitaria, tales como los de la figura I-5.

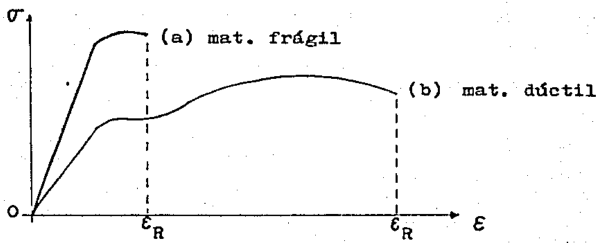


Fig. I-5. Diagramas esfuerzo-deformación unitaria para material frágil (a) y material dúctil (b).

La gráfica (a) muestra el diagrama esfuerzo-deformación unitaria para un material frágil o quebradizo. Puede verse que la elongación total antes de la rotura es considerablemente menor que la del material dúctil, representado por la gráfica (b).

[+] Véase la sec. I-4, donde se define el alargamiento a la rotura.

La división de los materiales en dúctiles y frágiles es convencional y no solamente porque entre unos y otros no existe un límite bien definido del alargamiento a la rotura (δ). Según sean las condiciones del ensayo, muchos materiales frágiles son capaces de comportarse como dúctiles y viceversa. Frecuentemente se toma como línea divisoria entre las dos clases de materiales un alargamiento arbitrario (deformación unitaria) de 0.05 cm/cm; es decir, si un material se fractura a una deformación unitaria de 5% o menos, se considera como quebradizo.

<u>Elasticidad</u>. Es la propiedad que tienen los materiales para recobrar su tamaño y forma originales, cuando se retiran las fuerzas a que han estado sometidos. Esta propiedad es muy variable entre los diferentes materiales, ya que algunos no recuperan sus dimensiones originales, más allá de cierto esfuerzo+.

Comportamiento elástico. En este caso nos referimos al comportamiento de los materiales que están sometidos a un cierto nivel de carga y/o esfuerzo, que unicamente les producen deformaciones elásticas (deformaciones no permanentes). El material trabajado en este rango elástico, es capaz de recuperar por completo sus dimensiones iniciales, después que se han retirado las fuerzas deformadoras.

+ Este esfuerzo se conoce como Límite de elasticidad y se estudia detalladamente en la sección I-4, en "Diagramas esfuerzo-deformación unitaria"

Comportamiento elástico lineal. Es el comportamiento de los "Materiales elásticos" (materiales que presentan un rango elástico amplio, en comparación con su rango plástico), cuyo diagrama esfuerzo-deformación unitaria está representado por una línea recta (Fig. I-6(a)), esto quiere decir, que entre la carga aplicada y la deformación que se produce, existe una relación directamente proporcional.

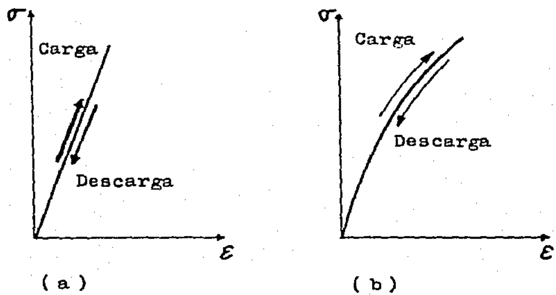


Fig. I-6. Comportamiento de los materiales en el rango elástico: (a) lineal, (b) no lineal.

Comportamiento elástico no lineal. Es el comportamiento de los "Materiales elásticos" que presentan una curva en su diagrama esfuerzo-deformación unitaria (Fig. I-6(b)), esto quiere decir que, la relación existente entre la carga aplicada y la deformación que se presenta, no es directamente proporcional, pudiendo ser parabólica o exponencial.

Plasticidad. Es la propiedad opuesta a la elasticidad. Un -- "Material perfectamente plástico" es el que no recupera sus dimensiones originales una vez que se retiran las cargas que causaron esta deformación. Probablemente no exista ningún material perfectamente plástico. Ejemplos de estos materiales son el barro y el plomo.

Se considera como medida de la plasticidad el alargamiento - en el momento de la rotura (δ). Cuanto mayor sea δ tanto más plásticoserá el material.

Comportamiento inelástico (plástico). En este caso nos referimos al comportamiento de los "Materiales Plásticos", es decir, materiales que cuando se les aplican carga responden con - una deformación inelástica (también conocida como deformación - plástica o permanente). Por lo tanto, hay que tomar en cuenta - que trabajando el material en esta zona plástica subsistirán deformaciones permanentes en el elemento (o la estructura) al -- descargarlo. Véase la Fig. I-4.

I-4. ESFUERZO NORMAL Y DEFORMACION UNITARIA. MODULO DE ELASTICIDAD.

Tratándose de problemas planares la notación y representación esquemática de las componentes de fuerza y momento que se emplean en este texto, se indican en la Fig. I-7.

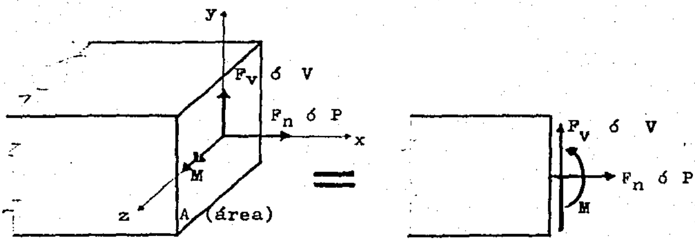


Fig. I-7. Definición de componentes de magnitudes relacionadas con fuerzas y momentos, en la sección transversal de un cuerpo.

Por tanto observamos que, en la sección transversal de una viga pueden ser necesarios tres elementos de un sistema de fuerzas para mantener el segmento en equilibrio. Tales elementos son una fuerza axial (P ó F_n), una fuerza cortante (V ó F_v) y un momento flexionante (M).

Esfuerzo[+]. El esfuerzo es una función de la fuerza interior en un cuerpo, que a su vez se produce por la aplicación de fuerzas exteriores.

Para entender la composición y distribución de las fuerzas -

[+] En algunos textos se utiliza el término TENSION en lugar del de ESFUERZO.

interiores, consideremos una barra simple sujeta a una carga -- axial (P) en cada extremo, como se representa en la Fig. I-8.

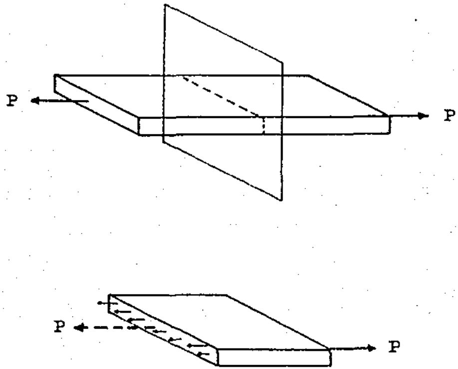


Fig. I-8. Carga axial e intensidad de la fuerza en una barra simple.

La fuerza interior total en la barra es la resultante de todas las fuerzas en las fibras y es igual a (P). Sin embargo, no-es común hablar de la fuerza total en la barra, sino más bien - de la intensidad de la fuerza en las fibras. Esta "intensidad - de la fuerza" se llama ESFUERZO o ESFUERZO UNITARIO, y se define como la fuerza por unidad de área. En términos algebraicos,

$$\text{Esfuerzo} = \frac{P}{A} \quad ; \quad (\text{Fza./Long.}^2) \qquad (I.1)$$

Si separamos de un cuerpo sometido a cargas exteriores, un - cubo de dimensiones infinitesimales, figura I-8'. Todos los esfuerzos que actúan en él se pueden identificar perfectamente.

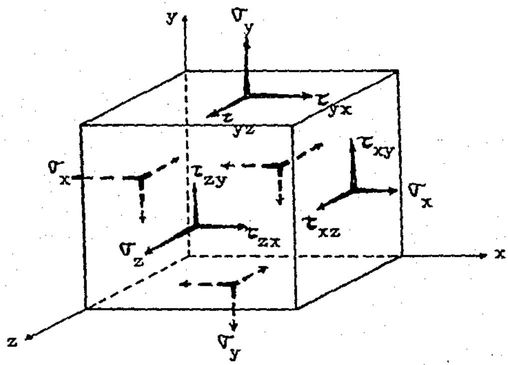


Fig. I-8'. Estado más general de esfuerzo que puede actuar - en un elemento.

El primer subíndice de los esfuerzos cortantes (τ), los relaciona con un plano perpendicular a un eje dado; el segundo designa la dirección del esfuerzo. Sobre las caras cercanas del - cubo, o sea, sobre las caras más alejadas del origen, los sentidos de los esfuerzos se consideran positivos si coinciden con - los sentidos positivos de los ejes. Sobre las caras proximas al origen y a partir del concepto de equilibrio entre acción y -- reacción, los esfuerzos positivos actúan en sentido contrario a los positivos de los ejes. En el caso de los esfuerzos normales es suficiente un sólo subíndice en σ para definir, sin ambigüedad, este valor.

Los esfuerzos normales se definen y se investigan en esta sec ción, mientras que el concepto de esfuerzo cortante se proporcio na en la sección siguiente (I-5).

Si aislamos un cubo infinitesimal, a partir de una barra sometida unicamente a carga axial (carga aplicada a lo largo de - su eje), como se muestra en la figura I-8". La unica clase de - esfuerzos que aparecen en este cubo son los esfuerzos normales- de tensión sobre dos caras del cubo. Tal estado de esfuerzo en- un elemento se denomina ESFUERZO UNIAXIAL. En la práctica raravez se emplean vistas isometricas del cubo; más bien se utili-- zan diagramas simplificados como los de la figura I-8"(b). No - obstante, es importante que no se pierda de vista el aspecto -- tridimensional del problema.

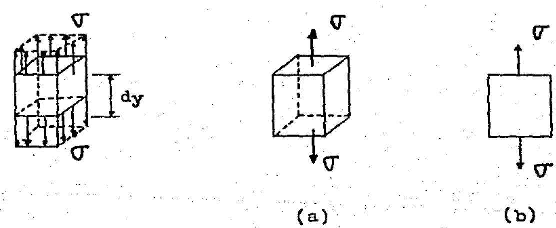


Fig. 8". Estado de esfuerzo uniaxial. En este caso se repre-- sentan esfuerzos de tensión.

Esfuerzo normal (σ). Partiendo de la definición de esfuerzo que acabamos de dar, tenemos que el esfuerzo normal, o el esfuerzo que actúa perpendicular a la sección, es:

$$\sigma = \frac{F_n}{A} \quad ; \qquad (\text{Fza./Long.}^2) \qquad (\text{I.2})$$

donde F_n - es la fuerza normal en la sección transversal

A - es el área sobre la que actúa la fuerza normal.

Dependiendo del sentido que tenga la fuerza normal, en el área de la sección transversal, el esfuerzo normal puede ser de tensión+ (positivo) o de compresión (negativo), como se indica en la figura I-9.

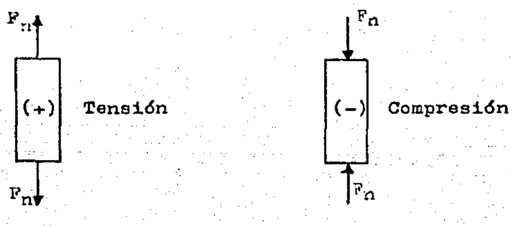


Fig. I-9. Signos convencionales para el esfuerzo normal.

+ También se utiliza el término TRACCION en lugar de utilizar el de TENSION.

Deformación unitaria o simplemente deformación (ε). Para — obtener la deformación unitaria, se mide el alargamiento total- ΔL (Fig. I-1), en la longitud inicial L de la probeta, para- cualquier incremento predeterminado de carga; y hallamos a par- tir de estos valores el alargamiento por unidad de longitud.

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad ; \qquad (\text{Long./Long.}) \qquad (\text{I.3})$$

Esta expresión nos permite calcular la "Intensidad de defor- mación" o deformación unitaria. Es importante hacer notar que - esta cantidad es adimensional.

Ahora bien, consideremos que un cuerpo se deforma en direc-- ciones perpendiculares, como se muestra en el plano xy de la - figura I-10.

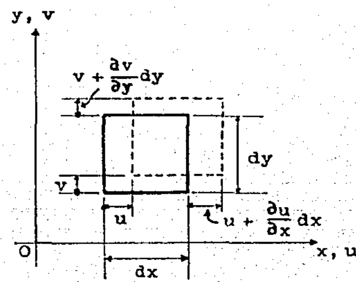


Fig. I-10. Elemento deformado en su posición inicial y final.

En estos casos tenemos que utilizar subíndices en la deformación unitaria ε , para indicar las direcciones de éstas. Por la misma razón es necesario cambiar las derivadas ordinarias por las correspondientes parciales. Por consiguiente, si en un punto de un cuerpo u, v y w son las tres componentes de desplazamiento que ocurren, respectivamente, en las direcciones x, y y z de los ejes coordenados, las definiciones básicas de DEFORMACION UNITARIA se convierten en,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (I.4)$$

Diagramas esfuerzo deformación unitaria. Como se indicó en la sección anterior, al constuir esta gráfica, localizamos los valores del esfuerzo (P/A) como las ordenadas y los valores correspondientes a la deformación unitaria (ΔL/L) como las abscisas. El diagrama $\sigma = f(\varepsilon)$ tiene el mismo aspecto que el diagrama de tensión P = f(ΔL), pero caracterizará ya no las propiedades de la probeta, sino las del material.

Una ventaja de este tipo de representación, es el hecho de que nos permite comparar las propiedades de un material con las de otro, si reducimos los valores observados a unos puntos de referencia comunes.

La figura I-11, muestra una gráfica esfuerzo-deformación unitaria típica para el acero de estructuras.

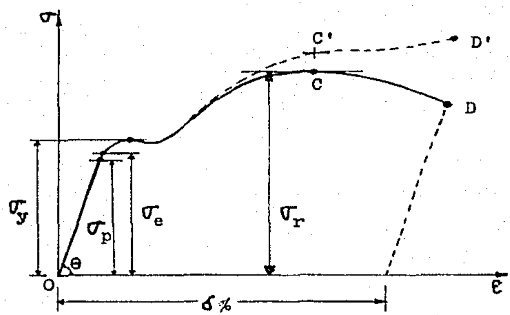


Fig. I-11. Diagrama esfuerzo-deformación unitaria típico del acero dulce.

Un análisis cuidadoso de esta curva ilustra varias definiciones y propiedades importantes que debemos conocer cuando estudiamos resistencia de materiales.

Límite de proporcionalidad (σ_p). Es el esfuerzo máximo hasta el cual el material sigue la ley de Hooke. Normalmente este límite está situado, entre 2 100 y 2 600 Kgf/cm^2 para el acero dulce o de bajo contenido de carbono.

La longitud del límite de proporcionalidad depende de la exactitud con que el tramo original del diagrama se pueda considerar recto. El Congreso Internacional para Ensaye de Materiales reunido en Bruselas (1906) definió el límite de proporciona lidad como el esfuerzo (de tensión) en el que la deformación es de 0.001%.

Límite de elasticidad (σ_e). Es el esfuerzo máximo hasta el cual el material no recibe deformaciones permanentes (residuales), es decir, las propiedades elásticas del material se mantienen hasta dicho esfuerzo.

Generalmente, la deformación residual correspondiente al límite de elasticidad se considera aproximadamente de entre (1 a 5)X10^{-5}, es decir, 0.001% a 0.005%.

El límite de proporcionalidad y el límite de elasticidad son muy difíciles de obtener y cambian bruscamente los valores según la tolerancia convencional. Por eso, las magnitudes de σ_p y σ_e no figuran en los manuales donde están dadas las propiedades de los materiales.

Límite de fluencia (σ_y). También conocido como límite aparente de elasticidad o punto cedente, este valor se obtiene fácilmente y constituye una de las características mecánicas fundamentales del material.

Se entiende por límite de fluencia, el esfuerzo bajo el cual tiene lugar un aumento de las deformaciones sin un apreciable aumento de la carga. Un punto de fluencia agudamente definido es una característica no sólo del acero estructural sino también de otros materiales tales como el bronce y el latón. En -- cambio, otros materiales (como por ejemplo el concreto) no tienen un punto de fluencia pronunciado (Fig. I-12).

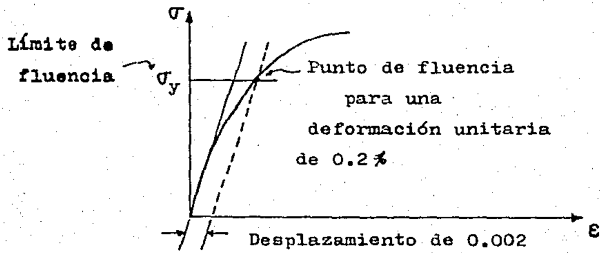


Fig. I-12. Método del desplazamiento para determinar el punto de fluencia de un material.

Cuando en el diagrama no aparece bien definido el escalón de fluencia, se entiende por límite de fluencia, convencionalmente, el esfuerzo para el cual la deformación residual es: $\varepsilon = 0.002$ - ó 0.2 %. Hay que tener presente que el punto de fluencia definido de esta manera no representa una característica física del - material, sino que depende de la deformación permanente arbitrariamente elegida. En algunos casos se establece como límite el- valor de $\varepsilon = 0.5$ %.

Si es necesario distinguir el límite de fluencia a la tensión del límite correspondiente a la compresión, en la notación se introduce el subíndice suplementario "t" ó "c", según sea- el caso.

Límite de rotura (σ_r). También conocido como esfuerzo último; es la razón entre la fuerza máxima que es capaz de resistir la probeta y el área inicial de la sección transversal de ésta, y se denota por σ_{rt} para ensayes a tensión (en el caso de compresión por σ_{rc}).

Es importante advertir que σ_{rt} (punto C del diagrama convencional) no coincide con el esfuerzo que surge en el momento dela rotura (punto D del mismo diagrama) de la probeta. Si se refiere la fuerza de tensión no al área original de la sección transversal del espécimen, sino a la sección mínima en el momento dado, entonces se podrá observar que el esfuerzo promedio+ en la sección más estrecha, instantes antes de la rotura (punto D' del diagrama real), es mucho mayor que σ_{rt} . Así pues, el esfuerzo último o LIMITE DE ROTURA es también una magnitud convencional, pero que debido a la sencillez de su determinación se introdujo sólidamente en la práctica como la característica fundamental relativa de las propiedades de resistencia del material.

Alargamiento de rotura ($\delta\%$). Es el valor medio de la deformación residual que se desarrola en el momento de la rotura y que se mide sobre una longitud "estandar" de la probeta. Antes del ensaye, en la superficie de la probeta se hacen una serie de marcas que dividen a la longitud de tabajo en partes iguales. Una vez ensayada y rota la probeta, se juntan las dos partes como se muestra en la figura I-13.

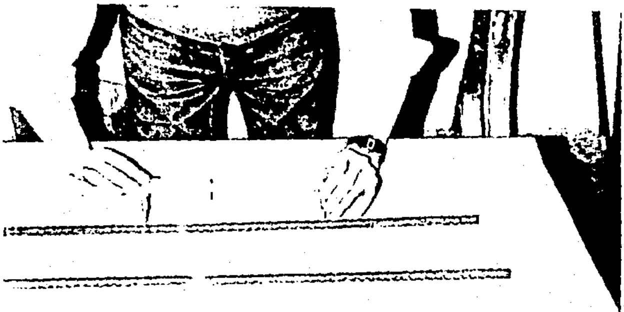


Fig. I-13. Fotografía de una probeta de varilla ensayada y rota por esfuerzos de tensión.

A continuación, por medio de las marcas hechas se determina el alargamiento medio correspondiente a la longitud "estándar". La determinación de ($\delta\%$) se lleva a cabo mediante la expresión siguiente:

$$\delta\% = \frac{\Delta L}{L} \times 100 \quad ; \qquad (cm / cm) \qquad (I.5)$$

Para otros materiales diferentes al acero dulce, pueden trazarse diagramas esfuerzo-deformación unitaria de manera semejante a la ya descrita. La figura I-14 muestra la forma típica de los diagramas esfuerzo-deformación unitaria para diversos materiales usuales. Numéricamente hablando, cada material tiene supropia gráfica, que representa sus propiedades peculiares; las curvas mostradas en la Fig. I-14 difieren considerablemente de la correspondiente al acero, mostrada en la figura I-11.

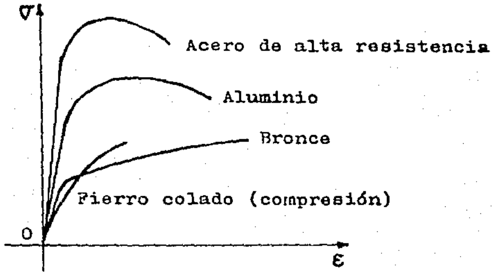


Fig. I-14. Diagramas esfuerzo-deformación unitaria típicos para diferentes materiales.

También se pueden obtener los diagramas esfuerzo-deformación unitaria para ensayes a compresión axial, de los diversos materiales y así mismo se pueden determinar sus esfuerzos característicos, tales como el límite de proporcionalidad, el límite aparente de elasticidad (límite de fluencia) y el esfuerzo de rotura. En el caso del acero se encuentra que, las características a compresión tienen aproximadamente los mismos valores que a tensión, véase el diagrama simétrico de la figura I-15.

Los ensayes a la compresión de materiales tales como el concreto, la roca y el hierro colado indican que estos materiales tienen un límite de proporcionalidad muy bajo. Rebasando este límite, la deformación aumente más rapidamente que la carga y -

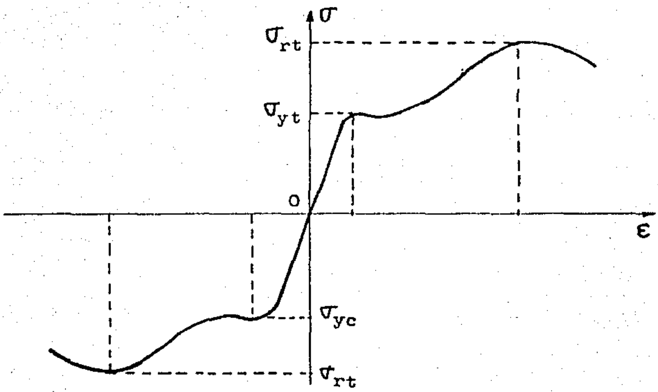


Fig. I-15. Gráficas $\sigma - \varepsilon$ (en tensión y en compresión) para el acero de estructuras.

el diagrama de ensayo a la compresión tiene la forma representa da en la figura I-16.

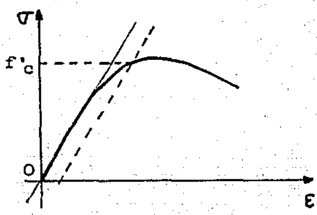


Fig. I-16. Diagrama esfuerzo-deformación unitaria para el -- concreto.

Diagramas $\sigma - \varepsilon$ idealizados. Para un estudio analítico del comportamiento de un material, es conveniente idealizar los diagramas esfuerzo-deformación determinados experimentalmente. A continuación se muestra un grupo de diagramas ampliamente utilizados para el estado uniaxial de esfuerzo.

En la Fig. I-17, se representa de nuevo la relación para un material linealmente elástico. Como se puede observar ésta es la base de la ley de Hooke. Muy pocos materiales se comportan de esta manera hasta su resistencia última. Sin embargo, para casi todo material esta relación se verifica tratándose de deformaciones pequeñas.

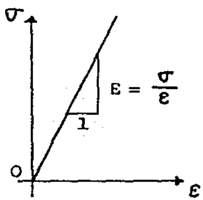


Fig. I-17. Material linealmente elástico.

Una deformación ilimitada o fluencia a esfuerzo constante define un material ideal o perfectamete plástico. Un material que presenta una respuesta linealmente elástica seguida por una perfectamente plástica se indica en la figura I-18. Si el intervalo elástico es despreciable en comparación con el intervalo plástico, se emplea la idealización de un material rígido perfectamente plástico, figura I-19.

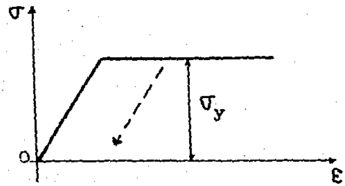


Fig. I-18. Material elástico y perfectamente plástico.

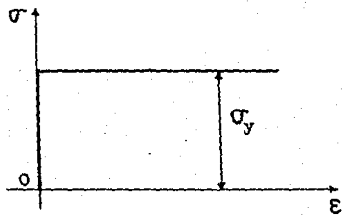


Fig. I-19. Material rígido y perfectamnte plástico.

Para muchos materiales los diagramas esfuerzo-deformación -- pueden ser idealizados por diagramas bilineales como el de la fi_ gura I-20. En tales idealizaciónes es común llamar a la primera etapa intervalo ELASTICO, y a la segunda, intervalo de ENDURECI_ MIENTO POR DEFORMACION.o por ESFUERZO. En el diagrama se utili- za el término más general de ENDURECIMIENTO LINEAL.

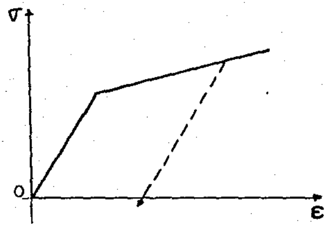


Fig. I-20. Material elástico con endurecimiento lineal.

Módulo de elasticidad (E). El diagrama esfuerzo-deformación unitaria indica también la rigidez de un material. Considerando la porción recta de la curva (Fig. I-11), se encuentra que la pendiente de dicha recta es igual a la variación en el esfuerzo unitario dividido por la variación en la deformación unitaria.- La expresión para la pendiente puede escribirse como:

$$\tan \theta = \frac{\text{variación de esfuerzo}}{\text{variación en deformación}}$$

Esto es también la definición de módulo de Young+ o módulo de elasticidad,

---

+ Se llama módulo de Young en honor a Thomas Young, un científico inglés. Sus artículos publicados en 1807, contienen una definición del módulo de elasticidad.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad ; \qquad (\text{Fza./Long.}^2) \qquad (I.6)$$

Este módulo elástico es una constante física del material, - obtenido experimentalmente y se mide en las mismas unidades que el esfuerzo, es decir, Kgf/cm^2.

Una indicación del módulo de elasticidad (o rígidez relati-- va) del material puede obtenerse observando la pendiente de la- porción inicial de la curva (Fig. I-21). Entre mayor es la pen- diente de la curva, mayor es la rígidez relativa (o módulo de - elasticidad) del material.

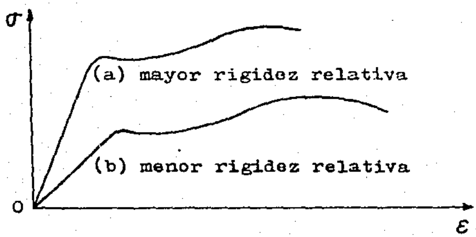


Fig. I-21. Diagrama esfuerzo-deformación; (a) mayor pendien- te mayor rigidez, (b) menor pendiente menor rigi- dez relativa.

Por definición, el módulo de elasticidad, E, representa el - esfuerzo que produciría un alargameinto de tensión $\varepsilon = 1$, ó --

sea el esfuerzo de tensión (σ_t) bajo el cual una barra sería extendida hasta el doble de su longitud inicial si el material permaneciera perfectamente elástico durante el proceso de tal deformación excesiva (véase la figura I-17).

Si hacemos que, $\varepsilon = 1$

Entonces, $E = \sigma$

Como se desprende de esta observación, el módulo de elasticidad es una cantidad muy grande para la mayoría de los materiales. A continuación se da el módulo de elasticidad para los materiales de mayor uso, en Kgf/cm^2;

Acero . . . . $E = (2.0 \text{ á } 2.1) \cdot 10^6$
Cobre . . . . $E = (1.2) \cdot 10^6$
Latón . . . . $E = (1.0 \text{ á } 1.2) \cdot 10^6$
Aluminio y sus aleaciones con magnecio $E = (0.7 \text{ á } 0.8) \cdot 10^6$
Madera (a lo largo de las fibras) . .. $E = (0.08 \text{ á } 0.12) \cdot 10^6$

Como ya se indicó, el módulo de elasticidad es la pendiente del tramo recto del diagrama esfuerzo deformación-unitaria. Sin embargo, existen materiales como el concreto, que no presentan una porción recta inicial (Fig. I-16). En estos casos, el módulo de elasticidad se toma generalmente ya sea como la pendiente de la tangente inicial a la curva (Módulo de elasticidad tangente), o como la pendiente de una línea que une el origen y algún esfuerzo unitario arbitrario (Módulo de elasticidad secante), -que, en general, es el esfuerzo de diseño. La figura I-22 ilustra gráficamente estos módulos de elasticidad.

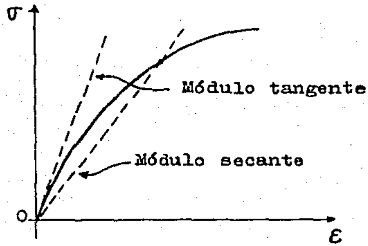


Fig. I-22. Módulos de elásticidad arbitrarios, para materiales que no presentan una porción inicial recta en su diagrama esfuerzo-deformación.

I-5. RELACION DE POISSON. LEY DE HOOKE.

Ya se han discutido dos de las definiciones más importantes-y básicas de esta materia -las que corresponden al esfuerzo y a la deformación unitaria- de igual importancia es la relación entre estos términos.

Numérosas observaciones del comportamiento de los sólidos demuestran que, en la inmensa mayoría de los casos, los desplazamientos, dentro de ciertos límites, son proporcionales a las --cargas que actúan. Esta ley fue expuesta por primera vez en el-año de 1678 por el científico inglés Roberto Hooke al afirmar "según es la fuerza así será la deformación".

Sin embargo, la interpretación moderna de la ley de Hooke establece la dependencia líneal entre el esfuerzo y la deformación unitaria, y no la dependencia entre la carga y el desplazamiento. Matemáticamente puede expresarse como;

$$\sigma = E\,\varepsilon \qquad (I.7)$$

Para un material cuyo diagrama esfuerzo-deformación unitaria es similar al de la figura I-11, resulta evidente que la relación entre el esfuerzo y la deformación es líneal, para los valores bajos de la deformación. Por tanto, para describir esta zona (elástica) del comportamiento, recurrimos a la ecuación (I.7).

Relación de Poisson. Otro tipo de deformación elástica es la variación de las deformaciones transversales que acompañan a toda compresión o tensión axiales. Esto quiere decir que si se somete un cuerpo sólido a compresión axial, se ensancha lateralmente; por el contrario, si se le tensa, el material se contrae lateralmente (Fig. I-23). Este efecto, llamado ESTRICCION, es particularmente notable en el caso del acero dulce. Los materiales frágiles no presentan tal efecto a temperatura ordinarias, aunque tambien se contraen un poco transversalmente en un ensaye a la tensión y se expanden en uno a la compresión.

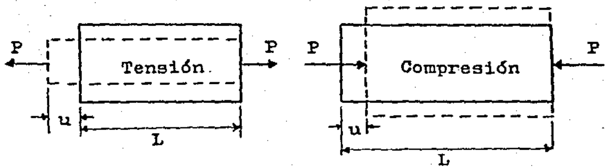


Fig. I-23. Contracción y expansión laterales de cuerpos sólidos sometidos a fuerza axial (efecto de Poisson).

Para una teoría general, es necesario considerar estas deformaciones laterales con base en la deformación por unidad de longitud de la dimensión transversal, es decir, con base en las deformaciones unitarias transversales.

$$\text{Relación de Poisson} = \frac{\text{deformación lateral}}{\text{deformación axial}}$$

El matemático francés S. D. Poisson comprobó experimentalmente, en el año de 1828, que la relación entre las deformaciones unitarias en estas direcciones es constante, por debajo del límite de proporcionalidad. En recuerdo suyo se ha dado su nombre a esta relación, que se anota con la letra μ, y esta definida por:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \qquad (I.8)$$

donde ε_x es la deformación debida solamente a un esfuerzo en - la dirección del eje x de la pieza ; ε_y y ε_z son las deformaciones unitarias que se manifiestan en las direcciones perpendiculares. El signo menos (-) indica un acortamiento en las direcciones transversales cuando ε_x es positiva (+), como ocurre -- con un alargamiento producido por esfuerzos de tensión.

La magnitud μ caracteríza las propiedades del material y se determina experimentalmente. Se sabe que este valor fluctúa para los diferentes materiales en un intervalo relativamente estrecho. Por lo general esta en la vecindad de 0.25 a 0.35, para el acero es aproximadamente de 0.30; en casos extremos se -- tienen valores tan bajos como 0.10 (en algunos concretos) y tan altos como 0.50 (en el caucho). Este último valor es el máximo- posible para materiales isotrópicos. El efecto de Poisson, presentado por los materiales no origina ningún otro esfuerzo adicional ademas de los que se consideran, a menos que se impida - la deformación transversal (véase los ejercicios correspondientes al final del capítulo).

Un material se considera homogéneo, cuando cualquier parte - de él tiene las mismas propiedades independientemente de su volumen. Se entiende que estamos hablando a nivel macroscopico, - es decir, estructuras cuyas dimensiones son superiores, no sólo a la de los átomos, sino también a la de los cristales.

Generalmente al cuerpo continuo se le considera isótropo (o- isotrópico), es decir, se admite que las propiedades de cual---

quier parte de éste son las mismas en todas direcciones. Por tanto, para materiales isotrópicos homogéneos, y considerando la relación de Poisson, podemos plantear el sistema de ecuaciones que constituye la "Ley de Hooke generalizada", considerada así en el sentido de que es una generalización de la relación inicialmente sugerida para la condición de esfuerzo uniaxial.

Ley de Hooke generalizada, para materiales isotrópicos y homogéneos:

$$
\begin{aligned}
E\,\varepsilon_x &= \sigma_x - \mu\,(\sigma_y + \sigma_z) \\
E\,\varepsilon_y &= \sigma_y - \mu\,(\sigma_x + \sigma_z) \qquad (\mathrm{I.9}) \\
E\,\varepsilon_z &= \sigma_z - \mu\,(\sigma_x + \sigma_y)
\end{aligned}
$$

Todas las expresiones anteriores son igualmente válidas cuando uno o varios de los esfuerzos son de compresión, sin más que aplicar signos positivos a los alargamientos y a los esfuerzos de tensión, y signos negativos a los acortamientos y a los esfuerzos de compresión.

I-6. ESFUERZO CORTANTE Y DEFORMACION ANGULAR. MODULO DE ELASTICIDAD EN CORTANTE.

Aparecen esfuerzos cortantes siempre que las fuerzas aplicadas tiendan a hacer que una parte del cuerpo se corte o deslice con respecto a la otra.

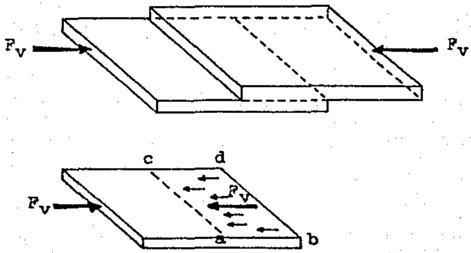


Fig. I-24. Condición de carga que produce esfuerzos cortan-- tes.

Este tipo de esfuerzos es producido por la componente tangencial de la fuerza, es decir, la componenete paralela al plano - de la sección que la soporta (Fig. I-24).

Es importante observar que, como la distribución de esfuerzo cortante en una sección, tal como la abcd de la figura I-24, - no es uniforme práctcamente en ningún caso, la expresión matemática para el esfuerzo cortante, sólo nos dará un valor promedio, es decir,

$$\tau = \frac{F_V}{A} \quad ; \quad (\text{Fza./Long.}^2) \qquad (\text{I.10})$$

Supongamos ahora que disponemos de un estado de esfuerzo, en el cual, sobre las caras del elemento elegido, aparecen solamen te esfuerzos tangenciales o cortantes (Fig. I-25). Dicho estado de esfuerzo se denomina DESLIZAMIENTO PURO o DISTORCION PURA[+].

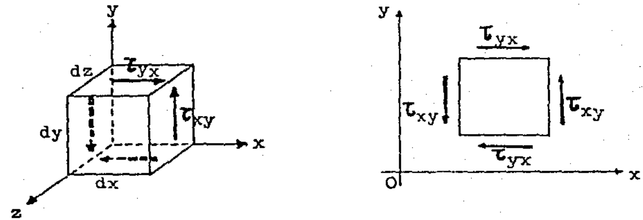


Fig. I-25. Elemento infinitesimal de un cuerpo en esfuerzo cortante puro.

El hecho de que los subíndices, en los esfuerzos cortantes de la figura I-25, sean conmutativos significa que, en planos perpendiculares entre sí de un elemento infinitesimal, dichos esfuerzos son numéricamente iguales. O sea,

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \qquad \text{(I.11)}$$

En situaciones subsecuentes, rara vez actuarán simultáneamente en un elemento más de dos parejas de esfuerzos cortantes. Por tanto, son superfluos los subíndices utilizados anteriormente para identificar los planos y las direcciones de los esfuer-

---

[+] Una definición más rigurosa de la distorsión pura se da en la teoría general del estado tensional.

zos cortantes. En tales casos los esfuerzos cortantes se designarán por τ sin subíndices. Sin embargo, hay que recordar que los esfuerzos cortantes siempre ocurren por parejas. La convención de signos para este tipo de esfuerzos se da en la Fig. I-26.

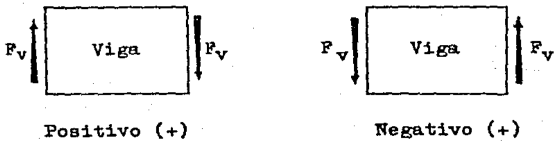


Fig. I-26. Los esfuerzos cortantes siempre ocurren por parejas.

Deformación angular o tangencial (γ). Las fuerzas cortantes producen una deformación angular o DISTORSION, Un elemento sometido a este tipo de fuerzas no varía la longitud de sus lados - (como en el caso del esfuerzo axial), sino que manifiesta un -- cambio de forma, de rectangulo a paralelogramo, como se observa en la Fig. I-27.

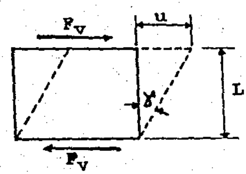


Fig. I-27. Deformación tangencial o distorsión en una sola - dirección, por ejemplo x.

La deformación tangencial promedio o distorsión se obtiene - mediante trigonometria, es decir, tan γ = u / L, Fig. I-27; aho ra bien, como (el ángulo gama) γ es siempre muy pequeño, enton ces podemos hacer tan $\gamma \doteq \gamma$, con lo que,

$$\gamma = \frac{u}{L} \quad ; \qquad (\text{Long./Long.}) \qquad (\text{I.12})$$

Con más precisión, podemos decir, que la distorsión es la va riación experimentada por el ángulo entre dos caras perpendicu- lares de un elemento diferencial.

Este estudio podemos generalizarlo para cuando se analiza la distorsión en dos direcciones, como es el caso que se indica en el plano xy, de la figura I-28. La deformación tangencial in-- clinará ambos lados del elemento, en relación con los ejes x y y.

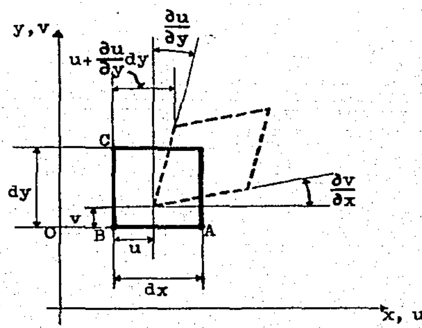


Fig. I-28. Elemento deformado en su posición inicial y fi-- nal.

Puesto que v es el desplazamiento en la dirección y, a medida que se avanza en la dirección x, $\partial v/\partial x$ es la pendiente del lado inicialmente horizontal del elemento infinitesimal. — De igual manera, el lado vertical se inclina un ángulo $\partial u/\partial y$. Con base en ello el ángulo $\widehat{ABC}$, inicialmente recto se reduce — en la cantidad $(\partial v/\partial x) + (\partial u/\partial y)$. Por consiguiente, para cambios de ángulos pequeños la definición de la DEFORMACION ANGULAR, relacionada con las coordenadas x y y, es:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (\text{I-13})$$

Las definiciones para las deformaciones angulares correspondientes a los planos xz y yz se obtienen de manera semejante a la del plano xy.

El signo negativo (–), para la deformación angular, se aplica cuando el elementos se deforma como se muestra en la figura I-28 ya que esta deformación corresponde a la convención de esfuerzos cortantes negativos (véase la figura I-26).

Por otro lado tenemos que, si la ley de Hooke también es válida en la cortadura, existe una relación lineal entre la deformación angular (distorsión) y el esfuerzo cortante aplicado dada por:

$$\tau = G\,\gamma \qquad (\text{I-14})$$

Podemos graficar los valores del esfuerzo cortante vs defor mación angular y obtener, para el rango elástico, el diagrama - que se muestra en la figura I-29.

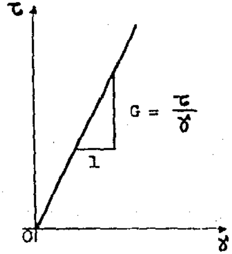


Fig. I-29. Relación lineal (en el rango elastico) entre la - distorsión γ y el esfuerzo tangencial τ.

Módulo de elasticidad al corte o módulo de rigidez tranver-- sal (G). Este módulo tiene una interpretación semejante a la - del módulo de Young y las mismas unidades,

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad ; \qquad (\mathrm{Fza./Long.^2}) \tag{I-15}$$

Una importantísima relación entre las constantes elásticas E, G y μ, para materiales isotrópicos, es la que se expresa me-- diante la ecuación siguiente,

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{I-16}$$

I-7. PROPIEDADES MECANICAS DE LOS MATERIALES MAS USUALES EN — CONSTRUCCION.

Continuamente se están produciendo diversos materiales para-satisfacer la nuevas y diferentes aplicaciones de ingeniería, -que constantemente surgen en nuestras tecnologías en evolución. Cada uno de estos nuevos materiales, junto con los materiales -comunes que ya están en uso, tienen sus propiedades físicas.

Además de las propiedades mecánicas, los materiales poseen -propiedades químicas, eléctricas, ópticas y otras. Aunque estas otras propiedades son de interés entre los requisitos de diseño especializado, las propiedades mecánicas son las que más interezan al ingeniero proyectista.

Las propiedades mecánicas, tales como la resistencia, la rigidez, ductilidad, fragilidad, por nombrar algunas[+], describen-el comportamiento del material cuando se somete a cargas. En esta sección se da una breve descripción de estas propiedades, —con el fin de entender los factores que conducen a la selección de un material para la fabricación de un miembro de un sistema-estructural.

La primera propiedad mecánica que se considera es la RESISTENCIA, que se ha definido como el esfuerzo máximo que un mate-

---

[+] Al comentar los diagramas esfuerzo-deformación se estudiaron-otras importantes propiedades mecánicas, ver la sec. I-4.

rial puede soportar antes de que ocurra la falla[+]. Esto puede - deberse al esfuerzo último en los materiales frágiles que no se deforman grandemente antes de la fractura, o puede ser debida - al esfuerzo de fluencia para los materiales dúctiles que se de-forman plásticamente una gran cantidad antes de que se alcance- el esfuerzo último.

Otra propiedad de interés, particularmente con respecto a -- las condiciones de flexibilidad, es la RIGIDEZ. Una parte es--- tructural se dice que es rígida si soporta un gran esfuerzo con una deformación relativamente pequña. El módulo de elasticidad- de un material es una medida de la rígidez relativa de éste.

Propiedades adicionales de gran importancia en la selección- de los miembros que soportan cargas son la DUCTILIDAD, MALEABI-LIDAD y FRAGILIDAD. Un material es dúctil y maleable si puede - soportan grandes deformaciones inelásticas (plásticas) antes de la fractura.

Como se indicó en la sección I-3, una línea divisoria usual- que separa los materales dúctiles de los frágiles es una defor-mación unitaria de 5% ; es decir, si un material se fractura a- una deformación unitaria de 5% o menos, se considera como que-bradizo. El concreto y la fundición son ejemplos de materiales- frágiles, el acero estructural y el alumino son ejemplos de ma-teriales dúctiles.

[+] Este concepto se define en la sección I-8.

Esto es importante en el diseño por dos razones principales. Primero, antes de la fractura, un material frágil prácticamente no avisa, mientras que un material dúctil se deforma una gran - cantidad antes de fallar. Un segundo factor más significativo - es que un material dúctil, debido a su gran elongación después- de la fluencia tiene la cualidad de redistribuir esfuerzos en - lugares de concentraciones de esfuerzos altos.

Los materiales usados en miembros que están sujetos al impacto de cargas dinámicas deben ser capaces de absorber la energía y el choque de las cargas. La RESILENCIA y la TENACIDAD son las propiedades que describen la capacidad de un material para ab-- sorber energía. La resilencia de un material es la capacidad de absorber energía en el intervalo elástico de esfuerzos, mien--- tras que la tenacidad es su capacidad de absorber energía en el intervalo inélastico de esfuerzos.

Otra propiedad de interés en consideraciones de diseño es la DUREZA, que es una medida de la capacidad del material para re- sistir identación. La dureza de un material puede modificarse - grandemente mediante varios procesos de manufactura, tales como tratamientos térmicos, trabajo en frío, templado y revenido.

Maquinas de ensaye. Para ejecutar los ensayes que darán por- resultado las cantidades numéricas que miden las propiedades mecanicas, uno debe tener especímenes disponibles, medios para medir deformaciones unitarias y máquinas de ensaye. Las máquinas- de ensaye ejecutan dos funciones principales: aplican la carga-al espécimen y luego miden la carga aplicada.

Existen por supuesto, muchos y diferentes tipos de máquinas-para efectuar los diferentes ensayes. Algunas máquinas, llama--das par un fin particular están diseñadas para efectuar solamente una función, tal como el ensaye por dureza o el ensaye por -impacto. Otras máquinas se diseñan para ejecutar un cierto número de ensayes diferentes, tales como tensión, compresión y flexión. Las máquinas de este tipo se llaman máquinas de ensaye --UNIVERSAL. La figura I-30 muestra una máquina de ensaye universal que es capaz de aplicar carga hasta de 200 Ton.

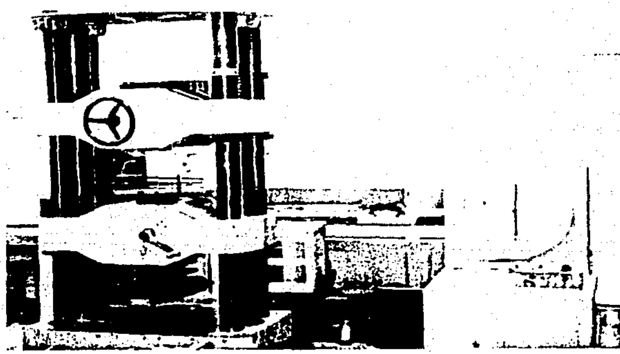


Fig. I-30. Fotografía de una máquina de ensaye universal. (Del laboratorio de la D.G.S.T. de la S.C.T.).

Las figs. I-31 a I-33 muestran máquinas de ensaye por impacto, por torsión y para determinar la dureza.

Fig. I-31. Fotografía de una máquina de ensaye por impacto, (del laboratorio de la D.G.S.T. de la S.C.T.).

Por supuesto, es imperativo que una máquina de ensaye aplique la carga con el alineamiento adecuado y a una velocidad uniforme y controlable. La máquina también debe ser capaz de medir -- exactamente la carga aplicada en las etapas necesarias de car--

ga. Es igualmente importante para el laboratorista, el ser capaz de medir los pequeños cambios de longitud con la exactitud requerida. Para este fin, se usa un medidor de deformación. Existen muchos tipos de medidores de deformaciones. Su operación puede estar basada en principios mecánicos, ópticos o eléctricos.

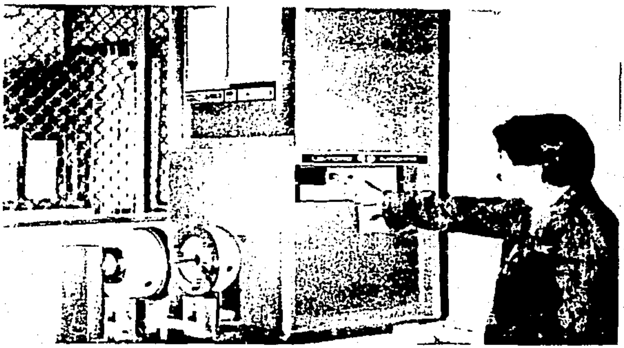


Fig. I-32. Fotografía de una máquina de ensaye por torsión. (del laboratorio de la E.N.E.P. Aragón.).

Como ejemplo del primer grupo tenemos los EXTENSÓMETROS (con su correspondiente comparador de carátula); el extensómetro está unido al espécimen mediante un aditamento de sujeción y mediante dos patas colocadas directamente sobre éste. La distancia entre las patas se llama distancia de escantillón, o longi-

Fig. I-33. Fotografía de una máquina de ensaye de dureza. -- (del laboratorio de la D.G.S.T. de la S.C.T.).

tud de escantillón, y aunque puede variar, son valores comunes los de 0.5 cm , 10.0 cm y 20.0 cm.

El comparador de carátula no está unido directamente al espécimen, sino al extensómetro, el cual presiona al husillo, y esto es lo que nos permite medir las deformaciones. Cuando el husillo se mueve hacia dentro, la aguja que indica la deformación se mueve mediante una cremallera y piñón y un mecanismo de engranes. Se pueden leer directamente deformaciones de 0.01 mm y pueden estimarse deformaciones de 0.001 mm . La figura I-34 muestra un extensómetro con carátula, colocado sobre un espécimen -

de varilla corrugada.

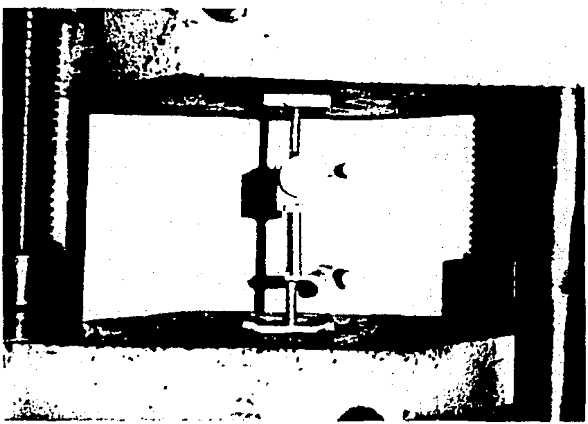


Fig. I-34. Fotografía del extensómetro y su comparador de ca_rátula, (del laboratorio de la D.G.S.T. de la S.C.T.).

Los medidores de deformación que operan sobre el principio - de que la resistencia eláctrica de un alambre cambia cuando és- te se deforma han llegado a ser muy comunes recientemente. Uno- de ellos es el medidor de deformaciones SR-4, que está hecho de un alambre muy delgado arreglado en una serie de lazos, como se muestra en la Fig. I-35. El alambre está pegado entre un papel- de respaldo (para unirse al espécimen) y una cubierta de fiel-- tro (para protección de los alambres). El alambre del deformíme_ tro es de solamente una milesima de pulgada (0.001 pulg) de diá metro y su fabricación, composición y propiedades se controlan cuidadosamente. Se sueldan al alambre del deformímetro alambres de mayor calibre de modo que se puedan hacer las medidas eléctricas sin romper el alambre.

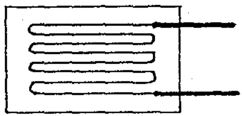


Fig. I-35. Esquema de un medidor de deformaciones SR-4 .

El deformímetro se pega tan firmemente al espécimen que se está ensayando, que cuando el espécimen se deforma los alambres del deformímetro sufren la misma deformación. Cuando el diámetor de los alambres cambia debido a la deformación, la resistencia eléctrica cambia. Este pequeño cambio en la resistencia eléctrica se mide mediante un indicador del deformímetro, tal como el que se muestra en la figura I-36.

El indicador convierte las medidas eléctricas en los cambios correspondientes de longitud del espécimende modo que las deformaciones unitarias pueden leerse directamente sobre la carátula del indicador de deformímetro.

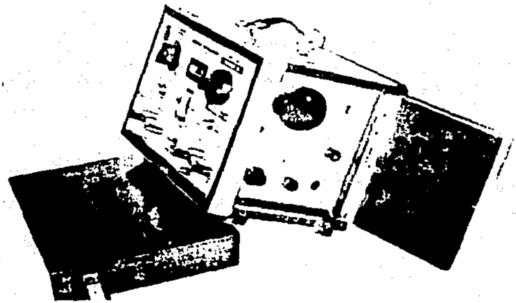


Fig. I-36. Fotografía de un indicador de deformaciones unitarias, (del laboratorio de la D.G.S.T. de la S.C.T.).

Los medidores de deformación ópticos operan sobre el principio de la interferencia de las ondas luminosas. Los deformímetros puramente ópticos se usan rara vez para medir la deformación de un espécimen. Sin embargo, se usan algunos deformimetros cuya operación está basada en una combinación de principios mecánicos y ópticos. Como estos deformímetros no son tan comunes como los mecánicos o los de resistencia eléctrica, no se comentan sus principios de operación+.

+ Para mayor información acerca de los métodos experimentales de investigación del estado de deformación, véase V. I. FEODOSIEV, "Resistencia de materiales", 2ª edición. (Moscú: Editorial MIR, 1980.), págs. 536 a 563.

Ensaye de los materiales. El ensaye de los materiales se realiza para determinar las características mecánicas tales como el límite de fluencia, límite de rotura (esfuerzo último), módulo de elasticidad, etc. Puede realizarse también el ensaye con el propósito de investigar, por ejemplo, las condiciones de resistencia en los estados de esfuerzo complejo o, en general, para establecer las propiedades mecánicas del material en las diversas condiciones.

Los resultados obtenidos de los ensayes hechos sobre un material dado, son afectados por cierto número de factores, tales como la rapidez de aplicación de la carga, el tamaño y la forma de los especímenes, y la disposición del aparato. Para permitir una comparación de los resultados de ensayes sobre un material, con los obtenidos a partir de ensayes de otro material, los procedimientos de prueba están normalizados. La American Society for Testing Materials (abreviada ASTM) es una organización que establece normas para llevar a cabo los ensayes+. Además, en nuestro país en las entidades federativas se cuenta con reglamentos de construcción y en las dependencias gubernamentales existen Normas Técnicas de Construcción (o manuales de diseño) en las que se detallan tipos de máquinas, procedimientos que deben seguirse en los laboratorios para llevar a cabo las diversas pruebas y también se establecen especificaciones de calidad y comportamiento de los materiales

---

+ Esta organización ha redactado especificaciones que son de uso común en USA y numerosos países de América y Europa.

Se prescriben varios tipos de probetas para materiales metálicos y no metálicos, tanto para ensayes de tensión como de compresión, como ejemplo sólo mencionaremos dos de ellos, uno para placas metálicas de espesor mayor de 3/16 de pulgada (unos 4.7 mm) que aparece en la figura I-37(a), y otro para metales de espesor mayor de 1.5 pulgadas, Fig. I-37(b).

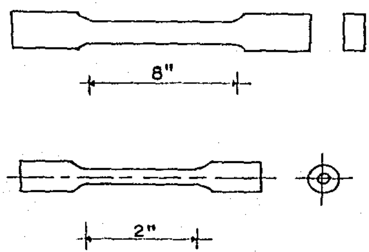


Fig. I-37. Tipos de probetas para chapa metálica.

Las dimensiones indicadas en estas probetas, son las especificadas por la ASTM, pero los extremos de las probetas pueden tener cualquier forma que se adapte a las mordazas de la máquina de ensaye que aplica la carga axial.

Cuando se elige un material para la construcción de un edificio o una máquina, debemos conocer sus propiedades, y también su capacidad para soportar esfuerzos. Las diversas propiedades mecánicas de un material se determinan, como ya se indicó, mediante una serie de pruebas de laboratorio, de las cuales se comentan algunas a continiación.

Ensaye a la tensión. Un ensaye a tensión para un material, -puede describirse sencillamente, como sigue. Se coloca una probeta de dimensiones conocidas entre las mordazas de una máquina de ensaye universal, tal como se muestra en la figura I-38.

Fig. I-38. Fotografía de un toron sometido a una prueba de -tensión, (del laboratorio de la D.G.S.T. de la S.C.T.).

La máquina de ensaye ejerce una fuerza sobre esta probeta, -que puede medirse en cualquier tiempo durante el ensaye. Se ---

adiere al espécimen un extensómetro (con su comparador de carátula), que nos permite medir cambios de longitud con exactitud. Después se va incrementando la carga de tensión lentamente hasta que se presenta la fractura. A ciertos intervalos durante el ensaye, se hacen medidas simultáneas de la carga y la deformación, a partir de estos datos se traza la gráfica esfuerzos contra deformaciones unitarias, como ya se explico con detalle en la sección I-5.

Ensaye a la compresión. Se practica usualmente el ensaye a la compresión para materiales quebradizos tales como la roca, el concreto y el hierro colado. Las muestras o probetas empleadas en este tipo de ensayes suelen estar preparadas en forma cúbica o cilíndrica, como las que se muestran en la figura I-39.

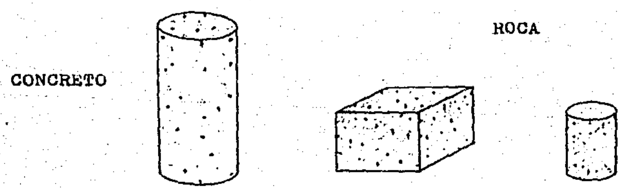


Fig. I-39. Muestras de concreto y roca para ensayes a compresión.

Al comprimir las muestras entre las superficies planas de la máquina de ensaye (Fig. I-40), se admite normalmente que la --- fuerza de compresión esta uniformemente repartida en la sección transversal. Sin embargo, debido al rozamiento en las superfi-- cies de contacto entre las muestras y los cabezales de la máqui na, la expansión lateral que acompaña a la presión se impide en estas superficies y el material de esta zona está en una condición de esfuerzo más favorable.

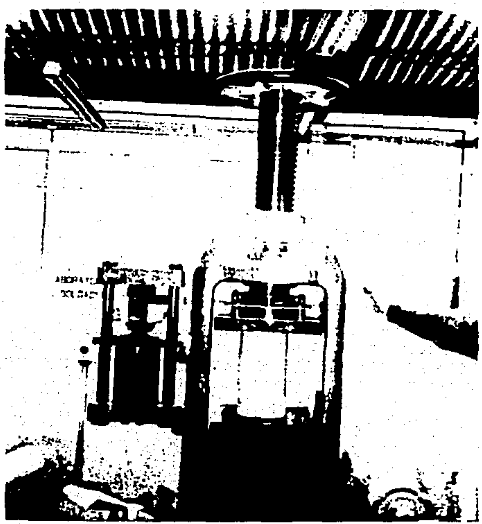


Fig. I-40. Fotografía de un cilindro de concreto en compre-- sión.

En los ensayes a la compresión de materiales dúctiles la --- fractura se obtiene raras veces. La compresión va acompañada de expansión lateral y un cilindro comprimido hasta la rotura toma la forma de un disco aplanado. Véase la figura I-41, que es una fotografía de un apoyo integral de neopreno (material dúctil),- sometido a compresión. Obsérvese que sobre la placa de carga se han colocado extensómetros, que nos permiten determinar la de-- formación para cualquier incremento de presión.

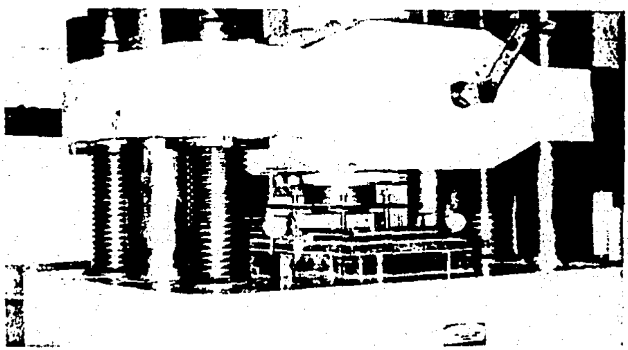


Fig. I-41. Fotografía de un apoyo integral de neopreno sometido a compresión.

Otro tipo de ensayes mecánicos son las PRUEBAS TECNOLOGICAS- que nos permiten obtener características que no son objetivas,- sino solamente comparativas de los materiales y que también se- llevan a cabo en condiciones severamente reglamentadas. A este- tipo se refiere la determinación de la dureza, tenacidad y o---

tros. En cierta medida a las pruebas tecnologicas se refieren - también los ensayes para la determinación de la fatiga.

Ensaye de dureza. También se entiende por dureza, la capacidad del material de oponerse a la penetración mecánica en él de cuerpos ajenos. Durante la penetración de un cuerpo agudo, en - el material aparecen deformaciones plásticas locales que van -- acompañadas, al aumentar la carga, de destrucciones locales. -- Por eso, el exponente de la dureza está relacionado con los exponentes de la resistencia y la plasticidad y depende de las - condiciones concretas del desarrollo del ensaye.

Los ensayes más difundidos son los de Brinell y los de Rockwell. En el primero, la superficie de la pieza que se estudia,- es penetrada por una bola de acero de 10 mm de diámetro; en el- segundo, la punta aguda de un pedazo de diamante. Por las dimensiones de la huella obtenida, se juzga sobre la dureza del material. El laboratorio de ensaye de materiales dispone generalmente de tablas obtenidas experimentalmente que permiten, de manera aproximada, determinar el límite de resistencia del material en función del exponente de dureza. De esta manera se consigue, -- sin destruir la pieza, determinar sus características de resistencia.

Ensaye al impacto. Se utilizan los ensayes al impacto en el- estudio de la tenacidad de los materiales, es decir, la aptitud del material para absorber energía durante la deformación plástica.

Fatiga de los materiales. Las piezas de las máquinas están -sometidas frecuentemente a esfuerzos variables y es importante-conocer la resistencia de los materiales en tales condiciones.-Es de todos conocido que los materiales se rompen bajo el efecto de cargas y descargas reiteradas o de inversión de esfuerzos, a esfuerzos más pequeños que el de resistencia a la rotura (o -último) del material bajo cargas estáticas. La magnitud de los-esfuerzos necesarios para producir la rotura disminuye cuando -el número de ciclos de esfuerzo aumenta. Este fenómeno de disminución de la resistencia de un material para esfuerzos repetidos es lo que se denomina "fatiga" y el ensaye de un material -por la aplicación de tales esfuerzos se denomina "prueba de aguante".

Ensaye de las estructuras. Cuando se habla del ensaye de una estructura se tiene en cuenta la determinación de la resistencia de todo un sistema (por ejemplo una máquina o un edificio), de sus nudos por separado o de modelos. Este ensaye tiene el propósito, por una parte, de comprobar la exactitud de los cálculos realizados y, por otra, de comprobar los procesos tecnológicos admitidos para la elaboración de los nudos y el montaje,-puesto que en el caso de procesos tecnológicos insuficientemente correctos puede ocurrir una debilitación local de la estructura. El ensaye de las estructuras está ampliamente desarrollado en las ramas de la técnica como la construcción de aviones y la construcción de cohetes donde debido a las necesidades de economizar el peso, los problemas de la resistencia son fundamentales.

Al crear una nueva máquina, sus diversos nudos una vez elaborados se someten a ensayes estáticos hasta obtener la rotura completa para determinar la, así denominada, carga de rotura. Esta carga se compara después con la obtenida por el cálculo. A parte de los ensayes estático con frecuencia surge la necesidad de realizar ensayes dinámicos. Por ejemplo, son muy difundidos los ensayes de los dispositivos que trabajan en las condiciones de vibraciones.

Los métodos actuales de investigación experimental de las estructuras esforzadas se reducen, de una u otra manera, a la medición directa de las deformaciones que surgen en el objeto que se ensaya. Los esfuerzos se determinan de manera indirecta a través de las deformaciones, basándose en la ley de Hooke. En el caso de deformaciones plásticas, la determinación de los esfuerzos, al ensayar la estructura, generalmente no se lleva a cabo y se determina exclusivamente la carga de rotura o el valor de la fuerza cuando aparecen síntomas de la aparición de deformaciones plásticas.

Para medir las deformaciones se emplean varios métodos. Puede hacerse mediante dispositivos basados en principios de medición mecánicos, eléctricos, ópticos, de rayos X, de las franjas de muaré y de recubrimientos con barniz[+].

[+] El estudio detallado de estos métodos esta fuera del alcance de este trabajo. Véase Por ejmplo, V. I. FEODOSIEV, "Resistencia de materiales", 2ª edición. (Moscú: Editorial MIR, 1980), págs. 538 a 548.

I-8. ESTADOS LIMITE. FACTOR DE CARGA. COEFICIENTE DE SEGURIDAD.

El término "falla" frecuentemente se entiende como sinónimo de "fractura". Sin embargo, en el estudio de resistencia de materiales este no es el significado usual. Se dice que ocurre la falla cuando un miembro cesa de realizar satisfactoriamente la función para la cual estaba destinado. Por ejemplo, si una parte de una máquina se deforma excesivamente de modo que ésta se vuelva inoperante, se considera que el miembro ha fallado, aunque los esfuerzos puedan ser bastante menores que los del punto de fluencia.

Estados límite[+]. Es aquella etapa del comportamiento a partir de la cual una estructura o parte de ella deja de cumplir con alguna función para la cual fue proyectada.

$$\text{Categorías de estados límite}\begin{cases}\text{de falla}\begin{cases}\text{de falla frágil}\\ \text{de falla dúctil}\end{cases}\\ \\ \text{de servicio}\end{cases}$$

Los estados límite de falla corresponden al agotamiento definitivo de la capacidad de carga de la estructura o de cualquie-

---

[+] Véase el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal.

ra de sus componentes, o al hecho de que la estructura, sin agotar su capacidad de carga, sufra daños irreversibles que afecten su resistencia ante nuevas aplicaciones de carga.

Se considera que los estados límite corresponden a la falla dúctil cuando la capacidad de carga de la sección, elemento o estructura en cuestión se mantenga para deformaciones apreciablemente mayores que las existentes al alcanzarse el estado límite. Por otro lado, se considera de falla frágil cuando la capacidad de carga de la sección, elemento o estructura en cuestión, se redusca bruscamente al alcanzarse el estado límite.

Los estados límite de servicio tendrán lugar cuando la estructura llegue a un estado de deformaciones, agrietamientos, vibraciones o daños que afecten su correcto funcionamiento, pero no su capacidad para soportar cargas.

Veamos ahora el problema sobre el empleo de los resultados obtenidos de los ensayes, en los cálculos prácticos de la resistencia de las construcciones. Los métodos de cálculo se escogen teniendo en cuenta las condiciones de trabajo de las estructuras y las exi gencias que se plantean.

El proceso de dimensionamiento más comúnmente utilizado en la actualidad es el denominado método PLÁSTICO, de RESISTENCIA o de RESISTENCIA ÚLTIMA. Los elementos o secciones se dimensionan para tener una resistencia determinada.

El procedimiento consiste en definir las acciones interiores, correspondientes a las condiciones de servicio, mediante un análisis elástico y multiplicarlas por un factor de carga, que puede ser constante o variable según los distintos elementos, para así obtener las resistencias de dimensionamiento. El factor de carga puede introducirse también incrementando las acciones exteriores y realizando después un análisis elástico de la estructura. El dimensionamiento se hace entonces con las hipótesis de comportamiento inelástico.

Los factores de carga (Fc) a emplearse según los casos, son determinados por empresas constructoras importantes, así como por autoridades urbanas, estatales y federales, quienes prescriben y recomiendan estos valores. Por ejemplo, en el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal se proporcionana los siguientes valores para los factores de carga:

1.4 - Para combinaciones de carga que incluyan exclusivamente acciones permanentes y variables.

1.5 - Cuando se trate de estructuras que soporten pisos en los que pueda haber aglomeración de personas o que contengan equipo sumamante valioso.

1.1 - Para combinaciones de carga que incluyan una acción acidental, además de las acciones permanentes y variables.

0.9 - Para acciones o fuerzas internas cuyo efecto sea fa vorable a la resistencia o estabilidad de la estructura.

1.0 - Para todos los caso en que se haga una revisión de los estados límite de servicio.

Para el diseño por sismo y por viento se requieren en algunos casos factores de carga distintos a los especificados en los parrafos anteriores.

Por otro lado tenemos que, el método de cálculo fundamental y más difundido es el basado en los esfuerzos. Según este método, el cálculo de la resistencia se realiza por el esfuerzo máximo que surge en cierto punto de la estructura solicitada. Este esfuerzo se denomina esfuerzo máximo de trabajo ($\sigma_{máx}$) y no debe superar cierto valor propio del material ni de las condiciones de trabajo de la construcción.

El cálculo basado sobre los esfuerzos se realiza según el esquema:

$$\sigma_{máx} = \frac{\sigma_L}{n} \qquad \text{(I-17)}$$

donde, $\sigma_{máx}$ - Esfuerzo máximo de trabajo, es decir, el esfuerzo real que soporta el material bajo la acción de cargas.

σ_L - Cierto valor límite del esfuerzo para el material dado.

n - Es un coeficiente de seguridad.

Para el caso en que las dimensiones de la estructura son conocidas y están determinadas, digamos, partiendo de criterios - de REVISION (o mantenimiento), el cálculo tiene caracter comprobatorio. Se determina la magnitud de $\sigma_{máx}$ y se halla el coeficiente de seguridad efectivo,

$$n = \frac{\sigma_L}{\sigma_{máx}} \qquad (\text{I-18})$$

Si este coeficiente satisface al constructor, se considera - que el cálculo comparativo dio un resultado positivo.

Ahora bien, cuando la estructura se encuentra en la etapa de diseño, ciertas dimensiones características deben determinarse- directamente de la condición de resistencia. El procedimiento - tradicional, basado en esfuerzos de trabajo, consiste en determinar los esfuerzos correspondientes a acciones interiores obtenidas de un análisis elástico de la estructura, bajo supuestas- solicitaciones de servicio. Estos esfuerzos se comparan con esfuerzos admisibles[+] (σ_{adm});

$$\sigma_{máx} \leqslant \sigma_{adm} \qquad (\text{I-19})$$

[+] También es frecuente utilizar el término esfuerzos permisi--- bles en lugar del de admisibles.

El esfuerzo admisible se define como el esfuerzo máximo al que puede ser sometido un material, con un cierto grado de seguridad en la estructura o elemento que se considere. Este tipo de esfuerzos están especificados como una fracción de la resistencia de los materiales; la magnitud de "n" se fija previamente,

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_L}{n} \qquad (I-20)$$

No queda más que resolver el problema de que esfuerzo considerar como límite (σ_L) y como fijar el valor de "n". Los valores del esfuerzo límite serán diferentes para los materiales dúctiles y para los materiales frágiles.

En el caso de los materiales dúctiles, como el acero al carbono, entendemos por esfuerzo límite (σ_L), el esfuerzo correspondiente al límite de fluencia (σ_y). Por tanto, el esfuerzo admisible constituirá la n-ésima parte de σ_y, Fig. I-42.

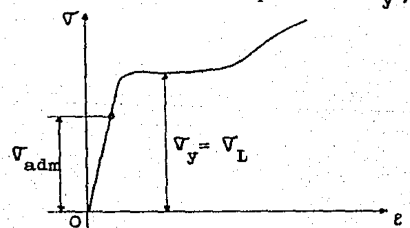


Fig. I-42. Representación gráfica del esfuerzo admisible para un material dúctil.

El coeficiente en este caso se designa por n_f y se denomina COEFICIENTE DE SEGURIDAD REFERIDO AL LIMITE DE FLUENCIA.

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{n_f} \qquad ; \qquad n_f = \frac{\sigma_y}{\sigma_{adm}} \qquad (I-21)$$

En el caso de materiales frágiles (tales como el hierro colado, concreto y varias clases de roca), y en algunos casos cuando se trata de materiales de plasticidad moderada (incluyendo la madera) entenderemos por esfuerzo límite σ_L, al esfuerzo correspondiente al límite de resistencia (o esfuerzo de rotura) σ_r. Por tanto, el esfuerzo admisible constituira la n-ésima parte de σ_r, Fig. I-43.

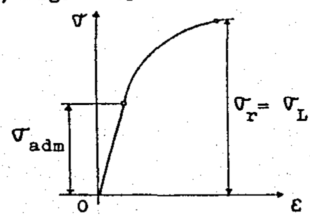


Fig. I-43. Representación gráfica del esfuerzo admisible para un material frágil.

En este caso designamos con n_r al COEFICIENTE DE SEGURIDAD REFERIDO AL LIMITE DE ROTURA.

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_r}{n_r} \qquad ; \qquad n_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_{adm}} \qquad (I-22)$$

La práctica común de basar los esfuerzos admisibles y los coeficientes de seguridad en algún esfuerzo característico tal como el límite de fluencia del acero o el esfuerzo de rotura de la fundición es algo peligrosa y equivocada. Ya que, cuando se tiene una gran variedad de cargas, esto puede significar, en el caso de una estructura de acero, el colapso debido a fluencia del material en alguno o algunos de sus elementos, o en el caso de una estructura de concreto, a que alguna barra este al borde de la rotura.

En el caso de sistemas estáticamente determinados (isostáticos), los esfuerzos en sus miembros aumentarán proporcionalmente a las cargas aplicadas aunque sean excedidos los límites de proporcionalidad. Así, en tales sistemas, el uso de un esfuerzo admisible que esté determinado por alguna de las ecuaciones anteriores conduce al objetivo propuesto.

Para el caso de sistemas estáticamente indeterminados (hiperestáticos), los esfuerzos existentes en sus diversas piezas dependen de sus deformaciones. Así, pues, los métodos de análisis basados en la ley de Hooke no serán aplicables más allá del límite elástico de proporcionalidad. En tales casos, el uso de esfuerzos admisibles como los definidos por la ecuación I-20 será más o menos imprudente.

La magnitud del coeficiente de seguridad depende en gran parte de la exactitud con que sean conocidas las fuerzas externas-que actúen sobre una estructura, de la exactitud con que puedan ser calculados los esfuerzos existentes en los elementos de la estructura, y también de la homogeneidad de los materiales empleados. Por ejemplo, para materiales como la madera, en los que puede existir imprebisibles faltas de homogeneidad (tales como los nudos) se deben considerar coeficientes de seguridad mayores. Los efectos dinámicos de las fuerzas aplicadas bruscamente requieren también un mayor coeficiente de seguridad. Estos, como vemos, no van a estar normalizados, ya que no son siempre los mismos, y los esfuerzos admisibles han de ser elegidos de acuerdo con la experiencia del proyectista relativa a los diferentes materiales y condiciones en que vaya a ser utilizada la estructura o elemento correspondiente.

A continuación se dan algunas de las consideraciones más importantes y necesarias al elegir un factor de seguridad (y por consiguiente un esfuerzo admisible):

i). Conocimiento y exactitud de las cargas aplicadas.

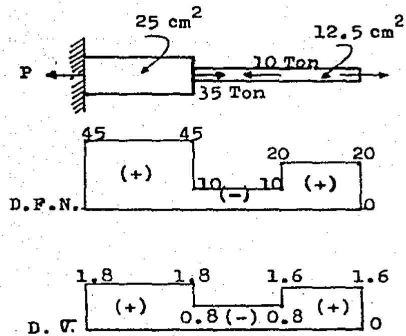
ii). Tipo de falla.

iii). Naturaleza de las cargas. Cuando se elige un factor de seguridad, el proyectista debe considerar las cargas estáticas, dinámicas, cíclicas y variables.

iv). Efecto de la corrosión y deterioro.

EJEMPLO I-1.

Una barra de sección transversal variable y empotrada en uno de sus extremos está sometida a tres fuerzas axiales, como se muestra en la figura. Determinar el esfuerzo normal máximo.



Cálculo de la reacción.

$\Sigma F_x = 0$;

$-P + 35 - 10 + 20 = 0$

$P = 35 - 10 + 20$

$P = 55 - 10$; $P = 45$ Ton.

Cálculo de los esfuerzos;

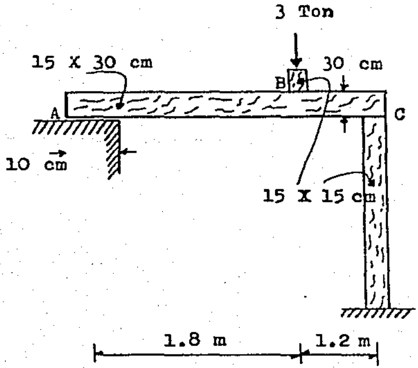
$\sigma_1 = \frac{45}{25} = 1.8 \text{ Ton/cm}^2 = 1\,800 \text{ Kgf/cm}^2$ (Esfuerzo normal máx.)

$\sigma_2 = \frac{-10}{12.5} = -0.8 \text{ Ton/cm}^2 = -800 \text{ Kgf/cm}^2$

$\sigma_3 = \frac{20}{12.5} = 1.6 \text{ Ton/cm}^2 = 1\,600 \text{ Kgf/cm}^2$

PROBLEMA I-2

Determine los esfuerzos de aplastamiento en A, B y C que produce la fuerza aplicada a la estructura que se muestra en la figura.



Cálculo de reacciones.

$\Sigma M_A = 0$;

$3(1.8) - R_C(1.8 + 1.2) = 0$

$R_C = \frac{\cancel{3}(1.8)}{\cancel{3}}$;

$R_C = 1.8$ Ton

$\Sigma M_C = 0$;

$R_A(1.8 + 1.2) - 3(1.2) = 0$

$R_A = \frac{\cancel{3}(1.2)}{\cancel{3}}$;

$R_A = 1.2$ Ton

Cálculo de los esfuerzos:

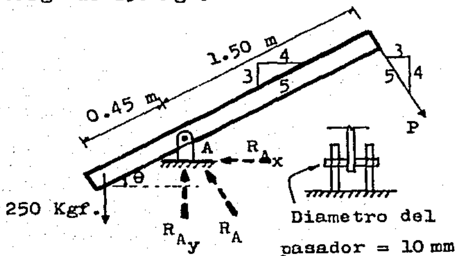
$$\sigma_A = \frac{1.2}{10 \times 15} = 0.008 \text{ Ton/cm}^2 = 8.0 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\sigma_B = \frac{3.0}{15 \times 15} = 0.0133 \text{ Ton/cm}^2 = 1.33 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\sigma_C = \frac{1.5}{15 \times 15} = 0.007 \text{ Ton/cm}^2 = 7.0 \text{ Kgf/cm}^2$$

PROBLEMA I-3

En la figura se muestra un mecanismo de palanca que se utili za para levantar los paneles de un puente portatil militar. Calcúlese el esfuerzo cortante que produce en el pasador "A" una carga de 250 Kgf.



Cálculo de la incognita

$P = ?$; $\Sigma M_A = 0$;

$P(1.5) - 250(\cos\theta)(0.45) = 0$

$P(1.5) - 250\,(4/5) = 0$

$P(1.5) = 90$

$P = 1.5/90$; $P = 60$ Kgf

Calculamos las reacciones en el apoyo "A",

$\Sigma F_y = 0$; $-250 + R_{A_y} - 60(\cos\theta) = 0$

$R_{A_y} = 250 + 60\,(4/5) = 298$ Kgf.

$\Sigma F_x = 0$; $R_{A_x} + 60\,(\mathrm{sen}\,\theta) = 0$

$R_{A_x} = 60\,(3/5)$; $R_{A_x} = 36$ Kgf.

Obtenemos la fuerza resultante; $R_A^2 = (36)^2 + (298)^2$

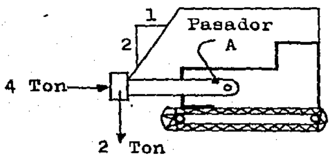
$R_A \doteq 300$ Kgf.

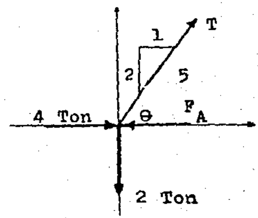
Determinamos el esfuerzo cortante, considerando dos áreas del pasador, $\tau = \dfrac{P}{2A}$; $\tau = \dfrac{300}{2\left[\frac{\pi}{4}(1)^2\right]} = 191$ Kgf/cm^2

PROBLEMA I-4

Calcule el esfuerzo cortante en el pasador A de "bulldozer", si todas las fuerzas que actúan sobre la hoja son como se indica en la figura. Observese que hay un pasador de 40 mm de diámetro a cada lado del "bulldozer", y que cada uno trabaja en corte simple.

Croquis del sistema de fuerzas.





Obtenemos el valor de las incognitas,

$\Sigma F_y = 0$; $T(\cos\theta) - 2 = 0$

$T(2/5) - 2 = 0$

$T = \frac{\cancel{2}(5)}{\cancel{2}}$; $\underline{\underline{T = 5 \text{ Ton}}}$

$\Sigma F_x = 0$;

$4 - F_A + T(\text{sen}\,\theta) = 0$

$4 - F_A + 5(1/5) = 0$;

$F_A = 4 + 1 = \underline{\underline{5 \text{ Ton}}}$

Calculamos el esfuerzo cortante en el pasador "A", tomando en cuenta que estan colocados uno a cada lado del bulldozer.

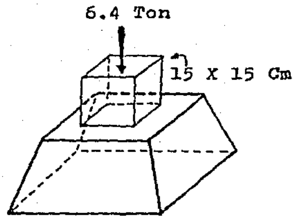
$$\tau = \frac{F_A}{2(A)} = \frac{5\,000}{2\left[\frac{\pi}{4}(4)^2\right]} \quad ; \quad \tau = 199 \text{ Kgf/cm}^2$$

PROBLEMA I-5

Un poste de madera de 15 cm por 15 cm ejerce una fuerza de - 6.4 Ton en una zapata de concreto, véase la figura.

a).- Determine el esfuerzo de aplastamiento de la madera sobre el concreto.

b).- Si el esfuerzo permisible sobre el terreno es de 10 Ton/m², determinar las dimensiones que se requieren en planta de una zapata cuadrada. Desprécie el peso de la misma.



a).- $\sigma_{aplastamiento} = ?$

$$\sigma_{ap} = \frac{6\,400}{15 \times 15} \quad ;$$

$$\sigma_{ap} = 28.44 \text{ Kgf/cm}^2$$

b).- $A_{zapata} = ?$

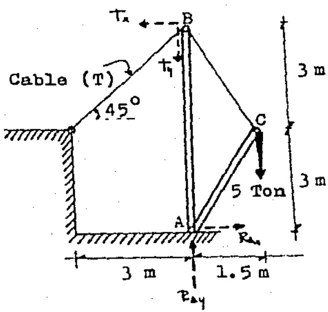
$$\sigma = \frac{F}{A_z} \quad \therefore \quad A_z = \frac{6.4}{10.0}$$

$$A_z = 0.64 \text{ m}^2$$

Esta área se cumple para una dimensión de 0.80 m X 0.80 m.

PROBLEMA I-6

Determinar el esfuerzo en el poste de la grúa que aparece en la figura. Todos los miembros están en el mismo plano vertical- y son unidos por pasadores. El poste está hecho de un tubo es-- tándar de acero de 200 mm que pesa 40 Kgf/m. (Consultese tablas correspondientes a tubos de acero). Desprecie el peso propio de de los miembros.



Determinamos la tensión en- el cable, por, $\Sigma M_A = 0$;

$$5(1.5) - T(\cos 45^{\circ})(6) = 0$$

$$T = \frac{7.5}{0.7071\,(6)} \quad ;$$

$$T = 1.768 \text{ Ton.}$$

Calculo de las reacciones en el punto "A",

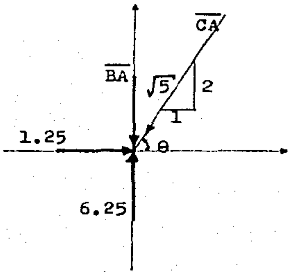
$\Sigma F_x = 0$; $\quad R_{A_x} - T\,(\cos 45^{\circ}) = 0$

$R_{A_x} = 1.768\,(0.7071)$; $\quad R_{A_x} = 1.25$ Ton.

$\Sigma F_y = 0$; $\quad -T\,(\text{sen } 45) - 5 + R_{A_y} = 0$

$-1.768\,(0.7071) - 5 = R_{A_y}$; $\quad R_{A_y} = 6.25$ Ton

Aislamos el nudo "A" para determinar la fuerza que actúa en el poste,



$\Sigma F_x = 0$;

$1.25 - \overline{CA}(\cos\theta) = 0$;

$1.25 - \overline{CA}\ (1/\sqrt{5}) = 0$

$\overline{CA} = 1.25(\sqrt{5})$

$\overline{CA} = 2.8$ Ton

$\Sigma F_y = 0$; $\quad 6.25 - \overline{BA} - \overline{CA}(\ \text{sen}\ \theta\ ) = 0$;

$6.25 - \overline{BA} - 2.8(\ 2/\sqrt{5}\ ) = 0$

$\overline{BA} = 6.25 - 2.5$

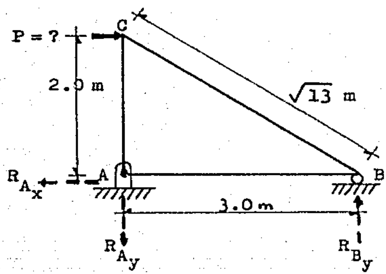
$\overline{BA} = 3.75$ Ton

En la tabla correspondiente a tubos de acero tipo estándar -(Véase, E. Popov, "Mecánica de sólidos", (México: Editorial Limusa, 1978), Pág. 643), obtenemos el área para un tubo de este tipo, de 203.2 de diámetro y con un peso por metro líneal de --42.49 Kgf/m ; de donde, $A = 54.19\ cm^2$.

Por tanto, $\quad \sigma = \dfrac{Fza}{A} = \dfrac{-3\,750}{54.19} = -69.2\ Kgf/cm^2.$

PROBLEMA I-7

Calcule la carga máxima ($P_{máx}$) que se puede aplicar a la estructura, que se muestra en la figura, sin que se excedan los - valores de los esfuerzos admisibles correspondientes. $V_c = 1\,000$ Kgf/cm^2 y $V_t = 1\,500\ Kgf/cm^2$. Considere el valor $E = 2 \times 10^6\ Kgf/cm^2$ y la sección transversal de las barras es $A = 5.0\ cm^2$.



Cálculo de reacciones,

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad R_{A_x} - P = 0$$

$$R_{A_x} = P$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad ; \quad P(2) - R_{B_y}(3) = 0$$

$$R_{B_y} = \frac{2}{3} P$$

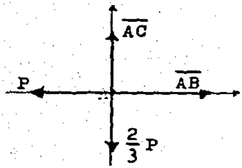
$$\Sigma M_B = 0 \quad ; \quad -R_{A_y}(3) + P(2) = 0$$

$$R_{A_y} = \frac{2}{3} P$$

Los valores de las reacciones resultan positivos debido a que se han dibujado correctamente los sentidos de las fuerzas.

Cálculo de las fuerzas en las barras:

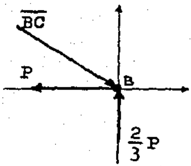
Primero aislamos en nudo "A", para analizarlo,



$$\Sigma F_y = 0 \quad ; \qquad \overline{AC} = \frac{2}{3}P$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \qquad \overline{AB} = R_{A_x} = P$$

Aislamos el nudo "B",



$$\Sigma F_y = 0 \quad ; \qquad -BC\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) + \frac{2}{3}P = 0$$

$$\overline{BC} = 1.2\ P$$

Tabulamos los datos obtenidos:

Barra	Fuerza	Esfuerzo	Área	Fza. Cálculada	Carga
$\overline{AB}$	$+P$	+ 1 500	5.0	7 500	7 500
$\overline{BC}$	$-1.2P$	− 1 000	5.0	5 000	4 167
$\overline{CA}$	$\frac{2}{3}P$	+ 1 500	5.0	7 500	11 250

Obtenemos el valor de la carga P para cada barra;

$$P_{AB} = 7\,500$$

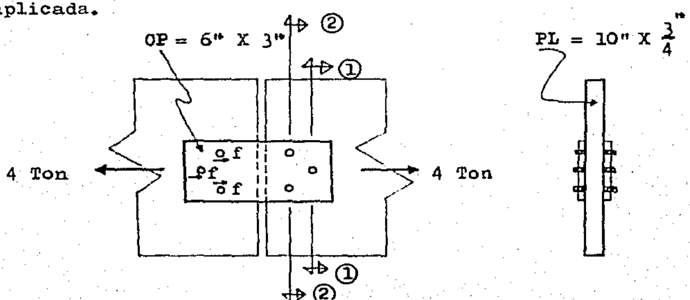
$$P_{BC} = \frac{5\,000}{1.2} = 4\,167 \qquad \therefore \quad P_{máx} = 4\,167 \text{ Kgf}$$

$$P_{CA} = \frac{7\,500}{(2/3)} = 11\,250$$

(Carga máxima que puede soportar la estructura, antes de que falle la barra $\overline{BC}$)

PROBLEMA I-8

Dos placas de 25 cm de ancho por 1.9 cm de espesor están unidas por dos cubreplacas atornilladas de 1.3 cm de grueso cada - una, y con el ancho que se indica en la figura. Tres tornillos- de 1.27 cm se utilizan a cada lado de la junta en agujeros de -- ajuste exacto. Si esta unión se somete a una fuerza de tensión- P = 4 Ton, encontrar: a). El esfuerzo cortante en los tornillos, b). Los esfuerzos de tensión en las placas principales en las - secciones 1-1 y 2-2, c) . El esfuerzo máximo de tensión en las- cubreplacas. Suponga que cada perno transmite 1/3 de la fuerza- aplicada.



a). Para determinar el esfuerzo cortante en los tornillos obtenemos la carga correspondiente a cada uno de ellos:

$$6\,f = 4\,000 \text{ Kgf} \quad ; \quad f = 4\,000 / 6$$

$$f = 666.67 \text{ kgf}$$

de la fórmula del esfuerzo cortante se tiene,

$$\tau = \frac{f}{A} = \frac{666.67}{\frac{\pi}{4}(1.27)^2} \quad ; \quad \tau = 526.3 \text{ Kgf/cm}^2$$

b). Cálculo de los esfuerzos de tensión en las placas principales:

$$\sigma_{PL_1} = \frac{4\,000}{(25 \times 1.9) - (1.27 \times 1.9)} = 88.7 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{PL_2} = \frac{4\,000 - 4\,000/3}{(25 \times 1.9) - 2(1.27 \times 1.9)} = 62.5 \text{ Kgf/cm}^2$$

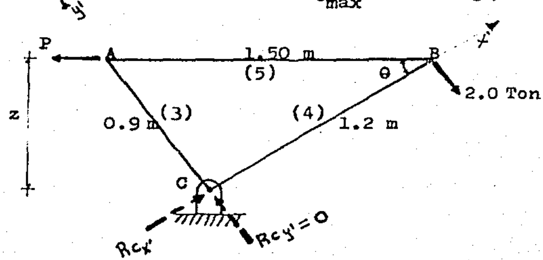
c). Esfuerzo máximo de tensión en las cubreplacas:

$$\sigma_{CP_1} = \frac{2\,000 - 2\,000(2/3)}{(7.62 - 1.27)\,0.95} = 110.5 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{CP_2} = \frac{2\,000}{(7.62 - 2 \times 1.27)\,0.95} = 414.4 \text{ Kgf/cm}^2$$

PROBLEMA I-9

En la figura se muestra una estructura que esta sometida a - las cargas que se indican. a). Seleccionar un perfil estructu-- ral, de área mínima posible para NO exceder los esfuerzos admisibles del material: $\sigma_t = 1\,300\ Kgf/cm^2$ y $\sigma_c = 800\ Kgf/cm^2$. b). Calcular el diámetro comercial mínimo del perno en "C" para un esfuerzo cortante máximo de $\tau_{máx} = 1\,000\ Kgf/cm^2$.



Determinamos el valor de las incognitas (z , P), tome en - cuenta que esta armadura se asemeja a un triangulo de proporcio nes (5-4-3).

$$\frac{z}{0.9} = \frac{4}{5} \quad ; \quad z = 0.72\ m$$

y por la ecuación de equilibrio, $M_C = 0$;

$$2.0\,(1.2) - P\,(z) = 0 \quad ; \quad 2.0\,(1.2) - P\,(0.72) = 0 \quad ;$$

$$P = 3.33\ Ton.$$

Cálculo de las reacciones en el apoyo "C",

$\Sigma F_{x'} = 0$; $R_{C_{x'}} - 3.33 (\cos \theta) = 0$;

$$R_{C_{x'}} = 3.33 (4/5) = 2.67 \text{ Ton.}$$

$\Sigma F_{y'} = 0$; $R_{C_{y'}} - 2.0 + 3.33 (\operatorname{sen} \theta) = 0$;

$$R_{C_{y'}} = 2.0 - 3.33 (3/5) = 0 \text{ Ton.}$$

Entonces la barra AB esta a tensión (+3.33 Ton), la barra BC - esta a compresión (-2.67 Ton) y la barra AC no trabaja,

BARRA	FUERZA	ESFUERZO	AREA CALCULADA
+ AB	3.33 Ton	1.3 T/cm^2	2.562 cm^2
- BC	2.67 Ton	0.8 T/cm^2	3.337 cm^2 ($A_{mín}$)

a). Por tato, el área mínima es (la más critica), $A = 3.337 \text{ cm}^2$.

b). Para determinar el diámetro comercial mínimo del perno en - "C",

$$\tau = \frac{F}{2A} \quad ; \quad A = \frac{F}{2\tau} = \frac{2.67}{2(1.0)} = 1.335 \text{ cm}^2$$

$$\therefore \quad \frac{\pi}{4} D^2 = 1.335 \quad ; \quad D = \sqrt{\frac{4(1.335)}{\pi}} \quad ;$$

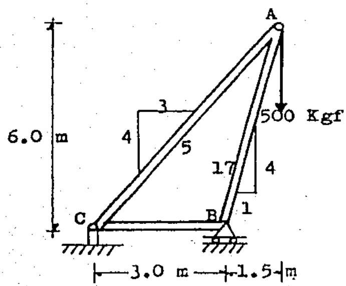
el diámetro que resulta es, $\varnothing = 1.3$ cm .

y el diametro comercial más proximo:

$$\varnothing_c = \frac{5''}{8} \doteq 1.58 \text{ cm}$$

PROBLEMA I-10

Para soportar una carga P = 500 Ton , se ha construido la siguiente estructura; desprecie el peso de ésta y suponga que las juntas son de pasador. a). Seleccionar un perfil estructural de área mínima posible para no exceder los esfuerzos admisibles ; $\sigma_t = +1\,300\ \text{Kgf/cm}^2$ y $\sigma_c = -\ 800\ \text{Kgf/cm}^2$. b). Obtener el diámetro mínimo comercial del pasador en "C" para un esfuerzo cortante máximo, $\tau_{máx} = 1\,000\ \text{Kgf/cm}^2$.



Calculo de las reaciones,

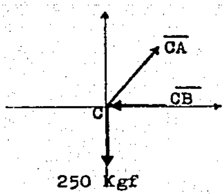
$\Sigma M_C = 0 \quad ; \quad -R_B(3) + 500\,(4.5) = 0$

$R_B = 750$ Kgf

$\Sigma M_B = 0 \quad ; \quad R_C(3) + 500(1.5) = 0$

$R_C = 250$ Kgf

Aislamos el nudo "C",



$\Sigma F_y = 0 \quad ; \quad CA(\text{sen}\,\theta) - 250 = 0$

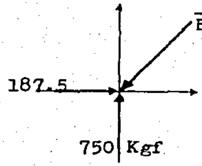
$CA(4/5) - 250 = 0 \quad ;$

$CA = \dfrac{(5)\,250}{4} \quad ; \quad CA = 312.5$ kgf

$\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad 312.5(\text{sen}\,\theta) - CB = 0$

$312.5(3/5) - CB = 0 \quad ; \quad CB = 187.5$ Kgf

Aislamos el nudo "B",



$$\Sigma F_y = 0 \quad ; \quad -BA(\text{sen}\,\theta) + 750 = 0$$

$$-BA\,(\,4/\;17\,) + 750 = 0 \quad ;$$

$$BA = \frac{(\;17\,)750}{4} \quad ; \quad BA = 773\,\text{Kgf}$$

Tabulamos los datos obtenidos y determinamos las áreas, mediante la expresión $A = F/V$.

BARRA	FUERZA	ESFUERZO	AREA CALCULADA
− AB	773.0	800	0.966 cm^2
− BC	187.5	800	0.234 cm^2
+ CA	312.5	1 300	0.240 cm^2

a). Por tanto, el área mínima es (la más crítica);

$$A_{mín} = 0.966\ cm^2$$

b). Determinamos el diámetro comercial del pasador en "C", primero calculamos la fuerza resultante en dicho punto,

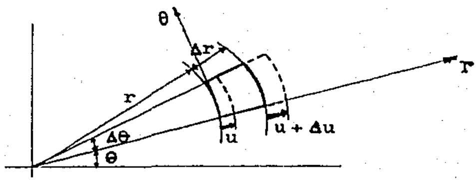
$$R_C^2 = (312.5)^2 + (187.5)^2 \quad ; \quad R_C = 364.4\ \text{Kgf}$$

$$\therefore \quad 2\,A = \frac{R_C}{\tau} \quad ; \quad A = \frac{364.4}{2\,(1\,000)} = 0.182\ cm^2 \doteq \frac{\pi}{4}\,\emptyset^2$$

$$\emptyset = 0.48\ cm^2 \quad ; \quad \text{El diametro comercial } \emptyset_C = \frac{1}{4}'' = 0.636\ cm$$

PROBLEMA I-11

Considérese un cuerpo deformado axialemnte, tal como un tubo de sección circular con presión en su interior. Suponga que en tal cuerpo sólo ocurran desplazamientos radiales, demuestre que en coordenadas polares las deformaciones radial y tangencial -- son, respectivamente. $\varepsilon_r = \dfrac{du}{dr}$ y $\varepsilon_\theta = \dfrac{u}{r}$



Por la definición de deformación unitaria obtenemos directamente la componenete radial, $\varepsilon_r = \lim\limits_{\Delta r \to 0} \dfrac{(u + \Delta u) - u}{\Delta r}$;

$$\varepsilon_r = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta r} \quad ; \qquad \varepsilon_r = \frac{du}{dr}$$

Para determinar la componente tangencial, partimos de la definición de SECTOR CIRCULAR, $S = r\,\theta$. $\therefore$ $\varepsilon_\theta = \dfrac{\Delta\theta}{\theta}$;

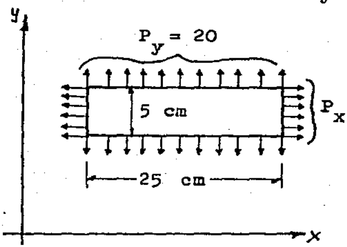
$$\varepsilon_\theta = \frac{(r + u)(2\pi) - r(2\pi)}{2\pi r} \quad ;$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{r + u - r}{r} \quad ; \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

L. Q. Q. D.

PROBLEMA I-12

Una placa de acero de 5 cm por 25 cm por 1 cm está sometida a esfuerzos uniformemente distribuidos a lo largo de sus bordes (véase la figura). a). Si P_x= 10 Ton y P_y= 20 Ton ¿cuál será el cambio de espesor debido a la aplicación de estas fuerzas? b). ¿Cuál deberá ser la magnitud de P_x para que esta sola fuerza produzca el mismo cambio de espesor que en (a)?. Considere que $E = 2 \times 10^6$ Kgf/cm^2 y $\mu = 0.25$.



Ley de Hooke generalizada,

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_y + \sigma_x)$$

a). Como primer paso determinamos los esfuerzos,

$$\sigma_x = \frac{10\,000}{5 \times 1} = 2 \times 10^3 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\sigma_y = \frac{20\,000}{25 \times 1} = 8 \times 10^2 \text{ Kgf/cm}^2$$

En este caso es suficiente con sustituir en la última expresión de la ley de Hooke,

$$\varepsilon_z = \frac{(0)}{2 \times 10^6} - \frac{0.25}{2 \times 10^6}(8 \times 10^2 + 2 \times 10^3)$$

$$\varepsilon_z = -3.5 \times 10^{-4} \text{ cm/cm}$$

de la definición de deformación unitaria tenemos,

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta Z}{Z_o} \qquad ; \qquad \Delta Z = E\, Z_o$$

$$\therefore \quad \Delta Z = -3.5 \times 10^{-4} (1.0) = \underline{\underline{-3.4 \times 10^{-4} \text{ cm.}}}$$

b). Cuál será el valor de $P_x = ?$ para producir el mismo cambio-de espesor.

En este caso sustituimos en la última expresión de la ley de Hooke generalizada los valores de esfuerzo que satisfacen la -- condición de carga, es decir, $\sigma_z = 0$ y $\sigma_y = 0$.

$$\varepsilon_z = \frac{(0)}{E} - \frac{\mu}{E}(0 + \sigma_x) \qquad ; \qquad \varepsilon_z = -\frac{\mu \sigma_x}{E}$$

de donde, $$\sigma_x = \frac{-E\,\varepsilon_z}{\mu} = -\frac{2 \times 10^{6}(-3.5 \times 10^{-4})}{0.25}$$

$$\therefore \quad \sigma_x = 2.8 \times 10^{3} \text{ Kgf/cm} .$$

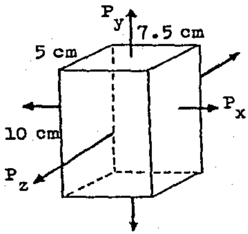
y de la definición de esfuerzo normal tenemos,

$$P_x = \sigma_x A \qquad ; \qquad P_x = (2.8 \times 10^{3})(5 \times 1)$$

$$P_x = 14\,000 \text{ Kgf} = \underline{\underline{14 \text{ Ton.}}}$$

PROBLEMA I-13

Un bloque rectangular de aleación de aluminio tiene las dimensiones que se indican en la figura. Las resultantes de esfuerzos uniformemente distribuidos son $P_x = 20$ Ton, $P_y = 24$ Ton, $P_z = 18$ Ton. Determine la magnitud de un sistema único de fuerzas de tensión actuando sólo en la dirección x, que produciría la misma deformación en dicha dirección que las fuerzas iniciales. Considere que $E = 7 \times 10^5$ Kgf/cm^2 y $\mu = 0.25$.



Cálculo de los esfuerzos,

$$\sigma_x = \frac{20\,000}{5 \times 10} = 400 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\sigma_y = \frac{24\,000}{5 \times 7.5} = 640 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\sigma_z = \frac{18\,000}{7.5 \times 10} = 240 \text{ Kgf/cm}^2$$

Es suficiente con sustituir directamente en la primera expresión de la ley de Hooke generalizada, y obtener la deformación:

$$\varepsilon_x = \frac{400}{7 \times 10^5} - \frac{0.25}{7 \times 10^5}(640 + 240) = 0.000\,257$$

pero como; $\sigma_x = \varepsilon_x E$; $\sigma_x = 2.57 \times 10^{-4}(7 \times 10^5) = 180$ Kgf/cm^2

además, $P_x = \sigma_x A_x$; $P_x = 180\,(5 \times 10)$

$$P_x = 9\,000 \text{ Kgf} = 9.0 \text{ Ton.}$$

CAP. II. CARGA AXIAL

II-1. ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN EL RANGO ELASTICO EN ELEMENTOS SUJETOS A CARGA AXIAL. EFECTO DEL PESO PROPIO.

Esfuerzo normal (σ). De acuerdo con la definición de esfuerzo, que se da en la sección I-4, el ESFUERZO NORMAL o el ESFUERZO QUE ACTUA PERPENDICULARMENTE A LA SECCION, es:

$$\sigma = \frac{F_n}{A} \quad ; \qquad (\text{Fza./Long.}^2) \qquad (\text{ II-1 })$$

En una sección transversal determinada por un corte, el sistema de esfuerzos de tensión expresados por la ec. II-1 proporciona una equilibrante a la fuerza exteriormente aplicada, Fig. II-1. Cuando estos esfuerzos normales se multiplican por las áreas infinitesimales correspondientes y se suman luego sobre el área total (A) de la sección, la fuerza será igual a la fuerza aplicada F_n. Por tanto, el sistema de esfuerzos es estáticamente equivalente a la fuerza F_n. Además, la resultante de esta suma debe actuar pasando por el centroide de la sección. Recíprocamente, para tener una distribución uniforme de esfuerzos en una barra, la fuerza axial aplicada debe actuar pasando por el centroide del área de la sección transversal.

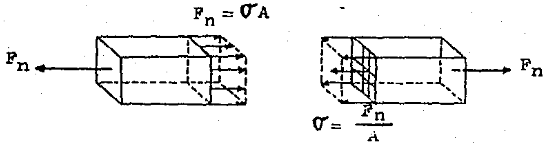


Fig. II-1. Análisis de esfuerzos normales en un cuerpo.

Deformaciones en miembros cargados axialmente. En este caso, la deformación longitudinal de una barra se trata como un problema unidimensional, es decir, se supondrá que los desplazamientos de todos los puntos a través de su sección transversal son los mismos.

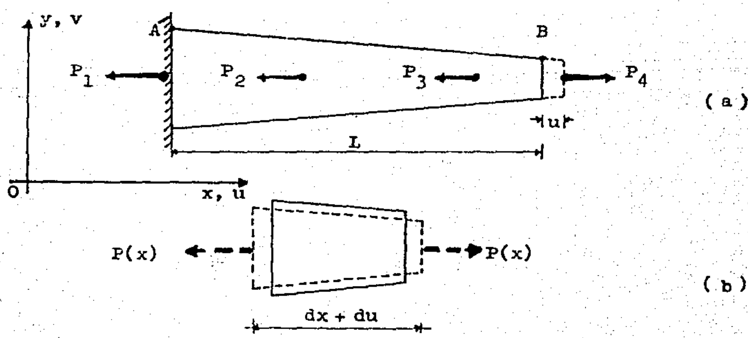


Fig. II-2. Barra cargada axialmente.

En la figura II-2 observamos que, una sección inicialmente perpendicular al eje de la barra se mueve axialmente una distancia "u" en forma paralela a sí misma.

En esta barra el área transversal varía a lo largo de su longitud, y fuerzas de diversas magnitudes se aplican en varios puntos. En este problema lo que se busca es determinar el cambio de longitud de la barra entre los puntos A y B; notese que la cantidad por calcular es la suma (o acumulación) de las deformaciones que ocurren en elementos infinitesimales de longitud de la barra, Fig.II-2(b).

$$u = \int du + C_1 \qquad \text{(II-2)}$$

De la definición de deformación unitaria tenemos;

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad ; \qquad du = \varepsilon_x \, dx$$

sustituimos en la ecuación II-2,

$$u = \int \varepsilon_x \, dx + C_1 \qquad \text{(II-3)}$$

donde C_1 - es una constante de integración y representa el desplazamiento inicial dado en la frontera.

Para materiales linealmente elásticos, de acuerdo con la ley de Hooke para esfuerzo uniaxial, la magnitud de la deformación-

ε_x depende de la magnitud del esfuerzo σ_x,

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

ademas se sabe que,

$$\sigma_x = \frac{P(x)}{A(x)}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ec. II-3,

$$u = \Delta X = \int \frac{P(x)}{E\ A(x)}\, dx + C_1 \qquad (\text{ II-4 })$$

Esta es la ecuación para calcular la deformación total de una - barra cargada axialmente.

Para el caso de que la barra este sometida a una carga axial P constante, en la cual no varía el área transversal A a lo -- largo de su eje y sin desplazamiento en su frontera, $C_1 = 0$, al momento del estudio. La ecuación para la deformación total se - anota de la siguiente manera,

$$u = \Delta X = \frac{P\,X}{E\,A} \qquad (\text{ II-5 })$$

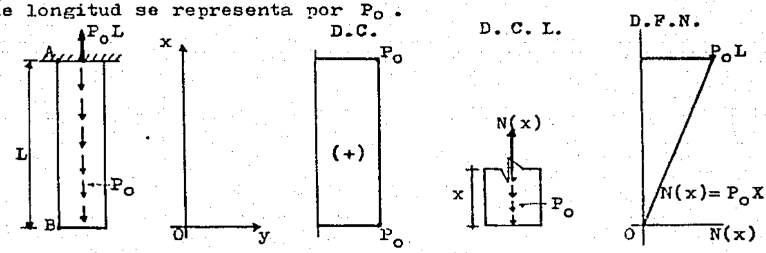
Entonces, para el extremo B (Fig. II-2(a)), cuando x = L;

$$u = \Delta X = \frac{P\,L}{E\,A} \qquad (\text{ II-6 })$$

Esto debería ser razonable, ya que a mayor carga, mayor deformación (ley de Hooke), y a mayor longitud de la barra, más moléculas se presentan en cada fibra. Por consiguiente, la elongación acumulada de cada fibra deberá ser mayor. La deformación es inversamente proporcional al área ya que a medida que aumenta ésta, se presentan más fibras para soportar la carga, y cada fibra soportará una menor parte de esa carga.

EJEMPLO II-1.

Para la barra AB de la figura, determine la deformación en el extremo libre, causada por el peso propio. Dicha barra tiene una área transversal constante A y el peso propio por unidad de longitud se representa por P_o.



Cálculo de la fuerza normal, $N(x) = ?$

por el equilibrio de fuerzas verticales, $\Sigma F_x = 0$;

$$N(x) - P_o x = 0 \quad ;$$

$$N(x) = P_o x \qquad \text{(la variación del diagrama es lineal).}$$

Valuamos esta ecuación en los extremos de la barra, con lo cual trazamos el diagrama de fuerza normal (D.F.N.).

Para el extremo "A", $x = L, \quad \therefore \quad N(L) = P_o L$

Para el extremo "B", $x = 0 \quad \therefore \quad N(0) = P_o(0) = 0$

Determinamos la variación de la deformación total,

$$u = \Delta X = \frac{1}{EA}\int_A^B N(x)\,dx = \frac{1}{EA}\int_L^0 (P_o\,x)\,dx$$

Integrando entre los puntos A y B de la barra,

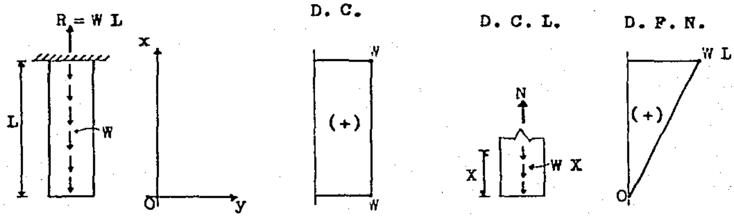
$$u = \frac{P_o}{2EA}\left[x^2\right] = \frac{P_o}{2EA}\left(0^2 - L^2\right)$$

$$u = -\frac{P_o L^2}{2EA} \quad ;$$

El signo negativo, en esta última expresión, sólo indica que los límites de la integral se tomarón en sentido contrario al del eje **x**.

PROBLEMA II-2.

Para la barra mostrada en la figura, trace el diagrama de -- carga y el de fuerza normal. Considere el sistema de referencia establecido y la carga por unidad de longitud, $W = [\,F \cdot L^{-1}\,]$.



Cálculo de la reacción,

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \qquad R - W\,L = 0 \qquad \therefore \qquad \underline{\underline{R = W\,L}}$$

Cálculo de la ecuación de la fuerza normal,

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \qquad N - W\,X = 0$$

$$\therefore \qquad N = W\,X \qquad \text{(la variación es lineal)}$$

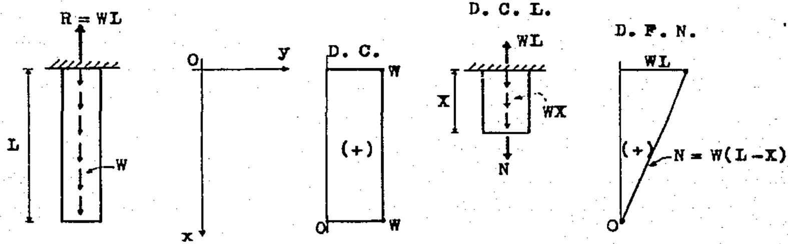
Obtenemos los valores extremos del diagrama de fuerza normal (D. F. N.), sustituyendo los valores correspondientes,

$$N_o = N\,(0) = 0$$

$$N_L = W\,(L) = W\,L$$

PROBLEMA II - 3.

Para la barra del ejemplo anterior, trace el diagrama de --- fuerza normal, tomando en cuenta el nuevo sistema de referencia.



Cálculo de la ecuación de la fuerza normal,

$$\Sigma F_x = 0 \qquad ;$$

$$N + WX - WL = 0 \qquad ;$$

$$N = WL - WX = W(L - X) \qquad \text{(la variación es líneal)}$$

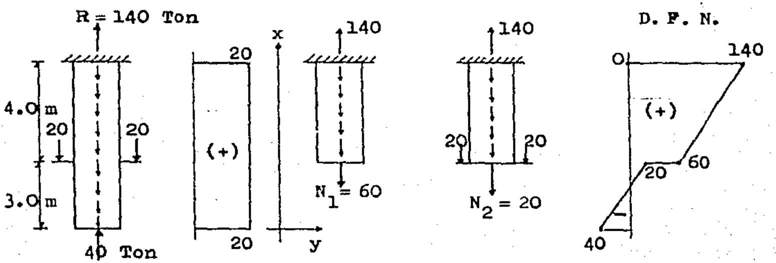
Obtenemos los valores extremos del diagrama de fuerza normal (D. F. N.), sustituyendo los valores correspondientes,

$$N_o = W(L - O) = WL$$

$$N_L = W(L - L) = O$$

PROBLEMA II – 4.

La barra mostrada en la figura, esta sometida a la acción de una carga uniformemente distribuida (debida a peso propio) de $W = 20$ T/m, a la acción de dos cargas concentradas de 20 Ton cada una y y otra de 40 Ton. Obtenga el diagrama de fuerza normal.



Cálculo de la reacción,

$\Sigma F_y = 0$;

$$R - 20(7) - 20 - 20 + 40 = 0$$

$\therefore$ $R = 140$ Ton.

A 4.0 m del empotramiento se tienen dos valores diferentes para la fuerza normal, N_1 y N_2.

$\Sigma F_y = 0$;

$$140 - 20(4) - N_1 = 0$$

$\therefore \qquad N_1 = 140 - 80 = 60$ Ton.

Por otro lado, tenemos,

$\Sigma F_y = 0 \qquad ;$

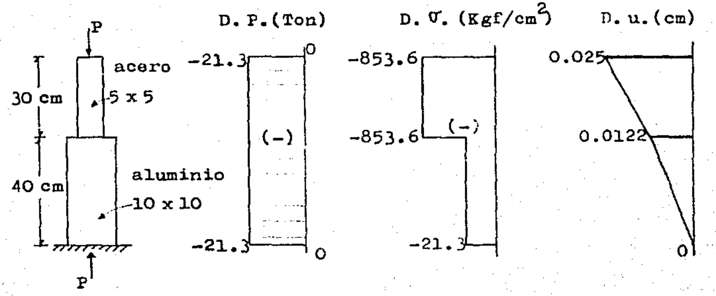
$140 - 20(4) - 20 - 20 - N_2 = 0$

$\therefore \qquad N_2 = 140 - 80 - 40 = 20$ Ton.

A 7.0 m del empotramiento se tiene que llegar con el valor de 40 Ton (igual que la carga aplicada), para mantener el equilibrio.

EJEMPLO II - 5.

Una barra cuadrada de acero y otra similar de aluminio tie-- nen las dimensiones indicadas en la figura. Calcule la magnitud de la fuerza P que hará que la longitud total de las dos ba--- rras disminuya en 0.025 cm. Suponga que en todas las secciones transversales de ambas barras la distribución de esfuerzos normales es uniforme y que éstas no pueden sufrir pandeo lateral.- Trace el diagrama de deformación axial, $E_{ac} = 2 \times 10^6$ Kgf/cm^2 y - $E_{al} = 0.7 \times 10^6$ Kgf/cm^2.



$$u_{tot} = \Sigma u = u_{ac} + u_{al}$$

$$u_{tot} = \frac{P\,L_{ac}}{E_{ac}A_{ac}} + \frac{P\,L_{al}}{E_{al}A_{al}}$$

$$u_{tot} = P\left(\frac{L_{ac}}{E_{ac}A_{ac}} + \frac{L_{al}}{E_{al}A_{al}} \right)$$

Despejamos la fuerza P,

$$P = \frac{u_{tot}}{\frac{L_{ac}}{E_{ac}A_{ac}} + \frac{L_{al}}{E_{al}A_{al}}}$$

$$P = \frac{0.025}{\frac{30}{2 \times 10^{6}(5 \times 5)} + \frac{40}{0.7 \times 10^{6}(10 \times 10)}}$$

$$P = \frac{0.025}{6 \times 10^{-7} + 5.7143 \times 10^{-7}}$$

$$P = \frac{0.025}{1.1714 \times 10^{-6}} = 2.1341 \times 10^{4} \text{ Kgf}$$

$$\therefore \quad P = 21.3 \text{ Ton.}$$

Cálculo de la deformación en el aluminio,

$$u_{al} = \frac{P\,L_{al}}{E\,A_{al}}$$

$$u_{al} = \frac{21\,341\,(40)}{0.7 \times 10^{-6}(100)} = 1.22 \times 10^{-2} \text{ cm.}$$

$$u_{al} = 0.0122 \text{ cm.}$$

II-2. DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE ELEMENTOS DE ACERO SUJETOS A TENSION AXIAL.

Como se indicó en la sección I-2, la resistencia de materiales no es un curso de diseño estructural (ni de diseño de máquinas), pero proporciona las bases para un diseño científico en esos cursos. Por tanto, en este estudio, el interes principal es el de conocer los principios que respaldan la selección adecuada de materiales y dimensiones. Otras consideraciones prácticas y económicas solamente pueden aprenderse a partir de una experiencia real de diseño en la industria.

Cuando hablamos de dimensionamiento, nos referimos a la parte del diseño, cuya finalidad es determinar el tamaño y la geometría de los miembros estructurales.

EJEMPLO II-6.

Una ménsula está formada por dos barras AC y BC de sección rectangular, como se muestra en la figura. En el punto C se aplica una carga P = 19 000 lb. Diseñar la barra AC, usando un esfuerzo permisible de tensión $\sigma_{perm} = 20\,000$ lb/in^2. Supóngase que las conexiones para la varilla AC no reducen el área neta de ésta, cuando se somete a tensión.

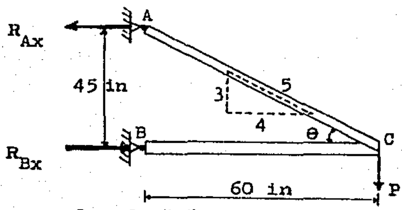
Cálculo de las reaciones en los apoyos,

$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \quad ; \quad -R_{Bx}(45) + 19\,000(60) = 0$$

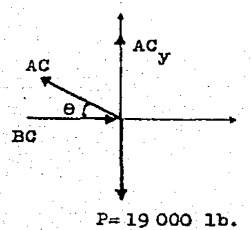
$$R_{Bx} = \frac{19\,000(60)}{45} \quad ; \quad R_{Bx} = 25\,333.3 \text{ lb.}$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_B = 0 \quad ; \quad - R_{Ax}(45) + 19\,000(60) = 0$$

$$R_{Ax} = \frac{19\,000(60)}{45} \quad ; \quad R_{Ax} = 25\,333.3 \text{ lb.}$$



Aislamos el nudo "C",



Por suma de fuerzas verticales,

$$\Sigma F_y = 0 \quad ; \quad AC_y - 19\,000 = 0$$

pero, $AC_y = AC \operatorname{sen}\theta = AC(3/5)$

$$\therefore \quad AC\,(3/5) = 19\,000$$

$$AC = \frac{19\,000(5)}{3}$$

$$AC = 31\,666.7 \text{ lb.}$$

Determinamos el área de la sección transversal requerida para la barra AC, mediante la ecuación del esfuerzo normal.

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad ; \qquad A_{requerida} = P / \sigma_{perm.}$$

$$A_r = \frac{31\,666.7}{20\,000.0} = 1.58 \text{ in}^2$$

Por último, se debe escoger una barra cuyas dimensiones proporcionen una área de sección transversal de por lo menos 1.58 in^2. Algunas dimensiones que serían satisfactorias son las siguientes:

$2 \text{ in} \times 7/8 \text{ in}, \qquad A = 1.75 \text{ in}^2;$

$2\frac{1}{2} \text{ in} \times 3/4 \text{ in}, \qquad A = 1.87 \text{ in}^2;$

$3 \text{ in} \times 5/8 \text{ in}, \qquad A = 1.88 \text{ in}^2;$

$3\frac{1}{4} \text{ in} \times 1/2 \text{ in}, \qquad A = 1.63 \text{ in}^2.$

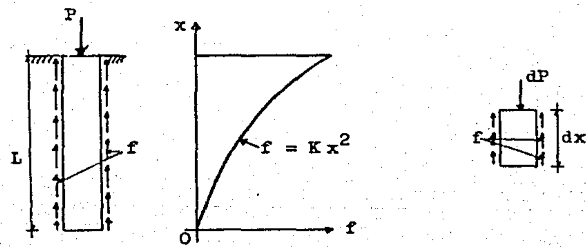
Cualquiera de estas barras seleccionadas o varias otras podrían usarse satisfactoriamente. Es decir, que sería factible usar ángulos u otros perfiles estructurales. Muchos factores entran en la decisión de la forma y dimensiones adecuadas, y muchas soluciones pueden ser correctas.

El proyectista debería entonces considerar otros factores para elegir la "mejor" barra para realizar el trabajo.

II-3. DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE ELEMENTOS DE MADERA SUJETOS A CARGA AXIAL SIN CONSIDERAR EFECTOS DE ESBELTEZ.

EJEMPLO II-7.

Un pilote de madera de sección transversal constante A, que ha sido hincado hasta una profundidad L en un terreno arcilloso, soporta una carga P aplicada en su parte superior. Tal carga es resistida enteramente por la fricción f que se ejerce a lo largo del pilote; dicha fricción o rozamiento varía en la forma parabólica que se indica en la figura. a) Determine el acortamiento total del pilote en función de P, L, A y el módulo elástico E. b) Si $P = 50$ Ton, $L = 12$ m, $A = 625\ cm^2$ y $E = 1 \times 10^5\ Kgf/cm^2$ ¿qué tanto se acortará el pilote?



a). Por el equilibrio de las fuerzas verticales, obtenemos la variación de la carga en un elemento del pilote,

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \qquad -dP + f\,dx = 0$$

Integrando la carga a lo largo del pilote,

$$P = \int_0^L f\,dx = \int_0^L (K x^2)\,dx \qquad ; \qquad P = \left.\frac{K x^3}{3}\right]_0^L$$

Si sustituimos los límites de la integral, podemos despejar el valor de la constante,

$$P = \frac{K L^3}{3} \qquad \therefore \qquad K = \frac{3P}{L^3}$$

Cálculo de la deformación total mediante la fórmula, $u = \int \frac{P(x)dx}{E A}$

$$u = \int_0^L \frac{K x^3\,dx}{3\ E A} = \frac{K}{3 E A}\int_0^L x^3\,dx = \left.\frac{K x^4}{12 E A}\right]_0^L = \frac{K L^4}{12 E A}$$

sustituyendo el valor de la constante K, se tiene;

$$u = \frac{\cancel{3} P \cancel{L^4}}{\cancel{12} E A \cancel{L^3}} \qquad ; \qquad u = \frac{P L}{4 E A}$$

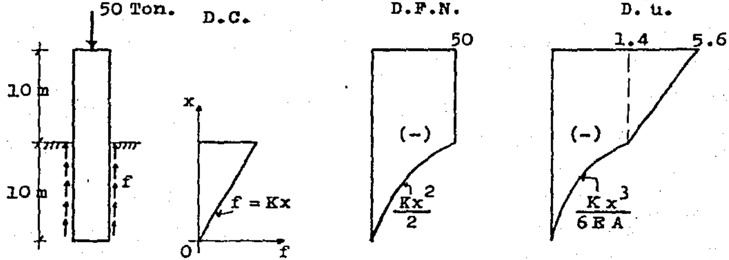
b). Para determinar el acortamiento del pilote, sustituimos en la última expresión los datos proporcionados,

$$u = \frac{(50\,000)\,(120)}{4\,(100\,000)\,(625)} \quad ;$$

$$u = 0.024 \text{ cm.}$$

EJEMPLO II-8.

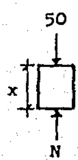
Para el pilote de madera que se muestra en la figura, con -- una área $A = 0.1\ m^2$ y un módulo de elasticidad $E = 1.2 \times 10^6$ -- Ton/m^2. Determinar el acortamiento total, $u_{tot} = ?$,



Obtenemos la variación de la fuerza normal, para el tramo superior (AB). Para esto aislamos una parte del pilote y mediante la condición de equilibrio de fuerzas verticales, se tiene,

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad N - 50 = 0$$

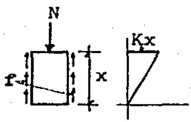
$$N = 50$$



Para trazar el diagrama de --- fuerza normal (D.F.N), determinamos sus valores extremos,

$$N_{10} = 50 \quad ; \quad N_{20} = 50$$

Obtenemos la variación de la fuerza normal, para el tramo inferior (BC). Para lo cual aislamos un elemento del pilote.



Del equilibrio de las fuerzas verticales,

$$\Sigma F_x = 0 \; ; \qquad -N + \frac{Kx\,(x)}{2} = 0$$

$$N = \frac{K\,x^2}{2}$$

$$\therefore \qquad N_0 = 0 \qquad ;$$

$$N_{10} = 50$$

Determinamos el valor de la constante, K, del equilibrio de fuerzas verticales en todo el tramo,

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad \int f\,dx - 50 = 0$$

$$\int f\,dx = 50 \quad ; \quad \int (Kx)\,dx = 50$$

$$K\int_0^{10} x\,dx = 50 \quad ; \quad \left[\frac{K\,x^2}{2}\right]_0^{10} = 50$$

sustituyendo los límites de la integral,

$$\frac{K\,(10)^2}{2} = 50 \qquad \therefore \qquad K = 1.0 \text{ Ton/m}^2.$$

Cálculo de la deformación en el tramo superior (AB),

$$u_{AB} = \frac{P\,X}{E\,A} = \frac{(50)\,(10)}{1.2 \times 10^6\,(0.1)}$$

$$u_{AB} = 0.0042 \text{ m} \qquad ; \qquad u_{AB} = 4.2 \text{ mm}$$

Calculo de la deformación en el tramo inferior (BC),

$$u_{BC} = \frac{P\,dx}{E\,A} = \frac{(K\,x^2)\,dx}{2\,E\,A} \quad ;$$

$$u_{BC} = \frac{K}{2\,E\,A}\; x^2\,dx = \frac{K}{2\,E\,A}\,\frac{x^3}{3} \quad ;$$

sustituyendo el valor de la constante y de los datos proporcionados, obtenemos el valor de la deformación,

$$u_{BC} = \frac{(1.0)\,(10)^3}{6\,(1.2 \times 10^5)(0.1)} = 0.0014 \text{ m}$$

$$u_{BC} = 1.4 \text{ mm}$$

La deformación de toda la barra es la suma de la deformación en en el tramo AB mas la deformación en el tramo BC,

$$u_{total} = u_{AB} + u_{BC}$$

$$u_t = 4.2 + 1.4 = 5.6 \text{ mm}$$

II-4. DESCRIPCION DEL COMPORTAMIENTO DE COLUMNAS CORTAS DE CONCRETO REFORZADO SOMETIDAS A CARGA AXIAL (CON ESTRIBOS Y ZUNCHADAS). DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE COLUMNAS CORTAS DE CONCRETO REFORZADO.

Entre las secciones de columnas más frecuentemente usadas se cuentan secciones circulares o cuadradas con varillas verticales colocadas en círculo y amarradas entre sí por medio de espirales (zunchos) poco espaciadas, y secciones rectangulares con varillas verticales colocadas paralelamente a los lados, unidas entre sí por medio de estribos de forma rectangular.

Las columnas pueden estar cargadas únicamente por fuerzas aplicadas colinealmente a su eje, pero en la mayoría de los casos están presentes además momentos flectores. En el primer caso se llaman columnas cargadas axialmente.

Las ecuaciones que se desarrollan en esta sección son válidas si no hay peligro de falla debido al pandeo a causa de que la columna sea esbelta. Cuando la longitud de una columna es grande comparada con su menor dimensión lateral, es posible una falla debida al pandeo. Se consideran columnas cortas aquellas cuya relación de esbeltez cumple con; $2 \leqslant L/b \leqslant 12$.

Comportamiento, modos de falla y resistencia de elementos sujetos a compresión axial. En la Fig. II-3 se representan curvas carga-deformación unitaria, para tres tipos de elementos de con creto sujetos a compresión axial. Las curvas son típicas de las que se obtienen de ensayes de columnas relativamente cortas.

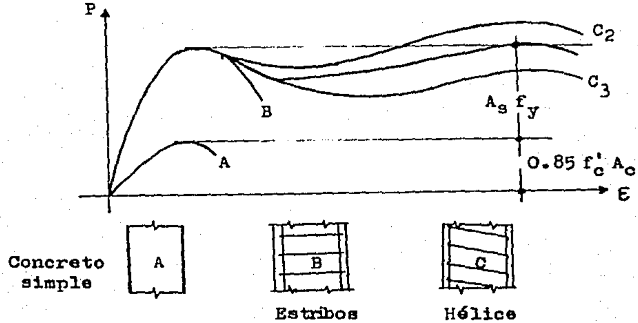


Fig. II-3. Curvas carga-deformación unitaria de columnas cortas bajo compresión axial.

La curva "A", corresponde a un espécimen de concreto simple, y representa la característica carga-deformación unitaria de una columna con relación de esbeltez $2 \leqslant L/b \leqslant 12$. Como en el caso de cilindros de control, la carga máxima se alcanza cuando se llega a una deformación unitaria del orden de 0.002 .

Partiendo de la definición de esfuerzo, tenemos que $P = V A$, de donde la resistencia de un elemento de concreto simple sujeto a compresión axial puede estimarse, mediante la siguiente expresión:

$$P_o = 0.85\, f'_c\, A_g \qquad \text{(II-6)}$$

donde, 0.85 – es un factor de reducción, obtenido del promedio de los resultados de ensayes en miembros colados verticalmente.

f'_c – esfuerzo de rotura medido en un cilindro de control, ensayado en las mismas condiciones de trabajo. En Kgf/cm^2.

A_g – área total de la sección transversal del concreto.

La curva "B", corresponde a un espécimen al cual se adiciona refuerzo longitudinal y se utiliza el refuerzo transversal necesario para mantener las varillas en su posición durante el colado, la carga máxima se obtiene bajo las mismas condiciones que en el prisma de concreto simple, es decir, a una deformación unitaria de 0.002 . La falla, como en el caso anterior se produce a una deformación unitaria de 0.003 ó 0.004.

La resistencia adicional sobre la de un prisma de concreto simple es debido a la contribución del refuerzo longitudinal en compresión. Se puede estimar esta contribución como el producto del área del acero (A_s) por el esfuerzo de fluencia (f_s). Por tanto, la resistencia o carga máxima que un prisma de concreto con refuerzo longitudinal y estribos transversales es capaz de alcanzar, esta dada por:

$$P_o = 0.85\, f'_c\, A_g + A_s\, f_y \qquad \text{(II-7)}$$

donde, A_g – es el área total del concreto^{+} sin descontar el – área ocupada por las varillas.

Las curvas "C", corresponden a un elemento que ademas de refuerzo longitudinal, tiene refuerzo helicoidal continuo a todo-lo largo. Inicialmente su comportamiento es similar al de un -- prisma con estribos, hasta llegar al primer máximo (P_{o1}), a -- una deformación unitaria del orden de 0.002. Aproximadamente a-esta deformación el recubrimiento de la hélice o zuncho empieza a desprenderse y, por tanto, la capacidad de carga del elemento disminuye. Al deformarse lateralmente el concreto en forma apreciable por el efecto de Poisson, la hélice se alarga, produciendo como reacción una presión confinante en el núcleo de concreto limitado por el zuncho. De acuerdo con las características - de la hélice, la recuperación en capacidad de carga del espécimen será mayor o mencr. Si el confinamiento proporcionado por - el zuncho es suficiente, puede alcanzarse una segunda carga máxima (P_{o2}) superior a la alcanzada inicialmente pero a deformaciones considerablemente mayores, como muestra la curva C_2. -- Por el contrario, si el confinamiento no es suficiente, nunca - se alcanzará una carga como la del primer máximo (C_3).

Es posible evaluar la contribución de la hélice o espiral en función de las propiedades mecánicas del acero y del porcentaje volumétrico del refuerzo helicoidal. Este último se define como;

$^{+}$ Para porcentajes de área de acero mayores del 5% del total - de la sección, A_g se cambia por A_n ; $A_n = A_g - A_s$.

$$\rho_s = \frac{\text{volumen del acero en un paso de hélice}}{\text{volumen del núcleo de concreto en un paso de la hélice}}$$

Con referencia a la figura II-4, denominamos "d" al diámetro del núcleo, centro a centro de la hélice, A_e al área del alambre helicoidal, y "s" al paso,

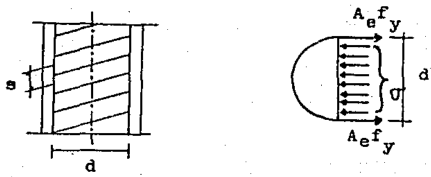


Fig. II-4. Diagrama de cuerpo libre de una sección con hélice.

Por tanto, el porcentaje volumétrico de refuerzo helicoidal en función de estas cantidades, es el siguiente:

$$\rho_s = \frac{\Pi \, d \, A_e}{\frac{\Pi \, d^2}{4} s} = \frac{4 \, A_e}{s \, d} \qquad (\text{II-8})$$

En la práctica, conviene que el segundo máximo, de la curva carga-deformación unitaria para una columna de concreto con refuerzo helicoidal, sea por lo menos ligeramente mayor que el -- primer máximo, ya que de esta manera se desarrolla la curva completa y el elemento tiene mayor ductilidad, lo cual es muy conveniente desde el punto de vista estructural. Para que esto suceda, la contribución de la hélice, $2\rho_s f_y A_c$, debe ser ligeramente mayor que la contribución del recubrimiento de concreto - que se desprende al alcanzarse el primer máximo.

$$P_{o1} = 0.85 f'_c A_g + A_s f_y \quad \text{(Primer máximo)} \qquad \text{(II-9)}$$

$$P_{o2} = 0.85 f'_c A_g + A_s f_y + 2\rho_s f_y A_c \quad \text{(Segundo máximo)} \qquad \text{(II-10)}$$

donde, A_c - es el área del núcleo,

Refuerzo transversal en columnas. El refuerzo transversal en columnas puede consistir en estribos o en hélices (zunchos). En el caso de estribos, estos deben de colocarse de tal manera que restrinjan el pandeo lateral de las varillas longitudinales. -- Por ejemplo, el Reglamento ACI (Instituto Americano del Concreto) recomienda que todas las varillas de esquina y cada varilla alternada estén restringidas por el doblez de un estribo, el -- cual debe tener un ángulo interno no mayor de 135°. Cuando las varillas están colocadas en la periferia de un círculo, se puede usar un estribo circular. En la Fig. II-5 se muestran distintos arreglos de estribos. Como en el caso de las vigas de concreto reforzado, los estribos deben estar anclados adecuadamente en sus extremos.

La separación máxima de los estribos debe conservarse en la intersección de la columna con los elementos del sistema de pi-

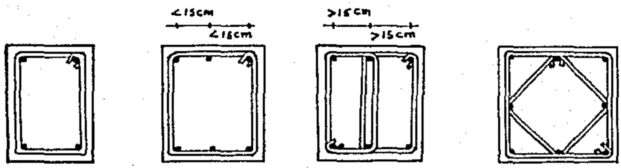


Fig. II-5. Detalles típicos de estribos en columnas.

so. Esta separación de estribos está regida por recomendaciones del reglamento:

$$s \leq \begin{cases} \dfrac{850}{f_y}\,\phi_{A_s} \quad \text{ó} \quad 16\,\phi_{A_s} \\ 48\,\phi_e \\ \text{La menor dimensión de la columna.} \end{cases}$$

donde ϕ_{A_s} es el diámetro del área de la varilla (o paquete de varillas) longitudinal, y ϕ_e es el diámetro del estribo.

Ademas, debe checarse la siguiente desigualdad;

$$f_s\,A_e \geqslant 0.02\,f_y\,A_{s\,(paquete)}$$

donde, f_s - esfuerzo de fluencia del refuerzo transversal.

Los reglamentos recomiendan diámetros mínimos de estribos, - de acuerdo con el tamaño de las varillas longitudinales o paquetes de varillas que restringen, a continuación se da una tabla con estos datos,

Varilla longitudinal	# 3 a # 4	# 8 a # 10	# 12
Proponer estribos del	# 2	# 3	# 4

En el caso de hélices (zunchos), éstas deben anclarse en sus extremos mediante una vuelta y media. La separación máxima o paso de la hélice se cálcula mediante la siguiente expresión,

$$1.5 \text{ T M A}^{*}(\text{cm}) < s < 7.0 \text{ cm.}$$

y debe cumplirse con la siguiente desigualdad,

$$f_s < 4\,200 \text{ Kg/cm}^2.$$

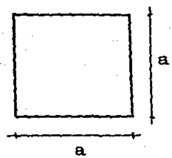
Ademas, deben respetarse ciertas limitaciones establecidas en - los reglamentos, que tienen por objeto asegurar una acción confinante efectiva y, al mismo tiempo, permitir la correcta colocación del concreto.

---

* Es el tamaño máximo del agregado (T M A), en centímetros.

EJEMPLO II- 9.

Proponer las dimensiones y el refuerzo (longitudinal y transversal) para una columna de sección cuadrada, como la que se muestra en la figura, y que soporta una carga axial de 500 Ton.



Datos: $f_y = 4\,200$ Kgf/cm^2

$f'_c = 200$ Kgf/cm^2

$f_s = 2\,100$ Kgf/cm^2

$A_s / A_g = 2.5\,\%$

Fórmula: $P_o = 0.85\,A_g\,f'_c + A_s\,f_y$

cálculo de las áreas;

$$A_g = a^2 \quad ; \quad A_s = 0.025\,a^2$$

Sustituimos en la fórmula de la resistencia,

$$500\,000 = \left[0.85\,(200) + 0.025\,(4\,200)\right] a^2$$

$$\therefore \quad a \doteq 43 \text{ cm}$$

obtenemos el valor númerico de las áreas,

$$A_g = 1\,859 \text{ cm}^2 \quad ; \quad A_s = 0.025\,(1\,849) = 46 \text{ cm}^2$$

Conociendo el área de acero requerida, proponemos el refuerzo longitudinal,

$$6 \# 10 \quad ; \quad A_s = 47.52 \text{ cm}^2$$

El refuerzo transversal se propone según el diámetro del refuerzo longitudinal, en este caso proponemos estribos del # 3 ,

$$s \leqslant \begin{cases} \dfrac{850}{4\,200}(3.18 \text{ cm}) = 41.64 \text{ cm} \\ 48\,(0.95) = 45.6 \text{ cm} \\ \text{D. mín.} = 43 \text{ cm.} \end{cases}$$

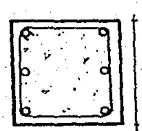
Por tanto, consideramos una separación $s = 40$ cm.

Por último checamos la desigualdad, $f_s A_e \geqslant 0.02 f_y A_s$;

$$(2\,100)(0.71) \geqslant 0.02\,(4\,200)\,7.92$$

$$1\,491 > 665.28$$

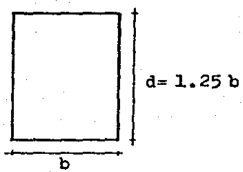
Sección de la columna indicando el refuerzo,



42 cm (por lado)

EJEMPLO II- 10.

Proponer dimensiones y refuerzo para la columna de sección - rectangular que se muestra en la figura.



Datos; $P = 700$ Ton.

$f_y = 4\,200$ Kgf/cm^2

$f'_c = 250$ Kgf/cm^2

$f_s = 2\,100$ Kgf/ cm^2

$TMA = 2.0$ cm

$A_s/A_g = 2.5\,\%$

Fórmula: $P_o = 0.85\, f'_c\, A_g + A_s\, f_y$

Cálculo del área total;

$$A_g = (1.25\ b)\, b \quad ; \quad A_g = 1.25\ b^2$$

Sustituimos en la fórmula de la resistencia,

$$700\,000 = 0.85\,(250)\,(1.25\,b^2) + 0.025\,(1.25\,b^2)\,(4\,200)$$

de donde se obtiene una ecuación de segundo grado, cuya solu--- ción es:

$$b \doteq 42 \text{ cm} \; ; \quad \text{y por tanto,} \quad d = 1.25\,(42) = 53 \text{ cm.}$$

Calculamos el área de refuerzo longitudinal,

$$A_s = 0.025\,(42 \times 53) \qquad ; \qquad A_s = 55.65 \text{ cm}^2$$

Conociendo el área de acero requerida, proponemos el refuerzo longitudinal,

$$8\,\#10 \qquad ; \qquad A_s = 63.36 \text{ cm}^2$$

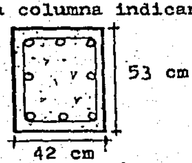
El refuerzo transversal se propone de acuerdo al diametro del refuerzo longitudinal. Por tanto, proponemos estribos del # 3.

$$s \leqslant \begin{cases} \dfrac{850}{4\,200}\,(3.18 \text{ cm}) = 41.2 \text{ cm} \\[2ex] 48\,(0.95) = 45.6 \text{ cm} \\[2ex] \text{D. mín.} = 42 \text{ cm} \end{cases} \qquad \therefore \quad \underline{\underline{s = 40 \text{ cm.}}}$$

Por último checamos la desigualdad, $f_s A_e \quad 0.02\, f_y A_s$;

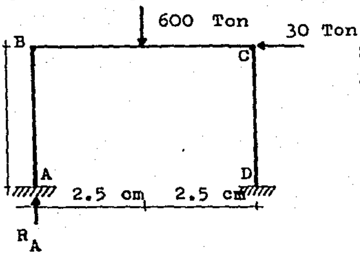
$$(2\,100)(0.71) \quad 0.02\,(4\,200)\,7.92 \qquad ; \qquad 1\,491 \quad 665.28$$

Sección de la columna indicando el refuerzo,

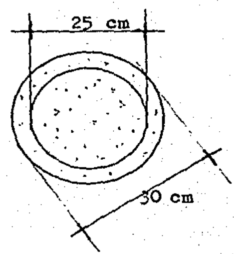


EJEMPLO II-11.

Para la columna circular AB de la figura, proponer el refuerzo (longitudinal y transversal), y determinar el segundo máximo.



Sección transversal de la columna.



Datos: $f'_c = 200$ Kgf/cm^2

$f_y = 4\,200$ Kgf/cm^2

$f_s = 2\,100$ Kgf/cm^2

T M A = 2.0 cm

Cálculo de la reacción en el apoyo A.

$\Sigma M_D = 0 \quad ; \quad R_A(5) - 600\,(2.5) - 30\,(4) = 0$

$$R_A = \frac{1\,500 + 120}{5} = \frac{1\,380}{5}$$

$$R_A = 324 \text{ Ton.}$$

Fórmula para el primer máximo,

$$P_o = 0.85\, f'_c\, A_g + A_s\, f_y$$

Cálculo del área total de la columna,

$$A_g = \frac{3.1416}{4}(30)^2 = 706.86 \text{ cm}^2$$

Cálculo del área del núcleo,

$$A_c = \frac{3.1416}{4}(25)^2 = 490.88 \text{ cm}^2$$

Sustituimos en la fórmula del primer máximo,

$$324\,000 = 0.85(200)(706.86) + A_s(4\,200)$$

$$A_s = 48.53 \text{ cm}^2$$

Por tanto, determinamos el porcentaje de área de acero,

$$\frac{A_s}{A_g} = \frac{48.53}{706.86} = 6.8\,\%$$

Conociendo el área de acero requerida, proponemos el refuerzo longitudinal,

$$10\ \#8 \quad ; \quad A_s = 50.7 \text{ cm}^2$$

Observamos que el porcentaje de área de acero es mayor al 5 %, por tanto, utilizamos el área neta en lugar del área total;

$$A_n = 706.86 - 50.7 \quad ; \quad A_n = 656.16 \text{ cm}^2$$

Entonces, sustituyendo en la fórmula para el primer máximo,

$$P_{o1} = 0.85\, f'_c\, A_n + A_s\, f_y$$

$$P_{o1} = 0.85\,(200)(656.16) + (50.7)(4\,200) = 324\,478 \text{ Kg} > 324 \text{ Ton.}$$

Para calcular la contribución de la hélice, hacemos $P_{o1} \doteq P_{o2}$.

$$P_{o2} = 0.85\, f'_c\, A_c + 2\rho_s\, A_c\, f_s$$

sustituyendo tenemos,

$$324\,847 \doteq 0.85\,(200)(490.87) + (50.7)(4\,200) + 2\rho_s\,(2\,100)(490.87)$$

despejando, $\rho_s = 0.0136$ $\quad \therefore \quad$ $\dfrac{4\,A_e}{s\,d} = 0.0136$

si proponemos un zuncho con var. $\# 3$, entonces podemos calcular el paso de la hélice,

$$s = \frac{4\,(0.71)}{(0.0136)(25)} \quad ; \quad s = 8.3 \text{ cm}$$

Checamol los límites del paso de la hélice, $1.5 \text{ TMA} < s < 7 \text{ cm}$

sustituyendo; $1.5\,(2.0)$ $\;s\;$ 7 cm ; Por tanto, $s = 7.0$ cm

Calculamos el porcentaje volumetrico del refuerzo helicoidal,

$$\rho_s = \frac{4(0.71)}{7.0\,(25)} = 0.0162$$

Determinamos el segundo máximo real,

$$P_{o2} = 0.85\,(200)(490.87) + (50.7)(4\,200) + 2(0.0162)(2100)(490.87)$$

$$P_{o2} = 329\,786.7 \text{ Kg} > P_{o1}$$

II-5. COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES. SISTEMAS HIPERESTATICOS.

Hiperestaticidad. Si para una estructura dada, el número de incógnitas (variables no determinadas) es mayor al número de ecuaciones de equilibrio independientes, el problema es "Estáticamente indeterminado o hiperestático" y el grado de redundancia o indeterminación es precisamente el número de incógnitas en exceso de las que se pueden calcular por estática.

En todos los problemas hiperestáticos son válidas las ecuaciones de equilibrio estático. Estas ecuaciones son necesarias pero no suficientes para resolver este tipo de problemas. Las ecuaciones complementarias se establecen partiendo de consideraciones de la geometría de la deformación (compatibilidad de deformaciones). En sistemas estructurales, sometidos a carga axial, por necesidades físicas, ciertos elementos o partes deben alargarse juntos, o bien, permanecer fijos. Formulando tales observaciones cuantitativamente se obtienen las ecuaciones adicionales requeridas. Tales ecuaciones cinemáticas son independientes de las propiedades mecánicas de los materiales y, por tanto, no están limitadas a la respuesta elástica lineal.

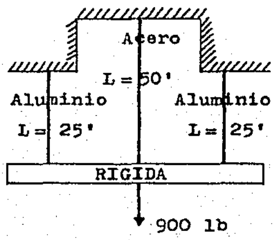
Los procedimeientos necesarios para determinar la deformación lineal de barras cargadas axialmente, fueron desarrollados en la sección II-1. Ahora se aplican los mismos procedimeientos excepto por la designación de las fuerzas que actúan en tales miembros como incógnitas haciendo uso de símbolos algebraicos apropiados..

En esta sección trataremos problemas con un grado de hiperestáticidad, ya que tan sólo contamos con otra ecuación más, la que se obtiene a partir de la compatibilidad de deformaciones.

EJEMPLO II-12.

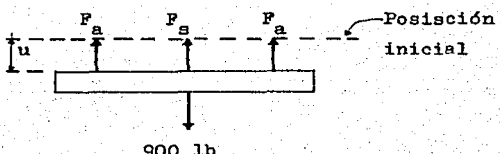
Si una carga de 900 lb se aplica a una barra rígida suspendida de tres alambres como se muestra en la figura. ¿Qué fuerza resistirá cada alambre? Los de los extremos son de aluminio ($E_a = 10^7$ psi) y el de en medio es de acero (30×10^6 psi). Inicialmente los alambres están bien extendisos.

$E_a = 10^7$ psi
$A_a = 0.3$ in^2



$E_s = 30 \times 10^6$ psi
$A_s = 0.2$ in^2

Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.)



Por la ecuación del equilibrio vertical,

$$\Sigma F_y = 0 \quad ; \qquad 2\,F_a + F_s = 900 \text{ lb} \qquad \text{------(1)}$$

Por compatibilidad de deformaciones,

$$u \neq 0 \quad ; \qquad u_a = u_s \quad ; \qquad \frac{F_a\,L_a}{E_a\,A_a} = \frac{F_s\,L_s}{E_s\,A_s}$$

$$\frac{F_a\,(L_a)}{10^7(3)} = \frac{F_s\,(2\,L_s)}{30 \times 10^6(0.2)} \qquad \therefore \quad F_a = F_s \qquad \text{------(2)}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones,

$$2\,F_a + F_s = 900 \qquad \text{---(1)}$$

$$F_a - F_s = 0 \qquad \text{---(2)}$$

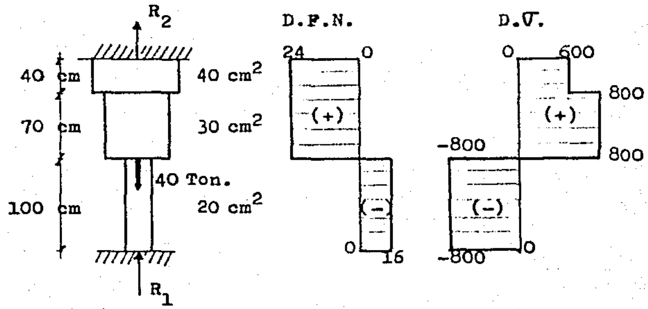
$$3\,F_a = 900 \quad ; \qquad F_a = 900/3 \quad \therefore \quad \underline{\underline{F_a = 300 \text{ lb.}}}$$

Sustituyendo en la ec. (2),

$$300 - F_s = 0 \quad ; \qquad \underline{\underline{F_s = 300 \text{ lb.}}}$$

EJEMPLO II-13.

Para la barra que se muestra en la figura, determine los esfuerzos en cada tramo, considere $E =$ ctte.



Por la condición del equilibrio vertical se tiene,

$$\Sigma F_y = 0 \quad ; \qquad R_A + R_C = 40 \qquad \text{-----(1)}$$

Por compatibilidad de deformaciones tenemos que,

$$\Sigma u = 0 \quad ; \qquad -u_A + u_B + u_C = 0$$

sustituyendo los valores,

$$-\frac{R_A(100)}{E(20)} + \frac{R_B(70)}{E(30)} + \frac{R_B(40)}{E(40)} = 0$$

$$-5R_A + \frac{7}{3}R_B + \frac{3}{3}R_B = 0 \quad ; \quad -15R_A + 10R_B = 0 \text{ ------(2)}$$

Planteamos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$10\,R_A + 10\,R_B = 400 \qquad \text{-----}(1')$$

$$15\,R_A - 10\,R_B = 0 \qquad \text{-----}(2')$$

$$25\,R_A = 400 \quad ; \qquad R_A = 16 \text{ Ton.}$$

Sustituyendo en la ec. (1),

$$16 + R_B = 40 \quad ; \qquad R_B = 24 \text{ Ton.}$$

Cálculo de los esfuerzos, en cada tramo;

Tramo (3) ; $\sigma_3 = \dfrac{24\,000}{40} = 600 \text{ Kgf/cm}^2$

Tramo (2) ; $\sigma_2 = \dfrac{24\,000}{30} = 800 \text{ Kgf/cm}^2$

Tramo (1) ; $\sigma_1 = \dfrac{16\,000}{20} = -\,800 \text{ Kgf/cm}^2$

Para el tramo (1) se anota el signo negativo, ya que se ob--serba que se trata de un esfuerzo de compresión, véase el dia--grma de esfuerzos.

CAP. III. FLEXION

III-1. FLEXION ELASTICA: BLOQUE DE ESFUERZOS. FORMULA DE LA ESCUADRIA Y MODULO DE SECCION ELASTICO. FLEXION BIAXIAL. - FLEXION ALREDEDOR DE EJES NO PRINCIPALES.

En este capítulo se estudia el momento flexionante interno - que puede presentarse en una sección transversal de una viga.

Flexión pura. Se dice que existe flexión pura, cuando un segmento de viga esta en equilibrio por la acción de un momento -- flexionante, es decir, una viga en la cual no se presentan es-- fuerzos cortantes, ni carga axial.

En este estudio se considera tanto el comportamiento linealmente elástico como el inelástico (plástico) de las vigas y la- relación entre el momento flexionante interno con los esfuerzos que causa en éstas.

Considérese una viga prismática horizontal que tenga una sección transversal con un eje vertical de simetría, Fig. III-1, - además la recta que pasa por el centroide de todas las secciones transversales es el eje de la viga. Cuando tal viga se some te a la acción de momento positivo, M, se flexiona como se muestra en la figura III-1.

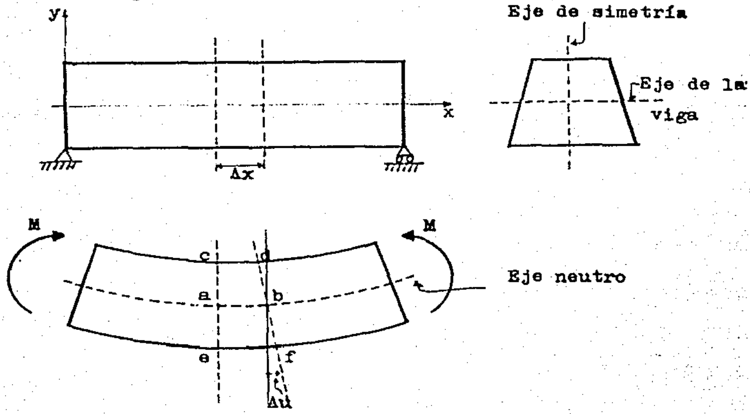


Fig. III-1. Viga horizontal antes y después de aplicarle el momento flexionante.

Hipótesis fundamental de la teoría de la flexión. Las secciones planas de una viga normales a su eje, permanecen planas después de que la viga se somete a flexión.

En la figura III-1 se observa que las fibras o "filamentos" de la viga a lo largo de una superficie tal como la a-b no cambian de longitud. Tales fibras estan en la SUPERFICIE NEUTRA (o eje neutro) de la viga. Uno u otro término implica una localiza ción de esfuerzo cero o deformación cero en un miembro sometido a flexión.

Si estudiamos una fibra típica e-f paralela a la superficie neutra y localizada a una distancia (-y) de ella, tenemos que durante la flexión la fibra se alarga la cantidad Δu. Si este alargamiento esta dividido entre la longitud inicial de la fibra (Δx), obtenemos la deformación unitaria;

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

Sin embargo, puesto que los alargamientos totales de fibras diferentes, inicialmente de la misma longitud, varían en forma líneal desde el eje neutro, Fig. III-1, la hipótesis fundamental se puede enunciar de la manera siguiente: En una viga sometida a flexión, las deformaciones unitarias de sus fibras son directamente proporcionales a sus distancias respectivas a la superficie neutra.

Sabemos que de acuerdo con la ley de Hooke, $\sigma_x = E\,\varepsilon_x$; por consiguiente, para una viga elástica los esfuerzos normales σ_x que resultan de la flexión también deberán variar linealmente en proporción directa a sus distancias respectivas al eje neutro, Fig. III-2. La expresión matemática es como sigue:

$$\sigma_x = K_o\, y \qquad (III-1)$$

donde K_0 es una constante. La variable y puede tomar valores - positivos y negativos.

La constante K_0 se puede relacionar con el momento flexio-- nante aplicado y con las propiedades de la sección transversal- de la viga.

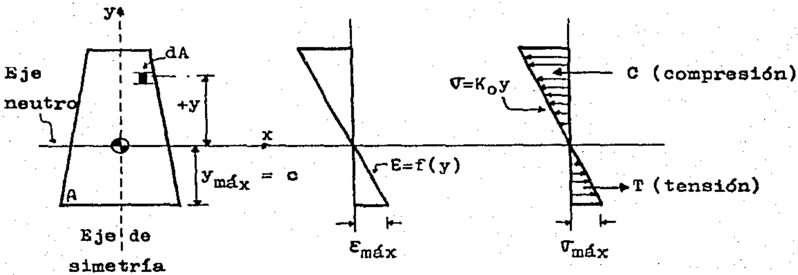


Fig. III-2. Segmento de viga elástica en flexión pura: Sec-- ción transversal, diagrama de deformaciones y -- distribución de esfuerzos.

Por la condición de equilibrio, que la suma de todos los mo- mentos respecto al eje z es igual a cero. Para el segmento de- viga de la figura III-2 obtenemos la ecuación siguiente;

$$\Sigma M_z = 0 \quad ; \quad M + \int_A (\sigma_x \, dA)\, y = 0$$

Sustituyendo la ecuación III-1 en la ecuación anterior,

$$M + \int_A (K_o\, y\, dA)\, y \quad ; \quad M = -K_o \int_A y^2\, dA$$

donde, $\int_A y^2\, dA = I$ – que es el momento de inercia del área de la sección transversal, con respecto al eje centroidal.

Con esta notación tenemos que,

$$M = -K_o I \quad ; \quad K_o = -\frac{M}{I}$$

Sustituyendo el valor de K_o en la ecuación III-1,

$$\sigma_x = -\frac{M y}{I} \qquad \text{(III-2)}$$

La ecuación III-2 se conoce como ecuación general de la flexión o FORMULA DE LA ESCUADRIA, y nos indica que para un momento flexionante positivo, M, y valores positivos de y los esfuerzos normales σ_x son de compresión; para valores negativos de y los esfuerzos son de tensión, Fig. III-2.

Bloque de esfuerzos. Es una vista isométrica que ilustra la distribución de esfuerzos en la sección transversal de una viga. Ademas, el volumen de dicho bloque de esfuerzos es numéricamente igual al valor de la fuerza resultante. En la figura III-3 se representan ambos bloques (de tensión y de compresión) saliendo de la viga, pero se indica el sentido de las fuerzas.

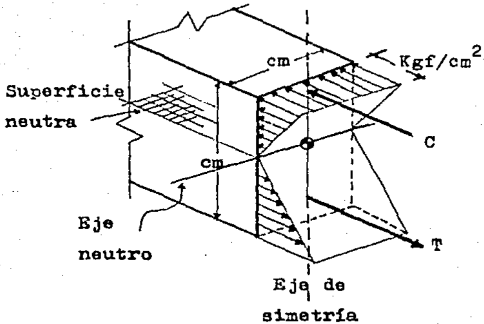


Fig. III-3. Bloque de esfuerzos: de tensión y de compresión.

Para localizar el eje neutro en una viga, basta con determinar el centroide de su sección transversal.

Por otro lado, en una sección transversal de una viga tanto M como I son constantes, entonces el esfuerzo normal σ_x alcanza su valor máximo cuando el valor absoluto de y es máximo. Se acostumbra designar el valor $y_{máx}$ por c, Fig. III-2. Portanto,

$$\sigma_{máx} = \frac{M\,c}{I} \qquad \text{(III-3)}$$

Módulo de sección elástico.(S). Para una sección transversal dada, los valores de I y c son constantes, por tanto podemos hacer S = I / c, que se conoce con el nombre de MODULO DE

SECCION ELASTICO. Empleando esta notación la ecuación III-3 se puede escribir de la siguiente manera:

$$\sigma_{máx} = \frac{M}{S} \qquad (III-4)$$

Las secciones más eficientes para resistir flexión tienen el mayor módulo de sección elástico S posible para una cantidad dada de material. Esto se obtiene haciendo que la mayor cantidad de material quede lo más lejos que sea factible del eje neutro.

Flexión asímetrica o biaxial. Las mismas formulas, para vigas elásticas con un eje de simetría, se pueden utilizar para cualquier viga (asímetrica) en flexión pura siempre que los momentos flexionantes se apliquen a un plano paralelo a uno u otro lado de los ejes principales+ del área transversal, figura III-4.

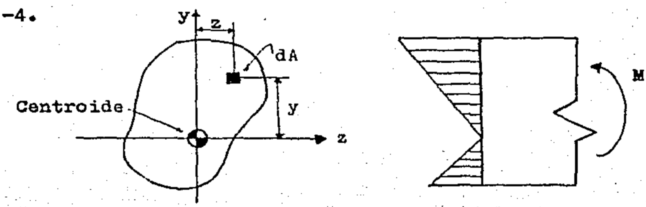


Fig. III-4. Viga de sección transversal asímetrica.

+ Ejes principales son aquellos con respecto a los cuales el momento de inercia es máximo o mínimo. Tales ejes son siempre mutuamente perpendiculares; un eje de simetría es siempre un eje principal.

Los esfuerzos varian linealmente desde el eje neutro que pasa por el centroide, tenemos que como antes, el esfuerzo en una área elemental dA, Fig. III-4, es;

$$\sigma_x = K_o\, y$$

Por tanto, la fuerza infinitesimal que actúa en un elemento:

$$F_x = (K_o\, y)\, dA$$

La suma de los momentos de estas fuerzas internas con respecto al eje z produce el momento flexionante interno. Además, debido a la falta de simetría, tales fuerzas internas pueden originar un momento con respecto al eje y, cuyos brazos de momento son iguales a z. Entonces un posible momento M_y con respecto al eje y es;

$$M_y = \int_A (K_o\, y\, dA) = K_o \int_A yz\; dA$$

La última integral da el PRODUCTO DE INERCIA del área transversal. Es igual a cero si los ejes que se seleccionan son los principales del área. Como tales ejes son los que se utilizan aquí, $M_y = 0$, y por tanto las formulas deducidas antes se aplican a una viga con cualquier forma de sección transversal.

Flexión alrededor de ejes no principales. Un caso más general del problema de la flexión es como el que se indica en la figura III-5, en la cual podemos observar como el plano del momento aplicado M, puede estar inclinado con relación a los de los ejes principales. Este plano de flexión se localiza por un ángulo α que es positivo cuando se mide del eje y hacia el eje z en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

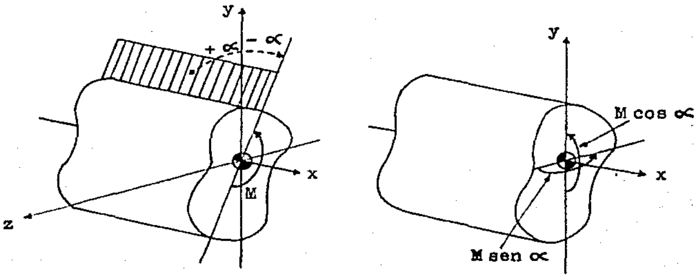
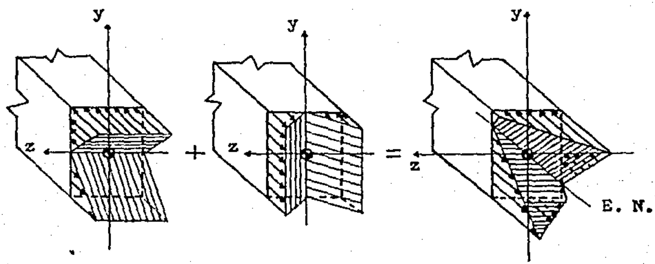


Fig. III-5. (a) Momento flexionante que no pasa por ningún eje principal; (b) componentes del momento flexionante en los planos de los ejes principales.

Para resolver este tipo de problemas, el momento aplicado M se descompone en sus dos componentes que actúan en los planos de los ejes principales. Para el ángulo α negativo que se indica en la figura III-5(a), son positivas las componentes del momento flexionante que actúa con respecto a los ejes z y y (ver la figura I-7). La componente que actúa con respecto al eje z es M cos α , y la que lo hace con respecto al eje y es M sen α.

La fórmula de la flexión elástica obtenida anteriormente se puede aplicar a cada una de las componentes de momento que actúan con respecto a un eje principal, y el esfuerzo combinado se obtiene por superposición. Un ejemplo de esto se tiene en la figura III-6, donde se indica para simplificar, una sección rectangular.



$$\sigma'_x = -\frac{M_z\, y}{I_z} \qquad \sigma''_x = +\frac{M_y\, z}{I_y} \qquad \sigma_x = \sigma'_x + \sigma''_x$$

Fig. III-6. Superposición de esfuerzos por flexión elásticos.

Resultados análogos se verifican en general y se tiene[+],

$$\sigma_x = -\frac{M_z\, y}{I_z} + \frac{M_y\, z}{I_y} \tag{III-5}$$

donde los subíndices y $_y$ z en M e I se refieren a los ejes principales respectivos de la sección transversal con respecto a --

---

[+] Es posible, de manera análitica, deducir la fórmula de la flexión para ejes y $_y$ z arbitrariamente dirigidos, en la cual se - considera el producto de inercia. Que para los ejes principales es igual a cero.

los cuales se produce la flexión.

Si en la mayor parte de los problemas se piensa en función de la acción física que ocurre en el miembro, se puede asignar directamente el signo de cada término de la ecuación III-5, aunque es deseable utilizar una convención de signos previamente establesida (como en la figura III-6).

En resumen, si el momento aplicado M actúa en un plano que forma un ángulo positivo α con el eje y, las componentes de momento flexionante son $M_y = -M \operatorname{sen} \alpha$ y $M_z = M \cos \alpha$, y la ecuación III-5 se puede expresar así:

$$\sigma_x = -M \left(\frac{y}{I_z} \cos \alpha + \frac{z}{I_y} \operatorname{sen} \alpha \right) \qquad \text{(III-6)}$$

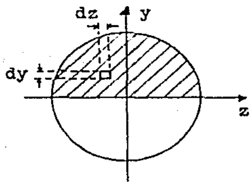
De esta relación se puede hallar una ecuación que sitúe al eje neutro haciendo $\sigma_x = 0$. Esto da,

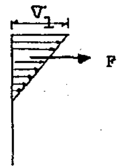
$$y = -z \left(I_z / I_y \right) \operatorname{Tan} \alpha \qquad \text{(III-7)}$$

En la flexión asimétrica el eje neutro no es perpendicular al plano del momento aplicado. Sin embargo, dicho eje es una recta y la sección plana gira alrededor de él. Como en el caso de la flexión asimétrica, el mayor esfuerzo se presenta en el punto más alejado del eje neutro.

EJEMPLO III - 1.

Determine por integración la fuerza desarrollada por los esfuerzos por flexión y su posición en el área rayada de la sección transversal de la viga que se muestra en la figura, si está sometida a un momento flexionante negativo de 37 500 Kgf-cm que actua alrededor del eje horizontal.





Determinamos el volumen del bloque de esfuerzos,

$$V = \int dV = \int \sigma_1 \, dA = \int \sigma_1 \, dy \, dz$$

Pero el esfuerzo es función de y,

$$\sigma_1 = -\frac{M}{I} y = -\frac{(-37\,500)y}{\frac{\pi(5)^4}{4}} = 76.4\,y$$

además,

$$y^2 + z^2 = (5)^2 = 25 \qquad \therefore \qquad y = \sqrt{25 - z^2}$$

Sustituyendo en la primera ecuación,

$$V = F = \int_{-5}^{5} dz \int_{0}^{\sqrt{25 - z^2}} (76.4\, y)\, dy$$

$$F = \frac{76.4}{2} \int_{-5}^{5} dz \left[y^2 \right]_{0}^{\sqrt{25 - z^2}}$$

$$F = 38.2 \int_{-5}^{5} (25 - z^2)\, dz = 955 \int_{-5}^{5} dz - 38.2 \int_{-5}^{5} z^2\, dz$$

$$F = 955 \left[z \right]_{-5}^{5} - 38.2 \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-5}^{5}$$

$$F = 955\, (5 + 5) - \frac{38.2}{3}\, (125 + 125)$$

$F = 6\,367$ Kgf. (que equivale al volumen del bloque de es fuerzos que se tiene en esta zona).

o bien, $F \doteq 6.37$ Ton.

III-2. DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE VIGAS DE MADERA Y DE ACERO SIN PANDEO.

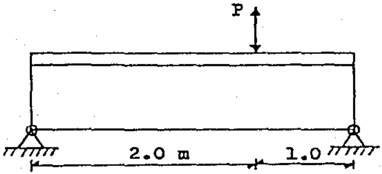
La ecuación III-4 es particularmente conveniente para el diseño de vigas. Una vez que se ha obtenido el momento flexionante máximo de una viga y decidido un esfuerzo permisible, puede despejarse de esta ecuación el módulo de sección requerido. Esta información es suficiente para seleccionar una viga.

Para facilitar el empleo de dicha ecuación se tienen tabulados en manuales los módulos de sección de muchas secciones de elementos fabricados. Véase la tabla correspondiente al final del texto.

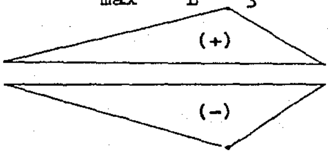
EJEMPLO III - 2.

La viga "T" que se muestra en la figura está hecha de un material cuyo comportamiento puede ser idealizado, asignándole un límite de proporcionalidad a la tensión de 200 Kgf/cm^2 y uno a la compresión de 400 Kgf/cm^2. Con un factor de 1.5 a la iniciación de la fluencia, halle la magnitud de la fuerza vertical máxima que se puede aplicar a esta viga tanto en sentido hacia arriba como hacia abajo. Base las respuestas sólo en la consideración de los esfuerzos máximos por flexión originados por F.

Datos: $\sigma_t = 200$ Kgf/cm^2 ; $\sigma_c = 400$ Kgf/cm^2



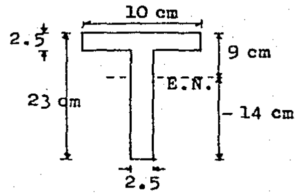
$$M_{máx} = \frac{Pab}{L} = \frac{2}{3}P = .67\,P$$



$$M_{máx} = 0.67\,P$$

Localización del eje neutro,

$$\bar{y} = \frac{\Sigma Q_x}{A_T} = \frac{\Sigma y_i A_i}{\Sigma A_i}$$



Cálculo del momento -- flexionante máximo,

$$M_{máx} = \frac{Pab}{3} = \frac{P\,(1 \times 2)}{3}$$

$$M_{máx} = 0.67\,P$$

$$\bar{y} = \frac{10 \times 2.5\,(20.5 + 1.25) + 2.5 \times 20.5\,(10.25)}{10 \times 2.5 + 2.5 \times 20.5} = 14.0 \text{ cm}$$

Por medio del teorema del eje paraleo, cálculamos el momento de inercia de toda la sección,

$$I = \frac{10\,(2.5)^3}{12} + 25\,(9 - 1.25)^2 + \frac{2.5\,(20.5)^3}{12} + 2.5 \times 20.5$$

$$(14 - 10.25)^2 = 4\,030 \text{ cm}^4$$

a).- Considerando la fuerza vertical hacia arriba,

a:1).- Para las fibras en compresión,

$$\sigma_c = - \frac{M(1.5)}{I} c \quad ; \quad -400 = -1.5 \frac{(-0.67\,P)}{4\,030}(-14)$$

$$400 = 0.00349\,P \quad ; \quad P = 114\,570 \text{ Kgf}$$

a:2).- Para las fibras en tensión,

$$\sigma_t = - \frac{M(1.5)}{I} c \quad ; \quad 200 = -1.5 \frac{(-0.67\,P)}{4\,030}(9)$$

$$200 = 0.002244\,P \quad ; \quad P = 89\,110 \text{ Kgf}$$

b).- Considerando a la fuerza vertical hacia arriba,

b:1).- Para las fibras en compresión,

$$\sigma_c = - \frac{M(1.5)}{I} c \quad ; \quad -400 = -1.5 \frac{(0.67\,P)}{4\,030}(9)$$

$$400 = 0.002244\,P \quad ; \quad P = 178\,220 \text{ Kgf}$$

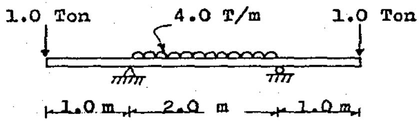
b:2).- Para las fibras en tensión,

$$\sigma_t = - \frac{M(1.5)}{I} c \quad ; \quad -200 = -1.5 \frac{(0.67\,P)}{4\,030}(-14)$$

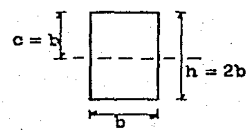
$$200 = 0.00349\,P \quad ; \quad \underline{\underline{P = 57\,285 \text{ Kgf} = P_{máx.}}}$$

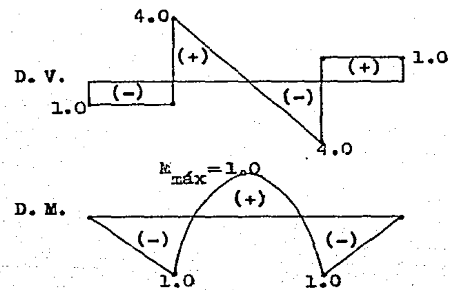
PROBLEMA III - 3.

Determinar las dimensiones mínimas de la sección transversal de la viga mostrada en la figura, de manera que no se excedan - los esfuerzos admisibles normales, σ_t = 100 Kgf/cm^2 y σ_c = 70 Kgf/cm^2; ni el esfuerzo cortante τ = 20 Kgf/cm^2.



Sección transversal.





Las reaciones son,

R_A = 5 Ton

R_B = 5 Ton

Cálculo del momento de inercia de la sección transversal, -- con respecto al eje neutro,

$$I = \frac{b\,h^3}{12} = \frac{b\,(2\,b)^3}{12} = \frac{8\,b^4}{12}$$

$$I = \frac{2}{3}\,b^4$$

De la sección transversal observamos que,

$c = b$;

El módulo de sección elástico para ésta sección es,

$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{2}{3}b^4}{b} = \frac{2}{3}b^3$$

a).- Sustituyendo el esfuerzo admisible de tensión, en la fórmula de la escuadría,

$$\sigma_t = \frac{M}{S} = \frac{M}{\frac{2}{3}b^3} \quad ; \quad 100 = \frac{1\,000}{\frac{2}{3}b^3}$$

de donde,

$$b^3 = \frac{3(1\,000)}{2(100)} = \frac{30}{2} = 15$$

$$b = \sqrt[3]{15} = 2.466 \text{ cm}$$

b).- Sustituyendo el esfuerzo admisible de compresión, en la — fórmula de la escuadria,

$$\sigma_c = \frac{M}{S} = \frac{M}{\frac{2}{3}b^3} \quad ; \quad 70 = \frac{1\,000}{\frac{2}{3}b^3}$$

de donde,

$$b^3 = \frac{3\,(1\,000)}{2\,(70)} = 21.43 \qquad ;$$

$$b = \sqrt[3]{21.43} = 2.78 \text{ cm}$$

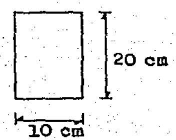
c).- Para el esfuerzo admisible en cortante, sustituyendo en la ecuación correspondiente,

$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{V}{2\,(\,b\,(\,2\,b\,))} \qquad ;$$

$$20 = \frac{4\,000}{2\,b^2} \qquad ; \qquad b^2 = \frac{4\,000}{2 \times 20}$$

$$b = \sqrt{100} \qquad ; \qquad b = 10 \text{ cm}$$

Por lo tanto, el área mínima de la sección transversal de la viga, estará limitada por el esfuerzo cortante;



$$b = 10 \text{ cm}$$

$$h = 2\,b = 2\,(\,10\,) = 20 \text{ cm}$$

III-3. FLEXION EN VIGAS DE SECCION NO HOMOGENEAS. SECCION TRANSFORMADA. FLEXION EN VIGAS DE MATERIALES ELASTICOS NO LINEALES.

Las vigas de madera se suelen reforzar por tiras o placas metalicas, las de concreto se refuerzan con varillas de acero; la teoría fundamental para el análisis de vigas hechas de varios materiales se estudia a continuación.

En las superficies de contacto de dos materiales se tiene una interrupción en la intensidad del esfuerzo. Aunque en dichas superficies es igual la deformación en ambos materiales, se produce un esfuerzo mayor en el material más rigido. Por tanto, si $E_1 > E_2$ entonces $\sigma_1 > \sigma_2$, como se muestra en la Fig. III-4.

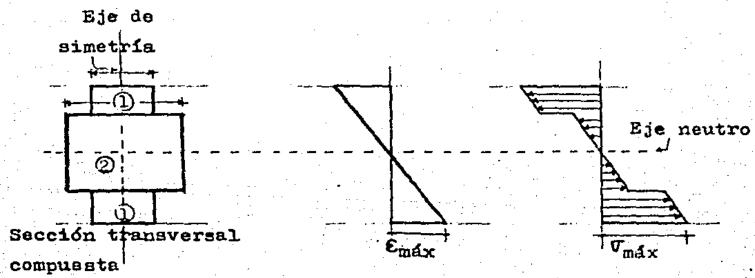


Fig. III-7. Viga construida con dos materiales.

Método de la sección transformada. Este método consiste en determinar la sección equivalente de un material, en la que las fuerzas resistentes sean las mismas que en la sección original.

La transformación se realiza cambiando las dimensiones, paralelas al eje neutro, en la relación de los módulos elásticos de los materiales. Por ejemplo, si la sección equivalente se desea de material (1), las dimensiones correspondientes a dicho material no cambian. La dimensión horizontal del material (2) se -- cambia en la relación η, donde $\eta = E_2/E_1$.

Para el caso contrario, es decir, si se desea la sección -- equivalente de material (2), el cual no cambia; la dimensión horizontal del material (1) se cambia en la razón $\eta^{-1} = E_1/E_2$, - observamos que la relación η es la reciproca de η^{-1}.

Los esfuerzos calculados de la manera usual son correctos para el material del cual está hecha la sección transformada. Para el otro material el esfuerzo calculado debe multiplicarse -- por la relación η ó η^{-1} del área transformada a la real.

Hipotesis de cálculo para las vigas de concreto reforzado. -

1°).- Se considera que el concreto no resiste esfuerzos de tensión (por tanto, no se dibuja en la sección transformada).

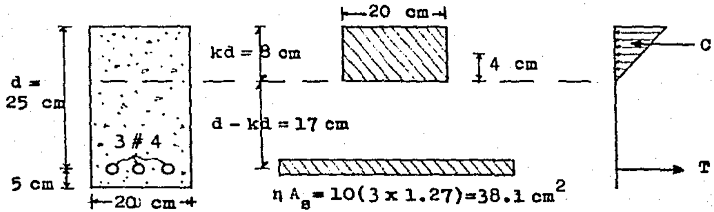
2°).- El concreto sólo mantiene en su lugar al refuerzo de acero en la zona de tensión+ de la viga.

3°).- El eje neutro coincide con el que pasa por el centroide - de la sección transformada.

4°).- El momento estático del área a un lado del eje centroidal es igual al momento estático del área en el otro lado.

PROBLEMA III - 4.

Calcular los esfuerzos máximos, en el concreto y en el acero de la viga cuya sección transversal se muestra, para cuando se-tiene aplicado un momento positivo de 10^5 Kgf-cm, y una rela--ción de módulos elasticos $\eta = \frac{E_a}{E_c} = 10$.



De la 4° hipótesis de cálculo, se sabe que,

$$Q_C = Q_T$$

sustituyendo,

$$20 \times kd\left(\frac{kd}{2}\right) = 38.1\ (25 - kd)$$

$$kd^2 + 3.81\,kd - 95.25 = 0$$

cuya solución es,

$$kd = 8.0 \text{ cm}$$

Por lo tanto,

$$d - kd = 25 - 8 = 17.0 \ \text{cm}$$

Calculamos el momento de inercia de la nueva sección, con -- respecto al eje neutro.

$$I = \frac{20\,(8)^3}{12} + (20 \times 8)(4)^2 + 0^{+} + 38.1\,(17)^2$$

$$I = 14\,424.23 \ \text{cm}^4$$

Determinamos el esfuerzo máximo de compresión en el concreto (de la parte superior),

$$(\sigma_c)_{máx} = -\frac{M}{I}\,c = -\frac{10^5}{14\,424.25}\,(8)$$

$$(\sigma_c)_{máx} = -55.46 \ \text{Kgf/cm}^2$$

Para el esfuerzo máximo de tensión (en el "acero") de la sección transformada,

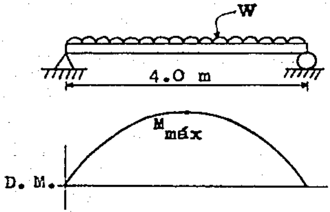
$$(\sigma_t)_{máx} = \sigma_s = -\eta\,\frac{M}{I}\,c = -(10)\,\frac{10^5}{14\,424.23}\,(-17)$$

$$\sigma_{máx} = 1\,178.57 \ \text{Kgf/cm}^2$$

$^{+}$ El momento de inercia del área transformada, respecto a su -- centroide se puede despreciar.

PROBLEMA III – 5.

Calcular la carga (por unidad de longitud) máxima que es capaz de soportar la viga que se muestra en la figura, sin que se excedan los esfuerzos admisibles $\sigma_c = 60$ Kgf/cm^2 y $\sigma_t = 1\,350$ Kgf/cm^2.

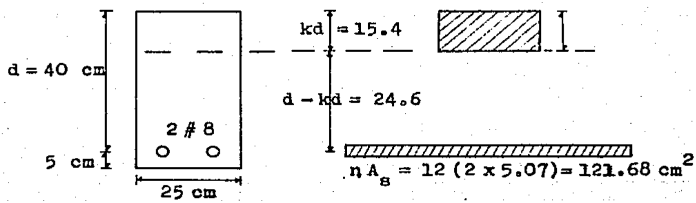


Cálculo del momento máximo:

$$M_{máx} = \frac{W\,L^2}{8} = \frac{W\,(400)^2}{8}$$

$$M_{máx} = 20\,000\ W$$

Sección transversal de la viga,



Para una sección equivalente de concreto, con una relación de módulos, $\eta = \frac{E_a}{E_c} = 12$

Por la 4° hipótesis de cálculo, sabemos, $Q_C = Q_T$

$$25 \times kd \left(\frac{kd}{2}\right) = 121.68\,(40 - kd)$$

Simplificando y agrupando términos obtenemos una ecuación -- cuadratica,

$$kd^2 + 9.734\,kd - 389.376 = 0$$

cuya solución es,

$$kd = 15.4 \text{ cm}$$

y por lo tanto,

$$d - kd = 40 - 15.4 = 24.6 \text{ cm}$$

Cálculo del momento de inercia de la nueva sección, respecto del eje neutro,

$$I = \frac{25\,(15.4)^3}{12} + (25 \times 15.4)(7.7)^2 + 0 + 121.68\,(24.6)^2$$

$$I = 104\,071.4 \text{ cm}^4$$

a).- Para las fibras en compresión (en el concreto de la parte-superior),

$$\sigma_c = - \frac{M}{I}\, c \qquad ;$$

sustituyendo,

$$-60 = - \frac{20\,000\ W}{104\,071.4}\,(15.4)$$

Despejando la carga por unidad de longitud, W .

$$W = \frac{(60)(104\,071.4)}{(15.4)(20\,000)} \quad ;$$

$$W = 20.27 \ \text{kgf/cm}$$

b).- Para las fibras en tensión (en el "acero") de la sección - transformada,

$$\sigma_t = -\eta \frac{M}{I} c \quad ;$$

sustituyendo,

$$1\,350 = -(12)\,\frac{20\,000\ W}{104\,071.4}\,(-24.6)$$

Despejando la carga por unidad de longitud, W .

$$W = \frac{(1\,350)(104\,071.4)}{(12)(24.6)(20\,000)} \quad ;$$

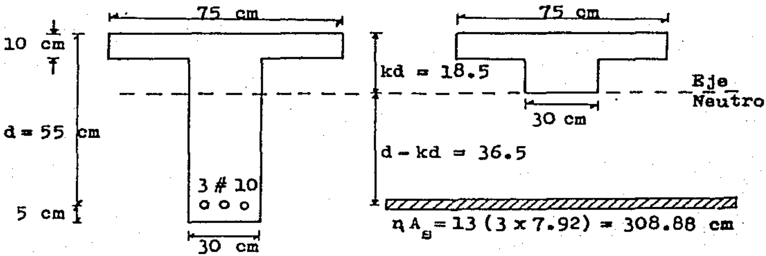
$$W = 23.79 \ \text{Kgf/cm}$$

Entonces, la carga máxima por unidad de longitud, que es capaz de soportar la viga es:

$$W_{máx} = 20.27 \ \text{Kgf/cm}$$

PROBLEMA III – 6.

Para la viga, cuya sección transversal se muestra en la figura, determinar: a). El momento positivo máximo, de manera que no se excedan los esfuerzos admisibles, $\sigma_c = 110$ Kgf/cm^2 y $\sigma_t = 1\,800$ kgf/cm^2 . b). El momento último o plástico, para un $f'_c = 250$ Kgf/cm^2 (en el concreto) y $f_y = 3\,000$ Kgf/cm^2 (en acero).



Para una sección equivalente de concreto, con una relación de módulos elásticos, $\eta = \dfrac{E_a}{E_c} = 13$

Para determinar la posición del eje neutro, partimos de la 4° hipótesis de cálculo, $Q_C = Q_T$

sustituyendo,

$$75 \times 10\,(kd - 5) + 30\,(kd - 10)\left(\frac{kd - 10}{2}\right) = 308.88\,(55 - kd)$$

Simplificando, obtenemos una ecuación cuadratica,

$$kd^2 + 50.6\,kd - 1\,282.6 = 0$$

cuya solución es,

$$kd = 18.5 \text{ cm}$$

y por tanto,

$$d - kd = 55 - 18.5 = 36.5 \text{ cm}$$

Cálculo del momento de inercia, de la sección transformada,- respecto al eje neutro,

$$I = \frac{75(10)^3}{12} + 75 \times 10(18.5 - 5.0)^2 + \frac{30\,(18.5 - 10)^3}{12} +$$

$$+ 30 \times 8.5\,\left(\frac{8.5}{2}\right)^2 + 0 + 308.88\,(36.5)^2 \qquad ;$$

$$I = 560\,584 \text{ cm}^4$$

a).- Cálculo del momento positivo máximo en el rango elastico,- mediante la fórmula de la escuadría,

$$\sigma = -\frac{M}{I}\,c \qquad ; \qquad M = -\frac{\sigma I}{c}$$

a:1).- Para las fibras en compresión, sustituimos los valores correspondientes,

$$M = -\frac{(-110)(560\,584)}{18.5} = 3\,333\,202.2 \text{ Kgf-cm}$$

a:2).- Para las fibras en tensión, mediante la sección transformada, tenemos:

$$\sigma = -\eta \frac{M}{I} c \qquad ; \qquad M = -\frac{\sigma I}{\eta c}$$

$$M = -\frac{(1\,800)(560\,584)}{(13)(-36.5)} = 2\,126\,556.8 \text{ Kgf-cm}$$

Entonces, el momento máximo positivo que soporta esta viga, es:

$$M_{máx} = 21.26 \text{ Ton-m}$$

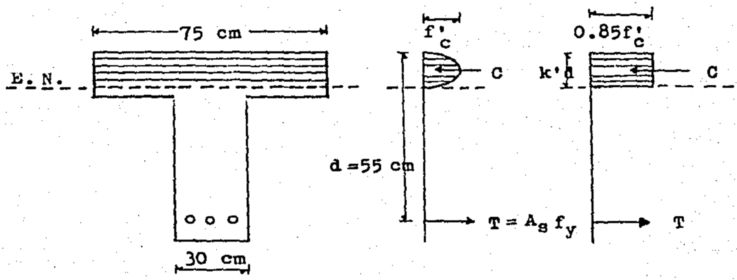
b).- Cálculo del momento último (plástico),

Experimentalmente se sabe que, con el momento último, los esfuerzos de compresión se pueden representar aproximadamente por un bloque rectangular de esfuerzos (ver la figura siguiente). Se acostumbra suponer que en este bloque de compresión el esfuerzo medio es de $0.85\, f'_c$, es decir,

$$C_{últ} = 0.85\, f'_c\,(k'd)\, b$$

Por otro lado, cuando el acero de refuerzo comienza a ceder- (en su punto de fluencia), se inician las grandes deformaciones. A la fuerza respectiva se le llama CAPACIDAD ULTIMA a la tensión del acero, por tanto;

$$T_{últ} = A_s f_y$$



Por la condición de equilibrio horizontal, $\Sigma F_x = 0$, se tiene que; $C_{últ} = T_{últ}$

Sustituyendo los valores correspondientes,

$$0.85(250)(k'd)(75) = (3 \times 7.92)(3000)$$

Despejando el valor de la incognita es,

$$k'd = \frac{71\,280}{0.85\,(250)(75)} = 4.47 \text{ cm}$$

Para determinar el momento último, recurrimos a la otra condición de equilibrio, $\Sigma M_{E.N.} = 0$,

$$T_{últ}\left(d - \frac{k'd}{2} \right) - M_{últ} = 0$$

Sustituyendo los valores correspondientes,

$$M_{últ} = 71\,280 \left(55 - \frac{4.47}{2} \right) \quad ;$$

$$M_{últ} = 3\,761\,089 \text{ Kgf - cm}$$

O bien,

$$M_{últ} = 37.6 \text{ Ton - m}$$

III-4. MOMENTO PLASTICO. MODULO DE SECCION INELASTICO Y FACTOR DE FORMA. DIMENSIONAMIENTO POR RESISTENCIA DE VIGAS DE ACERO SIN CONSIDERAR PANDEO.

En este artículo se exponen los conceptos que nos permiten comprender el comportamiento de una viga en flexión, más allá del límite elástico. La teoría GENERALIZADA DE LA FLEXION se basa en la hipótesis cinemática básica, en los requisitos de equilibrio y en las relaciones no lineales entre el esfuerzo y la deformación. Para la flexión inelástica (plástica) el eje neutro de la viga puede no coincidir con el eje centroidal de su sección transversal. Coincide sólo cuando dicha área tiene dos ejes de simetría y el diagrama esfuerzo-deformación, para el material correspondiente, es el mismo en tensión y en compresión.

Como ejemplo importante de flexión inelástica considérese una viga de sección rectangular (con dos ejes de simetría), construida de un material elastoplástico y cuyo diagrama esfuerzo-deformación se representa en la figura III-5.

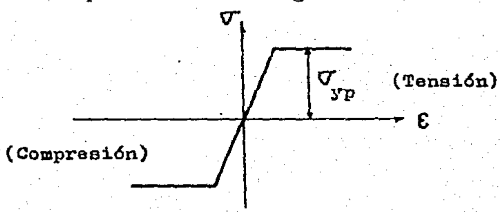


Fig. III-8. Diagrama esfuerzo deformación de un material elastoplástico.

En la figura III-6 se representa la viga mencionada, en la cual es posible una separación bien definida del elemento en zonas elásticas y plásticas.

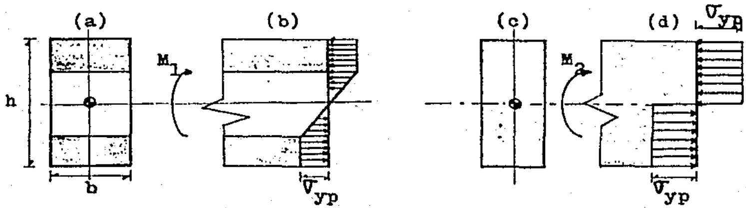


Fig. III-9. Viga elastoplástica en diferentes etapas de deformación.

Como podemos observar, existe fluencia en las partes superior e inferior de la altura h, para un determinado nivel de deformación, Fig. III-6(a). Para una cierta magnitud del momento aplicado, con deformaciones mayores se reduce la zona o núcleo elástico.

Momento plástico. Las deformaciones que pueden ocurrir durante la fluencia son mucho mayores que la deformación elástica máxima (15 a 20 veces mayores que esta última). Por tanto, puesto que cambios de forma inaceptablemente grandes de la viga se producen junto con deformaciones lineales muy grandes, el MOMENTO PLASTICO (M_p) puede tomarse igual al MOMENTO ULTIMO (M_u).

Entonces, la distribución de esfuerzos que se indica en la figura III-6(d), se aplica después de que ha ocurrido una gran-deformación general de la viga. Esta idealización de la distribución de esfuerzos es admisible y tiene un significado físico-simple: Toda la mitad superior de la viga está sometida a un esfuerzo de compresión uniforme (σ_{yc}), en tanto que la inferior-está toda bajo un esfuerzo de tensión uniforme (σ_{yt}).

En resumen tenemos que, al aumentar progresivamente el momento externo, las deformaciones son mayores, reduciendo así la zona o núcleo elástico y aumentando la plastificación.

En la zona elástica: El momento flexionante resistente de - una viga (de sección rectangular) cuando las fibras extremas -- llegan justamente al límite de fluencia (σ_{yp}), estará dado por- la fórmula de la flexión elástica,

$$\sigma_{yp} = \frac{M_y}{S} \qquad \therefore \qquad M_y = \sigma_{yp} S \qquad \text{(III-8)}$$

donde, M_y - Momento flexionante resistente
σ_{yp} - Esfuerzo de fluencia
S — Módulo de sección elástico

El esfuerzo en las fibras extremas, calculado con base en la fórmula de la escuadria para el momento flexionante último de-- terminado experimentalmente, se llama <u>módulo de rotura</u> del material en flexión. Es mayor que el esfuerzo real. Para materiales cuyo diagrama $\sigma - \varepsilon$ se aproxima a una línea recta hasta el punto de resistencia última, es pequeña la discrepancia entre el - esfuerzo máximo y el módulo de rotura.

En la zona plástica: El momento plástico o último de la viga estará dado por la fórmula siguiente,

$$\sigma_{yp} = \frac{M_p}{Z} = \frac{M_u}{Z} \quad \therefore \quad M_p = M_u = \sigma_{yp} Z \quad \text{(III-9)}$$

donde, $M_p = M_u$ - Momento plástico (último)

σ_{yp} - Esfuerzo de fluencia

Z — Módulo de sección inelástico

Una aplicación muy importante de esta expresión es cuando se trata de cargas estáticas, como las que se presentan en edificios, entonces las capacidades ultimas se pueden determinar utilizando METODOS PLASTICOS (de análisis o de diseño). Para este método se define el Módulo de sección inelástica[+], Z. Que tiene una interpretación semejante y las mismas unidades que el módulo de sección elástico.

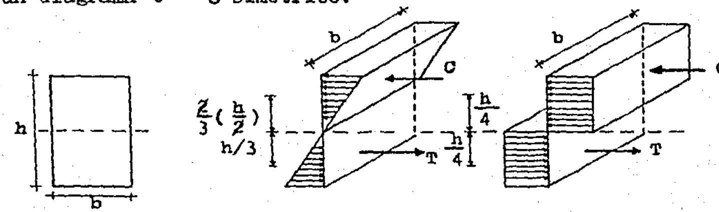
Factor de Forma (F.F.). El factor de forma se define como el cociente del momento plástico entre el momento flexionante resistente en una viga. Esta relación depende unicamente de las propiedades de la sección transversal de un elemento dado.

$$F.F. = \frac{M_p}{M_y} = \frac{\sigma_{yp}(Z)}{\sigma_{yp}(S)} \quad ; \quad F.F. = \frac{Z}{S} \qquad \text{(III-10)}$$

[+] Los valores del módulo de sección inelástico para muchos perfiles de acero estructural, se encuentran tabulados (Pág. 298).

PROBLEMA III - 7.

Para la sección rectangular obtenga el factor de forma F.F., considerando que el material de que esta construida la viga tiene un diagrama $\sigma - \varepsilon$ simétrico.



Debido a la simetría de la sección el eje neutro coincide con su centroide; $\bar{y} = h/2$. Además se cumple la condición de equilibrio horizontal ($\Sigma F_x = 0$) , de donde,

$$Fza = V_C = V_T$$

Entonces,

$$C = T = \left(\frac{\sigma_y (h/2)}{2} \right) b = \frac{b\,h}{4} \sigma_y$$

a).- Cálculo del momento flexionante en el rango elástico,

$$M_y = (C)(d) = (T)(d) = \left(\frac{b\,h}{4} \sigma_y \right)\left(\frac{2}{3} h \right)$$

$$M_y = \frac{b\,h^2}{6} \sigma_y$$

o bien, mediante la fórmula de la escuadría,

$$\sigma_y = \frac{M_y}{I} c \qquad ; \qquad M_y = \frac{\sigma_y I}{c}$$

sustituyendo,

$$M_y = \frac{\sigma_y \left(\frac{b h^3}{12} \right)}{\frac{h}{2}} \qquad ; \qquad M_y = \frac{b h^2}{6} \sigma_y$$

y como $M_y = S \sigma_y$, deducimos que el módulo de sección elastico para un rectangulo es:

$$S = \frac{b h^2}{6}$$

Debido a que no cambia la posición del eje neutro en la plastificación, se sigue cumpliendo la condición del equilibrio --- horizontal,

$$Fza = V_C = V_T$$

Entonces,

$$C = T = \left(\sigma_y \left(\frac{h}{2} \right) \right) b = \frac{b h}{2} \sigma_y$$

b).- Cálculo del momento último o plástico en el rango inelástico,

$$M_u = (C)(d) = (T)(d) = \left(\frac{b\,h}{2}\,\sigma_y \right)\left(\frac{h}{2} \right) = \frac{b\,h^2}{4}\,\sigma_y$$

Por análogía, determinamos el módulo de sección inelástico-- para el rectangulo,

$$Z = \frac{b\,h^2}{4}$$

Y el factor de forma es:

$$F.F. = \frac{M_p}{M_u} = \frac{\frac{b\,h^2}{4}\,\sigma_y}{\frac{b\,h^2}{6}\,\sigma_y} = \quad ;$$

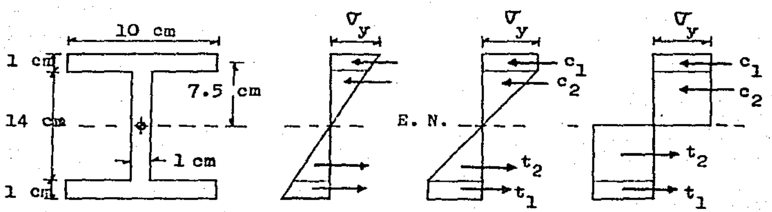
Por lo tanto,

$$F.F. = \frac{6}{4} \qquad ; \qquad F.F. = 1.5$$

Esto quiere decir, que para la viga de sección rectangular - el momento último (M_u) se puede exceder en un 50 % , antes de- que se alcance la capacidad última de tal viga.

PROBLEMA III - 8.

Para la viga, con la sección transversal que se muestra en la figura, determinar: a).- El máximo momento que soporta en el rango elástico (M_y), suponiendo un esfuerzo de fluencia del material, σ_y = 2 500 Kg/cm^2, b).- El momento plástico, c).- El factor de forma y d).- El momento M_1 cuando sólo se han plastificado los patines.



Debido a la simetría, el eje neutro coincide con el centroide de la sección; $\bar{y}$ = 8.0

Cálculo del momento de inercia respecto al eje neutro,

$$I = \left(\frac{1(14)^3}{12} \right) + 2\left(\frac{10(1)^3}{12} + (10 \times 1)(8 - 0.5)^2 \right)$$

$$I = 1\,355.3 \ \text{cm}^4$$

a).- El momento máximo en el rango elástico,

$$\sigma_y = \frac{M_y \, c}{I} \qquad ; \qquad M_y = \frac{\sigma_y \, I}{c}$$

$$M_y = \frac{(2\,500)(1\,355.3)}{8} = 423\,537.25 \text{ Kgf-cm}$$

b).- Para determinar el momento plástico, primero cálculamos las fuerzas normales,

$$c_1 = (\sigma_y \times 1)\,10 = 10\,\sigma_y = 25\,000 \text{ Kgf}$$

$$c_2 = (\sigma_y \times 7)\,1 = 7\,\sigma_y = 17\,500 \text{ Kgf}$$

$$t_2 = (\sigma_y \times 7)\,1 = 7\,\sigma_y = 17\,500 \text{ Kgf}$$

$$t_1 = (\sigma_y \times 1)\,10 = 10\,\sigma_y = 25\,000 \text{ Kgf}$$

Observamos que se cumple el equilibrio horizontal ($\Sigma F_x = 0$), Entonces podemos calcular el momento plástico,

$$25\,000\,(2 \times 7.5) + 17\,500\,(2 \times 3.5) = M_p$$

$$M_p = 497\,500 \text{ Kgf-cm}$$

c).- El factor de forma,

$$F.F. = \frac{M_p}{M_y} = \frac{497\,500}{423\,537.25} \quad ;$$

$$F.F. = 1.17$$

d).- El momento M_1 cuando sólo se han plastificado los patines,

$$c_1 = (\sigma_y \times 1) \times 10 = 10\,\sigma_y = 25\,000 \text{ kgf}$$

$$c_2 = \left(\frac{\sigma_y \times 7}{2}\right) \times 1 = 3.5\,\sigma_y = 8\,750 \text{ Kgf}$$

Por análogia,

$$t_2 = 8\,750 \text{ Kgf}$$

$$t_1 = 25\,000 \text{ Kgf}$$

Dado que se cumple el equilibrio horizontal ($\Sigma F_x = 0$), podemos calcular entonces, el momento M_1.

$$25\,000\,(2 \times 7.5) + 8\,750\,(2 \times 7/3) = M_1$$

$$M_1 = 375\,000 + 40\,833.3$$

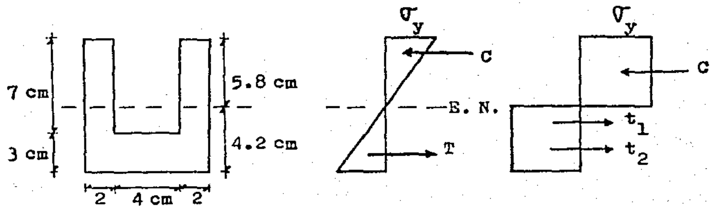
$$M_1 = 415\,833.3 \text{ Kgf-cm}$$

o bien,

$$M_1 = 4.15 \text{ Ton-m}$$

PROBLEMA III - 9.

Determinar el factor de forma para la viga cuya sección --- transversal se muestra en la figura, considere un diagrama $\sigma - \varepsilon$ simétrico.



Localización del eje neutro (desde la base),

$$\bar{y} = \frac{(8 \times 10)(5) - (4 \times 7)(3.5 + 3)}{(8 \times 10) + (7 \times 4)} = 4.2 \text{ cm}$$

Por medio del teorema del eje paralelo, cálculamos el momento de inercia total, con respecto al eje neutro.

$$I = \frac{8 \times 10^3}{12} + (8 \times 10)(0.8)^2 - \left[\frac{4 \times 7^3}{12} + (4 \times 7)(2.3)^2 \right]$$

$$I = 666.67 + 51.2 - (114.33 + 148.12)$$

$$I = 455.4 \text{ cm}^4$$

a).- Calculo del momento flexionante en el rango elástico,

$$M_y = \frac{\sigma_y I}{c} = \frac{455.4}{5.8} \sigma_y$$

$$M_y = 78.4 \ \sigma_y$$

b).- Determinamos las fuerzas normales, suponiendo la misma posición del eje neutro.

$$C = (\sigma_y (5.8))(2 + 2) = 23.2 \ \sigma_y$$

$$T = \begin{cases} t_1 = (\sigma_y (4.2 - 3))(2 + 2) = 4.8 \ \sigma_y \\ t_2 = (\sigma_y (3))(8) = 24.0 \ \sigma_y \end{cases}$$

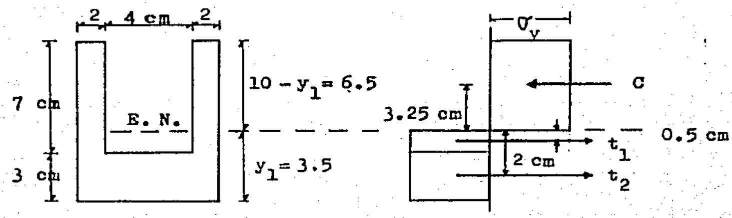
$$\therefore \quad T = 28.8 \ \sigma_y$$

Sin embargo, con esta posición del eje neutro no se cumple - el equilibrio horizontal ($\Sigma F_x = 0$), por tanto, no podemos calcular el momento último.

Para obtener la nueva posición del eje neutro, partimos del- supuesto de que el área en compresión es igual al área en ten-- sión,

$$A_C = A_T$$

En la siguiente figura se representa la nueva posición del - eje neutro y el bloque de esfuerzos correspondiente a la plastificación total,



Cálculo de las áreas,

$$A_C = 2(\,2(10 - y_1)) = 40 - 4y_1$$

$$A_T = (8 \times 3) + 2(\,2(y_1 - 3)) = 24 + 4y_1 - 12$$

Igualando,

$$40 - 4y_1 = 24 + 4y_1 - 12 \quad ;$$

$$8y_1 = 28 \qquad \therefore \qquad y_1 = 3.5$$

Por consiguiente,

$$10 - y_1 = 6.5$$

b').- Determinamos las fuerzas normales, partiendo de la nueva-posición del eje neutro,

$$C = 2\,(\,(\sigma_y \times 6.5) \times 2\,) = 26\,\sigma_y$$

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= 2\,(\,\sigma_y \times (3.5 - 3.0) \times 2\,) = 2\,\sigma_y \\ t_2 &= (\,\sigma_y \times 3\,) \times 8 = 24\,\sigma_y \end{aligned}\right\}\; T = 26\,\sigma_y$$

Observamos que se cumple el equilibrio horizontal, $(\Sigma F_x = 0)$

Para determinar el momento plástico, recurrimos a la segunda condición de equilibrio, $(\Sigma M_{E.N.} = 0)$.

$$C\,(3.25) + t_1(0.5) + t_2(2) - M_u = 0$$

Sustituyendo,

$$M_u = 26\,\sigma_y(3.25) + 2\,\sigma_y(0.25) + 24\,\sigma_y\,(2)$$

$$M_u = (84.5 + 0.5 + 48)\,\sigma_y \qquad ; \qquad M_u = 133\,\sigma_y$$

Por tanto, el factor de forma es:

$$F.F. = \frac{M_u}{M_y} = \frac{133\,\sigma_y}{78.4\,\sigma_y}$$

$$F.F. = 1.7$$

CAP. IV. DESPLAZAMIENTO EN VIGAS

IV-1. DIAGRAMAS CARGA-DESPLAZAMIENTO Y MOMENTO-CURVATURA EN VIGAS

Frecuentemente, el proyecto o diseño de una viga queda determinado más por su rigidez que por su resistencia. Por tanto, hay dos razones importantes por las cuales puede ser necesario el conocimiento de la deflexión de una viga. La primera es simplemente para poder predecir la "flecha" de una viga bajo carga. En edificios y partes de máquina, las especificaciones y otros requisitos limitan, a menudo, la deflexión que puede tolerarse.

Una segunda, y posiblemente aún más significativa razón para calcular las deformaciones es que para la solución de la vigas estáticamente indeterminadas se necesita la deflexión de la viga y sus características giratorias.

Se utilizan varios métodos para determinar la deformación de las vigas. Aunque basados en los mismos principios, difieren en su técnica y en sus objetivos inmediatos. En este capítulo se estudian tres de estos métodos, los cuales son:

a) El método de la doble integración.

b) El método del área de momentos (teoremas de Mohr).

c) El método de la viga conjugada (pesos elásticos).

Deflexión o flecha (v). Es el desplazamiento (desviación) de un punto situado sobre la curva elástica, que presenta una viga con respecto a su posición inicial sin carga, este desplazamiento se debe precisamente a la acción de momento flexionante o -- fuerzas aplicadas a su eje, como se indica en la fig. IV-1.

Curva elástica (o simplemente elástica). Es el nombre que recibe el eje flexionado de la viga, el cual se muestra sumamente exagerado en la fig. IV-1. Podemos obtener su ecuación en términos de las coordenadas x y v, tal como v = f(x).

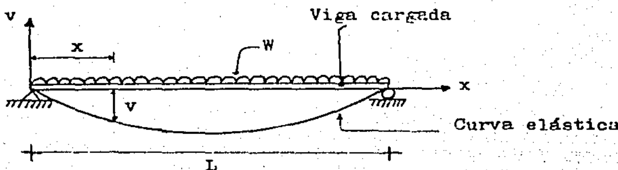


Fig. IV-1. Viga cargada y su curva elástica (represntación - exagerada).

Si aislamos un segmento de la viga cargada, como se muestra-en la figura IV-2, y consideramos que los elementos mecánicos - que se presentan tienen signo positivo, podemos deducir ecuaciones diferenciales importantes.

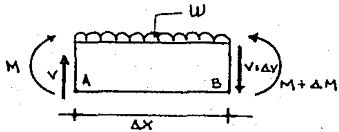


Fig. IV-2. Segmento de viga cargada y sus elementos mecánicos

Por la condición de equilibrio vertical, tenemos; $\Sigma F_y = 0$

$$V - W\,\Delta X - (V - \Delta V) = 0$$

$$\cancel{V} - W\,\Delta X - \cancel{V} + \Delta V) = 0$$

$$- W\,\Delta X + \Delta V = 0$$

$$W = \frac{\Delta V}{\Delta X}$$

Tomando el límite cuando $\Delta X \rightarrow 0$

$$W = \frac{dV}{dX} \qquad \text{(IV-1)}$$

Por la condición de equilibrio $\Sigma M_B = 0$, tenemos que,

$$M + V\,\Delta X - W\,\Delta X\,\frac{\Delta X}{2} - (M + \Delta M) = 0$$

$$\cancel{M} + V\,\Delta X - W\,\Delta X\,\frac{\Delta X}{2} - \cancel{M} + \Delta M = 0$$

$$V\,\Delta X - W\,\Delta X\,\frac{\Delta X}{2} = \Delta M$$

$$V - \frac{W\,\Delta X}{2} = \frac{\Delta M}{\Delta X}$$

Tomando el límite cuando $\Delta X \rightarrow 0$

$$V = \frac{d\,M}{d\,X} \qquad \text{(IV-2)}$$

Continuamos con las relaciones entre curvatura-deformación y entre curvatura — momento flexionante..

La hipótesis cinematica fundamental, de que las secciones planas de una viga, sometida a flexión pura, permanecen planas después de la deformación, proporciona la base de la teoría.

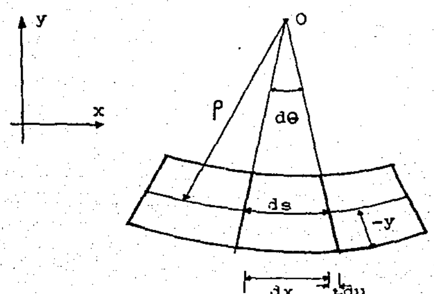


Fig. IV-3. Deformación de un segmento de viga en flexión.

De la figura IV-3 tenemos que,

d s - es la longitud inicial de todas la fibras y
d u - es un incremento para valores de (-y)

Esta deformación total se obtiene mediante,

$$d u = - y \, d\theta$$

multiplicando ambos miembros de la ecuación por (1/ds)

$$\frac{d u}{d s} = \frac{- y \, d\theta}{d s} \qquad \text{--------(1)}$$

de la misma figura IV-3, obtenemos fácilmente,

$$d s = \rho \, d\theta \qquad ; \qquad \rho = \frac{d s}{d\theta}$$

y de geometría analítica se sabe que el inverso del radio de curvatura ($1/\rho$) es precisamente la curvatura (K),

$$\frac{1}{\rho} = K = \frac{d\theta}{d s} \qquad \text{------- (2)}$$

Aplicando la definición de deformación unitaria, tenemos;

$$\varepsilon = \frac{d u}{d s} \qquad \text{-------(3)}$$

Sustituyendo las ecs. (2) y (3) en la ec. (1),

$$\varepsilon = -y\ (1/\rho)$$

Con base en lo anterior, se puede expresar la relación fun-- damental entre curvatura de la elástica y la deformación unitaria como sigue:

$$K = \frac{1}{\rho} = -\frac{\varepsilon}{y} \qquad \text{---------(4)}$$

Como en la deducción de esta expresión no se emplearon las - propiedades del material, se puede utilizar tanto en problemas- inelásticos como elásticos.

Recordemos que para el rango elástico, la deformación líneal es:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \qquad \text{---------(5)}$$

y los esfuerzos por flexión se obtienen, por:

$$\sigma = -\frac{M\,y}{I} \qquad \text{---------(6)}$$

Sustituyendo la expresión (6) en la (5), obtenemos

$$\varepsilon = -\frac{M\,y}{E\,I} \qquad \text{---------(7)}$$

Por último sustituimos la expresión (7) en la (4),

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E\ I} \qquad \text{--------(8)}$$

Esta expresión relaciona el momento flexionante (M). en una sección transversal de una viga elástica cuyo momento de inercia respecto al eje neutro es (I), con la curvatura ($1/\rho$) de la elástica.

IV-2. ECUACION DE LA ELASTICA. CONDICIONES DE FRONTERA. CONDICIONES DE CONTINUIDAD. OBTENCION DE ROTACIONES Y DESPLAZAMIENTOS POR INTEGRACION.

En geometría analítica la curvatura en cordenadas rectangulares se define por;

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 v}{d x^2}}{\left[1 + \left(\frac{d v}{d x}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{v''}{(1 + (v'')^2)^{3/2}}$$

Puesto que son muy pequeñas las deflexiones (flechas) que se toleran en la gran mayoría de las estructuras de ingeniería, también lo es la pendiente dv/dx de la curva elástica. Por tanto, el cuadrado de dicha pendiente $(v')^2$ es una cantidad despreciable comparada con la unidad, y la ecuación de la curvatura en el plano cartesiano (x, v) se aproxima a:

$$\frac{1}{\rho} \doteq \frac{d^2 v}{d\,x^2}$$

donde; x - es la distancia que localiza un punto de la curva-elástica

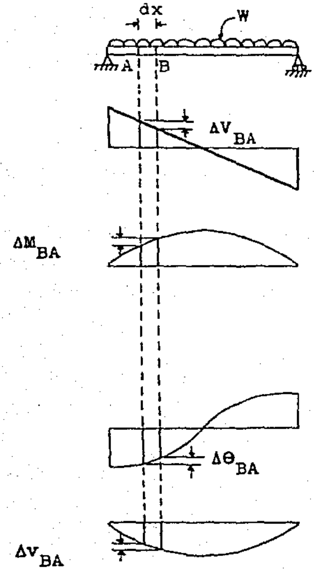
v - es la deflexión o flecha de tal punto.

Sustituyendo esta ecuación en la expresión (8), obtenemos - ecuación diferencial correspondiente a la deflexión de una viga elástica,

$$\frac{d^2 v}{d\,x^2} = \frac{M}{E\,I} \qquad \text{(IV-3)}$$

Para una condición de carga dada, una viga adoptara una posición deformada particular. Cada punto situado sobre la elástica tendrá una deflexión (v), y una pendiente (dv/dx). Según el - material presentado hasta aquí, la viga tendrá también valores de la carga, fuerza cortante y momento flexionante, en cada punto. Estas cinco cantidades están relacionadas y es útil darse - cuenta que lo están en una forma definida. Su relación deberá - comprenderse tanto en términos físicos como matemáticos.

La figura IV-4 muestra las relaciones gráficas entre estas - cantidades.



Carga $W = \frac{dV}{dX} = \frac{d^2}{dX^2}\left(EI \frac{d^2v}{dX^2}\right) = (EIv'')''$

Cortante $V = \frac{dM}{dX} = \frac{d}{dX}\left(EI \frac{d^2v}{dX^2}\right) = (EI\,v'')'$

Momento $M = EI \frac{d^2v}{dX^2} = EI\,v''$

Pendiente $\theta = \frac{dv}{dX} = v'$

Deflexión $v = f(x)$

Fig. IV-4. Ecuaciones diferenciales de las vigas elásticas.

Lo anterior significa que si se conoce la ecuación para la elástica, las ecuaciones para la pendiente, momento flexionante, fuerza cortante y carga aplicada se pueden determinar por derivadas sucesivas.

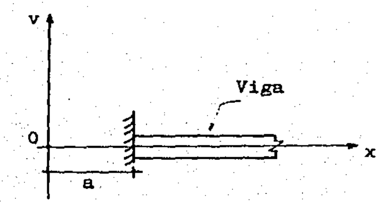
Condiciones de frontera y de continuidad. Para la solución de problemas de deflexiones en vigas, ademas de plantear las ecuaciones diferenciales, es necesario considerar las condiciones de frontera y de continuidad que nos permitan dar valores a las constantes de integración.

Las condiciones de frontera pueden ser no homogéneas o bien homogéneas.

Las condiciones de frontera no homogéneas son aquellas en las que se prescribe un valor para la fuerza cortante, momento flexionante, rotación y desplazamiento en la frontera de la pieza estructural. Dicho valor se sustituye en las ecuaciones apropiadas.

Las condiciones de frontera homogéneas más utilizadas en este artículo se dan a continuación y dependen del tipo de apoyo que se tenga.

a) EMPOTRAMIENTO (O APOYO FIJO). En el extremo que se considera, tenemos que $X = a$.

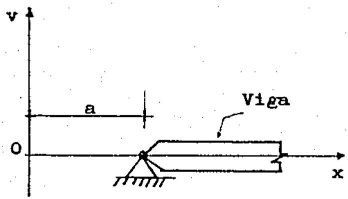


La deflexión o desplazamiento es cero. $v(a) = 0$

La pendiente de la elástica es cero.

$$\theta(a) = v'(a) = 0$$

b) ARTICULACION (O APOYO DE PASADOR). En el extremo que se considera tenemos que $X = a$.

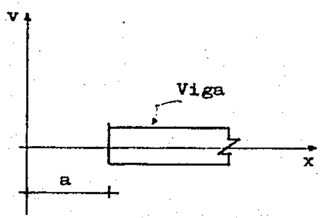


La deflexión o desplazamiento es cero. $v(a) = 0$

El momento flexionante no existe, por tanto.

$$M(a) = EI\,v''(a) = 0$$

c) EXTREMO LIBRE. Para cuando $X = a$.

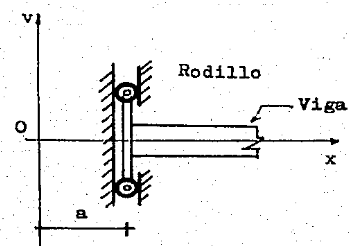


La fuerza cortante es cero.

$$V(a) = EI\,v'''(a) = 0$$

El momento flexionante no existe. $M(a) = EI\,v''(a) = 0$

d) APOYO GUIADO. Para cuando $X = a$.



La fuerza cortante es cero.

$$V(a) = EI\,v'''(a) = 0$$

SE impide la rotación del extremo, o sea que la pendiente es cero. $\theta(a) = v'(a) = 0$

Condiciones de continuidad. Estas condiciones se refieren a que en cualquier unión o junta de dos zonas o regiones de una viga deben ser iguales tanto la deflexión como las tangentes a la curva elástica, sin importar la dirección en que se considere el punto común. Los requisitos de equilibrio de fuerzas y momentos están contenidos implísitamente en las ecuaciones de continuidad. Véase la figura IV-5.

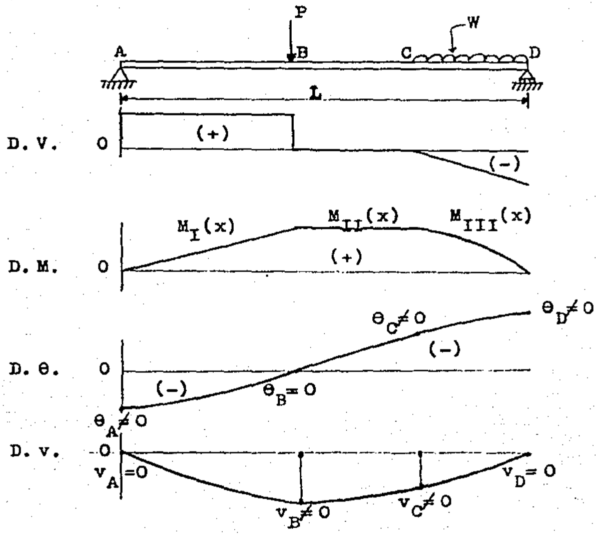


Fig. IV-5. Condiciones de continuidad de una viga cargada.

En la figura IV-5 observamos que existen tres intervalos --- bien definidos (debido a que cambian las condiciones de carga), y sus ecuaciones correspondientes;

$0 \leq X \leq X_1$	$X_1 \leq X \leq X_2$	$X_2 \leq X \leq X_3$
$M_I(x)$	$M_{II}(x)$	$M_{III}(x)$
$\theta_I(x)$	$\theta_{II}(x)$	$\theta_{III}(x)$
$v_I(x)$	$v_{II}(x)$	$v_{III}(x)$

Entonces, podemos plantear las ecuaciones de continuidad para el punto B, cuando $x = X_1$

$$M_I(X_1) = M_{II}(X_1) = M_B \qquad \text{Ecuaciones de momento}$$

$$\left.\begin{array}{l} \theta_I(X_1) = \theta_{II}(X_1) = M_B \\ v_I(X_1) = v_{II}(X_1) = v_B \end{array}\right\} \text{Condiciones de continuidad}$$

Esto quiere decir que el cálculo de los valores θ_B y v_B puede hacerse con cualquiera de las dos ecuaciones (la del lado -- izquierdo o la del lado derecho, del punto en estudio), siempre y cuando se sustituya el valor adecuado de la abscisa.

De igual manera procedemos para establecer las condiciones de continuidad en el punto C, cunado $x = X_2$.

$$\theta_{II}(X_2) = \theta_{III}(X_2) = \theta_C$$

$$v_{II}(X_2) = v_{III}(X_2) = v_C$$

Obtención de rotaciones y desplazamientos por integración. - En la mayoría de los casos se conocen la forma de apoyo de la viga y las condiciones de carga. El cortante y el momento pueden determinarse mediante los procedimientos discutidos anteriormente, y el problema consiste en encontrar la elástica de la viga.

La ecuación de la elástica se determina mediante la aplicación de la ec. IV-3, donde la ecuación para el momento flexionante de la viga se expresa en terminos de (x) y de las condiciones de carga. Esta expresión se sustituye para M en la ecuación IV-3;

$$\frac{d^2 v}{d X^2} = v'' = \frac{M(x)}{E I}$$

Integrando la ecuación IV-3, Suponiendo E I constante,

$$E I \frac{dv}{dX} = E I v' = E I \theta = \int_0^x M(x)\, dX + C_1 \qquad \text{(IV-4)}$$

que es la ecuación de la pendiente (θ), y que permite determinar el valor de la misma, o dv/dX en cualquier punto. Conviene observar que en esta ecuación C_1 es una constante de integración a determinar por las condiciones de frontera.

Integrando de nuevo la ecuación IV-3,

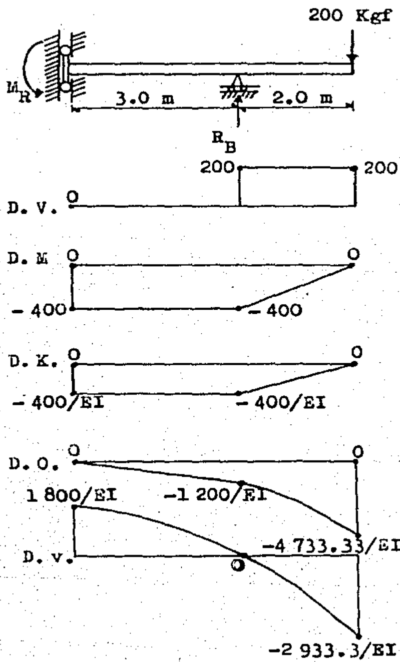
$$E\,I\,v = \int_0^x dX \int_0^x M(x)\, dX + C_1 X + C_2$$

que es la ecuación de la elástica de la viga y que permite calcular el valor de la ordenada v a cualquier valor de X. C_2 es otra constante de integración a determinar también por las condiciones de frontera de la viga.

Si las condiciones de carga varían a lo largo de la viga, la ecuación de momentos también tendrá la variación correspondiente. Esto requiere una ecuación de momentos entre cada dos puntos sucesivos de discontinuidad de carga (carga aislada, comienzo o terminación, o cambio de forma en las cargas repartidas), lo que dará lugar a dos integraciones para cada tramo y, por consiguiente, dos constantes de integración para cada tramo también. La determinación de estas constantes se hace por medio de las condiciones de continuidad.

PROBLEMA IV - 1.

Obtenga por medio de la ecuación diferencial de segundo or-- den los diagramas de pendiente, O(x) y de curva elástica, v(x); para la viga que se muestra en la figura. Consideré que la rígi dez a la flexión es EI = Ctte.



Cálculo de reacciones.-

$\Sigma F_y = 0 \quad ; \quad R_B - 200 = 0$

$R_B = 200$ Kgf.

$\Sigma M_A = 0 \quad ;$

$- M_R - R_B(3) + 200(5) = 0$

$M_R = 200(5) - 200(3)$

$M_R = 400$ Kgf-m

Para el tramo (I) $0 \quad x \quad 3$

$M_I = - 400$ (momento)

Sustituyendo en la ec. IV-3,

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = - 400 \text{ (curvatura)}$$

Integrando,

(a) $$EI\,\frac{dv}{dx} = EI\,\theta_I = -400\,x + C_1 \qquad \text{(pendiente)}$$

Integrando nuevamente,

(b) $$EI\,v_I = -200\,x^2 + C_1 x + C_2 \qquad \text{(curva elástica)}$$

Para el tramo (II), 3   x   5

$$M_{II} = -400 + 200(x-3) = -400 + 200\,x - 600$$

$$M_{II} = -1\,000 + 200\,x \qquad \text{(momento)}$$

Sustituyendo en la ecuación IV-3,

$$EI\,\frac{d^2v}{dx^2} = -1\,000 + 200\,x \qquad \text{(curvatura)}$$

Integrando,

(c) $$EI\,\frac{dv}{dx} = EI\,\theta_{II} = -1\,000\,x + 100\,x^2 + C_3 \qquad \text{(pendiente)}$$

Integrando nuevamente,

(d) $$EI\,v_{II} = -500\,x^2 + \frac{100}{3}x^3 + C_3\,x + C_4 \qquad \text{(c. elástica)}$$

Valuamos las constantes de integración, por medio de las condiciones de frontera y de continuidad.

1°).- Cuando $x = 0$; $\theta_I(0) = \theta_A = 0$

2°).- Cuando $x = 3$; $\theta_I(3) = \theta_{II}(3) = \theta_B$

3°).- Cuando $x = 3$; $v_I(3) = v_{II}(3) = v_B$

Por medio de la 1° condición y de la ecuación (a), tenemos,

$$EI\,\theta_I(0) = -400(0) + C_1 = 0$$

$$\therefore \quad C_1 = 0$$

Por la 2° condición, igualamos las ecuaciones (a) y (c), para cuando $x = 3$,

$$-400(3) + 0 = -1\,000(3) + 100(3)^2 + C_3$$

$$C_3 = -1\,200 + 3\,000 - 900$$

$$\therefore \quad C_3 = 900$$

Por la 3° condición, igualamos a cero la ecuación (d), cuando $x = 3$,

$$EI\, v_{II}(3) = -500(3)^2 + \frac{100}{3}(3)^3 + C_3(3) + C_4 = 0$$

$$-4\,500 + 900 + 3\,C_3 + C_4 = 0$$

Sustituyendo el valor de $C_3 = 900$ y despejando C_4,

$$C_4 = 4\,500 - 900 - 3(900) = 4\,500 - 900 - 2\,700$$

$$\therefore \qquad C_4 = 900$$

Por la 3^{o} condición, igualamos las ecuaciones (b) y (d), para cuando $x = 3$,

$$-200(3)^2 + 0(3) + C_2 = -500(3)^2 + \frac{100}{3}(3)^3 + 900(3) + C_4$$

$$-1\,800 + C_2 = -4\,500 + 900 + 2\,700 + C_4$$

$$C_2 = -4\,500 + 900 + 2\,700 + 900 + 1\,800$$

$$\therefore \qquad C_2 = 1\,800$$

Sustituyendo los valores de las constantes de integración, en las ecuaciones correspondientes, obtenemos;

(a') $EI\,\theta_I = -\,400\,x \;+\; 0$

(b') $EI\,v_I = -\,200\,x^2 \;+\; (0)\,x \;+\; 1\,800$

(c') $EI\,\theta_{II} = -\,1\,000\,x \;+\; 100\,x^2 \;+\; 900$

(d') $EI\,v_{II} = -\,500\,x^2 \;+\; \frac{100}{3}x^3 \;+\; 900\,x \;+\; 900$

Cálculo de algunos valores necesarios para trazar el diagrama de pendiente, $\theta(x)$.

Cuando $x = 0$;

$EI\,\theta_I(0) = EI\,\theta_A = -\,400\,(0)$

$\therefore \quad EI\,\theta_A = 0$

Cuando $x = 3$;

$EI\,\theta_I(3) = EI\,\theta_B = -\,400\,(3)$

$\therefore \quad EI\,\theta_B = -\,1\,200$

Cuando $x = 5$;

$EI\,\theta_{II}(5) = EI\,\theta_C = -\,500(5)^2 \;+\; \frac{100}{3}(5)^3 \;+\; 900(3) \;+\; 900$

$\therefore \quad EI\,\theta_C = -\,4\,733.33$

Cálculo de algunos valores necesarios para trazar la curva – elástica, v(x).

Cuando $x = 0$;

$$EI\,v_{I}(0) = EI\,v_{A} = -\,200(0)^{2} + 1\,800$$

$$\therefore \quad EI\,v_{A} = 1\,800$$

Cuando $x = 3$;

$$EI\,v_{I}(3) = EI\,v_{B} = -\,200(3)^{2} + 1\,800$$

$$EI\,v_{B} = -\,1\,800 + 1\,800$$

$$\therefore \quad EI\,v_{B} = 0$$

Cuando $x = 5$;

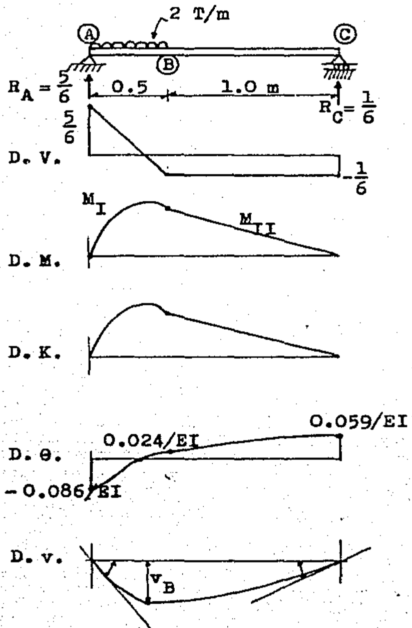
$$EI\,v_{II}(5) = EI\,v_{C} = -\,500(5)^{2} + \frac{100}{3}(5)^{3} + 900(5) + 900$$

$$EI\,v_{C} = -\,12\,500 + 4\,166.67 + 4\,500 + 900$$

$$\therefore \quad EI\,v_{C} = -\,2\,933.33$$

EJEMPLO IV - 2.

Para la viga cargada como se muestra en la figura, determinar la pendiente en B, θ_B ; la deflexión en B, v_B y la pendiente de la elástica en C, θ_C. La rígidez a la flexión es EI = Ctte.



Cálculo de reacciones.

$$\Sigma M_A = 0 \quad ;$$

$$2(0.5)\left(\frac{0.5}{2}\right) - R_C(1.5) = 0$$

$$R_C = \frac{0.25}{1.5} = \frac{1}{6} \text{ Ton}$$

$$\Sigma M_C = 0 \quad ;$$

$$2(0.5)(0.25 + 1) - R_A(1.5) = 0$$

$$R_A = \frac{1.25}{1.50} = \frac{5}{6} \text{ Ton}$$

Para el tramo (I) $0 \leq x \leq 0.5$

$$M_I = \frac{5}{6}x - \frac{(2)x^2}{2}$$

$$M_I = \frac{5}{6}x - x^2 \quad \text{(momento)}$$

Sustituimos en la ecuación IV-3,

$$EI\,v'' = EI\,\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{5}{6}x - x^2 \qquad \text{(curvatura)}$$

Integrando,

$$\text{(a)} \quad EI\,\frac{dv}{dx} = EI\,\theta_I = \frac{5\,x^2}{12} - \frac{x^3}{3} + C_1 \qquad \text{(pendiente)}$$

Integrando nuevamente,

$$\text{(b)} \quad EI\,v_I = \frac{5\,x^3}{36} - \frac{x^4}{12} + C_1 + C_2 \qquad \text{(curva elástica)}$$

Para el tramo (II), de $0.5 \leqslant x \leqslant 1.5$

$$M_{II} = \frac{5}{6}x - 2(0.5)(x - \frac{0.5}{2}) = \frac{5}{6}x - (x - 0.25)$$

$$M_{II} = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{4} \qquad \text{(momento)}$$

Sustituyendo en la ecuación IV-3,

$$EI\,v'' = EI\,\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{4} \qquad \text{(curvatura)}$$

Integrando,

$$\text{(c)} \quad EI\,\frac{dv}{dx} = EI\,\theta_{II} = -\frac{x^2}{12} + \frac{x}{4} + C_3 \qquad \text{(pendiente)}$$

Integrando nuevamente,

$$(d) \qquad EI\,v_{II} = -\frac{x^3}{36} + \frac{x^2}{8} + C_3x + C_4 \qquad \text{(curva elástica)}$$

Váluamos las constantes de integración, por medio de las condiciones de frontera y de continuidad.

1^o).- Cuando $x = 0$; $v_I(0) = v_A = 0$

2^o).- Cuando $x = 0.5$; $v_I(0.5) = v_{II}(0.5) = v_B$

3^o).- Cuando $x = 0.5$; $\theta_I(0.5) = \theta_{II}(0.5) = \theta_B$

4^o).- Cuando $x = 1.5$; $v_{II}(1.5) = v_C = 0$

Por medio de la 1^o condición y de la ecuación (b), tenemos,

$$EI\,(0) = \frac{5(0)^3}{36} - \frac{(0)^4}{12} + C_1(0) + C_2 = 0 \qquad ;$$

$$\therefore \qquad C_2 = 0$$

Por medio de la 4^o condición y de la ec. (d), determinamos,

$$EI\,(1.5) = -\frac{(1.5)^3}{36} + \frac{(1.5)^2}{8} + C_3(1.5) + C_4 = 0$$

$$\therefore \qquad 1.5\,C_3 + C_4 = -0.1875 \qquad \text{- - - - - - - - - - (i)}$$

Por medio de la 3^{o} condición, podemos igualar las ecuaciones (a) y (c), para cuando $x = 0.5$,

$$\frac{5(0.5)^2}{36} - \frac{(0.5)^3}{3} + C_1 = - \frac{(0.5)^3}{12} + \frac{(0.5)}{4} + C_3$$

$$\therefore \qquad C_1 - C_3 = 0.04167 \qquad - - - - - - - - - - - - \quad (ii)$$

Por la 2^{o} condición, igualamos las ecuaciones (b) y (d), para cuando $x = 0.5$,

$$\frac{5(0.5)^3}{36} + \frac{(0.5)^4}{12} + C_1(0.5) + C_2 = - \frac{(0.5)^3}{36} + \frac{(0.5)^2}{8} + C_3(0.5) + C_4$$

$$\therefore \qquad 0.5\,C_1 - 0.5\,C_3 + C_4 = 0.01563 \qquad - - - - - - \quad (iii)$$

Con estas expresiones, planteamos un sistema de ecuaciones simultáneas, para determinar el valor de las constantes,

$$0 \quad - \quad 1.5\,C_1 \quad + \quad C_4 \quad = \quad -0.1875$$

$$C_1 \quad - \quad C_3 \quad + \quad 0 \quad = \quad 0.0416$$

$$0.5\,C_1 - 0.5\,C_3 \quad - \quad C_4 \quad = \quad 0.01563$$

Cuya solución es,

$$C_1 = -0.0868$$

$$C_2 = 0$$

$$C_3 = -0.1284$$

$$C_4 = 0.0051$$

Sustituimos el valor de las constantes de integración en las ecuaciones correspondientes,

$$\text{(a')} \qquad EI\,\theta_I = \frac{5x^2}{12} - \frac{x^3}{3} - 0.0868$$

$$\text{(b')} \qquad EI\,v_I = \frac{5x^3}{36} - \frac{x^4}{12} - 0.0868\,x + 0$$

$$\text{(c')} \qquad EI\,\theta_{II} = -\frac{x^2}{36} + \frac{x}{4} - 0.1284$$

$$\text{(d')} \qquad EI\,v_{II} = -\frac{x^3}{36} + \frac{x^2}{8} - 0.1284\,x + 0.0051$$

Para calcular el giro en B, θ_B, basta sustituir el valor de-$x = 0.5$, en cualquiera de las ecuaciones (a') ó (c').

$$EI\,\theta_I(0.5) = EI\,\theta_B = \frac{5(0.5)^2}{12} - \frac{(0.5)^3}{3} - 0.0868$$

$$EI\,\theta_B = 0.024$$

Para calcular la deflexión en B, v_B, sustituimos el valor de $x = 0.5$, en cualquiera de las ecuaciones (b') ó (d').

$$EI\,v_I(0.5) = EI\,v_B = \frac{5(0.5)^3}{36} - \frac{(0.5)^4}{12} - 0.0868(0.5)$$

$$EI\,v_B = -0.031$$

Para calcular el giro en C, θ_C, sustituimos el valor de $x = 1.5$, en la ecuación (c').

$$EI\,\theta_{II}(1.5) = EI\,\theta_C = -\frac{(1.5)^2}{12} + \frac{(1.5)}{4} - 0.1284$$

$$EI\,\theta_C = 0.059$$

IV-3. TEOREMAS DE MOHR. OBTENCION DE ROTACIONES Y DESPLAZAMIENTOS MEDIANTE LOS TEOREMAS DE MOHR.

El método del área de momentos[+] es escencialmente gráfico y nos permite calcular giros (θ) y deflexiones (v) en puntos particulares sobre el eje de la viga, que puede ser de sección y/o rigidez variable.

Este método esta constituido por dos teoremas fundamentales, los cuales se basan en la geometría de la elástica, en el área del diagrama M/EI y en el momento estático de dicha área.

Para deducir los teoremas, la ec. IV-3, $d^2v/dx^2 = M/EI$ se puede escribir en las dos formas alternativas siguientes:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{d(\theta)}{dx} = \frac{M}{EI}$$

de donde,

$$d\theta = \frac{M}{EI}\,dx \qquad \text{---------(1)}$$

De acuerdo con esta ecuación, el área infinitesimal (M/EI) dx en el diagrama M/EI es igual al ángulo entre dos tangentes consecutivas, como se muestra en la figura IV-6.

[+] En 1868, Otto Mohr, de Dresden, Alemania, ideó un método similar para calcular rotaciones y deflexiones de la elástica.

Si el ángulo pequeño, $d\theta$, para un elemento, se multiplica -- por su distancia, x, a un origen arbitrario, se obtiene una -- distancia vertical dt, figura IV-6. Como sólo se consideran deflexiones pequeñas, hay una diferencia despreciable entre el arco DD' y el segmento vertical dt,

$$dt = d\theta\,(x) = \frac{M}{EI}\,dx\,(x) \qquad \text{--------(ii)}$$

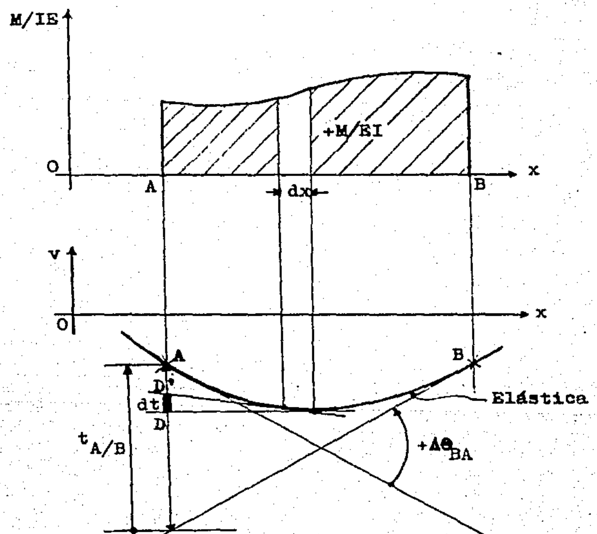


Fig. IV-6. Relación entre el diagrama de M/EI y la curva -- elástica.

Integrando las ecuaciones (i) y (ii) entre dos puntos cualesquira, tales como A y B, de la figura IV-6, se obtienen los dos teroremas del área de momentos.

1º TEOREMA

$$\int_A^B d\theta = \theta_B - \theta_A = \Delta\theta_{BA} = \int_A^B \frac{M}{EI}\, dx \qquad \text{(IV-5)}$$

El primer teorema indica que la integral del área del diagrama M/EI, comprendida entre las ordenadas en dos puntos de la elástica, da la desviación angular entre las tangentes correspondientes. Entonces, la expresión anterior dice que el ángulo (medido en radianes) entre las tangentes a dos puntos A y B de la curva elástica, es numéricamente igual al área (Φ) del diagrama de momento flexionante M/EI, por tanto,

$$\Delta\theta_{BA} = \Phi$$

Ahora bien, si se conoce la pendiente de la elástica en un punto, como el A , se puede determinar la pendiente en otro punto como el B:

$$\theta_B = \theta_A + \Delta\theta_{BA} = \theta_A + \Phi$$

Si la suma de las áreas elementales entre dos puntos cualesquiera, como A y B, es positiva, la tangente de la derecha en B ha girado en sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto a la tangente en A; si dicha suma es negativa, la donde $\bar{\Phi}$ - es el área total del diagrama M/EI entre los dos puntos considerados

$\bar{x}$ - es la distancia horizontal del centroide de esta área al punto A. Fig. IV-7.

Por analogía, la desviación tangencial de un punto B con respecto a la tangente en el punto A es,

$$t_{B/A} = \bar{\Phi}\,\bar{x}_1$$

donde $\bar{x}_1$ - se mide desde la vertical que pasa por el punto B al centroide del área considerada. Figura IV- 7.

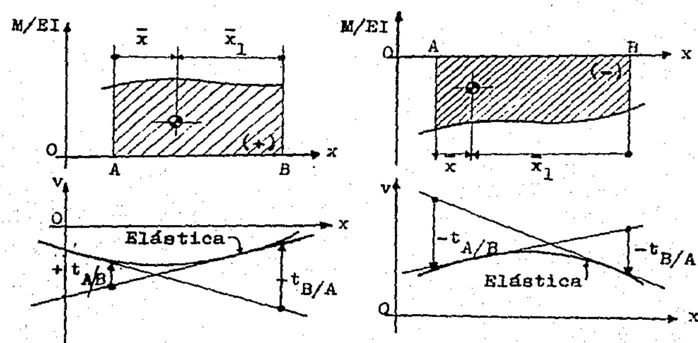


Fig. IV-7. Significado de los signos de la desviación tangencial.

En las ecuaciones anteriores, las distancias $\bar{x}$ y $\bar{x}_1$ se con sideran siempre positivas, y como E e I son también cantidades positivas, el signo de las desviaciones tangenciales dependen - del signo de los momentos flexionanates. Un valor positivo de - la desviación tangencial indica que el primer punto está por en cima de la tangente a la elástica trazada por el segundo punto- y por el contrario, un valor negativo indica que el primer pun- to está por debajo de la tangente que pasa por el segundo (figu ra IV-7).

Diagrama de momentos por partes. Para utilizar los teoremas- del área de momentos, cuando se tienen aplicadas cargas más com plicadas, recurrimos al método de DIAGRAMA DE MOMENTOS POR PAR- TES, en el cual se considera a la viga fija en algún punto con- las partes restantes actuando como vigas en voladizo; lo que -- nos permite trazar un diagrama de momentos separado para cada - carga.

Nuestro proposito es sustituir las integraciones, por cálcu- los seguros y sencillos del área de cualquier parte del diagra- ma de momentos, y del momento estático de dicha área respecto - de un eje cualquiera.

Cuando se trazan los diagramas para todas las cargas que ac- túan sobre la viga, la suma algebraica de todas las ordenadas - en cualquier lugar tendrá el mismo valor que la ordenada corres pondiente del diagrama compuesto.

Mediante la ecuación $M = K X^n$ podemos representar, el efecto de cualquier carga individual, en el diagrama de momentos por partes, figura IV-8.

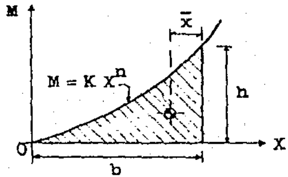


Fig. IV-8. Diagrama de momentos flexionantes.

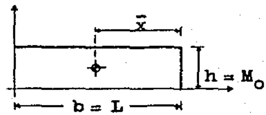
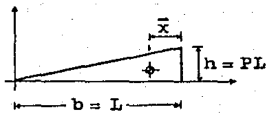
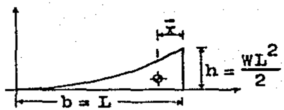
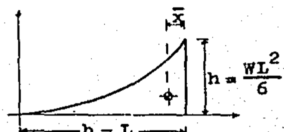
El área comprendida entre dos ordenadas cualquiera (A y B) y la posición del centro de gravedad se determinan mediante las siguientes expresiones:

$$\text{Área} = \frac{b\,h}{n + 1}$$

$$\bar{x} = \frac{b}{n + 2}$$

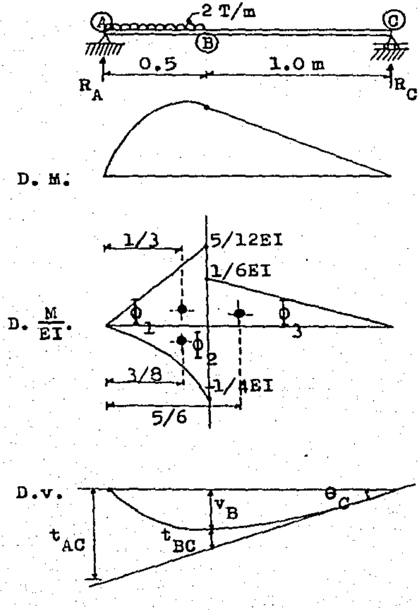
Por ejemplo, una ménsula que soporta un par M_o en el extremo tiene una ley de momentos del tipo $K X^n$ donde $K = M_o$ y $n = 0$, es decir, $M = M_o X^o$. En otras palabras, un par da lugar a una ley de momentos de grado cero. Análogamente, una carga concentrada da origen a una ley de momentos de grado uno, $M = P X$; una carga uniforme, ley de momentos de grado dos, $M = \frac{W}{2} X^2$; etc.

En la tabla siguiente se presentan algunos diagramas y su correspondiente ley de momentos.

Ley de momentos	grado	Diagrama de momentos	Área	$\bar{x}$
$M = M_o$	0		$b\,h$	$\frac{b}{2}$
$M = P\,X$	1º		$\frac{b\,h}{2}$	$\frac{b}{3}$
$M = \frac{W}{2}X^2$	2º		$\frac{b\,h}{3}$	$\frac{b}{4}$
$M = \frac{W}{6\,L}X^3$	3º		$\frac{b\,h}{4}$	$\frac{b}{5}$

PROBLEMA IV - 3.

Para la viga cargada como se muestra en la figura, determinar por el método del área de momentos, la pendiente en B, (θ_B) la deflexión en B, (v_B) y la pendiente de la elástica en C, -- (θ_C). La rígidez a la flexión es EI = Ctte.



Conocidas las reacciones.-

$$R_C = \frac{1}{6} \text{ Ton} \quad ;$$

$$R_A = \frac{5}{6} \text{ Ton.}$$

Después de trazar el diagrama de momentos por partes, calculamos las áreas,

$$\Phi_1 = \frac{(\frac{1}{2})(\frac{5}{12\,EI})}{2} = \frac{5}{48\,EI}$$

$$\Phi_2 = -\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{4\,EI})}{2+1} = \frac{1}{24\,EI}$$

$$\Phi_3 = \frac{(1)(\frac{1}{4\,EI})}{2} = \frac{1}{12\,EI}$$

Cálculo de la desviación tangencial t_{AC},

$$t_{AC} = \left(\frac{\Phi}{I}_1 \bar{x}_1 + \frac{\Phi}{I}_2 \bar{x}_2 + \frac{\Phi}{I}_3 \bar{x}_3 \right)$$

$$t_{AC} = \left(\frac{5}{48\,EI}\right)\left(\frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{24\,EI}\right)\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{1}{12\,EI}\right)\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$t_{AC} = \frac{51}{576\,EI}$$

a).- Por medio de trigonometría, determinamos la pendiente - de la elástica en C, θ_C;

$$\theta_C = \frac{t_{AC}}{1.5} = \frac{51}{576\,EI\,(1.5)} = \frac{34}{576\,EI}$$

O bien,

$$\theta_C = 0.059 / EI$$

b).- Por medio del 1° teorema del área de momentos, determinamos la pendiente θ_B,

$$\theta_{BC} = \theta_C - \theta_B = \frac{\Phi}{I}_3$$

Despejando θ_B;

$$\theta_B = \theta_C - \frac{\Phi}{I}_3 = \frac{34}{576\,EI} - \frac{1}{12\,EI} = \frac{34 - 48}{576\,EI}$$

$$\theta_B = - \frac{14}{576\,EI}$$

O bien,

$$\theta_B = - 0.024 / EI$$

c).- Para determinar la deflexión, v_B, primero calculamos la desviación tangencial, t_{BC};

$$t_{BC} = \Phi_3 \bar{x}_3 = \left(\frac{1}{12\,EI}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{36\,EI}$$

Por medio de trigonometría obtenemos,

$$\theta_C = \frac{|v_B| + |t_{BC}|}{1.0}$$

$$\therefore \quad v_B = \theta_C (1.0) - t_{BC}$$

$$v_B = \frac{34}{576\,EI} - \frac{1}{36\,EI} = \frac{34 - 16}{576\,EI}$$

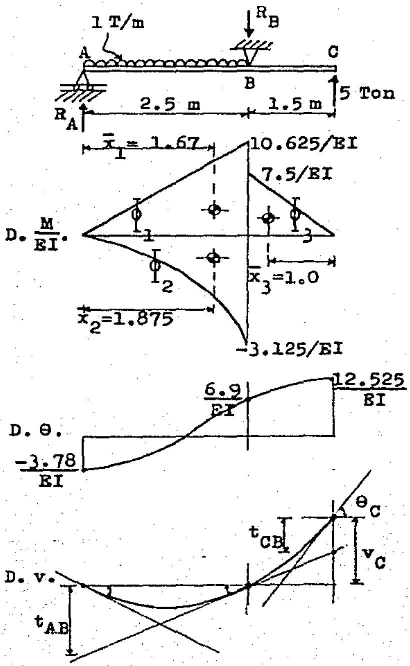
$$v_B = \frac{18}{576\,EI}$$

O bien,

$$v_B = 0.031 / EI$$

PROBLEMA IV – 4.

Para la viga cargada como se muestra en la figura, determinar las pendientes θ_B, θ_A y la deflexión de la elástica en el punto C, (v_C). La rígidez a la flexión es $EI = Ctte.$



Cálculo de reacciones.-

$\Sigma M_B = 0$;

$2.5\,R_B - 2.5(1.25) - 5(1.5) = 0$

$R_A = 4.25$ Ton

$\Sigma F_y = 0$;

$4.25 - 2.5 - R_B + 5 = 0$;

$R_B = 6.75$ Ton

Después de trazar el diagrama de momentos por partes, calculamos las áreas.

$$\Phi_1 = \frac{(2.5)\left(\frac{10.625}{EI}\right)}{2} = \frac{13.28}{EI}$$

$$\Phi_2 = \frac{(2.5)\left(\frac{-3.125}{EI}\right)}{2+1} = -\frac{2.60}{EI}$$

$$\Phi_3 = \frac{(1.5)\left(\frac{7.5}{EI}\right)}{2} = \frac{5.625}{EI}$$

Cálculo de la desviación tangencial t_{AB},

$$t_{AB} = (\Phi_1 \bar{x}_1 + \Phi_2 \bar{x}_2)$$

$$t_{AB} = (\frac{13.28}{EI})(1.667) - (\frac{2.60}{EI})(1.875)$$

$$t_{AB} = \frac{17.25}{EI}$$

a).- Por medio de trigonometría, determinamos la pendiente de la elástica en B, (θ_B) ;

$$\theta_B = \frac{t_{AB}}{2.5} = \frac{17.25}{EI\,(2.5)} \quad ;$$

$$\theta_B = 6.9 / EI$$

b).- Por medio del 1° teorema del área de momentos, determinamos la pendiente θ_A y la pendiente θ_C,

$$\Delta\theta_{AB} = \theta_B - \theta_A = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\therefore \quad \theta_A = \theta_B - \Phi_1 - \Phi_2 =$$

$$\theta_A = \frac{6.9}{EI} - \frac{13.28}{EI.} - (- \frac{2.6}{EI})$$

$$\theta_A = - 3.87 / EI$$

Cálculo de la pendiente θ_C,

$$\Delta\theta_{BC} = \theta_C - \theta_B = \Phi_3$$

$$\therefore \quad \theta_C = \Phi_3 + \theta_B = \frac{5.625}{EI} + \frac{6.9}{EI}$$

$$\theta_C = \frac{12.525}{EI}$$

Cálculo de la desviación tangencial t_{BC},

$$t_{BC} = \Phi_3 \bar{x}_3 = \left(\frac{5.625}{EI}\right)(1.0) \qquad ;$$

$$t_{BC} = 5.625 / EI$$

c).- Para determinar la deflexión v_B, obtenemos por trigonometría la siguiente relación,

$$\theta_B = \frac{|v_C| - |t_{CB}|}{1.5}$$

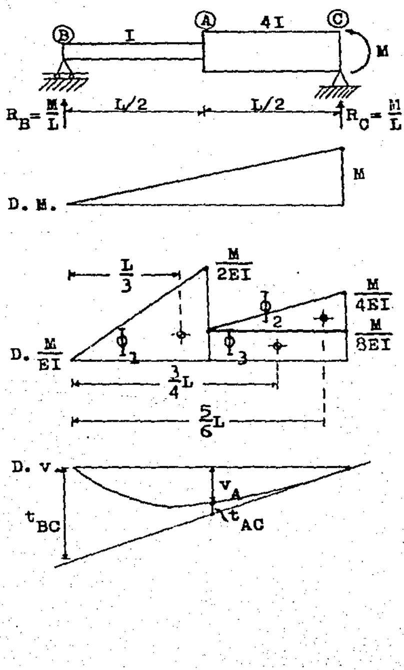
$$\therefore \quad v_C = 1.5(\theta_B) + t_{CB}$$

$$v_C = 1.5\left(\frac{6.9}{EI}\right) + \frac{5.625}{EI} \qquad ;$$

$$v_C = 15.975/EI$$

PROBLEMA IV - 5.

Empleando el método del área de momentos, para la viga cargada como se muestra en la figura, determínese la pendiente y la deflexión de la elástica en el punto "A". Suponga que el módulo de elásticidad es $E = Ctte$.



Cálculo de reacciones.-

$$\Sigma M_B = 0 \quad ;$$

$$-R_C(L) + M = 0 \quad ;$$

$$R_C = \frac{M}{L}$$

$$\therefore \quad R_B = \frac{M}{L}$$

Después de trazar el diagrama de momentos por partes, calculamos las areas,

$$\Phi_1 = \frac{(\frac{L}{2})(\frac{M}{2\,EI})}{2} = \frac{M\,L}{8\,EI}$$

$$\Phi_2 = \frac{(\frac{L}{2})(\frac{M}{(2)4EI})}{2} = \frac{M\,L}{32\,EI}$$

$$\Phi_3 = (\frac{L}{2})(\frac{M}{8\,EI}) = \frac{M\,L}{16\,EI}$$

Cálculo de la desviación tangencial t_{BC},

$$t_{BC} = (\Phi_1 \bar{x}_1 + \Phi_2 \bar{x}_2 + \Phi_3 \bar{x}_3)$$

$$t_{BC} = \frac{M\,L}{8\,EI}\left(\frac{2}{3} x \frac{L}{2}\right) + \frac{M\,L}{32\,EI}\left(\frac{5\,L}{6}\right) + \frac{M\,L}{16\,EI}\left(\frac{3\,L}{4}\right)$$

$$t_{BC} = \frac{11}{96}\frac{M\,L^2}{EI}$$

Por trigonometría, determinamos la pendiente θ_C,

$$\theta_C = \frac{t_{BC}}{L} = \frac{\frac{11}{96}\frac{M\,L^2}{EI}}{L} \quad ;$$

$$\theta_C = \frac{11}{96}\frac{M\,L}{EI}$$

a).- Por medio del 1° teorema del área de momentos, determinamos la pendiente θ_A,

$$\Delta\theta_{AC} = \theta_C - \theta_A = \Phi_2 + \Phi_3$$

$$\therefore \quad \theta_A = \theta_C - \Phi_2 - \Phi_3$$

Sustituyendo los valores correspondientes,

$$\theta_A = \left(\frac{11}{96}\frac{M\,L}{EI}\right) - \frac{M\,L}{32\,EI} - \frac{M\,L}{16\,EI}$$

$$\theta_A = \frac{M\,L}{48\,EI}$$

Calculo de la desviación tangencial t_{AC},

$$t_{AC} = (\Phi_2 \bar{x}_2 + \Phi_3 \bar{x}_2)$$

$$t_{AC} = (\frac{M\,L}{32\,EI})(\frac{5\,L}{6}) + (\frac{M\,L}{16\,EI})(\frac{3\,L}{4})$$

$$t_{AC} = \frac{7\,M\,L}{96\,EI}$$

b).- Cálculo de la deflexión v_A ; mediante trigonometría obtenemos la siguiente relación:

$$\theta_C = \frac{\left| t_{AC} \right| + \left| v_A \right|}{(\frac{L}{2})}$$

$$\therefore \quad v_A = (\frac{L}{2}) \theta_C - t_{AC} = \frac{L}{2} (\frac{11}{96} \frac{M\,L}{EI}) - \frac{7\,M\,L^2}{96\,EI}$$

$$v_A = - \frac{3\,M\,L^2}{192\,EI} \qquad ;$$

$$v_A = - \frac{M\,L^2}{64\,EI}$$

IV-4. PRINCIPIO DE LA VIGA CONJUGADA. OBTENCION DE ROTACIONES Y DESPLAZAMIENTOS MEDIANTE EL METODO DE LA VIGA CONJUGADA.

Como se indicó en la figura IV-4, derivando cuatro veces la ecuación de la elástica se obtienen las siguientes relaciones:

$$EI\, v = \text{Deflexión (ordenada de la elástica)}$$

$$EI \frac{dv}{dx} = \text{Pendiente}$$

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = \text{Momento} = M$$

$$EI \frac{d^3v}{dx^3} = \text{Fuerza cortante} = V = \frac{dM}{dx}$$

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = \text{Carga} = \frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}$$

Resulta evidente que las relaciones entre ordenadas, pendiente y momento son las mismas que las que existen entre momento, fuerza cortante y carga. Esto sugiere que puede aplicarse el método del área de momentos para determinar el momento flexionante, partiendo del diagrama de cargas, de la misma manera que se ha empleado para determinar las ordenadas a partir del diagrama de momentos.

Así, pués, el método de la viga conjugada o de los pesos ---

elásticos, utiliza la fuerza cortante y el momento flexionante de una carga ficticia M / EI para determinar la pendiente y la ordenada de la curva elástica, aplica realmente los mismos cálculos que el método del área de momentos, pero con el inconveniente de no poner de manifiesto el significado físico de dichos cálculos. Este inconveniente es aún mayor cuando se aplica a las ménsulas y a las vigas con voladizos, en las que hay que cambiar las condiciones de sujeción de la viga conjugada.

De aquí que, en general, la viga principal y la conjugada no podrán tener las mismas condiciones de apoyo. En vigas estáticamente determinadas, en las que la viga conjugada también lo es, las reglas de transformación de apoyos son las siguientes:

1. Un extremo empotrado de la viga principal ($\theta = v = 0$) ha de transformarse en un extremo libre en la viga conjugada ($V_{fic} = M_{fic} = 0$).

2. Un extremo libre en la viga principal ha de tranformarse en un extremo empotrado en la viga conjugada.

3. Una articulación en la viga principal ha de transformarse en un apoyo intermedio de la viga conjugada

4. Un apoyo intermedio en la viga principal ha de transformarse en una articulación de la viga conjugada

5. Un apoyo extremo en la viga principal ($v = 0$) ha de trans

formarse en un apoyo simple ($M_{fic} = 0$) en la viga conjugada.

Aplicando, pués, a una viga cargada con el diagrama de M/EI los principios estudiados para la determinación de la fuerza cortante y momento flector se tiene:

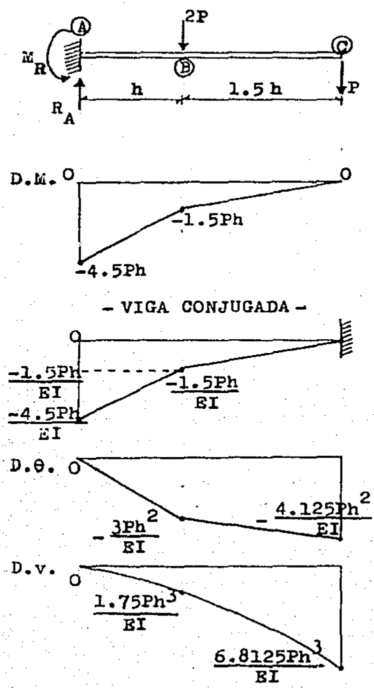
a). Pendiente real = fuerza cortante ficticia

b). Ordenada real = momento flector ficticio

El método es directamente aplicable a las vigas simplemente apoyadas. En otros casos, tales como ménsulas, vigas con voladizos, ect., hay que aplicar las condiciones artificiales de sujeción o apoyo ya discutidas.

PROBLEMA IV – 6.

Determine las pendientes θ_B y θ_C, y la deflexión v_C; por el método de la viga conjugada, para la viga cargada como se muestra en la figura. Considere que la rígidez a la flexión es EI = Ctte.



Cálculo de reacciones.–

$\Sigma F_y = 0$;

$R_A - 2P - P = 0$;

$\therefore \quad R_A = 3P$

$\Sigma M_A = 0$;

$-M_R + 2P(h) + P(2.5h) = 0$

$M_R = 2Ph + 2.5Ph$

$M_R = 4.5Ph$

Obtenemos el momento en B, cuando x = h,

$M_B = - M_R + R_A(h)$

$M_B = - 4.5Ph + 3Ph$

$M_B = - 1.5Ph$

a).- "La fuerza cortante de la viga conjugada en una sección-cualquiera es igual a la pendiente de la tangente de la viga real en ese punto"

Cálculo del giro θ_B,

$$\theta_B = \left(\frac{\frac{4.5Ph}{EI} + \frac{1.5Ph}{EI}}{2}\right)(h) = \frac{6\,Ph}{2\,EI}(h)$$

$$\theta_B = \frac{3\,Ph^2}{EI}$$

Cálculo del giro θ_C,

$$\theta_C = \frac{3\,Ph^2}{EI} + \frac{\left(\frac{1.5\,Ph}{EI}\right)(1.5h)}{2}$$

$$\theta_C = \frac{3\,Ph^2}{EI} + \frac{2.25Ph^2}{2\,EI}$$

$$\theta_C = \frac{3\,Ph^2}{EI} + \frac{1.25\,Ph^2}{EI}$$

$$\theta_C = \frac{4.125\,Ph^2}{EI}$$

b).-"El <u>momento flexionante</u> de la viga conjugada en una sección cualquiera es igual a la <u>ordenada</u> de la curva elástica (deflexión) en ese punto".

Cálculo de la deflexión v_B ;

$$v_B = \left(-\frac{1.5\,Ph}{EI}\right)(h)\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{\left(\frac{3\,Ph}{EI}\right)(h)\left(\frac{2}{3}h\right)}{2}$$

$$v_B = -\frac{1.5\,Ph^3}{2\,EI} - \frac{Ph^3}{EI} = \frac{-1.5\,Ph^3 - 2\,Ph^3}{2\,EI}$$

$$v_B = -\frac{1.75\,Ph^3}{EI}$$

Cálculo de la deflexión v_C ;

$$v_C = -\frac{1.5\,Ph}{EI}(h)(0.5h + 1.5h) - \frac{\frac{3\,Ph}{EI}(h)}{2}\left(\frac{2}{3}h + 1.5\,h\right)$$

$$- \frac{\frac{1.5\,Ph}{EI}(1.5\,h)}{2}\left(\frac{1.5\,h}{3}\right)$$

$$v_C = -\frac{3\,Ph^3}{EI} - \frac{3.25\,Ph^3}{EI} - \frac{0.5625Ph^3}{EI}$$

$$v_C = -\frac{6.8125\,Ph^3}{EI}$$

V-1. ESFUERZO CORTANTE PROMEDIO. RELACION ENTRE EL ESFUERZO CORTANTE VERTICAL Y HORIZONTAL EN VIGAS.

Como se indicó en la sección I-6, aparecen esfuerzos cortantes siempre que la resultante de las fuerzas aplicadas tienda a hacer que una parte del cuerpo se corte o deslice con respecto a la otra.

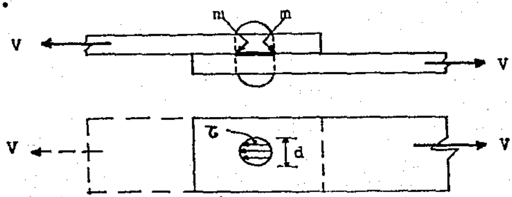


Fig. V-1. Plano de corte m-m para determinar el esfuerzo cortante o tangencial.

Esfuerzo cortante promedio (τ_m). A diferencia del esfuerzo normal, la distribución del esfuerzo cortante en una sección, -

tal como la m-m de la figura V-1, no es uniforme prácticamente en ningún caso, por tanto, la expresión matemática sólo nos da un valor promedio,

$$\tau_m = \frac{V}{A} \quad ; \qquad (\text{Fza./Long.}^2) \qquad \text{(V-1)}$$

<u>Relación entre el esfuerzo cortante vertical y el horizontal en vigas</u>. La consideración del esfuerzo cortante vertical, como tal, se hace muy pocas veces en el análisis y diseño de vigas, debido a que en este caso los esfuerzos cortantes verticales se relaciónan con los esfuerzos cortantes horizontales, y esto es de gran importancia. Por ejemplo, cuando el material usado para la viga tiene baja resistencia al esfuerzo cortante en una dirección (generalmente la horizontal), como ocurre con la madera.

O bien, cuando se construyen vigas añadiendo cubreplacas a las secciónes laminadas o ensamblando vigas de madera. En estas aplicaciones, se deben calcular las fuerzas cortantes horizontales para determinar el número requerido de clavos, remaches, pernos o la longitud de soldadura necesaria para que la sección compuesta trabaje como una unidad.

La acción de los esfuerzos cortantes horizontales se obtiene observando el comportamiento de una viga compuesta de varias placas delgadas, colocadas una sobre otra, pero sin estar unidas de ninguna manera. Cuando se aplica una carga a la viga y ocurre la deformación, las superficies de con tacto entre las placas se deslizarán, y sus posiciones finales serán como se indica en la figura V-2.

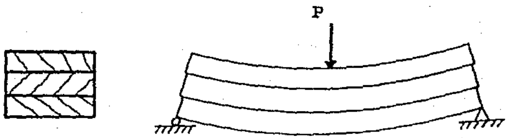


Fig. V-2. Los tablones no unidos entre si se deslizan uno -- respecto al otro cuando se cargan.

Si estas placas estuvierán unidas por algún medio antes de - que se aplique la carga (por ejemplo, por medio de pernos), la- viga actuará como una unidad. Estos medios de conexión impedi-- rán el deslizamiento de las superficies individuales. Por consi guiente los pernos están ejerciendo fuerzas cortantes horizonta les.

V-2. FLUJO DE CORTANTE. SEPARACION DE CONECTORES EN VIGAS.

Considere dos secciónes adyacentes (A) y (B) de una viga, se paradas una distancia diferencial, dx, como se indica en la figura V-3. Si observamos la distribución de esfuerzos, debidos a flexión, en esta parte diferencial de la viga prismática (con - igual área en sus extremos) y recordando que el producto de un- esfuerzo por una área nos da una fuerza, entonces podemos deter minar la magnitud de las fuerzas que actúan perpendiculares a -

las secciones (A) y (B).

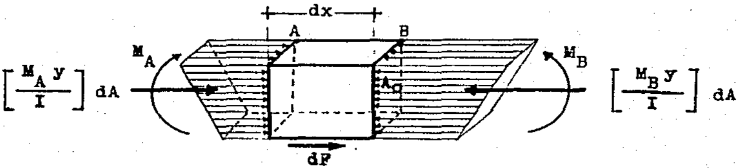


Fig. V-3. Elemento diferencial de una viga, para deducir la expresión de flujo de cortante.

Si M_A no es igual a M_B, como siempre ocurre cuando hay fuerzas cortantes en secciones consecutivas, o sea, que los momentos flexionantes en estas secciones sufren un cambio infinitesimal. Así mismo en la distancia dx las fuerzas longitudinales F_A y F_B varían en una fuerza infinitesimal dF,

$$F_B - F_A = dF = \int_{A_o} \sigma_B \, dA - \int_{A_o} \sigma_B \, dA$$

$$dF = \int_{A_o} \frac{M_B}{I} y \, dA - \int_{A_o} \frac{M_A}{I} y \, dA$$

$$dF = \frac{M_B - M_A}{I} \int_{A_o} y \, dA = \frac{dM}{I} \int_{A_o} y \, dA$$

$$dF = \frac{dM}{I} Q \qquad (V-2)$$

donde, $Q = \int_{A_o} y \, dA = A_o \, \bar{y}$

La integral Q es el momento estático (o de primer orden) del área parcial en estudio, A_o, con respecto al eje neutro. Por definición, $\bar{y}$ es la distancia desde el eje neutro hasta el centroide de A_o. La fuerza longitudinal que actúa normalmente a cualquier parte seleccionada del área transversal, se obtiene mediante la ecuación V-2.

Sin embargo, en vez de trabajar con una fuerza dF que se desarrolla en una distancia dx, es más significativo obtener una fuerza similar por unidad de longitud.

$$\frac{dF}{dx} = q \quad ; \qquad (\text{Fza.} / \text{Long.}) \qquad (\text{V-3})$$

Esta cantidad recibe el nombre de FLUJO DE CORTANTE y se designa por q. Físicamente tal cantidad representa la diferencia entre F_B y F_A para un elemento de viga de una unidad de largo.

$$q = \frac{dF}{dx} = \frac{dM}{dx}\,\frac{1}{I}\,Q$$

Tomando en cuenta la ecuación IV-2, $dM / dx = V$, se obtiene la siguiente expresión para el flujo de cortante en vigas:

$$q = \frac{V\,Q}{I} \qquad (\text{V-4})$$

donde, V – es la fuerza cortante total en la sección.

I – es el momento de inercia de toda el área tranversal con respecto al eje neutro, exactamente como en la fórmula de la flexión de la cual proviene.

Q – es el momento estático del área parcial con respecto al eje neutro. Y se determina mediante la integral de $(y\,dA)$ o por el producto $A_0\bar{y}$.

<u>Separación de conectores en vigas.</u> En el análisis de los efectos de la flexión se ha puesto de manifiesto (Fig. V-2), que los distintos elementos que constituyen una viga compuesta tienden a deslizarse unos sobre otros.

A continuación se estudia como determinar la separación o espaciamiento de los roblones o remaches, que en una viga compuesta unen sus elementos, para que resistan esta acción de deslizamiento.

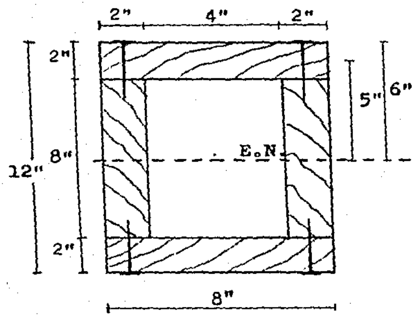
Partiendo de la definición de flujo de cortante podemos calcular la separación (S), entre conectores que resisten una fuerza (F), a un nivel en que conocemos el flujo de cortante,

Flujo de cortante; $q = \frac{F}{S}$

Separación; $$S = \frac{F}{q} \qquad \text{(V-5)}$$

PROBLEMA V-1.

Se va a fabricar una viga de 8 plg X 12 plg con secciones de madera como se muestra en la figura. Los clavos deberán espaciarse a cada 3 plg y la fuerza cortante es, V = 1 000 lb. ¿ Cual será la magnitud de la fuerza sobre cada clavo ?



Por la simetría de la sección transversal de la viga, sabemos que el eje neutro pasa por el centro.

$$\therefore \quad \bar{y}_T = 6"$$

Calculamos el momento de inercia de toda la sección, con respecto al eje neutro:

$$I = \frac{(8)(12)^3}{12} - \frac{(4)(8)^3}{12} = 981 \text{ pgl}^4$$

Determinamos el momento estático de la sección, al nivel que necesitamos conocer el flujo de cortante,

$$Q = A_i(\bar{y}_i) = (8 \times 2)(5) = 80 \text{ plg}^3$$

El flujo de cortante es la fuerza cortante por pulgada de longitud y se calcula como:

$$q = \frac{V\,Q}{I}$$

Sustituyendo los valores correspondientes,

$$q = \frac{(1\,000)(80)}{981} \quad ; \quad q = 81.8 \text{ lb/plg}$$

Como los clavos estan espaciados 3 plg, la fuerza sobre cada par de clavos es:

$$S = \frac{F}{q} \quad ; \quad F = q \times S$$

$$F = (81{,}8 \text{ lb/plg})(3) = 245.4 \text{ lb}$$

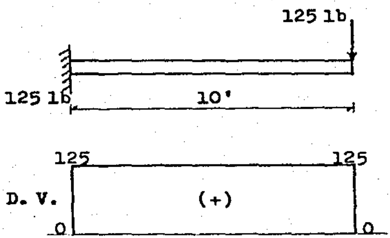
La fuerza cortante sobre cada clavo es la mitad de F, o sea:

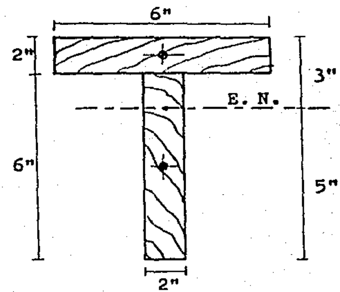
$$F_{clavo} = \frac{245.4 \text{ lb}}{2} \quad ;$$

$$\underline{\underline{F_{clavo} = 122.7 \text{ lb}}}$$

PROBLEMA V – 2.

Determine el espaciamiento de los clavos, asegurar que la viga de sección "T" construida de dos secciones de madera de 2 plg X 6 plg mostrada en la figura actúe como una unidad. La fuerza cortante es constante e igual a 125 lb y la resistencia permisible para cortante horizontal de un clavo es de 94 lb.





Localización del eje neutro;

$$\bar{y} = \frac{\Sigma Q_i}{A_T} = \frac{(6 \times 2)(6+1) + (2 \times 6)(6/2)}{(2 \times 6) + (6 \times 2)} = 5''$$

Cálculo del momento estático, al nivel en que se requiere conocer el flujo de cortante;

$$Q = (2 \times 6)(1+1) = 24 \text{ plg}^3$$

Determinación del momento de inercia de toda la sección, con -- respecto al eje neutro;

$$I = \frac{6\,(2)^3}{12} + 6 \times 2\,(1+1)^2 + \frac{2\,(6)^3}{12} + (2 \times 6)(5-3)^2$$

$$I = 136 \text{ plg}^4$$

Cálculamos el flujo de cortante,

$$q = \frac{V\,Q}{I} = \frac{125\,(24)}{136}$$

$$q = 22.1 \text{ lb/plg}$$

Como se debe obtener una resistencia al esfuerzo cortante de 22.1 lb por cada pulgada de longitud, el espaciamiento de los - clavos es:

$$S = \frac{F}{q} = \frac{94 \text{ lb}}{22.1 \text{ lb/plg}}$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{S = 4.25 \text{ plg}}}$$

V-3. ESFUERZO CORTANTE EN VIGAS. CENTRO DE CORTANTE.

La fórmula del esfuerzo cortante en vigas se puede obtener a partir del concepto de flujo de cortante.

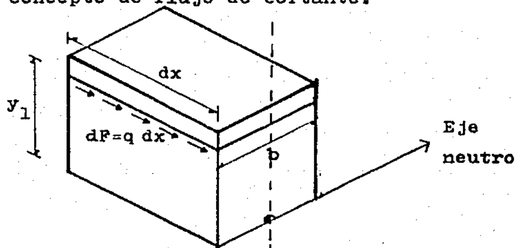


Fig. V-4. Deducción de los esfuerzos cortantes τ_{yx} y τ_{xy} en una viga.

Una vista en isométrico de un elemento diferencial, de una viga que soporta cargas transversales, se muestra en la figura V-4, en el cual se ha hecho un corte longitudinal a una distancia y_1 del eje neutro. Además, se puede observar que la fuerza equilibrante dF se desarrolla precisamente en el plano de la sección longitudinal, tomada paralelamente al eje de la viga. Por tanto, suponiendo que el esfuerzo cortante esta distribuido uniformemente a través de la sección de ancho b, podemos determinar su valor en el plano longitudinal dividiendo dF entre el área b dx.

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{dF}{b\,dx}$$

Este es el esfuerzo cortante horizontal τ_{yx}. Sin embargo,- puesto que en un elemento infinitesimal esfuerzos cortantes numéricamente iguales actúan en planos mutuamente perpendiculares (véase la sección I-6), se determinó también el esfuerzo τ_{xy} - en el plano de la sección vertical.

Y de la ec. V-3, sabemos que,

$$dF = q\ dx$$

Sustituyendo este valor en la expresión anterior,

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{q}{b} = \frac{V\,Q}{I\,b} \qquad (V\text{-}6)$$

Esta es la fórmula para determinar los esfuerzos cortantes - en las vigas,[+] y da sus valores en la sección longitudinal.

Los esfuerzos verticales actúan en el plano de la sección - transversal de la viga, produciendo la fuerza cortante vertical V y, por tanto, se satisface el requisito de la estática, que- dice, $\Sigma F_y = 0$.

[+] Esta fórmula fue deducida por D. I. Jouravsky en 1855.

Centro de cortante. El centro de corte de una sección transversal esta sobre una línea longitudinal paralela al eje de la viga. Toda fuerza transversal que se aplique pasando por dicho centro no producira torsión de la viga.

Para secciones transversales con un eje de simetría, el centro de corte siempre se localiza sobre tal eje. En el caso de las que tienen dos eje de simetría, el centro de corte coincide con el centroide de la sección transversal.

Considere una viga de sección transversal "C" o perfil de canal, que resiste una fuerza cortante vertical, Fig. V-5. La variación de q y τ es parabólica a lo largo del alma, y a lo largo de los patines horizontales dichas cantidades varían linealmente desde el borde libre.

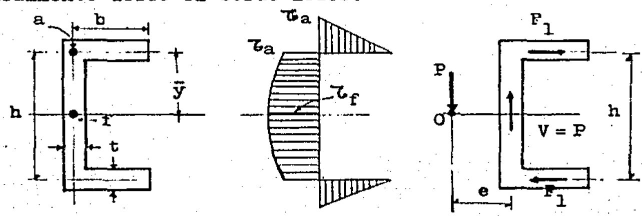


Fig. V-5. Análisis para determinar el centro de corte de un perfil canal.

En el patín: El esfuerzo cortante medio $\tau_a / 2$ multiplicado por el área transversal del patín da una fuerza F_1.

$$F_1 = (\tau_a / 2)\, b\, t$$

En el alma: La suma de los esfuerzos cortantes verticales sobre el área del alma es igual a la fuerza cortante, V.

$$V = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau \, t \, dy$$

Estas fuerzas cortantes F_1 y V que actúan en el plano de la sección transversal se muestran en la figura V-5(c), e indican que un par $F_1 \cdot h$ y una fuerza V se desarrollan en la sección de la canal.

Ahora considérese el segmento de viga voladiza de peso despreciable que se muestra en la figura V-6, al cual se le aplica una fuerza vertical P paralelamente al alma a una distancia "e" de la línea central de la misma. Para mantener esta fuerza aplicada en equilibrio, se debe desarrollar en el alma una fuerza cortante igual y opuesta, V. Así mismo, para eliminar la torsión de la canal, el par $P \cdot e$ debe ser igual al $F_1 \cdot h$.

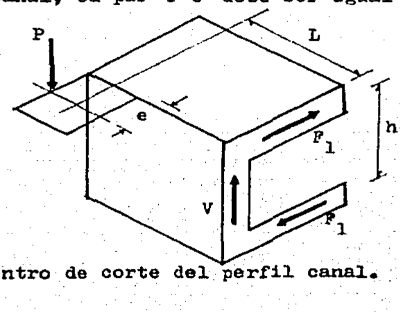


Fig. V-6. Centro de corte del perfil canal.

Es posible obtener una expresión para la distancia "e", loca lizando el plano en que se debe aplicar la fuerza P para eliminar la torsión de la viga canal.

Teniendo en cuenta, que; $P = V$ y $P \cdot e = F_1 \cdot h$

$$e = \frac{F_1 h}{P} = \frac{(1/2)\tau_a\, b\, t\, h}{P}$$

sustituimos el valor del esfuerzo medio τ_a.

$$e = \frac{b\,t\,h}{2P}\;\frac{V\,Q}{I\,t} = \left(\frac{b\,t\,h}{2P}\right)\left(\frac{V\;bt\,(h/2)}{I\,t}\right)$$

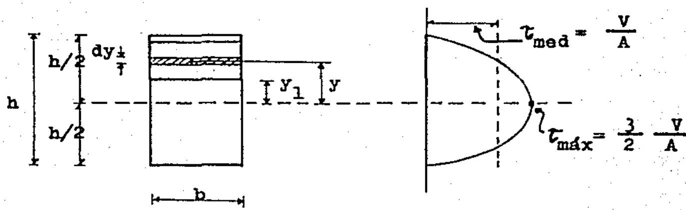
$$e = \frac{b^2\,h^2\,t}{4\,I} \qquad (V\text{-}7)$$

Observamos que la distancia "e" es independiente de la magnitud de la fuerza aplicada P, así como de su localización a lo - largo de la viga. La distancia "e" es una propiedad de una sección recta y se mida desde el centro del alma hasta la fuerza aplicada .

Podemos hacer una investigación similar para localizar el - plano en que las fuerzas horizontales se deben aplicar para eliminar la torsión de la canal. No obstante, para el perfil C , o canal considerado, en virtud de su simetría se puede ver que este plano coincide con el plano que contiene el eje neutro. La - intersección de estos dos planos perpendiculares entre sí con - el plano de la sección transversal localiza un punto que es el- centro de corte y se designa con la letra "O" en la Fig. V-5.

PROBLEMA V – 3.

Utilizando la expresión del esfuerzo cortante, determine su distribución en una viga de sección transversal rectangular maciza que transmite una fuerza cortante vertical, V.



De la ecuación V–6,

$$\tau = \frac{V\,Q}{I\,b} = \frac{V}{I\,b}\int y\,dA = \frac{V}{I\,\cancel{b}}\int_{y_1}^{h/2} \cancel{b}\,y\,dy$$

Integrando,

$$\tau = \frac{V}{I}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y_1}^{h/2} \quad ; \quad \tau = \frac{V}{I}\left[\frac{h^2}{8} - \frac{y_1^2}{2}\right]$$

Entonces, en este tipo de vigas tanto los esfuerzos cortantes horizontales como los verticales varían parabólicamente. Y el valor máximo se obtiene cuando $y_1 = 0$

$$\tau_{máx} = \frac{V\,h^2}{8\,I}$$

En el plano de la sección transversal de la figura, lo anterior se representa esquemáticamente por $\tau_{máx}$ en el eje neutro de la viga. A distancias crecientes desde el eje neutro, los esfuerzos cortantes disminuyen gradualmente. En los límites superior e inferior de la viga, los esfuerzos cortantes desaparecen cuando $y_1 = \pm h/2$.

Determinamos el momento de inercia para esta sección,

$$I = \frac{b\,h^3}{12}$$

Sustituimos en la expresión del esfuerzo cortante máximo,

$$\tau_{máx} = \frac{V\,h^2}{8}\,\frac{12}{b\,h^3} = \frac{3}{2}\,\frac{V}{b\,h}$$

es decir,

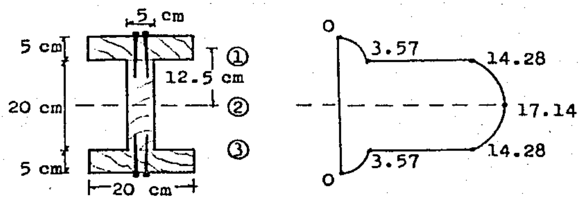
$$\tau_{máx} = \frac{3}{2}\,\frac{V}{A}$$

Partiendo de la definición de esfuerzo cortante promedio tenemos que,

$$\tau_{máx} = 1.5\,\tau_{med}$$

PROBLEMA V - 4.

Para la viga de madera cuya sección se muestra en la figura, determinar el diagrama de variación del esfuerzo cortante, τ. Para un cortante V = 2 000 Kgf. Además, calcule la separación máxima permisible de los clavos, si cada uno resiste 375 Kgf.



Cálculo del momento de inercia, con respecto al eje centroidal (eje neutro),

$$I = \frac{20\,(30)^3}{12} - \frac{2\,(7.5 \times (20)^3)}{12} \quad ; \qquad I = 35\,000 \ \text{cm}^4$$

Sustituyendo en la formula del esfuerzo cortante,

$$\tau = \frac{V}{I}\frac{Q}{b} = \frac{2\,\cancel{000}\;Q}{35\,\cancel{000}\;b} \qquad \therefore \qquad \tau = \frac{2}{35}\left(\frac{Q}{b}\right)$$

Para calcular de manera ordenada el valor del esfuerzo cortante, en los diferentes niveles de la sección transversal de la viga, elaboramos la siguiente tabla,

Nivel	$A\,(cm^2)$	$\bar{y}\,(cm)$	$Q = \bar{y}\,A$	b	$\tau = \frac{2}{35}(\frac{Q}{b})$
①	100	12.5	1 250	20	3.57
	100	12.5	1 250	5	14.28
②	100	12.5	1 250		
	50	5.0	+ 250		
			1 500	5	17.14
③	100	12.5	1 250	5	14.28
	100	12.5	1 250	20	3.57

Para determinar la separación máxima permisible de los -- clavos, determinamos el flujo de cortante al nivel (2),

$$q = \frac{V\,Q}{I}$$

Además sabemos que,

$$q = \tau\, b \qquad ; \qquad q = \frac{2}{35}\left(\frac{Q}{\cancel{b}}\right)(\cancel{b})$$

$$\therefore \qquad q = \frac{2}{35}(Q)$$

Sustituyendo; $\quad q = \frac{2}{35}(1\,250) = 71.4$ Kgf/cm

Por tanto, $\quad S = \frac{\Sigma F}{q} = \frac{2\,(350)}{71.4} \quad ; \quad \underline{\underline{S = 10.5 \text{ cm}}}$

V-4. REVISION POR CORTANTE EN VIGAS DE MADERA Y ACERO.

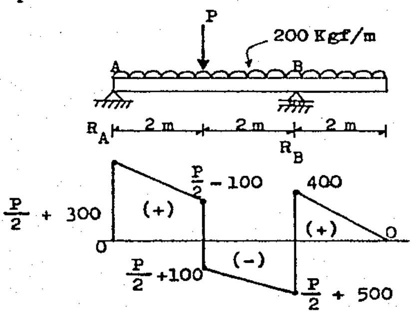
El esfuerzo cortante debe considerarse en el diseño de cualquier viga. Como el esfuerzo cortante frecuentemente no es tan crítico en el diseño de las vigas como los esfuerzos de flexión el procedimiento normal consiste en dimensionar la viga sobre la base de los esfuerzos de flexión, y verificar que en esa sección no hay esfuerzos cortantes excesivos.

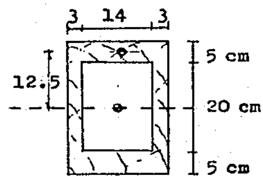
En la práctica, los esfuerzos cortantes nunca controlan el diseño de las vigas de acero, a menos que se apliquen grandes cargas concentradas cerca de los apoyos. Es recomendable que el lector investigue las especificaciones de diseño en el raro caso en que se apliquen cargas concentradas grandes cerca de un apoyo.

Para las vigas de madera, cuya capacidad para resistir fuerzas cortantes horizontales es muy baja, los esfuerzos cortantes controlan frecuentemente el diseño. Como se indico anteriormente, el procedimiento usual consiste en diseñar la viga sobre la base de los esfuerzos de flexión, y despues revisar para los esfuerzos cortantes horizontales. Si el cortante horizontal es excesivo, debe incrementarse el tamaño para reducir el esfuerzo cortante hasta límites permisibles.

PROBLEMA V - 5.

Una viga de sección transversal en cajón como la mostrada en la figura, soporta una carga uniformemente distribuida de 200 - Kgf/m y una fuerza concentrada P. Considerando unicamente la acción de la fuerza cortante, determine el máximo valor de P - que puede ser aplicado si el esfuerzo cortante permisible es. -- $\tau_p = 30$ Kgf/cm^2.





Mediante las ecuaciones de estática obtenemos el valor de - las reaciones,

$$R_A = \frac{P}{2} + 300 \quad ;$$

$$R_B = \frac{P}{2} + 900$$

En el diagrama observamos cual es el valor de la fuerza cortante máxima,

$$V_{máx} = \frac{P}{2} + 500$$

Cálculo del momento de inercia de toda la sección,

$$I = \frac{20(30)^3}{12} - \frac{14(20)^3}{12} = 35\,666.67 \text{ cm}^4$$

Determinamos el momento estático en la sección media (que corresponde al cortante máximo), de la sección transversal,

$$Q = \sum A_i \bar{y}_i = 5 \times 20\,(12.5) + 2\,(10 \times 3\,(5)) = 1\,550 \text{ cm}^3$$

De la ecuación del esfuerzo cortante tenemos:

$$\tau = \frac{VQ}{I\,b} \qquad \therefore \qquad V = \frac{\tau I b}{Q}$$

Igualando con la expresión de la fuerza cortante,

$$V = \frac{P}{2} + 500 \qquad \therefore \qquad P = 2\left[\frac{\tau I b}{Q} - 500\right]$$

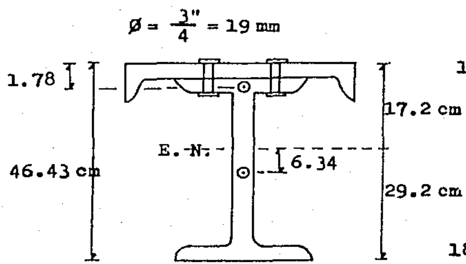
Sustituyendo los valores correspondientes,

$$P = 2\left[\frac{30\,(35\,666.67)(3+3)}{1\,550} - 500\right]$$

$$P_{máx} = 7\,283.87 \text{ Kgf}$$

PROBLEMA V – 6.

Una viga simplemente apoyada tiene una sección transversal – que se compone de una canal 12 ⊔ 20.7 + y una viga de patin ancho 18 WF 50 +, unidas por tornillos de 19 mm de diámetro colocados – longitudinalmente con una separación de 15 cm en cada fila, como se muestra en la figura. Si esta viga se carga con una fuerza concentrada vertical hacia abajo de 50 Ton en el punto medio del claro, ¿cuál será el esfuerzo cortante en los pernos? Desprecie el peso propio de la viga. El momento de inercia, I, de la sección total con respecto al eje neutro es $\doteq$ 46 600 cm^4.



12 ⊔ 20.7 $\begin{cases} A = 38.9\ cm^2 \\ E_{alma} = 0.71\ cm \\ Peral = 30.48\ cm \\ I = 162.3\ cm^4 \end{cases}$

18 WF 50 $\begin{cases} A = 94.9\ cm^2 \\ E_{alma} = 0.91\ cm \\ Peral = 45.72\ cm \\ I = 33\,323.8\ cm^4 \end{cases}$

+ Las canales (o perfiles "C" o "U") y las vigas WF de acero — norteamericanas se designan anunciando primero un número que indica su peralte en pulgadas, luego el símbolo (correspondiente) y a continuación otro número que indica su peso en libras por – pie lineal. Ver las tablas correspondientes al final del texto.

Localización del eje neutro de toda la sección,

$$\bar{y} = \frac{38.9\,(46.43 - 1.78) + 94.9\,(45.72/2)}{38.9 + 94.9} \quad ; \quad \bar{y} = 29.2 \text{ cm}$$

Determinamos el momento de inercia de toda la figura, respecto del eje neutro,

$$I = 162.3 + 38.9\,(17.2 - 1.78)^2 + 33\,333.8 + 94.9\,(6.34)^2 \quad ;$$

$$I \doteq 46\,600 \text{ cm}^4$$

Obtenemos el momento estático a nivel que requerimos conocer el flujo de cortante,

$$Q = 38.9\,(17.2 - 1.78) \quad ; \quad Q \doteq 600 \text{ cm}^3$$

Cálculo del flujo de cortante,

$$q = \frac{V\,Q}{I} = \frac{50\,000\,(1/2)(600)}{46\,000} \quad ; \quad q = 321.89 \text{ KGf/cm}^2$$

Por otro lado sabemos,

$$q = \frac{F}{S} \quad \therefore \quad F = q\,S = 321.89\,(15) = 4\,828.3 \text{ Kgf}$$

El área de un tornillo, $A = \frac{\pi}{4}(1.9)^2 = 2.835$ cm

El esfuerzo cortante en cada tornillo;

$$\tau = \frac{F}{2\,(A)} = \frac{4\,828.33}{2(2.835)} = 851.56 \text{ kgf.}$$

V-5. INFLUENCIA DE LA FUERZA CORTANTE EN LAS DEFORMACIONES EN VIGAS SUJETAS A FLEXION Y FUERZA CORTANTE.

De conformidad con la ley de Hooke las deformaciones por corte deben estar asociadas a esfuerzo cortante (ec. I-13). Por consiguiente, los esfuerzos cortantes dados por la "expresión para la distribución de τ_{yx} y τ_{xy} en una viga" deben causar deformaciones angulares. Como se indica en la figura V-7, las distorsiones por corte máximas ocurren en en $y = 0$ y ninguna distorsión tiene lugar en $y = \pm h/2$. Esto alabea la sección inicialmente plana de la viga y contradice la suposición básica de la teoría técnica de la flexión: "Secciones planas de una viga normales a su eje, permanecen planas después de que la viga se flexiona".

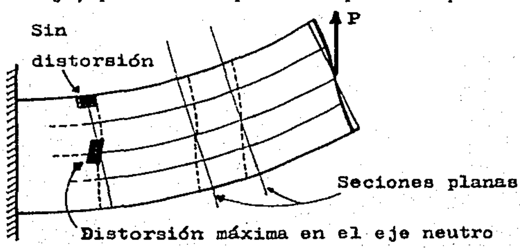


Fig. V-7. Distorsión por corte en una viga.

Por los métodos de la elásticidad se puede demostrar que estas distorsiones por corte de las secciones planas son despreciables en el caso de elementos delgados; la teoría técnica es completamente adecuada si la longitud de un elemento es al menos dos o más veces mayor que su peralte total. Esta conclusión es de gran importancia, puesto que significa que la existencia de una fuerza cortante no invalida las expresiones para los esfuerzos por flexión deducidas en el capítulo III . También es importante observar que, en el punto de aplicación de una carga, así como en un extremo empotrado se producen alteraciones adicionales locales de los esfuerzos.

CAP. VI. TORSION

VI-1. TORSION ELASTICA EN BARRAS DE SECCION CIRCULAR. ESFUERZOS, DEFORMACIONES Y ANGULO DE ROTACION. DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE BARRAS DE SECCION CIRCULAR.

En este artículo se estudian elementos con sección transversal circular maciza o hueca, sometidos unicamente a un momento que actúa con respecto a su eje longitudinal, es decir, un momento o par que produce torsión al elemento.

En este capítulo las barras eje se supondrán "sin peso" o sostenidas a intervalos suficientes para hacer despreciable el efecto de flexión. Por ahora se excluirán las fuerzas axiales que puedan actuar simultáneamente en el miembro.

Para analizar miembros sometidos a torsión se sigue el procedimiento indicado a continuación:

a). Revisar el equilibrio del sistema en conjunto.

b). Pasar un plano de corte perpendicular al eje del miembro.

c). Eliminar todo lo que esta a un lado de la sección y determinar el momento resistente interno necesario para mantener el equilibrio de la parte aislada.

d). Para calcular este momento torsionante, en miembros estáticamente determinados sólo se requiere una ecuación de estática $\Sigma M_x = 0$, estando el eje x dirigido a lo largo del elemento.

Por otra parte, para establecer una relación entre el MOMENTO TORSIONANTE INTERNO y los ESFUERZOS CORTANTES en miembros de sección circular y tubos redondos es necesario hacer varias consideraciones;

1.- Una sección transversal plana, perpendicular al eje de un miembro de sección circular, permanece plana después de la aplicación de un momento de torsión.

2.- En miembros de sección circular que se someten a un momento torsionante la deformación angular γ, varía linealmente desde su eje longitudinal, Fig. VI-1.

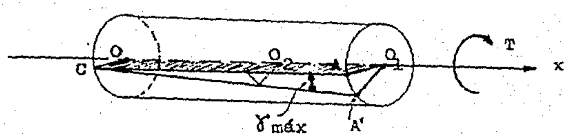


Fig. VI. Variación de la deformación angular en un miembro circular sometido a torsión.

3.- En el caso elástico, puesto que "el esfuerzo es proporcional a la deformación" y "esta última varía linealmente desde el centro", los esfuerzos variarán linealmente desde el eje longitudinal o centroidal de un miembro circular.

Los esfuerzos inducidos por las deformaciones supuestas son esfuerzos cortantes y actúan en un plano paralelo a la sección y normal al eje de la barra. La variación del esfuerzo cortante se ilustra en la Fig. VI-2.

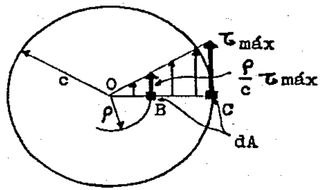


Fig. VI-2. Variación del esfuerzo cortante en el intervalo elástico (miembro circular).

Tomando en cuenta dicha variación lineal del esfuerzo, podemos calcular en cualquier punto arbitrario a una distancia ρ desde "O", el valor del esfuerzo cortante:

$$\frac{\tau_{máx}}{c} = \frac{\tau}{\rho}$$

$$\tau = \frac{\rho}{c}\,\tau_{máx} \qquad \text{(VI-1)}$$

Una vez establecida la distribución de esfuerzos en una sección, se podrá expresar la resistencia al momento de torsión -- aplicado en función del esfuerzo. La resistencia a dicho momento así desarrollada debe ser equivalente al momento torsionante interno, miembro derecho de la ecuación VI-2.

$$T = \left(\int_A \frac{\rho}{c} \tau_{máx} \right) (dA) (\rho) \qquad (VI-2)$$

En una sección transversal dada $\tau_{máx}$ y c son constantes,- de aquí que la relación anterior se puede expresar por:

$$T = \frac{\tau_{máx}}{c} \int_A \rho^2 \, dA \qquad (VI-3)$$

Como $\int_A \rho^2 \, dA = J$ es una constante para una área particular; recibe el nombre de MOMENTO POLAR DE INERCIA.

Utilizando el símbolo del momento polar de inercia, J, es-- cribimos de nuevo la ecuación general de la torsión[+].

$$\tau_{máx} = \frac{T\,c}{J} \qquad (VI-4)$$

La ecuación VI-4, expresa el esfuerzo cortante máximo en función del momento de torsión resistente y las dimensiones del -- elemento.

[+] Esta fórmula fue deducida por C. A. Coulomb, un ingeniero -- fracés, alrededor de 1775.

Una relación más general que la ec. VI-4, para el esfuerzo cortante τ en un punto a una distancia ρ del centro de la sección transversal es:

$$\tau = \frac{\rho}{c}\,\tau_{máx} = \frac{\rho}{c}\left(\frac{T\,c}{J}\right) = \frac{T\rho}{J} \qquad (\text{VI-5})$$

Las ecuaciones VI-4 y VI-5 son aplicables con igual rigor a los TUBOS de sección circular, puesto que se aplican las mismas hipótesis que se utilizan en la deducción anterior. Sin embargo, es necesario modificar J.

Relación de fórmulas para calcular el momento polar de inercia de las diferentes secciones:

Momento polar de inercia para una sección transversal circular,

$$J = \frac{\pi\, c^4}{2} = \frac{\pi\, d^4}{32} \qquad (\text{VI-6})$$

donde d es el diámetro de la barra de sección transversal maciza. Por tanto, $c = d/2$.

Momento polar de inercia para un tubo circular,

$$J = \frac{\pi}{2}\,(c^4 - b^4) = \frac{\pi}{32}\,(D^4 - d^4) \qquad (\text{VI-7})$$

donde b es el radio interior de un tubo.

Momento polar de inercia para tubos de espesor delgado, o sea que b es aproximadamente igual a c y $c - b = t$, el grueso del tubo,

$$J \doteq 2\pi c^4 t \qquad (\text{VI-8})$$

<u>Angulo de rotación</u> (ϕ). En este artículo estudiaremos el método para hallar el ángulo de torsión de ejes sometidos a cargas torsionantes. A continuación se mencionan algunas aplicaciones;

i). Para prever el torsido de una barra, ya que no basta diseñarla sólo para una resistencia suficiente, sino que no se debe deformar excesivamente.

ii). La deformación angular por torsión de miembros es necesaria para tratar problemas torsionales estáticamente indeterminados.

iii). Las magnitudes de las rotaciones angulares de los ejes son necesarias en el análisis de la vibración torsional de maquinaria.

En el elemento que se representa en la Fig. VI-3, una línea o "fibra" como AB inicialmente es paralela al eje de la barra. Después de aplicar el momento de torsión, asume la nueva posición AD.

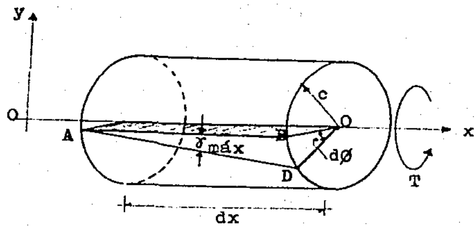


Fig. VI-3. Elemento infinitesimal de una barra sometida a -- torsión.

Representando el ángulo pequeño $\widehat{ABD}$ por $\gamma_{máx}$, por geometría podemos obtener el arco $\widehat{BD}$, de las dos formas siguientes:

$$\text{arco } \widehat{BD} = (dx)(\gamma_{máx})$$

$$\text{arco } \widehat{BD} = (c)(d\phi)$$

Por consiguiente,

$$dx\ (\gamma_{máx}) = c\ (d\phi) \qquad (VI\text{-}9)$$

Considerando el comportamiento del material en el rango elás tico, es aplicable la ley de Hooke;

$$\gamma_{máx} = \frac{\tau_{máx}}{G} \qquad (VI\text{-}10)$$

Además, de acuerdo con la ec. VI-4,

$$\tau_{máx} = \frac{T\,c}{J}$$

sustituyendo esta expresión en la ec. VI-10,

$$\gamma_{máx} = \frac{T\,c}{J(G)}$$

sustituyendo este valor de $\gamma_{máx}$ en la ec. VI-9 y simplificando;

$$dx\left(\frac{T\,c}{J\,G}\right) = c\,(d\phi)$$

$$d\phi = \frac{T\,dx}{J\,G} \qquad (VI-11)$$

Para hallar el ángulo total de torsión, ϕ, entre dos secciones A y B de una barra eje, se deben sumar las rotaciones de todos los elementos

$$\phi = \int_0^x \frac{T(x)}{J(x)\,G}\,dx + C_1 \qquad (VI-12)$$

Esta es la ecuación general para obtenre el ángulo de torsión en una sección cualquiera de una barra de material linealmente elástico. En la que;

ϕ – es el ángulo de torsión expresado en radianes, y su sentido coincide con el del momento de torsión aplicado.

T - es el momento torsionante interno, que puede variar a lo largo de la barra.

J - es el momento polar de inercia, el cual también puede variar a lo largo de la barra.

C_1 - es una constante de integración y representa el ángulo de torsión en el origen.

Para una barra que transmite un momento de torsión constante, T. Con el momento polar de inercia, de su sección transversal, constante, J. Y sin rotación en su frontera, $C_1 = 0$, la ecuación VI-12 se anota de la siguiente manera,

$$\phi = \frac{T\,L}{J\,G} \qquad \text{(VI-13)}$$

Una aplicación muy importante de esta ecuación, es la que nos permite calcular el módulo de elasticidad al esfuerzo cortante, G, o sea,

$$G = \frac{T\,L}{J\,\phi}$$

Esto se logra aplicando un momento de torsión conocido T, a una barra eje, el valor de J se calcula a partir de las dimensiones de la probeta, en la que puede medirse la rotación relativa, ϕ, entre dos secciones planas a una distancia L.

Dimensionamiento y revisión de barras de sección circular sometidas a torsión. En el diseño de miembros por RESISTENCIA se deben selecionar esfuerzos cortantes permisibles. Estos dependen de la información experimental disponible y de la aplicación proyectada.

Una vez que se sabe el momento de torsión que va a transmitir una barra eje y que se selecciona el esfuerzo cortante máximo, las dimensiones del miembro quedan determinadas. Por tanto, de la ecuación VI-4,

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\text{máx}}} \qquad \text{(VI-14)}$$

donde J/c es el parámetro del que depende la resistencia elástica de un eje. En el caso de una barra cargada axialmente, tal parametro es el área transversal del miembro.

Para el caso de una barra maciza, $J/c = \pi c^3/2$, donde "c" es el radio exterior. Utilizando esta expresión y la ec. VI-14, se determina el radio que se requiere en un eje. Si se trata de una barra hueca, tubos de diversas dimensiones pueden proporcionar el mismo valor numérico de J/c , de manera que el problema tiene un número infinito de soluciones.

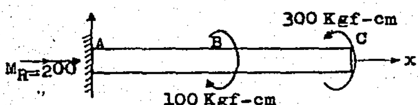
En el diseño por RIGIDES la ec. VI-13, es una relación muy importante,

$$\phi = \frac{T\,L}{J\,G}$$

Esta expresión nos permite limitar la magnitud de la torsión -- que puede ocurrir en la longitud de una barra eje. Para tal a-- plicación T, L y G son cantidades conocidas y la solución de la ecuación VI-13 da J. Esto fija el diámetro de la barra requerida (véase las fórmulas para obtenr el momento polar de inercia). Obsérvese que, por los requisitos de rigidez, J, y no J/c del requisito de resistencia, es el parámetro significativo. El término JG se llama RIGIDES A LA TORSION del eje.

EJEMPLO VI-1

Para la barra eje que se muestra en la figura, con un diámetro d = 1.0 cm, obtenga el valor del esfuerzo cortante máximo- desde A hasta C.



Cálculo de la reacción,

$$\Sigma M_x = 0\ ;\quad M_R + 100 - 300 = 0$$

$$M_R = 200\ \text{Kgf-cm}$$

El momento máximo es;

$$T_{máx} = 300\ \text{Kgf-cm}$$

Cálculo del momento polar de inercia,

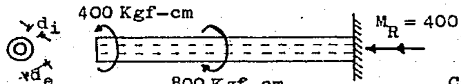
$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi (1.0)^4}{32} = 0.098175 \text{ cm}^4$$

Sustituyendo en la ecuación general de la torsión,

$$\tau_{máx} = \frac{T c}{J} = \frac{300 \; (1.0/2)}{0.098175} = 1\,527.9 \text{ Kgf/ cm}^2$$

EJEMPLO VI-2

Para el tubo largo que se muestra en la figura, de 2.5 cm de diametro exterior y con 2.3 cm de diametro interior, determinar los esfuerzos cortantes en el interior y exterior de la pared.

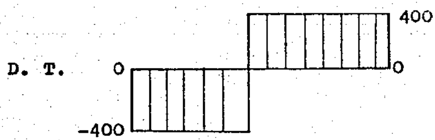


Calculo de la reacción,

$\Sigma M_x = 0$;

$$-400 + 800 - M_R = 0$$

$$M_R = 400 \text{ Kgf-cm}$$



Datos: $d_e = 2.5$ cm ; $d_i = 2.3$ cm y $T_{máx} = 400$ kgf-cm

Cálculo del momento polar de inercia de la sección transversal del tubo,

$$J = \frac{\pi}{32}\,(\,D^4 - d^4) = \frac{\pi}{32}\,(\,2.5^4 - 2.3^4\,) = 1.09\ cm^4$$

Cálculo de los esfuerzos cortantes;

$$\tau_{ext} = \frac{T\,c}{J}$$

$$\tau_{ext} = \frac{(400)(2.5/2)}{1.09} = 458\ Kgf/cm^2$$

$$\tau_{int} = \frac{T\,\rho}{J}$$

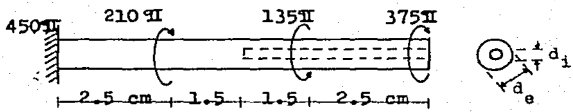
$$\tau_{int} = \frac{(400)(2.3/2)}{1.09} = 422\ Kgf/cm^2$$

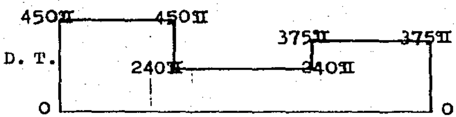
EJEMPLO VI-3

a). Determinar el esfuerzo cortante máximo en la barra sometida a los momentos indicados en la figura. b). Halle el ángulo de torsión en grados entre los dos extremos. Tome $G = 0.84 \times 10^{+6}$ Kgf/cm^2.

Datos: $d_e = 5.0$ cm

$d_i = 2.5$ cm





Cálculo de la reacción.

$\Sigma M_T = 0$;

$M_R - 210\pi + 135\pi - 375\pi = 0$;

$M_R = 450\pi$ Kgf-cm .

Para el intervalo $0 \leq x \leq 2.5$;

Determinamos el momento polar de inercia,

$$J = \frac{\pi}{32}(5)^4 = 19.53\pi \text{ cm}^4$$

Sustituimos estos valores, en las expresiones de esfuerzo cortante y de ángulo de torsión:

$$\tau = \frac{450\pi(5/2)}{19.53\pi} = 57.6 \text{ Kgf/cm}^2 \quad ; \quad \phi_1 = \frac{450\pi(2.5)}{(19.53\pi)(0.84 \times 10^6)}$$

$$\tau = 57.6 \text{ Kgf/cm}^2 \qquad \phi_1 = 68.57 \times 10^{-6} \text{ Rad.}$$

Para el intervalo $2.5 \leq x \leq 4.0$; con el mismo valor de "J"

$$\tau = \frac{240\pi(5/2)}{19.53} \quad ; \quad \phi_2 = \frac{240\pi(2.5)}{(19.53\pi)(0.84 \times 10^6)} \quad ;$$

$$\tau = 30.72 \text{ Kgf/cm}^2 \qquad \phi_2 = 21.94 \times 10^{-6} \text{ Rad.}$$

Para el intervalo $4.0 \leq x \leq 5.5$, determinamos el momento polar de inercia,

$$J = \frac{\pi}{32}(5^4 - 2.5^4) \quad ; \qquad J = 18.31\,\pi \;\; cm^4$$

Sustituyendo en las expresiones correspondientes,

$$\tau = \frac{(240\,\pi)(5/2)}{18.31\,\pi} \quad ; \qquad \phi_3 = \frac{(240\,\pi)(1.5)}{18.31\,\pi(0.84 \times 10^6)} \quad ;$$

$$\tau = 32.77 \text{ Kgf/cm}^2 \qquad \phi_3 = 23.4 \times 10^{-6} \text{ Rad.}$$

Por último, para el intervalo $5.5 \leq x \leq 8.0$, utilizamos el mismo valor del momento polar de inercia,

$$\tau = \frac{(375\,\pi)(5/2)}{18.31\,\pi} \quad ; \qquad \phi_4 = \frac{(375\,\pi)(2.5)}{18.31\,\pi\,(0.84 \times 10^6)} \quad ;$$

$$\tau = 51.20 \text{ Kgf/cm}^2 \qquad \phi_4 = 61.0 \times 10^{-6} \text{ Rad.}$$

Entonces el esfuerzo cortante máximo, esta en el primer intervalo y es igual a, $\tau = 57.6$ Kgf/cm^2.

El ángulo de torsión, entre los extremos de la barra se obtiene sumando los ángulos en todos los intervalos,

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = 174.88 \times 10^{-6} \text{ Rad.}$$

O bien, $\underline{\underline{\phi = 0.01^\circ}}$

VI-2. SOLUCION DE PROBLEMAS HIPERESTATICOS SENCILLOS MEDIANTE - COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES.

En todos los problemas hiperestáticos[+] son válidas las ecuaciones de equilibrio estático. Estas ecuaciones son necesarias- pero no suficientes para resolver este tipo de problemas. Las - ecuaciones complementarias se establecen partiendo de consideraciones de la geometría de la deformación. En sistemas estructurales, sometidos a momento torsionanate, por necesidades físicas, ciertos elementos o partes debe torcerse (girar) juntos al mismo tiempo, o bien, permanecer fijos. Formulando tales observaciones cuantitativamente se obtienen las ecuaciones adicionales requeridas.

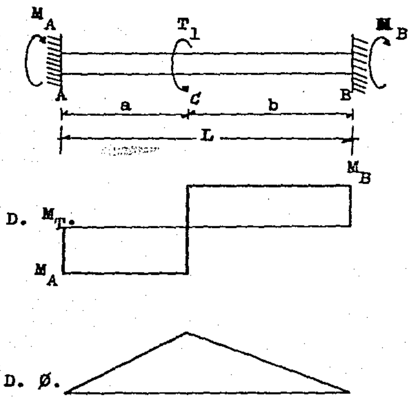
En esta sección se estudian los procedim ientos para el análisis de sistemas estáticamente indeterminados aplicables a materiales de respuesta elástica (lineal y no lineal). En el análisis inelástico (plástico) de los sistemas hiperestáticos tales procedim ientos pueden llegar a ser complejos.

Las expresiones necesarias para determinar la deformación angular y el ángulo de rotación de barras sometidas a torsión, -- fuerón desarrolladas en la sección anterior. Ahora se aplican - las mismas relaciones excepto por la designación de los momentos que actúan en tales miembros como incógnitas, haciendo uso- de símbolos algebraicos apropiados.

[+] En la sec. II-5 se define Hiperestaticidad.

PROBLEMA VI – 4.

Una barra redonda de área transversal constante está empotrada por ambos extremos y bajo la acción de un momento de torsión T_1, como se indica en la figura. Determínense las reacciones, suponiendo un comportamiento línealmente elástico del material.



Por la condición de equilibri; $\Sigma M_T = 0$;

$$M_A - T_1 + M_B = 0 \quad \text{-----(I)}$$

Fórmula para obtene el ángulo de torsión,

$$\phi = \frac{T\,(l)}{J\,G}$$

Igualando los ángulos de torsión en el punto "C",

$$\frac{M_A(a)}{\cancel{J}\,\cancel{G}} = \frac{M_B(b)}{\cancel{J}\,\cancel{G}}$$

de donde,

$$M_A(a) = M_B(b) \quad \text{--------------- (II)}$$

despejando,

$$M_B = \frac{a}{b}\,M_A \quad \text{------------------ (II')}$$

Sustituyendo en la ecuación (I),

$$M_A - T_1 + \frac{a}{b} M_A = 0 \qquad ; \qquad (1 + \frac{a}{b}) M_A - T_1 = 0$$

$$(\frac{b + a}{b}) M_A = T_1 \qquad ; \qquad M_A = \frac{T_1 \; b}{b + a}$$

pero como, $b + a = L$

$$M_A = \frac{T_1 \; b}{L}$$

Para determinar la otra reacción, sustituimos este último valor en la ecuación (II'),

$$M_B = \frac{a}{b} (\frac{T_1 \; b}{b + a})$$

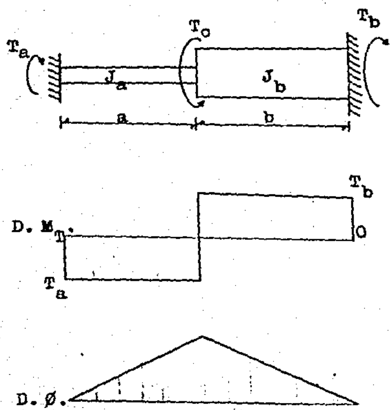
$$M_B = \frac{T_1 \; a}{b + a}$$

Sustituyendo el valor, $L = b + a$

$$M_B = \frac{T_1 \; a}{L}$$

PROBLEMA VI - 5.

Una barra redonda con dos secciones transversales está empotrada por ambos extremos y bajo la acción de un momento de torsión T_o , como se muestra en la figura. Suponiendo un comportamiento linealmente elástico del material, determínense las reacciones en los apoyos. Trácese los diagramas de momento torsionante T(x) y de ángulo de torsión Ø(x).



De la condición de equilibrio, $\Sigma M_T = 0$;

$$T_a + T_b = T_o \quad \text{------ (1)}$$

Por las condiciones de apoyo sabemos que el ángulo de torsión en ambos extremos es cero, $\varnothing_a = \varnothing_b = 0$

De la suma de los ángulos de torsión, de un extremo a otro, obtenemos otra ecuación,

$$\varnothing_a^{T_o} + \varnothing_a^{T_b} + \varnothing_b^{T_b} = 0 \quad \text{---(2)}$$

Sustituyendo los valores correspondientes, tenemos:

$$-\frac{T_o(a)}{G\,J_a} + \frac{T_b(a)}{G\,J_a} + \frac{T_b(b)}{G\,J_b} = 0$$

De donde,

$$\frac{T_b\,(a)}{J_a} + \frac{T_b\,(b)}{J_b} = \frac{T_o\,(a)}{J_a}$$

$$T_b\left(\frac{a}{J_a} + \frac{b}{J_b}\right) = \frac{T_o a}{J_a}$$

Despejando:

$$T_b = \frac{\dfrac{T_o a}{J_a}}{\dfrac{J_b a + J_a b}{J_a\,J_b}} = \frac{T_o a\,(J_b)}{J_b a + J_a b}$$

Por tanto tenemos,

$$T_b = \frac{T_o}{1 + \dfrac{b\,J_a}{a\,J_b}}$$

Para determinar la otra reacción, sustituimos este valor en la-ecuación (1),

$$T_a + \left(\frac{T_o}{1 + \dfrac{b\,J_a}{a\,J_b}}\right) = T_o$$

$$T_a = T_o - \frac{T_o}{1 + \dfrac{b\,J_a}{a\,J_b}} = T_o\left(1 - \frac{1}{1 + \dfrac{b\,J_a}{a\,J_b}}\right)$$

Obteniendo el inverso en ambos miembros de la ecuación,

$$\frac{1}{T_a} = \frac{1}{T_o}\left(\frac{1}{\frac{b\,J_a}{a\,J_b}} + 1\right) = \frac{1}{T_o}\left(\frac{a\,J_b}{b\,J_a} + 1\right)$$

Simplificando, determinamos el momento resistente en el apoyo izquierdo,

$$T_a = \frac{T_o}{1 + \frac{a\,J_b}{b\,J_a}}$$

VI-3. TORSION ELASTICA EN BARRAS DE SECCION NO CIRCULAR. ANALOGIA DE LA MEMBRANA.

Cuando se aplica un momento torsionante a un miembro no circular macizo, las secciones perpendiculares a su eje se alabean, esto quiere decir que las suposiciones básicas enunciadas para miembros de sección circular no se cumplen.

Además, para la sección circular el esfuerzo es máximo en el punto más alejado, mientras que para una sección rectangular el esfuerzo es cero en dicho punto y máximo en los puntos medios de los lados de mayor longitud. En la figura VI-4 se muestra la distribución de esfuerzos cortantes, para una sección rectangular, a lo largo de tres líneas radiales que parten desde el centro.

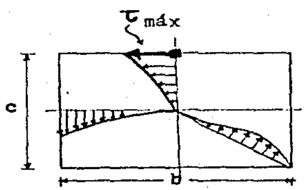


Fig. VI-4. Distribución de esfuerzos cortantes en una barra de sección rectangular sometida a torsión.

El tratamiento analítico de estos problemas es complicado, sin embargo, se han desarrollado fórmulas para el esfuerzo cortante máximo (Fig. VI-4) y para el ángulo de torsión, véase las ecuaciones VI-15.

$$\tau_{máx} = \frac{T}{\alpha\, b\, c^3} \qquad y \qquad \phi = \frac{T\, L}{\beta\, b\, c^3 G} \qquad (VI-15)$$

donde, T - es el momento de torsión aplicado

b - es el lado mayor de la sección rectangular

c - es el lado menor de la sección rectangular

α y β - son parámetros que dependen de la relación b/c. Algunos de estos valores se presentan en la tabla siguiente.

b/c	1.000	1.500	2.000	3.000	6.000	10.000	∞
α	0.208	0.231	0.246	0.267	0.299	0.312	0.333
β	0.141	0.196	0.229	0.263	0.299	0.312	0.333

TABLA DE COEFICIENTES PARA BARRAS EJE RECTANGULARES

Analogía de la membrana. Para casos que no se pueden resolver matemáticamente en forma conveniente se ha ideado el método denominado "analogía de la membrana". Además de su valor en aplicaciones experimentales, es un instrumento mental muy útil para visualizar esfuerzos y capacidades de momento torsionante de miembros.

Resulta que la solución de la ecuación diferencial que debe resolverse en el problema de la torsión elástica es matemáticamente igual al de la ecuación para una membrana delgada (tal como una película de jabón), formada y ligeramente estirada sobre un agujero de geometría semejante a la sección transversal de la barra en estudio.

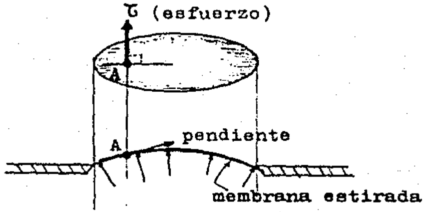


Fig. VI-5. Analogía de la membrana

En esta figura se pueden observar los siguientes puntos;

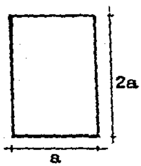
1. El esfuerzo cortante en un punto es proporcional a la pendiente de la membrana estirada en el mismo punto.

2. La dirección de un esfuerzo cortante particular en un punto es perpendicular a la de la pendiente de la membrana en el mismo punto.

3. El doble del volumen encerrado por la membrana es proporcional al momento torsionante que resiste la sección.

EJEMPLO VI - 6.

Una barra rectangular de un material linealmente elástico y cuya sección transversal tiene las dimensiones de a y 2a --- (vea la figura) ha de ser sustituida por otra barra circular maciza del mismo material. Determinar el diámetro mínimo $d_{mín}$ de esta barra, de manera que para un momento de torsión aplicado - ni el esfuerzo cortante máximo ni el ángulo de torsión excedan a los valores correspondientes al diseño original.



Determinamos la relación b/c ;

$$\frac{b}{c} = \frac{2\,a}{a} = 2.0$$

de la tabla, obtenemos el valor de los coeficientes,

$$\alpha = 0.246 \quad y \quad \beta = 0.229$$

sustituyendo en las ecuaciones VI-15, se tiene;

$$\tau_{máx} = \frac{T}{\alpha\, b\, c^2} = \frac{T}{0.246\,(2a)\,a^2} \quad ; \quad \tau_{máx} = \frac{T}{0.492\;a^3}$$

$$\phi = \frac{T\,L}{\beta\, b\, c^3\, G} = \frac{T\,L}{0.229\,(2a)\,a^3\,G} \quad ; \quad \phi = \frac{T\,L}{0.458\;a^4\;G}$$

Para la sección circular tenemos que la ecuación general de la torsión es la siguiente:

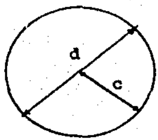
$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{máx}}$$

entonces podemos anotar la siguiente relación,

$$\frac{T}{\tau_{máx}} = 0.492\ a^3$$

y partiendo de la definición de momento polar de inercia para una sección circular, escribimos la siguiente relación:

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi c^3}{2}$$



Igualando estas expresiones tenemos;

$$\frac{\pi c^3}{2} = 0.492\ a^3$$

De donde;

$$c^3 = \frac{2\,(0.492\ a^3)}{\pi} = 0.3132\ a^3$$

Por tanto, el radio mínimo necesario para no exceder el esfuerzo máximo es igual a; $c = 0.68\,a$

Por otro lado, la expresión para el ángulo de torsión de una barra de sección circular es la siguiente:

$$\phi = \frac{T\ L}{J\ G}$$

y el valor del ángulo de rotación que no debemos exceder es:

$$\phi = \frac{T}{0.458\ a^4\ G}$$

igualando estas expresiónes, tenemos:

$$\frac{T\,L}{J\,\phi} = \frac{T\,L}{0.458\,a^4 G} \qquad ; \qquad \frac{1}{J} = \frac{1}{0.458\,a^4}$$

sustituimos la expresión del momento polar de inercia,

$$\frac{1}{\frac{\pi\ c^4}{2}} = \frac{1}{0.458\ a^4} \qquad ; \qquad 2\,(0.458\,a^4\,) = \pi\,c^4$$

de donde, $c^4 = 0.2915\ a^4$; $c = 0.735\ a$

este valor del radio nos asegura que no exederemos el valor del ángulo de rotación especificado.

Si comparamos los dos radios obtenidos, observamos que este- último valor nos garantiza que no excederemos ni los esfuerzos- cortantes ni el ángulo de rotación, por tanto, determinamos el- diámetro mínimo ($d_{mín}$) de la barra circular, partiendo de este dato,

$$d_{mín} = 2\,c \qquad ; \qquad d_{mín} = 2\,(\,0.735\ a\,)$$

$$\underline{\underline{d_{mín} = 1.47\ a}}$$

VI-4. TORSION ELASTICA EN BARRAS DE PARED DELGADA. ESFUERZOS Y DEFORMACIONES.

Los tubos de pared delgada (de cualquier forma), se pueden analizar de manera sencilla para determinar la magnitud de los esfuerzos cortantes y el ángulo de torsión producidos por un momento torsionante aplicado.

Las formas típicas de los perfiles laminados, doblados, estirados y prensados se dan en la Fig. VI-6. La particularidad geométrica de estos perfiles consiste en que el espesor es muy inferior a las otras dimensiones lineales.

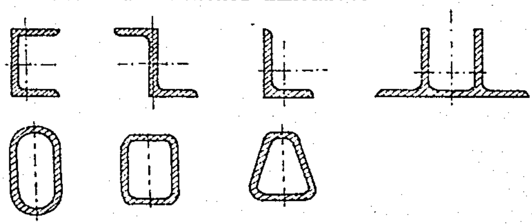


Fig. VI-6. Secciones típicas de barras de pared delgada.

Aislemos una superficie diferencial de un tubo sometido a torsión, como la que se indica a una escala mayor en la figura VI-7. Tal elemento debe estar en equilibrio por la acción de las fuerzas F_1, F_2, F_3 y F_4. Estas fuerzas son iguales al producto de los esfuerzos cortantes por las áreas respectivas.

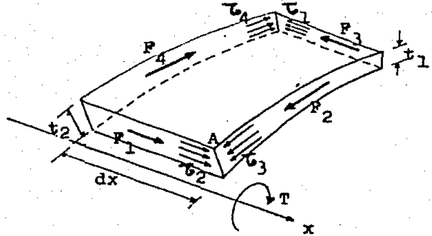


Fig. VI-7. Elemento diferencial de un tubo de pared delgada-sometido a torsión

Del equilibrio de fuerzas, $\Sigma F_x = 0$; $F_1 = F_3$

pero, $F_1 = \tau_2 t_2 dx$ y $F_3 = \tau_1 t_1 dx$

Por tanto, $\tau_2 t_2 dx = \tau_1 t_1 dx$

Como los planos de sección longitudinales fueron tomados con una separación arbitraria, se deduce de las relaciones anteriores que el producto del esfuerse cortante por el espesor de la-pared no cambia, es decir, es constante, en cualquiera de tales planos. Esta constante es el flujo de cortante y se representa-por "q". Véase la sección V-2.

$$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2 = \tau t = q \qquad \text{(VI-16)}$$

Como los esfuerzos cortantes en planos mutuamente perpendiculares son iguales en una esquina o vértice (ver secc. I-6, ecuación I-11). Entonces, en un punto como el "A" de la fig. VI-7, $\tau_2 = \tau_3$ y $\tau_1 = \tau_4$. Por consiguiente;

$$\tau_4 t_1 = \tau_3 t_2 = \tau t = q \qquad (\text{VI-17})$$

Este resultado es muy importante ya que nos permite concluir que el flujo de cortante, también es constante en el plano de una sección perpendicular al eje de un miembro.

Ahora bien, si multiplicamos este valor del flujo de cortante por la longitud elemental ds del perímetro, obtenemos una fuerza elemental (q ds). El producto de dicha fuerza infinitesimal q ds por la distancia, r, desde cierto punto conveniente, tal como el "O", Fig. VI-8, da la contribución de un elemento a la resistencia al momento de torsión aplicado T.

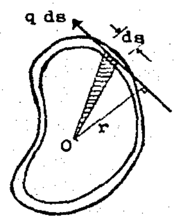


Fig. VI-8. Contribución de un elemto infinitesimal, de un tubo de pared delgada, a resitir la torsión.

Integrando queda,

$$\oint r\, q\, ds = T$$

El proceso de integración se efectúa alrededor del tubo y a lo-largo de la línea central de la sección transversal de la pa---red;

$$q \oint r\, ds = T \qquad (\text{VI-18})$$

Sin embargo, se sabe que la integral completa es el doble del -área total, A, limitada por la línea central de la sección de-la sección de la pared del tubo, es decir,

$$\oint r\, ds = 2A$$

sustituyendo este valor en la ec. VI-18,

$$q\,(2A) = T$$

Por consiguiente,

$$q = \frac{T}{2A} \qquad (\text{VI-19})$$

Esta ecuación[+] se aplica sólo a tubos de pared delgada. El -

---

[+] La ecuación VI-19 se llama a veces "fórmula de Bredt" en ho--nor del ingeniero alemán que la origino.

área A es aproximadamente el promedio de las áreas transversales limitadas por las superficies interior y exterior del tubo, o como se indicó antes, es el área limitada por la línea central de la sección de la pared.

<u>Esfuerzo cortante en un tubo sometido a torsión</u>. Para determinar el valor de este esfuerzo en un punto de un tubo, donde el espesor de la pared es "t", partimos de la definición del flujo de cortante,

$$\tau = \frac{q}{t} \qquad (VI-20)$$

En el intervalo elástico las ecuaciones VI-19 y VI-20 son aplicables a cualquier forma de tubo.

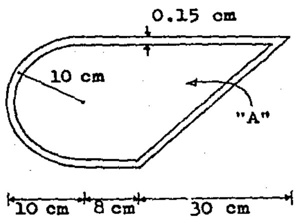
<u>Angulo de torsión en un tubo</u>. Para un material linealmente elástico, el ángulo de torsión de un tubo se puede hallar aplicando el principio de consevación de la energía.

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{4A^2G} \quad \frac{ds}{t} \qquad (VI-21)$$

La ecuación VI-21 nos da el valor del ángulo de torsión por unidad de longitud.

PROBLEMA VI – 7.

Para el elemento sometido a torsión, cuya sección transversal se muestra en la figura, hállese el esfuerzo cortante máximo y el ángulo de torsión por unidad de longitud, debidos a un momento torsionante de 1 250 Kgf-cm. Despreciense las concentraciones de esfuerzos.



Sabemos que,

$$q = \frac{T}{2A}$$

y además,

$$\tau = \frac{q}{t}$$

Por tanto, obtenemos una expresión del esfuerzo cortante en función de "q",

$$\tau = \frac{T}{2At}$$

Determinamos el área de la sección transversal,

$$A = \frac{\pi(10)^2}{2} + 20(8) + \frac{30(20)}{2} = 617 \text{ cm}^2$$

Sustituyendo en la expresión anterior, los valores correspondientes,

$$\tau = \frac{1\,250}{2\,(617)(0.15)} = 6.75 \text{ Kgf/cm}^2$$

Para determinar el ángulo de torsión por unidad de longitud, tenemos la siguiente expresión.

$$\frac{\phi}{L} = \frac{T}{4\,A^2\,G} \; \frac{S}{t}$$

Calculamos el perímetro, S.

$$S = (\pi\,D)/2 + 2\,(8) + 30 + \sqrt{(30)^2 + (20)^2}$$

$$S = \frac{(3.1416)(10)}{2} + 16 + 30 + \sqrt{1\,300} = 97.76 \text{ cm}$$

Suponiendo un valor de $G = 0.84 \times 10^{+6}$ Kgf/cm^2, y sustituyendo en la fórmula,

$$\frac{\phi}{L} = \frac{1\,250}{4(617)^2(0.84 \times 10^{+6})} \; \frac{97.76}{0.15}$$

$$\frac{\phi}{L} = 0.63 \times 10^{-6} \text{ Rad/cm}$$

VI-5. TORSION INELASTICA: ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN BARRAS - DE SECCION CIRCULAR. ANALOGIA DEL MONTON DE ARENA.

Ahora la solución al problema de la torsión se ampliará hasta incluir el comportamiento inelástico (plástico) de un material. La suposición de variación lineal de la deformación desde el eje del elemento sigue siendo aplicable. Sólo la diferencia en las propiedades del mareria1 afectará dicha solución.

Algunas propiedades mecánicas posibles de materiales en corte, obtenidas, por ejmplo en experimentos con tubos de pared -- delgada a torsión, se muestran en la Fig. VI-9.

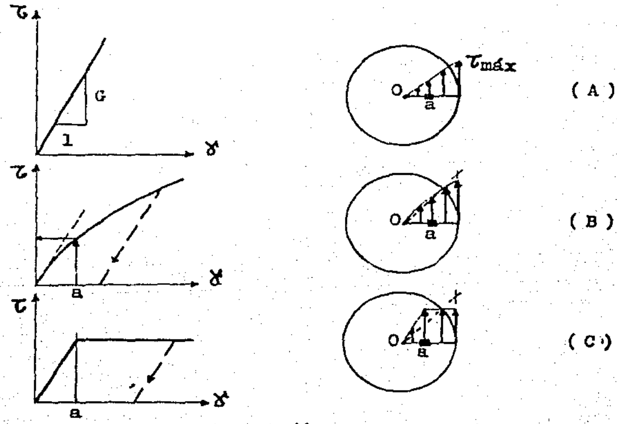


Fig. VI-9. Diagramas τ - γ y distribución de esfuerzos (cortantes) en barras circulares.

Los esfuerzos se determinan a partir de la deformación. Por-ejemplo, si en un elemento anular interior la deformación es --"a", Figs. VI-9(A) y (B), el esfuerzo correspondiente se halla-por el diagrama esfuerzo-deformación.

Una vez conocida la distribución de esfuerzos, el momento de torsión T transmitido por estos se halla como antes, o sea,

$$T = \int_A (\tau(dA))\,\rho \qquad (VI-22)$$

Tanto el procedimiento analítico como el gráfico se pueden -utilizar para evaluar esta integral.

Aunque no es lineal la distribución de esfuerzos cortantes -después de sobrepasar el límite elástico y no se aplica la fórmula de la torsión elástica, ecuación VI-4, algunas veces se --utiliza en el borde extremo de una barra eje para calcular un -esfuerzo ficticio correspondiente al momento torsionante último--mo, (véase la línea de trazos de las Figs. VI-9(B) y (C).

En el caso de un tubo de pared delgada, la distribución de -esfuerzos es aproximadamente la misma cualquiera que sean las -propiedades mecánicas del material, Fig. VI-10. Por esta razón, los experimentos con tubos de pared delgada se utilizan mucho -para determinar los diagrams esfuerzo-deformación al corte.

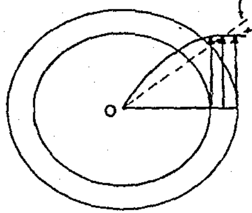


Fig. VI-10. En el caso de tubos de pared delgada es pequeña la diferencia entre los esfuerzos cortantes plásticos y elásticos.

Para determinar el grado de torsión de una barra o tubo circular, se puede utilizar la ecuación VI-9 en la siguiente forma

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\gamma_{máx}}{c} = \frac{\gamma_a}{\rho_a} \qquad (VI-23)$$

En este caso se debe emplear la deformación máxima por corte en "c", o bien la deformación en "ρ_a" determinada a partir del diagrama esfuerzo-deformación.

Analogía del monton de arena. Esta analogía ha sido desarrollada para analizar los problemas de torsión plástica. Y consiste en vertir arena seca sobre una superficie plana levantada o en alto, que tiene la forma de la sección transversal del elmento sometido a torsión. La superficie del monton o pila de arena así formada toma una pendiente constante. Por ejemplo, sobre un orificio circular se forma un cono y sobre una base cuadrada -- una piramide cuadrangular. La pendiente máxima constante de la-arena corresponde a la superficie límite de la membrana en la - analogía anterior. El volumen del monton de arena, y por consiguiente su peso, es proporcional al momento torsionante completamente plástico resistido por una sección. Todos los otros detalles relativos a la superficie de arena tienen la misma inter-- pretación que los de la analogía de la membrana.

CAP. VII. CONCLUSIONES

Es frecuente que al iniciar una carrera profesional, o una actividad cualquiera, se parta de bases no muy firmes, lo que trae como consecuencia que la superestructura pueda resultar incomprensible, y no tanto por que se trate de conceptos o procedimientos analíticos realmente dificiles. Entonces, para que este trabajo cumpla su cometido, es necesario que el alumno al hacer uso de él, haya aprobado todos sus cursos de matemáticas, de mecánica y de estructuras isostáticas, y lo más importante, que maneje con facilidad los conceptos fundamentales que se exponen en estas materias.

Para deducir la mayoría de las formulas en este curso, se recurre al Cálculo Diferencial e Integral, sin embargo, lo realmente importante es que se comprenda el "efecto" o comportamiento del material que se esta estudiando.

En este tipo de asignaturas no sólo es indispensable la participación en clase; es todavía más importante que el alumno recurra a los textos editados. Así como a los laboratorios de resistencia de materiales[+], esto con la finalidad de que vaya normando su propio criterio, acerca del comportamiento de los materiales más usuales en construcción, bajo las diferentes condiciones de carga.

Tomando en cuenta que la E.N.E.P. Aragón es una institución que tiene relativamente poco tiempo de haber iniciado sus actividades, sin duda su prestigio y aportes a la comunidad universitaria en particular, y en general al país son función directa del trabajo que desarrollemos los estudiantes y los profesionistas que de ella egresamos.

[+] Los principales laboratorios de resistencia de materiales se encuentran en la SCT, SARH, CFE, IMP, IPN, UNAM y en algunas importantes empresas constructoras.

T A B L A S

Número de designación	Diámetro nominal		Peso kg/m	NUMERO DE BARRAS										Áreas de acero en cm^2
	pulg	mm		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	1/4	6.4	0.248	0.32	0.64	0.96	1.28	1.60	1.92	2.24	2.56	2.88	3.20	
2.5	5/16	7.9	0.388	0.49	0.98	1.47	1.96	2.45	2.94	3.43	3.92	4.41	4.90	
3	3/8	9.5	0.559	0.71	1.42	2.13	2.84	3.55	4.26	4.97	5.68	6.39	7.20	
4	1/2	12.7	0.993	1.27	2.54	3.81	5.08	6.35	7.62	8.89	10.16	11.43	12.70	
5	5/8	15.9	1.552	1.98	3.96	5.94	7.92	9.90	11.88	13.86	15.84	17.82	19.80	
6	3/4	19.0	2.235	2.85	5.70	8.55	11.40	14.25	17.10	19.95	22.80	25.65	28.50	
7	7/8	22.2	3.042	3.88	7.76	11.64	15.52	19.40	23.28	27.16	31.04	34.92	38.80	
8	1	25.4	3.973	5.07	10.14	15.21	20.28	25.35	30.42	35.49	40.56	45.63	50.70	
9	1 1/8	28.6	5.028	6.41	12.82	19.23	25.64	32.05	38.46	44.87	51.28	57.69	64.10	
10	1 1/4	31.8	6.207	7.92	15.84	23.76	31.68	39.60	47.52	55.44	63.36	71.28	79.20	
11	1 3/8	34.9	7.511	9.58	19.16	28.74	38.32	47.90	57.48	67.06	76.64	86.22	95.80	
12	1 1/2	38.1	8.938	11.40	22.80	34.20	45.60	57.00	68.40	79.80	91.20	102.60	114.00	

Tabla 1. Diámetros, pesos y áreas de varillas.

Tamaño nominal*		Peso	Area	Peralte	Patín		Esp. del Alma	Eje X–X			Eje Y–Y		
					Ancho	Esp.		I	I/c	r	I	I/c	r
plg	mm	kg/m	cm^2	mm	mm	mm	mm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm
24 × 7 7/8	609.6 × 200.3	178.58	226.65	609.6	204	28.0	20.3	125 319.9	4 111.5	23.52	3533.8	345.8	3.96
		157.60	199.47	609.6	200	28.0	15.9	117 024.4	3 839.5	24.21	3284.1	327.7	4.06
24 × 7	609.6 × 177.8	148.82	188.71	609.6	184	22.1	19.0	98 722.5	3 238.1	22.99	2014.6	219.6	3.28
		133.93	169.68	609.6	181	22.1	15.8	92 824.5	3044.7	23.39	1893.9	209.8	3.35
		118.91	150.52	609.6	178	22.1	12.7	86 876.5	2 849.7	24.03	1 785.6	199.9	3.45
20 × 7	508 × 177.8	141.38	178.97	508.0	183	23.3	20.3	66 585.1	2622.0	19.28	2102.0	229.4	3.43
		126.49	160.00	508.0	179	23.3	16.6	62 506.0	2461.0	19.76	1956.3	217.9	3.50
20 × 6 1/4	508 × 158.8	111.61	141.29	508.0	162	20.0	16.3	52 591.3	2069.7	19.30	1 252.9	154.0	2.97
		97.33	123.10	508.0	159	20.0	12.7	48 678.6	1 915.7	19.89	1 161.3	145.8	3.07
18 × 6	457.2 × 152.4	104.17	132.00	457.2	159	17.6	18.1	38 189.5	1 669.8	17.02	1019.8	127.8	2.77
		81.40	102.84	457.2	152	17.6	11.7	33 111.5	1 448.6	17.96	882.4	116.3	2.92
15 × 5 1/2	381 × 139.7	74.41	94.13	381.0	143	15.8	13.9	20 025.1	1052.1	14.58	666.0	93.4	2.67
		63.84	80.58	381.0	140	15.8	10.4	18 369.3	965.2	15.11	607.7	86.8	2.74
12 × 5 1/4	304.8 × 133.4	74.41	94.00	304.8	139	16.7	17.5	12 553.6	824.3	11.56	666.0	93.0	2.67
		60.72	76.39	304.8	133	16.7	11.7	11 192.6	734.1	12.12	574.4	86.8	2.74
12 × 5	304.8 × 127	52.09	65.81	304.8	129	13.8	10.9	9 448.5	619.4	11.99	416.2	63.9	2.51
		47.32	59.74	304.8	127	13.8	8.9	8 982.3	589.9	12.27	395.4	62.3	2.56
10 × 4 5/8	254 × 117.5	52.09	65.94	254.0	126	12.5	15.1	6 068.7	478.5	9.60	353.8	55.7	2.31
		37.80	47.61	254.0	118	12.5	7.9	5 082.2	399.8	10.34	287.2	49.2	2.46
8 × 4	203.2 × 101.6	34.23	43.29	203.2	106	10.8	11.2	2 6[illegible]2.2	262.2	7.85	183.1	34.4	2.06
		27.38	34.45	203.2	102	10.8	6.9	2 368.4	232.7	8.28	158.2	31.1	2.13
7 × 3 5/8	177.8 × 92.1	29.76	37.61	177.8	98	9.9	11.4	1 744.0	196.6	6.81	129.0	26.2	1.88
		22.77	28.58	177.8	93	9.9	6.4	1 506.8	170.4	7.26	112.4	24.6	1.98
6 × 3 3/8	152.4 × 85.7	25.67	32.39	152.4	91	9.1	11.8	1 082.2	142.6	5.79	95.7	21.3	1.73
		18.60	23.29	152.4	85	9.1	5.8	907.4	119.6	6.25	74.9	18.0	1.83
5 × 3	127 × 76.2	21.95	27.68	127.0	83	8.3	12.6	624.4	98.3	4.75	70.8	16.4	1.60
		14.88	18.52	127.0	76	8.3	5.3	503.6	78.7	5.21	50.0	13.4	1.65
4 × 2 5/8	101.6 × 66.7	14.14	17.81	101.6	71	7.4	8.3	278.9	54.1	3.96	37.9	10.6	1.47
		11.46	14.26	101.6	68	7.4	4.8	249.7	49.2	4.17	32.1	9.5	1.50
3 × 2 3/8	76.2 × 60.3	11.16	14.00	76.2	64	6.6	8.9	120.7	31.1	2.92	24.6	7.7	1.32
		8.49	10.58	76.2	59	6.6	4.3	104.1	27.9	3.12	19.2	6.5	1.35

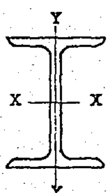


Tabla 2. Vigas I tipo estándar de acero.

Tamaño nominal*		Peso	Area	Peralte	Patín		Esp. del alma	Eje X-X			Eje Y-Y		
					Ancho	Esp.		I	I/c	r	I	I/c	r
plg	mm	kg/m	cm²	mm	mm	mm	mm	cm⁴	cm³	cm	cm⁴	cm³	cm
36 × 16 ½	914.4 × 419.1	342.28	436.97	911.4	418	32.0	19.4	623 869.2	13 691.5	37.79	36 249.9	1 732.1	9.12
36 × 12	914.4 × 304.8	223.23	284.09	910.3	304	24.0	15.9	375 114.9	8 241.1	36.30	10 422.5	685.0	6.05
33 × 15 ¾	838.2 × 400.1	297.64	379.29	838.2	400	29.2	18.2	459 864.4	10 972.8	34.82	28 791.0	1 438.8	8.71
33 × 11 ½	838.2 × 292.1	193.46	246.84	840.7	292	21.7	14.7	278 835.6	6 633.5	33.60	8 383.0	573.6	5.82
30 × 15	762 × 381.0	255.97	326.78	759.0	381	27.1	16.6	328 471.6	8 655.7	31.70	22 897.1	1 202.8	8.38
30 × 10 ½	762 × 266.7	160.72	204.97	757.4	266	19.3	13.9	185 682.3	4 903.0	30.10	5 623.3	422.8	5.23
27 × 14	685.8 × 355.6	215.79	275.36	682.8	355	24.8	15.2	225 362.0	6 602.4	28.60	16 936.6	955.4	7.83
27 × 10	685.8 × 254.0	139.89	178.39	683.5	254	19.0	12.5	135 971.4	3 978.8	27.61	4 790.9	376.9	5.18
24 × 14	609.6 × 355.6	193.46	246.52	616.0	356	22.9	14.4	166 889.3	5 419.2	26.01	15 617.1	878.4	7.95
24 × 12	609.6 × 304.8	148.82	189.87	609.6	305	19.7	11.9	124 341.8	4 078.8	25.60	8 470.4	555.5	6.68
24 × 9	609.6 × 228.6	113.10	144.32	607.3	228	17.3	11.2	87 259.4	2 874.3	24.59	3 184.2	2713.6	4.70
21 × 13	533.4 × 330.2	116.68	212.45	533.4	330	22.0	13.4	109 078.5	4 090.2	22.66	12 058.3	730.9	7.57
21 × 9	533.4 × 228.6	122.03	154.84	259.8	227	20.2	12.7	72 941.0	2 753.0	21.67	3 729.5	327.7	4.90
21 × 8 ¼	533.4 × 209.6	92.27	117.61	533.1	209	15.6	10.2	55 226.0	2 071.3	21.67	2 210.2	211.4	2.97
18 × 11 ¾	457.2 × 298.5	142.87	182.06	461.3	298	21.1	13.0	69 706.8	3 021.8	19.56	8 607.7	576.8	6.88
18 × 8 ¾	457.2 × 222.3	95.24	121.29	453.9	221	17.4	10.2	43 529.8	1 917.3	18.95	2 926.1	263.8	4.90
18 × 7 ½	457.2 × 190.5	74.41	94.90	457.2	190	14.5	9.1	33 323.8	1 458.5	18.75	1 548.4	162.2	4.04
16 × 11 ½	406.4 × 292.1	130.96	166.90	410.5	292	20.2	12.8	50 888.9	2 479.4	17.44	7 708.7	527.7	6.78
16 × 8 ½	406.4 × 215.9	86.32	109.94	402.8	214	16.4	10.3	31 026.1	1 542.0	16.81	2 518.2	234.3	4.78
16 × 7	406.4 × 177.8	70.41	94.64	412.8	179	16.0	9.7	27 280.0	1 322.4	16.97	1 448.5	160.6	3.91
		53.58	68.32	402.6	177	11.0	7.6	18 576.6	922.6	16.49	919.9	103.2	3.68
14 × 16	355.6 × 406.4	211.32	270.00	374.7	393	27.0	17.3	69 602.8	3 715.0	16.05	27 475.7	1 396.2	10.08
		476.22	607.23	427.0	424	53.2	48.0	172 391.9	8 075.6	16.84	68 058.5	3 207.0	10.59
14 × 14 ½	355.6 × 368.3	129.47	164.90	355.6	368	17.5	10.7	40 245.7	2 263.1	15.62	14 555.7	789.9	9.40
14 × 12	355.6 × 304.8	125.01	159.42	360.2	305	19.8	11.5	38 643.2	2 145.1	15.57	9 386.1	614.5	7.67
		116.10	148.00	357.1	304	18.2	10.9	35 429.9	1 984.5	15.47	8 611.9	565.4	7.62
14 × 10	355.6 × 254	110.13	140.39	360.4	256	19.9	11.4	33 165.6	1 840.3	15.37	5 556.7	434.26	6.30
		101.20	129.03	357.1	255	18.2	10.6	30 139.6	1 687.9	15.29	5 044.8	394.93	6.25
		90.78	115.74	353.3	254	16.3	9.8	26 701.5	1 510.9	15.19	4 466.2	352.32	6.22

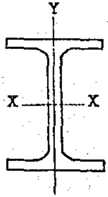


Tabla 3. Vigas WF de patín — ancho de acero.

Tamaño nominal*		Peso	Area	Peralte	Patín		Esp. del alma	Eje X-X			Eje Y-Y		
					Ancho	Esp.		I	I/c	r	I	I/c	r
plg	mm	kg/m	cm^2	mm	mm	mm	mm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm
14 × 8	355.6 × 203.2	78.87	100.58	354.1	205	16.7	9.4	22 564.1	1 274.9	14.99	2393.3	234.34	4.88
		63.99	81.03	347.5	203	13.4	7.8	17 856.5	1 027.5	14.78	1 877.2	185.17	4.80
14 × 6 3/4	355.6 × 171.5	56.55	76.06	358.6	172	13.0	7.9	16 037.5	894.7	14.91	1 023.9	119.63	3.78
		50.60	64.32	355.6	171	11.5	7.3	14 118.7	794.8	14.81	886.6	103.24	3.71
		44.65	56.84	352.0	171	9.7	6.9	12 054.2	685.0	14.55	728.4	85.21	3.58
12 × 12	304.8 × 304.8	126.50	161.16	317.5	307	20.2	12.6	30 106.3	1 896.0	13.67	9 802.3	637.46	7.80
		96.73	123.29	307.8	304	15.4	9.9	22 202.0	1 442.1	13.41	7 267.5	476.87	7.67
12 × 10	304.8 × 254	78.87	100.58	306.3	254	14.6	8.8	17 740.0	1158.6	13.28	4 000.0	314.63	6.30
12 × 8	304.8 × 203.2	59.53	75.94	303.3	203	13.1	7.5	12 907.4	850.5	13.03	1 835.6	180.26	4.93
12 × 6 1/2	304.8 × 165.1	53.57	68.32	310.9	167	13.7	7.7	11 687.9	752.2	13.08	986.5	117.99	3.81
		46.13	58.84	307.1	166	11.8	6.7	9 923.0	645.7	12.98	824.1	99.96	3.73
		40.18	51.42	303.5	165	10.2	6.1	8 495.4	558.8	12.85	690.9	83.57	3.66
10 × 10	254 × 254	166.68	212.39	289.1	265	31.7	19.2	29 914.8	2 069.7	11.86	9 798.2	740.70	6.78
		148.82	189.87	282.4	263	28.4	17.4	26 014.7	1 841.9	11.71	8 599.4	653.85	6.73
		132.45	168.97	276.4	261	25.3	15.6	22 576.6	1 633.8	11.56	7 517.2	576.83	6.68
		114.60	146.26	269.7	259	22.0	13.6	19 030.3	1 410.9	11.40	6 385.0	493.25	6.60
		72.92	92.90	254.0	254	14.2	8.6	11 359.0	894.7	11.05	3 871.0	304.80	6.45
10 × 8	254 × 203.2	66.97	85.42	257.0	204	15.7	8.9	10 347.6	804.6	10.99	2 214.4	217.95	5.08
		58.04	74.07	252.5	203	13.1	8.1	8 728.4	691.5	10.84	1 868.9	183.54	5.03
		49.11	62.65	247.7	202	11.0	7.4	7 113.5	573.6	10.67	1 519.3	150.76	4.93
10 × 5 3/4	254 × 146.1	43.16	55.03	259.6	147	12.7	7.3	6 547.4	504.7	10.90	632.7	85.21	3.40
		31.26	39.94	251.5	146	8.6	6.1	4 424.6	352.3	10.52	403.7	55.72	3.18
8 × 8	203.2 × 203.2	99.71	127.10	228.6	210	23.7	15.0	11 313.3	989.8	9.42	3 687.8	350.69	5.38
		86.31	110.07	222.3	209	20.5	13.0	9 461.0	852.1	9.27	3 117.6	298.25	5.33
		71.43	91.03	215.9	206	17.3	10.3	7 646.2	707.9	9.17	2 534.9	245.81	5.28
		59.53	75.87	209.6	205	14.2	9.3	6 089.5	581.7	8.97	2039.6	198.21	5.18
		52.10	66.45	206.2	204	12.5	8.0	5 265.4	509.6	8.89	1 769.0	173.70	5.16
		46.13	58.84	203.2	203	11.0	7.3	4 2037.2	449.0	8.81	1 540.1	150.76	5.11
8 × 6 1/2	203.2 × 165.1	41.67	53.10	204.7	166	11.8	7.2	4 070.8	398.2	8.76	899.1	108.16	4.12
		35.72	45.55	201.4	165	10.1	6.2	3 433.9	340.9	8.69	757.5	298.24	4.09
8 × 5 1/4	203.2 × 133.4	29.76	37.94	206.7	134	9.6	6.3	2 880.3	278.6	8.71	353.8	139.29	3.05
		25.30	32.26	203.2	133	7.6	5.8	2 347.6	231.1	8.53	278.9	109.74	2.95

Tabla 3. Vigas WF de patín ancho de acero (continuación).

Tamaño nominal*		Peso	Area	Peralte	Patín		Esp. del Alma	Eje X-X			Eje Y-Y			
					Ancho	Esp. medio		I	I/c	r	I	I/c	r	x
plg	mm	kg/m	cm^2	mm	mm	mm	mm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	cm
18 × 4 †	457.2 × 101.6	86.31	109.55	457.2	107	15.9	17.8	27 916.9	1 220.8	15.98	770.0	91.8	2.65	2.24
		77.24	97.94	457.2	104	15.9	15.2	25 894.0	1 132.4	16.26	711.8	86.9	2.69	2.21
		68.16	86.32	457.2	102	15.9	12.7	23 871.1	1 043.9	16.64	657.7	83.6	2.77	2.26
		63.55	80.52	457.2	100	15.9	11.4	22 859.6	999.6	16.87	624.4	80.3	2.79	2.29
15 × 3 3/8	381 × 85.7	74.41	94.45	381.0	94	16.5	18.2	16 707.7	878.4	13.31	466.2	62.3	2.21	2.03
		59.53	75.48	381.0	89	16.5	13.2	14 414.2	757.1	13.82	387.1	55.7	2.26	1.98
		50.45	63.87	381.0	86	16.5	10.2	13 011.5	683.3	14.27	341.3	52.4	2.31	2.01
12 × 3	304.8 × 76.2	44.65	56.71	304.8	81	12.7	12.9	6 709.7	440.8	10.87	216.4	34.4	1.96	1.73
		37.21	47.23	304.8	77	12.7	9.8	5 973.0	391.7	11.25	187.3	31.1	2.00	1.73
		30.81	38.90	304.8	75	12.7	7.1	5 332.0	350.7	11.71	162.3	27.9	2.06	1.78
10 × 2 5/8	254 × 66.7	44.65	56.77	254.0	77	11.1	17.1	4 287.2	337.6	8.69	166.5	27.9	1.70	1.65
		37.21	47.29	254.0	73	11.1	13.4	3 775.2	296.6	8.94	141.5	24.6	1.73	1.57
		29.76	37.81	254.0	70	11.1	9.6	3 267.4	257.3	9.30	116.5	21.3	1.78	1.55
		22.77	28.84	254.0	66	11.1	6.1	2 784.6	219.6	9.83	95.7	19.7	1.83	1.63
9 × 2 1/2	228.6 × 63.5	29.76	37.81	228.6	67	10.5	11.4	2 522.4	221.2	8.18	99.9	19.7	1.65	1.50
		22.32	28.32	228.6	63	10.5	7.2	2 110.3	185.2	8.64	79.1	16.4	1.70	1.50
		19.94	25.10	228.6	62	10.5	5.8	1 968.8	172.1	8.86	74.9	15.9	1.70	1.55
8 × 2 1/4	203.2 × 57.2	27.90	35.42	203.2	64	9.9	12.4	1 918.9	178.6	7.16	83.2	16.4	1.52	1.45
		20.46	25.94	203.2	60	9.9	7.7	1 490.1	147.5	7.59	62.4	14.1	1.57	1.42
		17.11	21.68	203.2	57	9.9	5.6	1 344.4	132.7	7.87	54.1	12.9	1.60	1.47
7 × 2 1/8	177.8 × 53.9	21.95	27.87	117.8	58	9.1	10.6	1 128.0	126.2	6.38	58.3	12.9	1.45	1.35
		18.23	23.10	117.8	56	9.1	7.9	1 003.1	113.1	6.58	50.0	11.6	1.47	1.35
		14.58	18.39	117.8	53	9.1	5.3	878.3	94.3	6.91	40.8	10.3	1.50	1.40
6 × 2	152.4 × 50.8	19.35	24.58	152.4	55	8.7	11.1	720.1	95.0	5.41	45.9	10.7	1.35	1.32
		15.63	19.81	152.4	52	8.7	7.9	628.5	81.9	5.64	36.2	9.3	1.35	1.27
		12.20	15.42	152.4	49	8.7	5.1	541.1	70.5	5.95	29.1	8.2	1.37	1.32
5 × 1 3/4	127 × 44.5	13.40	16.97	127.0	48	8.1	8.3	366.3	57.4	4.65	26.6	7.4	1.25	1.22
		9.97	12.58	127.0	45	8.1	4.8	308.0	49.2	4.95	20.0	8.2	1.27	1.24
4 × 1 5/8	101.6 × 41.3	10.79	13.68	101.6	44	7.5	8.1	187.3	37.7	3.73	18.3	7.5	1.17	1.17
		8.04	10.06	101.6	40	7.5	4.6	158.2	31.1	3.96	13.3	7.4	1.14	1.17
3 × 1 1/2	76.2 × 38.1	8.93	11.29	76.2	41	6.9	9.0	87.4	22.9	2.74	12.9	6.9	1.07	1.17
		7.44	9.42	76.2	38	6.9	6.6	74.9	19.7	2.84	10.4	6.7	1.04	1.12
		6.10	7.68	76.2	36	6.9	4.3	66.6	18.0	2.97	8.3	6.7	1.04	1.12

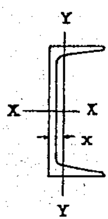


Tabla 4. Canales tipo estándar — de acero.

Perfil		Z	Perfil		Z
plg, lb/pie	cm, kg/m	cm^3	plg, lb/pie	cm, kg/m	cm^3
36 WF 230	91.4 WF 342.28	15 448.2	15 I 42.9	38.1 I 63.84	1 124.2
33 WF 200	83.8 WF 297.64	12 362.5	16 WF 36	40.6 WF 53.57	1 047.1
30 WF 172	76.2 WF 255.97	9 717.6	12 I 50	30.5 I 74.41	994.7
27 WF 145	68.6 WF 215.79	7 407.0	10 WF 45	25.4 WF 66.97	901.3
24 WF 130	60.9 WF 193.46	6 050.1	14 WF 34	35.6 WF 50.60	893.1
30 WF 108	76.2 WF 160.72	5 661.8	12 I 40.8	30.5 I 60.72	860.3
24 I 120	60.9 I 178.58	4 883.4	12 WF 36	30.5 WF 53.57	842.3
21 WF 112	53.3 WF 166.68	4 555.6	8 WF 48	20.3 WF 71.43	802.9
27 WF 94	68.6 WF 139.89	4 550.7	14 WF 30	35.6 WF 44.65	771.8
14 WF 142	35.6 WF 211.32	4 175.4	10 WF 39	25.4 WF 58.04	770.2
24 I 90	60.9 I 133.94	3 613.4	12 I 31.8	30.5 I 47.32	681.7
24 I 79.9	60.9 I 118.91	3 326.6	8 WF 40	20.3 WF 59.53	653.8
24 WF 76	60.9 WF 113.10	3 279.1	10 I 35	25.4 I 52.09	576.8
21 WF 62	53.3 WF 92.27	2 361.4	10 I 25.4	25.4 I 37.80	458.8
20 I 65.4	50.8 I 97.33	2 250.0	8 WF 28	20.3 WF 41.67	444.1
14 WF 78	35.6 WF 116.08	2 195.9	8 WF 24	20.3 WF 35.72	378.5
10 WF 100	25.4 WF 148.82	2 132.0	8 I 23	20.3 I 34.23	314.6
14 WF 74	35.6 WF 110.13	2 058.2	8 WF 20	20.3 WF 29.76	313.0
16 WF 58	40.6 WF 86.31	1 740.3	8 WF 17	20.3 WF 25.30	258.9
10 WF 77	25.4 WF 114.59	1 601.0	7 I 20	17.8 I 29.76	236.0

Tabla 5. Módulos de sección plásticos.

B I B L I O G R A F I A

Feodosiev V. I., "Resistencia de Materiales", Editorial M I R, - Moscú, 1980.

Fitzgerald R. W., "Resistencia de Materiales", Editorial R.S.I., S. A. , México, D.F., 1977.

Gonzalez C. O. y otros, "Aspectos fundamentales del Concreto Reforzado", Editorial Límusa, S. A., México, — D.F., 1980.

Nash W. A., "Resistencia de Materiales", Editorial McGraw-Hill, México, D.F., 1977.

Popov E. P., "Introducción a la Mecánica de Sólidos", Editorial Límusa, S. A., México, D.F., 1978.

Singer F. L., "Resistencia de Materiales", Editorial Harla,- S. A. de C. V., México, D.F., 1978.

Timoshenko S. y Young D. H., "Elementos de Resistencia de Materiales", Editorial Montaner y Simon, S. A. , — Barcelona, 1966.