

43  
24



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

# **MECANICA DE FLUIDOS**

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
**INGENIERO PETROLERO**  
P R E S E N T A :  
**JOSE ALFONSO RODRIGUEZ TORRES**

MEXICO, D. F.

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

1990



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INTRODUCCION

## CAPITULO 1 PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS.

1.1	Definición de fluido.	3
1.1.1	Distinción entre un sólido y un fluido.	4
1.1.2	Distinción entre un gas, un vapor y un líquido.	5
1.2	Viscosidad.	6
1.3	Ley de Newton de la viscosidad.	7
1.4	Clasificación de los fluidos.	11
1.5	Densidad y densidad relativa.	13
1.5.1	Densidad.	13
1.5.2	Densidad relativa.	14
1.6	Peso específico y volumen específico.	14
1.6.1	Peso específico.	14
1.6.2	Volumen específico.	15
1.7	Ley de Boyle (para gases ideales a temperatura constante).	16
1.8	Ley de Charles (para gases ideales a volumen constante).	17
1.9	Ecuación de los gases ideales.	18
1.10	Condiciones adiabáticas.	20
1.11	Módulo de elasticidad volumétrico; compresibilidad.	21
1.12	Presión de vapor; punto de ebullición.	23
1.13	Tensión superficial; capilaridad.	24

## CAPITULO 2 ESTATICA DE LOS FLUIDOS.

2.1	Presión en un punto.	30
2.2	Variación de la presión en el seno de un fluido en reposo; fluidos compresibles y fluidos incompresibles.	32
2.2.1	Fluidos incompresibles.	34
2.2.2	Fluidos compresibles.	34
2.3	Presiones absoluta y manométrica.	37
2.4	Medidores de presión.	39
2.4.1	Barómetro.	39
2.4.2	Manómetro de Bourdón.	40
2.4.3	Manómetros.	41
2.5	Aplicaciones.	44
2.6	Fuerzas sobre superficies planas y curvadas.	46
2.6.1	Fuerzas sobre superficies planas.	46
2.6.2	Fuerzas sobre superficies curvadas.	53

2.7	Translación y rotación de fluidos confinados.	63
2.7.1	Aceleración lineal uniforme.	64
2.7.2	Rotación uniforme respecto a un eje vertical.	67
2.8	Aplicaciones.	70
2.9	Flotación de cuerpos en el seno de fluidos en reposo (Principio de Arquímedes).	74
2.10	Aplicaciones.	78

### CAPITULO 3 ANALISIS DIMENSIONAL Y TEORIA DE LOS MODELOS.

3.1	Análisis dimensional.	81
3.2	Grupos adimensionales.	84
3.2.1	Número de Reynolds.	84
3.2.2	Número de Froude.	85
3.2.3	Número de Weber.	86
3.2.4	Número de Mach.	86
3.2.5	Número de Euler.	87
3.3	Teorema II de Buckingham.	88
3.4	Semejanzas geométrica, cinemática y dinámica.	92
3.4.1	Similitud geométrica.	92
3.4.2	Similitud cinemática.	94
3.4.3	Similitud dinámica.	95
3.5	Aplicaciones.	96
3.5.1	Flujo en tuberías.	96
3.5.2	Estructuras hidráulicas abiertas.	97
3.5.3	Maquinaria hidráulica.	99

### CAPITULO 4 ECUACIONES FUNDAMENTALES.

4.1	Conceptos fundamentales.	100
4.2	Ecuación de continuidad.	104
4.3	Ecuación de cantidad de movimiento.	113
4.4	Ecuación de conservación de energía.	118

### CAPITULO 5 FLUJO EN CANALES.

5.1	Perímetro mojado.	134
5.2	Radio hidráulico y Ecuación de Chézy.	135
5.3	Aplicaciones.	139

CAPITULO 6 FLUJO EN TUBERIAS.

6.1 Flujo laminar y flujo turbulento; número de Reynolds.	143
6.2 Flujo con pérdidas de carga. Ecuación de Darcy-Weisbach.	145
6.3 Ecuación de Hagen-Poiseuille.	147
6.4 Pérdidas de carga por fricción para flujo turbulento.	150
6.5 Diagrama de Moody.	151
6.6 Pérdidas menores.	154
6.7 Aplicaciones.	158
6.8 Golpe de ariete.	163
6.9 Aplicaciones.	166

CAPITULO 7 MEDIDORES DE FLUJO.

7.1 Presión estática y presión de estancamiento.	170
7.2 Medidores de presión.	172
7.3 Disco de Ser.	173
7.4 Tubo de Pitot.	174
7.5 Tubo de Venturi.	178
7.6 Orificios.	181
7.6.1 Orificio en un depósito.	181
7.6.2 Orificio en una tubería.	184
7.7 Aplicaciones.	186

TABLAS

BIBLIOGRAFIA

## INTRODUCCION

La Mecánica de Fluidos es la ciencia en la cual se aplican los principios fundamentales de la mecánica general a los líquidos y a los gases. Estos principios son los de conservación de energía, conservación de masa y las leyes del movimiento de Newton, cuyo uso ayuda a predecir el comportamiento de los fluidos sometidos a un conjunto de condiciones específicas.

La Mecánica de Fluidos se ha dividido en tres ramas: Estática de Fluidos, que estudia la mecánica de los fluidos en reposo; sus problemas son más sencillos y las soluciones analíticas pueden ser exactas; Cinemática de los Fluidos, que trata la velocidad y trayectoria de éstos sin considerar la fuerza o energía que las provocan; e Hidrodinámica, que se encarga de la relación de la velocidad y aceleración con las fuerzas ejercidas por o sobre los fluidos en movimiento.

En un esfuerzo por encontrar soluciones a la problemática del movimiento de fluidos, se desarrolló un campo de conocimientos que en la actualidad se llama Hidrodinámica Clásica, la cual se basa

en la consideración de fluidos ideales que carecen de algunos atributos de los fluidos reales; en particular de la viscosidad, pero a pesar de ello las descripciones de su comportamiento dadas por la Hidrodinámica Clásica no están desprovistas de valor, en especial en aquellos fenómenos en que las propiedades que se han despreciado tienen poco efecto sobre el comportamiento del fluido real.

Surgió la Hidráulica como resultado de la experimentación y desarrollo de fórmulas empíricas para la solución de problemas específicos. Esta disciplina enfocó y limitó su estudio al agua, pero con los avances en Aeronáutica, Ingeniería Química e Industria Petrolera, surgió la necesidad de ampliar su campo y al combinar la Hidrodinámica Clásica con el estudio de los fluidos reales, nació la Mecánica de Fluidos, por lo que en ésta se combinan los principios básicos de la Hidrodinámica con las técnicas experimentales de la Hidráulica.

La verificación de la teoría por medio de resultados experimentales le da sustentación a la misma y proporciona información adicional a los análisis matemáticos.

El resultado final es una serie unificada de principios básicos de la Mecánica de Fluidos, aplicables a la solución de problemas de flujo de fluidos de índole ingenieril.

Por otra parte, debido a que la mayoría de los aparatos de medición y control de fluidos tienen especificaciones y escalas en el Sistema Inglés de Unidades, se debe dar mayor importancia a este sistema y relacionarlo con el Sistema Internacional.

## CAPITULO 1

### PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS

#### 1.1 Definición de fluido.

Un fluido es una sustancia, ya sea líquido o gas, que se deforma continuamente cuando se le somete a un esfuerzo cortante, por muy pequeño que éste sea. El esfuerzo cortante ( $\tau$ ) se define como el cociente entre la fuerza cortante, que es la componente de la fuerza ( $F$ ) tangente a la superficie y el área de la superficie considerada ( $A$ ):

$$\tau = \frac{F}{A} \quad (1.1.1)$$

De acuerdo a lo anterior, cualquier fluido, sin importar lo "espeso" o viscoso que sea, comienza a fluir, aunque en forma imperceptible, bajo la acción de la más leve fuerza de corte que se le aplique. La deformación que sufre el fluido se produce en forma continua mientras se esta aplicando la fuerza de corte, pero si ésta deja de aplicarse, cesa la deformación y al no existir fuerzas internas que tiendan hacer volver las partículas del



fluido a sus posiciones relativas originales, el fluido conserva la configuración adquirida.

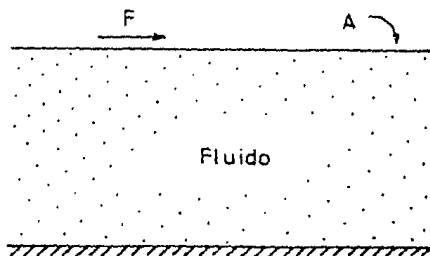


Fig 1.1 Nomenclatura del concepto de esfuerzo cortante.

#### 1.1.1 Distinción entre un sólido y un fluido.

Las características diferentes entre un sólido y un fluido provienen de las diferencias entre sus estructuras moleculares. Las moléculas que integran a un sólido tienen un movimiento muy leve, apenas una vibración de pequeña amplitud, y la fuerza de atracción molecular es tan grande que no se produce con facilidad un movimiento relativo entre ellas, por lo que el sólido tiende a mantener su forma. Por el contrario, en un fluido el movimiento de sus moléculas es mayor debido a que la atracción molecular es menor, lo que origina que no tenga forma propia, sino que adopta la del recipiente que lo contenga. En un líquido, aunque las fuerzas de atracción entre las moléculas permite que se mantenga "unido", pueden moverse más allá una de la otra; debido a esto, si se aplica una fuerza a un líquido no confinado, provoca que sus moléculas deslicen unas sobre otras, hasta que la fuerza deje de aplicarse.

Pueden existir confusiones con sólidos plásticos que fluyen bajo ciertas condiciones, o con algunos metales que escurren al estar sometidos a altas presiones y fluidos muy viscosos. La diferencia entre éstos es que las sustancias viscosas fluyen con el tiempo cuando se les aplica un ligero esfuerzo; por ejemplo, si colocamos una muestra de alguna sustancia viscosa en el suelo, ésta fluirá, quizá con mucha lentitud, pero terminará por extenderse sobre el piso debido a la acción de la gravedad. Por el contrario una sustancia sólida plástica requerirá de un esfuerzo de cierta magnitud para empezar a fluir; las capas que componen al cuerpo se desplazarán una de otra, pero sólo en cierta cantidad. Sin embargo, cuanto más se desplacen estas capas con respecto a su posición original, tanto mayores serán las fuerzas internas que se oponen al deslizamiento. Por lo tanto si la fuerza cortante es permanente, llegará un momento en que las fuerzas internas equilibrarán a la fuerza externa y el movimiento no podrá continuar; si entonces se deja de aplicar la fuerza externa, las fuerzas internas tenderán a restituir al cuerpo a su forma original.

#### 1.1.2 Distinción entre un gas, un vapor y un líquido.

Como ya se dijo anteriormente, tanto los gases como los líquidos son los fluidos.

En los gases, el movimiento de sus moléculas es mucho más intenso; además el número de moléculas contenidas en un mismo espacio definido es mucho menor y por lo tanto una molécula recorre una distancia mayor antes de aproximarse a otra. Todo esto origina que al aplicar una fuerza externa al gas, éste se comprima considerablemente y cuando ésta fuerza deja de aplicarse, el gas tiende a expandirse indefinidamente, por lo que un gas

estará en equilibrio sólo cuando se encuentre confinado.

Por el contrario, en un líquido, sus moléculas se encuentran mucho más unidas: éstas se atraen y rechazan continuamente y se mueven en trayectorias curvas y onduladas más bien que rectas. Sus fuerzas de cohesión son lo bastante grande como para mantenerlas formando el líquido y a pesar de que no se le aplique una presión externa, a excepción de su presión de vapor, éste puede presentar una superficie libre definida.

Por otro lado, un vapor es un gas el cual debido a sus condiciones de presión y temperatura, se encuentra muy cerca de transformarse en líquido.

En resumen, las diferencias básicas entre un líquido y un gas, son que el primero es prácticamente incompresible, presenta una superficie libre y un volumen definido, en tanto que el segundo es muy compresible y siempre ocupa totalmente el recipiente que lo contiene.

## 1.2 Viscosidad ( $\mu$ ).

Se llama viscosidad absoluta o simplemente viscosidad a la resistencia de un fluido al esfuerzo cortante.

La viscosidad se debe a dos causas: la primera es la fuerza de cohesión que existe entre las moléculas de los fluidos las cuales dificultan el desplazamiento relativo entre ellas; la segunda es la cantidad de movimiento entre "capas" del fluido que no se mueven a la misma velocidad

Por lo anterior, la viscosidad depende de la presión y la temperatura:

$$\mu = \mu (T, P) \quad (1.2.1)$$

Al aumentar la temperatura a presión constante, la viscosidad

de un líquido disminuye, mientras que la viscosidad de un gas aumenta. Esto se explica debido a que en los líquidos predominan las fuerzas de cohesión y éstas disminuyen al aumentar la temperatura.

Por otra parte, los gases deben su viscosidad predominantemente a la transferencia de cantidad de movimiento molecular y ésta aumenta con la temperatura.

En el caso de los hidrocarburos en un yacimiento se tiene una mezcla de líquido y gas; ésta cambia considerablemente su viscosidad al variar la presión y/o la temperatura; la variación de la viscosidad es más fuerte con la temperatura.

Las dimensiones de la viscosidad absoluta son:

$$\mu [F^1 L^{-2} T^1] ; \mu [M^1 L^{-1} T^{-1}] .$$

En el sistema cgs:

$$\mu [M^1 L^{-1} T^{-1}] ; \mu [g_m/cm seg] .$$

La unidad  $[g_m/cm seg]$  se denomina poise, pero generalmente se usa el centipoise ( $1cp = 0.01poise$ ).

En el sistema MKS:

$$\mu [M^1 L^{-1} T^{-1}] ; \mu [kg_m/m seg] .$$

En el sistema FPS:

$$\mu [M^1 L^{-1} T^{-1}] ; \mu [lb_m/pie seg] .$$

Conversiones:

$$1 \text{ centipoise} = 0.001 \text{ kg}_m/m \text{ seg} ,$$

$$1 \text{ centipoise} = 2.419088 \text{ lb}_m/pie \text{ seg} ,$$

$$98 \text{ poise} = 1 \text{ kg seg}/m^2 .$$

### 1.3 Ley de Newton de la viscosidad.

La viscosidad es una propiedad del fluido la cual provoca que éste ofrezca resistencia a los esfuerzos cortantes.

Se podría definir un fluido ideal como aquél en el cual no

existe fricción entre sus partículas o sea de viscosidad nula, aunque este fluido ideal no existe en la realidad. Todos los fluidos reales se oponen a cualquier fuerza que tienda a hacer que una de sus capas se mueva sobre otra; esta resistencia se ofrece cuando existe movimiento del fluido, debido a la viscosidad del mismo.

Considere a un fluido alojado entre dos placas lo suficientemente grandes de tal suerte que se puedan desprestigiar las condiciones en los bordes; ambas placas tienen una área (A) y están separadas por una distancia muy pequeña (Y), Fig 1.2. Si se supone que el sistema está inicialmente en reposo en el tiempo  $t = 0$ ; la placa superior se pone en movimiento en la dirección del eje X, con una velocidad constante V debido a la aplicación de una fuerza constante (F) la cual origina un esfuerzo cortante ( $\tau = F/A$ ) (a). El fluido gana cantidad de movimiento conforme transcurre el tiempo, y al final se establece el perfil de velocidades en régimen estacionario (b).

El fluido que ésta en contacto con la placa inferior tiene una velocidad igual a cero; es decir, no hay deslizamiento del fluido sobre esta placa. Se ha demostrado experimentalmente que la velocidad del fluido varía desde cero en la placa inferior en reposo, hasta la velocidad V en la placa superior.

Si las otras magnitudes se mantienen constantes, F es directamente proporcional al área A y a la velocidad V, e inversamente proporcional a Y, de manera que:

$$F \propto \frac{A V}{Y} \quad \text{ó} \quad F = \mu \frac{A V}{Y} \quad (1.3.1)$$

donde  $\mu$  es el factor de proporcionalidad que hace intervenir el efecto del fluido de que se trate, llamado viscosidad.

Debido a que el esfuerzo cortante es  $\tau = F/A$  se tiene:

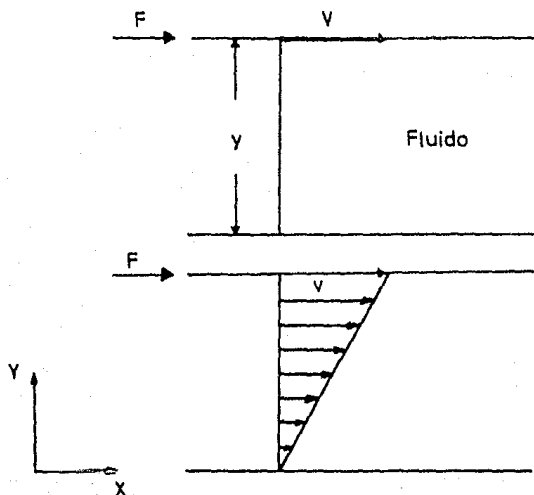
$$\tau = \mu \frac{v}{Y},$$

o en forma diferencial:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dY}, \quad (1.3.2)$$

el gradiente de velocidad  $dv/dY$  puede ser considerado como el cociente de la velocidad con que una capa de fluido se mueve en relación con la capa adyacente.

Esta última expresión es la "Ley de Newton de la viscosidad" y los fluidos que la cumplen se llaman newtonianos; en éstos existe una relación lineal entre el esfuerzo cortante ( $\tau$ ) y la velocidad de deformación ( $dv/dY$ ) por lo que la viscosidad es constante.



$V$  : valor particular de  $v$ .

$Y$  : valor particular de  $y$ .

Fig 1.2 Distribución de velocidades en un flujo estacionario.

## Problemas

1.3.1 Una placa que dista 0.5 mm de otra placa fija, se mueve a una velocidad de 30 cm/seg, requiriéndose para mantener esta velocidad una fuerza por unidad de área de 0.2 kg/m<sup>2</sup>. Determinar la viscosidad del fluido que ocupa el espacio entre las placas.

Solución.

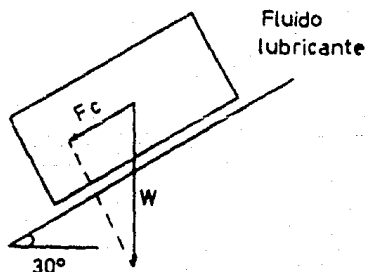
De la Ec 1.3.2:

$$\mu = \frac{\tau Y}{V}$$

$$\mu = \frac{(0.2 \text{ kg/m}^2) (0.5 \times 10^{-3} \text{ m})}{(0.3 \text{ m/seg})} = 3.33 \times 10^{-4} \text{ kg seg/m}^2 = 3.26 \text{ cp.}$$

1.3.2 Un cuerpo de 40 kg de peso resbala sobre un plano lubricado e inclinado 30° con la horizontal, apoyándose en una de sus caras planas de 1800 cm<sup>2</sup> de área. Para una viscosidad de 1 poise del fluido lubricante y una velocidad del cuerpo de 1 m/seg, determinar el espesor de la película de lubricante.

Solución:



$F_c$  : componente del peso que actúa pendiente abajo.

De la figura:

$$F_c = W \text{ sen } 30^\circ = (40 \text{ kg}) \text{ sen } 30^\circ = 20 \text{ kg} .$$

De la Ec 1.1.1:

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{(20 \text{ kg})}{(1800 \text{ cm}^2)} = 0.0111 \text{ kg/cm}^2$$

De la Ec 1.3.2:

$$Y = \mu \frac{V}{\tau} = \frac{1}{98} (\text{kg seg/m}^2) \frac{(1 \text{ m/seg})}{(111.1 \text{ kg/m}^2)} = 9.18 \times 10^{-5} \text{ m} = 0.0918 \text{ mm}.$$

#### 1.4 Clasificación de los fluidos.

Los fluidos se pueden clasificar en newtonianos y no newtonianos.

En los newtonianos, existe una relación lineal entre el esfuerzo cortante aplicado ( $\tau$ ) y la velocidad de deformación resultante ( $dv/dY$ ), por lo que, la viscosidad es constante; esto da lugar a una línea recta que pasa por el origen, en una gráfica de esfuerzo cortante contra velocidad angular de deformación (Fig 1.3).

En los no newtonianos no hay relación lineal entre  $\tau$  y  $dv/dY$ . Un cuerpo plástico ideal requiere de un esfuerzo cortante inicial de cedencia para producir en él una deformación continua; después de este esfuerzo inicial se comporta como un fluido newtoniano, es decir, hay relación lineal entre  $\tau$  y  $dv/dY$ .

Existen dos tipos de comportamientos no newtonianos en base al cambio de la viscosidad cuando se está aplicando el esfuerzo de corte; si la viscosidad aumenta con el esfuerzo, se llaman sustancias reopécticas; por el contrario, si disminuye la viscosidad se llaman sustancias tixotrópicas.



Los gases y los líquidos ligeros se aproximan a los fluidos newtonianos; por otro lado, los líquidos pesados y los gases cercanos a sus puntos críticos son no newtonianos.

En muchas ocasiones para simplificar el estudio de un fluido, se considera que su viscosidad es cero, lo cual, implica que el esfuerzo cortante también es cero para cualquier movimiento del fluido. Este fluido de viscosidad cero denominado fluido ideal, está representado por el eje de las ordenadas de la Fig 1.3.

- A - fluido newtoniano
- B - fluido no newtoniano
- C - sustancia reopéctica
- D - plástico ideal
- E - sustancia tixotrópica
- F - fluido ideal

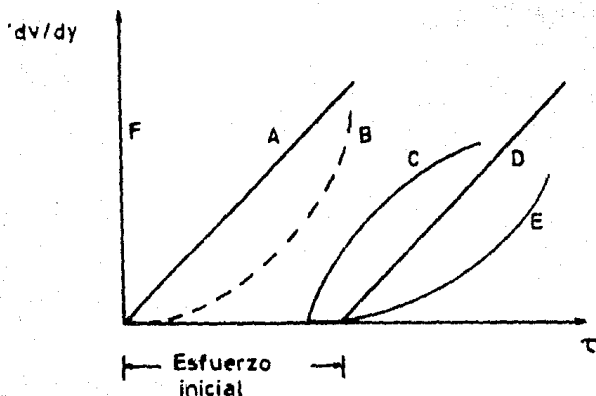


Fig 1.3 Clasificación de los fluidos.

## 1.3 Densidad y densidad relativa.

### 1.3.1 Densidad.

La densidad de un fluido se define como su masa por unidad de volumen:

$$\rho = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{m}{V} . \quad (1.5.1)$$

Ahora bien, mediante el limite hacia el cual tiende la densidad cuando el volumen considerado tiende a cero se define a la densidad en un punto:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} . \quad (1.5.2)$$

Las dimensiones de la densidad son:

$$\rho [M^1 L^{-3}] = \rho [F^1 L^{-4} T^2] .$$

y sus unidades en el sistema MKS, cgs y FPS (foot-pound-second) son respectivamente:  $[kg_m/m^3]$ ,  $[g_m/cm^3]$  y  $[lb_m/pe^3]$ .

Conversiones:

$$1 kg_m/m^3 = 0.001 g_m/cm^3,$$

$$1 lb_m/pe^3 = 16.018 kg_m/m^3.$$

De acuerdo con la Segunda Ley de Newton ( $F = m a$ ), el peso y la masa se relacionan como:

$$W = m g .$$

En la superficie terrestre:  $g = 9.807 \text{ m/seg}^2$ ; si  $m = 1 kg_m$ :

$$W = 9.807 kg_m \text{ m/seg}^2 = 9.807 \text{ N}.$$

Por lo tanto, el peso de una masa de  $1 kg_m$  en la superficie terrestre es de  $9.807 \text{ N} = 1 kg$ . En la luna el peso de una masa de  $1 kg_m$  es menor a  $1 kg$ .

### 1.5.2 Densidad relativa.

La densidad relativa ( $\rho_r$ ) de una sustancia es el cociente de la densidad de ésta con la densidad de otra sustancia.

Para el caso de los líquidos y sólidos la sustancia que se utiliza como referencia es invariablemente el agua, a 4°C y 1 atmósfera de presión:

$$\rho_r = \frac{\rho}{\rho_v} \quad (1.5.3)$$

Para el caso de los gases la sustancia de referencia es el aire de dióxido de carbono; algunas ocasiones se utiliza el concepto de "gravedad específica" en lugar de densidad relativa.

De la relación entre la densidad y el peso molecular (M) se puede demostrar que:

$$\rho_r = \frac{M_{\text{gas}}}{M_{\text{aire}}} \quad (1.5.4)$$

Para el caso del aire:

$$M_{\text{aire}} = 28.971 \text{ lb}_m/\text{mole-lb}_m$$

### 1.6 Peso específico y volumen específico.

#### 1.6.1 Peso específico.

El peso específico ( $\gamma$ ) de un fluido se define como el cociente entre su peso y la unidad de volumen y representa la fuerza que ejerce la aceleración de la gravedad sobre la masa de un fluido por unidad de volumen:

$$\gamma = \frac{\text{fuerza de gravedad}}{\text{volumen}} = \frac{\text{peso}}{\text{volumen}} = \frac{W}{V} \quad (1.6.1)$$

Sus dimensiones son:  $[F^1L^{-3}]$ .

Se puede relacionar la densidad con el peso específico utilizando la segunda ley de Newton:

$$W = m g , \quad (1.6.2)$$

$$\frac{W}{V} = \frac{m g}{V} ,$$

por lo tanto:

$$\gamma = \rho g \quad (1.6.3)$$

Esta es una propiedad conveniente cuando se trata con la estática del fluido c con líquidos con una superficie libre.

A partir de las relaciones anteriores se puede demostrar que:

$$\rho_r = \frac{\gamma}{\gamma_a} = \frac{\rho}{\rho_a} , \quad (1.6.4)$$

donde  $\gamma_a$  y  $\rho_a$  son el peso específico y la densidad del agua o del aire.

En unidades MKS, cgs y FPS se tiene respectivamente:

$$\gamma \{F^1L^{-3}\} ; \{kg/m^3\}, \{g/cm^3\}, \{lb/pie^3\}.$$

### 1.6.2 Volumen específico.

El volumen específico ( $V_s$ ) de un fluido es el volumen que ocupa por unidad de peso del fluido:

$$V_s = \frac{\text{volumen}}{\text{peso}} = \frac{V}{W} . \quad (1.6.5)$$

Como se observa el volumen específico es el inverso del peso específico de un fluido y es un término que por lo general se aplica a los gases:

$$V_s = \frac{1}{\gamma} . \quad (1.6.6)$$

Otros autores consideran al volumen específico como al cociente del volumen entre la masa, es decir, como el inverso de la densidad:

$$V_s = \frac{1}{\rho} \quad (1.6.7)$$

Sus dimensiones son:  $[F^{-1}L^3]$ , y sus unidades en los sistemas MKS, cgs y FPS son respectivamente (para el caso de  $V_s = 1/\rho$ ):

$$V_s [F^{-1}L^3] ; [m^3/kg], [cm^3/g], [pie^3/lb].$$

Conversiones:

$$1 m^3/kg = 1000 cm^3/g .$$

$$1 m^3/kg = 16.033 pie^3/lb .$$

### 1.7 Ley de Boyle (para gases ideales a temperatura constante).

La ley de Boyle es una ley relativa a los gases, la cual indica lo siguiente: el volumen de un gas confinado en un recipiente varía en razón inversa con la presión que ejerce sobre las paredes del recipiente, siempre que su temperatura permanezca constante. Es decir, cuando se comprime una masa gaseosa, al disminuir su volumen, aumenta el valor de la presión que el gas ejerce sobre las paredes del recipiente que lo contiene; recíprocamente, cuando una masa gaseosa se expande y aumenta su volumen, el valor de la presión disminuye, siempre que la temperatura no se altere en ambos casos. Si  $p_1$  es la presión que ejerce un gas cuando su volumen es  $V_1$  y  $p_2$  es la presión que adquiere cuando su volumen es  $V_2$ , se tiene, de acuerdo a esta ley:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1} , \text{ con temperatura constante.} \quad (1.7.1)$$

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 = \text{constante} . \quad (1.7.2)$$

La ley de Boyle es poco exacta cuando las moléculas del gas se encuentran muy próximas entre sí. Sin embargo, esta ley constituye una muy buena aproximación, principalmente para gases de bajo punto de ebullición, y para gases a presiones y temperaturas bajas.

### 1.8 Ley de Charles (para gases ideales a volumen constante).

La ley de Charles también es relativa a los gases y establece que la presión ejercida por una misma masa gaseosa es directamente proporcional a las temperaturas absolutas, siempre que su volumen permanezca constante, es decir:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}, \quad \text{con volumen constante,} \quad (1.8.1)$$

donde  $T_1$  y  $T_2$  son temperaturas absolutas.

La comprobación de esta ley puede lograrse fácilmente calentando el gas contenido en un recipiente metálico y midiendo la presión interior antes y después del calentamiento.

De la combinación de los conocimientos establecidos a través de las leyes de Boyle y de Charles, se obtiene la Ley General del Estado Gaseoso: las presiones ejercidas por una misma masa gaseosa son directamente proporcionales a sus temperaturas absolutas e inversamente proporcionales a los volúmenes que ocupa, es decir:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}, \quad (1.8.2)$$

la cual es la Ecuación General del Estado Gaseoso. Esta relación es correcta para cualquier mezcla de gases o para cualquier gas. Cuando un gas está muy próximo a su temperatura de licuefacción, un pequeño aumento de presión licuara el gas y reducirá tremendamente su volumen.

### 1.9 Ecuación de los gases ideales.

Un gas ideal no existe en la realidad, aunque en muchos casos las propiedades de los gases reales se aproximan mucho a las correspondientes a un gas ideal o perfecto. Este se define como una sustancia que satisface la ley de los gases perfectos:

$$p V_s = R T, \quad (1.9.1)$$

y tiene calores específicos constantes.

La ecuación anterior es la "ecuación de estado de un gas perfecto", que también se puede expresar como:

$$p = \rho_g R T, \quad (1.9.2)$$

usando la definición 1.6.7.

Cuando los gases se encuentran a temperaturas y presiones bajas se comportan aproximadamente de acuerdo a esta relación matemática. El aire, por ejemplo, en condiciones normales de presión y temperatura se acerca a un gas perfecto. Por el contrario, los gases que se encuentran cerca de su punto de licuefacción (vapores), se alejan mucho del comportamiento de un gas perfecto o ideal.

Se pueden determinar las unidades de las constantes de los gases ideales ( $R$ ) a partir de la ecuación anterior cuando se tienen las otras unidades; si  $p$  en ( $\text{kg}/\text{m}^2$ ),  $\rho$  en ( $\text{UTM}/\text{m}^3$ ) y  $T$  en ( $^{\circ}\text{K} = ^{\circ}\text{C} + 273.16$ ):

$$R = \frac{p}{\rho_g T},$$

$$R \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \frac{\text{m}^3}{\text{UTM}} \frac{1}{^{\circ}\text{K}} \right] = \left[ \frac{\text{kg m}}{\text{UTM } ^{\circ}\text{K}} \right]. \quad (1.9.3)$$

Si  $\rho$  en ( $\text{kg}_m/\text{m}^3$ ):

$$R \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}_m} \frac{1}{^\circ\text{K}} \right] = \left[ \frac{\text{kg m}}{\text{kg}_m ^\circ\text{K}} \right] \quad (1.9.4)$$

El valor de R usando unidades UTM es 9.807 veces mayor que usando unidades kilogramo masa ( $\text{kg}_m$ ).

El volumen (V) de una masa (m) es (m Vsl), por lo que:

$$p V = m R T \quad (1.9.5)$$

Ahora con referencia al número de moles, en donde se llama mol (molécula-gramo) de un gas al número de gramos masa del gas igual a su peso molecular (M); si  $\bar{v}_s$  es el volumen por mol (volumen molar), la ley anterior queda:

$$p \bar{v}_s = M R T \quad (1.9.6)$$

En general, si "n" es el número de moles de gas que hay en el volumen V:

$$p V = n M R T \quad (1.9.7)$$

donde  $n M = m$ .

De acuerdo a la expresión anterior, el producto  $M R$  debe ser constante ya que  $pV/nT$  es igual para cualquier gas perfecto; a este producto  $M R$  se le conoce como constante universal de los gases y su valor depende de las unidades empleadas:

$$M R = 8316 \frac{\text{N m}}{\text{kg}_m \text{ mol } ^\circ\text{K}} \quad (1.9.8)$$

por lo que:

$$R = \frac{8316}{M} \frac{\text{N m}}{\text{kg}_m ^\circ\text{K}} \quad , \quad K = \frac{1545}{M} \frac{\text{lb pie}}{\text{lb}_m ^\circ\text{K}} \quad (1.9.9)$$

o en unidades técnicas:



$$R = \frac{8316 \text{ kg m}}{M \text{ UTM } ^\circ\text{K}} \quad (1.9.10)$$

por lo tanto, conociendo el peso molecular (M) se puede determinar la constante R.

### 1.10 Condiciones adiabáticas.

Los cambios de volumen o de densidad se pueden dar como resultado de un cambio de presión o de un cambio de temperatura; si el primero se lleva a cabo manteniendo constante la temperatura, se le llama proceso isotérmico; por otro lado, si el segundo se hace a presión constante se llama proceso isobárico. En ambos casos debe haber una transferencia de calor hacia, o desde el gas para mantener las condiciones descritas.

Si el cambio de densidad ocurre sin transferencia de calor hacia o desde el gas, el proceso se llama adiabático. Si además, dentro del gas no se genera calor, por fricción por ejemplo, entonces la densidad y la presión absoluta de un gas perfecto se relacionan por medio de la expresión:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constante} \quad (1.10.1)$$

donde:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad ,$$

siendo  $C_p$  y  $C_v$  los calores específicos a presión y volumen constante, respectivamente.

Para el aire y otros gases diatómicos, las " $\gamma$ " usuales oscilan alrededor de  $\gamma = 1.4$  (adim).

### 1.11 Módulo de elasticidad volumétrico; compresibilidad.

A un cambio en el esfuerzo de compresión aplicado a cierta cantidad de sustancia, le corresponde cierto cambio en el volumen de ésta. En muchos casos, un líquido puede considerarse como incompresible, pero si hay cambios de presión grandes o muy rápidos, se debe considerar la compresibilidad, la cual se expresa por el módulo de elasticidad volumétrico. Si en una unidad de volumen  $V$  de un fluido, la presión aumenta en  $dp$  y el volumen disminuye en  $-dV$ , entonces el módulo de elasticidad volumétrico  $K$  se define como:

$$K = - \frac{dp}{dV/V} \left[ \frac{F L^{-2}}{L^3 L^{-3}} \right] = - \frac{dp}{dV/V} \left[ \frac{F}{L^2} \right]. \quad (1.11.1)$$

Para el agua a temperatura y presiones ordinarias:

$$K = 21000 \text{ kg/cm}^2.$$

Al comprimirse un líquido aumenta su resistencia a la compresión, por lo que  $K$  aumenta con la presión.

Como la densidad se define como la masa entre el volumen ( $m/V$ ), el módulo de elasticidad volumétrico también se puede definir como:

$$K = \rho \frac{dp}{d\rho}. \quad (1.11.2)$$

Para un gas la ecuación de estado se puede escribir como:

$$p = p(V_s, T). \quad (1.11.3)$$

Derivando una función de dos variables:

$$dp = \left( \frac{\partial p}{\partial V_s} \right)_T dV_s + \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{V_s} dT, \quad (1.11.4)$$

de donde, para temperatura constante ( $dT = 0$ ), se tiene el módulo de elasticidad volumétrico isotérmico:

$$K = -V_s \frac{dp}{dV_s} = - \left( \frac{\partial p}{\partial V_s / V_s} \right)_{T=cte} \quad (1.11.5)$$

El coeficiente de compresibilidad isotérmico de un fluido se define como el cambio en volumen con la presión, de la unidad de volumen, es decir:

$$c = \frac{1}{K} = - \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad (1.11.6)$$

Las unidades del módulo de elasticidad volumétrico en los sistemas MKS, cgs y FPS son respectivamente:

$$[\text{kg/m}^2], [\text{g/cm}^2], [\text{lb/pie}^2]$$

Conversiones:

$$1 \text{ kg/m}^2 = 0.1 \text{ g/cm}^2,$$

$$1 \text{ lb/pie}^2 = 4.88 \text{ kg/m}^2.$$

Problemas:

1.11.1 Para un módulo de elasticidad volumétrico constante, ¿cómo varía la densidad de un fluido con la presión?

Solución:

De la Ec 1.11.2 :

$$K = \rho \frac{dp}{d\rho}, \quad \text{donde } K = \text{constante},$$

$$K \int \frac{d\rho}{\rho} = \int dp, \quad \text{integrando:}$$

$$K \ln \rho = p,$$

$$\rho = e^{p/K}.$$

De acuerdo a esta expresión la densidad varía en forma exponencial con la presión y con un módulo de elasticidad volumétrico constante.

1.11.2 Se aplica una presión de  $10 \text{ kg/cm}^2$  a  $280 \text{ dm}^3$  de un líquido, lo que da lugar a que el volumen se reduzca en  $0.56 \text{ dm}^3$ , ¿cuál es el módulo de elasticidad en  $\text{kg/cm}^2$ , y su compresibilidad?

Solución:

De la Ec 1.11.1 :

$$K = - \frac{dp}{dV/V} = - \frac{10 \text{ kg/cm}^2}{(-0.56 \text{ dm}^3/280 \text{ dm}^3)} = 5000 \text{ kg/cm}^2$$

$$c = \frac{1}{K} = 2 \times 10^{-4} (\text{kg/cm}^2)^{-1}$$

### 1.12 Presión de vapor; punto de ebullición.

Una sustancia líquida tiende a evaporarse debido a que en su superficie libre existe un movimiento continuo de moléculas hacia el exterior. Estas moléculas ejercen una presión parcial sobre el líquido; a esta presión se le llama presión de vapor.

Al transcurrir un cierto tiempo, el número de moléculas que retornan al líquido es igual al número de moléculas que escapan, alcanzándose un equilibrio. Este fenómeno se debe a la actividad molecular, y ésta a su vez depende de la temperatura; por lo tanto, la presión de vapor depende de la temperatura, aumentando con ella.

Cuando la presión de vapor es igual a la presión que se ejerce sobre el líquido, se tiene el punto de ebullición, es decir, el líquido comienza a hervir. En este fenómeno, primero se forman en el seno del líquido burbujas de vapor, las cuales luego suben a la superficie.

Si la presión externa a la que está sometido un líquido se reduce, entonces la ebullición comienza a un valor de temperatura menor; por ejemplo, se puede hacer hervir el agua, aun a la

temperatura ambiente, si se reduce la presión lo suficiente.

En diversos fenómenos físicos que involucren movimiento de líquidos, se pueden presentar lugares donde existan presiones muy bajas, las cuales pueden ser iguales o menores a la presión de vapor del líquido. Si esto ocurre, el líquido se vuelve vapor; a este fenómeno se le llama cavitación; es decir, se forman cavidades de vapor las cuales son arrastradas por el movimiento del líquido y al llegar a zonas donde la presión es mayor que la presión de vapor, dichas cavidades se colapsan.

La formación y colapso de burbujas de vapor disminuyen el rendimiento de las bombas y turbinas y pueden ocasionar erosiones en las partes metálicas en la región de cavitación.

### 1.13 Tensión superficial; capilaridad.

En la interfase entre un líquido y un gas parece formarse en el líquido una película debido a la atracción de las moléculas del líquido situadas por debajo de la superficie. Se puede observar cómo algunos insectos se mantienen soportados por la superficie del agua en reposo. Esta propiedad de ejercer una tensión se le llama tensión superficial ( $\sigma$ ) y es la fuerza necesaria para mantener la unidad de longitud de la película en equilibrio. También puede considerarse como la energía por unidad de área para llevar las moléculas a la superficie. Al fenómeno anterior entre dos líquidos (inmiscibles) se le llama tensión interfacial.

La tensión superficial ( $\sigma$ ) varía con la temperatura debido a que aumenta el movimiento molecular del líquido; por ejemplo, la tensión superficial para el agua varía de 0.00745 kg/m a 20°C hasta 0.00596 kg/m a 100°C.

La presión dentro de una gota de líquido aumenta debido a la tensión superficial. Para una gota esférica de radio  $r$ , la

presión  $p$  necesaria para equilibrar la presión debida a la tensión superficial  $\sigma$ , se obtiene considerando las fuerzas que actúan sobre un cuerpo libre semiesférico:

$$p \pi r^2 = 2 \pi r \sigma, \quad (1.13.1)$$

$$p = \frac{2 \sigma}{r}. \quad (1.13.2)$$

Se observa que al disminuir el radio de la gota, aumenta la presión.

La capilaridad se debe a la tensión interfacial, a la adhesión entre líquido y sólido y a la cohesión del líquido.

Las fuerzas de atracción molecular dan lugar a la cohesión, es decir, a la tendencia de un líquido a mantenerse unido y no expandirse indefinidamente como un gas. Las fuerzas de adhesión existen entre las moléculas de un fluido y las moléculas de una superficie sólida.

Si las fuerzas de adhesión entre un líquido y un sólido son mayores que las fuerzas de cohesión, el líquido mojará al sólido y la tensión superficial causará que el líquido se eleve dentro de un tubo pequeño al sumergirlo en el mismo (Fig 1.4.b; se muestran dos tubos capilares de diferente diámetro).

Si el líquido no moja al sólido, es decir, si son mayores las fuerzas de cohesión, la tensión superficial hace descender el menisco en el tubo pequeño (Fig 1.4.a).

Tomando en cuenta la altura que alcanza un líquido dentro de un tubo capilar, al ser introducido éste en el seno del fluido y con base en la Estática de Fluidos (Cap 2), se llega a la siguiente expresión de capilaridad:

$$h = \frac{2 \sigma \cos \theta}{g \rho r}, \quad (1.13.3)$$

donde:

$\sigma$  : tensión superficial,

$\theta$  : ángulo de contacto entre el líquido y la pared del tubo (Fig 1.4.b)

$r$  : radio del tubo capilar.

Las unidades de la tensión superficial en los sistemas MKS, cgs y FPS son respectivamente:

$$\sigma \text{ [F L}^{-1}\text{] ; [kg/m] , [g/cm] , [lb/pie] .}$$

Conversiones:

$$1 \text{ kg/m} = 10 \text{ g/cm} ,$$

$$1 \text{ lb/pie} = 1.4895 \text{ kg/m} .$$

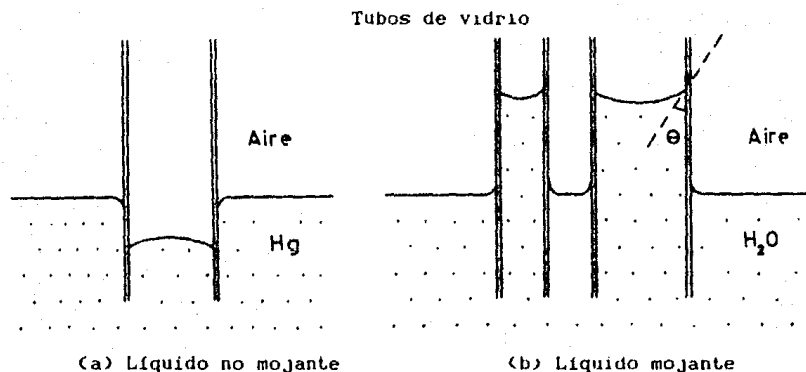


Fig 1.4 Fenómeno de capilaridad.

Problemas:

1.13.1 ¿Cuál es la presión en el interior de una gota de agua de 0.05 mm de diámetro a 20°C, si en el exterior de la gota existe la presión atmosférica normal de 1.033 kg/cm<sup>2</sup> ?

Solución:

De la Ec 1.13.2 :

$$p = \frac{2 \sigma}{r} = \frac{(2 \times 0.00745 \text{ kg/m})}{0.025 \times 10^{-3} \text{ m}} = 596 \text{ kg/m}^2 = 0.0596 \text{ kg/cm}^2,$$

$p_i = p + p_{atm}$ ,  $p_i$ : presión en el interior de la gota.

$$p_i = 0.0569 + 1.033 = 1.0926 \text{ kg/cm}^2.$$

1.13.2 ¿Cuál será el ascenso capilar del agua en contacto con el aire (tensión superficial 0.073 N/m) en un tubo limpio de vidrio de 5 mm de diámetro?

Solución:

De la Ec 1.13.3 :

$$h = \frac{2 \sigma \cos \theta}{\rho g r},$$

considerando que el ángulo de contacto entre un tubo completamente limpio y el agua en contacto con el aire es cero ( $\theta = 0^\circ$ ):

$$h = \frac{2 (0.073 \text{ N/m}) \cos 0^\circ}{1000 \text{ kg/m}^3 (9.81 \text{ m/seg}^2) 0.0025 \text{ m}},$$

$$= 0.005953 \text{ m} = 5.953 \text{ mm}.$$

1.13.3 ¿Cuál será el ascenso capilar del mercurio (densidad relativa 13.56, tensión interfacial 0.377 N/m, ángulo de contacto aproximado de  $140^\circ$ ) en contacto con agua en un tubo limpio de vidrio de 6 mm de diámetro?

Nota: Al moverse el mercurio desplaza agua, cuya densidad no es despreciable.

Solución:

De la Ec 1.13.3 :



$$h = \frac{2 \sigma \cos \theta}{\rho g r}$$

donde ahora  $\sigma$  corresponde a la tensión interfacial y  $\rho$  a la diferencia de densidades de los líquidos:

$$h = \frac{2 (0.377 \text{ N/m}) \cos 140^\circ}{(13.56 - 1) (1000 \text{ kg/m}^3) (9.81 \text{ m/seg}^2) (0.003 \text{ m})}$$

$$= -0.001563 \text{ m} = -1.563 \text{ mm}$$

El signo negativo indica que existe una depresión capilar.

## CAPITULO 2

### ESTATICA DE LOS FLUIDOS

#### INTRODUCCION

La rama de la Mecánica de Fluidos que estudia los fluidos en reposo es la Estática de los Fluidos. Esta rama abarca tanto el estudio de la presión y sus variaciones a través del fluido, como el estudio de las fuerzas debidas a la presión sobre áreas finitas. Como no existe movimiento de una capa de fluido en relación con la adyacente, no existen esfuerzos cortantes; todas las fuerzas debidas a la presión del fluido son normales a las superficies sobre las cuales actúan.

Los fluidos que al moverse se comportan como sólidos, también se incluyen dentro de esta rama, debido a la semejanza de estos fenómenos.

## 2.1 Presión en un punto.

Se define a la presión media como el cociente de la fuerza normal que actúa sobre un área y dicha área. Se puede entonces entender a la presión en un punto como el límite de la fuerza normal ( $F$ ) a una superficie entre el área de esa superficie ( $A$ ), cuando ésta tiende a cero:

$$p = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{F}{A} \quad (2.1.1)$$

Como sólo existen fuerzas normales a las superficies sumergidas en un fluido en reposo, en un punto cualquiera existe la misma presión en cualquier dirección. Esto significa que si un elemento diferencial de área ( $dA$ ) es sumergido totalmente en un fluido en reposo, actuara una fuerza cuya magnitud es constante en cualquiera de sus caras, independientemente de la orientación que tenga  $dA$ .

Esto se demuestra considerando un elemento de fluido en forma de cuña en el punto  $(x, y)$ , de espesor unitario y lados  $dx, dy$  y  $ds$ . (Fig 2.1):

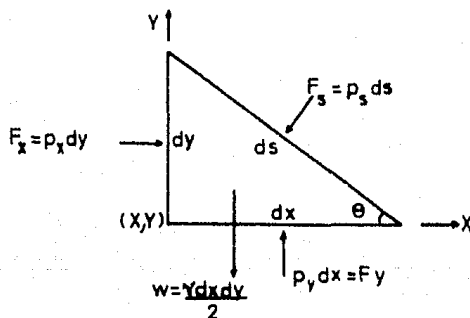


Fig 2.1 Diagrama de cuerpo libre de un elemento de fluido en reposo.

Tomando en cuenta que sólo existen fuerzas normales y de gravedad, las ecuaciones de equilibrio en las direcciones "x" y "y" son las siguientes:

$$\sum F_x = p_x dy - p_o ds \sin \theta = 0, \quad (2.1.2)$$

$$\sum F_y = p_y dx - p_o ds \cos \theta - \gamma \frac{dx dy}{2} = 0, \quad (2.1.3)$$

donde  $p_x$ ,  $p_y$  y  $p_o$  son las presiones medias en las tres caras y  $\gamma$  el peso específico del fluido.

Tomando el límite cuando el elemento de fluido tiende a cero, conservando el ángulo  $\theta$  y usando las relaciones geométricas:

$$ds \sin \theta = dy, \quad (2.1.4)$$

$$ds \cos \theta = dx, \quad (2.1.5)$$

se obtiene:

$$p_x dy - p_o dy = 0, \quad (2.1.6)$$

$$p_y dx - p_o dx - \gamma \frac{dx dy}{2} = 0. \quad (2.1.7)$$

Despreciando el tercer término de la Ec 2.1.7, por ser muy pequeño comparado con los otros dos, y dividiendo entre  $dy$  y  $dx$  respectivamente, se tiene:

$$p_o = p_x = p_y. \quad (2.1.8)$$

Esto demuestra que la presión en un punto de un fluido en reposo es la misma en cualquier dirección. La comprobación para el caso de tres dimensiones, correspondería a un tetraedro de fluido con tres caras en los planos coordenados y la cuarta cara inclinada y se realizaría en forma similar.

En fluidos ideales (de viscosidad nula) no se originan esfuerzos cortantes durante el movimiento del fluido por lo que también la presión en un punto será la misma en cualquier dirección.

## 2.2 Variación de la presión en el seno de un fluido en reposo; fluidos compresibles y fluidos incompresibles.

Considere un elemento en reposo de fluido en forma de paralelepípedo rectangular, como el mostrado en la Fig 2.2; este elemento está en equilibrio y las fuerzas que actúan sobre él son las fuerzas de superficie (debidas a la presión), así como las fuerzas másicas. Puesto que la única fuerza másica que actúa sobre el elemento es la de gravedad, ésta se puede expresar como  $-\gamma \, dx \, dy \, dz$ .

Si la presión en el centro  $C(x,y,z)$  del elemento es "p", la fuerza de superficie que actúa en la cara superior es:

$$\left[ p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx \, dz ,$$

en tanto que, la fuerza que actúa en la cara opuesta es:

$$\left[ p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx \, dz .$$

Debido a que el elemento está en reposo, la sumatoria en cualquier dirección debe ser igual a cero. Tanto en la dirección X como en la Z, las únicas fuerzas que actúan sobre las caras verticales son las de presión y como éstas son de igual magnitud pero de sentido contrario se tiene que:

$$\Sigma F_x = \Sigma F_z = 0 , \quad (2.2.1)$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 , \quad (2.2.2)$$

que significa que la presión no varía en un plano horizontal.

Sumando las fuerzas que actúan sobre el elemento en la dirección Y, se tiene:

$$\sum F_y = - \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz - \gamma dx dy dz = 0 ; \quad (2.2.3)$$

dividiendo entre el volumen "dx dy dz":

$$- \frac{\partial p}{\partial y} - \gamma = 0 . \quad (2.2.4)$$

Como se observa, la presión "p" es sólo función de "y", por lo que se puede escribir:

$$dp = - \gamma dy . \quad (2.2.5)$$

El signo negativo indica que la presión disminuye en la dirección en la cual "y" aumenta, es decir, hacia arriba. Esta expresión es válida tanto para fluidos compresibles como para incompresibles.

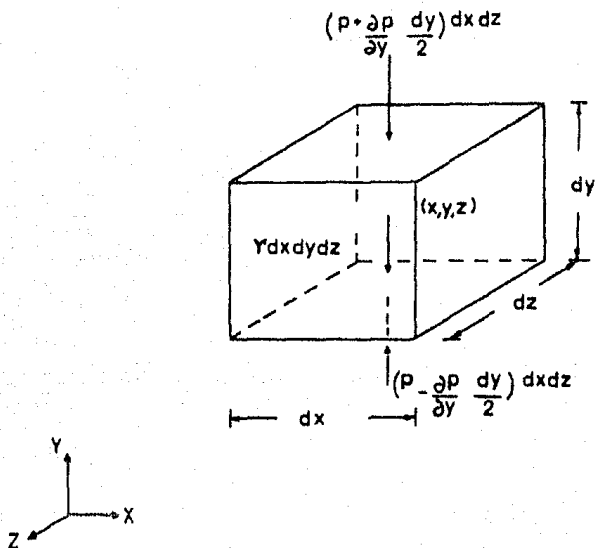


Fig 2.2 Diagrama de cuerpo libre de un elemento de fluido en reposo.

### 2.2.1 Fluidos incompresibles.

Integrando la Ec 2.2.5 para fluidos incompresibles y homogéneos, es decir, con peso específico constante, se obtiene la siguiente relación.

$$p = -\gamma y + C, \quad (2.2.6)$$

donde C es una constante de integración.

Generalmente la variación de la presión hidrostática se expresa como:

$$p = \gamma h, \quad (2.2.7)$$

donde h se mide verticalmente hacia abajo ( $h = -y$ ) desde la superficie libre del líquido. Por lo tanto, la presión aumenta en forma lineal con respecto a la profundidad, sin importar la forma del recipiente que contiene el líquido.

### 2.2.2 Fluidos compresibles.

Para un fluido compresible la densidad varía al variar la presión, por lo que la Ec 2.2.5 no se puede integrar a menos que se conozca la forma de esta variación. Con los gases, se puede emplear la ecuación:

$$\frac{p}{\rho^n} = \text{constante}, \quad (2.2.8)$$

donde p es la presión absoluta,  $\rho$  la densidad y n es una constante cuyo valor depende del proceso involucrado. Por ejemplo para un gas ideal a temperatura constante:  $n = 1$ , por lo que:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_o}{\rho_o} = \text{constante}. \quad (2.2.9)$$

Despejando  $\rho$ :

$$\rho = \frac{p}{p_0} \rho_0 \quad (2.2.10)$$

Sustituyendo  $\gamma$  por " $\rho g$ " en la Ec 2.2.5 y sustituyendo la Ec 2.2.10 se obtiene:

$$dy = - \frac{p_0}{\rho_0 g} \frac{dp}{p} ; \quad (2.2.11)$$

integrando entre límites:

$$\int_{y_0}^y dy = - \frac{p_0}{\rho_0 g} \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} ,$$

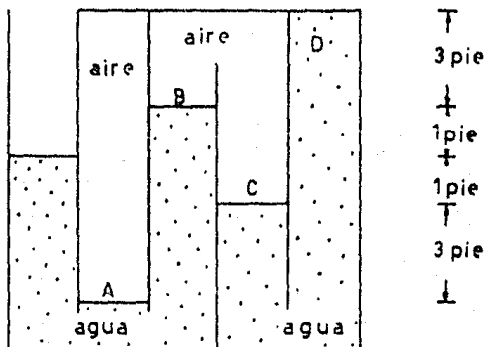
de donde se obtiene finalmente:

$$p = p_0 \exp \left( - \frac{\rho_0 g}{p_0} (y - y_0) \right) , \quad (2.2.12)$$

la cual corresponde a la variación de la presión con la elevación para un gas a temperatura constante.

#### PROBLEMAS:

2.2.1 El recipiente de la figura contiene agua y aire, como se indica. ¿Cuál es el valor de la presión en los puntos A, B, C, y D, en libras sobre pulgada cuadrada (lb/plg<sup>2</sup>)?





Solución:

De la Ec 2.2.7:

$$p = \gamma h .$$

$$p_A = (62.4 \text{ lb/pie}^3) (4 \text{ pies}) = 249.6 \text{ lb/pie}^2 = 1.73 \text{ lb/plg}^2 .$$

Por otra parte:

$$p_B = p_A - p_{\text{columna agua}} , \quad \text{por lo tanto:}$$

$$p_B = p_A - \gamma h .$$

Sustituyendo:

$$p_B = 249.6 \text{ lb/pie}^2 - (62.4 \text{ lb/pie}^3) (5 \text{ pies}) ,$$

$$p_B = - 62.4 \text{ lb/pie}^2 = - 0.433 \text{ lb/plg}^2 .$$

Despreciando los efectos de la columna de aire:

$$p_C = p_B = - 0.433 \text{ lb/plg}^2 ,$$

y por último:

$$p_D = p_C - p_{\text{columna agua}} ,$$

$$p_D = p_C - \gamma h ,$$

$$p_D = - 62.4 \text{ lb/pie}^2 - (62.4 \text{ lb/pie}^3) (5 \text{ pies}) ,$$

$$p_D = - 374.4 \text{ lb/pie}^2 = - 2.6 \text{ lb/plg}^2 .$$

2.2.2 Suponiendo que en la atmósfera prevalezca la condición isotérmica, calcúlense la presión y la densidad a 6000 pies de altura, si al nivel del mar  $p = 14.7 \text{ lb/plg}^2$  absolutos de presión y  $\rho = 0.077 \text{ lb}_m/\text{pie}^3$ .

Solución:

De la Ec 2.2.12:

$$p = p_o \exp \left( - \frac{\rho_o g}{p_o} (y - y_o) \right) ,$$

$$p = (14.7 \times 144 \text{ lb/pie}^2) \exp \left[ - \frac{(0.077 \text{ lb}_m/\text{pie}^3)(32.2 \text{ pie/seg}^2)(6000 \text{ pie})}{(14.7 \times 144 \text{ lb/pie}^2)(32.2 \text{ lb}_m/\text{pie}^3/\text{seg}^2)} \right] ,$$

$$p = 1701.7 \text{ lb/pie}^2 = 11.82 \text{ lb/plg}^2_{abs} .$$

Por ultimo de la Ec 2.2.10:

$$\rho = \frac{p}{p_o} \rho_o .$$

$$\rho = \frac{(11.82 \text{ lb/plg}^2)}{(14.7 \text{ lb/plg}^2)} (0.077 \text{ lb}_m/\text{pie}^3) = 0.062 \text{ lb}_m/\text{pie}^3 .$$

### 2.3 Presiones absoluta y manométrica.

Cuando la presión se expresa como la diferencia entre el valor real de dicha presión y el vacío completo, se le llama presión absoluta. Si la diferencia que se determina es la que existe entre la presión real del fluido y la presión atmosférica local, se le denomina presión manométrica.

Como se ilustra en la Fig 2.3, si la presión manométrica del fluido se encuentra por debajo de la presión atmosférica, se le llama presión de vacío, de succión o negativa. Las presiones absolutas siempre son positivas y las manométricas son positivas cuando son mayores a la atmosférica y negativas cuando son menores a ésta.

De la fig 2.3 se puede notar que:

$$P_{abs} = P_{atm} + P_{man} . \quad (2.3.1)$$

La presión atmosférica estándar es la presión media al nivel

del mar. La presión que se denota por medio de una columna de líquido se refiere a la fuerza por unidad de área que se ejerce sobre la base de la columna.

La Ec 2.2.7 se puede relacionar también con la densidad relativa expresada en la Ec 1.6.4:

$$p = \gamma_v \rho_r h , \quad (2.3.2)$$

donde el peso específico de agua ( $\gamma_v$ ) se puede tomar como 62.4 lb/pie<sup>3</sup> o 9807 N/m<sup>3</sup>. Por ejemplo, si se desea la presión en unidades de lb/plg<sup>2</sup>, se divide la expresión anterior entre 144:

$$p_{psi} = \frac{62.4}{144} \rho_r h = 0.433 \rho_r h , \quad (2.3.3)$$

donde h se utiliza en pies.

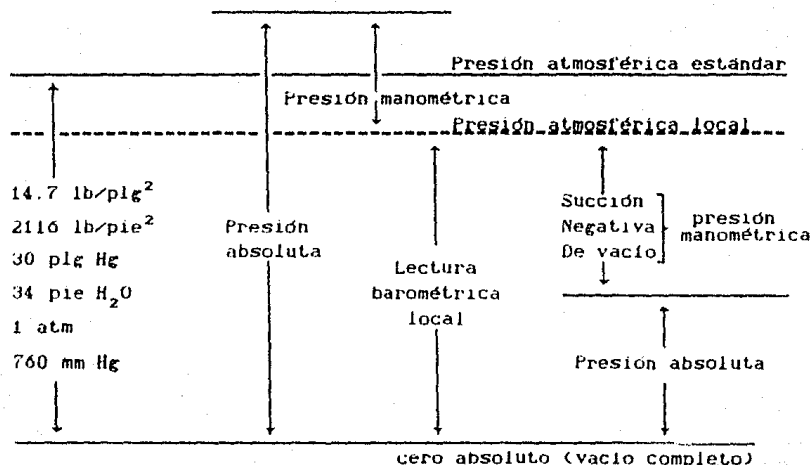


Fig 2.3 Diagrama de presiones.

## 2.4 Medidores de presión.

### 2.4.1 Barómetro.

El barómetro es un instrumento que sirve para la determinación de la presión atmosférica local; para ello se puede utilizar un barómetro de mercurio o un barómetro anerode.

El barómetro de mercurio está constituido por un tubo de vidrio cerrado en uno de sus extremos, lleno de mercurio de tal forma que su extremo abierto permanezca sumergido en un recipiente con mercurio, como se ilustra en la Fig 2.4.

Si no existe aire en el interior del tubo, sólo actuará sobre la superficie libre del mercurio la presión de vapor de éste, por lo que, si la presión ( $h_v$ ) de este vapor se da en centímetros de mercurio y la altura de la columna ( $y$ ) se mide en las mismas unidades, la presión en el punto A se obtiene como:

$$h_v + y = h_A \text{ cm de Hg.} \quad (2.4.1)$$

La presión de vapor del mercurio es muy pequeña a temperatura ambiente ( $2.32 \times 10^{-5} \text{ lb/plg}^2$  a  $20^\circ\text{C}$ ), por lo que se puede despreciar; la presión barométrica dependerá de la elevación sobre el nivel del mar y las condiciones del tiempo. Por tanto, la presión atmosférica se puede obtener con la expresión:

$$P_A = P_{\text{atm}} = \gamma y. \quad (2.4.2)$$

El barómetro anerode consiste de un fuelle de metal dentro del cual se ha hecho un vacío; éste se contrae o expande de acuerdo con las variaciones de la presión atmosférica; el movimiento se transmite a un indicador sobre una escala.

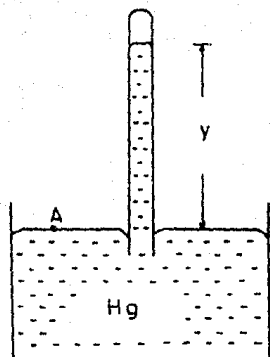


Fig 2.4 Barómetro de mercurio.

#### 2.4.2 Manómetro de Bourdón.

Este manómetro consta de un tubo metálico hueco, aplastado en su sección transversal y curvado en su longitud; cerrado en un extremo y el otro comunicado a la presión a medir. Al aumentar la presión en el interior del tubo, éste tiende a estirarse y acciona una manecilla, la cual indica en una carátula graduada la presión existente. La manecilla indicará una lectura de cero cuando las presiones interna y externa al tubo sean iguales, no importando su valor. Si se le aplica una presión mayor al tubo que la máxima para la cual está proyectado, puede deformarse más allá de su límite elástico y entonces imposibilitarse su calibración.

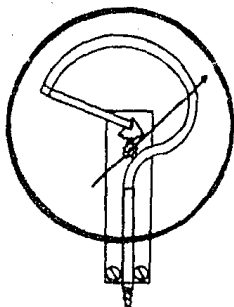


Fig 2.5 Manómetro de Bourdon.

### 2.4.3 Manómetros.

Los manómetros son instrumentos en los cuales se utilizan columnas de un líquido para medir la diferencia de presión entre un punto y la atmósfera, o entre dos puntos cuyas presiones pueden ser diferentes a la atmosférica. El mas sencillo es el llamado Piezómetro (Fig 2.6), el cual mide una presión mayor a la presión atmosférica. Consta de un tubo vertical conectado al recipiente del fluido, éste se levanta a lo largo del tubo hasta una altura  $h$  la cual va del menisco hasta un punto de interés.

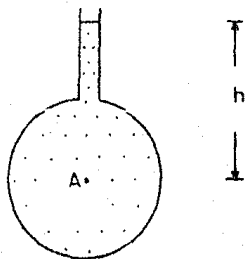


Fig 2.6 Piezómetro.

El piezómetro mide presiones manométricas bajas y positivas. Para la medición de presiones bajas positivas o negativas, en líquidos, se emplean manómetros con un tubo en "U" como los de la Fig.2.7.

Para el manómetro del caso (a), se tiene que:

$$p_A = - \gamma h , \quad (2.4.3)$$

$$\text{o} \quad h_A = - \rho r h , \quad (2.4.4)$$

donde  $\gamma$  y  $\rho r$  corresponden al líquido contenido en el manómetro, y  $h_A$  está en unidades de longitud de columna de agua.

Para presiones mayores positivas o negativas se usa otro líquido en el tubo en "U" de mayor densidad e inmisible con el del recipiente, como el del caso (b):

$$p_A = h_1 \gamma_2 - h_2 \gamma_1 , \quad (2.4.5)$$

$$\text{o} \quad h_A = h_1 \rho r_2 - h_2 \rho r_1 , \quad (2.4.6)$$

donde  $h_A$  está en unidades de longitud de columna de agua.

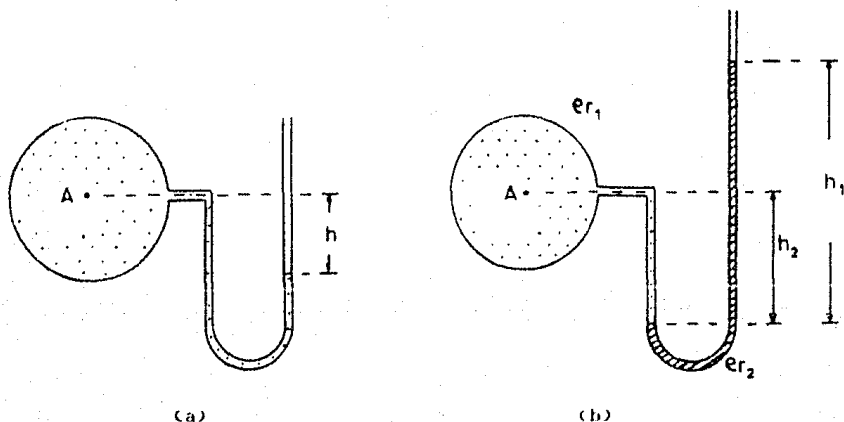


Fig 2.7 Manómetros

Para obtener la diferencia de presiones desconocidas entre dos puntos, se emplean los manómetros diferenciales, Fig 2.8; para ello se empieza el procedimiento de análisis de cualquiera de ambos puntos. Para el caso (a) se tiene que:

$$p_A = h_1 \gamma_1 - h_2 \gamma_2 + h_3 \gamma_3 = p_B .$$

$$\text{o} \quad p_A - p_B = h_1 \gamma_1 + h_2 \gamma_2 - h_3 \gamma_3 . \quad (2.4.7)$$

En unidades de longitud de columna de agua:

$$h_A - h_B = h_1 \rho r_1 + h_2 \rho r_2 - h_3 \rho r_3 . \quad (2.4.8)$$

Para el caso (b):

$$p_A - p_B = -h_1 \gamma_1 + h_2 \gamma_2 + h_3 \gamma_3 , \quad (2.4.9)$$

o en unidades de columna de agua:

$$h_A - h_B = -h_1 \rho r_1 + h_2 \rho r_2 + h_3 \rho r_3 . \quad (2.4.10)$$

Por ultimo, para medir pequeñas diferencias de presión, se tienen los micromanómetros. En ellos se cuenta con pequeños telescopios provistos de retículas horizontales para medir la diferencia de altura entre dos meniscos, la cual se lee en un vernier.

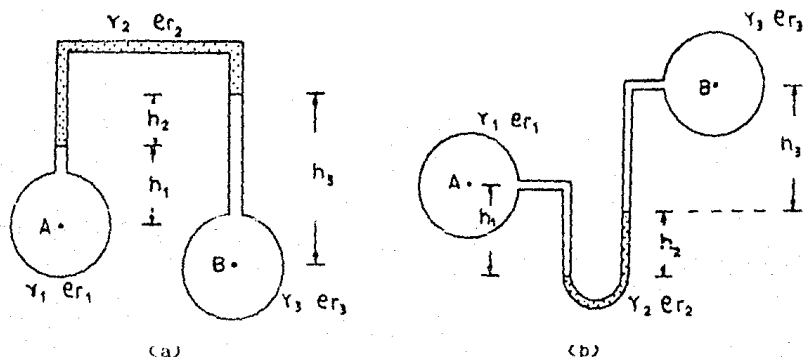


Fig 2.8 Manómetros.



## 2.5 Aplicaciones.

2.5.1 Determinese la lectura de  $h$  en la Fig 2.7(a) para  $p_A = 20$  kPa de vacío, si el líquido es queroseno ( $\rho_r = 0.83$ ).

Solución:

De la Ec 2.4.3:

$$p_A = -\gamma h \quad \text{o} \quad p_A = -\rho_r \gamma_v h,$$

de donde:

$$h = \frac{p_A}{\rho_r \gamma_v} = \frac{20 \times 10^3 \text{ N/m}^2}{(0.83)(9807 \text{ N/m}^3)},$$

$$h = 2.457 \text{ m de queroseno} = 8.06 \text{ pie}.$$

2.5.2 En la Fig 2.6(b),  $\rho_{r1} = 0.86$ ,  $\rho_{r2} = 1.0$ ,  $h_2 = 8.3$  cm y  $h_1 = 17$  cm. Determinese la presión manométrica  $p_A$  en mm de mercurio. Si la presión barométrica es de 29.5 pig de Hg ¿cual es el valor de  $p_A$  absoluta?

Solución:

De la Ec 2.4.5:

$$p_A = (h_1 \rho_{r2} - h_2 \rho_{r1}) \gamma_v, \quad \text{sustituyendo:}$$

$$p_A = \left[ \left( \frac{17}{30.48} \text{ pie} \right) (1.0) - \left( \frac{8.3}{30.48} \text{ pie} \right) (0.86) \right] (62.4 \text{ lb/pie}^3),$$

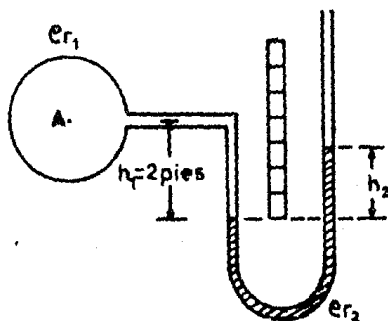
$$p_A = 20.19 \text{ lb/pie}^2 = 0.1402 \text{ lb/pig}^2.$$

Para convertir esta presión a una equivalente columna de mercurio, se puede utilizar la Ec 2.3.3:

$$h_A = \frac{p_A}{0.433 \rho_r} = \frac{0.1402}{(0.433)(13.6)} = 0.0238 \text{ pie Hg} = 0.285 \text{ pig Hg},$$

$$h_A = 0.285 \text{ pig} + 29.5 \text{ pig} = 29.785 \text{ pig Hg}.$$

2.5.3 El recipiente de la figura contiene agua y el fluido manométrico tiene una densidad relativa de 2.94. Cuando el menisco de la izquierda ocupa la posición cero de la escala,  $p_A = 10 \text{ cmH}_2\text{O}$ . Encuéntrese la lectura del menisco de la derecha para  $p_A = 8 \text{ kPa}$ .



Solución:

Analizando la figura anterior cuando:

$$p_A = 10 \text{ cm H}_2\text{O} = \left(\frac{10}{30.48} \text{ pie}\right)(62.4 \text{ lb/pie}^3) = 20.47 \text{ lb/pie}^2,$$

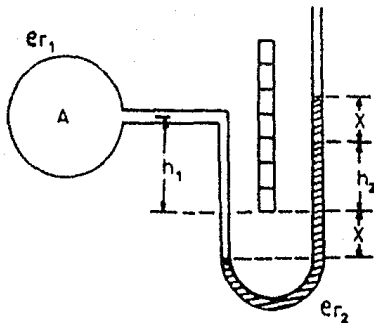
se tiene que:

$$p_A = h_2 \rho_{r_2} \gamma_v - h_1 \rho_{r_1} \gamma_v, \quad \text{por lo tanto:}$$

$$h_2 = \frac{p_A + \rho_{r_1} \gamma_v h_1}{\rho_{r_2} \gamma_v} = \frac{(20.47 \text{ lb/pie}^2) + (1)(62.4 \text{ lb/pie}^3)(2 \text{ pie})}{(2.94)(62.4 \text{ lb/pie}^3)}$$

$$h_2 = 0.792 \text{ pie} = 24.14 \text{ cm}.$$

Cuando en el recipiente se tiene una presión mayor ( $8 \text{ kPa} = 169.34 \text{ lb/pie}^2$ ), la columna de agua dentro del tubo en "U" aumenta "x" unidades de longitud, en tanto que el fluido manométrico del menisco de la derecha también aumenta en la misma cantidad, como se muestra en la figura siguiente:



En esta figura se observa que:

$$p_A = p_{r_2} \gamma_v (h_2 + 2x) - p_{r_1} \gamma_v (h_1 + x) .$$

Despejando a x:

$$x = \frac{p_A + p_{r_1} \gamma_v h_1 - p_{r_2} \gamma_v h_2}{2 p_{r_2} \gamma_v - p_{r_1} \gamma_v} ,$$

$$x = \frac{169.34 \text{ lb/pie}^2 + (0.2.4 \text{ lb/pie}^3 \times 2 \text{ pie}) - (2.94 \times 0.2.4 \text{ lb/pie}^3 \times 0.792 \text{ pie})}{2 (2.94) (0.2.4 \text{ lb/pie}^3) - (1) (0.2.4 \text{ lb/pie}^3)}$$

$$x = 0.489 \text{ pie} = 14.90 \text{ cm} .$$

Por tanto, la lectura del menisco de la derecha es:

$$L = h_2 + x = 24.14 + 14.90 = 39.04 \text{ cm} .$$

## 2.6 Fuerzas sobre superficies planas y curvadas.

### 2.6.1 Fuerzas sobre superficies planas.

La presión de un fluido, ejerce un empuje sobre cada parte de una superficie con la cual esté en contacto, por lo que se tiene una serie de fuerzas distribuidas en dicha superficie. Estas

fuerzas distribuidas tienen una resultante equivalente, la cual puede ser calculada.

*Superficies planas horizontales.*

Para superficies planas horizontales dentro de un fluido estático, la presión que actúa sobre ellas es constante. La fuerza equivalente que actúa sobre dichas superficies tiene la siguiente magnitud:

$$\int p \, dA = p \int dA = p A ; \quad (2.6.1)$$

puesto que las fuerzas individuales son paralelas entre sí y del mismo signo. Su dirección es perpendicular a las superficies y está dirigida hacia ellas si  $p$  es positiva.

Para localizar la posición de la fuerza resultante, se selecciona arbitrariamente un par de ejes  $XY$ , Fig 2.9; el momento de la resultante es igual al momento del sistema de fuerzas distribuidas respecto a cualquier eje.

Tomando al eje  $Y$  se tiene:

$$p A \bar{x} = \int_A x p \, dA , \quad (2.6.2)$$

donde  $\bar{x}$  es la distancia de la resultante al eje  $Y$ . Como  $p$  es constante:

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int x \, dA = x_c , \quad (2.6.3)$$

donde  $x_c$  es la abscisa del centroide de la superficie.

Se obtiene un resultado similar para el otro eje:

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int y \, dA = y_c .$$

Por lo tanto, la fuerza resultante se localiza en el centro de dicha superficie plana horizontal.

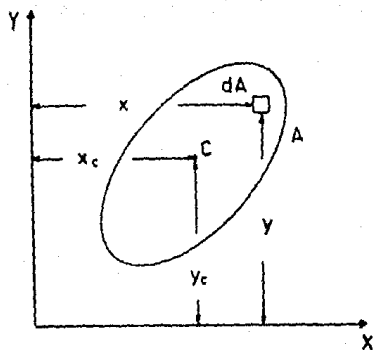


Fig 2.9 Centroide de una superficie.

*Superficies planas inclinadas.*

En el caso de superficies planas inclinadas, la presión que ejerce el fluido es variable.

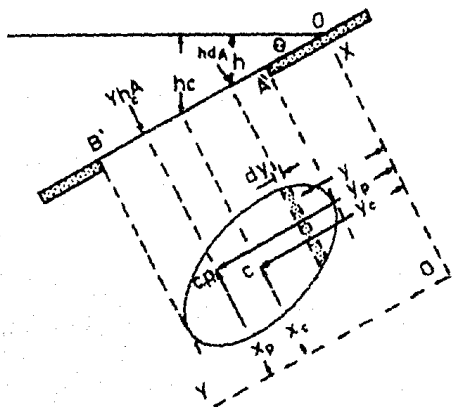


Fig 2.10 Fuerza resultante sobre una superficie plana inclinada.

Para analizar este caso, se supone una superficie como la de la Fig 2.10, la cual se encuentra inclinada un ángulo  $\theta^\circ$  con respecto a la horizontal. El eje X coincide con la intersección del plano de la superficie y la superficie libre del líquido, en tanto que el eje Y está en el plano de la superficie; es decir, el plano XY se encuentra en el plano de dicha superficie. En la figura, además de la nomenclatura utilizada, se muestra una proyección en un giro de  $90^\circ$  de la superficie.

En cada elemento de área  $dA$ , situada a una profundidad  $h$ , la magnitud de la fuerza  $dF$  es:

$$dF = p \, dA = \gamma \, h \, dA = \gamma \, y \, \text{sen } \theta \, dA . \quad (2.6.4)$$

Como se trata de un fluido en reposo, no hay esfuerzos de corte; todas las fuerzas elementales son normales a la superficie y paralelas entre sí; por tanto, la suma de todas ellas da la fuerza total en el lado de la superficie expuesta al fluido:

$$F = \int p \, dA = \int \gamma \, y \, \text{sen } \theta \, dA = \gamma \, \text{sen } \theta \int y \, dA ; \quad (2.6.5)$$

pero  $\int y \, dA$  es el primer momento del área alrededor del eje X que es igual a  $y_c \, A$ , donde  $A$  es el área total y  $y_c$  es la ordenada del centroide C; por tanto:

$$F = \gamma \, \text{sen } \theta \, y_c \, A = \gamma \, h_c \, A = p_c \, A , \quad (2.2.6)$$

donde  $p_c = \gamma \, h_c$  es la presión en el centroide y  $h_c = y_c \, \text{sen } \theta$ . Así, la fuerza total que ejerce un fluido en reposo sobre una superficie inclinada es igual al producto del área por la presión en su centroide. Como todas las fuerzas elementales son normales a la superficie, la línea de acción de la resultante también es normal a la superficie. Cualquier superficie puede girarse alrededor de un eje que pase por su centroide, sin que cambie el módulo de la resultante, siempre que la superficie permanezca totalmente sumergida en el líquido en reposo.

### Centro de presión.

La fuerza total o resultante que actúa sobre una superficie plana inclinada no pasa por su centroide, sino a través de un punto de coordenadas  $(x_p, y_p)$  llamado centro de presión. Para determinar  $(x_p, y_p)$  se igualan los momentos  $x_p F$ ,  $y_p F$  de la resultante con los momentos de las fuerzas distribuidas respecto a los ejes Y y X respectivamente:

$$x_p F = \int_A x p \, dA, \quad (2.6.7)$$

$$y_p F = \int_A y p \, dA, \quad (2.6.8)$$

de donde:

$$x_p = (1/F) \int_A x p \, dA, \quad (2.6.9)$$

$$y_p = (1/F) \int_A y p \, dA. \quad (2.6.10)$$

Para áreas de geometría sencilla,  $x_p$  y  $y_p$  se pueden calcular como sigue, partiendo de la Ec 2.6.9 :

$$x_p = \frac{1}{\gamma y_c A \sin \theta} \int_A x \gamma y \sin \theta \, dA = \frac{1}{y_c A} \int_A x y \, dA = \frac{I_{xy}}{y_c A}, \quad (2.6.11)$$

donde  $I_{xy}$  es el producto de inercia del área con respecto a los ejes X y Y.

Utilizando la relación de  $I_{xy}$  con el producto de inercia con respecto a los ejes centroidales paralelos a los ejes X, Y ( $\bar{I}_{xy}$ ):

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + x_c y_c A,$$

la Ec 2.6.11 queda como:

$$x_p = \frac{\bar{I}_{xy}}{y_c A} + x_c. \quad (2.6.12)$$

Si uno de los ejes centroidales,  $x = x_c$  o  $y = y_c$  es un eje de

simetría, el producto de inercia  $\bar{I}_{xy}$  es cero y el centro de presión tiene por abscisa  $x = x_c$ .

Como en general  $I_{xy}$  será positivo o negativo, el centro de presiones estará a un lado u otro de  $x = x_c$ .

Sustituyendo la Ec 2.6.6 en la Ec 2.6.10 se tiene:

$$y_p = \frac{1}{\gamma y_c A \sin \theta} \int_A y \gamma y \sin \theta \, dA = \frac{1}{y_c A} \int_A y^2 \, dA = \frac{I_x}{y_c A}, \quad (2.6.13)$$

donde  $I_x$  es el segundo momento del área o momento de inercia con respecto al eje X.

Aplicando el teorema de los ejes paralelos:

$$I_x = I_c + y_c^2 A,$$

donde  $I_c$  es el segundo momento del área respecto al eje horizontal que pasa por su centroide, en la Ec 2.6.13:

$$y_p = \frac{I_c}{y_c A} + y_c. \quad (2.6.14)$$

Se observa que el centro de presión siempre está por debajo del centroide de la superficie, puesto que  $I_c > 0$ .

La generalización del teorema de los ejes paralelos establece que el momento de inercia de un área con respecto a cualquier eje, es igual al momento de inercia con respecto a un eje paralelo que pase por su centroide, más el área por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes.

#### Prisma de presiones.

Para calcular la magnitud y colocación de la fuerza resultante se puede utilizar también el concepto de prisma de presiones, el cual supone a la superficie inclinada como la base del prisma.

De acuerdo a la Fig 2.11, la cara superior del prisma está en el plano cuya traza es la línea OM. En un área elemental  $dA$  se



ejerce una fuerza:

$$dF = \gamma h dA = dV \quad (2.0.15)$$

donde  $dV$  es un elemento de volumen del prisma que tiene como altura en cada punto a la presión  $\gamma h$ . Al integrar:

$$F = V \quad (2.0.16)$$

o sea, que el volumen del prisma es igual a la magnitud de la fuerza resultante.

A partir de las Ecs 2.0.9 y 2.0.10 se demuestra que las coordenadas  $(x_p, y_p)$  del centro de presión coinciden con el centroide del prisma de presiones, es decir:

$$x_p = \frac{1}{V} \int_V x dV, \quad y_p = \frac{1}{V} \int_V y dV \quad (2.0.17)$$

Este método se recomienda para superficies de geometría sencilla.

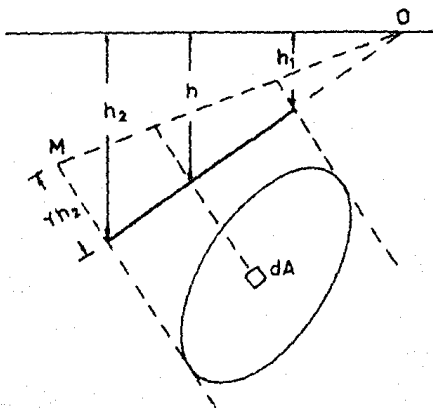


Fig 2.11 Prisma de presiones.

## 2.6.2 Fuerzas sobre superficies curvadas.

Las fuerzas elementales que actúan sobre una superficie curvada, cuando ésta se encuentra dentro de un fluido en reposo, difieren en dirección, por tanto, no se puede hacer una suma algebraica de ellas. Para calcular la resultante se determinan las componentes del vector fuerza en ciertas direcciones y se combinan vectorialmente.

### Componente Horizontal.

Se considera una superficie curvada, la cual se proyecta sobre un plano vertical como lo muestra la Fig 2.12; las líneas de proyección horizontal están en la dirección X. El elemento de área  $dA$  tiene una fuerza normal  $dF$  formando un ángulo  $\theta$  con la horizontal. La componente horizontal en la dirección X de la fuerza que actúa sobre una cara de  $dA$  es:

$$dF_x = p \cos \theta dA .$$

Sumando todas las componentes horizontales:

$$F_x = \int_A p \cos \theta dA , \quad (2.6.18)$$

donde  $\cos \theta dA$  es la proyección de  $dA$  sobre el plano vertical, y  $p \cos \theta dA$  es la fuerza elemental que actúa sobre el área proyectada. El proyectar todos los elementos de área  $dA$  equivale a proyectar toda el área curvada sobre el plano vertical; por tanto, la componente horizontal de la fuerza de presión sobre una superficie curvada, es igual a la fuerza de presión que actúa en la proyección de la superficie sobre un plano vertical.

Para áreas curvadas cerradas, como las de los cuerpos sólidos, las componentes horizontales son nulas, debido a que su proyección sobre cualquier plano es siempre cero.

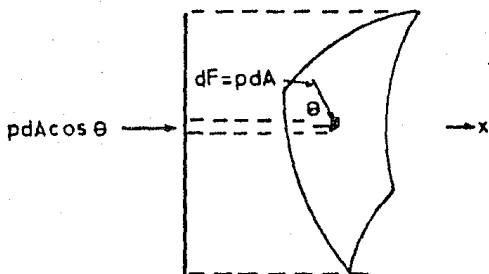


Fig 2.12 Proyección de un elemento de área de una superficie curvada en un plano vertical.

La línea de acción de la fuerza horizontal sobre la superficie curvada es la misma que la de la fuerza sobre la proyección vertical.

Se procede en forma similar para determinar otra componente horizontal, que forme un ángulo recto con la anterior.

#### Componente Vertical.

En forma análoga al análisis anterior, la componente vertical de la fuerza ejercida sobre una superficie curvada se obtiene sumando todas las fuerzas verticales sobre las áreas elementales de la superficie. De acuerdo a la Fig 2.13, la componente vertical que actúa sobre el área elemental es:

$$dF_v = p \cos \theta dA ,$$

donde ahora  $\theta$  es el ángulo que forma  $dF$  con la vertical.

Por tanto la componente vertical total será:

$$F_v = \int_A p \cos \theta dA . \quad (2.3.19)$$

Sustituyendo a  $p$  por  $\gamma h$ , donde  $h$  es la distancia desde la superficie libre hasta el elemento de área y tomando en cuenta

que  $\cos \theta \, dA$  es la proyección del elemento de área sobre la superficie libre, se tiene que:

$$F_v = \gamma \int_A h \cos \theta \, dA = \gamma \int_V dV = \gamma V = W, \quad (2.6.20)$$

o sea que la componente vertical sobre una superficie curvada es igual al peso del líquido arriba de ésta. La línea de acción de la componente vertical pasa por el centroide del volumen de líquido confinado arriba de la superficie curvada.

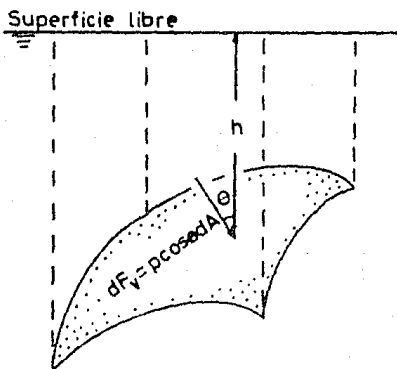


Fig 2.13 Componente vertical que actúa sobre un elemento de área curvada.

Para el caso cuando el líquido está por debajo de la superficie curvada y se conoce la presión en un punto, por ejemplo en  $O$ , se puede construir una superficie libre imaginaria ( $X-X$ ) a una altura  $p/\gamma$  por arriba del punto  $O$ , de forma tal que el producto de la distancia vertical a cualquier punto del tanque por el peso específico del fluido sea la presión en dicho punto.

Por tanto, el peso del volumen imaginario del líquido que se

encuentra por encima de la superficie curvada, es igual a la componente vertical de la fuerza debida a la presión.

Debe construirse la superficie libre imaginaria con un líquido del mismo peso específico que el líquido en contacto con la superficie curvada, para poder representar correctamente la distribución de presiones sobre ella.

La presión en un punto de la superficie curvada es igual en ambas caras (bajo una superficie libre), pero las fuerzas componentes elementales en la dirección vertical son de signos opuestos. Por ello, el sentido de la componente vertical de la fuerza está invertido cuando el fluido imaginario está por encima de la superficie en cuestión.

La línea de acción de la componente vertical para este caso, también pasa por el centroide del volumen de líquido imaginario arriba de la superficie curvada.

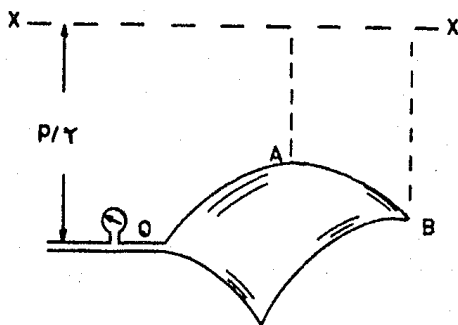
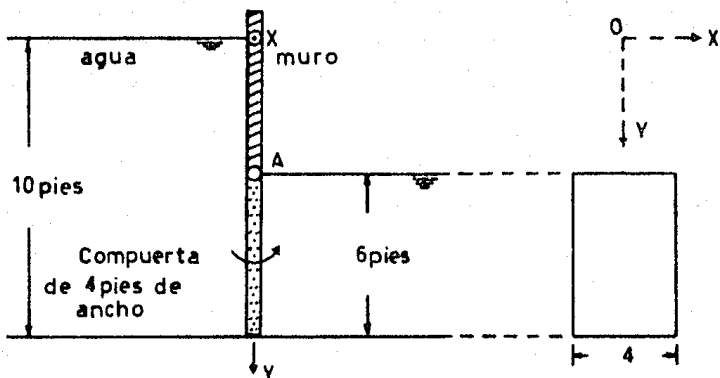


Fig 2.14 Superficie libre imaginaria en una superficie curvada.

#### PROBLEMAS.

2.6.1 Determine la resultante y los centros de presión de las fuerzas debidas al agua en ambos lados de la compuerta de la figura, si el nivel en el lado derecho llega hasta A.



Solución:

Se calcula la fuerza resultante a cada lado de la compuerta.

De la Ec 2.6.6 :

$$F = \gamma y_c \text{ sen } \theta A ,$$

$$F_1 = (62.4 \text{ lb/pie}^3) (7 \text{ pie}) (\text{sen } 90^\circ) (24 \text{ pies}^2) = 10483.2 \text{ lb,}$$

(hacia la derecha)

$$F_2 = (62.4 \text{ lb/pie}^3) (3 \text{ pie}) (\text{sen } 90^\circ) (24 \text{ pies}^2) = 4492.8 \text{ lb.}$$

(hacia la izquierda)

Determinación de los centros de presión:

$$x_p = \frac{\bar{I}_{xy}}{y_c A} + x_c ,$$

donde el producto de inercia  $\bar{I}_{xy}$  es cero en este caso, ya que existe simetría de la superficie con respecto a un eje centroidal.

$$\therefore x_p = x_c = 0 \text{ pie} .$$

Tomando el lado izquierdo de la compuerta:

$$y_p = \frac{I_c}{y_c A} + y_c ,$$

donde  $I_c$  en este problema es el momento de inercia centroidal de

un rectángulo y es igual a  $b h^3/12$ . Por tanto:

$$y_p = \frac{b h^3}{12 y_c A} + y_c = \frac{(4 \times 6^3 \text{pies}^4)}{(12) (7 \text{ pie}) (24 \text{ pie}^2)} + 7 \text{ pie} = 7.429 \text{ pie} .$$

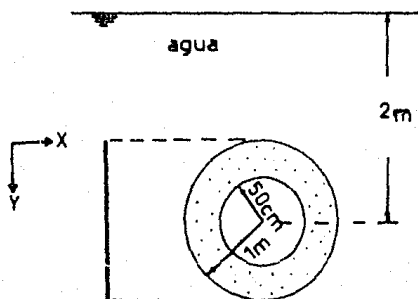
Por tanto, el centro de presión de la fuerza hacia la derecha ( $F_1$ ) está en  $(0, 7.429)$ .

Para el lado derecho ( $y_p$  se toma desde la superficie libre):

$$y_p = \frac{(4 \times 6^3 \text{pies}^4)}{(12) (3 \text{ pie}) (24 \text{ pie}^2)} + 3 \text{ pie} = 4.0 \text{ pie} .$$

Por tanto, el centro de presión de la fuerza hacia la izquierda ( $F_2$ ) está en  $(0, 4)$ , la cual se toma desde la superficie libre del lado derecho.

2.6.2 Determinar la fuerza ejercida por el agua sobre una cara de la superficie anular vertical mostrada en la figura, (a) por fórmula y (b) por el método de prisma de presiones.



Solución:

a) Para este caso, se calcula primero la fuerza que actúa en

todo el círculo de  $r = 1 \text{ m}$  ; a esta fuerza se le resta la que actúa en el círculo de  $r = 0.5 \text{ m}$  , obteniendo así la que actúa sólo en el área anular.

De la Ec 2.6.6:

$$F = \gamma y_c \text{ sen } \theta A ,$$

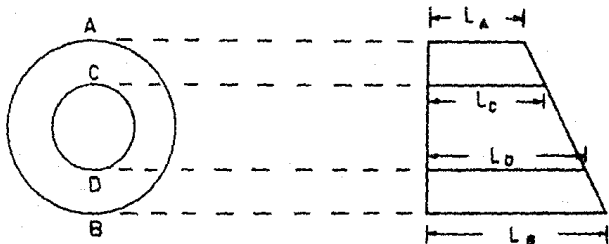
$$F_1 = (9807 \text{ N/m}^3) (2 \text{ m}) (\text{sen } 90^\circ) (\pi \times 1^2 \text{ m}^2) = 61.619 \text{ kN} ,$$

$$F_2 = (9807 \text{ N/m}^3) (2 \text{ m}) (\text{sen } 90^\circ) (\pi \times 0.5^2 \text{ m}^2) = 15.405 \text{ kN} ,$$

$$\therefore F = F_1 - F_2 = 46.214 \text{ kN} .$$

Donde  $F$  es la fuerza resultante que ejerce el agua sobre una cara de la superficie anular.

b) Debido a la variación lineal de la presión con respecto a la profundidad, cada círculo concéntrico tiene un "prisma de presiones" que corresponde a un cilindro truncado recto, por lo que, para obtener el volumen del "prisma de presiones" de la superficie anular ( $V$ ), se resta el volumen del cilindro truncado interno ( $V_2$ ) al volumen del cilindro truncado externo ( $V_1$ ).



Para el cilindro truncado externo:

$$L_A = \gamma h_A = (9807 \text{ N/m}^3) (1 \text{ m}) = 9807 \text{ N/m}^2 ,$$

$$L_B = \gamma h_B = (9807 \text{ N/m}^3) (3 \text{ m}) = 29421 \text{ N/m}^2 .$$



$$\therefore V_1 = A_1 \left( \frac{L_1 + L_4}{2} \right) = \pi \times 1^2 \text{ m}^2 \left( \frac{9807 + 29421}{2} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) = 61620 \text{ N.}$$

Para el cilindro truncado interno:

$$L_C = \gamma h_C = (9807 \text{ N/m}^3) (1.5 \text{ m}) = 14711 \text{ N/m}^2,$$

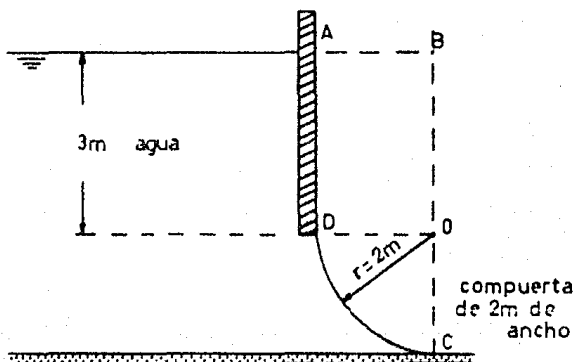
$$L_D = \gamma h_D = (9807 \text{ N/m}^3) (2.5 \text{ m}) = 24518 \text{ N/m}^2,$$

$$V_2 = A_2 \left( \frac{L_2 + L_3}{2} \right) = \pi \times 0.5^2 \text{ m}^2 \left( \frac{14711 + 24518}{2} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) = 15405 \text{ N.}$$

Por lo que la fuerza resultante sobre una de las caras de la superficie anular es:

$$F = V = V_1 - V_2 = 46215 \text{ N} = 46.215 \text{ kN.}$$

2.6.3 Para la compuerta radial de la figura, determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por el agua, así como su línea de acción.



Solución:

La componente horizontal es la fuerza que actúa sobre la

proyección de la superficie curvada sobre un plano vertical; esta proyección es un cuadrado de 2 m de lado, cuyo centroide está a 4 m abajo de la superficie libre. Esta componente está dirigida hacia la derecha.

De la Ec 2.6.6:

$$F_H = \gamma h_c A ,$$

$$F_H = (9807 \text{ N/m}^3) (4 \text{ m}) (2 \times 2 \text{ m}^2) = 156.91 \text{ kN} .$$

Su línea de acción pasa por el centro de presión de la proyección vertical, por lo que:

$$y_p = \frac{I_c}{y_c A} + y_c ,$$

$$y_p = \frac{2^4/12}{y_c A} + y_c = \frac{2^4/12}{(4)(4)} + 4 = 4.0833 \text{ m} .$$

La componente vertical hacia arriba es igual al peso del volumen de agua imaginario ABCD, por lo que:

$$F_v = \gamma V ,$$

$$= (9807 \text{ N/m}^3) (2 \times 2 \times 3 + \frac{\pi \times 2^2 \times 2}{4}) = 179.30 \text{ kN} .$$

Esta fuerza pasa por el centroide del volumen imaginario de agua, que se puede encontrar tomando momentos con respecto a BC:

$$X_c = X_p = \frac{1}{A} \int x \, dA .$$

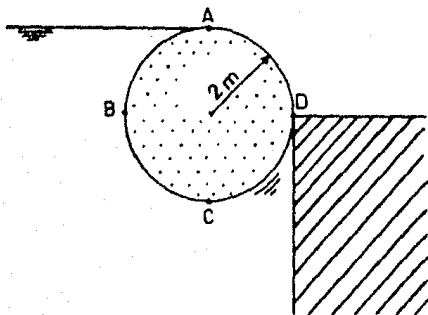
Cuando se conoce la localización del centroide, el momento de primer orden del área con respecto a cualquier eje se obtiene con el producto del área por la distancia desde el centroide al eje; para este caso se tienen dos áreas  $A_1 = ABOD$  y  $A_2 = ODC$ , por tanto:

$$x_c = \frac{1}{A_1 + A_2} (x_{c1} A_1 + x_{c2} A_2) ,$$

$$x_c = \frac{1}{(3 \times 2 + \frac{\pi \times 2^2}{4}) \text{ m}^2} (1 \text{ m} \times 6 \text{ m}^2 + \frac{4 (2 \text{ m}) \pi}{3 \pi} \text{ m}^2) = 0.948 \text{ m} .$$

La componente vertical está a 0.948 m, contados a la izquierda a partir del eje BC.

2.6.4 Una barrera cilíndrica contiene al agua como en la figura. El contacto entre el cilindro y la pared es muy liso. Considerando una longitud del cilindro  $L = 1 \text{ m}$ , calcular: a) su peso, b) la fuerza ejercida contra la pared.



Solución:

a) El peso del cilindro es igual a la componente vertical de la fuerza ejercida sobre él por el agua. En el equilibrio:

$$W_{cil} = F_{v_{AB}} + F_{v_{BCD}} .$$

$$F_{v_{BCD}} = \gamma V = \left( \frac{\pi r^2 L}{2} + 2 r r L \right) \gamma_a .$$

$$= \left[ \frac{\pi (2 \text{ m})^2 (1 \text{ m})}{2} + 2 (2 \text{ m})^2 (1 \text{ m}) \right] (9807 \text{ N/m}^3) = 140075.2 \text{ N} ,$$

$$F_{v_{AB}} = \gamma V = - \left[ r r L - \frac{\pi r^2}{4} \right] \gamma_a ,$$

$$= - \left[ - \frac{\pi (2 \text{ m})^2}{4} + (2 \text{ m})^2 (1 \text{ m}) \right] (9807 \text{ N/m}^3) = - 8418.4 \text{ N} ,$$

$$\therefore W_{cil} = - 8418.4 \text{ N} + 140075.2 \text{ N} = 131656.8 \text{ N} = 13425 \text{ kg} .$$

b) La fuerza ejercida contra la pared es igual a la fuerza horizontal sobre ABC menos la fuerza horizontal sobre CD. Pero  $F_{H_{BC}} = - F_{H_{CD}}$  debido a que la proyección de BCD sobre un plano vertical es cero. Por tanto:

$$F_H = F_{H_{AB}} = \gamma A_{p_v} h_c = \gamma_a (r L) (r / 2) ,$$

donde  $A_{p_v}$  es el área de la proyección de AB sobre un plano vertical y  $h_c$  es la distancia vertical de la superficie libre al centroide de dicha proyección.

$$\therefore F_H = (9807 \text{ N/m}^3) (2 \text{ m})(1 \text{ m}) (2 \text{ m}/2) = 19614 \text{ N} = 2000 \text{ kg} ,$$

## 2.7 Traducción y rotación de fluidos confinados.

En algunos casos se puede usar la Hidrostática para estudiar el comportamiento de los fluidos en movimiento. Por ejemplo, si todo el fluido bajo estudio se mueve uniformemente en línea recta, no existe aceleración y tampoco fuerzas de corte; por tanto, se pueden aplicar las ecuaciones de la Hidrostática, sin ningún cambio.

Se estudiarán los fenómenos de aceleración lineal uniforme y

de rotación uniforme respecto a un eje vertical; los fluidos que tienen esta clase de movimiento se dice que están en equilibrio relativo.

### 2.7.1 Aceleración lineal uniforme.

Un líquido que está sujeto a una aceleración lineal uniforme se mueve como si fuera un sólido; no hay movimiento relativo entre "capas" adyacentes y, por tanto, no existen esfuerzos cortantes.

Considere un líquido en un recipiente abierto, con aceleración lineal uniforme, donde el vector aceleración está en el plano XY; no hay componente en la dirección Z (Fig 2.15); para un elemento de volumen  $dx dy dz$ , en cuyo centro se tiene una presión  $p$  con coordenadas  $(x, y, z)$ :

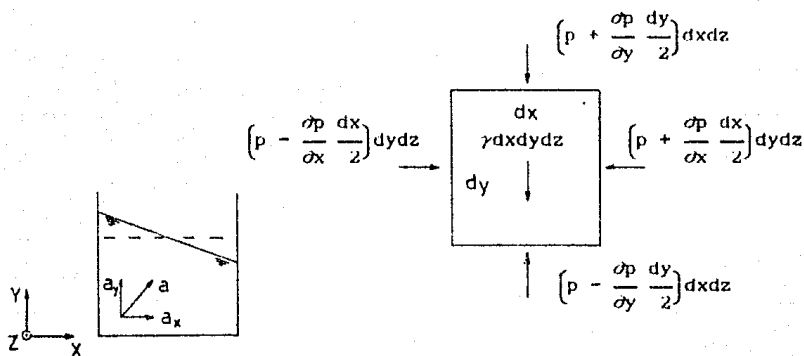


Fig 2.15 Aceleración lineal uniforme de un fluido

En la dirección X:

$$\Sigma F_x = m a_x .$$

$$\left( p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz = \frac{\gamma}{g} dx dy dz a_x ,$$

por tanto:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\gamma}{g} a_x . \quad (2.7.1)$$

Para la dirección Y se tiene que:

$$\left( p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz - \gamma dx dy dz = \frac{\gamma}{g} dx dy dz a_y ,$$

$$\therefore \frac{\partial p}{\partial y} = - \gamma \left( 1 + \frac{a_y}{g} \right) . \quad (2.7.2)$$

Análogamente, para la dirección Z se tiene que:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 , \quad \text{ya que } a_z = 0 . \quad (2.7.3)$$

La derivada total de la presión de acuerdo al sistema de coordenadas es:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz .$$

Sustituyendo las Ecs 2.7.1, 2.7.2 y 2.7.3, resulta:

$$dp = - \frac{\gamma}{g} a_x dx - \gamma \left( 1 + \frac{a_y}{g} \right) dy . \quad (2.7.4)$$

Integrando y suponiendo un fluido incompresible,

$$p = - \frac{\gamma}{g} a_x x - \gamma \left( 1 + \frac{a_y}{g} \right) y + C .$$

Suponiendo  $p = p_0$  para  $x = y = 0$ , resulta  $C = p_0$ , por lo tanto,

$$p = p_0 - \frac{\gamma}{g} a_x x - \gamma \left( 1 + \frac{a_y}{g} \right) y . \quad (2.7.5)$$

Despejando a  $y$  :

$$y = - \frac{a_x}{a_y + g} x + \frac{p_o - p}{\gamma (1 + a_y/g)} . \quad (2.7.6)$$

Para presión constante se tiene una recta con pendiente  $-\frac{a_x}{a_y + g}$ , ésta recta es paralela a la superficie libre, por lo que ésta tiene la misma pendiente. La intersección de  $Y$  con la superficie libre es  $p_o / \gamma (1 + a_y/g)$ .

Se pueden estudiar algunos casos particulares a partir de las generalidades anteriores:

a) *Aceleración lineal constante con  $a_y = 0$ .*

En este caso, se acelera el líquido únicamente en la dirección  $X$ , por lo que de la Ec 2.7.6:

$$y = - \frac{a_x}{g} x + \frac{p_o - p}{\gamma} . \quad (2.7.6.a)$$

Por tanto, la superficie libre y todas las superficies horizontales con presión constante, tienen una pendiente:

$$\tan \theta = - \frac{a_x}{g} ,$$

donde  $\theta$  es el ángulo que forma la superficie libre con el plano horizontal.

De la Ec 2.7.5 se tiene que la variación de la presión a lo largo de una línea vertical ( $x = 0$ ) y suponiendo que  $p_o = 0$ ; es:

$$p = - \gamma y ,$$

la cual, es la misma que para un líquido en reposo.

b) *Aceleración lineal constante con  $a_x = 0$ .*

En este caso, el líquido se acelera verticalmente; de la Ec 2.7.6:

$$y = \frac{p_o - p}{\gamma (1 + a_y/g)} . \quad (2.7.6.b)$$

Por tanto, la superficie libre (si existe) permanece horizontal ( $\nabla = 0$ ) y la presión es constante en planos horizontales.

Cuando un recipiente que contiene un líquido cae en forma libre:  $a_y = -g$ , por lo que, de la Ec 2.7.6.b:  $p_0 = p$ ; es decir, la presión es constante en toda la masa del líquido que cae en forma libre.

c) Gas ideal a temperatura constante.

Para el caso de un gas ideal a temperatura constante:  $\gamma = \gamma_0 p / p_0$ ; integrando la Ec 2.7.4 con  $p = p_0$ ,  $\gamma = \gamma_0$  para  $x = y = 0$ , se tiene:

$$\frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p}{p_0} = - \frac{a_x}{g} x - \left(1 + \frac{a_y}{g}\right) y,$$

despejando a  $p$ :

$$p = p_0 \exp \left[ - \frac{x a_x / g + (1 + a_y / g) y}{p_0 / \gamma_0} \right]. \quad (2.7.7)$$

Donde  $p$  y  $p_0$  son presiones absolutas.

## 2.7.2 Rotación uniforme respecto a un eje vertical.

Un líquido dentro de un recipiente se mueve como un sólido si el recipiente gira a una velocidad angular constante alrededor de un eje vertical; a este movimiento se le llama de vórtice forzado. No hay esfuerzos cortantes en el líquido y la única aceleración existente está dirigida radialmente hacia el eje de rotación. Aquí también se aplica la hidrostática, es decir, la presión en un punto será igual al producto del peso específico y la profundidad del mismo; esto resulta del análisis de la ecuación de movimiento en dirección vertical.



Analizando ahora la ecuación de movimiento en dirección radial sobre un elemento de fluido de longitud  $dr$  y área transversal  $dA$ , la presión en  $r$  es  $p$  y en la otra cara la presión será  $p + (\partial p / \partial r) dr$ ; por lo tanto, en la dirección radial se tendrá, aplicando  $\Sigma F_r = m a_r$ :

$$p dA - (p + \frac{\partial p}{\partial r} dr) dA = \frac{dr dA \gamma}{g} (-\omega^2 r), \quad (2.7.8)$$

donde  $-\omega^2 r$  es la aceleración radial. Dividiendo entre el volumen  $dr dA$ :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r. \quad (2.7.9)$$

Ahora, la diferencial total de la presión se expresa como:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial r} dr;$$

sustituyendo  $\partial p / \partial y = -\gamma$  y la Ec 2.7.9:

$$dp = -\gamma dy + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r dr. \quad (2.7.10)$$

Integrando para un líquido:

$$p = \frac{\gamma}{g} \omega^2 \frac{r^2}{2} - \gamma y + C.$$

Evaluando a  $p = p_0$  en  $r = y = 0$ , entonces  $C = p_0$ , teniéndose:

$$p = p_0 + \gamma \frac{\omega^2 r^2}{2g} - \gamma y; \quad (2.7.11)$$

seleccionando el plano horizontal para el cual  $y = 0$ ,  $p_0 = 0$ , se tiene:

$$p = \gamma \frac{\omega^2 r^2}{2g}, \quad \text{dividiendo entre } \gamma,$$

$$h = \frac{p}{\gamma} = \frac{\omega^2 r^2}{2g}, \quad (2.7.12)$$

por lo que, se tiene que la superficie libre al igual que las

superficies de igual presión, tienen forma de paraboloides de revolución; la concavidad del paraboloide depende de la velocidad angular (Fig 2.16). El líquido confinado en un cilindro que gira alrededor de su eje, desarrolla un paraboloide de revolución, el cual tiene un volumen igual a la mitad del volumen del cilindro que lo circunscribe; por lo tanto, el volumen arriba del plano horizontal que pasa por el vértice del paraboloide (Fig 2.16) es:

$$V = \pi r_o^2 \frac{1}{2} \frac{\omega^2 r_o^2}{2g} \quad (2.7.13)$$

La altura del líquido cuando está en reposo será desde el vértice original hasta la superficie libre:

$$h = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 r_o^2}{2g} \quad (2.7.14)$$

Para el caso de un gas, se supone una superficie libre imaginaria en forma de paraboloide de revolución (Ec 2.7.12); si se trata de un gas a temperatura constante  $\gamma = p \gamma_o / p_o$ , por lo que la Ec 2.7.10 queda:

$$\frac{p_o}{\gamma_o} \frac{dp}{p} = -dy + \frac{\omega^2 r}{g} dr$$

Integrando con  $p = p_o$  para  $y = r = 0$  se tiene:

$$\frac{p_o}{\gamma_o} \ln \frac{p}{p_o} = -y + \frac{\omega^2 r^2}{2g}, \quad \text{finalmente,}$$

$$p = p_o \exp \left[ \frac{\gamma_o}{p_o} \left( \frac{\omega^2 r^2}{2g} - y \right) \right] \quad (2.7.15)$$

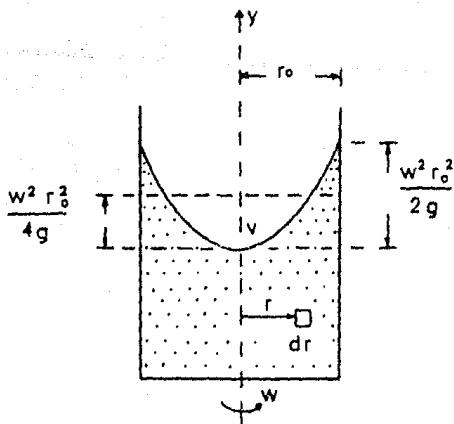
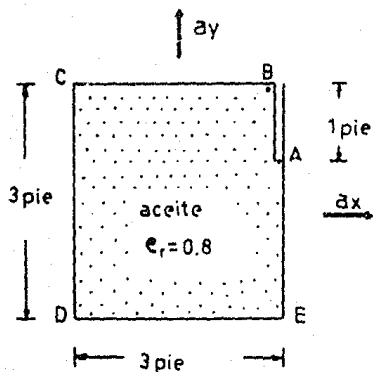


Fig 2.16 Rotación de un cilindro que contiene un líquido.

## 2.8 Aplicaciones.

2.8.1 En la figura mostrada,  $a_x = 8.05 \text{ pie/seg}^2$  y  $a_y = 0$ . Encuéntrese la superficie libre imaginaria del líquido y la presión en: C, D y E.



Solución:

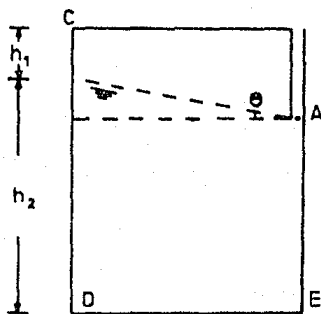
Debido a que el líquido está confinado y no presenta una

superficie libre real, se supone una superficie imaginaria, la cual pasa por el punto expuesto al exterior (A); dicha superficie tiene una pendiente de:

$$\frac{a_x}{a_y + g} = \tan \theta ,$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{8.05 \text{ pie/seg}^2}{32.2 \text{ pie/seg}^2} = 14.036^\circ ,$$

por lo tanto, la superficie libre imaginaria cruza el lado izquierdo del recipiente a una altura de:



$$h_2 = 2 \text{ pies} + 3 \tan \theta = 2.75 \text{ pies} .$$

La presión manométrica en los puntos C, D y E será:

$$\begin{aligned} p_C &= -\gamma h_1 = -(62.4 \text{ lb/pie}^3)(0.8)(0.25 \text{ pies}) \\ &= -12.48 \text{ lb/pie}^2 = -0.0866 \text{ lb/plg}^2 . \end{aligned}$$

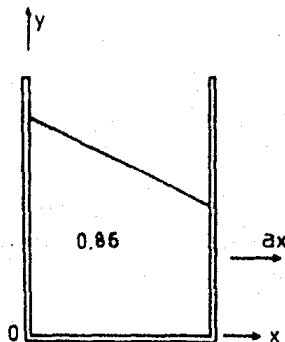
$$\begin{aligned} p_D &= \gamma h_2 = (62.4 \text{ lb/pie}^3)(0.8)(2.75 \text{ pies}) \\ &= 137.28 \text{ lb/pie}^2 = 0.953 \text{ lb/plg}^2 . \end{aligned}$$

$$p_E = (62.4 \text{ lb/pie}^3)(0.8)(2 \text{ pies}) = 99.84 \text{ lb/pie}^2 = 0.693 \text{ lb/plg}^2 .$$

2.8.2 Un tanque con un líquido de densidad relativa 0.86 se acelera uniformemente en una dirección horizontal, de tal modo que la presión dentro del líquido disminuye en la dirección del movimiento a razón de  $1 \text{ lb/plg}^2/\text{pie}$ . Determinése la aceleración.

Solución:

Considerando el sistema mostrado en la figura, y aplicando la Ec 2.7.6 :



$$y = - \frac{a_x}{a_y + g} x + \frac{p_o - p}{\gamma (1 + a_y/g)}$$

donde  $a_y = 0$ ,  $p_o - p = 1 \text{ lb/plg}^2$  para  $\Delta x = 1 \text{ pie}$ .

Tomando a  $p_o$  en el origen, al sustituir en la expresión anterior se tiene:

$$0 = - \frac{a_x}{g} x + \frac{p_o - p}{\gamma}$$

$$a_x = \frac{(p_o - p) g}{x \gamma} = \frac{(144 \text{ lb/plg}^2)(32.2 \text{ pie/seg}^2)}{(1 \text{ pie})(0.86)(62.4 \text{ lb/plg}^3)} = 86.4 \text{ pie/seg}^2$$

2.8.3 Una caja cúbica de 30 cm de lado está llena con un líquido de densidad relativa 0.65 y sufre una aceleración hacia abajo de  $2.45 \text{ m/seg}^2$ . Calcular la fuerza resultante  $F$  sobre una cara vertical del cubo debida a la presión del líquido.

Solución:

De la Ec 2.7.6.b y con  $p_0 = 0$ :

$$p = \gamma (1 + a_y / g) y ,$$

$$= (9807 \text{ N/m}^3) (0.65) \left( 1 + \frac{- 2.45 \text{ m/seg}^2}{9.81 \text{ m/seg}^2} \right) (0.15 \text{ m}) = 717 \text{ N/m}^2 .$$

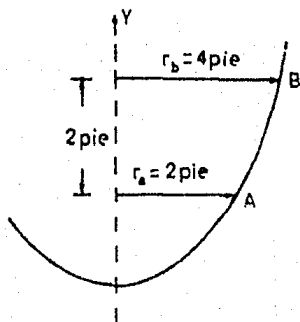
Por lo tanto:

$$F = p A = (717 \text{ N/m}^2) (0.3^2 \text{ m}^2) = 64.53 \text{ N} = 0.58 \text{ kg} .$$

2.8.4 Un recipiente que contiene un líquido de densidad relativa 1.2 se hace girar alrededor de un eje vertical. La presión en un punto situado radialmente a 2 pies del eje es igual a la presión en otro punto a 4 pies del eje y con una elevación 2 pies mayor que la del primero. Calcule la velocidad de rotación.

Solución:

Aplicando la Ec 2.7.11 para cada punto A y B de acuerdo a la figura:



$$p_A = p_o + \gamma \frac{w^2 r_A^2}{2 g} - \gamma y ,$$

$$p_B = p_o + \gamma \frac{w^2 r_B^2}{2 g} - \gamma (y + 2) .$$

Igualando ambas expresiones puesto que  $p_A = p_B$  y simplificando se tiene:

$$w = \sqrt{-\frac{4 g}{r_A^2 - r_B^2}} ,$$

$$w = \sqrt{-\frac{4 (32.2) \text{ pie}^2/\text{seg}^2}{(2^2 - 4^2) \text{ pie}^2}} = 3.270 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

## 2.9 Flotación de cuerpos en el seno de fluidos en reposo

(Principio de Arquímedes).

Un fluido en reposo ejerce una fuerza resultante dirigida hacia arriba sobre cualquier cuerpo que se sumerja total o parcialmente en aquél; a ésta se la llama fuerza de flotación. Dicha fuerza se obtiene de la diferencia entre la fuerza que actúa en la parte superior del cuerpo y la que actúa en su parte inferior.

Considere el cuerpo PQRS de la Fig 2.17, para el caso de un líquido; la fuerza dirigida hacia arriba que actúa en la parte inferior es igual al peso del líquido real o imaginario correspondiente al volumen contenido en PSRNM. La fuerza vertical hacia abajo sobre la parte superior del cuerpo es igual al peso del líquido contenido en PQRNM. Al restar esta fuerza de la primera, se obtiene una fuerza resultante hacia arriba igual al peso de líquido correspondiente al volumen desplazado por el cuerpo, es decir, al volumen PQRS.

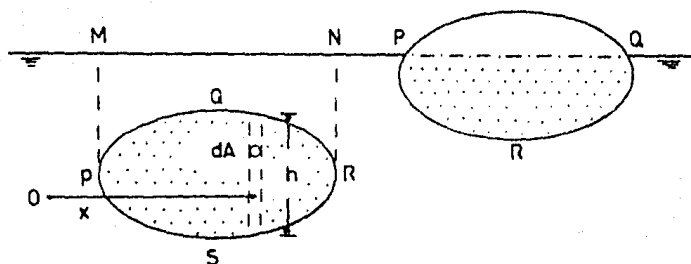


Fig 2.17 Flotación de cuerpos en fluidos estaticos.

El resultado anterior se conoce como Principio de Arquimedes, y se expresa como:

$$F_B = V \gamma , \quad (2.9.1)$$

donde  $F_B$  es la fuerza de flotación,  $V$  el volumen de líquido desplazado y  $\gamma$  su peso específico.

Para obtener la línea de acción de la fuerza de flotación se calculan momentos con respecto a un eje "O" y se igualan al momento resultante:

$$\gamma \int x \, dV = \gamma V x_c , \quad \text{de donde:}$$

$$x_c = \frac{1}{V} \int x \, dV , \quad (2.9.2)$$

que corresponde a la coordenada del centroide del volumen; por lo tanto, el centroide del volumen de líquido desplazado es el lugar por donde pasa la línea de acción de la fuerza de flotación; esto es válido para cuerpos total o parcialmente sumergidos.

Al centroide del volumen de fluido desplazado se le llama centro de flotación.

Se obtiene el mismo resultado para el caso de un gas, pero no existe superficie libre.



Si el cuerpo flota en la interfase de dos fluidos estáticos, de acuerdo a la Fig 2.18, la fuerza de flotación que actúa sobre  $dA$  es:

$$dF_B = (p_2 - p_1) dA = (\gamma_2 h_2 + \gamma_1 h_1) dA .$$

Integrando:

$$F_B = \gamma_2 \int h_2 dA + \gamma_1 \int h_1 dA = \gamma_2 V_2 + \gamma_1 V_1 . \quad (2.9.3)$$

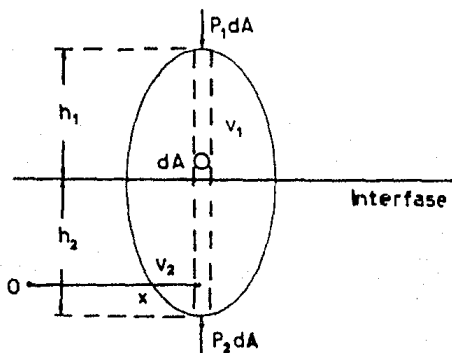


Fig 2.18 Nomenclatura para un cuerpo sumergido, que queda en la interfase de dos fluidos.

El momento con respecto al eje "O" será:

$$F_B x_c = \gamma_1 \int x dV_1 + \gamma_2 \int x dV_2 ,$$

$$x_c = \frac{\gamma_1 x_{c1} V_1 + \gamma_2 x_{c2} V_2}{\gamma_1 V_1 + \gamma_2 V_2} , \quad (2.9.4)$$

donde  $x_{c1}$  y  $x_{c2}$  corresponden a los centroides de  $V_1$  y  $V_2$ , por lo que, los centros de flotación de estos volúmenes no se encuentran sobre la misma línea vertical y, por lo tanto, la fuerza de flotación no pasa por el centroide del volumen total.

Para que un cuerpo sumergido se encuentre en equilibrio vertical, el volumen del mismo debe ser tal que proporcione una fuerza de flotación igual al peso del cuerpo.

Para determinar el peso y el volumen de un cuerpo irregular, se mide el peso que tiene éste al sumergirlo dentro de dos líquidos de densidad relativa conocida. De acuerdo a la Fig 2.19, las fuerzas para equilibrar el peso del cuerpo sumergido en los líquidos con pesos específicos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son respectivamente  $\bar{W}_1$  y  $\bar{W}_2$ , de tal forma que:

$$W = \bar{W}_1 + V \gamma_1 \quad , \quad W = \bar{W}_2 + V \gamma_2 .$$

Resolviendo para  $W$  y para el volumen del cuerpo  $V$  :

$$W = \frac{\bar{W}_1 \gamma_2 - \bar{W}_2 \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} , \quad (2.9.5)$$

$$V = \frac{\bar{W}_1 - \bar{W}_2}{\gamma_2 - \gamma_1} . \quad (2.9.6)$$

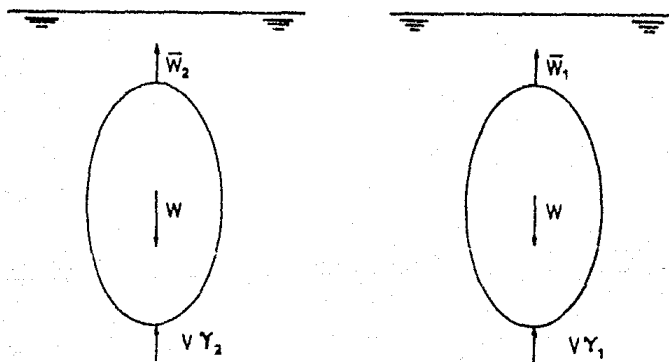
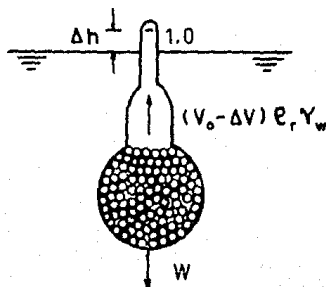
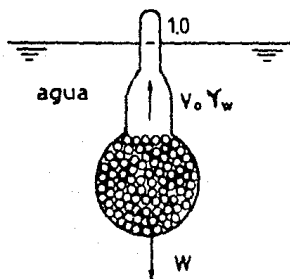


Fig 2.19 Diagrama de un cuerpo libre en equilibrio sumergido en dos líquidos.

## 2.10 Aplicaciones.

2.10.1 El hidrómetro o densímetro se utiliza para medir el peso específico de líquidos; si éste se sumerge en agua, la superficie libre coincidirá con la marca 1.0 en la escala, que corresponde a su densidad relativa.



en este caso se tiene:

$$V_0 \gamma_w = W, \quad (2.10.1)$$

donde  $V_0$  es el volumen sumergido del hidrómetro y  $W$  el peso del mismo.

Para otro líquido como el de la figura, se tendrá que:

$$(V_0 - \Delta V) \rho_r \gamma_w = W, \quad \Delta V = A \Delta h,$$

donde  $A$  es el área transversal del tubo del hidrómetro,  $\rho_r$  la densidad relativa de dicho líquido. Por tanto:

$$\Delta h = \frac{V_0}{A} \frac{\rho_r - 1}{\rho_r}. \quad (2.10.2)$$

Por ejemplo, un hidrómetro pesa 0.0079 lb y tiene un tubo de 5 mm de diámetro. Determine la distancia entre las marcas 1.0 y 1.1 para la densidad relativa.

**ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

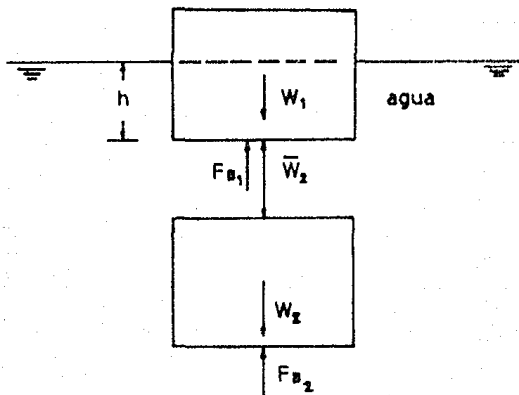
De la Ec 2.10.1:

$$V_o = \frac{W}{\gamma_v} = \frac{0.0079 \text{ lb}}{62.4 \text{ lb/pie}^3} = 1.266 \times 10^{-4} \text{ pie}^3$$

Sustituyendo en la Ec 2.10.2:

$$\Delta h = \left( \frac{1.266 \times 10^{-4} \text{ pie}^3}{\pi (2.5/304.8)^2 \text{ pie}^2} \right) \left( \frac{1.1 - 1.0}{1.1} \right) = 0.0545 \text{ pie} = 16.59 \text{ mm.}$$

2.10.2 Dos cubos del mismo tamaño ( $1 \text{ m}^3$ ), uno con densidad relativa 0.80 y el otro con 1.1, están conectados por un alambre pequeño. Si se colocan en agua ¿qué parte del cubo más ligero estará por debajo de la superficie libre y cuánto valdrá la tensión en el alambre?



**Solución:**

La tensión que se tiene en el alambre es igual al peso del cuerpo sumergido en el agua ( $\bar{W}_2$ ), por tanto, haciendo un análisis de fuerzas en el cubo inferior:

$$\bar{W}_2 + F_{B2} - W_2 = 0 ,$$

$$\bar{W}_2 = W_2 - F_{B2} = V_{O2} \rho r \gamma_v - V_{O2} \gamma_v ,$$

$$\bar{W}_2 = (1 \text{ m}^3) (9807 \text{ N/m}^3) (1.1 - 1.0) = 980.7 \text{ N} .$$

Ahora haciendo un analisis de fuerzas en el cubo superior:

$$F_{B1} - \bar{W}_2 - W_1 = 0 ,$$

$$V \gamma_v = \bar{W}_2 + V_{O1} \rho r \gamma_v ,$$

donde  $V$  es el volumen sumergido del cubo superior y  $V_{O1}$  el volumen total del mismo:

$$V = V_{O1} \rho r + \bar{W}_2 / \gamma_v = (1 \text{ m}^3)(0.8) + (980.7 \text{ N} / 9807 \text{ N/m}^3) = 0.9 \text{ m}^3 .$$

Pero  $V = A h$  , por lo tanto:

$$h = V / A = 0.9 \text{ m}^3 / 1 \text{ m}^2 = 0.9 \text{ m} = 90 \text{ cm} .$$

## CAPITULO 3

### ANALISIS DIMENSIONAL Y TEORIA DE LOS MODELOS

#### 3.1 Análisis dimensional.

Una técnica muy útil para reducir al mínimo el número de experimentos requeridos en un problema es el análisis dimensional; aunque no produce soluciones analíticas del problema, proporciona información acerca de la forma de las relaciones que conectan entre sí las variables y sugiere el mejor modo de agrupar estas variables. La técnica se basa en el estudio de las dimensiones y tiene particular uso en la Mecánica de los Fluidos, ya que en ésta se tienen frecuentemente relaciones complejas, no susceptibles de un análisis del todo teórico. El análisis dimensional se puede considerar como un estudio de las restricciones impuestas sobre la forma de una función algebraica por los requisitos de la homogeneidad dimensional.

Los resultados obtenidos con esta técnica dependerán de las cantidades consideradas al principio que afectan al fenómeno en estudio. Si no se incluye una cantidad que sea importante, el

resultado del análisis será equivocado; por el contrario, si se incluye una cantidad que no influya realmente en el problema, es posible que sea rechazada por el propio análisis. Por lo general sólo la experimentación indicará si la lista de variables originales es demasiado corta o larga.

Se dice que una ecuación es dimensionalmente homogénea cuando las dimensiones fundamentales en cada uno de los términos de la ecuación son las mismas. Este concepto se puede utilizar para poder definir una ecuación funcional, como es el caso del método de Rayleigh.

#### *Método de Rayleigh.*

Este método se basa en la homogeneidad dimensional para obtener ecuaciones; es recomendado cuando existen cuatro o menos variables. Para presentar el método se tomará como ejemplo la fuerza de arrastre ( $F_D$ ) que actúa sobre una esfera que se mueve a través de un líquido viscoso:

1. Se determinan las variables que intervienen. Se sugiere considerar una longitud característica, una velocidad característica y las propiedades del fluido. Para el ejemplo: diámetro de la esfera, velocidad de la esfera, densidad del fluido y la viscosidad del mismo.

2. Se hace una lista de las variables con sus dimensiones.

Fuerza ( $F_D$ )	$[M L T^{-2}]$ ,
longitud ( $D$ )	$[L]$ ,
velocidad ( $v$ )	$[L T^{-1}]$ ,
densidad ( $\rho$ )	$[M L^{-3}]$ ,
viscosidad ( $\mu$ )	$[M L^{-1} T^{-1}]$ .

3. Se define una relación funcional de las variables en un sistema dimensional; para el ejemplo se usará M L T .

$$F_D = f(D, v, \rho, \mu); \quad (3.1.1)$$

de acuerdo a la homogeneidad dimensional:

$$F_D = C D^a v^b \rho^c \mu^d, \quad (3.1.2)$$

donde C es una constante adimensional. En términos de las dimensiones:

$$[M L T^{-2}] = [L]^a [L T^{-1}]^b [M L^{-3}]^c [M L^{-1} T^{-1}]^d,$$

$$[M L T^{-2}] = M^{(c+d)} L^{(a+b-3c-d)} T^{(-b-d)},$$

4. Se satisface la homogeneidad dimensional, por lo tanto:

$$1 = c + d,$$

$$1 = a + b - 3c - d,$$

$$-2 = -b - d,$$

resolviendo el sistema en términos de "d", debido a que se tienen 3 ecuaciones y 4 incógnitas:

$$a = 2 - d,$$

$$b = 2 - d,$$

$$c = 1 - d.$$

5. Se sustituyen las ecuaciones anteriores en la Ec 3.1.2:

$$F_D = C D^{2-d} v^{2-d} \rho^{1-d} \mu^d,$$

agrupando las variables:

$$F_D = C (\rho v^2 D^2) \left( \frac{\rho v D}{\mu} \right)^{-d},$$

donde  $(\rho v D)/\mu$  es el número de Reynolds (NR); si además, se define al coeficiente de arrastre como:



$$C_D = C (NR)^{-d} ,$$

entonces, finalmente la expresión queda como:

$$F_D = C_D \rho v^2 D^2 .$$

la cual es una ecuación derivada de la homogeneidad dimensional.

El coeficiente  $C_D$  se determina en forma experimental.

### 3.2 Grupos adimensionales.

El cociente de dos fuerzas que actúan en un fluido es la manera más común de expresar a los parámetros adimensionales; el valor de este cociente indica la importancia de una fuerza con respecto a la otra. Mediante los parámetros adimensionales se pueden reducir las variables que intervienen en un problema y aplicar estos resultados a casos similares.

#### 3.2.1 Número de Reynolds.

En muchos casos de flujo de fluidos sólo actúan fuerzas viscosas, de presión y de inercia. Por ejemplo, si el flujo es en un conducto, totalmente cerrado, la gravedad no afecta el patrón de flujo; la tensión superficial tampoco afecta, ya que no existe superficie libre. Además, a velocidades de flujo por debajo de la velocidad del sonido, los efectos de compresibilidad pueden despreciarse. Por lo tanto, con las tres primeras fuerzas existen tres posibles pares de fuerzas a relacionar; para el número de Reynolds, se toma la relación de la fuerza de inercia con la fuerza viscosa:

$$\frac{F_{\text{Iner}}}{F_{\mu}} = \frac{m a}{\mu (dv/dy)A} \sim \frac{(\rho L^3)(L T^{-2})}{\mu (v/L) L^2} \sim \frac{\rho (L^2/T^2)}{\mu (v/L)} \sim \frac{\rho v L}{\mu}$$

$$Nr = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{v L}{\nu} \quad (3.1.3)$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática. Este parámetro adimensional ayuda a distinguir entre el régimen laminar y el turbulento en un flujo en particular. La longitud  $L$  de la expresión anterior es sustituida por el diámetro, para un tubo de sección circular completamente lleno de fluido; la velocidad  $v$  se toma como la velocidad promedio del fluido.

### 3.2.2 Número de Froude.

El número de Froude se obtiene del cociente entre la fuerza de inercia y la fuerza de gravedad:

$$\frac{F_{\text{Iner}}}{F_{\text{grav}}} = \frac{m a}{m g} \sim \frac{(\rho L^3)(L T^{-2})}{\rho L^3 g} \sim \frac{\rho L^2 (L^2/T^2)}{\rho L^3 g} \sim \frac{\rho v^2 L^2}{\rho L^3 g} \sim \frac{v^2}{L g}$$

$$Nf = \frac{v^2}{g L} \quad (3.1.4)$$

A veces se utiliza  $Nf = v \sqrt{g L}$ .

En los casos de escurrimiento con una superficie libre, la naturaleza del flujo ya sea rápido o lento (flujo en canales abiertos) la determina si el número de Froude es mayor o menor a la unidad. En cualquier flujo que tenga una superficie libre, además de cualquier perturbación en ella como el movimiento de olas, son importantes las fuerzas de gravedad. Con la ayuda de este parámetro se puede determinar, por ejemplo, la resistencia de un barco debida a la acción de las olas.

### 3.2.3 Número de Weber.

Se define como el cociente entre la fuerza de inercia y las fuerzas de tensión superficial:

$$\frac{F_{iner}}{F_{\sigma}} = \frac{m a}{\sigma L} \sim \frac{\rho L^2 v^2}{\sigma L},$$
$$Nv = \frac{\rho v^2 L^2}{\sigma L}. \quad (3.1.5)$$

A veces se utiliza  $Nv = v \sqrt{\sigma/\rho L}$ .

En algunos casos son importantes las fuerzas de tensión superficial; por ejemplo, en aquellos en que se forman ondas pequeñas (ondas capilares), en el comportamiento de chorros pequeños formados bajo la acción de cargas pequeñas, y en el flujo de una "lámina" delgada de líquido sobre una superficie sólida.

### 3.2.4. Número de Mach.

Este parámetro adimensional se relaciona por el cociente de la fuerza de inercia y la fuerza elástica:

$$\frac{F_{iner}}{F_{elas}} = \frac{m a}{K A} \sim \frac{\rho L^2 v^2}{K L^2} \sim \frac{v^2}{K/\rho},$$
$$NM = \frac{v^2}{K/\rho}; \quad \text{a veces se utiliza} \quad NM = \frac{v}{\sqrt{K/\rho}},$$

o bien

$$NM = \frac{v}{\sqrt{k R T}} \quad (3.1.6)$$

donde el denominador de la última relación corresponde a la

propagación del sonido en un gas perfecto, siendo  $k$  la relación de calores específicos,  $T$  la temperatura absoluta y  $R$  la constante del gas. El denominador de la segunda relación representa la propagación del sonido en un líquido, donde  $K$  es el módulo de elasticidad volumétrica del líquido;  $v$  es una velocidad característica del flujo.

Si el número de Mach es igual a la unidad, el flujo se llama sónico, y si es menor o mayor a la unidad se llama flujo subsónico o supersónico, respectivamente.

Cuando la compresibilidad del fluido es importante o cuando la velocidad de flujo es cercana o superior al flujo sónico, el número de Mach es sumamente relevante.

Existe otro parámetro adimensional llamado número de Cauchy, el cual se basa en la misma relación de fuerzas y se expresa como:

$$N_c = \frac{\rho v^2}{K} = N_M^2 \quad (3.1.7)$$

### 3.2.5 Número de Euler.

Este número relaciona la fuerza de inercia con la fuerza de presión:

$$\frac{F_{iner}}{F_p} = \frac{m a}{\rho A} = \frac{(\rho L^3)(L T^{-2})}{\rho L^2} = \frac{\rho L^2 T^2}{\rho} = \frac{\rho v^2}{\rho} = \frac{\rho v^2}{\gamma h} = \frac{v^2}{g h}$$

$$N_E = \frac{v^2}{g h} \quad (3.1.8)$$

Al recíproco de este número se le conoce como coeficiente de presión.

### 3.3 Teorema II de Buckingham.

Este método para obtener parámetros adimensionales se deriva del análisis dimensional; el método reúne las magnitudes de un problema físico en grupos adimensionales independientes. Si se tienen "n" magnitudes las cuales contienen "m" dimensiones fundamentales, entonces se pueden determinar  $n - m$  parámetros adimensionales, los cuales se denotan por la letra griega mayúscula "pi" ( $\Pi$ ); el teorema de Buckingham origina una ecuación de la forma:

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-m}) = 0, \quad (3.3.1)$$

para el problema considerado.

Los parámetros adimensionales ( $\Pi_i$ ) se forman con "m" variables repetitivas (las cuales involucran entre ellas todas las "m" dimensiones fundamentales) y en cada parámetro una de las variables restantes. Se puede tener más de una selección de variables repetitivas y cada juego de ellas producirá una diferente colección de parámetros adimensionales ( $\Pi_i$ ); las  $\Pi_i$  obtenidas de un juego de variables repetitivas no son independientes de las  $\Pi_i$  obtenidas de otro juego.

Cada parámetro ( $\Pi_i$ ) se resuelve de tal manera que resulte adimensional. Este método no provee por sí solo una solución completa a un problema, sino una solución parcial que orienta para obtener la cantidad máxima de información con el menor número de experimentos.

Para ilustrar este método, se resolverá el mismo problema analizado con el método de Rayleigh:

A. Se analiza el problema físico y se seleccionan las variables que intervienen en él.

Para el ejemplo en cuestión serán:

variable	símbolo	dimensiones
Diámetro de la esfera	D	L
Velocidad de la esfera	v	L T <sup>-1</sup>
Densidad del fluido	$\rho$	M L <sup>-3</sup>
Viscosidad del fluido	$\mu$	M L <sup>-1</sup> T <sup>-1</sup>
Fuerza de arrastre	F <sub>D</sub>	M L T <sup>-2</sup>

En total 5 variables (n = 5).

B. Se define la relación funcional:

$$f(F_D, D, v, \rho, \mu) = 0.$$

C. Se seleccionan las variables repetitivas, las cuales deben incluir todas las "m" dimensiones fundamentales; no se escoge a la variable dependiente como repetitiva (F<sub>D</sub>). Por lo general, se toma una variable concerniente a la geometría del problema, otra concerniente a las condiciones cinemáticas y en su caso, otra que tome en cuenta a las fuerzas o masa del sistema.

Para el ejemplo, se tomarán D, v, y  $\rho$ , que incluyen las dimensiones fundamentales L, T y M (m = 3).

D. Se establecen los n - m parámetros adimensionales ( $\Pi_i$ ), los cuales se forman con las variables repetitivas y con una de las variables restantes, y se sustituyen sus dimensiones fundamentales.

$$\Pi_1 = D^{x_1} v^{y_1} \rho^{z_1} F_D : L^{x_1} (L T^{-1})^{y_1} (M L^{-3})^{z_1} (M L T^{-2}),$$

$$\Pi_2 = D^{x_2} v^{y_2} \rho^{z_2} \mu : L^{x_2} (L T^{-1})^{y_2} (M L^{-3})^{z_2} (M L^{-1} T^{-1}).$$

E. Se establecen las ecuaciones en términos de los exponentes, de tal forma que la suma algebraica de cada dimensión sea cero.

para  $\Pi_1$  :  $[M^0 L^0 T^0] = [M^{z_1+1} L^{x_1+y_1-3z_1+1} T^{-y_1-2}]$ ,

$$\begin{aligned} z_1 + 1 &= 0, \\ x_1 + y_1 - 3z_1 + 1 &= 0, \\ -y_1 - 2 &= 0. \end{aligned}$$

para  $\Pi_2$  :  $[M^0 \ L^0 \ T^0] = [M^{x_2+1} \ L^{x_2+y_2-3z_2-1} \ T^{-y_2-1}]$ ,

$$\begin{aligned} z_2 + 1 &= 0, \\ x_2 + y_2 - 3z_2 - 1 &= 0, \\ -y_2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

F. Resolver el sistema de ecuaciones de cada parámetro dimensional.

Para  $\Pi_1$  :  $z_1 = -1$  ,  $y_1 = -2$  ,  $x_1 = -2$  .

Para  $\Pi_2$  :  $z_2 = -1$  ,  $y_2 = -1$  ,  $x_2 = -1$  .

G. Se sustituyen los valores de los exponentes en las variables de los parámetros del paso D.

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= D^{-2} v^{-2} \rho^{-1} F_D = F_D / (\rho D^2 v^2) , \\ \Pi_2 &= D^{-1} v^{-1} \rho^{-1} \mu = \mu / (\rho D v) = 1 / Nr . \end{aligned}$$

H. Se establece la relación funcional,  $f(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}) = 0$ , o se puede expresar un parámetro en función de los demás,  $\Pi_2 = f(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-m})$ . En el ejemplo, se expresará:

$$\Pi_1 = f(\Pi_2) ,$$

$$\frac{F_D}{\rho D^2 v^2} = C \left( \frac{\mu}{\rho D v} \right) = \frac{C}{Nr} ,$$

donde C es una constante dimensional y  $C_D = C / Nr$  es el coeficiente de arrastre:

$$F_D = C_D \rho D^2 v^2 .$$

Ejemplo:

3.3.1 Utilizando  $Q$ ,  $D$ ,  $\Delta h/l$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  y  $g$  como variables apropiadas para el flujo en un tubo liso, determinense los parámetros adimensionales correspondientes, seleccionando a  $Q$ ,  $\rho$  y  $\mu$  como variables repetitivas.

Solución:

La relación funcional en este caso es:

$$F(Q, D, \Delta h/l, \rho, \mu, g) = 0.$$

Como se tienen 6 magnitudes ( $n$ ) y 3 dimensiones fundamentales ( $m$ ), se tendrán 3 parámetros adimensionales  $\Pi_i$ , ( $n - m$ ); uno de ellos será el cociente  $\Delta h/l$ , por lo que:

$$\Pi_1 = Q^{x_1} \rho^{y_1} \mu^{z_1} D : [L^3 T^{-1}]^{x_1} [M L^{-3}]^{y_1} [M L^{-1} T^{-1}]^{z_1} [L],$$

$$\Pi_2 = Q^{x_2} \rho^{y_2} \mu^{z_2} g : [L^3 T^{-1}]^{x_2} [M L^{-3}]^{y_2} [M L^{-1} T^{-1}]^{z_2} [L T^{-2}],$$

$$\Pi_3 = \Delta h/l.$$

$$\begin{aligned} \text{Para } \Pi_1 : [M^0 L^0 T^0] &= [M^{y_1+z_1} L^{3x_1-3y_1-z_1+1} T^{-x_1-z_1}], \\ y_1 + z_1 &= 0, \\ 3x_1 - 3y_1 - z_1 + 1 &= 0, \\ -x_1 - z_1 &= 0, \end{aligned}$$

donde resolviendo el sistema :  $x_1 = -1$ ,  $y_1 = -1$ ,  $z_1 = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Para } \Pi_2 : [M^0 L^0 T^0] &= [M^{y_2+z_2} L^{3x_2-3y_2-z_2+1} T^{-x_2-z_2-2}], \\ y_2 + z_2 &= 0, \\ 3x_2 - 3y_2 - z_2 + 1 &= 0, \\ -x_2 - z_2 - 2 &= 0, \end{aligned}$$

resolviendo :  $x_2 = 3$ ,  $y_2 = 5$ ,  $z_2 = -5$ .

Sustituyendo en las variables de los parámetros:

$$\Pi_1 = Q^{-1} \rho^{-1} \mu^1 D,$$

$$\Pi_2 = Q^3 \rho^5 \mu^{-5} g,$$



por tanto:

$$f \left( \frac{D \mu}{Q \rho}, \frac{Q^3 \rho^5 g}{\mu^5}, \frac{\Delta h}{l} \right) = 0,$$

$$o \quad \frac{D \mu}{Q \rho} = f \left( \frac{Q^3 \rho^5 g}{\mu^5}, \frac{\Delta h}{l} \right).$$

### 3.4 Similitudes geométrica, cinemática y dinámica.

Muchos fenómenos físicos tales como vertederos de las presas, control de inundaciones en los ríos, comportamiento de turbinas, bombas, propulsores y otras máquinas, se estudian en detalle con modelos pequeños. Gracias a esto se tienen ahorros en costos como en tiempos. Las pruebas se pueden llevar a cabo con un fluido (agua, por ejemplo) y aplicar los resultados a situaciones donde se tengan otros fluidos, como aire, aceite, etc.

Para poder asociar el prototipo con el modelo, es necesario que éstos sean físicamente similares. La similitud física abarca diferentes clases de similitud: geométrica, cinemática y dinámica.

#### 3.4.1 Similitud geométrica.

La similitud geométrica quiere decir similitud en forma. Cualquier longitud del prototipo ( $L_p$ ) con respecto a la longitud correspondiente en el modelo ( $L_m$ ), deberá cumplir con la "relación de escala" ( $L_r$ ), la cual se expresa como:

$$L_r = L_p / L_m. \quad (3.4.1)$$

La rugosidad también debe satisfacerse en la similitud geométrica, aunque ésta será más difícil de alcanzar en los

modelos pequeños.

Si por alguna causa la relación de escala no es igual en todas partes, entonces se tendrá un modelo distorsionado. Por ejemplo, se puede tener similitud de dimensiones geométricas entre el prototipo y el modelo, pero sus rugosidades pueden ser diferentes; por esto y más, en diversos casos es difícil obtener la similitud geométrica. En consecuencia, el grado de similitud geométrica que debe lograrse, dependerá del problema físico en estudio y de la exactitud requerida en la solución.

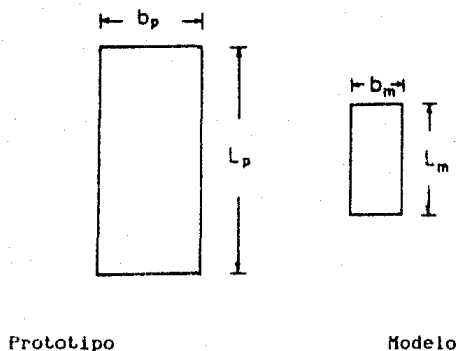


Fig 3.1 Similitud geométrica.

De acuerdo a la Fig 3.1, para que exista similitud geométrica se debe cumplir:

$$\frac{b_p}{b_m} = \frac{L_p}{L_m} = L_r \quad (3.4.2)$$

### 3.4.2 Similitud cinemática.

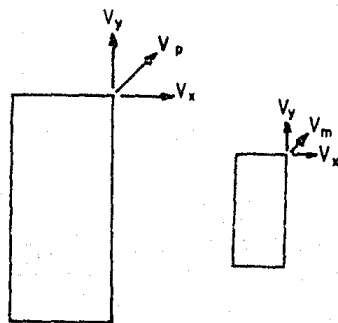
La similitud cinemática significa similitud de movimiento; por tanto, se debe tener similitud de longitudes (geométrica) y también similitud de intervalos de tiempo. Las velocidades en todos los puntos de flujo correspondientes; deben cumplir una relación fija de magnitud a tiempos correspondientes, entonces, la relación de velocidades es:

$$v_r = \frac{v_p}{v_m} = \frac{L_r}{T_r} \quad (3.4.3)$$

También, las aceleraciones de las partículas, tanto del prototipo como del modelo, deben ser similares.

$$a_r = \frac{L_r}{T_r^2} \quad (3.4.4)$$

Los movimientos de los fluidos son cinemáticamente similares, si las líneas de corriente del prototipo y del modelo son geoméricamente similares, en los tiempos correspondientes.



Prototipo

Modelo

Fig 3.2 Similitud cinemática.

### 3.4.3 Similitud dinámica.

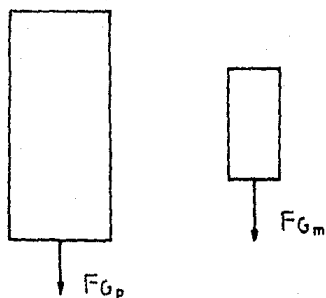
La similitud dinámica significa similitud de fuerzas; esto implica que las relaciones de los diferentes tipos de fuerzas deberán ser iguales en puntos correspondientes. Es decir, que tanto en el modelo como en el prototipo, los números de Reynolds, de Mach, de Froude y de Weber, serán iguales si existe similitud dinámica.

En un sistema de fluidos, las fuerzas presentes pueden ser de viscosidad, de diferencias de presión, de atracción gravitacional, de elasticidad, de tensión superficial y otras. Por lo cual, es difícil conseguir una similitud dinámica plena; afortunadamente en muchos casos, algunas fuerzas pueden desprejarse, por lo que la atención se enfoca en la similitud de aquellas que son más importantes.

La dirección que toma cualquier partícula de fluido se determina por la fuerza resultante que actúa sobre ella; por lo tanto, la similitud completa entre dos flujos se tiene cuando sobre las partículas correspondientes actúan fuerzas resultantes con la misma dirección y están en una relación de magnitudes constante. Si las fuerzas que actúan son  $F_G$ ,  $F_P$ ,  $F_\mu$  y  $F_E$ , se debe cumplir:

$$\frac{F_{Gp}}{F_{Gm}} = \frac{F_{Pp}}{F_{Pm}} = \frac{F_{\mu p}}{F_{\mu m}} = \frac{F_{Ep}}{F_{Em}} \quad (3.4.5)$$

La similitud dinámica implica similitudes geométrica y cinemática.



Prototipo

Modelo

Fig 3.3 Similitud dinámica.

### 3.5 Aplicaciones.

#### 3.5.1 Flujo en tuberías.

En el flujo a través de tuberías, las fuerzas de importancia son las de inercia y las viscosas, por lo cual, tanto el prototipo como el modelo deben tener el mismo número de Reynolds para cumplir con la similitud dinámica:

$$\frac{v_p \rho_p L_p}{\mu_p} = \frac{v_m \rho_m L_m}{\mu_m} \quad (3.5.1)$$

$$\frac{v_p L_p}{\nu_p} = \frac{v_m L_m}{\nu_m} \quad (3.5.2)$$

Ejemplo:

Para determinar las pérdidas totales de carga en el sistema de tuberías de una estación de bombeo de agua, se ha de utilizar un modelo a escala 1:5. Se dispone de aire a 25°C y 1 kg/cm<sup>2</sup> de

presión absoluta. Para una velocidad de 50 cm/seg del agua a 15°C en una sección de 4 m de diámetro en el prototipo, determinense el gasto y la velocidad del aire necesarias en el modelo.

Solución:

De la Ec 3.5.1 :

$$v_m = \frac{L_p}{L_m} \frac{\rho_p}{\rho_m} \frac{\mu_m}{\mu_p} v_p .$$

De tablas, para el aire a 25°C y 1 kg/cm<sup>2</sup><sub>abs</sub> :  $\rho_m = 1.185 \text{ kg}_m/\text{m}^3$ ,  $\mu_m = 1.835 \times 10^{-5} \text{ N seg}/\text{m}^2$ . Asimismo, para el agua a 15°C :  $\rho_p = 999.1 \text{ kg}_m/\text{m}^3$ ,  $\mu_p = 1.139 \times 10^{-3} \text{ N seg}/\text{m}^2$ . Sustituyendo:

$$v_m = (5) \left[ \frac{999.1}{1.185} \right] \left[ \frac{1.835 \times 10^{-5}}{1.139 \times 10^{-3}} \right] (50 \text{ cm/seg}) = 3395.8 \text{ cm/seg},$$

$$v_m = 33.96 \text{ m/seg} .$$

Para determinar el gasto de aire en el modelo:

$$Q_m = v_m A_m ,$$

$$Q_m = (33.96 \text{ m/seg}) \left( \frac{\pi}{4} \left[ \frac{4}{5} \right]^2 \text{ m}^2 \right) = 17.07 \text{ m}^3/\text{seg} .$$

### 3.5.2 Estructuras hidráulicas abiertas.

Los sistemas tales como vertederos de excedencias, tanques amortiguadores y transiciones en canales, están sometidos a fuerzas de gravedad debido a diferencias de nivel del líquido, y a fuerzas de inercia. Para que exista similitud dinámica, es suficiente que el número de Froude sea igual en el prototipo y en el modelo:

$$\frac{v_m^2}{g_m L_m} = \frac{v_p^2}{g_p L_p} , \quad (3.5.3)$$

donde  $g_m = g_p$  y sustituyendo la Ec 3.4.1:

$$v_p = v_m \sqrt{L_r} \quad (3.5.4)$$

Los tiempos correspondientes también se pueden relacionar:

$$T_m = \frac{L_m}{v_m}, \quad T_p = \frac{L_p}{v_p}, \quad \text{resultando:}$$

$$T_p = T_m \sqrt{L_r} \quad (3.5.5)$$

Para la relación de gastos:

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \frac{L_p^3 / T_p}{L_m^3 / T_m} = (L_r)^{5/2}, \quad (3.5.6)$$

y para la relación de fuerzas (por ejemplo en compuertas):

$$\frac{F_p}{F_m} = \frac{\gamma h_p L_p^2}{\gamma h_m L_m^2} = L_r^3,$$

donde  $h$  es la carga.

#### Problema.

La velocidad en un punto del modelo de un vertedor de excedencias de una presa es 3.3 pie/seg. Para una relación de escalas del prototipo al modelo 10:1, ¿cuál es el valor de la velocidad en el punto correspondiente del prototipo, en las mismas condiciones?

Solución:

De la Ec 3.5.4:

$$v_p = v_m \sqrt{L_r} = (3.3 \text{ pies/seg}) (\sqrt{10}) = 10.436 \text{ pie/seg.}$$

### 3.5.3 Maquinaria hidráulica.

Las máquinas hidráulicas requieren un parámetro adicional, que relacione el gasto a través de ellas y la velocidad de sus partes móviles. Existe similitud dinámica, si los diagramas vectoriales a la entrada o salida de sus partes móviles son similares.

El número de Reynolds puede discrepar de dos a tres por ciento en la eficacia entre el modelo y prototipo, ya que es imposible obtener el mismo número para ambos. El número de Mach es importante en compresoras de flujo axial y en turbinas de gas.



## CAPITULO 4

### ECUACIONES FUNDAMENTALES

#### 4.1 Conceptos fundamentales.

El flujo de fluidos es un fenómeno físico muy complejo y, por lo general, su análisis matemático se facilita mediante ciertas suposiciones que simplifican el problema. Una de las principales es que se tenga un fluido ideal; es decir, sin fricción e incompresible; otra puede ser que el flujo no varíe con el paso del tiempo.

Antes de realizar el análisis del flujo de fluidos, se explicarán ciertos conceptos básicos para su desarrollo.

Se define a un sistema como a una masa bien determinada de algún material o cuerpo, el cual se diferencia del resto que se llama medio ambiente. De acuerdo con el principio de la conservación de la masa, dentro de un sistema, la masa permanece constante con el tiempo:

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (4.1.1)$$

El volumen de control o sistema abierto es una región en el

espacio, por cuya frontera, también llamada superficie de control, entra y sale un fluido.

Los parámetros ( $\alpha$ ) que intervienen en el comportamiento de un fluido, como la velocidad, la presión y la densidad, en general no son constantes; pueden variar en el tiempo o de un punto a otro, o pueden variar en ambos casos.

Se define un flujo permanente a aquél en que los parámetros en cualquier punto no cambian con el tiempo:

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0. \quad (4.1.2)$$

En realidad ocurren pequeñas fluctuaciones en las propiedades de un fluido a través del tiempo; en presencia de flujo turbulento, por lo tanto, el concepto de flujo permanente se debe generalizar al hecho de que, el valor promedio temporal de una propiedad no cambia a través del tiempo.

El flujo no permanente es aquel en que las condiciones en cualquier punto cambian con el tiempo:

$$\frac{d\alpha}{dt} \neq 0. \quad (4.1.3)$$

El flujo es uniforme si en cualquier punto del flujo, el vector velocidad (tanto en magnitud, como en dirección y sentido) es idéntico en un instante dado:

$$\frac{\partial v}{\partial s} = 0. \quad (4.1.4)$$

Este concepto se puede aplicar al flujo de un fluido real, a pesar de que el vector velocidad es cero en la frontera, siempre y cuando las secciones transversales paralelas del conducto sean iguales y la velocidad media en cada una de ellas sea la misma en un instante dado.

El flujo es no uniforme cuando el vector velocidad varía de

un punto a otro en un instante dado:

$$\frac{dv}{ds} \neq 0 \quad (4.1.5)$$

Un flujo uniforme permanente es el flujo de un líquido en un tubo largo con un gasto constante; si se tienen las mismas condiciones, pero con gasto variable, entonces será un flujo uniforme no permanente; el flujo con gasto constante a través de un tubo cónico es un flujo permanente no uniforme y el gasto creciente o decreciente a través de un tubo cónico es un flujo no permanente no uniforme.

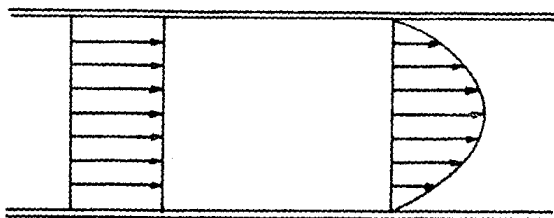
El flujo laminar es aquél en el que las partículas del fluido se mueven en trayectorias en forma de láminas o capas paralelas. Este flujo se rige por la ley de Newton de la viscosidad (Ec 1.3.2) y es inestable cuando se tiene baja viscosidad o alta velocidad de flujo, ya que éste tiende a ser turbulento.

El flujo turbulento es más común y en él las partículas del fluido se mueven sin un orden aparente, desarrollándose mayores esfuerzos cortantes y teniendo más pérdidas o irreversibilidades de energía mecánica. Estas pérdidas varían con la segunda potencia de la velocidad.

El flujo de un fluido es en general tridimensional; es decir, que los parámetros de flujo como la velocidad, presión y demás, varían en las tres direcciones de las coordenadas.

El análisis de flujo de fluidos se simplifica si se seleccionan una o dos direcciones, en las que la variación de los parámetros sea mayor. En el flujo unidimensional, los parámetros de flujo se pueden expresar en función del tiempo y de una sola coordenada, la cual es por lo general, la distancia a lo largo de una línea central de un conducto. En este tipo de flujo se utilizan los valores promedio de los parámetros en cualquier sección perpendicular al flujo. Un ejemplo de ello es el flujo en tuberías, en donde se desprecia la variación de la velocidad en la

sección transversal, tomándose el valor promedio de ella (Fig 4.1).



Flujo unidimensional

Flujo real

Fig 4.1 Perfil de velocidades.

Debido a la viscosidad, en el perfil real de velocidades, la velocidad es nula en las paredes de la tubería.

En el flujo bidimensional, los parámetros de flujo están en función del tiempo y de dos coordenadas rectangulares; por lo tanto, las partículas de fluido fluyen sobre planos paralelos al flujo y con el mismo patrón de líneas de corriente, con lo cual no hay variación de los parámetros en dirección perpendicular a los planos.

Las líneas de corriente son líneas continuas cuya dirección en cada punto es igual a la dirección del vector velocidad en dicho punto. A través de las líneas de corriente no existe flujo de fluidos. Estas no cambian con el tiempo en flujo permanente, debido a que el vector velocidad no cambia de dirección en un punto; por lo tanto, como una partícula de fluido siempre se mueve en forma tangencial a la línea de corriente, la trayectoria de la partícula es una línea de corriente en flujo permanente.

En flujo no permanente las líneas de corriente cambian con el tiempo.

Un tubo de corriente es un conducto formado por líneas de corriente, a través del cual fluye un fluido. En un tubo de corriente sólo puede entrar o salir fluido a través de sus extremos ya que sus paredes están limitadas por líneas de corriente.

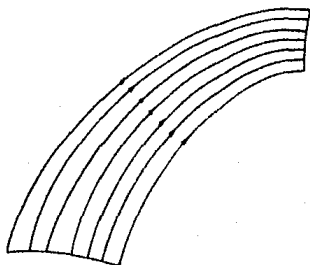


Fig 4.2 Tubo de corriente.

#### 4.2 Ecuación de continuidad.

La ecuación de continuidad es una expresión matemática del principio de conservación de la masa. En ella se establece que la cantidad de masa que entra menos la cantidad de masa que sale de un volumen de control es igual al cambio de masa en dicho volumen de control, en un intervalo de tiempo.

La ecuación de continuidad se puede expresar en las formas diferencial e integral.

##### *Forma diferencial.*

Se considera un volumen de control elemental  $\Delta x \Delta y \Delta z$  (Fig 4.3), cuyos lados son perpendiculares a los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas. En el centro del volumen de control  $C(x, y, z)$  el fluido tiene una velocidad  $v$  de componentes  $(v_x,$

$v_y, v_z$ ) y una densidad  $\rho$ , las cuales varían en forma continua.

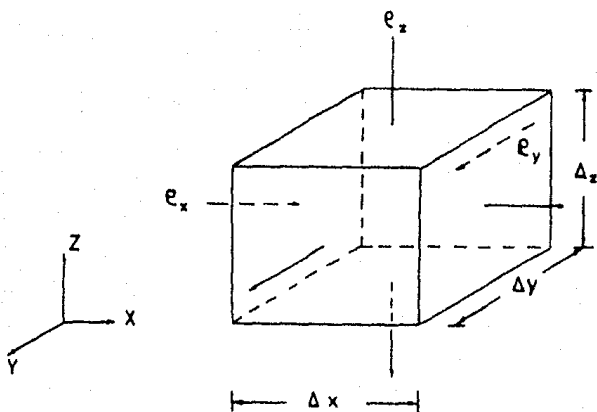


Fig 4.3 Volumen de control.

Para un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , la cantidad de masa que entra en la dirección X es:

$$(\rho v)_x \Delta y \Delta z \Delta t .$$

en forma análoga, la cantidad de masa que sale en la cara opuesta ( $x + \Delta x$ ), en la misma dirección, es:

$$(\rho v)_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta t .$$

Por otra parte, el cambio de masa en el volumen de control es igual a la masa en el tiempo  $t + \Delta t$  menos la masa al tiempo  $t$ :

$$\rho_{t+\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z - \rho_t \Delta x \Delta y \Delta z .$$

Haciendo un balance de masa en las tres direcciones:

$$[(\rho v)_x - (\rho v)_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z \Delta t + [(\rho v)_y - (\rho v)_{y+\Delta y}] \Delta x \Delta z \Delta t + [(\rho v)_z - (\rho v)_{z+\Delta z}] \Delta x \Delta y \Delta t = [\rho_{t+\Delta t} - \rho_t] \Delta x \Delta y \Delta z .$$

Dividiendo ambos miembros entre  $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$  :

$$-\left[ \frac{(\rho v)_{x+\Delta x} - (\rho v)_x}{\Delta x} + \frac{(\rho v)_{y+\Delta y} - (\rho v)_y}{\Delta y} + \frac{(\rho v)_{z+\Delta z} - (\rho v)_z}{\Delta z} \right] = \frac{\rho_{t+\Delta t} - \rho_t}{\Delta t}$$

Tomando límites cuando  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  y  $\Delta t$  tienden a cero:

$$-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (4.2.1)$$

la cual es la ecuación de conservación de la masa en forma diferencial.

Para un fluido incompresible,  $\rho = \text{constante}$  y  $\partial \rho / \partial t = 0$ , por lo que se tiene:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (4.2.2)$$

La Ec 4.2.1 también se puede expresar en forma vectorial:

$$-\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (4.2.3)$$

donde el operador nabla " $\nabla$ " se define como:

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z},$$

e  $i$ ,  $j$  y  $k$  son los vectores unitarios en las direcciones  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , respectivamente. Además el vector velocidad  $\mathbf{v}$  está dado por:

$$\mathbf{v} = v_x i + v_y j + v_z k.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= \left( i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\rho v_x i + \rho v_y j + \rho v_z k) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z), \end{aligned}$$

lo que demuestra la validez de la Ec 4.2.3 . Para un fluido incompresible:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 , \quad (4.2.4)$$

donde al producto escalar  $\nabla \cdot \vec{v}$  se le llama divergencia del vector velocidad  $\vec{v}$  , el cual significa el gasto neto que sale por unidad de volumen en un punto.

#### Forma integral.

Supóngase el flujo de un fluido, un sistema y un volumen de control. En el tiempo  $t$  , la masa contenida en el sistema ocupa totalmente el volumen de control (Fig 4.4). Para el tiempo  $t + \Delta t$  el sistema se ha movido debido al flujo, pero el volumen de control permanece fijo en el espacio. La masa del sistema es constante y en el tiempo  $t$  es igual a la masa contenida en el volumen de control ( $m_{vc_t}$ ), por lo que:

$$m_{vc_t} = m_{vc_{t+\Delta t}} + \Delta m_{sal} - \Delta m_{en} ,$$

donde  $m_{vc_{t+\Delta t}}$  es la masa contenida en el volumen de control en el tiempo  $t + \Delta t$  ;  $\Delta m_{sal}$  es la masa que sale del volumen de control en el intervalo  $\Delta t$  y  $\Delta m_{en}$  es la masa que entra al volumen de control en  $\Delta t$  . Por tanto:

$$\frac{m_{vc_{t+\Delta t}} - m_{vc_t}}{\Delta t} = \frac{\Delta m_{en}}{\Delta t} - \frac{\Delta m_{sal}}{\Delta t} . \quad (4.2.5)$$

Analizando el primer miembro de la Ec 4.2.5, se observa que expresa el cambio de masa dentro del volumen de control en un intervalo de tiempo. Tomando el límite cuando  $\Delta t$  tiende a cero:

$$\frac{\partial m_{vc}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho \, dV = \int_{vc} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV , \quad (4.2.6)$$

donde  $\int_{vc} \rho \, dV$  es la masa en el volumen de control a un tiempo  $t$  ;  $dV$  es un elemento del volumen de control.



Para el segundo miembro de la Ec 4.2.5, tomando el límite del segundo término cuando  $\Delta t$  tiende a cero:

$$\frac{\partial m_{sal}}{\partial t} = \int \rho v_n dA_{sal} = \int \rho |\vec{v}| \cos \alpha dA_{sal}, \quad (4.2.7)$$

donde  $v_n$  es la componente normal de la velocidad a la superficie de control (sc) y es positiva si está dirigida hacia el exterior del volumen de control;  $\alpha$  es el ángulo entre el vector velocidad  $\vec{v}$  y el vector normal al volumen de control.

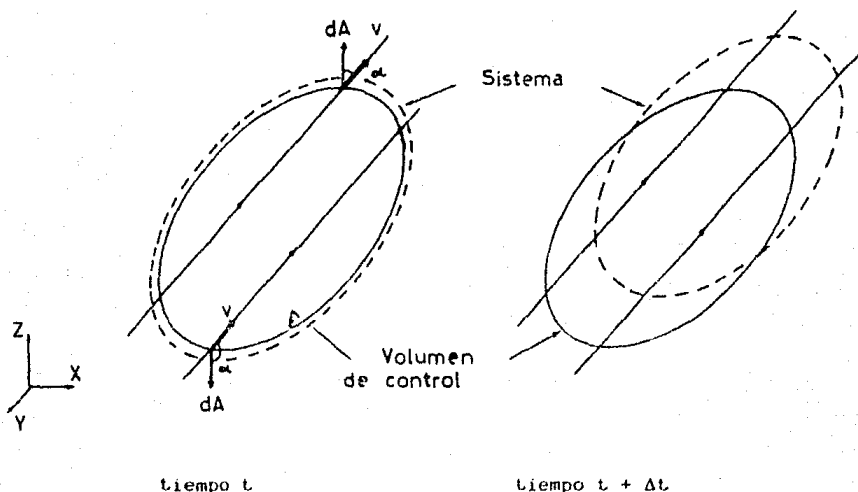


Fig 4.4 Sistema y volumen de control en el flujo de un fluido.

Para la masa que entra al volumen de control  $\Delta m_{en}/\Delta t$ , tomando el límite cuando  $\Delta t$  tiende a cero:

$$\frac{\partial m_{en}}{\partial t} = - \int_{A_{en}} \rho |\vec{v}| \cos \alpha dA_{en}. \quad (4.2.8)$$

El signo es debido a que el  $\cos \alpha$  es negativo cuando el

flujo es hacia el interior del volumen de control, por lo tanto:

$$\frac{\partial m_{en}}{\partial t} - \frac{\partial m_{sal}}{\partial t} = - \int_{A_T} \rho |\dot{v}| \cos \alpha \, dA_T = - \int_{s.c} \rho \dot{v} \cdot d\lambda \quad (4.2.9)$$

Donde  $d\lambda$  es el vector normal al elemento de área, cuyo módulo es igual a éste y es positivo si está dirigido hacia afuera del volumen de control. La integral de superficie se extiende sobre toda la superficie de control.

Sustituyendo las Ecs 4.2.6 y 4.2.9 en la Ec 4.2.5 :

$$\int_{v.c} \frac{d\rho}{dt} \, dV = - \int_{s.c} \rho \dot{v} \cdot d\lambda \quad (4.2.10)$$

Esta es la ecuación de continuidad en forma integral.

La ecuación anterior expresa que la rapidez de variación de la masa dentro del volumen de control es igual al gasto másico neto que pasa a través de la superficie de control.

Para un flujo permanente la Ec 4.2.10 se simplifica a:

$$\int_{s.c} \rho \dot{v} \cdot d\lambda = 0 \quad (4.2.11)$$

Para el flujo de un fluido incompresible ( $\rho = \text{constante}$ ):

$$\int_{s.c} \dot{v} \cdot d\lambda = 0 \quad \text{o} \quad \int_{s.c} |\dot{v}| \cos \alpha \, dA = 0 \quad (4.2.12)$$

Si se aplica esta expresión a un tubo de corriente, en el cual el volumen de control está limitado por la pared del tubo y por las áreas transversales  $A_1$  y  $A_2$  (Fig 4.5):

$$\int v_1 \cos (180^\circ) \, dA_1 = - v_1 A_1$$

$$\int v_2 \cos (0^\circ) \, dA_2 = v_2 A_2$$

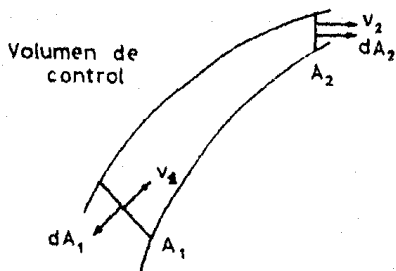


Fig 4.5 Tubo de corriente con flujo de un fluido incompresible.

Sustituyendo en la Ec 4.2.12 :

$$\int_{\text{nc}} |\vec{v}| \cos \alpha \, dA = -v_1 A_1 + v_2 A_2 = 0 .$$

Por tanto  $A_1 v_1 = A_2 v_2$  , (4.2.13)

o  $Q_1 = Q_2$  . (4.2.14)

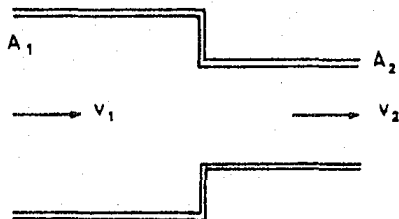
Para un flujo permanente, al hacer un análisis similar, se tiene:

$$\dot{m} = A_1 v_1 \rho_1 = A_2 v_2 \rho_2 . \quad (4.2.15)$$

Donde  $v_1$  y  $v_2$  son las velocidades medias en cada una de las secciones  $A_1$  y  $A_2$  respectivamente;  $Q_1$  y  $Q_2$  son gastos volumétricos y  $\dot{m}$  es el gasto másico.

#### Problemas:

4.2.1 En una tubería por donde fluye aceite de densidad relativa 0.86, la velocidad es de 2 m/seg en una sección de 20 cm de diámetro. Calcule la velocidad en otra sección cuyo diámetro es 5 cm; calcule además el gasto másico.



Solución:

De la Ec 4.2.15:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= A_1 v_1 \rho = (0.2^2 \times \pi/4 \text{ m}^2) (2 \text{ m/seg}) (0.86) (1000 \text{ kg}_m/\text{m}^3) , \\ &= 54.04 \text{ kg}_m/\text{seg} . \end{aligned}$$

De la misma ecuación:

$$v_2 = \frac{v_1 A_1}{A_2} = \frac{(2 \text{ m/seg}) (0.2^2 \times \pi/4 \text{ m}^2)}{(0.05^2 \times \pi/4 \text{ m}^2)} = 32 \text{ m/seg} .$$

4.2.2 Verifique si la distribución de velocidades satisface la ley de conservación de la masa para un fluido incompresible.

$$\vec{v} = i (5x) + j (5y) + k (-10z) .$$

Solución:

De la Ec 4.2.4:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \dot{u} ,$$

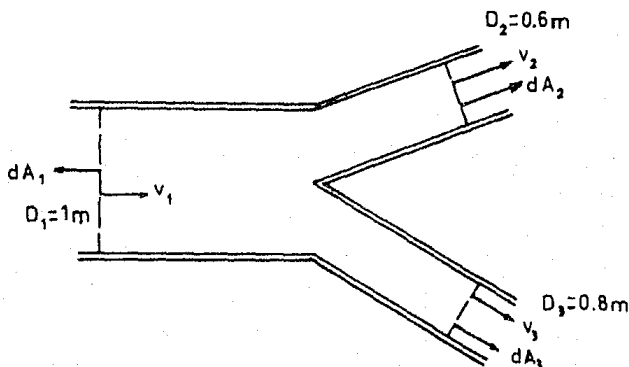
$$\nabla \cdot \vec{v} = \left( i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) ( i (5x) + j (5y) + k (-10z) ) ,$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (5x) + \frac{\partial}{\partial y} (5y) - \frac{\partial}{\partial z} (10z) ,$$

$$= 5 + 5 - 10 = 0 ,$$

con lo cual cumple con la ley de la conservación de la masa.

4.2.3 Para la figura,  $v_1 = 3$  m/seg ,  $v_2 = 4$  m/seg , el flujo es permanente e incompresible. Encuentre  $v_3$  aplicando la ecuación de continuidad en forma integral.



Solución:

Aplicando la Ec 4.2.12 en cada una de las áreas transversales  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  :

$$\int_{\text{ac}} v_1 \cos \alpha_1 dA_1 + \int_{\text{ac}} v_2 \cos \alpha_2 dA_2 + \int_{\text{ac}} v_3 \cos \alpha_3 dA_3 = 0 ,$$

donde,  $\alpha_1 = 180^\circ$  ,  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0^\circ$  , y además considerando las velocidades medias constantes en cada una de las áreas:

$$- v_1 A_1 + v_2 A_2 + v_3 A_3 = 0 .$$

$$v_3 = \frac{v_1 A_1 - v_2 A_2}{A_3}$$

$$v_3 = \frac{(3 \text{ m/seg})(1^2 \times \pi/4 \text{ m}^2) - (4 \text{ m/seg})(0.6^2 \times \pi/4 \text{ m}^2)}{(0.8^2 \times \pi/4 \text{ m}^2)} = 2.44 \text{ m/seg.}$$

### 4.3 Ecuación de cantidad de movimiento.

La segunda ley de Newton del movimiento, se puede expresar para un sistema como:

$$\Sigma F = m \ddot{a} = m \frac{d\dot{v}}{dt} = \frac{d(m \dot{v})}{dt}, \quad (4.3.1)$$

donde  $\Sigma F$  es la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema de masa constante  $m$  y cuyo centro de gravedad se mueve a una velocidad  $\dot{v}$ .

Para la dirección  $X$  se tendrá:

$$\Sigma F_x = m a_x = m \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} (m v_x) = \frac{d}{dt} M_x,$$

donde  $M = m \dot{v}$  es la cantidad de movimiento del sistema.

Analizando la Fig 4.4, en la dirección  $X$ :

En el tiempo  $t$ :  $(M_{x_t})_{s.s.} = (M_{x_t})_{v.c.}$

En el tiempo  $t + \Delta t$ :  $(M_{x_{t+\Delta t}})_{s.s.} = (M_{x_{t+\Delta t}})_{v.c.} + \Delta M_{x_{\Delta t}} - \Delta M_{x_{\Delta t}}$

donde  $M_x$  es la cantidad de movimiento en la dirección  $X$ ;  $\Delta M_{x_{\Delta t}}$  es la cantidad de movimiento que sale del volumen de control en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  y  $\Delta M_{x_{\Delta t}}$  es la cantidad de movimiento que entra en  $\Delta t$ .

El aumento de la cantidad de movimiento en la dirección  $X$  dentro del sistema es:

$$[(M_{x_{t+\Delta t}} - M_{x_t})]_{\text{e.i.e}} = (M_{x_{t+\Delta t}})_{\text{vc}} - (M_{x_t})_{\text{vc}} + \Delta M_{x_{\text{sal}}} - \Delta M_{x_{\text{en}}}$$

Dividiendo ambos miembros entre  $\Delta t$  :

$$\frac{(M_{x_{t+\Delta t}} - M_{x_t})_{\text{e.i.e}}}{\Delta t} = \frac{(M_{x_{t+\Delta t}} - M_{x_t})_{\text{vc}}}{\Delta t} + \frac{\Delta M_{x_{\text{sal}}}}{\Delta t} - \frac{\Delta M_{x_{\text{en}}}}{\Delta t}$$

Tomando el límite cuando  $\Delta t$  tiende a cero:

$$\Sigma F_x = \left[ \frac{dM_x}{dt} \right]_{\text{e.i.e}} = \left[ \frac{dM_x}{dt} \right]_{\text{vc}} + \frac{dM_{x_{\text{sal}}}}{dt} - \frac{dM_{x_{\text{en}}}}{dt} \quad (4.3.2)$$

De acuerdo a la sección anterior, el gasto masico que pasa a través del área  $dA$  (Fig 4.4) es :  $\rho |\vec{v}| \cos \alpha dA$ .

Por tanto, la cantidad de movimiento en la dirección X por unidad de tiempo a través del área  $dA$  es :  $v_x (\rho |\vec{v}| \cos \alpha dA)$ , entonces la cantidad de movimiento neta que pasa a través de toda la superficie de control en la dirección X es:

$$\frac{dM_{x_{\text{sal}}} - dM_{x_{\text{en}}}}{dt} = \int_{\text{sc}} \rho v_x |\vec{v}| \cos \alpha dA = \int_{\text{sc}} \rho v_x \vec{v} \cdot d\vec{\lambda} \quad (4.3.3)$$

Por otra parte, la cantidad de movimiento en la dirección X dentro del volumen de control en cualquier tiempo es :  $\int_{\text{vc}} \rho v_x dV$ , donde  $dV$  es un elemento del volumen de control. Por tanto, la variación con respecto a  $t$  de la cantidad de movimiento en el volumen de control es:

$$\left[ \frac{dM_x}{dt} \right]_{\text{vc}} = \frac{d}{dt} \int_{\text{vc}} \rho v_x dV \quad (4.3.4)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la Ec 4.3.2:

$$\Sigma F_x = \frac{d}{dt} \int_{\text{vc}} \rho v_x dV + \int_{\text{sc}} \rho |\vec{v}| v_x \cos \alpha dA \quad (4.3.5)$$

obteniéndose en la misma forma, expresiones análogas para las direcciones Y y Z, por lo que:

$$\Sigma F = \frac{d}{dt} \int_{v_c} \rho \dot{v} dV + \int_{a_c} \rho |\dot{v}| \dot{v} \cos \alpha dA, \quad (4.3.6)$$

Esta ecuación expresa que la fuerza resultante que actúa sobre el fluido de un volumen de control, es igual a la suma de la variación con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento dentro del volumen de control y el flujo neto de cantidad de movimiento que sale de este mismo volumen de control.

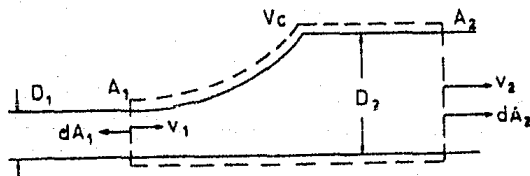
Para flujo permanente ( $da/dt = 0$ ), la Ec 4.3.6 resulta:

$$\Sigma F = \int_{a_c} \rho |\dot{v}| \dot{v} \cos \alpha dA, \quad (4.3.7)$$

$$\Sigma F_x = \int_{a_c} \rho |\dot{v}| v_x \cos \alpha dA. \quad (4.3.8)$$

#### Problemas.

4.3.1 El salto hidráulico es una corriente rápida de un líquido en un canal abierto, el cual cambia repentinamente a una corriente lenta con un área transversal mayor y una superficie libre con mayor nivel. Si se tiene un salto hidráulico como el de la figura, donde  $D_1 = 1$  pie,  $v_1 = 20$  pies/seg,  $v_2 = 4.44$  pies/seg,  $B = 5$  pies (ancho del canal) y además se tiene flujo permanente; determinar la altura  $D_2$  con la ecuación de cantidad de movimiento.



Canal rectangular



Solución:

De la Ec 4.3.8:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= \int_{ac} \rho |V| v_x \cos \alpha \, dA, \\ &= \rho v_1 v_1 \cos (180^\circ) A_1 + \rho v_2 v_2 \cos (0^\circ) A_2, \\ &= -\rho v_1^2 B D_1 + \rho v_2^2 B D_2.\end{aligned}$$

Además las fuerzas que actúan sobre las áreas transversales, también se pueden obtener de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= p_{c_1} A_1 - p_{c_2} A_2 = \gamma \frac{D_1}{2} (B D_1) - \gamma \frac{D_2}{2} (B D_2), \\ &= \frac{\gamma}{2} B D_1^2 - \frac{\gamma}{2} B D_2^2.\end{aligned}$$

Igualando ambas expresiones:

$$-\frac{\gamma}{\rho} v_1^2 B D_1 + \frac{\gamma}{\rho} v_2^2 B D_2 = \frac{\gamma}{2} B D_1^2 - \frac{\gamma}{2} B D_2^2,$$

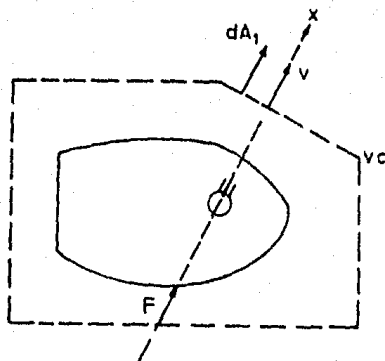
$$\therefore \frac{\rho}{2} D_2^2 + v_2^2 D_2 - \frac{\rho}{2} D_1^2 - D_1 v_1^2 = 0,$$

$$\text{o} \quad 16.1 D_2^2 + 19.713 D_2 - 416.1 = 0.$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado y tomando sólo el valor positivo ya que el valor negativo carece de significado físico:

$$D_2 = 4.51 \text{ pies}.$$

4.3.2 Desde una boquilla montada sobre un bote, se descarga horizontalmente un chorro de agua de 8 cm de diámetro con una velocidad de 40 cm/seg. Si se tiene flujo permanente, ¿cual es la fuerza necesaria para mantener el bote en reposo?



Solución:

Al seleccionar el volumen de control mostrado y de acuerdo con la Ec 4.3.8:

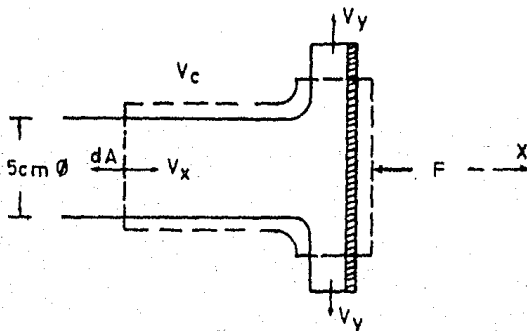
$$\Sigma F_x = \int_{sc} \rho |v| v_x \cos \alpha \, dA .$$

$$= \int_{sc} \rho v v_x \cos (0^\circ) \, dA = \rho v^2 A ,$$

$$F_x = (1000 \text{ kg/m}^3) (40 \text{ m/seg})^2 (0.08^2 \times \pi/4 \text{ m}^2) = 8042 \text{ N} .$$

Se requiere una fuerza de 8042 N en la dirección X, para que el bote se mantenga estático.

4.3.3 ¿Qué fuerza F se requiere para mantener la placa de la figura en forma fija, si el flujo es de un aceite de densidad relativa 0.83 con velocidad  $v_0 = 20 \text{ m/seg}$  y flujo permanente?



Solución:

Considerando el volumen de control mostrado y de acuerdo a la Ec 4.3.8:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= \int_{bc} \rho |V| v_x \cos \alpha \, dA, \\ &= \int_{bc} \rho v_o v_o \cos (180^\circ) \, dA = -\rho v_o^2 A,\end{aligned}$$

$$\Sigma F_x = - (1000 \text{ kg/m}^3) (0.83) (20 \text{ m/seg})^2 (0.05^2 \times \pi/4 \text{ m}^2) = - 652 \text{ N}.$$

Lo cual indica que se requiere una fuerza de 652 N en sentido contrario a la dirección X, para mantener la placa fija.

#### 4.4 Ecuación de conservación de energía.

El primer principio de la Termodinámica establece que la transferencia neta de calor suministrado a un sistema ( $\Delta H$ ), menos la transferencia neta de energía desarrollada por éste como trabajo ( $\Delta W_T$ ), es igual al incremento neto en la energía ( $\Delta E$ ) del sistema, la cual es una propiedad de éste:

$$\Delta H - \Delta W_T = \Delta E \quad (4.4.1)$$

Análogamente a la deducción de las ecuaciones anteriores y con referencia a la Fig 4.4:

$$\text{En el tiempo } t: \quad E_{e_{1s}} = E_{e_{1c}}$$

$$\text{En el tiempo } t + \Delta t: \quad E_{e_{1s}} = E_{e_{1c}} + \Delta E_{e_{1s}} - \Delta E_{e_{1c}}$$

La variación de la energía en el sistema por unidad de tiempo:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{(E_{e_{1s}} - E_{e_{1s}})}{\Delta t} = \frac{(E_{e_{1c}} - E_{e_{1c}})}{\Delta t} + \frac{\Delta E_{e_{1s}} - \Delta E_{e_{1c}}}{\Delta t}$$

Tomando límites ( $\Delta t$  tiende a cero) e igualando con la Ec 4.4.1 :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dH}{dt} - \frac{dWr}{dt} = \left( \frac{dE}{dt} \right)_{vc} + \left( \frac{dE}{dt} \right)_{sc} \quad (4.4.2)$$

Como ya se vio, la masa que cruza el elemento de área  $dA$  por unidad de tiempo es  $\rho |\dot{V}| \cos \alpha dA$ . Se define a  $e$  como la energía por unidad de masa ( $E/m$ ), la cual incluye varios tipos de energía: energía potencial, energía cinética o de movimiento y energía debida al movimiento molecular o energía interna, la cual es independiente de la atracción gravitacional o movimiento de la masa del sistema ( $u$ ). Por lo tanto:

$$\frac{E}{m} = e = g z + \frac{v^2}{2} + u . \quad (4.4.3)$$

De esta forma, la energía que cruza el área total del volumen de control (superficie de control) por unidad de tiempo es:

$$\left( \frac{dE}{dt} \right)_{sc} = \int_{sc} e \rho |\dot{V}| \cos \alpha dA . \quad (4.4.4)$$

Análogamente, la energía en el volumen de control en un instante es  $\int_{vc} e \rho dV$ , donde  $dV$  es un elemento de volumen, por tanto, la variación con respecto al tiempo de la energía dentro del volumen de control es:

$$\left( \frac{dE}{dt} \right)_{vc} = \frac{d}{dt} \int_{vc} e \rho dV . \quad (4.4.5)$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la Ec 4.4.2:

$$\frac{dH}{dt} - \frac{dWr}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{vc} e \rho dV + \int_{sc} e \rho |\dot{V}| \cos \alpha dA . \quad (4.4.6)$$

El trabajo total ( $Wr$ ) realizado por el sistema en sus alrededores, se puede dividir en el trabajo realizado por las fuerzas de presión ( $Wr$ ) más el trabajo realizado por fuerzas cortantes ( $Ws$ ), como el par que se ejerce en una flecha, por lo

tanto:

$$W_T = W_p + W_s \quad \text{o} \quad \frac{dW_T}{dt} = \frac{dW_p}{dt} + \frac{dW_s}{dt}$$

de acuerdo con la definición Trabajo = fuerza x distancia :

$$\Delta W_p = \int p \, dA \cdot |\vec{v}| \cos \alpha \, \Delta t$$

$$\text{o} \quad \frac{dW_p}{dt} = \int_{ac} p \, |\vec{v}| \cos \alpha \, dA$$

$$\therefore \quad \frac{dW_T}{dt} = \int_{ac} p \, |\vec{v}| \cos \alpha \, dA + \frac{dW_s}{dt} \quad (4.4.7)$$

Sustituyendo la Ec 4.4.7 en la Ec 4.4.6:

$$\frac{dH}{dt} - \frac{dW_s}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{vc} e \, \rho \, dV + \int_{ac} \left( e + \frac{p}{\rho} \right) \rho \, |\vec{v}| \cos \alpha \, dA \quad (4.4.8)$$

la cual es la ecuación de la conservación de energía, que expresa que la cantidad de calor neta suministrada por unidad de tiempo, menos el trabajo realizado por fuerzas cortantes por unidad de tiempo, es igual a la variación de la energía dentro del volumen de control por unidad de tiempo, más el trabajo realizado por fuerzas de presión, más el flujo neto de energía por unidad de tiempo a través de la superficie de control.

Si se aplica la Ec 4.4.8 al flujo permanente:

$$\frac{dH}{dt} - \frac{dW_s}{dt} = \int_{ac} \left( e + \frac{p}{\rho} \right) \rho \, |\vec{v}| \cos \alpha \, dA \quad (4.4.9)$$

*Ecuación de Bernoulli.*

Considerando el sistema mostrado en la Fig 4.6, en donde se tiene un fluido incompresible ( $\rho = \text{constante}$ ) y flujo permanente, al aplicar la Ec 4.4.9 a los puntos 1 y 2 del sistema, se tiene:

$$\frac{dH}{dt} - \frac{dW_s}{dt} = - \left( \frac{p_1}{\rho} + g z_1 + \frac{v_1^2}{2} + u_1 \right) \rho v_1 A_1 + \left( \frac{p_2}{\rho} + g z_2 + \frac{v_2^2}{2} + u_2 \right) \rho v_2 A_2 \quad (4.4.10)$$

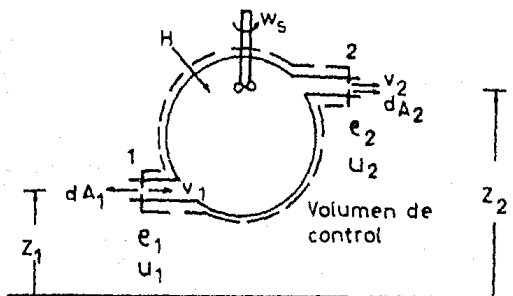


Fig 4.6 Volumen de control con flujo perpendicular a la superficie de control.

Si se sustituye la ecuación de continuidad para las mismas condiciones:  $Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$ , en la Ec 4.4.10 :

$$\frac{1}{\rho Q} \left( \frac{dH}{dt} - \frac{dW_s}{dt} \right) = - \left( \frac{p_1}{\rho} + g z_1 + \frac{v_1^2}{2} + u_1 \right) + \left( \frac{p_2}{\rho} + g z_2 + \frac{v_2^2}{2} + u_2 \right).$$

Dividiendo entre  $g$  y además considerando  $\gamma = \rho g$  :

$$\frac{1}{\gamma Q} \left( \frac{dH}{dt} - \frac{dW_s}{dt} \right) = - \left[ \frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{u_1}{g} \right] + \left[ \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{u_2}{g} \right] \quad (4.4.11)$$

Si se define a la energía que entra al sistema entre los puntos 1 y 2 como:

$$h_e = \frac{1}{\gamma Q} \frac{dH}{dt}, \quad h_e ; [L],$$

y además a la energía que sale del sistema entre ambos puntos como:

$$h_s = \frac{1}{\gamma Q} \frac{dW_s}{dt}, \quad h_s ; [L].$$

Al sustituir las ecuaciones anteriores en la Ec 4.4.11 :

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{u_1}{g} + h_e = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{u_2}{g} + h_s, \quad (4.4.12)$$

la cual es la ecuación de Bernoulli.

La energía requerida para vencer las fuerzas viscosas del fluido ("fricción"), se transforma en energía térmica, por lo que, la temperatura del fluido aumenta y por lo tanto, la energía interna aumenta, así como también, la cantidad de calor transferido al exterior por unidad de masa ( $q$ ).

De esta forma, si se considera a las pérdidas de energía útil de un sistema, expresada en unidades de carga como:

$$\Sigma h_L = (u_2 - u_1 - q) / g,$$

y sustituyendo finalmente en la Ec 4.4.12:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + h_e = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + h_s + \Sigma h_L. \quad (4.4.13)$$

Ecuación de Bernoulli para fluido incompresible y flujo permanente, en la cual cada término está expresado como energía por unidad de peso o "carga":

$$\frac{\text{energía}}{\text{peso}} ; \left[ \frac{F L}{F} \right] = [L].$$

La pérdida de potencia (PL) se define como:

$$PL = \gamma Q \Sigma h_L, \quad PL ; \left[ \frac{F L}{L} \right]. \quad (4.4.14)$$

### Ecuación de Torricelli.

Esta ecuación se utiliza en flujos a través de orificios. Se considera un sistema como el de la Fig 4.7; el orificio tiene el borde biselado, de tal modo, que el contacto con el fluido sea mínimo y, por lo tanto, los efectos de "fricción" sean mínimos.

El líquido sale del orificio como un chorro libre y, por tanto, sometido a la influencia de la gravedad. Este chorro tiene forma cilíndrica debido a la presión atmosférica y la presión a lo largo de su línea central se considera igual a la presión atmosférica.

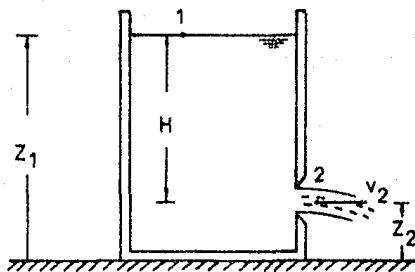


Fig 4.7 Descarga por un orificio de un depósito.

Si el flujo es permanente y los efectos de fricción despreciables, al aplicar la ecuación de Bernoulli en los puntos 1 y 2 se tiene:

$$\frac{p_{atm}}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_{atm}}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

Se supone un depósito lo bastante grande, de tal suerte que la  $v_1$  se considere despreciable y además de acuerdo a la figura



$H = z_1 - z_2$ , por lo tanto la ecuación anterior se reduce a:

$$v_2 = (2gH)^{1/2}, \quad (4.4.15)$$

la cual es la ecuación de Torricelli, que expresa que la velocidad de descarga del líquido es igual a la velocidad de caída libre desde la superficie libre del depósito.

*Factor de corrección de la energía cinética.*

En la ecuación de Bernoulli, el término  $v^2/2g$  representa la energía cinética por unidad de peso del fluido. La velocidad en una sección transversal no es uniforme, debido a la viscosidad del fluido; por tanto, es necesario afectar a este término de un factor de corrección ( $\alpha$ ), de tal manera que  $\alpha \bar{v}^2/2g$  sea igual a la energía cinética media por unidad de peso a través de una sección transversal, donde  $\bar{v}$  representa la velocidad promedio.

El peso de fluido por unidad de tiempo que pasa por  $dA$  se expresa como  $\gamma v dA$ ; al multiplicar por  $v^2/2g$  e integrar se obtiene la energía cinética por unidad de tiempo que pasa a través de toda la sección transversal:  $\gamma \int v^3/2g dA$ . De igual manera, la energía cinética media por unidad de tiempo se expresa como  $(\alpha \bar{v}^2/2g)(\gamma \bar{v} A)$ , donde  $A$  es el área total de la sección transversal. Igualando:

$$\gamma \int \frac{v^3}{2g} dA = \alpha \frac{\bar{v}^2}{2g} \gamma \bar{v} A;$$

por tanto:

$$\alpha = \frac{1}{A} \int \left( \frac{v}{\bar{v}} \right)^3 dA. \quad (4.4.16)$$

Por lo anterior, la ecuación de Bernoulli se expresa como:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \alpha_1 \frac{\bar{v}_1^2}{2g} + h_w = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \alpha_2 \frac{\bar{v}_2^2}{2g} + h_w + \sum h_L \quad (4.4.17)$$

Para flujo laminar en una tubería,  $\alpha = 2$  ; para flujo turbulento,  $1.01 \leq \alpha \leq 1.10$  . Por lo general se toma  $\alpha = 1$  , ya que el término de energía cinética por unidad de peso representa un porcentaje pequeño dentro de la ecuación de Bernoulli.

*Representación geométrica de los cambios de energía.*

El término de "carga", o sea, energía por unidad de peso de un fluido de densidad constante, es de suma utilidad para representar en forma gráfica los cambios de energía.

Considerando la Fig 4.8, en la cual, se tiene una tubería que conduce un líquido proveniente de un depósito, y además están conectados tubos piezométricos en el conducto.

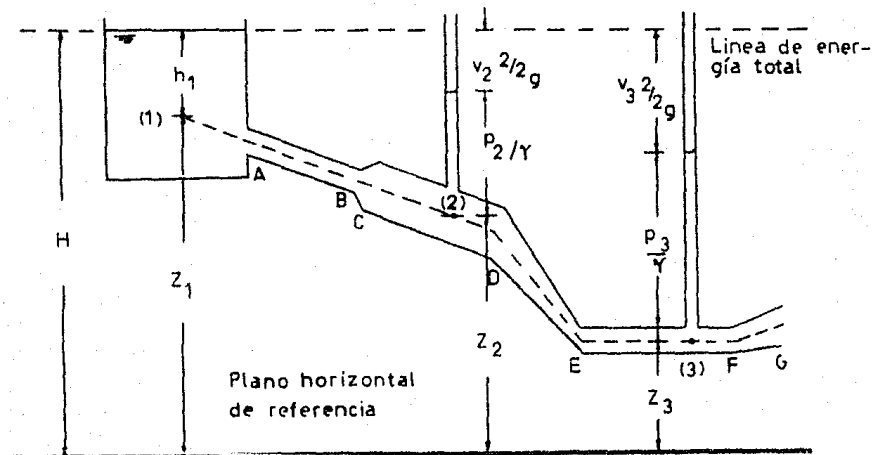


Fig 4.8 Representación gráfica de los cambios de energía para un fluido ideal.

En el punto (1), el cual está alejado de la descarga, la velocidad del líquido es pequeña y se desprecia; por lo tanto, de acuerdo a la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{0^2}{2g} = h_1 + z_1 = H,$$

(la carga total en la línea de corriente del punto (1) es H).

Para un fluido ideal, en el cual no se disipa energía por fricción, esta carga total es constante a lo largo de la línea de corriente, representándose con una línea paralela al plano horizontal.

Para el punto (2), la carga piezométrica o estática ( $p_2/\gamma + z_2$ ) la indica el nivel del líquido en el tubo piezométrico. La diferencia de alturas entre la carga total y la carga estática corresponde a la carga por energía cinética  $v_2^2/2g$ .

Para el punto (3), se tienen las mismas condiciones, aunque la velocidad  $v_3$  es mayor que  $v_2$  debido a que la sección transversal es menor.

En la realidad, la fricción produce pérdida de energía por lo que línea de energía o carga total no es horizontal sino que desciende a lo largo del flujo.

La línea que une los niveles de líquido en los tubos piezométricos, se llama línea de gradiente hidráulico o línea de presión.

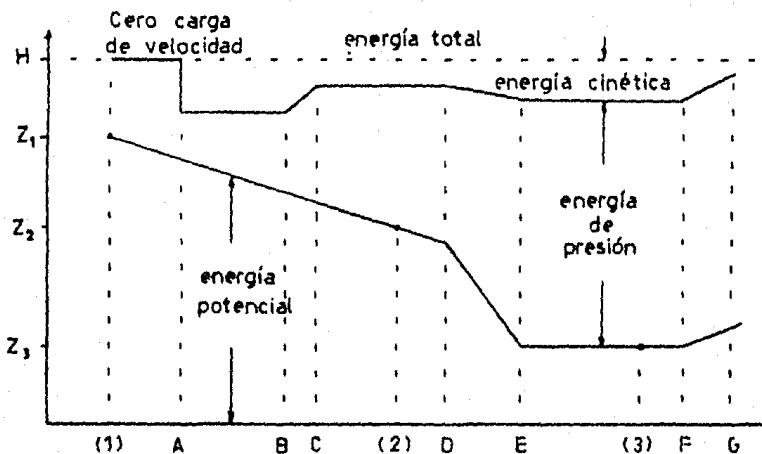
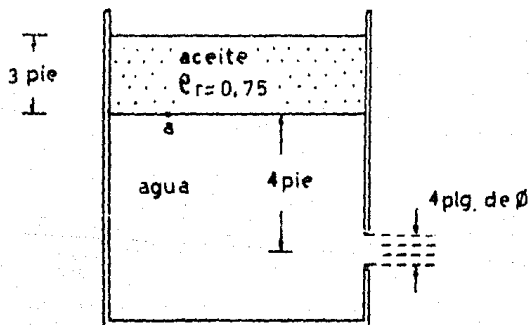


Fig 4.9 Representación cualitativa de las diferentes energías para un fluido ideal.

**Problemas.**

4.4.1 Despreciando las pérdidas, determínese el gasto de descarga por la boquilla en el depósito de la figura.



Solución:

La presión que ejerce el aceite, se convierte en una columna de agua equivalente:

$$p_a = \gamma h = (0.75) (62.4 \text{ lb/pie}^3) (3 \text{ pies}) = 140.4 \text{ lb/pie}^2,$$

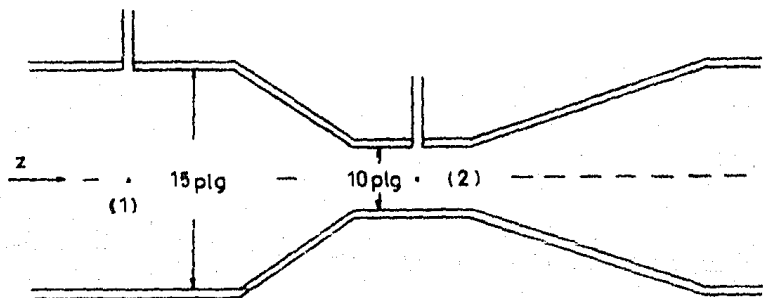
$$\therefore h_v = \frac{p_a}{\gamma_v} = \frac{140.4 \text{ lb/pie}^2}{62.4 \text{ lb/pie}^3} = 2.25 \text{ pie}.$$

De la Ec 4.4.15:

$$v_2 = \sqrt{2 g H} = \sqrt{2 (32.2 \text{ pie/seg}^2) (2.25 + 4 \text{ pies})} = 20.06 \text{ pie/seg}.$$

$$\therefore Q = v A = (20.06 \text{ pie/seg}) \left[ \left( \frac{4}{12} \right)^2 \frac{\pi}{4} \text{ pie}^2 \right] = 1.751 \text{ pie}^3/\text{seg}.$$

4.4.2 Para obtener el gasto en una tubería, se emplea el tubo Venturi, que consta de un conducto convergente seguido de un tramo de diámetro constante y después un conducto gradualmente divergente. Determine el gasto de aceite de densidad relativa 0.8 que fluye a través del tubo Venturi si  $p_1 - p_2 = 2.0 \text{ lb/plg}^2$ .



Solución:

Aplicando la ecuación de Bernoulli :

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \sum h_L$$

tomando como nivel de referencia la línea central del tubo Venturi,  $z_1 = z_2 = 0$  y despreciando las pérdidas de energía:

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$$

De la ecuación de continuidad :

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$$

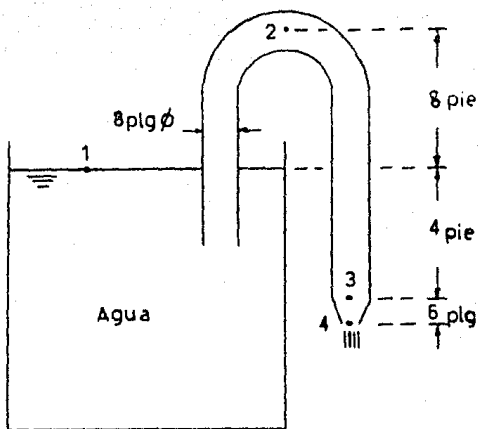
$$v_1^2 = \frac{16 Q^2}{\pi^2 D_1^4}, \quad v_2^2 = \frac{16 Q^2}{\pi^2 D_2^4}$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{8 Q^2}{\pi^2 g} \left( \frac{1}{D_2^4} - \frac{1}{D_1^4} \right)$$

$$\frac{2 \times 144 \text{ lb/pie}^2}{(0.8) (62.4 \text{ lb/pie}^3)} = \frac{8 Q^2}{\pi^2 (32.2 \text{ pie/seg}^2)} \left( \left( \frac{12}{10} \right)^4 - \left( \frac{12}{15} \right)^4 \right)$$

$$Q = 11.74 \text{ pie}^3/\text{seg}$$

4.4.3 El sifón de la figura está lleno con agua, tiene una boquilla de 6 plg de longitud unida en el punto 3, mediante la cual se reduce el diámetro hasta 6 plg en el punto 4 de descarga. Calcular el gasto de descarga si las pérdidas de 1 a 2 son  $1.7 v_2^2/2g$ , de 2 a 3  $0.9 v_2^2/2g$  y a través de la boquilla,  $0.06 v_4^2/2g$ .



Solución:

Aplicando la ecuación de energía entre los puntos 1 y 4 y tomando como nivel de referencia a este último (Ec 4.4.13):

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_4}{\gamma} + z_4 + \frac{v_4^2}{2g} + \sum h_L$$

tomando las presiones en los puntos 1 y 4 como cero manométrico y despreciando la velocidad en el punto 1:

$$4.5 = 1.06 \frac{v_4^2}{2g} + 2.6 \frac{v_2^2}{2g}$$

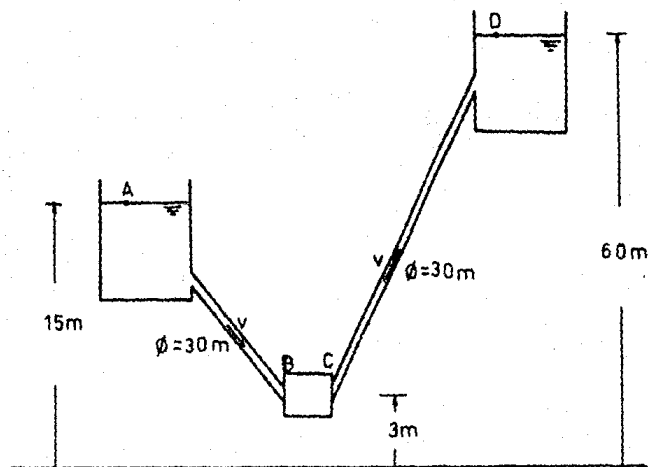
De la ecuación de continuidad (Ec 4.2.13):

$$v_2 = 9 Q / \pi \quad , \quad v_4 = 16 Q / \pi \quad ,$$

$$4.5 = \frac{1.06}{2g} \left( \frac{16 Q}{\pi} \right)^2 + \frac{2.6}{2g} \left( \frac{9 Q}{\pi} \right)^2$$

$$Q = 2.436 \text{ pie}^3/\text{seg}$$

4.4.4 En el sistema mostrado en la figura, la bomba BC debe proporcionar un gasto de 160 l/seg de aceite ( $\rho = 0.76$ ) hacia el tanque D. Si la pérdida de energía entre A y B es  $9.573 \frac{v^2}{2g}$  y entre C y D es  $24.8907 \frac{v^2}{2g}$ . a) ¿Qué potencia en HP debe suministrar la bomba BC? b) Dibujar la línea de cargas (total, de velocidad, potencial y cinemática).



Solución:

a) Aplicando la ecuación de energía (Ec 4.4.13) entre los puntos A y D; además despreciando las velocidades  $v_A$ ,  $v_D$  y considerando las presiones en los mismos puntos como cero manométrico:



$$\frac{p_A}{\gamma} + z_A + \frac{v_A^2}{2g} + h_{\text{bomba}} = \frac{p_D}{\gamma} + z_D + \frac{v_D^2}{2g} + 9.573 \frac{v^2}{2g} + 24.8907 \frac{v^2}{2g}$$

$$0 + 15 + 0 + h_{\text{bomba}} = 0 + 60 + 0 + 34.4637 \frac{v^2}{2g}$$

$$\therefore h_{\text{bomba}} = 45 + 34.4637 \frac{v^2}{2g}$$

De la ecuación de continuidad (Ec 4.2.13):

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{0.16 \text{ m}^3/\text{seg}}{\pi \times 0.15^2 \text{ m}^2} = 2.264 \text{ m/seg.}$$

Sustituyendo en la expresión anterior resulta:

$$h_{\text{bomba}} = 54 \text{ m.}$$

por tanto:

$$\text{Pot}_{\text{bomba}} = \frac{\gamma Q h_{\text{bomba}}}{1000} = \frac{(9806 \text{ N/m}^3)(0.76)(0.16 \text{ m}^3/\text{seg})(54 \text{ m})}{1000}$$

$$\text{Pot}_{\text{bomba}} = 64.4 \text{ kW} = 86 \text{ HP.}$$

b) La pérdida de energía entre A y B y entre C y D es:

$$h_{L_{AB}} = 9.573 \frac{v^2}{2g} = 2.5 \text{ m.}$$

$$h_{L_{CD}} = 24.8907 \frac{v^2}{2g} = 6.5 \text{ m.}$$

Por tanto, la línea de carga total en el punto A tiene una altura de 15 m sobre el nivel de referencia; en el punto B tiene una altura de 12.5 m ya que entre ambos puntos existe 2.5 m de pérdida de energía. La bomba proporciona una carga de 54 m, por lo que, la altura en C es de 66.5 m, y por último, la altura en D

es de 60 m ya que entre C y D existe una pérdida de carga de 6.5 m.

## CAPITULO 5

### FLUJO EN CANALES

#### 5.1 Perímetro mojado.

El flujo en canales abiertos presenta una superficie libre, la cual está sujeta a la presión atmosférica. Debido a esto, su análisis resulta, en general, más complicado que el del flujo en conductos cerrados.

La línea de gradiente hidráulico coincide con la superficie libre del fluido y su flujo a través del canal está afectado por los efectos gravitacionales a lo largo de su pendiente.

El flujo permanente y uniforme en canales se presenta en canales largos, inclinados y de sección transversal constante; el tirante en este tipo de flujo se llama tirante normal, el cual es constante, al igual que el gasto a lo largo del canal.

El flujo permanente no uniforme se tiene en un canal regular, en el cual, el tirante y por ende la velocidad media, cambia de una sección transversal a otra. También se tiene en canales irregulares, si el gasto es constante a través del tiempo. Un ejemplo de este tipo de flujo en canales es el salto hidráulico.

El flujo no permanente no uniforme es difícil de analizar y

el flujo no permanente uniforme casi no se presenta en canales.

El perímetro mojado (P) se define como la parte del perímetro de la sección transversal del conducto que está en contacto con el fluido; por tanto, no se incluye la superficie libre.

De acuerdo a la Fig 5.1, el perímetro mojado corresponde a la longitud de A a B, por la curva.

## 5.2 Radio hidráulico y Ecuación de Chézy.

El radio hidráulico (R) de un conducto se define como el cociente entre el área transversal del fluido (A) y el perímetro mojado:

$$R = \frac{A}{P} \quad (5.2.1)$$

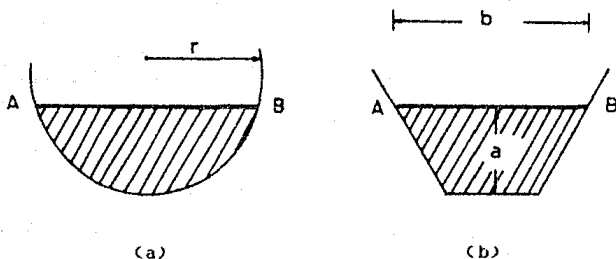


Fig 5.1 Sección transversal de canales abiertos.

Para un conducto circular de radio  $r$ , totalmente lleno se tiene que  $R = r/2$  o  $R = D/4$ . Al sustituir  $4R$  en lugar de  $D$  en el número de Reynolds se tiene:  $Nr = 4 \rho v R / \mu$ ; por lo tanto, si para una tubería, el  $Nr$  crítico es de 2000, para el caso de un canal, el  $Nr$  crítico, es decir, donde hay cambio de flujo laminar a turbulento, es de 500. En general los flujos en canales

abiertos son turbulentos.

Por medio del análisis dimensional se puede obtener una expresión para el esfuerzo cortante ( $\tau$ ) en la pared de conductos de sección transversal constante y con flujo turbulento permanente y uniforme (Fig 5.2):

$$\tau = f \frac{\rho}{8} v^2 \quad ; \quad \left[ \frac{F}{L^2} \right] , \quad (5.2.2)$$

donde  $f$  es un coeficiente adimensional,  $\tau$  se toma como el esfuerzo cortante promedio ya que en canales abiertos y en conductos cerrados de sección no circular, éste no es constante sobre la pared del conducto.

Al aplicar la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control (vc) el resultado es cero, por lo que existe un equilibrio de fuerzas en la dirección del movimiento. Haciendo un balance de fuerzas:

$$(p_1 - p_2) A + \gamma A \Delta z = \tau L P ,$$

donde  $\Delta z = L \text{ sen } \theta$  y  $P$  es el perímetro mojado.

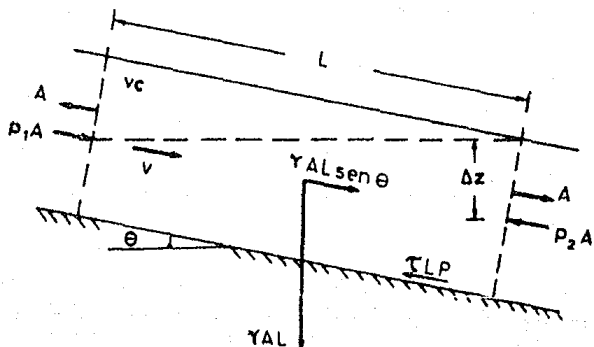


Fig 5.2 Fuerzas sobre un elemento de fluido en un canal.

Sustituyendo las Ecs 5.2.1 y 5.2.2 en la expresión anterior y haciendo  $\Delta p = p_1 - p_2$  :

$$\frac{\Delta p + \gamma \Delta z}{L} = \frac{f \rho v^2}{8 R} \quad (5.2.3)$$

Dividiendo ambos miembros entre  $\gamma$  y haciendo  $h_f = (\Delta p + \gamma \Delta z)/\gamma$ , donde  $h_f$  son las pérdidas por unidad de peso:

$$\frac{h_f}{L} = S = \frac{f}{R} \frac{v^2}{8 g} \quad (5.2.3.a)$$

$S$  representa las pérdidas de energía por unidad de peso y por unidad de longitud, o la pendiente del fondo del canal (plantilla).

$$v = \sqrt{\frac{8 g}{f}} \sqrt{R S} = C \sqrt{R S} \quad (5.2.4)$$

la cual es la ecuación de Chézy, donde  $C = \sqrt{8g/f}$  es el coeficiente de Chézy.

Para el caso de tuberías se tiene que  $R = D/4$ , por lo que, sustituyendo en la Ec 5.2.3.a:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2 g} \quad (5.2.5)$$

que se conoce como la ecuación de Darcy-Weisbach, donde  $f$  es el factor de fricción (adimensional).

Para flujo en canales abiertos, se tiene:

$$v = \sqrt{\frac{8 g}{f}} \sqrt{R S} \quad (5.2.6)$$

en el cual se usan valores de  $f$  obtenidos con experimentos en tuberías.

Para el caso de flujo en régimen permanente, con tirante constante, en un canal de forma prismática (Fig 5.1b):

$$C = \frac{C_m}{n} R^{1/6},$$

donde  $C_m$  es el llamado coeficiente de Manning y es igual a 1.49 pie<sup>1/3</sup>/seg o 1.0 m<sup>1/3</sup>/seg en el sistema inglés y en el SI, respectivamente;  $n$  es un coeficiente que depende de la forma y tamaño de la sección transversal; se obtiene experimentalmente y se le llama factor de rugosidad de Manning (Tabla 5.1).

Sustituyendo la ecuación anterior en la Ec 5.2.4 y considerando  $Q = v A$ :

$$Q = \frac{C_m}{n} A R^{2/3} S^{1/2}, \quad (5.2.7)$$

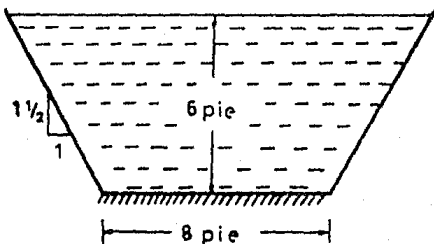
la cual se le conoce como la fórmula de Manning.

Tabla 5.1 Valores de "n" para varios materiales de pared en canales abiertos.

Material	Factor n
Madera cepillada	0.012
Madera sin cepillar	0.013
Concreto acabado	0.012
Concreto sin acabado	0.014
Fierro fundido	0.015
Ladrillo	0.016
Acero para remaches	0.018
Metal corrugado	0.022
Piedra de cantera	0.025
Tierra	0.025
Tierra con piedras o hiervas	0.035
Grava	0.029

### 5.3 Aplicaciones.

5.3.1 Un canal trapezoidal de concreto sin acabado conduce agua con un tirante de 6 pies; el ancho de la plantilla es de 8 pies y la pendiente de los lados es de 1 horizontal entre 1<sup>1</sup>/<sub>2</sub> vertical. ¿Cuanto vale el gasto si la pendiente de la plantilla es de 0.004 ?



Solución:

De acuerdo con la figura y de la Ec 5.2.1:

$$A = 6 \times 8 + 6 \times 4 = 72 \text{ pie}^2 ,$$

$$P = 8 + 2 \sqrt{52} = 22.4 \text{ pies} ,$$

$$\therefore R = \frac{A}{P} = \frac{72}{22.4} = 3.214 \text{ pies} .$$

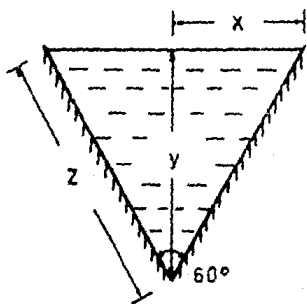
De la Tabla 5.1,  $n = 0.014$  . Sustituyendo en la Ec 5.2.7:

$$Q = \frac{C_m}{n} A R^{2/3} S^{1/2} = \frac{1.49}{0.014} (72 \text{ pie}^2) (3.214 \text{ pie})^{2/3} (0.004)^{1/2} ,$$

$$Q = 1055.5 \text{ pie}^3/\text{seg} .$$



5.3.2 Determinese el tirante en el canal de la figura para un gasto de  $12 \text{ pie}^3/\text{seg}$ . El canal está hecho de acero remachado con una pendiente de 0.02.



Solución:

El área transversal del canal es:

$$x = y \tan 30^\circ,$$

$$\therefore A = y^2 \tan 30^\circ.$$

El perímetro mojado, de acuerdo a la figura es:

$$z = y / \cos 30^\circ,$$

$$\therefore P = 2y / \cos 30^\circ.$$

Sustituyendo en la Ec 5.2.1:

$$R = \frac{A}{P} = 0.25 y.$$

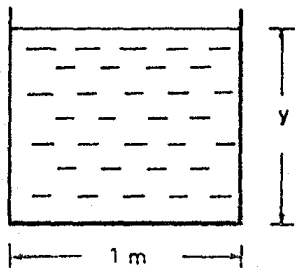
De la Tabla 5.1,  $n = 0.018$ , y de la Ec 5.2.7:

$$Q = \frac{C_m}{n} A R^{2/3} S^{1/2} = \frac{1.49}{0.018} (y^2 \tan 30^\circ) (0.25 y)^{2/3} (0.02)^{1/2},$$

$$Q = 2.0822 y^{8/3}$$

$$\therefore y = \left( \frac{Q}{2.6822} \right)^{3/8} = \left( \frac{12 \text{ pie}^3/\text{seg}}{2.6822} \right)^{3/8} = 1.754 \text{ pie} .$$

5.3.3 Determinese la velocidad para un canal rectangular de 1 m de ancho, pendiente en la plantilla de 0.0064 y coeficiente de Chézy  $C = 60$  , por el que fluyen  $1 \text{ m}^3/\text{seg}$  de agua.



Solución:

Expresando el área transversal y el perímetro mojado en función del tirante "y":

$$P = 1 + 2 y ,$$

$$A = y .$$

Por tanto el radio hidráulico  $R$  será:

$$R = \frac{A}{P} = \frac{y}{1 + 2 y} .$$

El gasto a través del canal es  $Q = v A$  , por tanto:

$$v = Q / y .$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la Ec 5.2.4:

$$Q = C S^{1/2} y \left( \frac{y}{1 + 2y} \right)^{1/2} = (60) (0.0064)^{1/2} y \left( \frac{y}{1 + 2y} \right)^{1/2} = 1$$

$$0.2083 = y \left( \frac{y}{1 + 2y} \right)^{1/2}$$

Para este caso, es necesario proceder en forma iterativa.

Despejando a una de las "y":

$$y = 0.2083 \left( \frac{y}{1 + 2y} \right)^{-1/2}$$

$$\dots \quad y_{k+1} = 0.2083 \left( \frac{y_k}{1 + 2y_k} \right)^{-1/2}$$

Iteración	$y_k$	$y_{k+1}$
1	1.0	0.3608
2	0.3608	0.4550
3	0.4550	0.4268
4	0.4268	0.4341
5	0.4341	0.4321

Por lo tanto, el valor del tirante es:

$$y = 0.4321 \text{ m}$$

$$\dots \quad v = \frac{Q}{y} = \frac{1 \text{ m}^3/\text{seg}}{0.4321 \text{ m}^2} = 2.314 \text{ m/seg}$$

## CAPITULO 6

### FLUJO EN TUBERIAS

#### 6.1 Flujo laminar y flujo turbulento; número de Reynolds.

En un flujo laminar el fluido se mueve en "capas" o "láminas", deslizándose unas sobre otras y teniendo sólo intercambio de cantidad de movimiento molecular entre ellas; las fuerzas viscosas de corte se oponen al movimiento relativo de "capas" de fluido adyacentes. Por el contrario, en un flujo turbulento, las partículas de fluido se mueven en diversas direcciones y hay intercambio transversal intenso de cantidad de movimiento.

Para determinar si el flujo de un fluido es laminar o turbulento, se utiliza el número de Reynolds; este parámetro indica la tendencia del flujo laminar hacia un flujo turbulento, y se define como:

$$Nr = \frac{v l \rho}{\mu} \quad , \quad (6.1.1)$$

donde  $v$  es una velocidad característica,  $l$  es una longitud

característica,  $\rho$  es la densidad del fluido y  $\mu$  su viscosidad.

Para interpretar su significado, el investigador Reynolds realizó experimentos en un dispositivo como el mostrado en la Fig 6.1, el cual consta de un tubo de vidrio con una válvula en un extremo, conectado a un depósito que contiene un líquido. Además cuenta con un dispositivo para inyectar una corriente fina de tinta en la entrada del tubo, la cual tiene forma de campana y una superficie muy lisa.

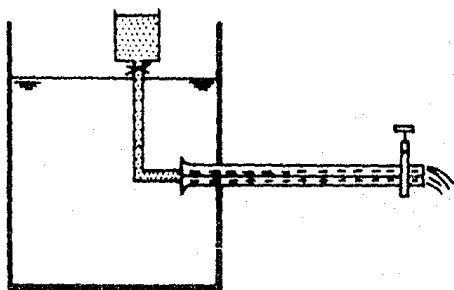


Fig 6.1 Aparato de Reynolds.

Reynolds consideró a  $v$  como la velocidad promedio y al diámetro del tubo  $D$  como la longitud característica, por lo que:

$$N_R = \frac{v D \rho}{\mu} \quad (6.1.2)$$

La naturaleza del flujo la determinaba con la ayuda de la tinta que inyectaba al tubo de vidrio. Si la tinta fluía como un delgado filamento a lo largo del tubo, se tenía un flujo laminar; este se presentaba para gastos bajos. Al aumentar el gasto y por tanto la velocidad de flujo, el filamento de tinta empezaba a oscilar hasta romperse y difundirse a lo ancho del tubo; en estas

condiciones se tenía flujo turbulento.

Reynolds determinó que un flujo laminar pasaba a ser turbulento para valores de  $Nr = 12000$  (número crítico superior de Reynolds); este valor carece de significado práctico debido a que en tuberías ordinarias hay irregularidades que provocan que el cambio de régimen laminar a turbulento se produzca para valores mucho menores del  $Nr$ . Al realizar el proceso en forma inversa, determinó que el flujo turbulento pasaba a ser laminar para valores de  $Nr$  menores a 2000 (número crítico inferior de Reynolds). Debido a esto, en tuberías convencionales, el cambio de régimen de laminar a turbulento, se tiene cuando el número de Reynolds esta entre 2000 y 4000. Para efectos prácticos se considera que el cambio ocurre cuando  $Nr = 2000$ .

## 6.2 Flujo con pérdidas de carga. Ecuación de Darcy-Weisbach.

En un flujo de fluidos, los esfuerzos cortantes son ocasionados por la viscosidad; estos esfuerzos, a su vez, son una de las causas por las que se presentan las pérdidas o irreversibilidades. Para un flujo incompresible permanente a través de una tubería, las irreversibilidades se expresan mediante pérdidas de carga o por la caída de la línea de cargas piezométricas.

Como se vio en el Cap 4, la línea de cargas piezométricas está definida por los valores de  $z + p/\gamma$  a lo largo del conducto. Esta línea va cayendo en la dirección del flujo debido a las pérdidas o irreversibilidades. La disminución en  $z + p/\gamma$  representa trabajo desarrollado sobre el fluido por unidad de peso, el cual se convierte en pérdidas debido a la acción de la fuerza cortante viscosa.

La Ec 5.2.3.a, expresa las pérdidas de carga por unidad de

peso ( $h_f$ ) para cualquier área transversal del conducto:

$$h_f = r \frac{L}{R \gamma} = f' \frac{L}{R} \frac{v^2}{8g}, \quad (0.2.1)$$

donde  $f'$  es un coeficiente adimensional y  $R$ , el radio hidráulico;  $\gamma$  es el peso específico del líquido. Para tuberías de sección circular y totalmente llenas se determinó que  $R = D/4$  y además definiendo al factor de fricción ( $f$ ) se tiene que:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}. \quad (0.2.2)$$

Esta última expresión se conoce como la ecuación de Darcy-Weisbach para flujo permanente uniforme, ya sea turbulento o laminar;  $L$  es la longitud de tubería considerada,  $D$  el diámetro interior y  $v$  la velocidad promedio de flujo. El factor de fricción ( $f$ ) es adimensional y depende de varios parámetros.

Todos los parámetros de la Ec 0.2.2, a excepción de  $f$ , se pueden obtener mediante mediciones. Colocando un tubo de Venturi en una tubería (Fig 0.2) se puede obtener el gasto y con la medición del diámetro interno se puede calcular la velocidad promedio; en tanto que las pérdidas de carga entre dos secciones separadas una distancia  $L$  se pueden obtener con un manómetro diferencial. El tema de medidores de flujo se estudia en el Cap 7.

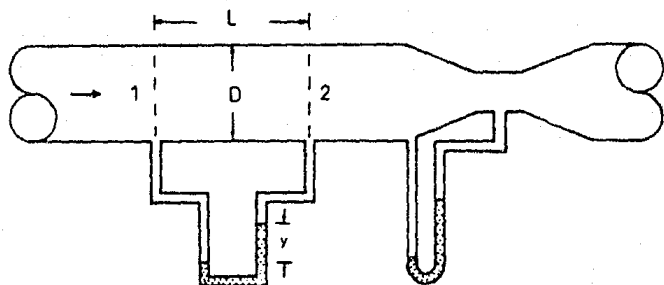


Fig 0.2 Mediciones del flujo en una tubería.

### 0.3 Ecuación de Hagen-Poiseuille.

De acuerdo con el programa de la asignatura, en esta parte corresponde estudiar la ecuación de Bernoulli modificada. Sin embargo, ésta ya fue tratada en el Cap 4, por lo que en su lugar se considera más conveniente desarrollar la ecuación de Hagen-Poiseuille.

Como se vio en el Cap 4, para un flujo laminar permanente, la velocidad tiene un perfil como el mostrado en la Fig 0.3.

Si se considera a  $r$  como la distancia radial a partir del eje de simetría de la tubería, la velocidad máxima se tendrá en  $r = 0$  y la velocidad cero se tendrá sobre la pared del conducto ( $r = r_0$ ).

Por otra parte, el esfuerzo cortante en el eje de simetría es cero y en la pared del conducto tiene su valor máximo ( $\tau_0$ ), de acuerdo con la relación:



$$\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0} \quad (6.3.1)$$

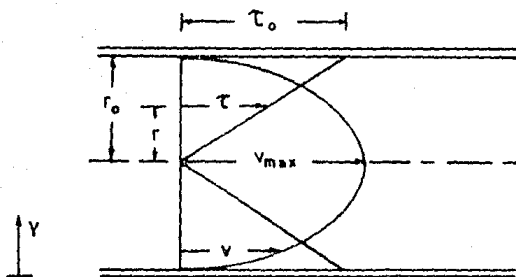


Fig 6.3 Distribuciones de velocidad y esfuerzo cortante para un flujo laminar en una tubería.

A partir de la ecuación de Newton de la viscosidad (Ec 1.3.2):

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} ,$$

donde la distancia  $y$  se mide a partir de la pared del conducto:  $y = r_0 - r$ , siendo el rango de valores de  $y$ :  $0 \leq y \leq r_0$ ; además  $dy = -dr$ ; sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr} \quad (6.3.2)$$

El signo negativo indica que la velocidad  $v$  disminuye al aumentar  $r$ . Sustituyendo la Ec 6.3.2 en la Ec 6.2.1 y considerando además que a una distancia radial  $r$  se tiene un cilindro concéntrico donde  $R = r/2$ :

$$h_f = -\mu \frac{dv}{dr} \frac{z L}{r \gamma} \quad (6.3.3)$$

Despejando a  $dv/dr$  e integrando entre los límites donde  $v = v_{\max}$  y  $v = 0$ :

$$\int_0^{v_{\max}} dv = - \int_{r_0}^0 \frac{h_f \gamma}{2 \mu L} r dr ,$$

de donde

$$v_{\max} = \frac{h_f \gamma r_0^2}{4 \mu L} \quad (6.3.4)$$

Como la distribución de velocidades está dada por un paraboloides de revolución (Fig 0.3), cuyo volumen es igual a la mitad del volumen del cilindro que lo circunscribe, por lo tanto, la velocidad promedio  $\bar{v}$  es igual a la mitad de la velocidad máxima. Así

$$\bar{v} = \frac{h_f \gamma r_0^2}{8 \mu L} \quad (6.3.5)$$

Despejando a  $h_f$  y considerando que  $r_0 = D/2$ :

$$h_f = \frac{32 \mu \bar{v} L}{\gamma D^2} \quad (6.3.6)$$

$$\text{o} \quad h_f = \frac{128 \mu Q L}{\pi \gamma D^4} \quad (6.3.7)$$

Las dos últimas expresiones se conocen como la ecuación de Hagen-Poiseuille, que es válida para flujo laminar incompresible y permanente a través de tuberías circulares. Se observa que la pérdida de carga es independiente de la rugosidad de la pared del conducto y varía con la primera potencia de la velocidad.

Iguando las Ecs 0.2.2 y 6.3.7, y despejando a  $f$ :

$$f = 04 \frac{\mu g}{\gamma v D} = \frac{04}{Nr} \quad (0.3.8)$$

Por tanto, si se tiene un flujo laminar, ( $Nr \leq 2000$ ), se pueden obtener las pérdidas de carga por medio de la Ec 0.3.6, o bien con la Ec 0.2.2 utilizando el valor de  $f$  obtenido con la Ec 0.3.8.

#### 0.4 Pérdidas de carga por fricción para flujo turbulento.

Para flujo turbulento incompresible y permanente, el factor de fricción no se puede obtener en forma directa mediante alguna expresión como en el caso de flujo laminar. Para obtenerlo es necesario recurrir a datos experimentales. De acuerdo a experimentos, las pérdidas de carga para flujo turbulento:

- varían directamente con la longitud de la tubería;
- varían aproximadamente con el cuadrado de la velocidad;
- varían aproximadamente con el inverso del diámetro;
- dependen de la rugosidad de la pared interior de la tubería;
- dependen de la densidad y viscosidad del fluido;
- son independientes aproximadamente de la presión.

En lo concerniente a la rugosidad, ésta involucra los siguientes parámetros: " $\epsilon$ ", el cual es una medida del tamaño de las proyecciones de la rugosidad; " $\epsilon'$ ", el cual es una medida de la distribución o espaciamiento de las rugosidades, (ambos parámetros tienen dimensiones de longitud) y " $m$ ", parámetro adimensional que depende del aspecto o forma de la rugosidad.

Por tanto, el factor adimensional  $f$  depende de todos los parámetros anteriores agrupados en términos adimensionales. El número de Reynolds agrupa a la velocidad, diámetro, densidad y viscosidad; los términos  $\epsilon$  y  $\epsilon'$  se dividen entre el diámetro

interior de la tubería (D), por lo que:

$$f' = f' \left( Nr, \frac{e}{D}, \frac{e'}{D}, m \right) . \quad (6.4.1)$$

Para tuberías lisas  $e = e' = m = 0$  .

Blasius obtuvo una expresión por medio de experimentos para flujo turbulento en tuberías lisas:

$$f' = \frac{0.316}{Nr^{1/4}} . \quad (6.4.2)$$

Para tuberías rugosas el análisis experimental es mucho más complicado. Nikuradse experimentó con tuberías de rugosidad artificial, es decir, pegó en su pared interior granos de arena de tamaño casi constante ( $e =$  diámetro de grano). Determinó valores de  $f'$  para diferentes valores del  $Nr$  y de la rugosidad relativa ( $e/D$ ), con lo que vino a demostrar la validez de la relación funcional entre el factor de fricción y estos parámetros adimensionales.

### 6.5 Diagrama de Moody.

Al igual que Nikuradse, L. F. Moody construyó un diagrama que expresa al factor de fricción en función de la rugosidad relativa y del número de Reynolds, pero basado en estudios sobre tuberías comerciales limpias, por lo cual constituye la base para el diseño de tuberías.

C. F. Colebrook determinó una fórmula empírica para la transición entre el flujo en tuberías lisas y la zona de completa turbulencia en tuberías comerciales; esta ecuación de hecho es la base para el diagrama de Moody (Fig 6.4):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 \ln \left( \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{N_R \sqrt{f}} \right) \quad (0.5.1)$$

Si se determinan en forma experimental los valores de  $f$  y de  $N_R$ , se puede utilizar la fórmula anterior para obtener los valores de la rugosidad absoluta ( $\epsilon$ ) de tuberías comerciales, mismos que se enlistan en la Tabla 0.1.

En el diagrama de Moody, la línea recta con pendiente  $-1$  en escala logarítmica, corresponde a la Ec 0.3.8, por lo cual, esta línea se utiliza en problemas de flujo laminar en tuberías, para cualquier rugosidad de pared interior, ya que las pérdidas de carga no dependen de ésta en flujo laminar ( $N_R \leq 2000$ ).

Para valores menores a  $\epsilon/D = 0.001$ , las curvas tienden a caer sobre la curva para tuberías lisas cuando el número de Reynolds disminuye. Esto se debe a que existe una película de fluido en la pared del conducto, la cual aumenta al disminuir el número de Reynolds, hasta cubrir por completo la rugosidad de la tubería; debido a esto, el factor de fricción llega a ser igual al de una tubería lisa.

Al aumentar el número de Reynolds, la película de fluido disminuye y la rugosidad se empieza a descubrir, ocasionando mayor turbulencia y por tanto mayor pérdida de carga; ya en la zona de completa turbulencia, la película de fluido es prácticamente despreciable, por lo que la rugosidad influye en forma casi total en la turbulencia. Como se observa, las curvas en esta zona son horizontales, es decir, no hay cambio del factor de fricción al variar el número de Reynolds, por tanto, la viscosidad ya no interfiere en la pérdida de carga. Las pérdidas varían directamente con el cuadrado de la velocidad.

Diagrama de Moody

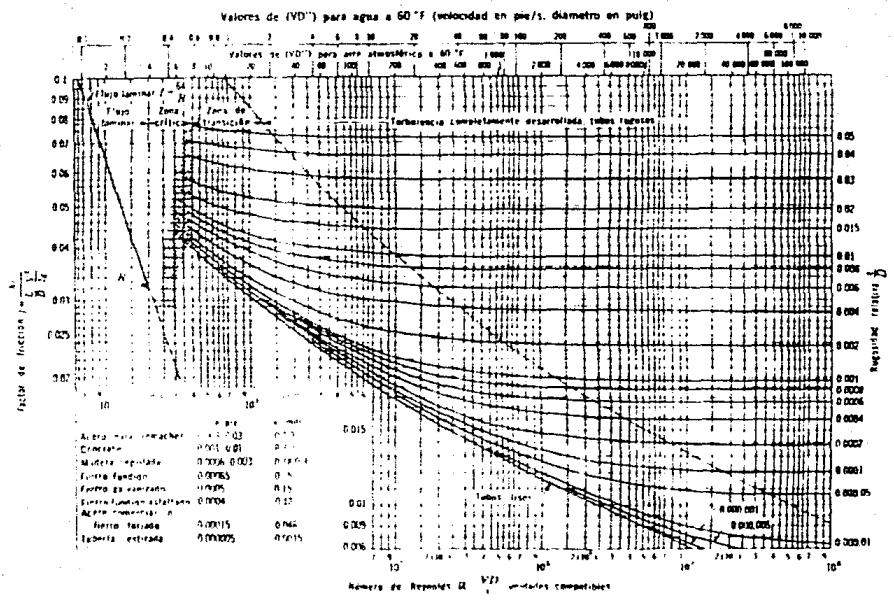


Tabla 6.1 Rugosidades absolutas.

Material	$\epsilon$ (pie)	$\epsilon$ (mm)
Acero para remaches	0.003-0.03	0.9-9
Concreto	0.001-0.01	0.3-3
Madera cepillada	0.0006-0.003	0.18-0.9
Fierro fundido	0.00085	0.25
Fierro galvanizado	0.0005	0.15
Fierro fundido asfaltado	0.0004	0.12
Acero comercial o fierro forjado	0.00015	0.046
Tubería estirada	0.000005	0.0015

### 6.6 Pérdidas menores.

Las pérdidas menores de carga las provocan algunos dispositivos presentes en la tubería, tales como codos, válvulas, juntas, etc. En la mayoría de los casos, las pérdidas menores se obtienen en forma experimental.

Para el caso de la pérdida de carga debido a una expansión brusca en una tubería (Fig 6.5), en un flujo turbulento incompresible y permanente, se puede aplicar la ecuación de la cantidad de movimiento entre las secciones 1 y 2 del volumen de control:

$$p_1 A_2 - p_2 A_2 = \rho v_2 (v_2 A_2) - \rho v_1 (v_1 A_1).$$

Por otra parte, aplicando la ecuación de Bernoulli en ambos puntos, con  $\alpha = 1$  y considerando las pérdidas de carga  $h_e$ :

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_e;$$

despejando a  $(p_1 - p_2)/\gamma$  de ambas ecuaciones e igualando y considerando además la ecuación de continuidad  $v_1 A_1 = v_2 A_2$ :

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + h_e = \frac{v_2^2 - v_2 v_1}{g}$$

$$\therefore h_e = \frac{v_1^2}{2g} \left( 1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 = \frac{v_1^2}{2g} \left[ 1 - \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 \quad (0.0.1)$$

Definiendo a  $k$  como coeficiente de pérdida de carga:

$$k = \left[ 1 - \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2$$

la Ec 0.0.1 resulta:

$$h_e = k \frac{v_1^2}{2g} \quad (0.0.2)$$

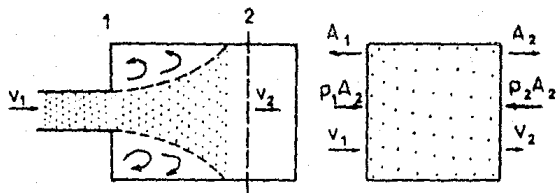


Fig 0.5 Expansión brusca en una tubería.

Para el caso en que la expansión brusca en una tubería sea un depósito, se tiene que  $D_1/D_2 \cong 0$ , por lo que, la pérdida de carga es igual a la carga por energía cinética.

A. H. Gibson mediante experimentación obtuvo una gráfica para determinar el coeficiente  $k$  en expansiones graduales cónicas (Fig 0.6).



La Tabla 6.2 muestra valores del coeficiente  $k$  para algunos dispositivos utilizados en tuberías.

Tabla 6.2 Coeficientes de pérdida de carga para algunos dispositivos.

Accesorio	$k$
Válvula de globo (totalmente abierta)	10.0
Válvula de ángulo (totalmente abierta)	5.0
Válvula de retención (totalmente abierta)	2.5
Válvula de compuerta (totalmente abierta)	0.19
Codo en "U"	2.2
Conexión en "T" estándar	1.8
Codo a $90^\circ$ estándar	0.9
Codo a $90^\circ$ de radio medio	0.75
Codo a $90^\circ$ de radio largo	0.6

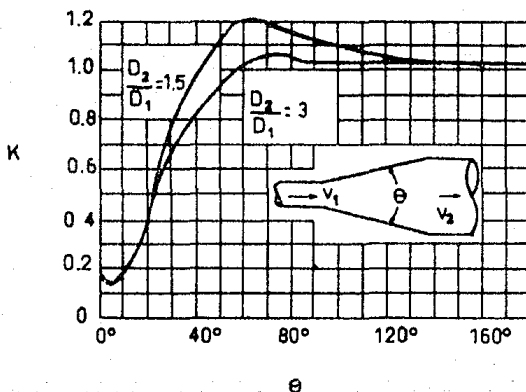


Fig 6.6 Gráfica de Gibson.

De manera análoga al análisis anterior, la pérdida de carga debido a una contracción brusca ( $h_c$ ) se puede expresar como:

$$h_c = \left( \frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g}, \quad (6.0.3)$$

donde  $C_c$  es el coeficiente de contracción :

$$C_c = \frac{A_o}{A_2}$$

$A_o$  corresponde al área del chorro más contraída (vena contracta).

La Tabla 6.3 muestra valores de  $C_c$  para agua, determinados por Julius Weisbach.

Tabla 6.3 Coeficientes de contracción para agua.

$A_2/A_1$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$C_c$	0.624	0.632	0.643	0.659	0.681	0.712	0.755	0.813	0.829	1.0

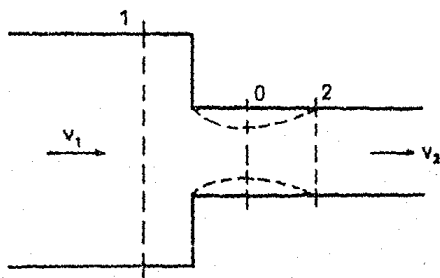


Fig 6.7 Contracción brusca en una tubería.

Para el caso de una depósito que descarga a través de una tubería, si la entrada de ésta es cuadrada, las pérdidas de carga

son  $0.5 v_2^2/2g$  ; para entradas redondas, las pérdidas están entre  $0.01 v_2^2/2g$  y  $0.05 v_2^2/2g$  ; si la tubería es de paredes delgadas y entra un tramo de ella en el depósito, las pérdidas se toman como  $1.0 v_2^2/2g$  .

Igualando la ecuación de Darcy-Weisbach (Ec 6.2.2) con la Ec 6.6.2, se puede expresar a las pérdidas menores como una longitud equivalente de tubería ( $L_e$ ) que ocasione la misma resistencia al flujo o pérdida de carga:

$$f \frac{L_e}{D} \frac{v^2}{2g} = k \frac{v^2}{2g} ,$$

despejando a  $L_e$  :

$$L_e = \frac{k D}{f} . \quad (6.6.4)$$

El coeficiente  $k$  también puede ser la suma de varias pérdidas menores. Si las pérdidas menores son inferiores al 5% de las pérdidas por fricción, las primeras se pueden despreciar; o también si los accesorios se encuentran en promedio separados una longitud de 1000 veces el diámetro de la tubería.

## 6.7 Aplicaciones.

Dentro de los problemas que se tienen en el flujo de fluidos a través de tuberías, se pueden identificar tres casos simples, los cuales requieren la ecuación de continuidad, la ecuación de Darcy-Weisbach y el diagrama de Moody para su solución.

Casos	Incógnita
I. $Q, L, D, v, \epsilon$	$h_f$
II. $h_f, L, D, v, \epsilon$	$Q$
III. $h_f, Q, L, v, \epsilon$	$D$

I. Para el primer caso, se calcula directamente el número de Reynolds y la rugosidad relativa; con estos valores se determina el valor del factor de fricción en el diagrama de Moody y por último de la ecuación de Darcy-Weisbach se determina  $h_f$ .

6.7.1 Se desea bombear un gasto de 60 l/seg de agua a 20°C ( $\nu = 1.003 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$ ) a lo largo de un kilómetro de una tubería de 20 cm de diámetro, hecha de hierro forjado. calcular la pérdida de carga y la potencia necesaria.

Solución:

De la ecuación de continuidad:

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{(60/1000) \text{ m}^3/\text{seg}}{(\pi/4) (0.2)^2 \text{ m}^2} = 1.91 \text{ m/seg} .$$

Calculando NR y  $\epsilon/D$ :

$$NR = \frac{v D}{\nu} = \frac{(1.91 \text{ m/seg}) (0.2 \text{ m})}{(1.003 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg})} = 380857 ,$$

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.040 \text{ mm}}{200 \text{ mm}} = 0.00020 .$$

De la Fig 6.4, mediante interpolación:  $f = 0.0165$ , por tanto de la Ec 6.2.2:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} = 0.0165 \frac{1000 \text{ m}}{0.20 \text{ m}} \frac{(1.91 \text{ m/seg})^2}{2 (9.81 \text{ m/seg}^2)} = 15.34 \frac{\text{N m}}{\text{N}} .$$

Por último, de la Ec 4.4.14:

$$\begin{aligned} \text{Pot}_{\text{bomba}} &= \gamma Q h_f = (9800 \text{ N/m}^3) (60/1000 \text{ m}^3/\text{seg}) (15.34 \text{ m}) , \\ &= 9030 \frac{\text{N m}}{\text{seg}} = 9.03 \text{ kw} . \end{aligned}$$

II. Para el segundo caso, la velocidad y el factor de fricción son incógnitas, por lo que, se deben usar el diagrama de Moody y la ecuación de Darcy-Weisbach en forma simultánea para poder determinarlas. Con la ayuda del valor  $e/D$  y la Fig 6.4 , se supone un valor de  $f$  (se recomienda usar el valor de la curva donde  $f$  es constante); por medio de la ecuación de Darcy-Weisbach se obtiene un valor tentativo de  $v$  y con él se calcula un valor tentativo del  $Nr$  . Por lo tanto, con este valor del  $Nr$  se obtiene otro valor de  $f$  más aproximado y así iterativamente hasta obtener un valor del factor de fricción correcto.

Por último, se obtiene el valor de  $v$  y se calcula el valor del gasto  $Q$  .

6.7.2 A través de una tubería de 12 pig de diametro, hecha de fierro fundido, fluye agua a 70°F ( $\nu = 1.059 \times 10^{-5}$  pie<sup>2</sup>/seg), con una pérdida de carga de 15 pie en una longitud de 500 pies.

Solución:

Se determina el valor de la rugosidad relativa:

$$\frac{e}{D} = \frac{0.00085 \text{ pie}}{1 \text{ pie}} = 0.00085 .$$

De la Fig 6.4 se supone un valor de  $f$  , para este caso:  $f = 0.019$  . De la Ec 6.2.2:

$$15 \text{ pie} = f \frac{500 \text{ pie}}{1 \text{ pie}} \frac{(v \text{ pie/seg})^2}{2 (32.2 \text{ pie/seg}^2)} ,$$

$$v = \left( \frac{1.932}{f} \right)^{1/2} ,$$

sustituyendo el valor de  $f$  se obtiene que  $v = 10.083$  pie/seg. por tanto:

$$Nr = \frac{v D}{\nu} = \frac{(10.083 \text{ pie/seg}) (1 \text{ pie})}{(1.059 \times 10^{-5} \text{ pie}^2/\text{seg})} = 952125 .$$

Con este valor de  $N_R$  y con la Fig 6.4 :  $f' = 0.0193$  , el cual es muy próximo al anterior, por lo que finalmente:

$$v = 10.005 \text{ pie/seg} ,$$

$$\therefore Q = v A = (10.005 \text{ pie/seg}) (\pi/4 (1 \text{ pie})^2) = 7.86 \text{ pie}^3/\text{seg} .$$

III. Para el tercer caso, el factor de fricción, el diámetro interior y la velocidad son incógnitas, por lo que, la rugosidad relativa ( $\epsilon/D$ ) y el número de Reynolds no se pueden determinar directamente. Es necesario en este caso, simplificar las expresiones comúnmente usadas.

De acuerdo con la ecuación de continuidad:

$$v = \frac{4 Q}{\pi D^2} , \quad (6.7.1)$$

sustituyendo en la Ec 6.2.2 y despejando al diámetro:

$$D^5 = \frac{8 L Q^2}{h_f g \pi^2} f' = C_1 f' ; \quad (6.7.2)$$

el valor del coeficiente  $C_1$  se puede calcular directamente de los datos originales. Por otra parte, sustituyendo la Ec 6.7.1 en el número de Reynolds:

$$N_R = \frac{v D}{\nu} = \frac{4 Q}{\pi v} \frac{1}{D} = \frac{C_2}{D} ; \quad (6.7.3)$$

el valor del coeficiente  $C_2$  también se puede obtener en forma directa.

Para resolver este caso, se procede como sigue:

1. Se supone un valor de  $f'$  .
2. Con la Ec 6.7.2 se obtiene  $D$  .
3. Con la Ec 6.7.3 se obtiene  $N_R$  .
4. Se determina la rugosidad relativa  $\epsilon/D$  .
5. Con los valores anteriores y con la Fig 6.4 se obtiene un

nuevo valor de  $f'$ . Se repite el procedimiento hasta que  $f'$  no cambie sus dos primeras cifras significativas, con lo cual el problema estará resuelto.

Los diámetros nominales de tuberías son: 1/8, 1/4, 3/8, 1/2, 3/4, 1, 1 1/4, 1 1/2, 2 1/2, 3, 3 1/2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 24 y 30 plg. Aunque éstos valores no corresponden a los diámetros interiores, se tomarán como tal para efectos de este capítulo; por tanto, se tomará el diámetro nominal mayor siguiente al calculado con el procedimiento anterior.

Los tres casos anteriores se pueden resolver mediante un programa de computadora; para tal efecto se utilizaría la fórmula de Colebrook (Ec 6.5.1) en lugar del diagrama de Moody, o bien se puede utilizar la correlación de Don J. Wood, la cual es muy aproximada para valores de  $Nr > 10000$  y  $1 \times 10^{-5} < \epsilon/D < 0.04$ :

$$f' = a + \frac{b}{Nr^c}, \quad (6.7.4)$$

$$k = \epsilon/D,$$

$$a = 0.094 k^{0.225} + 0.53 k,$$

$$b = 88 k^{0.44},$$

$$c = 1.62 k^{0.134}.$$

6.7.3 Se tiene un gasto de  $10 \text{ pie}^3/\text{seg}$  a través de una tubería de 6000 pies de longitud con una pérdida de carga de  $50 \text{ lb pie}/\text{lb}$ . El fluido transportado es agua a  $60^\circ\text{C}$  ( $\nu = 1.217 \times 10^{-5} \text{ pie}^2/\text{seg}$ ). Determinar el diámetro de la tubería si ésta es de fierro fundido asfáltado.

Solución:

De la Ec 6.7.2:

$$D^5 = \frac{8 (6000 \text{ pie}) (10 \text{ pie}^3/\text{seg})^2}{(50 \text{ pie}) (32.2 \text{ pie}/\text{seg}^2) \nu^2} f' = 302.1 f'$$

De la Ec 6.7.3:

$$NR = \frac{4 (10 \text{ pie}^3/\text{seg})}{\pi (1.217 \times 10^{-5} \text{ pie}^2/\text{seg})} \frac{1}{D} = \frac{1046211}{D}$$

Suponiendo que  $f = 0.02$  y sustituyendo en las expresiones anteriores se obtiene :  $D = 1.433$  pies,  $NR = 730084$ , además  $\epsilon/D = 0.00028$  ; con estos valores y de la Fig 6.4 se obtiene que  $f = 0.016$  . En forma análoga:  $D = 1.370$  pie ,  $NR = 763657$  ,  $\epsilon/D = 0.00029$  ; de la Fig 6.4:  $f = 0.016$  , por lo tanto, el diametro de la tubería será:

$$D = 1.37 \times 12 = 16.44 \text{ plg,}$$

con lo cual se utilizaría una tubería de 18 plg para este caso.

### 6.8 Golpe de ariete.

Cuando se tiene un frenado o una aceleración en el flujo de un líquido a través de una tubería completamente llena, se puede presentar un golpe de ariete debido a la casi incompresibilidad del líquido, el cual consiste en el colapsamiento en forma violenta de cavidades de vapor que se producen por la disminución de la presión en el interior de la tubería. Un ejemplo de esto puede ser el cierre brusco de una válvula en una línea de conducción.

Si se considera que la línea de conducción proviene de un tanque de almacenamiento (Fig 6.8) y despreciando la fricción, se pueden identificar varios eventos que ocurren al cerrar la válvula en forma brusca.

En el instante en que se cierra la válvula ( $t = 0$ ), la capa de líquido inmediato se comprime y su velocidad se reduce a cero; este proceso se repite con las capas subsiguientes aguas arriba.



Debido a esto se produce una onda de alta presión que se mueve de la válvula al depósito, la cual frena el flujo y comprime al líquido, provocando que las paredes de la tubería se expandan.

Cuando la onda de presión llega al tanque en el tiempo  $t = L/v$ , la presión del fluido en la tubería es mayor que la presión en el tanque la cual no ha cambiado; toda la energía cinética se ha convertido en energía elástica. En estas condiciones, el fluido comprimido en la tubería empieza a fluir en sentido opuesto con una velocidad  $-v$ ; en tanto la presión en la tubería vuelve a su valor original (antes del cierre de la válvula) y la pared del conducto recupera su tamaño. Por tanto, ahora se tiene una onda de presión menor que viaja a la velocidad del sonido hasta la válvula.

Cuando la onda llega a la válvula en el tiempo  $t = 2L/v$ , en toda la tubería existe la presión original y una velocidad  $-v$  hacia el tanque, pero debido a que la válvula sigue cerrada se empieza a producir una presión negativa y una onda de presión más baja se propaga en dirección de la válvula al tanque, provocando que el fluido se frene y expanda al tiempo que las paredes del conducto se contraigan. Si la presión en la tubería desciende por abajo de la presión de vapor, el líquido se vaporizará en forma parcial y seguirá moviéndose hacia el tanque en un período mayor.

En el tiempo  $t = 3L/v$  la onda de presión negativa llega al tanque; el fluido en la tubería está en reposo, a una presión menor a la original y menor también a la presión del tanque; por lo tanto, el fluido empieza a fluir del tanque a la válvula con una velocidad  $v$ , provocando que tanto en el líquido como en la tubería se restablezcan las condiciones originales.

En el tiempo  $t = 4L/v$  la onda de presión llega a la válvula, por lo que, en ese instante las condiciones en el sistema son iguales a las originales, es decir, a las que se tenían en el instante del cierre de la válvula, por lo cual, se ha completado

un ciclo.

Debido a los efectos de fricción en el fluido y a la elasticidad imperfecta del mismo y de las paredes del conducto, despreciadas en el análisis anterior, los ciclos no se suceden en forma indefinida sino que éstos van perdiendo fuerza hasta que el fluido alcanza el reposo permanente.

Si la válvula se cierra en un tiempo menor a  $2L/v$ , se le llama cierre rápido, en caso contrario se llama cierre lento.

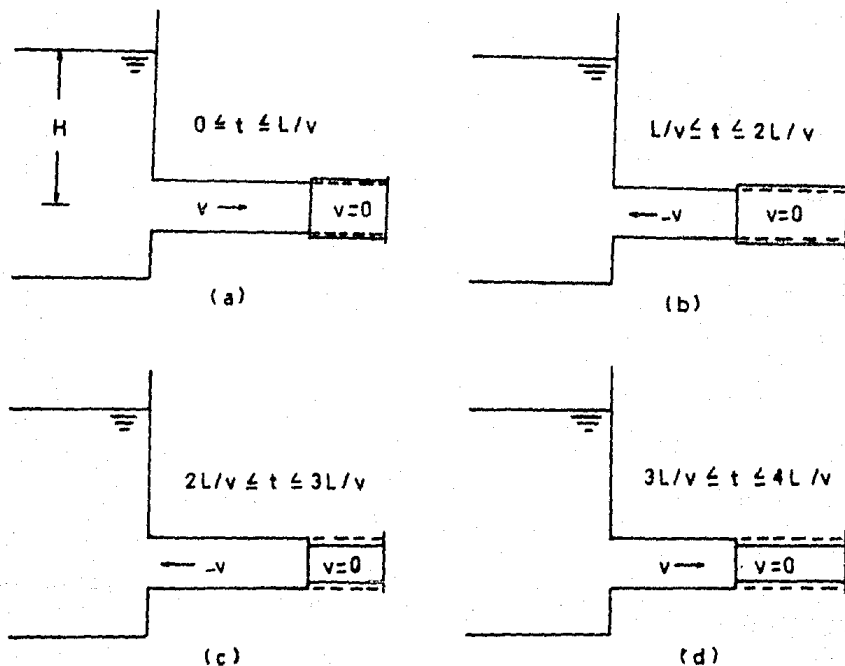


Fig 6.8 Ciclo completo después del cierre brusco de una válvula en una tubería.

## 6.9 Aplicaciones.

En los casos simples en tuberías analizados en la sección 6.7, se resolvieron problemas sólo para tuberías horizontales en las cuales la pérdida de carga se reflejaba en una disminución gradual de la presión a lo largo de la tubería.

Para problemas no horizontales se aplica la ecuación de Bernoulli, suponiendo que los factores de corrección de la energía cinética son iguales a la unidad y tomando el término de pérdidas como las debidas a la fricción incluyendo las pérdidas menores.

6.9.1 Para vaciar un tanque de aceite ( $\mu = 0.10 \text{ P}$ ,  $\gamma = 8 \text{ kN/m}^3$ ) se usa una tubería de acero comercial de 12 mm de diámetro y 15 m de longitud. Calcular el gasto cuando el nivel de aceite en el tanque se encuentra a 2 m por encima de la salida del tanque hacia la tubería.

Solución:

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre la superficie libre del fluido en el tanque (punto 1) y la salida del mismo por la tubería (punto 2); y despreciando además la pérdida menor debida a la contracción brusca del flujo:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_f$$

$$0 + 0 + H = 0 + \frac{v_2^2}{2g} + 0 + f \frac{L}{D} \frac{v_2^2}{2g}$$

Sustituyendo valores conocidos y despejando la  $v_2$ :

$$v_2 = \left( \frac{39.224}{(1 + 1250 f)} \right)^{1/2}$$

Por otra parte:

$$v = \frac{\mu g}{\gamma} = \frac{(0.1/10 \text{ kg/m seg}) (9.806 \text{ m/seg}^2)}{(8000 \text{ N/m}^3)} = 1.226 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}$$

$$NR = \frac{v D}{\nu} = \frac{v_2 (0.012 \text{ m})}{1.226 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{seg}} = 978.793 v_2$$

Este problema se resuelve como el segundo tipo de los problemas simples en tuberías. Por tanto, de acuerdo a:

$$\frac{e}{D} = \frac{0.046 \text{ mm}}{12 \text{ mm}} = 0.0038 ,$$

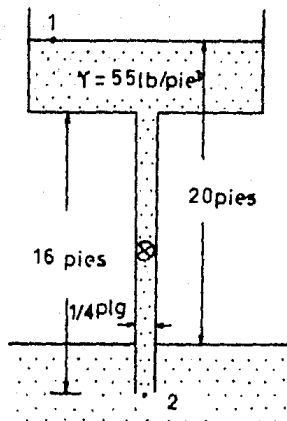
y con la Fig 6.4 se supone que  $f = 0.027$  ; sustituyendo en las expresiones anteriores resulta:  $v_2 = 1.062 \text{ m/seg}$  ,  $NR = 1039$  . Como  $NR < 2000$  se tiene flujo laminar, por lo que, para determinar  $f$  se puede usar la Ec 6.3.8:  $f = 0.062$  .

Con este nuevo valor de  $f$  :  $v_2 = 0.0701 \text{ m/seg}$  ,  $NR = 686$  ; de la Ec 6.3.8 :  $f = 0.093$  . Realizando 7 iteraciones más, hasta que el valor de  $f$  no cambie en sus dos primeras cifras significativas, se obtiene que :  $f = 0.1419$  , con la cual  $v_2 = 0.469 \text{ m/seg}$  ; finalmente el gasto será:

$$Q = v_2 A = (0.469 \text{ m/seg}) [\pi/4 (0.012 \text{ m})^2] = 5.3 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{seg},$$

$$Q = 0.053 \text{ litros/seg} .$$

6.9.2 Determinar el gasto de descarga del depósito de la figura, si se tiene en la tubería de 1/4 plg una válvula de globo abierta. Suponer que  $\mu = 0.01 \text{ P}$  y que el tubo es liso, con una entrada bien redondeada.



Solución:

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre ambos puntos, despreciando el peso de la columna de líquido correspondiente al tramo de tubería sumergida en el depósito de abajo y considerando todas las pérdidas:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + f' \frac{L}{D} \frac{v_2^2}{2g} + (0.01+10+1) \frac{v_2^2}{2g},$$

$$0 + 0 + 20 \text{ pie} = 0 + 12.01 \frac{v_2^2}{2g} + f' \frac{(10 \text{ pie})}{(0.25/12 \text{ pie})} \frac{v_2^2}{2g},$$

$$v_2 = \left[ \frac{1288}{12.01 + 768 f'} \right]^{1/2}$$

Por otra parte:

$$v = \frac{\mu \xi}{\gamma} = \frac{(0.01/479 \text{ lb seg}^2/\text{pie}^2) (32.2 \text{ pie}/\text{seg}^2)}{55 \text{ lb}/\text{pie}^3} = 1.222 \times 10^{-5} \frac{\text{pie}^2}{\text{seg}}$$

$$N_R = \frac{v D}{\nu} = \frac{v_2 (0.25/12 \text{ pie})}{1.222 \times 10^{-5} \text{ pie}^2/\text{seg}} = 1705 v_2$$

Este problema se resuelve de acuerdo al segundo caso simple en tuberías; por lo que, usando la curva para tuberías lisas de la Fig 6.4, se supone un valor de  $f = 0.02$ , sustituyendo en las expresiones anteriores y haciendo una tabla de los resultados de las iteraciones:

$v_2$ (pie/seg)	NR	$f$ (Fig 6.4)
6.86	11696	0.0265
6.308	10755	0.0285
6.164	10510	0.0290

Por tanto, con el valor de  $f = 0.029$  se tiene que  $v_2 = 6.129$  pie/seg, y por último el gasto será:

$$Q = v_2 A = (6.129 \text{ pie/seg}) \left( \frac{\pi}{4} (0.25/12 \text{ pie})^2 \right) = 0.0021 \text{ pie}^3/\text{seg}.$$

## CAPITULO 7

### MEDIDORES DE FLUJO

#### 7.1 Presión estática y presión de estancamiento.

En un flujo de fluidos se pueden medir diversos parámetros tales como presión, velocidad, gasto, viscosidad, etc. Para ello se cuenta con diversos métodos: directos, que consisten en la medición directa del parámetro deseado; indirectos, que consisten en la medición de otro(s) parámetro(s) para calcular el parámetro requerido; gravimétricos, por medio de balanzas; volumétricos, por medio de tanques de aforo y electrónicos, electromagnéticos y ópticos.

La presión es uno de los parámetros más comúnmente medido en un flujo de fluidos.

La presión estática es la presión debida a la columna de fluido; la velocidad de flujo no debe afectarse al hacer la medición. La variación de la presión, en forma normal, en un flujo laminar se rige por la Hidrostática, por lo que la determinación de la presión en un punto permite conocer la presión en cualquier

otro punto de la misma sección transversal.

La presión de estancamiento, es la presión que se presenta en un punto (llamado de estancamiento) donde la velocidad del fluido es cero (Fig 7.1) y la línea de corriente que une el punto 1 con el 2 se divide en este último punto y prosigue alrededor del cuerpo.

Aplicando la ecuación de Bernoulli en ambos puntos:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 .$$

de donde, la presión de estancamiento es:

$$p_2 = p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} . \quad (7.1.1)$$

Se consideran despreciables las pérdidas por fricción entre los puntos 1 y 2.

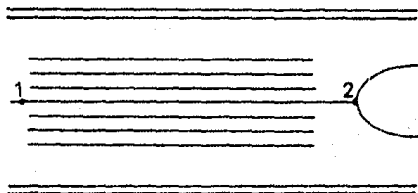


Fig 7.1 Punto de estancamiento.



## 7.2 Medidores de presión.

La presión estática en un flujo, se puede medir por medio de una abertura piezométrica. Esta abertura se hace en la pared del conducto; debe ser pequeña, sin rebabas en la orilla del orificio para evitar remolinos que alteren la medición.

La rugosidad en la pared del conducto es un factor que puede ocasionar considerables errores en la medición de la presión. Por ello, se pueden tener varias aberturas piezométricas alrededor del conducto y conectarlas a un solo anillo piezométrico; también se puede limar la superficie alrededor de la abertura.

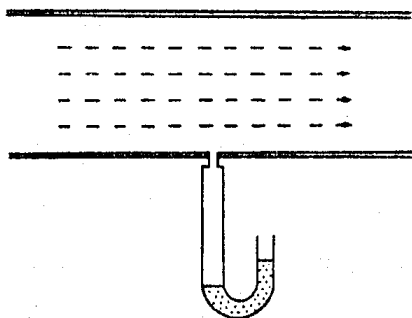


Fig 7.2 Abertura piezométrica.

El tubo estático se emplea cuando se tiene una pared interior del conducto muy rugosa. Consta de un tubo cerrado en un extremo y puesto contra la corriente (Fig 7.3); cuenta con orificios pequeños en el cuerpo del tubo. Se desprecian los efectos ocasionados en el flujo debido a la presencia del cuerpo del tubo estático.

El error que se comete debido al desalineamiento del tubo con el flujo (hasta  $15^\circ$ ), es muy pequeño.

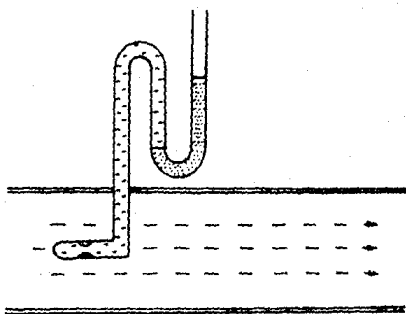


Fig 7.3 Tubo estatico.

### 7.3 Disco de Ser.

El disco de Ser es un dispositivo que se utiliza para medir la presión estática en un conducto, cuya pared interior es muy rugosa. Consta de un manómetro cuyo extremo está unido a un disco o placa circular de muy baja rugosidad.

El disco se coloca en forma paralela a las líneas de corriente y aparenta ser una pared de conducto. El disco de Ser evita los errores que se cometerían debido a la pared rugosa del conducto.

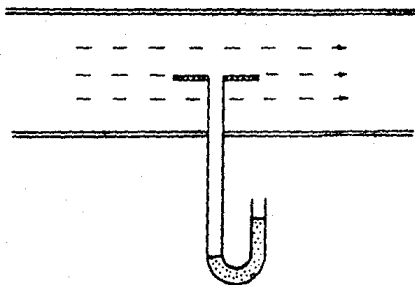


Fig 7.4 Disco de Ser.

#### 7.4 Tubo de Pitot.

El tubo de Pitot es un dispositivo que permite obtener la presión de estancamiento y, con base en ella, calcular la velocidad de flujo dentro de un conducto.

Consta de un tubo de vidrio, doblado en ángulo recto, cuyo extremo abierto se coloca contra la corriente (Fig 7.5). El nivel de líquido se levanta  $\Delta h$  sobre el nivel de la superficie libre en un canal abierto, cuando la presión en el interior del tubo resiste el impacto de la velocidad de flujo. La velocidad en el punto de estancamiento (Z) es cero, por lo que, aplicando la ecuación de Bernoulli en los puntos 1 y Z :

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} = h_c + \Delta h .$$

Además  $p_1/\gamma = h_c$  , por lo que:

$$\frac{v^2}{2g} = \Delta h . \quad (7.4.1)$$

$$v = (2 g \Delta h)^{1/2} \quad (7.4.2)$$

La presión de estancamiento está constituida por la presión estática que corresponde a  $h_0$  y la presión dinámica que corresponde a  $\Delta h$ .

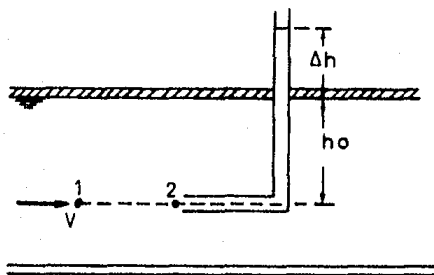


Fig 7.5 Tubo de Pitot.

Al combinar un tubo de Pitot con una abertura piezométrica en un manómetro diferencial (Fig 7.6), se puede leer más fácilmente la diferencia de niveles en dicho manómetro.

Aplicando la ecuación de Bernoulli en los puntos 1 y 2 :

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} \quad (7.4.3)$$

La presión en el manómetro, expresada en columna de agua, es:

$$\frac{p_1}{\gamma} \rho r_1 + k \rho r_1 + y \rho r_2 - (k + y) \rho r_1 = \frac{p_2}{\gamma} \rho r_1,$$

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} = y \left( \frac{\rho r_2}{\rho r_1} - 1 \right).$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la Ec 7.4.3 y despejando

la velocidad:

$$v = \left[ 2 g y \left( \frac{\rho r_2}{\rho r_1} - 1 \right) \right]^{1/2} \quad (7.4.4)$$

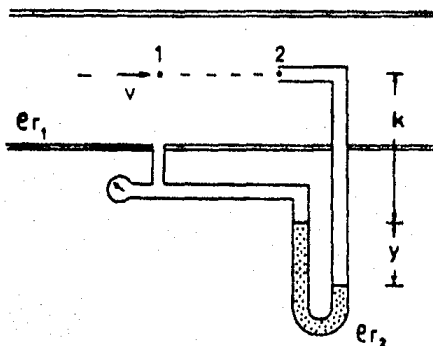


Fig 7.6 Combinación de un tubo de Pitot y una  
abertura piezométrica.

También se pueden combinar un tubo estático y un tubo de Pitot, al cual se le conoce como tubo de Pitot estático.

Analizando este dispositivo de manera análoga al anterior, se llega a la misma expresión (Ec 7.4.4), pero se agrega un coeficiente de corrección (C) debido a los efectos que ocasiona en el flujo el extremo del dispositivo y su parte vertical:

$$v = C \left[ 2 g y \left( \frac{\rho r_2}{\rho r_1} - 1 \right) \right]^{1/2} \quad (7.4.5)$$

El tubo de Prandtl es un tubo estático, cuyo extremo se encuentra despuntado, de tal manera que  $C = 1$ ; para otro tipo de

tubo de Pitot estático, "C" se determina por calibración.

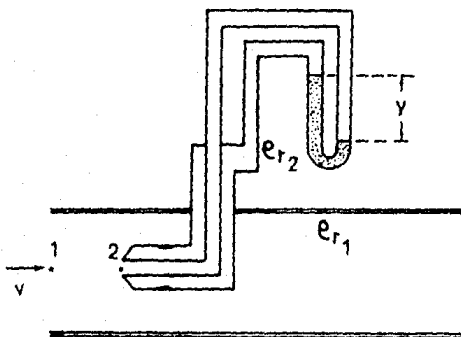


Fig 7.7 Tubo de Pitot estático.

**Problemas:**

7.4.1 Un cuerpo estacionario sumergido a 5.4 m de la superficie libre del agua de un río, experimenta una presión máxima de 69 KPa. Calcúlese la velocidad del agua a esa profundidad.

Solución:

Se convierte la presión máxima a una columna de agua equivalente:

$$h = \frac{p}{\gamma} = \frac{69 \times 10^3 \text{ N/m}^2}{9807 \text{ N/m}^3} = 7.04 \text{ m}$$

$$\Delta h = h - h_0 = 7.04 \text{ m} - 5.4 \text{ m} = 1.64 \text{ m}$$

De la Ec 7.4.2:

$$v = (2 g \Delta h)^{1/2} = [2 (9.81 \text{ m/seg}^2) (1.64 \text{ m})]^{1/2} = 5.672 \text{ m/seg}$$

7.4.2 En la Fig 7.6, el fluido que fluye es aire ( $\rho = 16 \text{ lb/plg}^2_{\text{abs}}$  y  $t = 40^\circ\text{F}$ ) y el fluido manométrico es agua. Calcúlese la velocidad del aire para  $y = 1.2 \text{ plg}$ .

Solución:

De tablas, para las condiciones del aire:  $\rho r_1 = 1.2724 \times 10^{-3}$ .

De la Ec 7.4.4 :

$$v = \left[ 2 g y \left( \frac{\rho r_2}{\rho r_1} - 1 \right) \right]^{1/2},$$

$$= \left[ 2 (32.2 \text{ pie/seg}^2) \left( \frac{1.2}{12} \text{ pie} \right) \left( \frac{1}{1.2724 \times 10^{-3}} - 1 \right) \right]^{1/2},$$

$$v = 71.10 \text{ pie/seg}.$$

### 7.8 Tubo de Venturi.

El tubo de Venturi es un instrumento con el que se obtiene el gasto a través de un conducto. Está constituido por varias secciones: la primera en el sentido de flujo, es del mismo diámetro que el conducto y tiene varias aberturas piezométricas unidas a un anillo de bronce para medir la presión estática en dicha sección; la segunda es una sección cónica convergente; la tercera es una sección de menor diámetro, también con un anillo piezométrico; y por último una sección cónica gradualmente divergente hasta el diámetro de la tubería.

Para tener mayor precisión en la lectura del manómetro diferencial, que está conectado a los anillos piezométricos, después del tubo de Venturi debe haber un tramo de tubería libre, de por lo menos diez veces el diámetro de la tubería.

La velocidad en la sección de menor diámetro es mayor y la presión disminuye, con respecto a la primera sección.

Las presiones en ambas secciones son presiones reales, mientras que las velocidades obtenidas con la ecuación de Bernoulli (a menos que se consideren las pérdidas) son velocidades teóricas.

El coeficiente de velocidad ( $C_v$ ), se define como el cociente entre la velocidad real ( $v_a$ ) y la velocidad teórica ( $v_t$ ):

$$C_v = \frac{v_a}{v_t} \quad (7.5.1)$$

Por lo tanto, al multiplicar la velocidad teórica por el coeficiente de velocidad y por área real del conducto, se obtiene el gasto real que pasa a través del mismo.

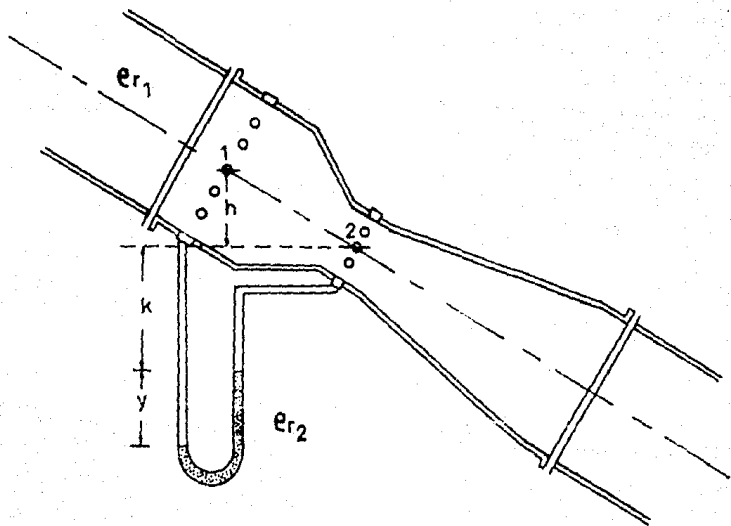


Fig 7.8 Tubo de Venturi.



Aplicando la ecuación de Bernoulli en ambos puntos:

$$\frac{v_{1t}^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + h = \frac{v_{2t}^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \quad (7.5.2)$$

De acuerdo a la ecuación de continuidad (Ec 4.2.13) :

$$v_1 D_1^2 = v_2 D_2^2 ,$$

$$o \quad \frac{v_{1t}^2}{2g} = \frac{v_{2t}^2}{2g} \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^4 .$$

Sustituyendo esta expresión en la Ec 7.5.2 y despejando:

$$v_{2t} = \left[ \frac{2g [h + (p_1 - p_2)/\gamma]}{1 - (D_2/D_1)^4} \right]^{1/2} \quad (7.5.3)$$

De acuerdo a la Ec 7.5.1 :

$$v_{2a} = C_v \left[ \frac{2g [h + (p_1 - p_2)/\gamma]}{1 - (D_2/D_1)^4} \right]^{1/2} ,$$

por lo tanto, el gasto real es:

$$Q = v_{2a} A_2 \quad (7.5.4)$$

Por otra parte, de acuerdo al manómetro diferencial y en términos de columna de agua:

$$\frac{p_1}{\gamma} \rho_{r_1} + (h + k + y)\rho_{r_1} - y\rho_{r_2} - k\rho_{r_1} = \frac{p_2}{\gamma} \rho_{r_1} ,$$

$$\therefore y \left( \frac{\rho_{r_2}}{\rho_{r_1}} - 1 \right) = h + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} .$$

Sustituyendo en la Ec 7.5.4 :

$$Q = C_v A_2 \left[ \frac{2g y [(\rho_{r_2}/\rho_{r_1}) - 1]}{1 - (D_2/D_1)^4} \right]^{1/2} \quad (7.5.5)$$

En esta ecuación, la cual se válida para líquidos, no interviene  $h$ , por lo que, el gasto no depende de la posición del tubo Venturi (horizontal, vertical o inclinada).

La pérdida de energía es del 10 al 15% del cambio de carga entre las secciones de los puntos 1 y 2.

El coeficiente  $C_v$  se obtiene por calibración del tubo Venturi, o sea midiendo el gasto real y la diferencia de presiones y despejando de la Ec 7.5.5 a  $C_v$ .

## 7.6 Orificios.

El orificio es otro dispositivo que permite obtener el gasto que descarga un depósito o que fluye en una tubería.

### 7.6.1 Orificio en un depósito.

Para el caso de depósitos, el orificio se sitúa por lo general en una pared del mismo y de forma circular. Se recomienda que la arista del orificio sea afilada, para que el líquido tenga el menor contacto con ésta.

Para este tipo de orificios, el chorro de fluido se contrae después de la abertura, es decir, es menor el área transversal del chorro en comparación con el área del orificio, a esto se le conoce como chorro contraído o vena contracta; en donde además, se tienen líneas de corriente paralelas y presión atmosférica.

Considerando la Fig 7.9 y suponiendo que la velocidad del fluido en el punto 1 es cero y que la presión en ambos puntos es la atmosférica, de acuerdo a la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2,$$

$$H = \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\therefore v_{2t} = (2gh)^{1/2} \quad (7.6.1)$$

De acuerdo con la Ec 7.5.1 :

$$v_{2a} = C_v (2gh)^{1/2} \quad (7.6.2)$$

El coeficiente de contracción ( $C_c$ ), se define como el cociente del área de chorro ( $A_2$ ) entre el área del orificio ( $A_o$ ) :

$$C_c = \frac{A_2}{A_o} \quad (7.6.3)$$

Por lo tanto, el gasto real del ahorro es:

$$Q_a = C_v C_c A_o (2gh)^{1/2} ; \quad (7.6.4)$$

al producto  $C_v C_c$  se le conoce como coeficiente de descarga ( $C_d$ ):

$$C_d = C_v C_c \quad (7.6.5)$$

$$\therefore Q_a = C_d A_o (2gh)^{1/2} \quad (7.6.6)$$

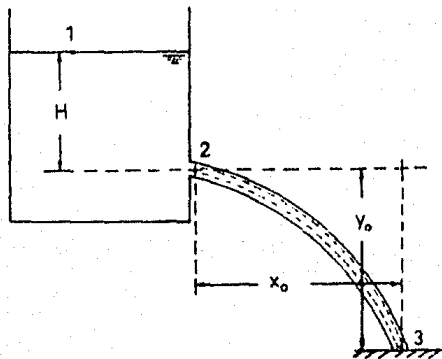


Fig 7.9 Orificio en depósitos.

Para obtener el coeficiente  $C_d$ , se mide el área del orificio  $A_o$ , la carga  $H$  y por medio de un método volumétrico o gravimétrico se mide el gasto real  $Q_a$ ; sustituyendo en la Ec 7.6.6, se calcula dicho coeficiente.

Para obtener  $C_v$  o  $C_c$  se puede emplear uno de los métodos siguientes y mediante la Ec 7.6.5 determinar los tres coeficientes.

#### *Método de la trayectoria.*

Se toma un punto abajo del chorro como referencia (punto 3) y se mide su posición con respecto al punto 2. La componente horizontal de la velocidad es constante, por tanto  $v_{2a}t = x_o$ . ("t" es el tiempo de recorrido de una partícula del punto 2 al punto 3). La componente vertical en el punto 2 es cero, por tanto  $y_o = g t^2/2$ , donde "t" es el mismo tiempo al anterior, lo que resulta:

$$v_{2a} = \frac{x_o}{(2 y_o / g)^{1/2}} \quad (7.6.7)$$

Por último, con la Ec 7.6.2 se obtiene el coeficiente  $C_v$ .

#### *Medición directa de $v_{2a}$ .*

Esto se puede hacer, colocando un tubo de Pitot en la vena contracta (punto 2).

#### *Medición directa del diámetro de chorro.*

Esto es posible mediante un compás de puntas, aunque este método no es muy preciso.

Para obtener la pérdida de carga o energía a través de un orificio, se aplica la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2:

$$\frac{v_{1a}^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_{2a}^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \text{pérdidas}$$

De acuerdo a la Fig 7.9 y a la Ec 7.6.2:

$$\text{pérdidas} = H - \frac{v^2}{2g} = H (1 - C_v^2) \quad (7.6.8)$$

### 7.6.2 Orificio en una tubería.

Siguiendo un análisis similar al del tubo de Venturi y de acuerdo a la Fig 7.10 que muestra un orificio en una tubería, conectado además un manómetro diferencial, se llega a la siguiente expresión:

$$Q_a = C_d A_o \left[ \frac{2g y [(\rho_{r2} / \rho_{r1}) - 1]}{1 - C_c^2 (D_o / D_1)^4} \right]^{1/2}, \quad (7.6.9)$$

donde  $C_d$  y  $C_c$  son los coeficientes de descarga y de contracción, respectivamente.

Como ambos coeficientes son difíciles de obtener por separado, es recomendable utilizar una expresión más simple:

$$Q_a = C A_o \left[ 2g y \left( \frac{\rho_{r2}}{\rho_{r1}} - 1 \right) \right]^{1/2}, \quad (7.6.10)$$

donde:

$$C = \frac{C_d}{[1 - C_c^2 (D_o / D_1)^4]^{1/2}} \quad (7.6.11)$$

El valor del coeficiente  $C$  se determina de la Fig 7.11 .

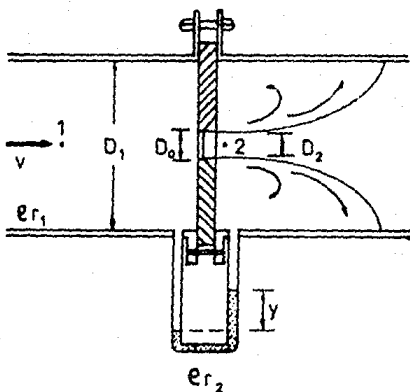


Fig 7.10 Orificio en una tubería.

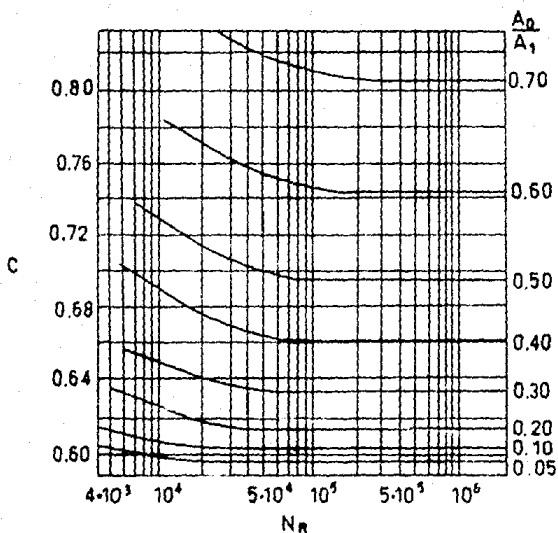


Fig 7.11 Gráfica de coeficientes de descarga.

## 7.7 Aplicaciones.

7.7.1 Un orificio de 4 plg de diametro descarga 1.60 pie<sup>3</sup>/seg de líquido bajo una carga de 11.8 pie. Mediante un compas de puntas se midió el diametro de la sección contraída del chorro, resultando 3.47 plg. Calcular  $C_v$ ,  $C_c$  y  $C_d$ .

Solución:

De la Ec 7.6.6 :

$$C_d = \frac{Q_a}{A_o (2gh)^{1/2}} = \frac{1.6 \text{ pie}^3/\text{seg}}{(\pi/36 \text{ pie}^2) (2 \times 32.2 \text{ pie}/\text{seg}^2 \times 11.8 \text{ pie})^{1/2}} = 0.665$$

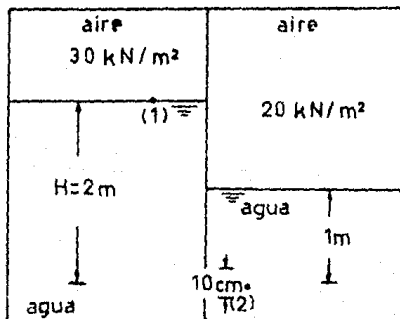
De la Ec 7.6.3 :

$$C_c = \frac{A_2}{A_o} = \left( \frac{3.47}{4} \right)^2 = 0.753$$

De la Ec 7.6.5 :

$$C_v = \frac{C_d}{C_c} = \frac{0.665}{0.753} = 0.883$$

7.7.2 Calcúlese el gasto a través del orificio de la figura si  $C_d = 0.85$  ; si además,  $C_v = 0.93$  , determinense las pérdidas en joules sobre Newton.



Solución:

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre ambos puntos sin considerar las pérdidas y suponiendo que la velocidad en el punto 1 es cero:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_{1t}^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_{2t}^2}{2g} + z_2 ,$$

$$\frac{30000 \text{ N/m}^2}{9807 \text{ N/m}^3} + 0 + H = \frac{20000 \text{ N/m}^2 + (9807 \text{ N/m}^3)(1 \text{ m})}{9807 \text{ N/m}^3} + \frac{v_{2t}^2}{2g} ,$$

$$H + 0.01967 \text{ m} = \frac{v_{2t}^2}{2g} ,$$

$$\therefore v_{2t} = ((2 \text{ m} + 0.01967 \text{ m}) (2) (9.81 \text{ m/seg}^2))^{1/2} = 6.295 \text{ m/seg} .$$

De la Ec 7.6.6 :

$$Q_a = C_d A_o v_{2t} = (0.85)(\pi \times 0.05^2 \text{ m}^2)(6.295 \text{ m/seg}) = 0.042 \text{ m}^3/\text{seg} .$$

De la Ec 7.5.1 :

$$v_{2a} = C_v v_{2t} = (0.93) (6.295 \text{ m/seg}) = 5.854 \text{ m/seg} .$$

Considerando ahora las pérdidas de energía en la ecuación de Bernoulli:

$$H + 0.01967 \text{ m} = \frac{v_{2a}^2}{2g} + \text{pérdidas} ,$$

$$\text{pérdidas} = (2 \text{ m} + 0.01967 \text{ m}) - \frac{(5.854 \text{ m/seg})^2}{2(9.81 \text{ m/seg}^2)} ,$$

$$= 0.2730 \text{ (m)} \text{ o } \left[ \frac{\text{N m}}{\text{N}} \right] \text{ o } \left[ \frac{\text{J}}{\text{N}} \right] .$$



## TABLAS

## PROPIEDADES FISICAS DEL AGUA, EN UNIDADES INGLESAS

Temperatura °F	Peso específico $\gamma$ lb/pie <sup>3</sup>	Densidad $\rho$ [slug/pie <sup>3</sup> ]	Viscosidad cinemática $\nu \times 10^{-5}$ pie <sup>2</sup> /seg	Viscosidad $\mu \times 10^{-5}$ lb seg/pie <sup>2</sup>
32	62.42	1.940	1.931	3.746
40	62.43	1.940	1.664	3.229
50	62.41	1.940	1.410	2.735
60	62.37	1.938	1.217	2.359
70	62.30	1.936	1.059	2.050
80	62.22	1.934	0.930	1.799
90	62.11	1.931	0.826	1.595
100	62.00	1.927	0.739	1.424
110	61.86	1.923	0.667	1.284
120	61.71	1.918	0.609	1.168
130	61.55	1.913	0.558	1.069
140	61.38	1.908	0.514	0.981
150	61.20	1.902	0.476	0.905
160	61.00	1.896	0.442	0.838
170	60.80	1.890	0.413	0.780
180	60.58	1.883	0.385	0.726
190	60.36	1.876	0.362	0.678
200	60.12	1.868	0.341	0.637

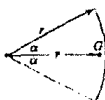
PROPIEDADES FISICAS DEL AIRE A PRESION ATMOSFERICA ESTANDAR,  
EN UNIDADES INGLESAS

Temperatura °F	Peso específico $\gamma \times 10^{-2}$ lb/pie <sup>3</sup>	Densidad $\rho \times 10^{-3}$ (slug/pie <sup>3</sup> )	Viscosidad cinemática $\nu \times 10^{-4}$ pie <sup>2</sup> /seg	Viscosidad $\mu \times 10^{-7}$ lb seg/pie <sup>2</sup>
-40	9.46	2.94	1.06	3.12
-20	9.03	2.80	1.16	3.25
0	8.62	2.68	1.26	3.38
10	8.46	2.63	1.31	3.45
20	8.27	2.57	1.36	3.50
30	8.11	2.52	1.42	3.58
40	7.94	2.47	1.46	3.62
50	7.79	2.42	1.52	3.68
60	7.63	2.37	1.58	3.74
70	7.50	2.33	1.64	3.82
80	7.35	2.28	1.69	3.85
90	7.23	2.24	1.74	3.90
100	7.09	2.20	1.80	3.96
120	6.84	2.15	1.89	4.07
140	6.63	2.06	2.01	4.14
160	6.41	1.99	2.12	4.22
180	6.21	1.93	2.25	4.34
200	6.02	1.87	2.40	4.49

# CENTROIDES

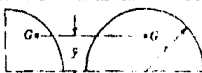
Arco de circunferencia

$$r = \frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$$



Cuadrante y semicircunferencia

$$\bar{y} = \frac{2r}{\pi}$$



Superficie triangular

$$\bar{y} = \frac{h}{3}$$



Superficie trapezoidal

$$\bar{y} = \frac{1}{3} \frac{2a_1 + a_2}{a_1 + a_2} h$$



Superficie de un sector circular

$$r = \frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$$



Cuarto de círculo y semicírculo

$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$



Superficie lateral de un cono o pirámide

$$\bar{y} = \frac{h}{3}$$



Superficie de una semiesfera o cáscara semiesférica

$$r = \frac{r}{2}$$



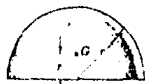
Volumen de un cono o pirámide

$$\bar{y} = \frac{h}{4}$$



Volumen de una semiesfera

$$r = \frac{3r}{8}$$



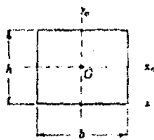
# MOMENTOS DE INERCIA DE SUPERFICIES Y SÓLIDOS

Rectángulo

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{bh^3}{3}$$

$$J = \frac{bh}{12} (b^2 + h^2)$$

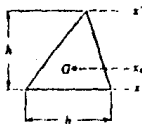


Triángulo

$$I_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$

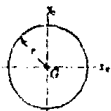
$$I_{x'} = \frac{bh^3}{4}$$



Círculo

$$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$J = \frac{\pi r^4}{2}$$

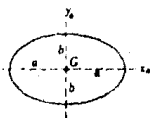


Elipse

$$I_x = \frac{\pi ab^3}{4}$$

$$I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$$

$$J = \frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2)$$



Esfera

$$I_x = \frac{2}{5} mr^2$$



Semicilindro

$$I_x = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \times 2mr^2)$$

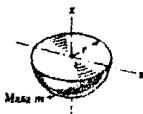
$$= \frac{1}{2} mr^2$$



Semiesfera

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \times 2mr^2)$$

$$= \frac{1}{2} mr^2$$



Paralelepípedo rectángulo

$$I_x = \frac{1}{3} m(a^2 + b^2)$$

$$I_y = \frac{1}{3} m(4b^2 + a^2)$$



Cono recto de revolución

$$I_x = \frac{3}{8} mr^2$$



## BIBLIOGRAFIA

- 1 - Víctor L. Streeter  
E. Benjamin Wylie  
Mecánica de los Fluidos  
McGraw-Hill. Sexta Edición  
México 1979
  
- 2 - Irving H. Shames  
La Mecánica de los Fluidos  
McGraw-Hill. Primera Edición  
México 1979
  
- 3 - Richard H. F. Pao  
Fluid Mechanics  
John Wiley and Sons, Inc.  
U. S. A. 1961
  
- 4 - John K. Vennard  
Elementos de la Mecánica de los Fluidos  
Compañía Editorial Continental S. A. Tercera Edición  
México 1965
  
- 5 - Claudio Mataix  
Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas  
Harper & Row Publishers Inc. Sexta Edición  
México 1979
  
- 6 - Ronald V. Giles  
Mecánica de los Fluidos e Hidráulica  
McGraw-Hill. Segunda Edición  
México 1975
  
- 7 - Bernard Stanford Massey  
Mecánica de Fluidos  
Gra. Editorial Continental S.A. Tercera Edición  
México 1983