

11 2g.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

**“MATERIAL DE APOYO PARA PREPARAR
EXAMEN EXTRAORDINARIO DE LA ASIGNATURA
DE HIDRAULICA I”.**

FALLA DE ORIGEN

TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el Título de:

INGENIERO CIVIL

Presenta:

ESTHER ARRIOLA RANGEL



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

	Página
I. Introducción.	1
II. Propiedades de los fluidos.	3
II.1. Sistemas de unidades.	4
II.2. Definición de fluido.	5
II.3. Temperatura de un fluido.	7
II.4. Densidad y peso específico de un fluido . . .	7
II.4.1. Problemas resueltos.	9
II.5. Viscosidad de los fluidos	11
II.5.1. Problemas resueltos	13
II.6. Compresibilidad de los fluidos.	18
II.6.1. Problemas resueltos	20
II.7. Presión de vaporización	21
II.7.1. Problemas resueltos	23
II.8. Tensión superficial y capilaridad en los flui dos	24
II.8.1. Problemas resueltos	25
II.9. Problemas propuestos.	26
III. Hidrostática.	28
III.1. Leyes fundamentales del comportamiento de la presión de los líquidos en reposo	29
III.1.1. Problemas resueltos	34
III.2. Dispositivos más comunes para la medición de presiones hidrostáticas	37
III.2.1. Barómetro de mercurio.	37
III.2.2. Manómetros	38
III.2.3. Problemas resueltos.	40
III.3. Empuje hidrostático sobre superficies planas. III.3.1. Problemas resueltos.	44
III.3.1. Problemas resueltos.	53
III.4. Empuje hidrostático sobre superficies curvas. III.4.1. Problemas resueltos.	61
III.4.1. Problemas resueltos.	64

	Página
III.5. Principio de Arquímedes y estabilidad de los cuerpos en flotación.	69
III.5.1. Problemas resueltos.	70
III.6. Problemas propuestos.	78
IV. Ecuaciones fundamentales de la hidráulica . .	81
IV.1. Principios básicos y métodos de análisis de la hidráulica	82
IV.2. Principio de la conservación de la materia o del transporte de masa	84
IV.2.1. Problemas resueltos	87
IV.3. Ecuación de la energía en el flujo de líquidos	90
IV.3.1. Problemas resueltos	99
IV.4. Ecuación de impulso y cantidad de movimiento.	104
IV.4.1. Problemas resueltos	109
IV.5. Pérdida de energía en el flujo de líquidos.	117
IV.6. Problemas propuestos.	119
V. Orificios, Vertedores y Compuertas.	123
V.1. Ecuación general de orificios	124
V.1.1. Problemas resueltos.	133
V.2. Ecuación general de vertedores.	137
V.2.1. Problemas resueltos.	140
V.3. Ecuación general de una compuerta	143
V.3.1. Problemas resueltos.	146
V.4. Problemas propuestos.	151
VI. Tuberías.	153
VI.1. Resistencia al flujo en conductos a presión	154
VI.2. Pérdidas por fricción (Ecuación de Darcy --- Weisbach)	157
VI.3. Pérdidas locales (o pérdidas menores)	160
VI.3.1. Problemas resueltos	161

	Página
VI.4. Tubos en paralelo.	168
VI.4.1. Problemas resueltos.	172
VI.5. Redes abiertas	175
VI.5.1. Problemas resueltos.	178
VI.6. Problemas propuestos	185
VII. Conclusiones	189
BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS	191

CAPITULO I. INTRODUCCION.

Actualmente hay pocos libros de Hidráulica Fundamental, la mayor parte son de Mecánica de Fluidos y los temas que -- tratan son muy extensos. Cuando el estudiante pretende que alguno le sirva como libro de texto, se encuentra con que de be seleccionar el material que se pueda adecuar en contenido y alcance al programa de la asignatura "Hidráulica I".

Esta tesis pretende auxiliar al alumno que esté prepa-- rando el examen extraordinario de Hidráulica I. Se desarro-- llan los temas con la profundidad que corresponde al curso - de acuerdo al programa de la asignatura.

El programa vigente es:

- Tema 1. Propiedades de los fluidos.
- Tema 2. Hidrostática.
- Tema 3. Cinemática de los fluidos.
- Tema 4. Ecuaciones fundamentales de la hidráulica.
- Tema 5. Similitud dinámica.
- Tema 6. Orificios y compuertas.
- Tema 7. Vertedores.
- Tema 8. Resistencia de flujos en conductos a presión.
- Tema 9. Análisis de sistemas de tubos.

El temario de esta tesis es:

- CAP. I. Introducción.
- CAP. II. Propiedades de los fluidos.
- CAP. III. Hidrostática.
- CAP. IV. Ecuaciones fundamentales de la hidráulica.
- CAP. V. Orificios, vertedores y compuertas.
- CAP. VI. Tuberías.
- CAP. VII. Conclusiones.

Los temas 1 y 2 del programa se tratan en los Cap. II y III de este trabajo respectivamente, el 3 y 4 en el Cap. IV, el 6 y 7 en resumen en el Cap. V, el 8 y 9 se presentan en el Cap. VI. El tema 5 "Situación de México" no se presenta, esto se debe a que en las revisiones del plan de estudios vigentes se ha discutido sobre la conveniencia de suprimir este tema y trasladarlo al subtema de la subsecretaría de Hidráulica. Se continuare el actual programa, con la teoría del Cap. IV de este trabajo es fácilmente comprensible el hecho de que

C A P I T U L O - I I

PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS.

- II.1. SISTEMAS DE UNIDADES.
- II.2. DEFINICION DE FLUIDO.
- II.3. TEMPERATURA DE UN FLUIDO.
- II.4. DENSIDAD Y PESO ESPECIFICO DE UN FLUIDO.
- II.5. VISCOSIDAD DE LOS FLUIDOS.
- II.6. COMPRESIBILIDAD DE LOS FLUIDOS.
- II.7. PRESION DE VAPORIZACION.
- II.8. TENSION SUPERFICIAL Y CAPI-
LARIDAD EN LOS FLUIDOS.
- II.9. PROBLEMAS PROPUESTOS.

II.1. SISTEMAS DE UNIDADES.

Los sistemas de unidades usados comunmente son el Sistema Métrico y el Sistema Inglés. Cada uno de ellos se considera:

- (1) Sistema Másico, si sus unidades básicas son la masa la longitud y el tiempo.
- Y (2) Sistema Gravitacional, cuando sus unidades básicas son la fuerza, la longitud y el tiempo.

En los sistemas absolutos o másicos, la unidad de fuerza se deriva de la masa y en los gravitacionales, la unidad de masa se deriva de la de fuerza.

Para uniformizar el sistema métrico, una conferencia general de pesas y medidas celebrada en 1960, propuso el Sistema Internacional de Unidades (S.I.); el cual se basa en un sistema absoluto. Actualmente pasamos un arduo periodo de transición hacia el S.I. En México se usa comunmente el sistema M.K.S. (métrico gravitacional), aunque las asociaciones profesionales y de investigación ya emplean el S.I.

En este trabajo emplearemos el M.K.S. por ser el sistema de común empleo en la vida profesional y cotidiana.

En mecánica de fluidos solo hay cuatro dimensiones primarias, son: masa o fuerza, longitud, tiempo y temperatura; dependiendo del sistema que se emplee, la masa es dimensión primaria en el S.I. y la fuerza lo es en el M.K.S.

II.2. DEFINICION DE FLUIDO.

Un fluido es aquel estado de la materia que, debido a su poca cohesión intermolecular, carece de forma propia y adopta la forma del recipiente que lo contiene.

Los fluidos se clasifican en líquidos y gases. Los líquidos a una presión y temperatura determinados ocupan un volumen constante. Si introducimos un líquido en un recipiente, adopta la forma del mismo, pero llenando solo el volumen que le corresponde. Los gases en un recipiente, se expanden hasta ocupar el volumen completo del recipiente que lo contiene, y no presentan superficie libre.

Las fuerzas que actúan en el seno de un fluido son de dos tipos: las fuerzas de superficie, como ejemplo la presión atmosférica, y las fuerzas másicas o de cuerpo, como por ejemplo el peso propio. Lo anterior se tratará más ampliamente en otros capítulos.

Al analizar el comportamiento de un fluido se debe considerar la acción individual de cada molécula; sin embargo, en las aplicaciones propias de la ingeniería el centro de interés se basa en las condiciones medias de velocidad, presión, temperatura, etc., de ahí que en lugar de estudiar por separado la conglomeración real de moléculas, se supone que el flujo es un medio continuo, esto es, una distribución continua de materia sin espacios vacíos. Lo anterior se justifica debido a que el número de moléculas consideradas en esta situación es muy grande y la distancia entre ellas muy pequeña.

En los siguientes capítulos será necesario, en algunos

casos, suponer la existencia de un elemento pequeño o partícula de fluido, la cual tendrá que ser suficientemente grande para contener muchas moléculas.

La mecánica de fluidos es la ciencia en la cual se aplican los principios fundamentales de la mecánica general en el estudio del comportamiento de los fluidos, tanto en reposo como en movimiento.

La mecánica de fluidos se divide en varias ramas entre las que se encuentra la Hidromecánica, que estudia las leyes del equilibrio y movimiento de los fluidos incompresibles, - especialmente los líquidos.

Cuando las leyes y principios de la hidromecánica se aplican al estudio del flujo de agua en estructuras que interesan directamente al Ingeniero Civil, surge entonces la Hidráulica. A partir del Cap. III el enfoque de este trabajo será esencialmente Hidráulico.

II.3. TEMPERATURA DE UN FLUIDO.

La temperatura es una medida de la actividad molecular en el seno de un líquido. Se mide generalmente en función de la expansión o contracción de columnas de mercurio, cuya escala se da en grados centígrados, Kelvin, etc.

La variación de la temperatura en los fluidos origina cambios en otras propiedades de los mismos como son: la densidad, el peso específico y la viscosidad. En consecuencia podemos decir que éstas propiedades son función de la temperatura.

II.4. DENSIDAD Y PESO ESPECIFICO DE UN FLUIDO.

La densidad absoluta (ρ) se define como la relación de la cantidad de masa por unidad de volumen. De esta forma:

$$\rho = \frac{M}{V} \quad \text{--- (Ec. II.1.)}$$

Peso específico (γ) es la relación del peso por unidad de volumen:

$$\gamma = \frac{W}{V} \quad \text{--- (Ec. II.2.)}$$

De la segunda Ley de Newton: $F = M a$; o lo que es lo mismo: $W = M g$. Si dividimos esta última ecuación entre el volumen queda que: $\frac{W}{V} = \frac{M g}{V}$, simplificando tenemos

que:

$$\gamma = \rho g \quad \text{--- (Ec. II.3.)}$$

La densidad relativa (δ_1) resulta de dividir el peso específico de un líquido entre el peso específico del agua:

$$\delta_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \quad \text{---(Ec.II.4.)}$$

Para cuestiones prácticas el agua a la presión atmosférica y a 4°C tiene un $\gamma = 1000 \text{ kg/m}^3$, y una $\rho = 101.97 \text{ kg seg}^2/\text{m}^4$. Y son valores aceptables para la mayoría de los problemas de ingeniería.

También es utilizado el concepto de volumen específico que equivale al volumen ocupado por la unidad de masa y se expresa como:

$$v_B = \frac{1}{\delta} \quad (\text{M}^3\text{L}^{-1}) \quad \text{---(Ec.II.5.)}$$

II.4.1. PROBLEMAS RESUELTOS.

Problema No. 1.-

Si el mercurio tiene una densidad relativa $\delta_{\text{Hg}} = 13.6$ a 0°C . ¿Cuál será la densidad absoluta y el peso específico del mercurio?

Solución:

De la (Ec.II.4.) sabemos que la densidad relativa de un líquido es:

$$\delta_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \quad \delta \text{ de la (Ec.II.3.):} \quad = \rho$$

y sustituyendo queda que: $\delta_{\text{Hg}} = \frac{\rho_{\text{Hg}}}{\rho_0}$ en donde ρ_0 es la

densidad absoluta del agua que es $101.97 \text{ kg seg}^2/\text{m}^4$. Sustituyendo queda:

$$13.6 = \frac{\rho_{\text{Hg}}}{(101.97)}, \text{ de donde } \rho_{\text{Hg}} = 1386.79 \text{ kg seg}^2/\text{m}^4.$$

El peso específico es $\gamma = \rho g$, por lo que sustituyendo:

$$\gamma_{\text{Hg}} = 1386.79 (9.81) = 13604 \text{ kg/m}$$

Problema No. 2.

Si la glicerina tiene una densidad absoluta de:

$\rho = 128.44 \text{ kg seg}^2/\text{m}^4$ a 0°C . ¿Cuál será la densidad relativa, el peso específico y el volumen específico?

De la (Ec.II.3.) $\gamma = \rho g$ (peso específico).

$$\gamma = 128.44 \text{ kg seg}^2/\text{m}^4 (9.81 \text{ m/seg}^2)$$

$$\gamma = 1260 \text{ kg/m}^3$$

La densidad relativa será de la (Ec.II.4.):

$$\delta_i = \frac{\gamma_i}{\gamma_o} = \frac{1260 \text{ kg/m}^3}{1000 \text{ kg/m}^3} = 1.26$$

Y de la (Ec.II.5.) el volumen específico:

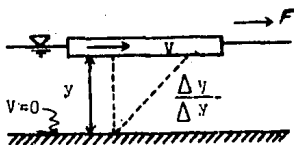
$$v_B = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{128.44} = 7.78 \times 10^{-3} \text{ m}^4/\text{kg seg}^2$$

II.5. VISCOSIDAD DE LOS FLUIDOS.

La propiedad más importante de un fluido es su resistencia al cortante o deformación angular. La medida de la resistencia de un fluido a ese movimiento relativo se llama -- viscosidad.

La viscosidad es aquella propiedad por la cual un fluido ofrece una resistencia al cambio de forma bajo la acción de fuerzas exteriores. La viscosidad se debe a la cohesión entre partículas del fluido, y también al intercambio de moléculas entre las capas de diferentes velocidades.

La ley de viscosidad se interpreta gráficamente de la siguiente manera; en donde se está considerando que la distribución de velocidades es lineal:



(Fig.II.1.) Interpretación

gráfica de la viscosidad

$$\zeta = \mu \frac{\Delta v}{\Delta y} = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \frac{\text{seg}}{\text{seg}} \right]$$

Se define que el esfuerzo cortante (ζ) es proporcional a la variación de la velocidad con respecto a la profundidad por lo que finalmente.

$$\zeta = \mu \frac{\Delta v}{\Delta y} \quad \text{--(Ec.II.6)}$$

En donde μ es igual a la constante de proporcionalidad que es la Viscosidad Dinámica.

Las dimensiones de la viscosidad dinámica, en el sistema absoluto son $\frac{M}{L T}$ y en el gravitacional son $\frac{F T}{L^2}$.

En el sistema absoluto, se define al poise como unidad de viscosidad absoluta o dinámica:

$$1 \text{ poise} = 1 \frac{\text{gr}_m}{\text{cm seg}}$$

En el sistema M.K.S. gravitacional es más común usar -- kg seg/m^2 , es decir:

$$98.06 \text{ poises} = 1 \frac{\text{kg seg}}{\text{m}^2}$$

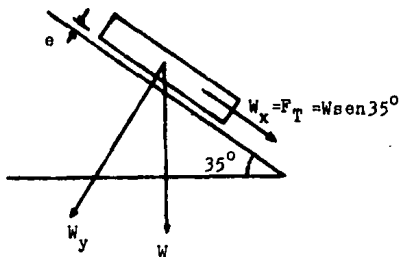
Por simplicidad de unidades se utiliza la viscosidad cinemática que se obtiene de dividir la viscosidad dinámica -- del fluido entre su densidad, esto es:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (\text{m}^2/\text{seg}) \quad \text{--- (Ec. II.7.)}$$

II.5.1. PROBLEMAS RESUELTOS.

Problema No.3.

Una placa plana desliza sobre una capa de aceite de ---
 0.2 mm de espesor sobre un plano inclinado a 35° sobre la ho-
 rizontal. La viscosidad dinámica de dicho aceite es de ----
 5.4×10^{-1} poises. Calcule el peso de dicha placa de 0.40 m -
 de lado si recorre 0.20 m del plano inclinado en 3 segs.



De la (Ec.II.6.): $\zeta = \mu \frac{\Delta v}{\Delta y}$; en donde, si consideramos -
 que la distribución es li-
 neal y de acuerdo a la ----
 (Fig.II.1) $e = y$ tenemos:

$$\zeta = \mu \frac{v}{e}$$

$$\text{Si } \mu = 5.4 \times 10^{-1} \text{ poises}$$

En el sistema M.K.S.:

$$\mu = 5.4 \times 10^{-1} / (98.06)$$

$$\mu = 0.0055 \text{ kg seg/m}^2$$

Por otro lado, la velocidad se define como $v = d/t$; de
 donde $v = 0.20/3 = 0.0666 \text{ m/seg}$. Sustituyendo queda:

$$\zeta = 0.0055 \frac{0.0666}{0.0002} = 1.831 \text{ kg/m}^2$$

Por definición el esfuerzo cortante es: $\zeta = \frac{F_T}{A}$

(fuerza tangencial entre área).

El área es: $A = 0.16 \text{ m}^2$

por lo que: $1.831 \text{ kg/m}^2 = F_T / 0.16 \text{ m}^2$

de donde: $F_T = 0.293 \text{ kg}$.

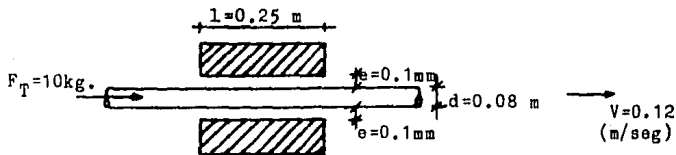
Y finalmente, de acuerdo al diagrama de cuerpo libre --
mostrado en el ejemplo:

$$F_T = W \text{ sen } 35^\circ$$

$$W = 0.293 \text{ kg} / \text{sen } 35^\circ = 0.51 \text{ kg}.$$

Problema No.4.

Un eje de 8 cm de diámetro desliza a una velocidad de 0.12 m/seg. en un cojinete de 0.25 m de largo con una holgura de 0.1 mm al aplicarse una fuerza de 10 kg. Determinar la viscosidad dinámica del fluido entre eje y cojinete.



De acuerdo a la (Ec.II.6.): $\zeta = \mu \frac{\Delta v}{\Delta y}$ y considerando distribución lineal: $\zeta = \mu \frac{v}{e}$. Recordando la definición de esfuerzo cortante: $\zeta = \frac{F_T}{A}$ e igualando ambas ecuaciones, tenemos que:

$$\mu \frac{v}{e} = \frac{F_T}{A} \quad \mu = \frac{F_T e}{V A}$$

Como lo que nos interesa es la superficie de contacto, esta se obtiene como: $A = \pi d l$

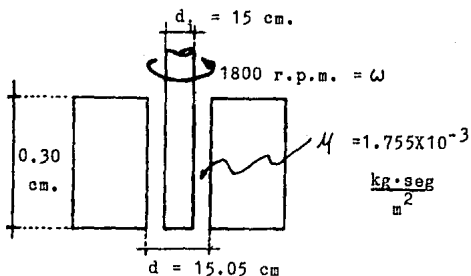
$$\text{Sustituyendo: } A = \pi (0.08)(0.25) = 0.063 \text{ m}^2$$

$$\text{Finalmente: } \mu = \frac{10 \text{ kg} (0.0001 \text{ m})}{0.12 \text{ m/seg.} (0.063 \text{ m}^2)} = 0.132 \text{ kg seg/m}^2$$

$$\mu = 0.132 (98.06) = 12.94 \text{ poises.}$$

Problema No. 5.

Una flecha de 15 cm de diámetro gira a 1800 r.p.m. en un rodamiento estacionario de 0.30 m de longitud y 15.05 cm de diámetro interior. El espacio uniforme entre la flecha y el rodamiento está ocupado por aceite de viscosidad ----- $1.755 \times 10^{-3} \text{ kg seg/m}^2$. Determinar la potencia requerida - para vencer la resistencia viscosa en el rodamiento (potencia = fuerza por velocidad).



Primero convertiremos la velocidad angular en velocidad tangencial por cuestión de unidades.

$$v = \omega r \quad r_i = 0.075 \text{ m}$$

$$\omega = 1800 \text{ r.p.m.}$$

$$\omega = \frac{1800 \text{ r.p.m.} \cdot (2\pi)}{60} = 188.50 \text{ rad/seg.}$$

$$v = 188.50 (0.075) = 14.14 \text{ m/seg.}$$

El espesor se obtiene como:

$$e = \frac{d - d_s}{2} = \frac{0.1505 - 0.15}{2} = 0.00025 \text{ m}$$

De la (Ec.II.6.) y considerando distribución lineal de velocidades:

$$\zeta = \mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad \zeta = \mu \frac{v}{e}$$

$$\text{Sustituyendo: } \zeta = 1.75 \times 10^{-3} \frac{\text{kg seg}}{\text{m}^2} \frac{14.14 \text{ m/seg}}{0.00025 \text{ m}} = 98.98 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

$$\text{Por definición } \zeta = \frac{F_T}{A} \quad F_T = \zeta A$$

$$A = \pi d l = \pi (0.15)(0.30) = 0.1414 \text{ m}^2$$

$$F_T = 98.98 \text{ kg/m}^2 (0.1414 \text{ m}^2) = 14.00 \text{ kg}$$

Si potencia = fuerza X velocidad = 14.00 kg(14.14 m/seg)

$$\text{Potencia} = 197.96 \frac{\text{kg m}}{\text{seg}}$$

II.6. COMPRESIBILIDAD DE LOS FLUIDOS.

Se define como una medida del cambio de volumen al someterse a una variación de presión; de donde se puede obtener el módulo de compresibilidad volumétrica (E_0), que es la variación en la presión dividido entre la variación asociada en el volumen (o densidad), por unidad de volumen (o densidad). Esto es:

$$\text{Sabemos que: } M = \rho \psi \quad (\text{Ec. II.1})$$

$$\text{Derivando: } dM = \rho d\psi + \psi d\rho$$

ya que la masa no cambia aunque sufra cambios de presión, entonces $dM=0$, quedando que:

$$\frac{\rho}{d\rho} = - \frac{\psi}{d\psi} \quad \text{y multiplicando por } d\rho :$$

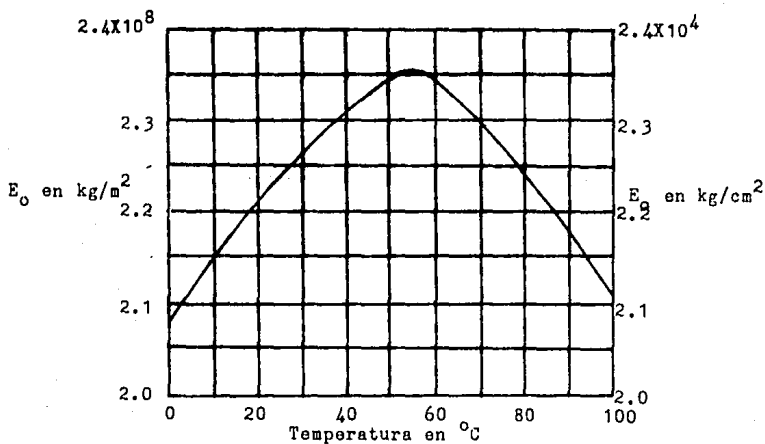
$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{d\psi}{\psi} = E_0$$

$$E_0 = - \frac{dP}{d\psi / \psi} \quad \text{---(Ec. II.8.)}$$

Y (E_0) es análogo al módulo de elasticidad lineal de los sólidos. El signo (-) significa que a mayor presión menor volumen.

La mayoría de los fluidos poseen un módulo de elasticidad relativamente grande que depende de la temperatura (se tienen pequeños cambios de densidad para variaciones grandes de presión).

En la figura siguiente (Fig.II.2) a partir de la temperatura podemos determinar el módulo de elasticidad volumétrico del agua.



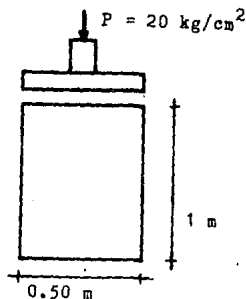
(Fig.II.2.) Módulo de elasticidad volumétrico del agua.

II.6.1. PROBLEMAS RESUELTOS.

Problema No.6.

Se tiene un cilindro lleno de agua, con altura $h=1$ m y diámetro de 0.50 m. La temperatura del agua es de 20°C . Encontrar la variación de volumen cuando se somete a un incremento de presión de 20 kg/cm^2 .

De la (Ec.II.8.):



$$E_o = - \frac{dP}{\frac{dV}{V}}$$

$$dV = - \frac{V \Delta P}{E_o}$$

$$V = \pi r^2 (h) = \pi (0.25)^2 (1)$$

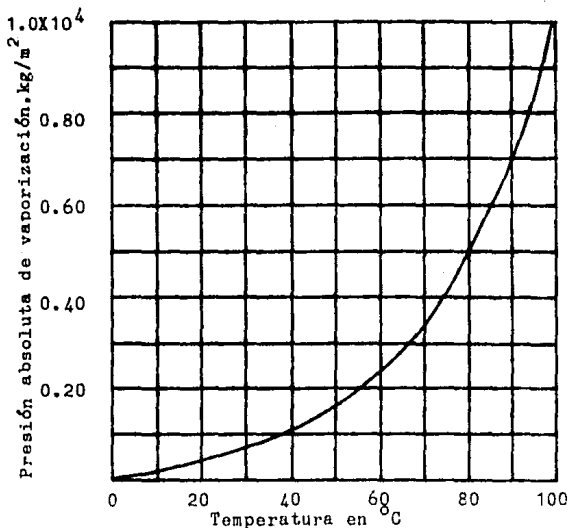
$$V = 0.1963 \text{ m}^3 = 196300 \text{ cm}^3$$

De la (Fig.II.2.) para una temperatura de 20°C el -----
 $E_o = 2.225 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$; entonces:

$$dV = - \frac{(196300)(20)}{2.225 \times 10^4} = - 176.45 \text{ cm}^3$$

II.7. PRESION DE VAPORIZACION.

Todo líquido tiene, para cada temperatura, una presión llamada de vaporización a la cual el líquido se evapora. De igual manera a cada presión corresponde una temperatura a la cual el líquido se evapora. Lo cual se muestra en la siguiente gráfica:



(Fig.II.3.) Presión absoluta de vaporización del agua.

Cuando la presión que actúa sobre un líquido es igual a su presión de vaporización, se presenta la ebullición.

Esta propiedad es importante, ya que en el caso de escurrimiento de líquidos, es posible que se presenten presiones muy bajas en determinados puntos de un sistema. Dichas presiones pueden ser iguales o menores que la presión de vapor del líquido, lo que provoca su evaporización, conociéndose este fenómeno como cavitación. Fenómeno que provoca desperfectos en los sistemas de conducción del líquido.

II.7.1 PROBLEMAS RESUELTOS.

Problema No. 7.

¿A qué temperatura hierve el agua en la ciudad de México? Si la presión barométrica es de 58 cm de mercurio.

$$P_{\text{abs}} = \gamma_{\text{HG}} H_{\text{HG}} = 13600 \text{ kg/m}^3 (0.58 \text{ m}) = 7888 \text{ kg/m}^2$$

$$P_{\text{abs}} = 0.78 \times 10^4 \text{ kg/m}^2$$

Entrando con este valor a la gráfica de la (Fig.II.3) obtenemos la temperatura buscada:

$$T = 93^\circ\text{C}$$

En la ciudad de Veracruz donde la presión absoluta es de $P_{\text{abs}} = 10336 \text{ kg/m}^2$, se tiene un sistema de bombeo. ¿Cuál es la presión de succión límite, para que no se presente cavitación (formación de burbujas de agua), si la temperatura del agua es de 20°C ?

De la (Fig.II.3.) tenemos que la presión absoluta de vaporización a 20°C es:

$$P_{\text{vap. a } 20^\circ\text{C}} = 0.04 \times 10^4 \text{ kg/m}^2 = 400 \text{ kg/m}^2$$

$$P_{\text{abs}} = P_{\text{man}} + P_{\text{a}}$$

$$P_{\text{man}} = P_{\text{abs}} - P_{\text{a}}$$

$$P_{\text{man}} = 400 \text{ kg/m}^2 - 10336 \text{ kg/m}^2 = - 9936 \text{ kg/m}^2$$

II.8. TENSION SUPERFICIAL Y CAPILARIDAD EN LOS FLUIDOS.

La tensión superficial es el aumento de cohesión de las moléculas del fluido en la superficie que trata de impedir la evaporización. En medios porosos (suelos por ejemplo) o en tubos de diámetro pequeño, la tensión superficial y la adhesión entre sólido y líquido, produce un ascenso o descenso del líquido, fenómeno conocido como capilaridad.

En el caso ideal de un tubo de diámetro pequeño, la altura del ascenso capilar (h) obtenida de manera experimental es:

$$h = \frac{4 \nabla \cos \alpha}{d_i \gamma_i} \quad \text{--- (Ec.II.9.)}$$

En donde:

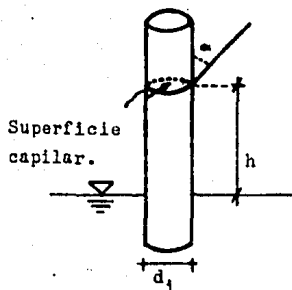
∇ = Tensión superficial.

α = Angulo de contacto que representa la adhesión entre el agua y el tubo.

d_i = Diámetro del tubo.

γ_i = Peso específico del agua.

h = Altura capilar.

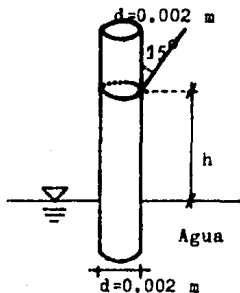


(Fig.II.4.) Tubo capilar

II.8.1. PROBLEMAS RESUELTOS.

Problema No. 8 .

El diámetro de un tubo limpio de vidrio es de 0.002 m. El tubo está lleno de agua limpia a una temperatura ambiente (20°C) y cuya tensión superficial es de $\nabla = 0.0077$ kg/m. Determine el ascenso capilar si el ángulo de contacto es de 15°.



De la (Ec.II.9.):

$$h = \frac{4 \nabla \cos \alpha}{d \gamma} \quad \gamma = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\nabla = 0.0077 \text{ kg/m}$$

Sustituyendo:

$$h = \frac{4 (0.0077) \cos 15^\circ}{0.002 (1000)} = 0.014 \text{ m}$$

II.9. PROBLEMAS PROPUESTOS.

- 1.- Si 6 m^3 de aceite pesan 5080 kg , calcular su peso específico (γ_{Ac}), densidad (ρ) y densidad relativa (δ_1).

Solución: Peso específico = 848 kg/m^3

Densidad = $86.5 \text{ kg seg}^2/\text{m}^2$

Densidad relativa = 0.848

- 2.- Hallar la viscosidad cinemática de un líquido cuya viscosidad absoluta es de 15.14 poises y su densidad relativa es 0.964 , dando el resultado en m^2/seg .

Solución: Viscosidad cinemática = $1.57 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{seg}$.

- 3.- a) Determinar la variación de volumen de 1 m^3 de agua a 27°C al aumentar la presión en 21 kg/cm^2 .
b) A partir de los siguientes datos experimentales determinar el módulo de elasticidad volumétrico del agua (E_0): a 35 kg/cm^2 el volumen era de 30 dm^3 y a 250 kg/cm^2 de 29.70 dm^3 .

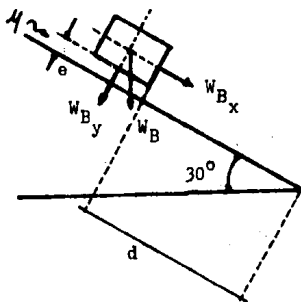
Solución: a) $dV = -9.15 \times 10^{-4} \text{ m}^3$

b) $E_0 = 21.50 \times 10^7 \text{ kg/m}^2$

- 4.- Un cuerpo cúbico de 10 cm de lado desliza sobre una película de aceite de 3 mm de espesor y viscosidad dinámica de 0.179 kg seg/m^2 en un plano inclinado a 30° respecto a la horizontal, recorriendo 150 cm en 2 seg . Calcule el peso específico.

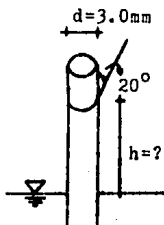
Solución: Peso específico = 895 kg/m^3

Figura problema 4.



- 5.- Calcular la altura a la que ascenderá en un tubo capilar, de 3.0 mm de diámetro, agua a 21°C . Suponer un $\alpha = 20^\circ$, tubo limpio y la tensión superficial (σ) de 0.00740 kg/m.

Solución: $h = 9.3$ mm



C A P I T U L O - I I I

HIDROSTATICA.

- III.1. LEYES FUNDAMENTALES DEL COMPORTAMIENTO DE LA PRESION DE LOS LIQUIDOS EN REPOSO.
- III.2. DISPOSITIVOS MAS COMUNES PARA LA MEDICION DE PRESIONES HIDROSTATICAS.
- III.3. EMPUJE HIDROSTATICO SOBRE SUPERFICIES PLANAS.
- III.4. EMPUJE HIDROSTATICO SOBRE SUPERFICIES CURVAS.
- III.5. PRINCIPIO DE ARQUIMEDES Y ESTABILIDAD DE LOS CUERPOS EN FLOTACION.
- III.6. PROBLEMAS PROPUESTOS.

III.1. LEYES FUNDAMENTALES DEL COMPORTAMIENTO DE LA PRESIÓN DE LOS LIQUIDOS EN REPOSO.

La hidrostática es la rama de la mecánica de fluidos -- que estudia el estado de equilibrio de los fluidos en reposo; considerando lo anterior, la característica física fundamental de los fluidos en reposo es la presión siempre que el -- fluido sea considerado continuo y uniforme.

Las fuerzas que actúan en el interior de un líquido en reposo son de dos tipos:

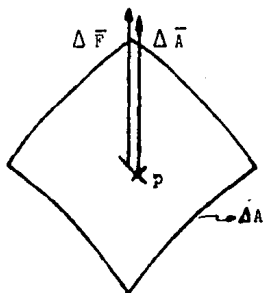
- a) Las de superficie, que equivalen exclusivamente a las de presión, ya que no existe fuerza cortante por estar el líquido en reposo, y
- b) las de cuerpo o máscas debidas al peso propio del líquido.

La presión de un líquido se transmite con igual intensidad en todas las direcciones, y actúa normalmente a cualquier superficie plana. Para determinar la presión sobre un punto, es necesario tomar el límite del cociente de la fuerza normal entre el área, conforme ésta tiende a cero en el punto. La presión así definida tiene el mismo valor en todas direcciones para un fluido en reposo.

Lo anterior se expresa matemáticamente, a partir de la (Fig.III.1.) como:

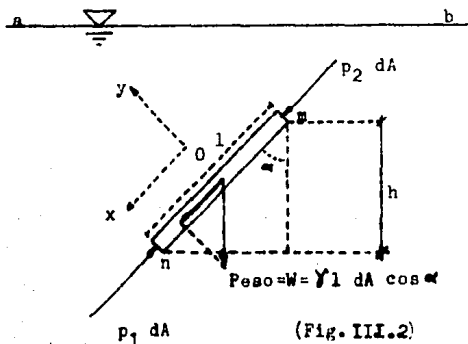
$$- p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad \text{--- (Ec.III.1.)}$$

Donde el signo negativo implica que la fuerza F produce un esfuerzo de compresión.



(Fig.III.1.) Concepto de presión.

En la (Fig.III.2.), vamos a considerar a (m) y (n) como dos puntos escogidos arbitrariamente en el líquido cuya superficie libre es (ab). Entre (m) y (n) se muestra un prisma imaginario del líquido, cuyas caras extremas contienen los puntos en cuestion. El área de la sección transversal dA del prisma es muy pequeña y hace que la presión sobre éstas caras pueda considerarse como de intensidad uniforme. Marcando estas intensidades por p_1 y p_2 las presiones totales en el extremo son $p_1 dA$ y $p_2 dA$ respectivamente. Las otras fuerzas que actúan sobre el prisma son las presiones en sus caras laterales y el peso propio. Como todas las fuerzas forman un sistema en equilibrio se puede realizar la suma de fuerzas a lo largo de cada eje e igualarse a cero como se muestra a continuación.



(Fig. III.2)

Planteando equilibrio en el eje "x":

$$\sum F_x = p_1 dA - p_2 dA - \gamma l dA \cos \alpha = 0$$

Si $h = l \cos \alpha$ = (distancia vertical entre m y n)
y dividiendo entre dA se tiene:

$$p_1 - p_2 = \gamma h \quad \text{---(Ec.III.2.)}$$

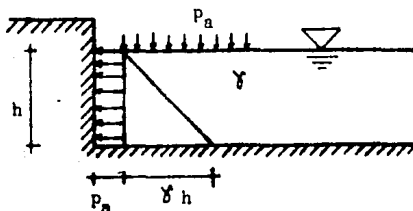
De aquí podemos observar que la diferencia de presión - entre dos puntos depende solo de la profundidad a la que se localicen; y en consecuencia, la presión dentro de un fluido en reposo, varía solo con la profundidad y es constante en todos los puntos contenidos en el mismo plano horizontal.

Al escoger el punto m en la superficie (ab), p_2 corresponde entonces a la presión atmosférica arriba del líquido (p_a), y para obtener el valor de la presión en cualquier punto situado a una distancia h abajo de la superficie se tiene que:

$$p_{abs} = p_a + \gamma h \quad \text{donde: } p_{abs} = \text{presión absoluta}$$

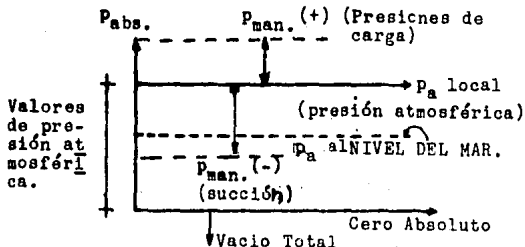
$$p_a = \text{presión atmosférica.}$$

Lo anterior se puede expresar también como:



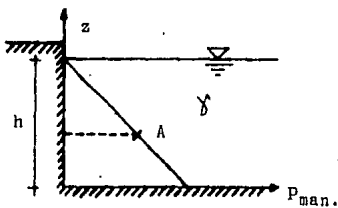
(Fig.III.3.)

De la ecuación anterior (Ec.III.2.) se parte para establecer los niveles de referencia para la medición de presiones, como se ve en la siguiente figura (Fig.III.4.); donde las presiones manométricas se miden a partir de la presión atmosférica local. Es decir, se toma como valor cero a la presión atmosférica local.



(Fig.III.4.)

Considerando una distribución de presiones manométrica la (Fig.III.3.) queda:

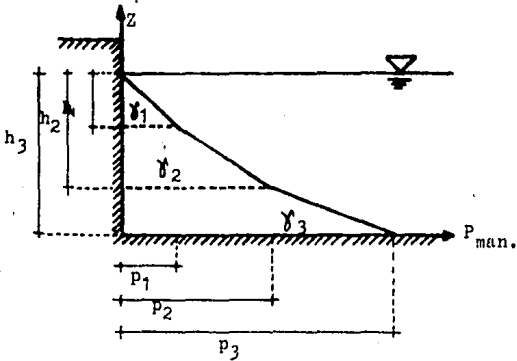


(Fig.III.5.)

Así, la presión en el nivel A es:

$$p_A = \gamma h \quad \text{---(Ec.III.3.)}$$

En el caso de tener líquidos con diferente densidad, el líquido de mayor densidad quedará por abajo de los de menor densidad, y para obtener la presión en una determinada profundidad, se procede de manera similar al caso anterior. Como se muestra en la siguiente figura (Fig.III.6.)



(Fig.III.6.)

Donde: $\gamma_3 > \gamma_2 > \gamma_1$. A mayor densidad, mayor pendiente del diagrama de presiones. Y:

$$p_1 = \gamma_1 h_1$$

$$p_2 = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2$$

$$p_3 = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3$$

III.1.1. PROBLEMAS RESUELTOS.

Problema No. 9.

Determinar la presión en kg/cm^2 a una profundidad de 9m en un aceite de densidad relativa de 0.750.

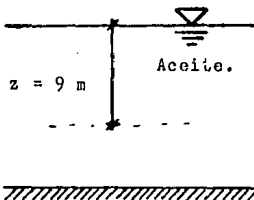
La densidad relativa de un líquido es:

$$\delta = \frac{\delta_1}{\delta_0} \quad \delta_{Ac} = \delta_0 \delta$$

$$\delta_{Ac} = 1000 \text{ kg/m}^3 (0.750) = 750 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Si } p = \delta z \quad p = 750 \text{ kg/m}^3 (9\text{m}) = 6750 \text{ kg/m}^2$$

$$p = 0.6750 \text{ kg/cm}^2$$

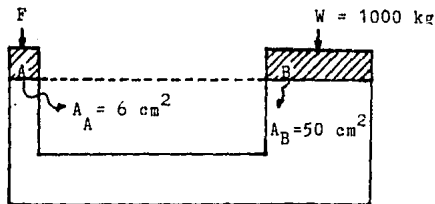


Problema No. 10.

En la siguiente figura las áreas del pistón A y del cilindro B son respectivamente, 6 cm^2 y 50 cm^2 . Los depósitos y las conducciones están llenos de aceite de densidad relativa de 0.750 y el cilindro B pesa 1000 kgs. ¿Cuál es la fuerza F necesaria para:

- a) Mantener los dos cilindros en el mismo nivel despreciando el peso de A.
- b) Levantar el cilindro B 30 cm arriba del pistón A.

a)



Recordando que $p = \frac{F}{A}$ $p_B = \frac{F_B}{A_B}$

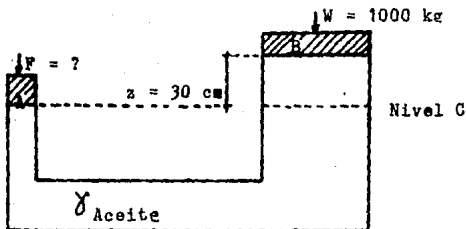
$F_B = W = 1000\text{ kg.}$

por lo tanto $p_B = \frac{1000\text{ kg}}{50\text{ cm}^2} = 20\text{ kg/cm}^2$

Para mantener equilibrio $p_A = p_B$

$p_A = \frac{F_A}{A_A}$ $F_A = A_A p_B = (6\text{ cm}^2)(20\text{ kg/cm}^2) = 120\text{ kg}$

b)



Densidad relativa de un líquido es $\delta = \frac{\gamma_{\text{liq}}}{\gamma_o}$

y $\gamma_o = 1 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$:

$$\gamma_{\text{liq}} = 7.5 \times 10^{-4} \text{ kg/cm}^3$$

Por otro lado: $p_B = \frac{F_B}{A_B} = \frac{1000}{50} = 20 \text{ kg/cm}^2$

La presión en A es: $p_A = \frac{F_A}{A_A}$ y la presión en el nivel C

(a los 30 cm) es: $p_C = p_B + \gamma_{ac} z$; e igualando $p_A = p_C$

$$p_A = p_B + \gamma_{ac} z = 20 \text{ kg/cm}^2 + (7.5 \times 10^{-4} \text{ kg/cm}^3)(30 \text{ cm})$$

$$p_A = 20.022 \text{ kg/cm}^2$$

$$p_A = \frac{F_A}{A_A}$$

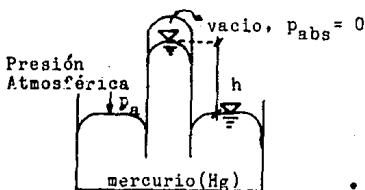
$$F_A = 20.022 (6) = 120.135 \text{ kg.}$$

III.2. DISPOSITIVOS MAS COMUNES PARA LA MEDICION DE PRESIONES HIDROSTATICAS.

III.2.1. BAROMETRO DE MERCURIO.

Es un dispositivo para medir la presión atmosférica (barométrica) consiste en un tubo de vidrio lleno de mercurio, con un extremo cerrado y el otro abierto, sumergido en un recipiente que también contiene mercurio.

La presión atmosférica, ejercida sobre la superficie -- del mercurio en el recipiente, le obliga a elevarse dentro -- del tubo hasta alcanzar la columna una altura h que equilibra la presión atmosférica.



(Fig. III.7.)

De la (Fig. III.7.) se obtiene que: $p_a = \gamma_{Hg} h_{Hg}$ al nivel del mar y a una temperatura de $15^{\circ}C$ el nivel del -- mercurio en el tubo llegará a 760 mm; por otro lado el ----- $\gamma_{Hg} = 13600 \text{ kg/m}^3$ por lo que: $p_a = 13600 \text{ kg/m}^3 (0.760 \text{ m})$

$$p_a = 10336 \text{ kg/m}^2 = 1.0336 \text{ kg/cm}^2.$$

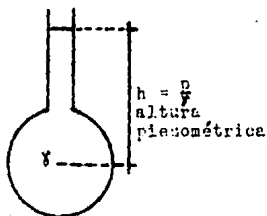
Para obtener la p_a en su equivalente en columna de agua:

$$p_a = \gamma_{Hg} h_{Hg} = \gamma_o h_o$$

$$h_o = \frac{13600 \text{ kg/m}^3 (0.760 \text{ m})}{1000 \text{ kg/m}^3} = 10.336 \text{ m (metros columna de agua)}$$

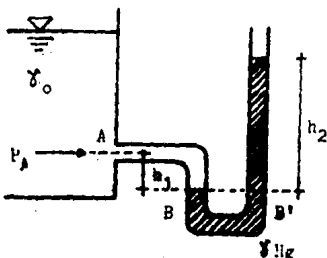
III.2.2. MANOMETROS.

Son dispositivos que sirven para medir diferencias de presiones mediante columnas de líquido. El manómetro más sencillo es el piezómetro y sirve para determinar la presión (altura piezométrica) de un fluido, por encima del cero manométrico (presión atmosférica). Este dispositivo consiste en un tubo vertical de vidrio conectado al recipiente cuya presión se va a medir; el líquido en el interior del tubo asciende hasta alcanzar el equilibrio, determinándose la presión mediante la distancia vertical h hasta el punto de interés. Tiene la desventaja de que no se pueden medir presiones altas.



(Fig. III.8.)

Cuando se tienen presiones manométricas más grandes, generalmente se emplea un segundo líquido de mayor peso específico (comunmente mercurio) e inmiscible en el primero, a este tipo de manómetro se le conoce como diferencial. Su colocación es como se muestra en la figura (Fig. III.9.)



(Fig. III.9.)

De la (Fig.III.9.):

$$P_B = P_A + \gamma_o h_1$$

$P_{B'}$ = $\gamma_{HG} h_2$; como se encuentran en el mismo plano horizon

tal: $P_B = P_{B'}$

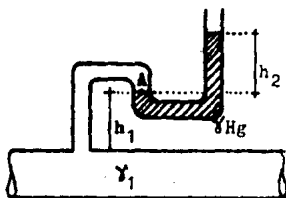
$$P_A = \gamma_o h_1 = \gamma_{HG} h_2$$

$$P_A = \gamma_{HG} h_2 - \gamma_o h_1$$

En un tubo:

De la (Fig.III.10)

$$P_A = \gamma h_1 + \gamma_{HG} h_2$$

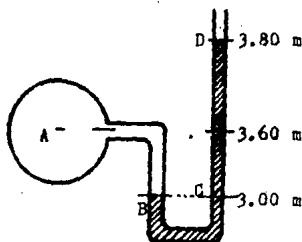


(Fig. III.10.)

III.2.3. PROBLEMAS RESUELTOS.

Problema No. 11.

Determinar la presión manométrica en A en kg/cm^2 debida a la columna de mercurio (densidad relativa 13.57) en el manómetro mostrado en la figura.



$$P_B = P_A + \gamma_{H_2O} (z_{A-B})$$

$$P_B = \gamma_{Hg} (z_{C-D})$$

$$P_A = P_B - \gamma_{H_2O} (z_{A-B})$$

$$P_A = \gamma_{Hg} (z_{C-D}) - \gamma_{H_2O} (z_{A-B})$$

$$\gamma_{Hg} = \frac{\gamma_{Hg}}{\gamma_{\text{agua}}}$$

$$\gamma_{Hg} = 13.57 (1000 \text{ kg}/\text{m}^3) = 13570 \text{ kg}/\text{m}^3$$

$$z_{C-D} = 80 \text{ cm} \quad z_{A-B} = 60 \text{ cm.}$$

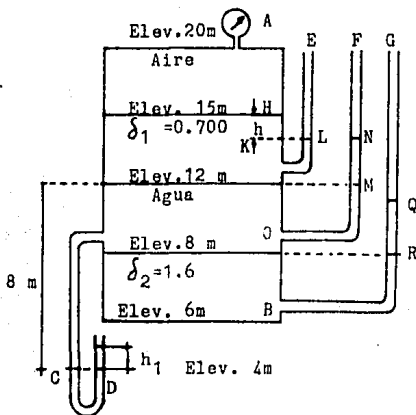
Sustituyendo valores:

$$P_A = 13570 \text{ kg}/\text{m}^3 (0.80 \text{ m}) - 1000 \text{ kg}/\text{m}^3 (0.60 \text{ m}) = 10256 \text{ kg}/\text{m}^2$$

$$P_A = 1.0256 \text{ kg}/\text{cm}^2$$

Problema No.12.

Para una lectura manométrica en A de -0.18 kg/cm^2 determinar: a) la elevación en las ramas abiertas de los piezómetros E, F y G. b) La lectura del manómetro en U de mercurio.



Como el peso específico del aire es muy pequeño (1.28 kg/m^3) comparado con el de los líquidos, la presión en la elevación de 15 m puede considerarse igual a -0.18 kg/cm^2 .

a) Para la columna E. Supuesta la elevación de L como la mostrada se tiene:

$$P_K = P_L \quad P_K = \gamma_1 h$$

$$P_H + \gamma_1 h = 0$$

$$\delta_1 = 0.700 \quad \delta_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0}$$

$$\gamma_1 = 700 \text{ kg/m}^3$$

Sustituyendo valores y transformando unidades:

$$- 1800 \text{ kg/m}^2 + 700 h = 0$$

$$h = 2.57 \text{ m}$$

El nivel en E será la elevación: 15 m - h

$$\text{nivel en E} = 15 - 2.57 = 12.43 \text{ m}$$

Para la columna F;

$$P_M = P_H + \gamma (15 - 12) \quad ; \text{sustituyendo valores y hacien-}$$

do unidades homogeneas:

$$P_M = -0.18 + (7 \times 10^{-4} \text{ kg/cm}^3) (300 \text{ cm}) = 0.03 \text{ kg/cm}^2$$

Transformando este valor en metros de columna de agua:

$$P_M = 0.03 \text{ kg/cm}^2 = 300 \text{ kg/m}^2$$

$$P_M = \gamma_o h_{\text{agua}}$$

$$\frac{300 \text{ kg/m}^2}{1000 \text{ kg/m}^3} = 0.30 \text{ m} \quad \text{por lo que la altura en N} = 12 + 0.30$$

$$N = 12.30 \text{ m}$$

Para la columna G:

$$P_o = P_M + \text{la presión debida a 4 m de agua.}$$

$$P_o = 0.03 \text{ kg/cm}^2 + 1 \times 10^{-3} (400 \text{ cm}) = 0.43 \text{ kg/cm}^2$$

$$\delta_2 = 1.6 \quad \gamma_2 = 1.6 (1000) = 1600 \text{ kg/m}^3$$

$$P_o = 0.43 \text{ kg/cm}^2 = \gamma_2 h_{\text{liquido}}$$

$$h_{\text{liquido}} = \frac{4300 \text{ kg/m}^2}{1600 \text{ kg/m}^3} = 2.69 \text{ m}$$

$$\text{La elevación Q} = 8 \text{ m} + 2.69 \text{ m}$$

$$Q = 10.69 \text{ m}$$

b) Para determinar la lectura del manómetro en U tenemos --
que:

$$P_D = P_C \quad P_D = \gamma_{Hg} (h_1)$$

$$P_C = P_M + \text{la presión de 8 m de agua.}$$

$$\gamma_{Hg} h_1 = 300 \text{ kg/m}^2 + 8000 \text{ kg/m}^2$$

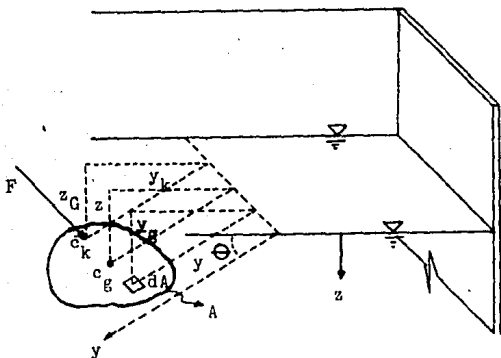
$$\gamma_{Hg} = 13570 \text{ kg/m}^3$$

Sustituyendo:

$$h_1 = 0.61 \text{ m}$$

III.3. EMPUJE HIDROSTATICO SOBRE SUPERFICIES PLANAS.

Se va a considerar un recipiente con un líquido en reposo, en donde se tiene una placa plana con una inclinación θ respecto a la horizontal. Sobre esta placa se delimita una superficie de área A para la cual se desea conocer la fuerza resultante debida a la presión hidrostática, así como su punto de aplicación o centro de presiones. (Fig.III.11.)



(Fig.III.11.)

Donde: C_G es el centro de gravedad del área considerada y C_K es el centro de presiones.

De la figura (Fig.III.11.): $dF = \gamma z dA$ y al integrar para obtener la fuerza resultante sobre el área (doble por ser de área):

$$F = \gamma \iint_A z dA$$

Por estática $\iint_A z dA = z_G A$ es el momento estático, por lo que:

$F = \gamma z_G A$ --- (Ec.III.4.) que es el empuje hidrostático sobre el área A .

Para obtener las coordenadas del centro de presiones -- (X_K, Y_K) se toma la suma de momentos estáticos; respecto a X se tiene:

$$F y_K = \iint \gamma z y \, dA$$

pero $z = y \operatorname{sen} \Theta$, y por otro lado $F = \gamma z_G A$ lo que implica que:

$$F = \gamma y_G \operatorname{sen} \Theta \quad \text{y sustituyendo:}$$

$$\gamma y_K y_G \operatorname{sen} \Theta A = \iint \gamma y^2 \operatorname{sen} \Theta \, dA$$

$$y_K y_G A = \iint y^2 \, dA$$

Por estática $\iint y^2 \, dA$ es el momento de inercia I_x

$$I_x = \bar{I}_x + y_G^2 A$$

Por lo que:

$$y_K y_G A = I_x + y_G^2 A$$

$$y_K = \frac{I_x}{y_G A} + y_G \quad \text{pero} \quad \frac{\bar{I}_x}{A} = \text{radio de giro } \bar{r}_x$$

$$\text{Finalmente:} \quad y_k = y_g + \frac{\bar{r}_x^2}{y_g} \quad \text{--- (Ec.III.5.)}$$

$$\bullet \text{ Para } x_K: \quad x_K = \frac{I_x y}{y_G A} \quad \text{--- (Ec.III.6.)}$$

En general al ingeniero solo le importa la posición vertical del centro de presiones y la coordenada x_k rara vez es utilizada.

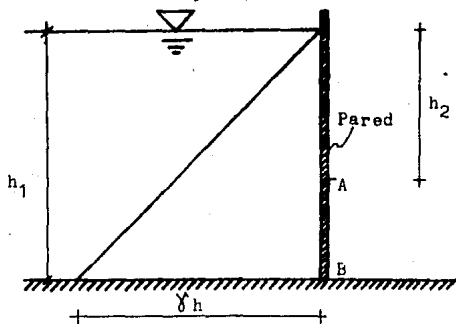
En la siguiente figura (Fig.III.12.) se presentan la posición del centro de gravedad, el área y el radio de giro de las figuras más usuales.

Figura	Posición del centro de gravedad, G	Área, A	Cuadrado del radio del giro, I_G^2
	$h_G = \frac{h}{2}$	$A = bh$	$I_G^2 = \frac{h^2}{12} = 0.0833 h^2$
	$h_G = \frac{a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta}{2}$	$A = ab$	$I_G^2 = \frac{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{12}$
	$h_G = \frac{h}{3}$	$A = \frac{1}{2} bh$	$I_G^2 = \frac{h^2}{18} = 0.0556 h^2$
	$h_G = \frac{h}{3} \frac{2b + a}{b + a}$	$A = h \frac{b + a}{2}$	$I_G^2 = \frac{h^2}{18} \left[1 + \frac{2ab}{(a+b)^2} \right]$
	$h_G = R$	$A = \pi R^2 = 3.1416 R^2$	$I_G^2 = \frac{R^2}{4}$
	$h_G = R \left(1 - \frac{2 \operatorname{sen} \theta}{3 \theta} \right)$	$A = \theta R^2$	$I_G^2 = \frac{R^2}{4} \left[1 + \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\theta} - \frac{16 \operatorname{sen}^2 \theta}{9 \theta^2} \right]$
	$h_G = R \left(1 - \frac{4 \operatorname{sen}^3 \theta}{6 \theta - 3 \operatorname{sen} 2 \theta} \right)$	$A = \frac{1}{2} R^2 (2 \theta - \operatorname{sen} 2 \theta)$	$I_G^2 = \frac{R^2}{4} \left[1 + \frac{2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta}{\theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta} - \frac{64 \operatorname{sen}^4 \theta}{9 (2 \theta - \operatorname{sen} 2 \theta)^2} \right]$
	$h_G = 0.5756 R$	$A = \frac{\pi R^2}{2} = 1.5708 R^2$	$I_G^2 = 0.06987 R^2$
	$h_G = b$	$A = \pi ab$	$I_G^2 = \frac{b^2}{4}$
	$h_G = \frac{2}{5} a$	$A = \frac{4}{3} ab$	$I_G^2 = 0.069837 a^2$

(Fig. III. 12.) Centro de gravedad, área y radio de giro de las figuras más usuales.

Un método alternativo para determinar la magnitud y localización de la fuerza resultante sobre una superficie plana inclinada, se basa en el concepto de prisma de presiones. La base de este prisma está constituida por la superficie misma y su altura en cada punto queda determinada por la presión γh . La magnitud de la fuerza resultante la da el volumen del prisma, y la línea de acción pasa por el centroide del prisma, como se ve en la siguiente figura (Fig. III.13.)

Primer caso pared vertical. Diagrama de distribución de presiones.



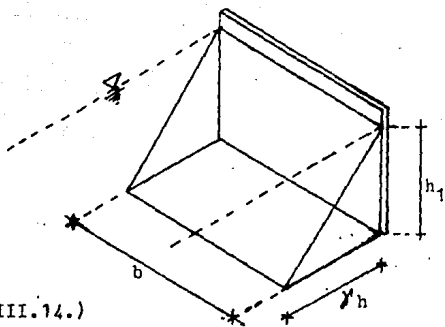
(Fig. III.13.)

Si consideramos que la pared tiene un ancho b , la proyección del diagrama será como se muestra en la (Fig. III.14.)

Donde el volumen del prisma de presiones es:

$$V = \frac{\gamma h(h)}{2} b = \frac{\gamma h_1^2}{2} b$$

por lo que: $F = \frac{\gamma h_1^2}{2} b$ --- (Ec. III.7.)

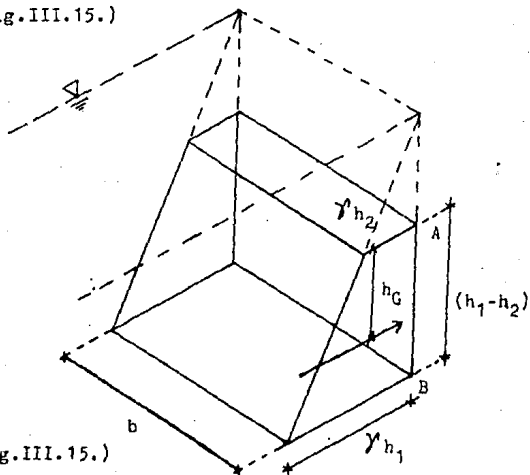


(Fig.III.14.)

La localización del punto de aplicación está en función del prisma y para una sección triangular, como en este caso, el centroide se encuentra a:

$$z_K = \frac{2}{3} h_1 \quad \text{--- (Ec.III.8.)}$$

Para determinar el empuje para una sección determinada, del punto A al punto B, el prisma quedaría de la siguiente forma: (Fig.III.15.)



(Fig.III.15.)

El volumen para este prisma es:

$$V = \frac{\gamma h_1 + \gamma h_2}{2} (h_1 - h_2) \text{ o}$$

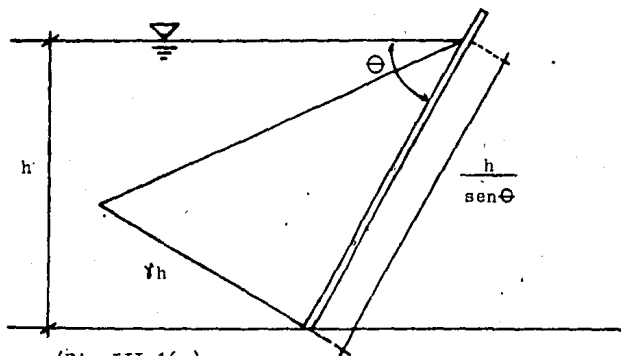
$$F = \frac{\gamma h_1^2 - \gamma h_2^2}{2} \text{ (b) --- (Ec. III.9.)}$$

Para este caso la localización del centroide por ser --
sección trapezoidal es:

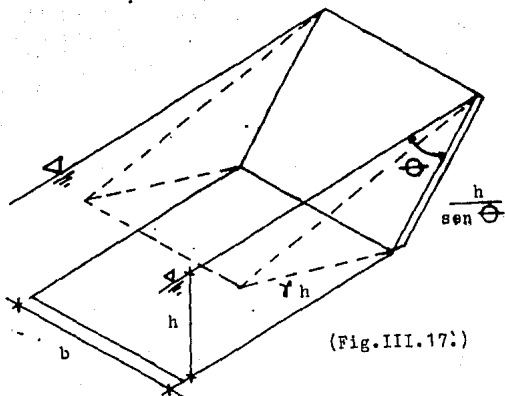
$$h_G = \frac{(h_1 - h_2)}{3} \left[\frac{2\gamma h_1 + \gamma h_2}{\gamma h_1 + \gamma h_2} \right] \text{ --- (Ec. III.10.)}$$

$$z_G = h_2 + h_G$$

Para una superficie plana inclinada la representación y
magnitud del empuje sería la siguiente: (Fig. III.16.) y
(Fig. III.17.)



(Fig. III.16.)



De las figuras (Fig.III.16.) y (Fig.III.17.):

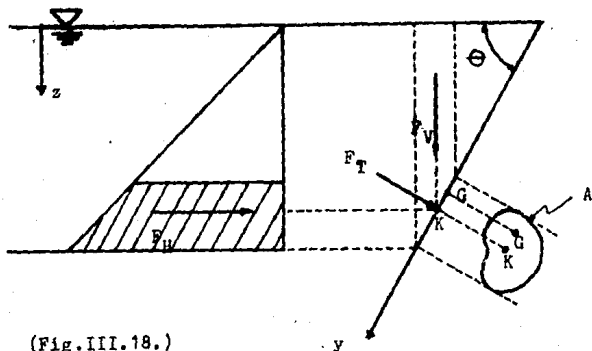
$$V = \gamma h \frac{h}{2 \operatorname{sen} \Theta} b$$

Por lo que: $F = \gamma \frac{h^2}{2 \operatorname{sen} \Theta} b$ --- (Ec.III.11.)

Y el centroide es: $z_G = \frac{2}{3} h$ --- (Ec.III.12.)

$$y_G = \frac{2}{3} \frac{h}{\operatorname{sen} \Theta}$$

Descomposición del empuje hidrostático sobre una superficie plana. (Fig.III.18.)



(Fig.III.18.)

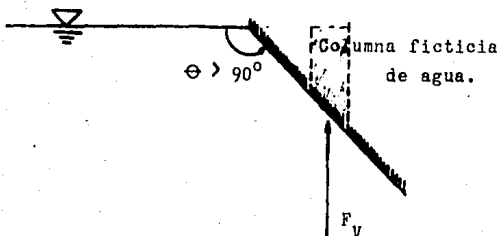
ψ = volumen de la columna ficticia o real sobre la superficie en la cual se calcula F_V .

La componente vertical es:

$$F_V = \gamma \iint_A z \cos \theta dA$$

$F_V = \gamma \psi$ El punto de aplicación de esta fuerza -- queda en el centro de gravedad de dicha columna.

Se observa que si: $90^\circ < \theta < 180^\circ$; entonces $\cos \theta < 0$ esto significa que F_V está dirigido de abajo hacia arriba y que la columna de líquido no existe físicamente, pero las presiones son ascendentes. (Fig.III.19.)



(Fig.III.19.)

La componente horizontal F_H vale:

$$F_H = \gamma \iint_A z \operatorname{sen} \theta \, dA$$

$$F_H = \gamma A \cdot z_C \operatorname{sen} \theta \quad \text{---(Ec.III.13.)}$$

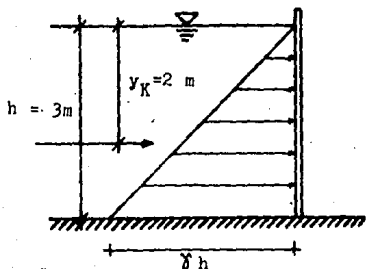
F_H se localiza en el centro de gravedad de la cuña de presiones o en el z_K del área proyectada perpendicular al eje x.

III.3.1. PROBLEMAS RESUELTOS.

Problema No. 13.

Calcular el empuje hidrostático y el centro de presiones sobre la pared de 4 m de ancho de un estanque de agua en los siguientes casos: a) pared vertical y b) pared inclinada a 60° .

a)



$$\gamma_{\text{agua}} = 1 \text{ ton/m}^3$$

$$F = \gamma z_G A$$

Por sección rectangular:

$$z_G = \frac{h}{2} \quad A = bh$$

Sustituyendo:

$$F = 1 \text{ ton/m}^3 \frac{3}{2} \text{ m} (4 \text{ m})(3 \text{ m})$$

$$F = 18 \text{ ton.}$$

en este caso $y = z$

($\text{sen } 90^\circ = 1$).

De acuerdo a la (Ec.III.5.)

$$y_K = y_G + \frac{\bar{r}_x^2}{y_G}$$

$$\bar{r}_x^2 = \frac{h^2}{12}$$

De la (Fig.III.12)

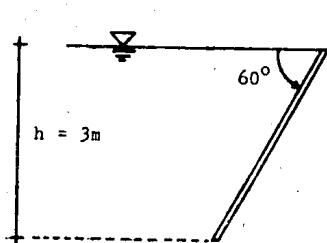
$$y_K = \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6h} = \frac{6h + 2h}{12} = \frac{8}{12} h = \frac{2}{3} h$$

$$y_K = \frac{2}{3} (3) = 2 \text{ m.}$$

Obteniendo el empuje a partir de la cuña de presiones:

$$F = \frac{\gamma h}{2} (h)b = \frac{1}{2} (3)(3)(4) = 18 \text{ ton.}$$

b) A partir de la cuña de presiones:



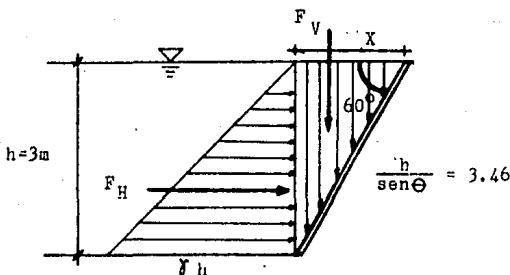
$$F = \frac{\gamma h^2}{2 \operatorname{sen} \Theta} \cdot b$$

$$F = 1 \frac{3^2}{2 \operatorname{sen} 60^\circ} (4) = 20.8 \text{ ton}$$

$$y_K = \frac{2}{3} \frac{h}{\operatorname{sen} \Theta} = \frac{2}{3} \frac{3}{\operatorname{sen} 60^\circ}$$

$$y_K = 2.30 \text{ m}$$

Obteniendo el empuje a partir de la descomposición de - fuerzas:



Por ley de senos: $\frac{h}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{x}{\operatorname{sen} 30^\circ}$

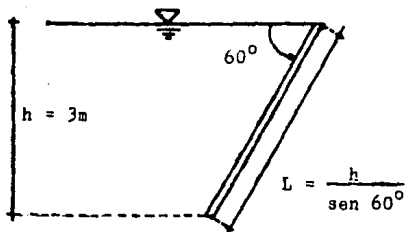
Por lo tanto: $x = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ} h \quad x = 1.732 \text{ m}$

$$F_V = \frac{h(x)}{2} \cdot b \cdot \gamma = \frac{3(1.732)}{2} (4)(1) = 10.392 \text{ ton.}$$

$$F_H = \frac{\gamma h(h)}{2} \cdot b = \frac{1(3)(3)(4)}{2} = 18 \text{ ton}$$

$$F_T = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = 20.8 \text{ ton.}$$

Obtención del empuje a partir de $F = \gamma z_G A$



$$z_G = \frac{h}{2} = 1.5$$

$$A = bL = 4 \frac{3}{\text{sen } 60^\circ}$$

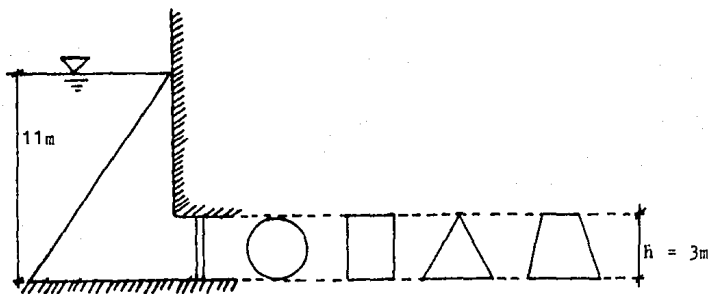
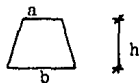
$$A = 13.85 \text{ m}^2$$

$$F = 1 \frac{3}{2} (13.85) = 20.8 \text{ ton}$$

Problema No. 14.

Determine el empuje hidrostático que soporta la compuerta mostrada en la figura así como su punto de aplicación, para los siguientes casos:

- Compuerta circular de 3m de diámetro.
- Compuerta rectangular de 3 X 2m de lado.
- Compuerta triangular de 3m de altura y 4m de base.
- Compuerta trapecial de $a = 1\text{m}$, $b = 2\text{m}$ y $h = 3\text{m}$



De la tabla (Fig.II.12.) tenemos que:

Circulo: $h_G = R$; $\bar{r}_x^2 = \frac{R^2}{4}$

Rectángulo: $h_G = \frac{h}{2}$; $\bar{r}_x^2 = 0.0833 h^2$

Triángulo: $h_G = \frac{2}{3} h$; $\bar{r}_x^2 = 0.0556 h^2$

Trapezio: $h_G = \frac{h}{3} \frac{2b+a}{b+a}$; $\bar{r}_x^2 = \frac{h^2}{18} \left(1 + \frac{2ab}{(a+b)^2} \right)$

El empuje hidrostático de acuerdo a la (Ec.III.4.) es:

$F = \gamma z_G A$ y la posición por la (Ec.III.5.):

$$y_K = h_G + \frac{\bar{r}_x^2}{h_G}$$

a) Compuerta circular de 3m de diámetro:

$$F = z_G A \quad \gamma = 1000 \text{ kg/m}^3 \quad A = (1.5)^2 = 7.07 \text{ m}^2$$

$$h_G = z_G = (11\text{m} - R) = (11 - 1.5) = 9.5 \text{ m}$$

$$F = 1000 (9.5) (7.07) = 67165 \text{ kg} = 67.16 \text{ ton}$$

$$y_K = h_G + \frac{\bar{r}_x^2}{h_G} \quad \bar{r}_x^2 = \frac{R^2}{4} = \frac{(1.5)^2}{4} = 0.56$$

$$y_K = 9.5 + \frac{0.56}{9.5} = 9.56 \text{ m}$$

b) Compuerta rectangular de 3 X 2m de lado:

$$F = z_G A \quad \gamma = 1000 \text{ kg/m}^3 \quad A = 3\text{m}(2\text{m}) = 6\text{m}^2$$

$$h_G = z_G = (11 - \frac{h}{2}) = (11 - 1.5) = 9.5 \text{ m}$$

$$F = 1000 (9.5) (6) = 57 \text{ 000 kg} = 57.0 \text{ ton}$$

$$\bar{r}_x^2 = 0.0833 h^2 = 0.0833 (3)^2 = 0.749$$

$$y_K = 9.5 + \frac{0.749}{9.5} = 9.579 \text{ m}$$

c) Compuerta triangular de 3m de altura y 4m de base:

$$A = \frac{1}{2} b h = \frac{1}{2} (4)(3) = 6 \text{ m}^2$$

$$h_G = z_G = (11 - \frac{1}{3} (3)) = 10 \text{ m}$$

$$F = 1000 (10) (6) = 60000 \text{ kg} = 60 \text{ ton.}$$

$$\bar{r}_x^2 = 0.0556 h^2 = 0.0556 (3)^2 = 0.5004$$

$$y_K = 10 + \frac{0.5004}{10} = 10.05 \text{ m}$$

d) Compuerta trapecial con $a = 1\text{ m}$, $b = 2\text{ m}$ y $h = 3\text{ m}$:

$$A = h \frac{b+a}{2} = 3 \frac{3}{2} = 4.5 \text{ m}^2$$

$$h_G = z_G = \frac{h}{3} \frac{2b+a}{b+a} = \frac{3}{3} \frac{2(2)+1}{2+1} = 8$$

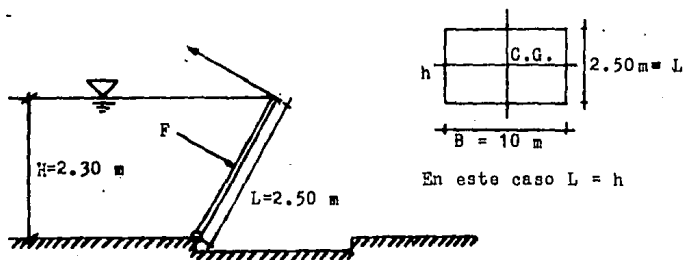
$$z_G = 8 + 1.667 = 9.667 \text{ m} \quad \bar{r}_x^2 = \frac{(3)^2}{18} \left[1 + \frac{2(1)(2)}{(1+2)^2} \right] = 0.7222$$

$$F = 1000 (9.667)(4.5) = 43501 \text{ kg} = 43.5 \text{ ton.}$$

$$y_K = 9.667 + \frac{0.7222}{9.667} = 9.74 \text{ m}$$

Problema No.15.

Una compuerta rectangular plana, eleva el nivel del --- agua hasta alcanzar una altura $H = 2.30$ m. Determinar la -- tensión T del cable que sostiene a la compuerta en las condi-- ciones indicadas. Las dimensiones de la compuerta son: lar-- go = $L = 2.50$ m, ancho = $B = 10$ m

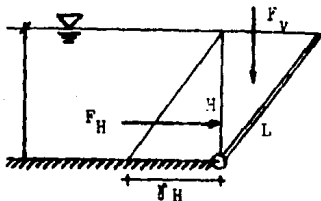


Para determinar el empuje hay dos formas para hacerlo:

a) $F = \gamma z_G A$ $z_G = \frac{H}{2} = \frac{2.30}{2} = 1.15$ $A = BL = 10(2.5) = 25\text{m}^2$

$\gamma = 1 \text{ ton/m}^3$ $F = (1)(1.15)(25) = 28.75 \text{ ton}$

b) Obteniendo las componentes:



F_H = Volumen de la cuña de presiones (área del triángulo)

F_V = Peso del volumen de la columna de agua.

$F_H = \frac{\gamma H^2}{2} B = \frac{1(2.3)^2}{2}(10) = 26.45 \text{ ton.}$

$$F_V = \frac{\sqrt{L^2 - H^2}}{2} \text{ LB } \delta = 11.27 \text{ ton}$$

La resultante es: $F_T = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = \sqrt{(26.45)^2 + (11.27)^2}$
 $F_T = 28.75 \text{ ton.}$

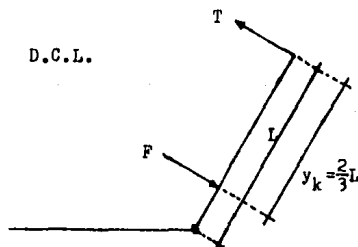
Por otro lado: $y_K = y_G + \frac{\bar{r}_x^2}{y_G}$

De la tabla (Fig.III.12.) el cuadrado del radio de giro para una sección rectangular es:

$$\bar{r}_x^2 = \frac{h^2}{12} \quad y_G = \frac{L}{2}$$

$$y_K = \frac{L}{2} + \frac{2 L^2}{12 L} = \frac{2}{3} L = 1.66 \text{ m}$$

Para determinar la tensión T:



Tomando momentos respecto a "o"

$$\Sigma M_o = 0 \quad (+)$$

$$F \left(\frac{1}{3} L \right) - T L = 0$$

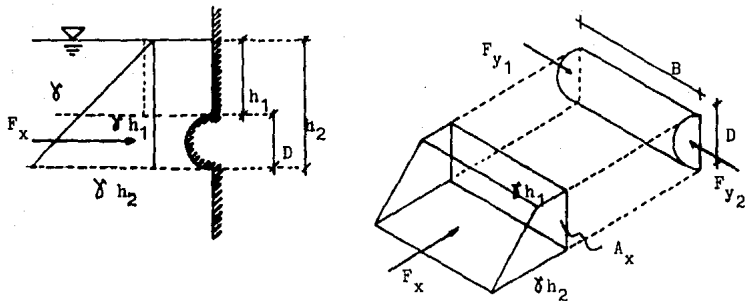
$$T = \frac{1}{3} F = \frac{1}{3} (28.75) = 9.58 \text{ ton.}$$

III.4. EMPUJE HIDROSTATICO SOBRE SUPERFICIES CURVAS.

En el caso de superficies curvas sumergidas en líquidos en reposo, las fuerzas que actúan tienen diferentes direcciones y por lo tanto, deben sumarse como cantidades vectoriales. Se toman sus componentes a lo largo de tres direcciones mutuamente perpendiculares y se suman como escalares, formando así las tres componentes del vector fuerza resultante. En general, se escogen como direcciones a dos horizontales formando ángulo recto y a la vertical, pudiéndose calcular las tres componentes correspondientes junto con sus líneas de acción. De esta manera, la resultante queda completamente determinada.

La componente horizontal de la fuerza de presión sobre una superficie curva, es igual a la fuerza de presión que actúa en la proyección de la superficie sobre un plano vertical perpendicular a la dirección de la componente.

Para ejemplificar el cálculo de empujes hidrostáticos sobre superficies curvas se tienen las siguientes figuras: (Fig. III.20. a. y b.)



(Fig. III.20. a y b.)

Donde:

A_x = Proyección de la superficie sobre un plano vertical perpendicular a la dirección de la componente F_x .

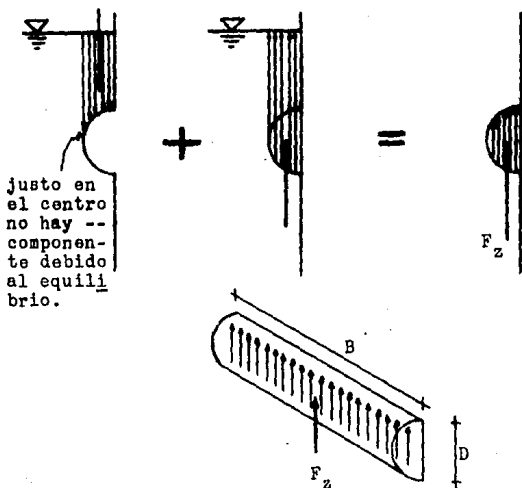
$F_{y_1} = F_{y_2}$ Equilibrio en la dirección y.

$$F_x = \gamma A_x z_{G_x} \quad \text{---(Ec. III.14.)}$$

O por medio del volumen de la cuya de presiones:

$$F_x = \left[\frac{(\gamma h_1 + \gamma h_2) D}{2} \right] B \quad \text{---(Ec. III.15.)}$$

La componente vertical de la fuerza de presión sobre una superficie curva, es igual al peso del líquido que se encuentra por encima de la superficie en la misma dirección vertical, extendiéndose hasta la superficie libre del líquido. (Fig. III.21. a y b)



justo en
el centro
no hay --
componen-
te debido
al equili-
brio.

(Fig. III.21. a y b.)

$$F_z = \gamma \psi$$

$$F_z = \frac{\pi R^2}{2} (B) \gamma$$

Donde: $\frac{\pi R^2}{2} B$ = volumen de la cuña
en dirección verti-
cal.

Y $\gamma \psi$ es la resultante del empuje vertical sobre el semicilindro.

$$F_z = \gamma \left(\frac{\pi R^2}{2} B \right) \quad \text{--- (Ec. III.16.)}$$

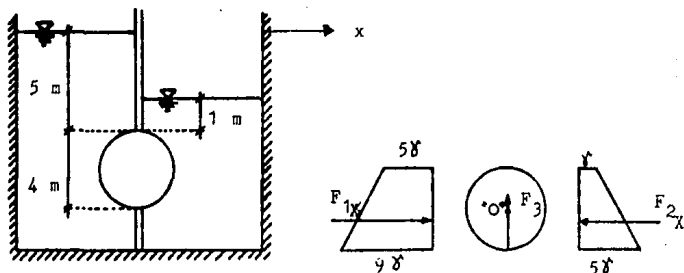
y F_T es la resultante de las dos fuerzas:

$$F_T = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} \quad \text{--- (Ec. III.17.)}$$

III.4.1. PROBLEMAS RESUELTOS.

Problema No.16.

Determinar la magnitud y dirección del empuje total que actúa en el cilindro sumergido como se muestra en la figura. El diámetro del cilindro es de 4 m y tiene un ancho de 10 m. El líquido es agua.



Determinación de los empujes: $F = \delta z_G A$ $\delta = 1 \text{ ton/m}^3$

$$F_{1x} = \frac{5\delta + 9\delta}{2} (4)(10) \quad (\text{área del trapecio } \frac{(BM+Bm)h}{2})$$

$$F_{1x} = 280 \text{ ton.}$$

$$F_{2x} = \frac{5\delta + \delta}{2} (4)(10) = 120 \text{ ton.}$$

$$F_{3x} = \delta \pi r^2 (10) = 125.66 \text{ ton}$$

El empuje horizontal es: $F_H = F_{1x} - F_{2x} = 280 - 120 = 160 \text{ ton}$

$$F_T = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = \sqrt{160^2 + 125.66^2}$$

$$F_T = 203.45 \text{ ton}$$

El punto de aplicación con respecto a "O" es:

Para los empujes horizontales. El centro de gravedad de un trapecio se obtiene como:

$$h_G = \frac{H}{3} \frac{2B + b}{B + b}$$

$$e_1 = h_{G_1} - R \quad (R=\text{radio})$$

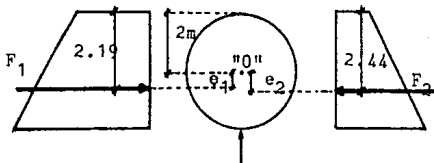
$$h_{G_1} = \frac{4}{3} \frac{2(9)+5}{9+5} = 2.19 \text{ m}$$

$$e_1 = 2.19 - 2 = 0.19 \text{ m}$$

$$e_2 = h_{G_2} - R$$

$$h_{G_2} = \frac{4}{3} \frac{2(5)+1}{5+1} = 2.44 \text{ m}$$

$$e_2 = 2.44 - 2 = 0.44 \text{ m}$$



Para obtener el punto de aplicación del F_T hacemos suma de momentos respecto a "O".

$$\sum M_o = 0 \quad (+)$$

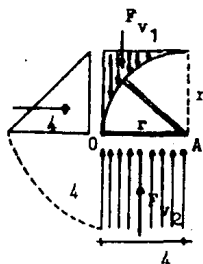
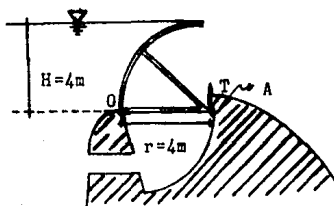
$$-F_1(e_1) + F_2(e_2) - F_T(e_H) = 0$$

Al sustituir: $-280(0.19) + 120(0.44) - 203.45(e_H) = 0$

$$e_H = 0$$

Problema No. 17.

La compuerta de sector de $1/4$ de círculo tiene un radio de $r = 4\text{m}$ y soporta un tirante de agua de $H = 4\text{m}$ y gira alrededor del punto "O". Su peso es $W = 1\text{ ton/m}$ localizado a una distancia $c = 0.7\text{m}$; además $b = 1.0\text{m}$. Calcular la fuerza T de reacción sobre el punto A en la compuerta por metro de longitud.



El empuje horizontal sobre la compuerta es:

$$F_H = \frac{H^2}{2} b = \frac{(4)^2 (1)}{2} = 8 \text{ ton}$$

El empuje vertical descendente (sobre la superficie curva):

$$F_{V_1} = \left(r^2 - \frac{\pi r^2}{4} \right) \gamma b \downarrow$$

El empuje vertical ascendente (sobre la superficie plana de la compuerta):

$$F_{v_2} = r^2 \gamma b \uparrow$$

La resultante del empuje vertical es:

$$F_v = F_{v_2} - F_{v_1} = r^2 \gamma b - \left(r^2 - \frac{\pi r^2}{4} \right) \gamma b = \frac{\pi r^2}{4} \gamma b \uparrow$$

$$F_v = \frac{\pi(4)^2}{4} (1)(1) = 12.566 \text{ ton} \uparrow$$

Determinación de los centros de presiones de los empujes hidrostáticos:

Para el empuje horizontal:

$$z_k = 2/3 H = 2/3 (4) = 2.66 \text{ m}$$

Y con respecto a la articulación "O":

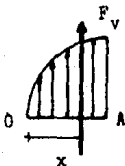
$$z = H - z_k = 1.34 \text{ m}$$

Para el empuje vertical:

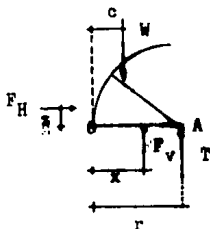
De la (Fig.III.12.):

$$x = 0.5756 r$$

$$x = 0.5756 (4) = 2.30 \text{ m}$$



Haciendo suma de momentos con respecto a la articulación:



$$F_H z + W c - F_V x - T r$$

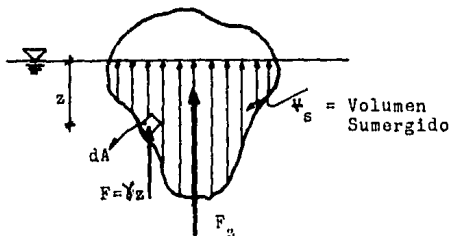
$$T = \frac{8(1.34) + 1(0.7) - 12.566(2.30)}{4}$$

$$T = - 4.37 \text{ ton}$$

$T = 4.37 \text{ ton}$ con sentido diferente al indicado en la figura del problema.

III.5. PRINCIPIO DE ARQUIMEDES Y ESTABILIDAD DE LOS CUERPOS EN FLOTACION.

El análisis de la estabilidad de los cuerpos en flotación se basa en el principio de Arquímedes el cual establece lo siguiente: "Todo cuerpo sumergido total o parcialmente en un líquido sufre un empuje vertical hacia arriba igual al peso del líquido desplazado". El punto en el que actúa la fuerza se llama centro de empuje, coincidiendo con el centro de gravedad del líquido desplazado. (Fig.III.22.)



(Fig.III.22.)

Si $F = \gamma z$ en la superficie dA :

Integrando para obtener F_z :

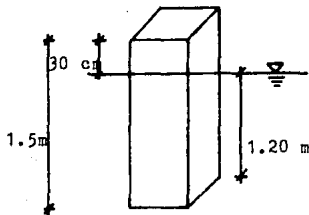
$$F_z = \iint \gamma \underbrace{z \, dA}_{\Psi = \text{volumen sumergido}}$$

Por lo que: $F_z = \gamma \Psi_s$ --- (Ec.III.18.)

III.5.1. PROBLEMAS RESUELTOS.

Problema No. 48.

Una pieza de madera ($\gamma = 0.651 \text{ ton/m}^3$) se utiliza para soportar flotadores en el agua y realizar estudios de corrientes; tiene una sección cuadrada de 7.5 cm de lado y 1.5 m de longitud. ¿Cuántos kgs. de plomo ($\gamma = 11200 \text{ kg/m}^3$) deben unirse a uno de los extremos de la pieza para que flote verticalmente con 30 cms. fuera del agua.?



$$W_{\text{propio}} = (0.075 \text{ m})^2 (1.5 \text{ m}) 651 \text{ kg/m}^3 = 5.49 \text{ kgs.}$$

$$F = (0.075 \text{ m})^2 (1.2 \text{ m}) (1000 \text{ kg/m}^3) = 6.75 \text{ kgs.}$$

Considerando despreciable el volumen del plomo necesario, su peso sería:

$$6.75 \text{ kgs.} - 5.49 \text{ kgs.} = 1.26 \text{ kgs.}$$

Ahora, considerando que el plomo tendría cierto volumen que aumente el empuje ascendente del agua tendríamos que:

$$W_{\text{total}} = 5.49 \text{ kgs.} + W_{\text{plomo}}$$

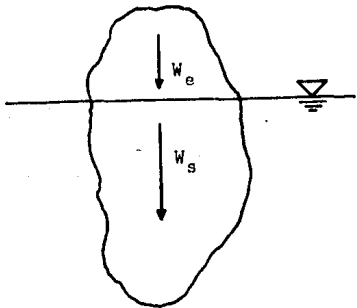
$$F = 6.75 \text{ kgs.} + \frac{W_{\text{plomo}}}{11200 \text{ kg/m}^3} (1000 \text{ kg/m}^3)$$

$$W_{\text{plomo}} \left(1 - \frac{1}{11.2}\right) = 6.75 \text{ kgs} - 5.49 \text{ kgs} = 1.26$$

$$W_{\text{plomo}} = \frac{1.26}{0.91} = 1.38 \text{ kgs.}$$

Problema No.19,

El peso específico de un iceberg es de 915 kg/m^3 y el del agua del oceano es de 1028 kg/m^3 ; si de la superficie libre del oceano emerge un volumen del iceberg de 30000 m^3 . ¿cuál es su volumen total?



W_e = peso emergido.

W_s = peso sumergido.

El empuje total es:

$$F_T = W_e + W_s$$

V_s = volumen sumergido.

V_e = volumen emergido.

γ_o = peso específico del agua del oceano.

γ_I = peso específico del iceberg.

$$V_s \gamma_o = V_e \gamma_I + V_s \gamma_I$$

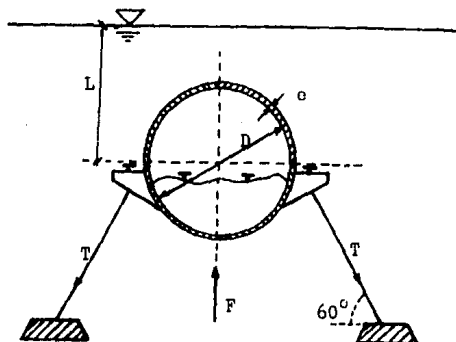
$$V_s \gamma_o - V_s \gamma_I = V_e \gamma_I$$

$$V_s = \frac{V_e \gamma_I}{\gamma_o - \gamma_I} = \frac{30000 \text{ m}^3 (915 \text{ kg/m}^3)}{(1028 \text{ kg/m}^3 - 915 \text{ kg/m}^3)} = 242920 \text{ m}^3$$

$$\text{Volumen total} = V_T = V_s + V_e = 242920 + 30000 = 272920 \text{ m}^3$$

Problema No. 20.

Un túnel submarino de sección circular de concreto reforzado, y con un diámetro interior $D=3\text{m}$ y espesor $e=250\text{mm}$ se detiene (contra la fuerza de flotación) por medio de cables distribuidos por pares a cada 6 m, según la longitud del túnel. Obtener la tensión de los cables suponiendo que el peso del balasto y rieles es de 500 kg/m ; el peso adicional de túnel es $G = 1000\text{ kg}$. en el tramo de 6 m, y el peso específico del concreto es $\gamma_c = 2.5\text{ ton/m}^3$.



$$W_{\text{tramo de 6m}} = 500\text{ kg/m}(6\text{m}) = 3000\text{ kg}.$$

$$W_{\text{total}} = W_{\text{tramo}} + G = 3000\text{ kg} + 1000\text{ kg} = 4000\text{ kg}$$

$$\text{Area} = \pi \left(\frac{D + 2(0.25)}{2} \right)^2 - \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 \quad (\text{Area del anillo de concreto})$$

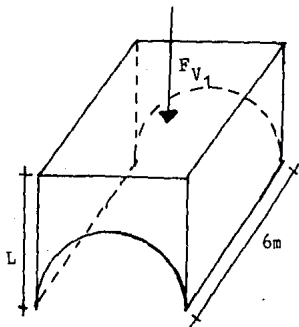
$$\text{Area} = \pi \left(\frac{3 + 2(0.25)}{2} \right)^2 - \pi \left(\frac{3}{2} \right)^2 = 2.5525\text{ m}^2$$

$$V_I = \text{Area} (6\text{m}) = 2.5525 (6\text{m}) = 15.315\text{ m}^3 \quad (\text{volumen del anillo de concreto}).$$

$$W_{\text{cilindro de concreto}} = \frac{\pi}{4} \cdot \rho = 15.315 \text{ m}^3 (2.5 \text{ ton/m}^3) = 38.28 \text{ ton.}$$

$$W = W_T + W_{\text{cilindro}} = 4 \text{ ton} + 38.28 \text{ ton} = 42.28 \text{ ton.}$$

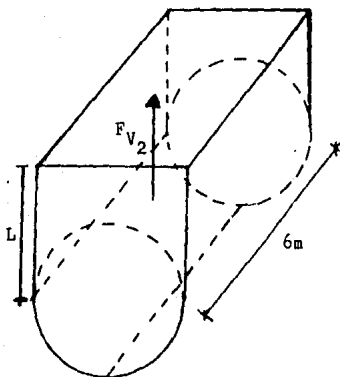
El empuje vertical descendente es igual al peso de la columna líquida sobre la mitad superior del túnel:



$$F_{V1} = (L D_T - \frac{\pi D_T^2}{8}) B \gamma'$$

$$D_T = 3.5 \text{ m} \quad B = 6 \text{ m}$$

El empuje vertical ascendente es igual a la columna "ficticia" sobre la mitad inferior del túnel; como el líquido está bajo el túnel el empuje es ascendente:



$$F_{V2} = (L D_T + \frac{\pi D_T^2}{8}) B \gamma'$$

La resultante del empuje vertical es:

$$F_V = F_{V_2} - F_{V_1} = \frac{\pi D^2}{4} B \gamma'$$

$$F_V = \frac{\pi (3.5)^2}{4} (6)(1) = 57.72 \text{ ton (Empuje vertical ascendente).}$$

$$F_y = -W + F = -42.28 \text{ ton} + 57.72 \text{ ton} = 15.4 \text{ ton}$$

Del diagrama de cuerpo libre de la figura:

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{F_y}{2T}$$

$$2T = \frac{F_y}{\text{sen } 60^\circ} = 17.82 \text{ ton}$$

Por ser 2 cables: $T = \frac{17.82}{2} = 8.91 \text{ ton por cable.}$

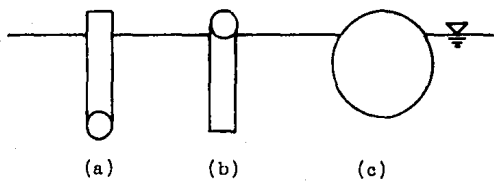
El equilibrio de un cuerpo flotante se clasifica en --- tres tipos:

Estable: Una fuerza actuante (por ejemplo el empuje -- del oleaje o del viento) origina una inclinación lateral, pero cuando aquella cesa el --- cuerpo vuelve a su posición original. Este -- tipo de equilibrio lo tienen los cuerpos de -- centro de gravedad bajo.

Inestable: La fuerza actuante origina el volteo brusco - del cuerpo (zozobra), el cual después recupera una posición más o menos estable. Este -- equilibrio lo tienen aquellos cuerpos cuyo -- centro de gravedad es alto.

Indiferente: La fuerza actuante origina un movimiento de - rotación continua del cuerpo, cuya velocidad es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza y cuya duración es la misma que la de dicha fuerza. Este tipo de equilibrio lo poseen cuerpos cuya distribución de la masa es uniforme.

Como ejemplo en la (Fig.III.23.) se tiene: a) Una ligera pieza de madera con un peso de metal en su extremo inferior, se encuentra en equilibrio estable. b) Si el peso m tálico se coloca en el extremo superior, el cuerpo se en--- encuentra en equilibrio, pero cualquier pequeño desplazamiento angular hará que el cuerpo pase a la posición en (a); c) Una esfera homogénea o un cilindro circular recto se encontrará en equilibrio indiferente, es decir, no se desarrolla par - alguno para cualquier rotación angular.

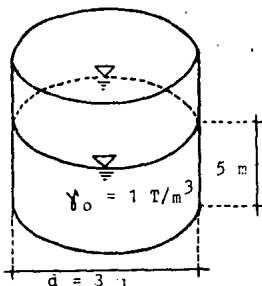


(Fig. III.23.)

III.6. PROBLEMAS PROPUESTOS.

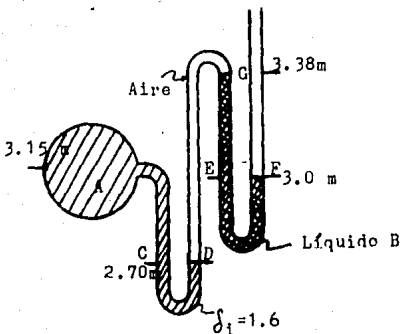
- 1.- Se tiene un tanque de sección circular de 8 m de diámetro que contiene agua a una altura de 5 m. ¿Cuánto vale la presión en el fondo?

Solución: $p = \text{presión} = 5 \text{ ton/m}^2$



- 2.- Para una presión manométrica en A de -0.11 kg/cm^2 , encontrar la densidad relativa (δ_B) del líquido manométrico B de la figura. Desprecie el peso del aire, es decir, $p_G = p_D$.

Solución: $\delta_B = 1.0$.

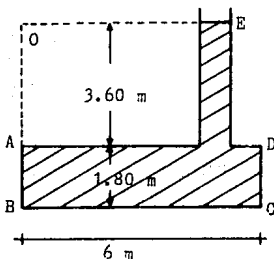


ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

- 3.- El agua alcanza el nivel E en la tubería unida al depósito ABCD que se muestra en la figura. Despreciando el peso del depósito y de la tubería de elevación. a) Determinar y situar la fuerza resultante que actúa sobre el área AB de 2.40 m de ancho. b) La fuerza total sobre el fondo del depósito.

Solución: a) $y_K = 4.56$ m de O. ; $F = 19440$ kg.

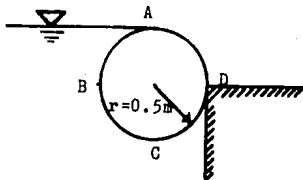
b) $F = 77\ 760$ kg.



- 4.- La figura muestra una barrera de contención para agua en forma de cilindro. Considerando una longitud de 1 m para el cilindro y suponiendo que no hay fricción entre éste y el muro (punto D) determinar: a) El peso del cilindro y b) La fuerza ejercida sobre el muro.

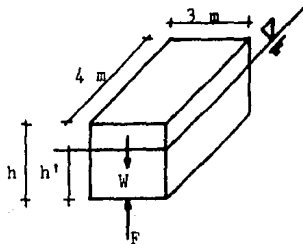
Solución: a) El peso del cilindro por unidad de longitud es de 839.05 kg.

b) $F_H = F_{HAB} = 500$ kg.



- 5.- Un cajón de 24 Ton de peso se sumerge en agua. Siendo las dimensiones de este, base 4X3 m y de altura 3 m. Indicar a qué profundidad quedará hundido el bloque.

Solución: La profundidad a la que quedará hundido es de $h' = 2\text{m}$.



C A P I T U L O - I V

ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA HIDRAULICA

- IV.1. PRINCIPIOS BASICOS Y METODOS DE ANALISIS EN LA HIDRAULICA.
- IV.2. PRINCIPIO DE LA CONSERVACION DE LA MATERIA O DEL TRANSPORTE DE MASA.
- IV.3. ECUACION DE LA ENERGIA EN EL FLUJO DE LIQUIDOS.
- IV.4. ECUACION DE IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO.
- IV.5. PERDIDA DE ENERGIA EN EL FLUJO DE LIQUIDOS.
- IV.6. PROBLEMAS PROPUESTOS.

IV.1. PRINCIPIOS BASICOS Y METRODOS DE ANALISIS EN LA HIDRAULICA.

En este capítulo se describen los conceptos básicos para el análisis del movimiento de los fluidos y se establecen las ecuaciones fundamentales que permiten predecir el comportamiento de los mismos.

El análisis basado en el concepto de volumen de control se utilizará para obtener las ecuaciones de continuidad, de la energía y de la cantidad de movimiento.

El volumen de control, se refiere a una región de interés en el espacio a través de cuyas fronteras entra y sale continuamente un fluido. La frontera del volumen de control se llama superficie de control.

La forma y tamaño de un volumen de control son enteramente arbitrarios, aunque en general se hace coincidir en algunas de sus partes con las fronteras sólidas del escurrimiento y en otras se le considera perpendicular a la dirección del flujo, con objeto de simplificar el análisis.

Los métodos que existen para analizar un flujo son: el euleriano, que se basa en el concepto de volumen de control y el lagrangiano que consiste en analizar la trayectoria de una partícula a lo largo del espacio y del tiempo.

Todas las posibles situaciones, sin importar la naturaleza del escurrimiento, están sujetas a las siguientes leyes y condiciones; las cuales se conocen como los principios fundamentales del medio continuo:

- a) Ley de conservación de la masa.

- b) Segunda ley de Newton, la cual debe ser válida para toda partícula en todo instante.
- c) Ley de conservación de la energía.
- d) Segunda ley de la termodinámica que se refiere a la transferencia de calor.

IV.2. PRINCIPIO DE LA CONSERVACION
DE LA MATERIA O DEL TRANS--
PORTE DE MASA.

En este subtema, se obtendrá la ecuación de continui--
dad como consecuencia del principio de la conservación de la
materia. Para lo cual, es necesario tomar en cuenta los si--
guientes conceptos:

a) El principio de la conservación de la materia que esta--
blece que la rapidez de crecimiento de la masa, dentro -
del volumen de control, es exactamente igual al flujo n_g
to de masa hacia el mismo volumen de control.

b) Que el flujo es permanente; significa que las condicio--
nes en cualquier punto del escurrimiento no cambian con
el tiempo, es decir:

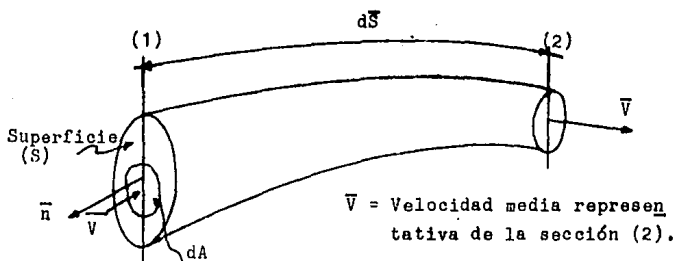
$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

(velocidad) (densidad) (presión) (temperatura)

c) Las líneas de corriente, que son curvas imaginarias di--
bujadas a través de un fluido en movimiento y que indi--
can la dirección de este en los diversos puntos del flu--
jo. Una línea de corriente tiene la característica de -
que en todos sus puntos el vector velocidad es tangente
a la misma. Como la componente de la velocidad normal a
la línea de corriente es nula, queda claro que no existe
en ninguno de sus puntos flujo perpendicular a la línea
de corriente.

d) Tubo de corriente, que está constituido por una región -
parcial de un flujo; delimitada por una familia de lí--
neas de corriente, que lo confinan.

- e) El caudal o gasto (Q), es la cantidad de flujo que pasa por una sección en un determinado tiempo. Y sus dimensiones son en (L^3/T)



(Fig.IV.1.) Superficie (S) atravesada por líneas de corriente normales a ella en cada punto.

En un intervalo (dt), el volumen de fluido que atraviesa por el área elemental (dA) queda determinado por:

$$d\psi = d\vec{S} \cdot d\vec{A} \quad \text{Cuando } \vec{v} \text{ es paralelo a } d\vec{A} \text{ o normal a } d\vec{A}$$

$$d\vec{S} = \vec{v} dt \quad \vec{v} \cdot d\vec{A} = v dA$$

$$d\psi = \vec{v} \cdot d\vec{A} dt$$

$$\frac{d\psi}{dt} = dQ = \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

$$\text{Integrando en toda el área: } Q = \iint_A \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Se define velocidad media como:

$$v = \frac{\iint_A \vec{v} \cdot d\vec{A}}{A} = \frac{Q}{A}$$

$$\text{Por lo tanto: } Q = v A = \frac{\psi}{A} \quad \text{---(Ec.IV.2.)}$$

Ecuación de continuidad.- Considerando un flujo a través de un tubo de corriente, siendo las secciones 1 y 2 normales a las líneas de corriente que forman el tubo, como se muestra en la (Fig.IV.1.).

Para un valor de la densidad ρ_1 y considerando que la velocidad puntual v_1 es prácticamente igual a la velocidad media V_1 , la cantidad de masa por unidad de tiempo que atraviesa la sección 1 es: $\rho_1 V_1 dA_1$; ya que $V_1 dA_1$ es el volumen por unidad de tiempo. Análogamente, la cantidad de masa que atraviesa la sección 2 es: $\rho_2 V_2 dA_2$.

Por el principio de la conservación de la masa y como no hay paso de fluido a través de la superficie que confina al tubo de corriente; la cantidad de masa a través del tubo de corriente es constante, es decir:

$\rho_1 v_1 dA_1 = \rho_2 v_2 dA_2$: como $\rho_1 v_1$ y $\rho_2 v_2$ son constantes, al integrar queda:

$$\rho_1 v_1 \int_{A_1} dA_1 = \rho_2 v_2 \int_{A_2} dA_2$$

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

Y como en fluidos incompresibles la densidad no varía, es decir $\rho_1 = \rho_2$ tenemos que: $A_1 v_1 = A_2 v_2 = Q$

$Q = A V$ --- (Ec.IV.1.) Expresión que se conoce como Ecuación de Continuidad.

IV.2.1. PROBLEMAS RESUELTOS.

Problema No.21.

Por una tubería de 30 cms. de diámetro circulan $0.030 \text{ m}^3/\text{seg}$ reduciéndose después el diámetro de la tubería a 15 cms. -- Calcular las velocidades medias en ambas tuberías.

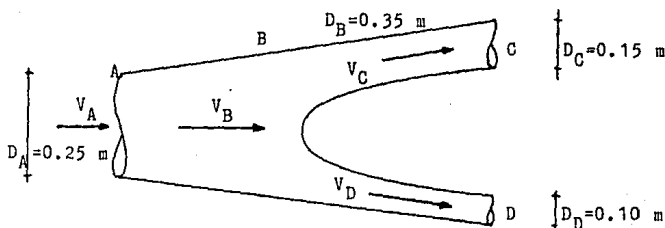
$$Q = V A$$

$$V_{30} = \frac{Q}{A} = \frac{0.030 \text{ m}^3/\text{seg}}{\frac{\pi (0.30)^2}{4}} = 0.42 \text{ m/seg.}$$

$$V_{15} = \frac{Q}{A} = \frac{0.030 \text{ m}^3/\text{seg}}{\frac{\pi (0.15)^2}{4}} = 1.70 \text{ m/seg.}$$

Problema No.22.

Un tubo de sección circular se bifurca como se muestra en la figura y tiene los diámetros que se indican. El fluido que circula es agua, entrando en la sección A y saliendo en las secciones C y D. Si la velocidad media en B es de 1.2 m/seg y en C es de 3.4 m/seg, calcular: a) Las velocidades medias en A y D; b) El gasto total y c) El gasto en cada rama de la tubería.



a) Por continuidad:

$$Q_A = Q_B = Q_C + Q_D$$

$$V_A A_A = V_B A_B$$

$$V_A \frac{\pi (D_A)^2}{4} = V_B \frac{\pi (D_B)^2}{4}$$

Sustituyendo valores: $D_A = 0.25 \text{ m}$; $D_B = 0.35 \text{ m}$; $V_B = 1.2 \text{ m/seg}$

$$V_A = \frac{0.115}{0.05} = 2.3 \text{ m/seg}$$

Para obtener V_D :

$$V_B A_B + V_C A_C + V_D A_D$$

$$V_D = \frac{0.115 - 0.060}{0.0078} = 7.05 \text{ m/seg}$$

$$b) Q_T = V_A A_A = 2.3 (0.0491) = 0.113 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$c) Q_C = V_C A_C = 3.4 (0.018) = 0.0612 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_D = V_D A_D = 7.05 (0.0078) = 0.055 \text{ m}^3/\text{seg}.$$

IV.3. ECUACION DE LA ENERGIA EN EL FLUJO DE LIQUIDOS.

La energía se ha definido, como la capacidad que tiene un cuerpo para realizar un trabajo mecánico. La energía puede adquirir diversas formas que según la ley universal de la conservación de la energía o primer principio de la termodinámica, pueden transformarse unas en otras.

En el caso de un fluido incompresible, se requiere del estudio de las siguientes tres formas de energía del fluido: energía potencial, energía de presión y energía cinética; así como de las transformaciones de éstas tres formas entre sí y de su intercambio con el trabajo mecánico.

Como una simplificación, es preferible utilizar la energía específica (e) en lugar de la energía total (E).

La energía específica (e) resulta, en el caso del sistema internacional, de dividir a la energía total entre la unidad de masa ($e = \frac{E}{M}$). Mientras que en el sistema técnico, - la energía total se divide entre la unidad de peso ($e = \frac{E}{W}$)

Energía Potencial.- Se define como el trabajo que la fuerza de gravedad puede ejercer sobre el líquido, cuando su altura desciende de un nivel de referencia z_1 , a un nivel z_2 . Un ejemplo de lo anterior, es una bomba para elevar un líquido del nivel z_1 al z_2 , para lo cual es preciso ejercer sobre él un trabajo contra la fuerza de gravedad, igual y de sentido contrario que se transforma en la energía potencial. Los niveles z_1 y z_2 se refieren a un plano de referencia $z=0$. Si la fuerza de gravedad es igual al peso del fluido, $W = \gamma V$, donde, V = volumen; y recordando que trabajo = energía = (fuerza)(distancia):

$W_z = \rho g \psi z$, por lo que la energía potencial total será:

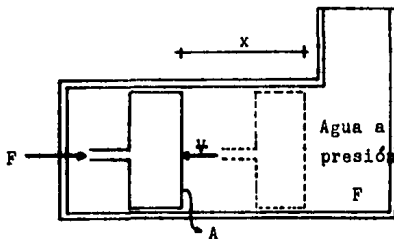
$E_z = \rho g \psi z$ --- (Ec.IV.2.) Y la específica:

$e_z = \frac{\rho g \psi z}{\rho \psi}$; Si $M = \rho \psi$

$e = \frac{\rho g \psi z}{\rho \psi} = g z \frac{m^2}{seg^2}$ --- (Ec.IV.3.) Sistema Internacional.

Energía de Presión.- Si suponemos que la presión (p) del agua que se encuentra en el cilindro en la (Fig.IV.2.) es constante y desplaza el émbolo de superficie (A); venciendo la resistencia (F), y recorriendo un espacio (x). El trabajo que realiza el fluido es $T = p A x = p \psi$; donde $\psi = Ax$ que es el volumen recorrido por el pistón.

Este trabajo se ha realizado, debido a la energía de presión que un volumen de agua (ψ) a la presión (p) poseía en el tanque antes del desplazamiento del pistón.



(Fig.IV.2.)

De ésta forma, un volumen de agua (ψ) a la presión (p), posee la energía de presión ($p \psi$), esto es: $E_p = p \psi$. Si multiplicamos por $\frac{\rho}{\rho} = 1$; la energía de presión total es:

$E_p = \frac{\rho}{\rho} M$ --- (Ec.IV.4.)

Y al dividir entre la masa, se obtiene la energía de -- presión específica:

$$e_p = \frac{p}{\rho} \quad \text{---(Ec.IV.5.) Sistema Internacional.}$$

Como ejemplo de lo anterior, en un tubo piezométrico la energía de presión realiza el trabajo de elevar el líquido

$$\frac{p}{\rho g} = \frac{p}{\gamma} \quad \text{que es la altura equivalente de presión. Por}$$

lo que el líquido tiene la energía de presión: $pV = \frac{p M}{\rho}$

Energía Cinética. -- Todo cuerpo en movimiento tiene la capacidad de realizar un trabajo, por lo que se puede decir que dicho cuerpo móvil posee energía que se denomina como -- energía cinética.

Por cinemática sabemos que la velocidad de un cuerpo -- con movimiento uniformemente acelerado es:

$$V^2 = 2 \cdot a \cdot d \quad \text{Donde: } V = \text{velocidad.}$$

$a = \text{aceleración.}$
 $d = \text{distancia recorrida.}$

Si consideramos para nuestro caso que la aceleración -- que está actuando es la de la gravedad, es decir, $a = g$ tenemos que:

$$V^2 = 2 g d \quad , \quad \text{de donde, } d = \frac{V^2}{2g}$$

Por otro lado, de la segundo ley de Newton $F = m a$, -- haciendo $a = g$; y por definición de trabajo:

$$T = \text{Energía} = F d = E_c \quad . \quad \text{Sustituyendo:}$$

$$E_c = M a d = M g \frac{V^2}{2g}$$

$$E_c = M \frac{V^2}{2} \quad \text{---(Ec.IV.6.)}$$

Y al dividir entre la masa obtenemos la específica:

$$e_c = \frac{v^2}{2} \frac{m}{\text{seg}^2} \quad \text{---(Ec.IV.7.) Sistema Internacional}$$

Ecuación de la energía para una línea de corriente.

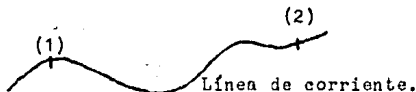
Para un flujo permanente, la trayectoria de una partícula de fluido, coincide con una línea de corriente. Si además, ésta partícula de fluido no recibe ni cede energía al pasar de un punto 1 a un punto 2 de la línea de corriente; la energía que posee la partícula debe permanecer constante (Fig.IV.3.). Por lo que:

$$\frac{E_1}{\rho} + z_1 g + \frac{v_1^2}{2} = \frac{E_2}{\rho} + z_2 g + \frac{v_2^2}{2} \quad \text{---(Ec.IV.8.)}$$

(Ecuación de Bernoulli para una línea de corriente)

Al dividir la ecuación entre g para simplificar y recordando que ($\gamma = \rho g$) queda:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \quad \text{---(Ec.IV.9.)}$$



(Fig.IV.3.) Línea de corriente.

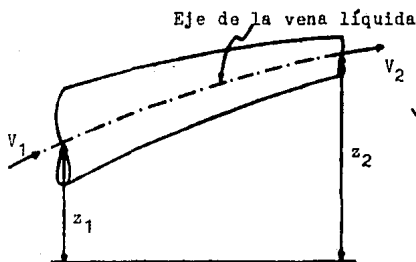
En la (Ec.IV.9.) falta considerar el término que interpreta a la energía por unidad de peso utilizada para vencer las fuerzas de fricción, y que se transforma en energía calorífica no aprovechable en el movimiento. Por esta razón se

considera una pérdida de energía que se designa como h_r . De esta manera, la ecuación anterior queda como:

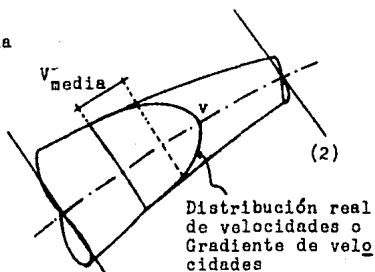
$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \sum_1^2 h_r \quad \text{---(Ec.IV.10.)}$$

(Ecuación de la energía para una línea de corriente).

Al tener una vena líquida o tubo de corriente, es necesario tomar un valor medio de la velocidad en las secciones de análisis, ya que ésta varía de una línea de corriente a otra siendo menor en la cercanía de las fronteras como se muestra en la (Fig.IV.4.b.).



(Fig.IV.4.a.)



(1) (Fig.IV.4.b.)

Se considera que los valores z , ρ , p y h_r sobre una línea de corriente que coincide con el eje de una vena líquida son representativos de cada sección. Al considerar la velocidad media de la sección es necesario entonces corregir al término $V^2/2g$ con un coeficiente llamado de Coriolis que se denota con la letra (α) y su valor es el siguiente:

$$\alpha = \frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{v}{V} \right)^3 dA \quad \text{---(Ec.IV.11.)}$$

De lo anterior la ecuación de la energía para una vena líquida nos queda como:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \sum_1^2 h_r \text{ --- (Ec.IV.12.)}$$

donde V_1 y V_2 son los valores medios de la velocidad en cada sección.

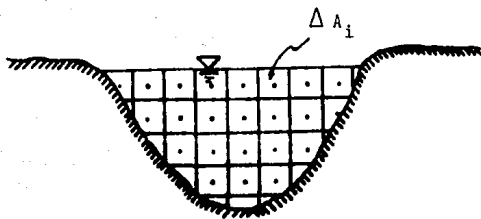
En el caso de escurrimientos donde la velocidad en cada punto de la sección en estudio se aproxima a la velocidad media, se tiene que: $\alpha_1 = \alpha_2 \approx 1$ de donde la Ec. queda:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \sum_1^2 h_r \text{ --- (Ec.IV.13.)}$$

Para secciones transversales irregulares y muy rugosas $\alpha \neq 1$, y los valores de V y α se pueden conocer por medición directa considerando a cada punto como un área de influencia ΔA_i (Fig.IV.6.) como:

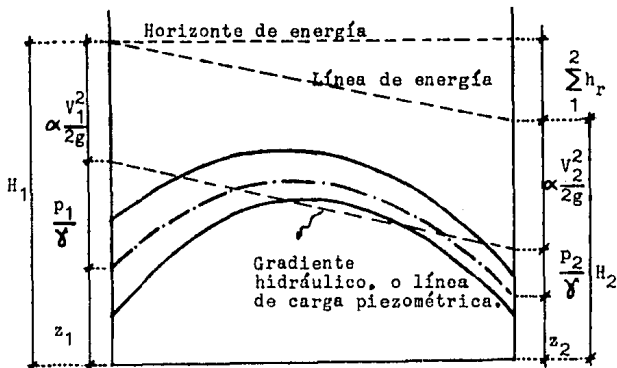
$$V \approx \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n v_i \Delta A_i \text{ --- (Ec.IV.14.)}$$

$$\alpha \approx \frac{1}{AV^3} \sum_{i=1}^n v_i^3 \Delta A_i \text{ --- (Ec.IV.15.)}$$



(Fig.IV.5.) Sección transversal de un río.

Perfil de energía.- La ecuación de la energía de una línea de corriente se puede representar esquemáticamente de la siguiente manera:



(Fig.IV.6.)

A la suma de los términos $H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{v^2}{2g}$ se le conoce como energía (por unidad de peso) con respecto a un plano horizontal de comparación.

La línea de energía no puede ser horizontal o con inclinación ascendente en la dirección del escurrimiento; esto se cumple si el líquido es real y no se le adiciona energía del exterior. La diferencia de nivel de la línea de energía en 2 puntos distintos representa la pérdida de energía.

En el caso de que la línea de cargas piezométricas que se en algún tramo por debajo del eje de la vena líquida, las presiones en ese tramo son menores que la presión cero de referencia (atmosférica local).

En una determinada sección, la energía de un volumen Ψ del líquido respecto al plano horizontal de referencia es:

$$E = \gamma \Psi H \quad \text{---(Ec.IV.16.)}$$

La energía del líquido en la unidad de tiempo es su potencia, esto es:

$$P = \frac{dE}{dt} = \gamma H \frac{d\Psi}{dt}$$

$$P = \gamma QH \quad \text{---(Ec.IV.17.)}$$

Cuando se incrementa la energía del flujo a través de un dispositivo externo (bomba) la ecuación de la energía se expresa:



(Fig.IV.7.)

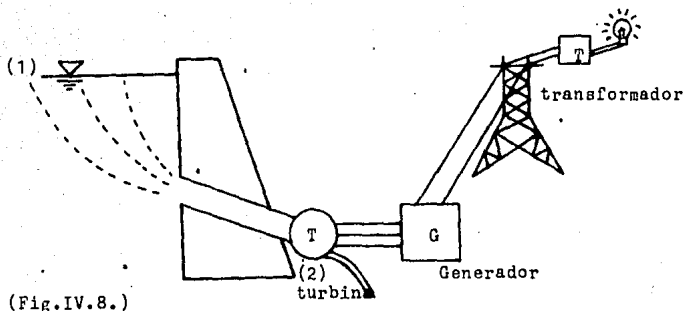
Planteando energía entre 1 y 2 (Fig.IV.7.):

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + H_B = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \sum_1^2 h_r \quad \text{---(Ec.IV.18.)}$$

Donde: H_B = Carga de bombeo

$\sum_1^2 h_r$ = Suma de pérdida de energía entre la sección 1 y 2

Cuando se cede energía a través de un dispositivo externo (turbina), siguiendo el mismo procedimiento que en el caso de la bomba; la ecuación de la energía queda:



(Fig.IV.8.)

Planteando energía de 1 a 2 de la (Fig.IV.8.):

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

$$H_1 - H_T = H_2 + \sum_1^2 h_f$$

$$H_T = H_1 - H_2 - \sum_1^2 h_f \quad \text{---(Ec.IV.19.) Carga de Turbinado.}$$

De lo anterior, podemos concluir que para obtener potencia podemos utilizar una turbina (extrae energía), y para proporcionar potencia utilizamos una bomba (incrementa energía).

La potencia hidráulica se definió en la (Ec.IV.17.) como $P_H = \gamma Q H$ de tal forma que para una bomba la potencia se obtiene como:

$$P_f = \frac{\gamma Q H_B}{\eta} \quad \text{---(Ec.IV.20.) Potencia al freno donde } \eta \text{ es la eficiencia en } \%. \text{}$$

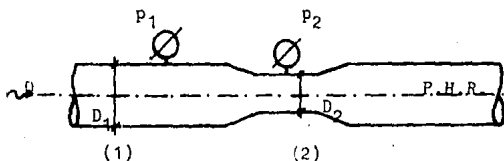
Y para una turbina:

$$P_T = \eta \gamma Q H_T \quad \text{---(Ec.IV.21.) Potencia de turbinado.}$$

IV.3.1. PROBLEMAS RESUELTOS.

Problema No.23.

Un medidor Venturí consiste en un tramo de tubo que converge a una garganta de diámetro constante y de un tramo -- gradualmente divergente. Este dispositivo se usa para calcular el gasto Q que circula en una tubería. Para la figura mostrada, calcular el gasto despreciando las pérdidas de --- energía.



Datos:

$$D_1 = 0.15 \text{ m}$$

$$D_2 = 0.10 \text{ m}$$

$$p_1 - p_2 = 0.2 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$\gamma = 900 \text{ kg/m}^3$$

Por conveniencia el plano horizontal se hace pasar por el centro de la tubería, es decir, $z_1 = z_2 = 0$.

Planteando la ecuación de la energía entre las secciones 1 y 2:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \quad \text{--- (1)}$$

Por otro lado; $p_1 - p_2 = 0.2 \text{ kg/cm}^2 = 0.2 \times 10^4 \text{ kg/m}^2$

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{0.2 \times 10^4}{900} \text{ m}$$

De la ecuación: $\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{1}{2g} (v_2^2 - v_1^2)$ --- (2)

De la ecuación de continuidad: $Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$

$$v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2}$$

Por ser sección circular: $A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4}$ y $A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4}$

Sustituyendo en la ecuación:

$$V_2 = \frac{\frac{\pi D_1^2}{4}}{\frac{\pi D_2^2}{4}} V_1 = \frac{D_1^2}{D_2^2} V_1$$

$$V_2^2 = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 V_1^2$$

Sustituyendo en la ecuación (2):

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{1}{2g} \left(\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 V_2^2 - V_1^2 \right)$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = V_1^2 \left(\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 - 1 \right)$$

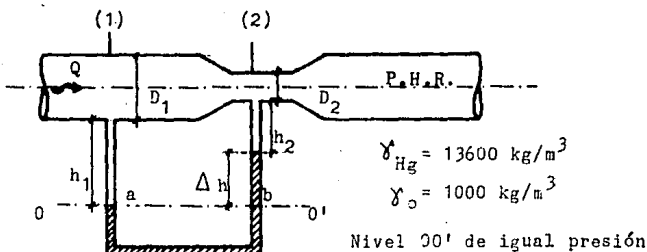
Despejando V_1 y sustituyendo valores:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(9.81) \left(\frac{0.2 \times 10^4}{900}\right)}{\left(\frac{0.15}{0.10}\right)^4 - 1}} = 3.276 \text{ m/seg.}$$

$$\text{Por continuidad: } Q = A_1 V_1 = \frac{\pi 0.15^2}{4} (3.276) = 0.057 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Problema No.24.

Determinar el gasto de agua (Q) que pasa por la contracción de la figura, despreciando pérdidas, para $D_1 = 0.50$ m
 $D_2 = 0.30$ m; la diferencia de niveles de mercurio $\Delta h_{Hg} = 600$ mm



Como en el nivel 00' las presiones son iguales: $p_a = p_b$

por otro lado: $p_a = p_1 + \gamma h_1$ $p_b = p_2 + \gamma h_2 + \gamma_{Hg} \Delta h$

Igualando: $p_1 + \gamma h_1 = p_2 + \gamma h_2 + \gamma_{Hg} \Delta h$

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = h_2 - h_1 + \frac{\gamma_{Hg}}{\gamma} \Delta h$$

Pero: $\Delta h = h_1 - h_2$, entonces:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = -\Delta h + \frac{\gamma_{Hg}}{\gamma} \Delta h$$

$$Y: \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \Delta h \left(\frac{\gamma_{Hg}}{\gamma} - 1 \right) \quad \text{--- (1)}$$

Planteando energía entre 1 y 2:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$z_1 = z_2 = 0 \text{ P.H.R.}$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} \quad \text{--- (2)}$$

Por continuidad: $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$

Despejando V_1 y por ser sección circular queda que:

$$V_1 = \frac{\frac{\pi D_2^2}{4}}{\frac{\pi D_1^2}{4}} V_2, \text{ de donde: } V_1 = V_2 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$$

Sustituyendo en (2):

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{V_2^2 - V_2^2 (D_2/D_1)^4}{2g}$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} (1 - (D_2/D_1)^4) \quad \text{--- (3)}$$

Igualando (3) con (1):

$$\frac{V_2^2}{2g} (1 - (D_2/D_1)^4) = \Delta H (\gamma_{Hg}/\gamma - 1)$$

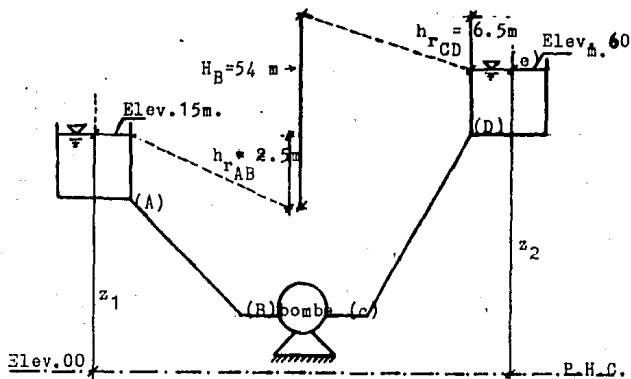
Despejando V_2 y sustituyendo valores:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2g(7.56)}{0.8704}} = 13.05 \text{ m/seg.}$$

Por continuidad: $Q = V_2 A_2 = 13.05 \left(\frac{\pi (0.3)^2}{4}\right) = 0.922 \text{ m}^3/\text{seg}$

Problema No.25.

En una red abierta la bomba (BC) debe bombear un gasto de 160 Lts./seg. de aceite cuyo peso específico es de ----- 762 kg/m^3 del depósito A al D. Suponiendo que la pérdida en tre AB es de 2.5 m y la pérdida de CD es de 6.5 m, calcular la potencia en C.V. de la bomba cuya eficiencia es del 85%. Esquematice el gradiente hidráulico.



Datos: $Q = 160 \text{ Lts/seg.} = 0.160 \text{ m}^3/\text{seg.}$, $\eta = 85 \%$

$\gamma_{\text{aceite}} = 762 \text{ kg/m}^3$, $h_{rAB} = 2.5 \text{ m}$, $h_{rCD} = 6.5 \text{ m}$

$$z_1 + H_B = z_2 + \sum \frac{2}{1} h_r$$

$$H_B = z_2 - z_1 + h_{rAB} + h_{rCD}$$

$$H_B = 60.0 \text{ m} - 15.0 \text{ m} + 2.5 \text{ m} + 6.5 \text{ m} = 54.0 \text{ m}$$

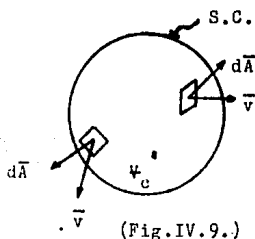
$$P_B = \frac{\gamma Q H_B}{\eta} = \frac{762 (0.160) 54}{0.85} = 7745 \text{ kg-m/seg}$$

$$1 \text{ C.V.} = 75 \text{ kg-m/seg.} \text{ Por lo que: } P_B = \frac{7745}{75} = 103 \text{ C.V.}$$

IV.4. ECUACION DE IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

Se basa en la segunda ley de Newton ($\Sigma \bar{F} = \frac{d}{dt} (M \bar{v})$). La suma de fuerzas que actúan sobre un volumen de control -- (ψ_c) es igual al cambio de la cantidad de movimiento de la masa contenida en dicho volumen de control.

$$F = \bar{F}_p \text{ (de presión) } + \bar{F}_g \text{ (cortante) } + \bar{F}_c \text{ (másicas o de cuerpo).}$$



El flujo de masa es: $\rho \bar{v} \cdot d\bar{A}$

El flujo neto de masa es:

$$\iint_{S.C.} \rho \bar{v} \cdot d\bar{A}$$

El flujo neto de la cantidad de movimiento:

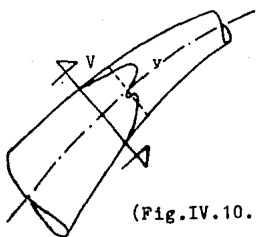
$$\frac{d}{dt} (M \bar{v}) = \iint_{S.C.} \rho \bar{v} (\bar{v} \cdot d\bar{A}) + \frac{d}{dt} \iiint_{\psi} \rho \bar{v} d\psi$$

Y de la segunda ley de Newton:

$$\bar{F}_p + \bar{F}_g + \bar{F}_c = \iint_{S.C.} \rho \bar{v}^2 d\bar{A} + \frac{d}{dt} \iiint_{\psi} \rho \bar{v} d\psi \quad \text{--- (Ec. IV.22)}$$

(Ecuación diferencial de impulso y cantidad de movimiento).

Si el vector velocidad es normal a la superficie de control, la primer integral para cada porción del volumen de control se puede escribir (considerando $\rho = \text{etc.}$) como sigue:



(Fig. IV.10.)

$$\begin{aligned} \iint_{S.C.} \bar{v} \rho (\bar{v} \cdot d\bar{A}) &= \iint_A \bar{v} \rho v dA = \rho \frac{\bar{v}^2}{\bar{v}^2} \iint \bar{v}^2 dA \\ &= \rho \bar{v} \frac{Q}{A} \iint \left(\frac{\bar{v}}{\bar{v}} \right)^2 dA \\ &= \rho \bar{v} Q \underbrace{\frac{1}{A} \iint \left(\frac{\bar{v}}{\bar{v}} \right)^2 dA}_{\beta} \end{aligned}$$

donde β es un coeficiente de corrección que toma en cuenta la distribución de velocidades, y permite trabajar con valores medios (\bar{v}).

Por otro lado, si el flujo es permanente tenemos que:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\psi_c} \bar{v} \rho d\psi = 0$$

de donde, de la (Ec. IV.22.), se tiene que:

$$\begin{aligned} \Sigma F &= \rho \Sigma \bar{v} Q \beta \\ \bar{F}_p + \bar{F}_G + \bar{F}_c &= \frac{\gamma}{g} \Sigma \bar{v} Q \quad \text{---(Ec. IV.23.)} \end{aligned}$$

Y como en el caso del coeficiente α , se puede obtener un valor aproximado cuando se hacen mediciones en varios puntos a través de incrementos (ver Fig. IV.6.), es decir:

$$\beta = \frac{1}{A} \sum \frac{v_i^2}{\bar{v}^2} A_i \quad \text{---(Ec. IV.24.)}$$

En el caso de escurrimientos, donde la distribución de velocidades se aproxima a la media, el valor de β se aproxima a 1.

En muchos casos, al obtener la resultante F debida al empuje dinámico, el problema se simplifica por el hecho de que varias fuerzas presentes pueden ejercer una influencia insignificante. Por ejemplo para un codo, las fuerzas de fricción entre el fluido y la tubería son muy pequeñas, asimismo lo es el peso del fluido; cuando se compara con la fuerza generada por el cambio del movimiento causado por el flujo.

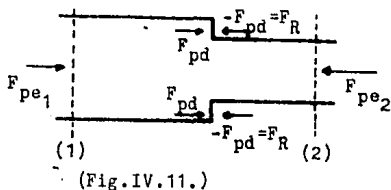
Quando se hace uso de la ecuación de impulso y cantidad de movimiento, debemos considerar lo siguiente:

- a) El volumen de control se elige de acuerdo con la conveniencia del problema y como característica debe estar lleno de flujo.
- b) La suma de fuerzas como se puede observar, son todas las aplicables a un flujo, es decir, de superficie (presión y cortante) que se aplican desde el exterior hacia el volumen de control. Las de presión que pueden ser de tipo estático (F_{pe}) y dinámico. Y las de cuerpo (peso) que se aplican en el centro de gravedad del volumen de control.

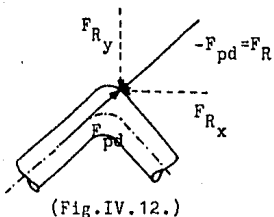
Las fuerzas de presión dinámica (F_{pd}) se presentan dentro del volumen de control cuando se tiene un cambio de dirección en las fronteras sólidas que rodean al flujo, estas fuerzas de presión son resistidas por una fuerza de igual magnitud pero de sentido contrario externa al volumen de control.

Ejemplos de fuerza de presión dinámica:

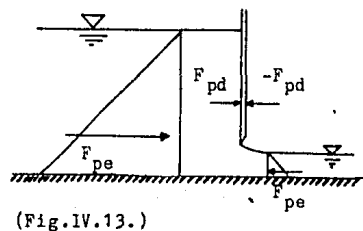
i) Contracción en un tubo:



ii) Cambio de dirección:

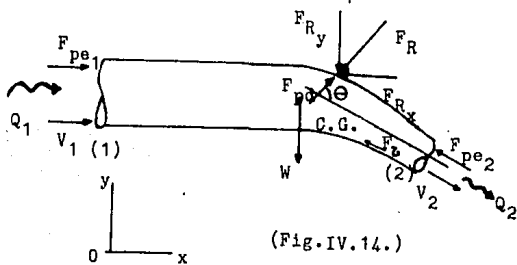


iii) Compuerta:



Si la fuerza de presión estática es positiva el sentido de F_p es hacia el volumen de control, si es ne

- gativa (vacuométrica) sale del volumen de control.
- c) Todas las fuerzas y velocidades se refieren a un sistema coordinado.
- d) La velocidad tendrá asociado un signo de acuerdo a su dirección, y el gasto por convención tendrá signo negativo (-1) si entra al volumen de control y positivo si sale del volumen de control.



Suponiendo que F_c y F_z son despreciables y $\beta=1$, la --
(Ec. IV.23.) queda:

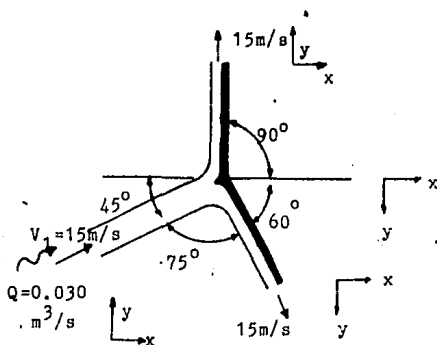
$$F_{pe1} - F_{pe2} - F_{R_x} = \frac{\gamma Q}{g} (V_{2_x} - V_{1_x}) \quad \text{---(Ec. IV.25.)}$$

$$F_{pe2} - F_{R_y} = \frac{\gamma Q}{g} (V_{2_y}) \quad \text{---(Ec. IV.26.)}$$

IV.4.1. PROBLEMAS RESUELTOS.

Problema No. 26.

El álabe fijo mostrado en la figura divide el chorro de forma que salen en cada una de las direcciones $0.015 \text{ m}^3/\text{seg}$. Para una velocidad inicial de $15 \text{ m}/\text{seg}$, determinar los valores de las componentes en las direcciones "X" y "Y" de la fuerza necesaria para mantener el álabe en equilibrio.



$$F = M a$$

$$F_x = \frac{\gamma}{g} \left(\sum_1^3 Q V_x \right)$$

$$F_x = \frac{\gamma}{g} (-Q_1 V_{1x} + Q_2 V_{2x} + Q_3 V_{3x}) \quad ; \quad V_{3x} = 0$$

$$F_x = \frac{\gamma}{g} (-0.030 (15 \cos 45^\circ) + 0.015 (15 \cos 60^\circ) + 0)$$

$$F_x = -20.9 \text{ kg.}$$

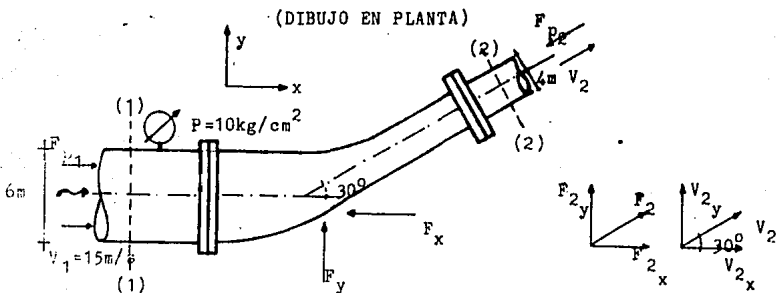
$$F_y = \frac{\gamma}{g} (-Q_1 V_{1y} - Q_2 V_{2y} + Q_3 V_{3y})$$

$$F_y = \frac{\gamma}{g} (-0.030 (15 \sin 45^\circ) - 0.015 (15 \sin 60^\circ) + 0.015(15))$$

$$F_y = -29.36 \text{ kg.}$$

Problema No.27.

Una tubería horizontal de 6.0 m de diámetro tiene un codo reductor de 30° conectado a una tubería de 4.0 m de diámetro. La presión a la entrada es de 10 kg/cm^2 con una velocidad de 15.0 m/seg . Despreciando el peso dentro del codo, de terminar las componentes de la fuerza debida al empuje dinámico que han de soportar los anclajes de dicho codo. Desprecie la fricción (no hay pérdidas).



Planteando impulso y cantidad de movimiento en el eje - "x" de 1 a 2 :

$$\sum F_x = \frac{\gamma}{g} Q (\Delta V)$$

Debido a las condiciones del problema tendremos:

$$F_{p1} - F_x - F_{p2x} = \frac{\gamma}{g} Q (v_2 \cos 30^\circ - v_1) \quad \text{---(1)}$$

$$F_{p1x} = P_1 A_1 \quad ; \quad F_{p2x} = P_2 \cos 30^\circ A_2$$

Sustituyendo en (1):

$$P_1 A_1 - F_x - (P_2 \cos 30^\circ A_2) = \frac{\gamma}{g} Q (v_2 \cos 30^\circ - v_1) \quad \text{--- (2)}$$

Por continuidad: $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$ $Q = 15 \frac{\pi (6)^2}{4} = 424.12 \frac{\text{m}^3}{\text{seg}}$

$$Q = V_2 A_2 \quad V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{424.12}{\frac{\pi (4)^2}{4}} = 33.75 \text{ m/seg}$$

Aplicando energía de 1 a 2: $z_1 = z_2 = 0$ ya que el codo es horizontal, y hacemos coincidir nuestro P.H.R. con el eje de la tubería, quedando que:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \quad \text{--- (3)}$$

$$P_1 = 10 \text{ kg/cm}^2 = 100\,000 \text{ kg/m}^2 \quad ; \quad \gamma = 1000 \text{ kg/m}^3 \quad ; \quad \frac{P_1}{\gamma} = 100 \text{ m}$$

Sustituyendo valores en (3):

$$\frac{P_2}{\gamma} = 100 + \frac{(15)^2 - (33.75)^2}{19.62} = 53.4 \text{ m}$$

$$P_2 = 53\,400 \text{ kg/m}^2$$

Sustituyendo valores en (2):

$$F_x = (100\,000 \frac{\pi (6)^2}{4} - (53\,400 \frac{\pi (4)^2}{4} \cos 30^\circ) - \frac{1000}{9.81} (424.12) [(33.75 \cos 30^\circ - 15)]$$

$$F_x = 1631.1 \text{ Tons.}$$

Planteando impulso y cantidad de movimiento en el eje "Y" de 1 a 2:

$$-F_{P_2 y} + F_y = \frac{\gamma}{g} Q (0 + v_{2y}) \quad \text{--- (4)} \quad ; \quad v_{2y} = v_2 \sin 30^\circ$$

$$-P_2 A_2 \sin 30^\circ + F_y = \frac{\gamma}{g} Q v_2 \sin 30^\circ$$

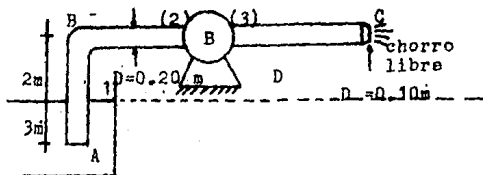
$$F_y = P_2 A_2 \text{ sen } 30^\circ + \frac{\gamma}{g} Q V_2 \text{ sen } 30^\circ$$

$$F_y = 53400 \frac{\pi(4)^2}{4} \text{ sen } 30^\circ + \frac{1000}{9.81} (424.12)(33.75 \text{ sen } 30^\circ)$$

$$F_y = 1\,065\,086 \text{ kg} = 1\,065.1 \text{ tons.}$$

Problema No.28.

Una bomba extrae agua de un recipiente, como se muestra en la figura. La bomba añade al flujo 12 C.V. ¿Cuál es la fuerza horizontal que desarrolla el flujo sobre el soporte D?



$$P = 12 \text{ C.V.} = Q H_B ; \frac{75 (12)}{\gamma H} = Q ; H_B = \frac{0.9}{Q} \quad \text{--- (A)}$$

a) Aplicando energía de (1) a (C)

$$0 + 0 + 0 + H_B = 2 + 0 + \frac{v_C^2}{2g}$$

$$H_B = 2 + \frac{Q^2}{A^2 2g} = 2 + \frac{Q^2}{(0.00785)^2 2g} \quad \text{--- (B)}$$

Resolviendo simultaneamente:

Q	H_B	H_B
0.1	9 #	10.27
0.09	10 #	8.69
0.095	9.47 =	9.46

Por lo tanto: $Q = 0.095 \text{ m}^3/\text{seg}$

$H_B = 9.467 \text{ m}$

$$V_{\text{chorro}} = \frac{Q}{A_{\text{Ch}}} = \frac{0.095}{0.00785} = 12.10 \text{ m/seg.}$$

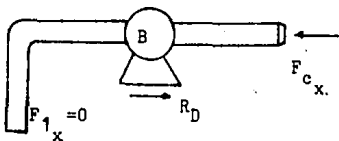
$$V_{A,B,2,3} = \frac{Q}{A_{\text{tubo}}} = \frac{0.095}{0.0314} = 3.02 \text{ m/seg.}$$

Aplicando impulso y cantidad de movimiento (1)-(C)

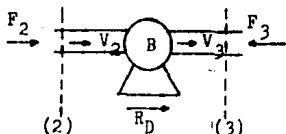
$$F = M a \quad (\text{en direcci3n X}).$$

$$F_{1X} - F_{CX} + R_D = \frac{\gamma}{g} Q (V_{CX} - V_X)$$

$$R_D = \frac{1000}{9.81} (0.095)(12.1) = 117.17 \text{ kg.}$$



b)



$$F_{CX} = 0 = A_X P_X$$

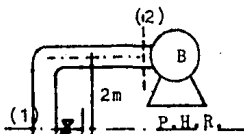
Ya que $P_X = 0$ porque descarga a condiciones atmosféricas.

Aplicando impulso y cantidad de movimiento de (2) a (3):

$$F_2 + R_D - F_3 = \rho Q (V_3 - V_2) \quad \text{--- (C)} \quad V_3 = V_2$$

Planteando energa de (1) a (2):

$$0 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} ; \quad \frac{p_2}{\gamma} = -2 - \frac{(3.022)^2}{19.62} ; \quad p_2 = -2466 \text{ kg/m}^2$$



Aplicando energa de (1) a (3):

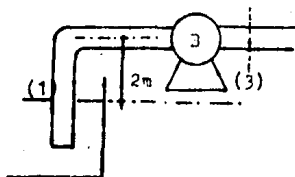
$$h_B = 2 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} ; \quad \frac{p_3}{\gamma} = 9.467 - 2 - \frac{3.02^2}{19.62} ; \quad p_3 = 7002 \text{ kg/m}^2$$

Sustituyendo en (C):

$$p_2 A_2 + R_D - p_3 A_3 = \frac{\gamma}{g} Q (0)$$

$$-2466(0.0314) + R_D - 7002(0.0314) = 0$$

$$R_D = 297.29 \text{ kg.}$$



Si comparamos: $117 \neq 297.29$ Debido a que el codo soporta Δm suje dinámico y el chiflón también.

Ahora aplicando impulso y cantidad de movimiento de (1) a (B):

$$\text{En X: } F_X + R_{CX} - R_B = \frac{\gamma}{g} Q(v_{2X} - v_{1X})$$

$$P_{CX} - P_B A_B = \frac{1000}{9.81} (0.095)(3.026) \quad \text{---(D)}$$

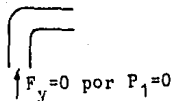
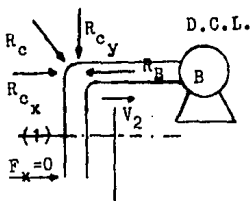
Aplicando energía de (1) a (B):

$$0 = 2 + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g}$$

$$\frac{P_B}{\gamma} = -2 - \frac{(0.095)^2}{19.62 (0.0314)^2} ; P_B = -2466 \text{ kg/m}^2$$

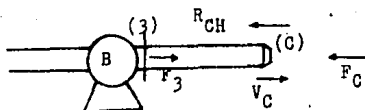
$$\text{Sustituyendo en (D): } R_{CX} - (-2466(0.0314)) = 29.32$$

$$R_{CX} = -48.112 \text{ kg}$$



$$\text{En dirección Y: } R_{CY} = \rho Q(0 - 0) ; R_{CY} = 0$$

Ahora aplicando impulso y cantidad de movimiento de (3) a (C):



$$F_3 - F_C - R_{Ch} = \frac{\gamma}{g} Q (V_C - V_3)$$

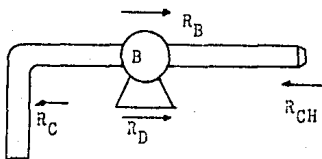
$$P_3 A_3 - R_{Ch} = \frac{1000}{9.81} (0.095)(12.1 - 3.02)$$

Del inciso b):

$$P_3 A_3 = 7001 (0.0314) = 219.94$$

$$-R_{Ch} = 87.932 - 219.94 = -132.00 \text{ kg.}$$

$$R_{Ch} = 132.00 \text{ kg.}$$



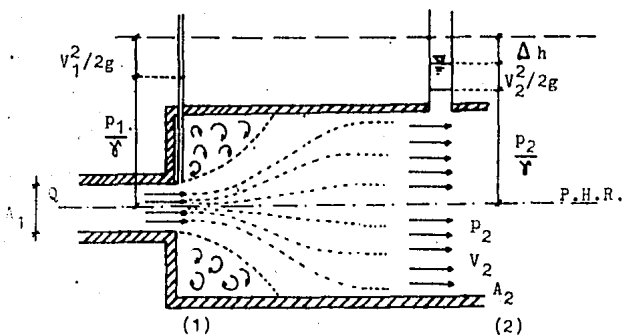
$$R_D = R_B + R_C + R_{Ch}$$

$$R_D = R_B - R_{Ch} - R_C ; R_D = 297.41 - 48.112 - 132$$

$R_D = 117 \text{ kg}$ por lo tanto, quiere decir, que cambia el impulso y la cantidad de movimiento.

IV.5. PERDIDA DE ENERGIA EN EL FLUJO DE LIQUIDOS.

En este subtema se evaluará la pérdida de energía debida a una ampliación o reducción brusca. Lo anterior se puede obtener empleando las tres ecuaciones fundamentales como sigue:



(Fig. IV.15.) Ampliación brusca de la sección.

Aplicando la ecuación de impulso y cantidad de movimiento:

$$A_2 (p_1 - p_2) = \frac{\gamma Q}{g} (v_2 - v_1) \quad \text{---(1)}$$

Por continuidad: $Q = v_2 A_2$

Sustituyendo Q y dividiendo entre γ la ecuación (1) queda:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{v_2}{g} (v_2 - v_1) \quad \text{---(2)}$$

La zona (1) del volumen de control está considerada dentro de la ampliación.

Aplicando la ecuación de la energía entre 1 y 2 :

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta h \quad \Delta h = \text{pérdida por ampliación.}$$

$$\text{Acomodando: } \frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \Delta h \quad \text{---(3)}$$

Igualando las ecuaciones (2) y (3):

$$\Delta h + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \frac{V_2}{g} (V_2 - V_1)$$

$$\Delta h = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_2 V_1}{g} - \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}$$

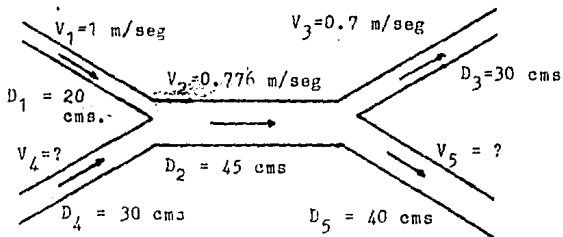
$$\Delta h = \frac{\frac{g}{2V_2^2} - \frac{g}{2V_2V_1} - \frac{2g}{2g} V_2^2 - V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2 - 2V_2V_1 - V_1^2}{2g}$$

$$\Delta h = \frac{(V_2 - V_1)^2}{2g} \quad \text{---(Ec. IC.27.)}$$

IV.6. PROBLEMAS PROPUESTOS.

- 1.- El sistema mostrado esta formado por dos tubos de 20 y 40 cms. respectivamente que convergen a uno de 45 cms.. Este de 45 cms se bifurca en dos de 40 cms. y 30 cms. de diámetro. Si la velocidad en el tramo de 20 cms. es de 1 m/seg. y en el de 45 cms. es de 0.776 m/seg; calcular el gasto que circula en cada tramo así como las velocidades correspondientes. Despreciar las pérdidas. $V_3=0.7$ m/seg.

Solución: $Q_{\text{Total}} = 0.1234 \text{ m}^3/\text{seg.}$
 $Q_1 = 0.0314 \text{ m}^3/\text{seg.}, V_1 = 1 \text{ m/seg.}$
 $Q_2 = 0.1234 \text{ m}^3/\text{seg.}, V_2 = 0.776 \text{ m/seg.}$
 $Q_3 = 0.0495 \text{ m}^3/\text{seg.}, V_3 = 0.70 \text{ m/seg.}$
 $Q_4 = 0.092 \text{ m}^3/\text{seg.}, V_4 = 1.30 \text{ m/seg.}$
 $Q_5 = 0.0739 \text{ m}^3/\text{seg.}, V_5 = 0.588 \text{ m/seg.}$



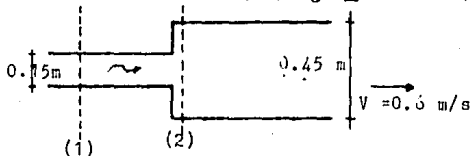
- 2.- Una tubería de 0.15 m aumenta repentinamente a un diámetro de 0.45 m y la velocidad en el diámetro de 0.45 m es de 0.60 m/seg. Calcular la carga perdida en m.

¿Qué diferencia de presión habrá en los 2 tubos cerca del agrandamiento? ¿Cuál sería la carga perdida si la velocidad en la tubería de 0.45 m fuera de 0.15 m/seg.?

Solución. $\Delta h = 1.18 \text{ m}$

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = -0.293 \text{ m}$$

Para $V = 0.15 \text{ m/seg. } \Delta h = 0.074 \text{ m}$

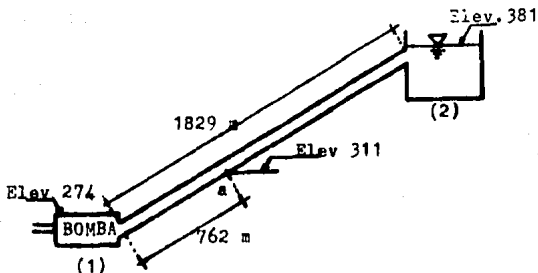


- 3.- Una bomba a la elevación 274 bombea un gasto de $0.045 \text{ m}^3/\text{seg}$ a través de una línea de tubería de 0.15 m de diámetro y 1829 m de longitud hasta un depósito de almacenamiento, cuyo nivel está a la elevación 381. ¿Qué presión se encontrará en la tubería en un punto en donde la elevación es 311 m arriba del plano de referencia y la distancia (medida sobre la tubería) desde la bomba es de 762 m? Considerar $f = 0.0225$ y la pérdida es:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

Solución: $p = 123\ 280 \text{ kg/m}^2$

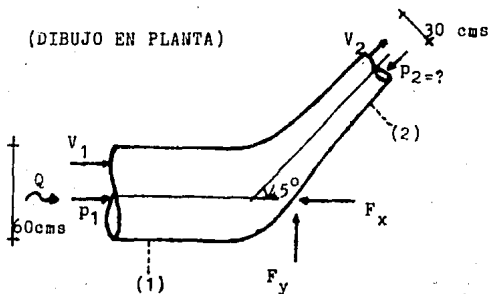
Figura problema 3.



- 4.- Por un codo reductor de 45° , de 60 cm de diámetro en la sección (1) y 30 cm en la sección (2), circulan $0.45 \text{ m}^3/\text{s}$ de agua con una presión de 1.5 kg/cm^2 en la sección (1). Despreciando cualquier pérdida en el codo, calcular la fuerza ejercida por el agua sobre el codo reductor.

Solución: $F = 3559.42 \text{ kg}$ (hacia la derecha y abajo).

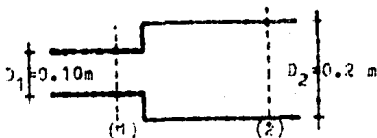
$$\theta_x = 13.97^\circ$$



- 5.- Una línea de tubería plana es agrandada bruscamente de un diámetro de 0.10 m a uno de 0.20 m. Si la velocidad en la tubería de 0.10 m es de 5 m/seg. ¿Cuánta energía se pierde en el agrandamiento?. Si la carga de presión en la tubería de 0.10 m es de 15.25 m ¿Qué valor tendrá en la tubería de 0.20 m ?.

Solución: $\Delta h = 0.716$ m

$$\frac{P_2}{\gamma} = 15.72 \text{ m}$$



$$V_1 = 5 \text{ m/seg}$$

C A P I T U L O - V

ORIFICIOS, VERTEDORES Y COMPUERTAS.

V.1. ECUACION GENERAL DE ORIFICIOS.

V.2. ECUACION GENERAL DE VERTEDORES.

V.3. ECUACION GENERAL DE UNA COMPUERTA.

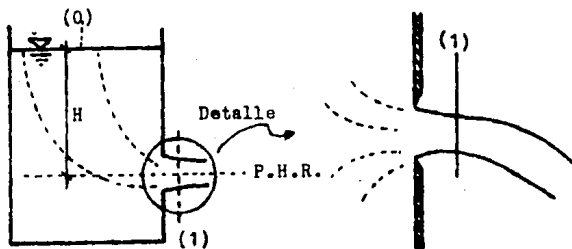
V.4. PROBLEMAS PROPUESTOS.

V.1. ECUACION GENERAL DE ORIFICIOS.

El término orificio se aplica a cualquier abertura que tiene un perímetro cerrado y que se hace en un muro o división. Los orificios intervienen en el diseño de muchas estructuras hidráulicas.

Consideremos un recipiente que contiene un líquido, y en cuya pared lateral se tiene un orificio con un área (A). A través del orificio circula un gasto (Q) cuya magnitud se desea conocer; además se supone que el nivel del líquido en el recipiente permanece constante debido a la entrada de otro gasto que es igual al que sale o porque el volumen sea muy grande.

Conforme la corriente sale del orificio, se contrae -- gradualmente para formar un chorro cuya área de sección --- transversal es menor que la del orificio. Esto se presenta en el caso de orificios de pared delgada, es decir, el único contacto entre el líquido y la pared es a través de una arista afilada como se muestra en la (Fig.V.1.)



(Fig.V.1.) Orificio de pared delgada

La contracción se debe, a que las partículas del líquido cercanas al orificio se mueven en dirección al centro del mismo de tal forma que por efecto de su inercia, la deflexión brusca que sufren produce la contracción; la cual se completa hasta la sección 1 (sección contraída) y en este punto se considera que los recorridos de la corriente son paralelos y la presión es la atmosférica, cayendo entonces libremente todas las partículas bajo la acción de la gravedad.

En la sección contraída las velocidades de las partículas son prácticamente uniformes y con un valor medio V .

Al aplicar la ecuación de Bernoulli entre las secciones 0 y 1 de la (Fig.V.1.) y haciendo coincidir el plano de referencia en el centro de gravedad del orificio, además de considerar despreciable la carga de velocidad en la sección 0, se tiene:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}$$

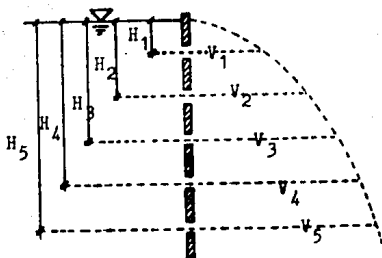
$$\text{Donde: } \frac{p_0}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} = 0 ; \quad \frac{v_0^2}{2g} \approx 0$$

$$H_0 = z_0 = H$$

$$H_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} ; \quad H = \frac{v^2}{2g}$$

Por lo que: $V = \sqrt{2gH}$ --- (Ec.V.1.) Ecuación de Torricelli

Esta ecuación indica que la velocidad sigue una ley parabólica con la profundidad del orificio (Fig.V.2.)



(Fig.V.2.) Variación de la velocidad con respecto a la profundidad.

De la (Fig.V.2.) es obvio que la variación de la velocidad a través de la sección transversal del chorro será mayor conforme aumenta H , y para cargas muy pequeñas el valor medio de la velocidad no estará dado por la (Ec.V.1.), - la cual es válida cuando $H > 3D$.

Experimentalmente se ha obtenido que la velocidad real está dada por la ecuación:

$$V = C_v \sqrt{2gH} \quad \text{---(Ec.V.2.)}$$

donde C_v es el coeficiente de velocidad sin dimensiones y ligeramente menor a la unidad, y que toma en cuenta la pérdida de energía $\Delta h_{r_{0-1}}$ y el hecho de considerar a $\alpha_1 = 1$.

Una forma de obtener este coeficiente es por medio de una serie de mediciones en el recorrido del chorro. Si una partícula sale de un orificio con una velocidad V , y en (t) segundos se encuentra en el punto (m) (ver (Fig.V.3.)) se tiene que:

$$x = Vt \quad \text{---(a)} \quad \text{y} \quad y = \frac{g t^2}{2} \quad \text{---(b)} \quad \text{(Cuerpo en caída libre).}$$

el centro de las coordenadas (x,y) es el centro de la sección contraída.

Despejando t de la ecuación (b): $t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$

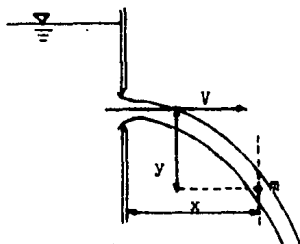
Sustituyendo en (a): $V = \frac{x}{\sqrt{\frac{2y}{g}}}$

Elevando al cuadrado y despejando x queda que:

$$x^2 = \frac{2V^2}{g} y \quad \text{---(Ec.V.3.) Ecuación de una parábola con vértice en el origen.}$$

Si las coordenadas (x, y) de un punto en el chorro se miden, la ecuación (Ec.V.3.) puede utilizarse para calcular la velocidad real del escurrimiento a través del orificio. El valor del coeficiente C_v es entonces la relación entre ésta velocidad y la $V = \sqrt{2gH}$

$$C_v = \frac{\sqrt{\frac{2gH}{x^2 y}}}{\sqrt{2gH}}$$



(Fig.V.3.)

Asimismo se puede determinar el área de la sección contraída a partir del área del orificio por medio de un coeficiente de contracción (C_c) adimensional de la siguiente forma:

$$A_c = C_c A$$

$$C_c = A_c / A$$

Donde:

A_c = Área contraída.

C_c = Coeficiente de contracción.

A = Área del orificio.

El área contraída se puede obtener mediante medición directa en el chorro.

Y a partir de la ecuación de continuidad $Q = VA$ y considerando la (Ec.V.2.) tenemos:

$$Q = C_v C_c A \sqrt{2gH} \quad \text{---(Ec.V.4.)}$$

Dicho de otra forma, si consideramos un coeficiente de descarga (C_D) que se obtiene como: $C_D = C_v C_c$ --- (Ec.V.5.)

La ecuación general para obtener el gasto que circula por un orificio de pared delgada es:

$$Q = C_D A \sqrt{2gH} \quad \text{---(Ec.V.6.)}$$

El coeficiente de descarga (C_D) se obtiene dejandó descargar al orificio durante un periodo conocido de tiempo y midiendo por volumen o por peso la cantidad de líquido que haya circulado por el orificio.

Como ya se mencionó, los coeficientes (C_c, C_D y C_v) se obtienen en forma experimental. De acuerdo con los resultados de diferentes investigadores, para orificios circulares la variación de dichos coeficientes se muestra en la (Fig.V.4.) donde se considera que mediante un análisis dimensional los coeficientes dependen exclusivamente del número de Reynolds (R_e) que se calcula como sigue:

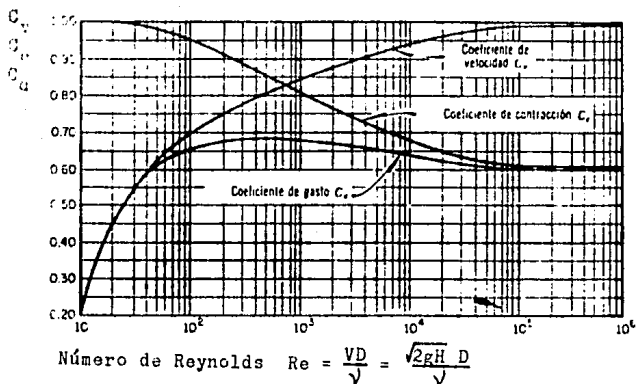
$$R_e = \frac{V D}{\nu} \quad \text{--- (Ec.V.7.)}$$

Donde:

ν = Viscosidad cinemática del líquido.

D = Diámetro del orificio

De el número de Reynolds se comentará en el CAP. VI.



(Fig.V.4.) Variación de los coeficientes de velocidad, contracción y gasto, con el número de Reynolds en un orificio circular.

Pérdida de energía en orificios (h_{r_o}) .- Planteando la ecuación de la energía entre 0 y 1 de la (Fig.V.5.) se tiene que:

$$H = \frac{v^2}{2g} + h_r \quad \text{--- (a)}$$

De la (Ec.V.2.) tenemos que:

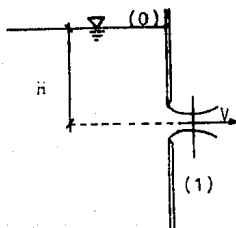
$$v = C_v \sqrt{2gH}$$

$$\text{Despejando: } H = \frac{v^2}{2gC_v^2}$$

Y sustituyendo en la ecuación (a):

$$\frac{v^2}{2gC_v^2} = \frac{v^2}{2g} + h_r$$

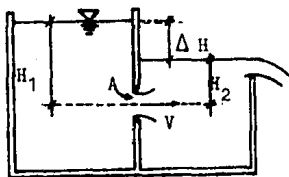
$$\text{De donde: } h_r = \left(\frac{1}{C_v^2} - 1 \right) \frac{v^2}{2g} \quad \text{--- (Ec.V.8.)}$$



(Fig.V.5.) Pérdida de energía en un orificio.

En donde el término $\left(\frac{1}{C_v^2} - 1\right)$ representa el coeficiente de pérdida y depende exclusivamente del coeficiente de velocidad (C_v).

Orificios con descarga sumergida.- Si un orificio descarga totalmente por abajo de un nivel de agua, se dice que dicho orificio está sumergido o que la descarga es ahogada (Fig.V.6.).



(Fig.V.6.) Orificio con descarga sumergida o ahogada.

Se puede demostrar que la velocidad es igual a :

$V = C_v \sqrt{2g\Delta H}$ en donde ΔH es la diferencia entre los niveles del agua. Además de considerar que se tiene la presión atmosférica en ambas superficies. Por lo que al sustituir ésta velocidad en la ecuación general de orificios se tiene:

$$Q = C_D A \sqrt{2g\Delta H} \quad \text{---(Ec.V.9.)}$$

Se recomienda usar el mismo coeficiente de descarga que el de un orificio con descarga libre, con: $Re = \frac{\sqrt{2g\Delta H} D}{\nu}$

Orificios de pared gruesa.- El tubo corto de la ----- (Fig.V.7.) puede considerarse como un orificio en una pared de espesor considerable. Como se observa, el chorro de salida llena completamente la boca del tubo y, en consecuencia, el coeficiente de contracción es la unidad ($C_c=1$). En el interior del tubo, en el punto (m), la corriente es contraída

al pasar por la orilla, pero se expande pronto para llenar la totalidad del tubo. Entre (m) y la sección donde la expansión es completa, ocurre una disminución brusca de la velocidad que va acompañada por una turbulencia excesiva y --- fuerte pérdida de energía.

Como el tubo es un orificio, la velocidad de salida es

$$V = C_v \sqrt{2gH}.$$

Experimentalmente se ha encontrado que $C_v = 0.82$ cuando $e/D \leq 3$. Si $e/D > 3$ se considera que es un conducto a presión (tubería) y no un orificio, ya que a partir de $e/D > 3$, los efectos de fricción se deben tomar en cuenta.

Como $C_c = 1$ en la descarga:

la ecuación del gasto es la misma que la general (Ec.V.5.) solo que ahora $C_D = C_v = 0.82$, es decir:

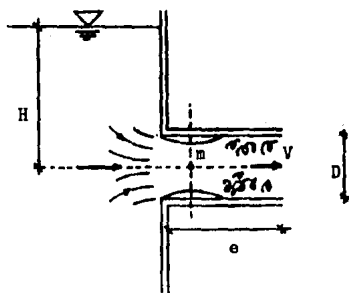
$$Q = 0.82 A \sqrt{2gH} \quad \text{---(Ec.V.10.)}$$

Por otro lado la pérdida de energía a partir de la --- (Ec.V.7.) es ahora:

$$h_{r_o} = \left(\frac{1}{(0.82)^2} - 1 \right) \frac{V^2}{2g}$$

$$h_{r_o} = 0.49 \frac{V^2}{2g} \quad \text{---(Ec.V.11.)}$$

Para determinar los coeficientes C_D de orificios de pared gruesa más comunes en la práctica, se recomienda utilizar la tabla(6.2) de la (Ref. No.2.)

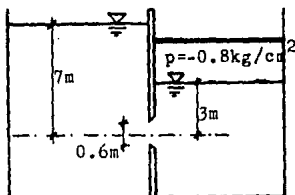


(Fig.V.7.) Orificio de pared gruesa.

V.1.1. PROBLEMAS RESUELTOS.

Problema No. 29.

Fluye agua de un depósito a superficie libre a otro depósito cerrado a través de un orificio de 60 cms. de diámetro. El segundo depósito se encuentra a una presión de vacío de $p = -0.8 \text{ kg/cm}^2$. Calcular el gasto con la diferencia de niveles que se muestra en la figura (suponer que el nivel no varía en ambos lados). $C_D = 0.6$.



$$H_1 = 7 \text{ m}$$

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{-8000 \text{ kg/m}^2}{1000 \text{ kg/m}^3} = -8.0 \text{ m}$$

$$H_2 = -\frac{p}{\gamma} + 3 = -8.0 + 3 = -5.0 \text{ m}$$

$$\Delta H = H_1 - H_2 = 7 - (-5) = 12 \text{ m}$$

$$A = \frac{\pi (0.6)^2}{4} = 0.28 \text{ m}^2$$

$$Q = C_D A \sqrt{2 g \Delta H} = 0.6(0.28) \sqrt{2(9.81)12} = 2.57 \text{ m}^3/\text{seg}$$

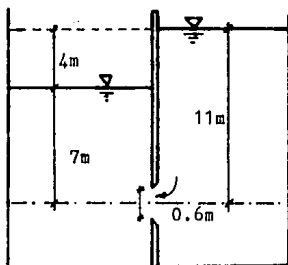
Si en lugar de $p = -0.8 \text{ kg/cm}^2$ tenemos $p = 0.8 \text{ kg/cm}^2$ - vemos que cambiaría el sentido del flujo.

Ya que: $H_1 = 7 \text{ m}$

$$H_2 = 8 \text{ m} + 3 \text{ m} = 11 \text{ m}$$

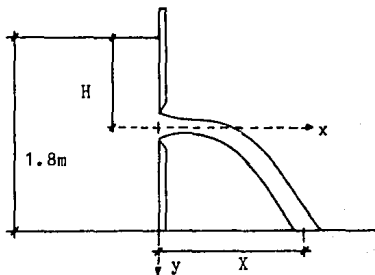
$$\Delta H = 7.0 - 3.0 - 8.0 = -4.0 \text{ m}$$

$$Q = 0.6 (0.28) \sqrt{2(9.81) 4.0} = 1.48 \text{ m}^3/\text{seg.}$$



Problema No. 30.

En un tanque de 1.80 m de altura a la superficie libre se practica un orificio sobre una de las paredes verticales a una profundidad H a partir de la superficie libre. Encontrar el valor de H para que el chorro tenga el máximo alcance X.



$$V_x = \frac{X}{t} \quad \text{---(a)}$$

$$Y = \frac{g t^2}{2} \quad \text{---(b)}$$

$$\text{De (a): } t = \frac{X}{V_x}$$

$$\text{Sustituyendo en (b): } Y = \frac{g X^2}{V_x^2 2} \quad \text{---(c)}$$

$$Y = 1.8 - H \quad \text{. Sustituyendo en (c):}$$

$$1.8 - H = \frac{g X^2}{V_x^2 2} \quad \text{---(d)}$$

$$V = C_v \sqrt{2gH} \quad \text{y} \quad V^2 = C_v^2 (2gH)$$

$$\text{Sustituyendo en (d): } 1.8 - H = \frac{g X^2}{4 g C_v^2 H}$$

Despejando X: $X = 2 C_v \sqrt{1.8 H - H^2}$

Derivando para maximizar queda que:

$$\frac{dX}{dH} = C_v (1.80 - H^2)^{-1/2} (1.8 - 2H) = 0$$

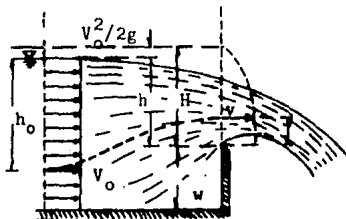
$$1.8 - 2H = 0$$

$$H = 0.9 \text{ m}$$

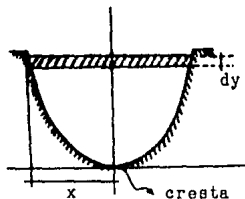
V.2. ECUACION GENERAL DE UN VERTEDEDOR DE PARED DELGADA.

Cuando la descarga del líquido se efectúa por encima de un muro o una placa y a superficie libre, la estructura hidráulica en la que ocurre se llama vertedor; éste puede presentar diferentes formas según las finalidades a que se destine. Cuando la descarga se efectúa sobre una placa con perfil de cualquier forma, pero con arista aguda, el vertedor se llama de pared delgada; cuando el contacto entre la pared y la lámina vertiente es más bien toda una superficie, el vertedor es de pared gruesa. Los dos se pueden utilizar como dispositivos de aforo.

El punto o arista más bajo de la pared en contacto con la lámina vertiente, se conoce como cresta del vertedor; el desnivel entre la superficie libre, aguas arriba del vertedor y su cresta, se conoce como carga. (Fig.V.8.)



(Fig.V.8.a.)



(Fig.V.8.b.)

De la (Fig.V.8.a.) aplicando Bernoulli entre 0 y 1:

$$H = h + \frac{v_0^2}{2g} = y + \frac{v^2}{2g} \quad ; \quad V_0 = \text{Velocidad de llegada.}$$

y haciendo $H \doteq h$: $h = y + \frac{v^2}{2g}$. Si w es muy grande lo que provoca que $\frac{v_0}{2g} \doteq 0$. Por lo tanto: $v = \sqrt{2g(H-y)}$

por otro lado, de la sección transversal(Fig.V.8 .b.)

$$dA = 2 x dy \quad \text{siendo } x = f(y)$$

por lo que el gasto diferencial es:

$$dQ = v dA = \sqrt{2g(H-y)} dy 2x$$

y al integrar obtenemos el gasto total:

$$Q = \mu \int_0^h 2x \sqrt{2g(H-y)} dy$$

Donde μ es el coeficiente de descarga o gasto:

$$Q = 2 \sqrt{2g} \mu \int_0^h x \sqrt{H-y} dy \quad \text{---(Ec.V.12.)}$$

(Ecuación general para obtener la descarga de un vertedor)

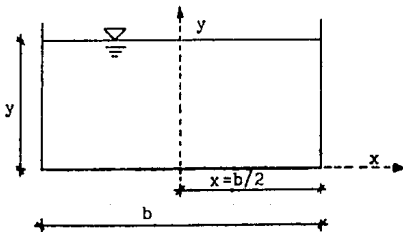
La (Ec.V.12.) es posible de integrar si se conoce la forma del vertedor.

El coeficiente μ que aparece en la ecuación es de tipo experimental y se aproxima a 0.6. Asimismo, se considera que μ incluye la pérdida de energía, la cual se omite al hacer la deducción.

Vertedor rectangular sin contracción.- La ecuación de gasto para un vertedor rectangular sin contracción es de la -- (Fig.V. 9.):

$$Q = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \mu b h^{3/2}$$

(Fig.V. 9.) Vertedor Rectangular.

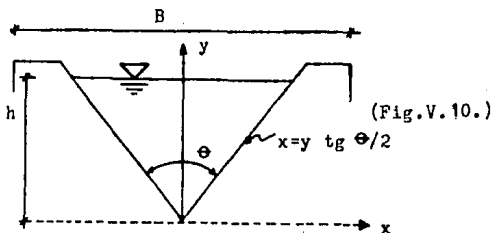


En algunas partes se acostumbra tener un coeficiente --
 $C = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \mu$ y cuyas unidades son: $[L^{1/2} T^{-1}]$.

Para determinar el valor de μ se pueden utilizar las --
 fórmulas experimentales de la tabla (7.1) de la (Ref.No.2.)
 quedando la ecuación como:

$$Q = C b h^{3/2} \quad \text{---(Ec.V.13.) Ecuación de gasto para un vertedor rectangular sin contracción.}$$

Vertedor triangular.- La ecuación de gasto para un ver--
 tedor triangular (Fig.V.10.) es:



$$Q = \frac{8}{15} \sqrt{2g} \operatorname{tg}(\theta/2) \mu h^{5/2}$$

Y como en el caso anterior, si hacemos:

$$C = \frac{8}{15} \sqrt{2g} \mu \operatorname{tg}(\theta/2), \text{ es decir, } C \text{ depende del valor de}$$

θ, μ y g . La ecuación queda:

$$Q = C h^{5/2} \quad \text{---(Ec.V.14.) Ecuación de gasto para un ver--} \\ \text{tedor triangular.}$$

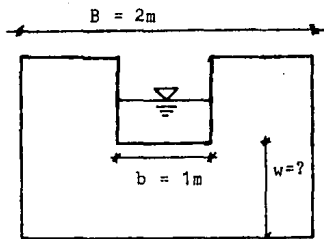
Para determinar el valor de μ ó C se pueden utilizar las
 fórmulas experimentales de la tabla 7.2 de la (Ref.No. 2.).

Para otras geometrías se debe integrar la (Ec.V.12.) tal
 como se hizo para llegar a las expresiones (Ec.V.13. y 14.)

V.2.1. PROBLEMAS RESUELTOS.

Problema No.31.

Un vertedor rectangular de pared delgada, con contracciones laterales, tiene una longitud de 1 m. a) ¿A qué altura (w) se debe colocar en un canal, de ancho $B=2$ m, para conseguir un tirante en el canal de llegada $h+w=2$ m y un gasto de $Q = 0.100 \text{ m}^3/\text{seg}$?. b) ¿Cuál sería la carga sobre un vertedor triangular con $\Theta=90^\circ$ para descargar el mismo gasto?



a) Para vertedor rectangular de pared delgada:

$$Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} \mu h^{3/2}$$

$$h = \left[\frac{3Q}{2 b \sqrt{2g} \mu} \right]^{2/3} \quad \text{--- (1)}$$

De la tabla 7.1 de la (Ref.No. 2) aplicando Hamilton-Smith para calcular μ :

$$\mu = 0.616 \left(1 - \frac{b}{10B} \right) = 0.616 \left(1 - \frac{1}{20} \right) = 0.59$$

$$w = ? ; h+w=2 \text{ m} \text{ y } Q = 0.100 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Substituyendo en (1):

$$h = \left[\frac{3(0.100)}{2(1) \sqrt{2g} (0.59)} \right]^{2/3} \quad h = 0.1488 \text{ m.}$$

$$\text{Cada: } h+w = 2 \text{ m} \quad w = 2 - h = 2 - 0.1488 ; w = 1.8512 \text{ m}$$

b) Para un vertedor triangular con $\theta = 90^\circ$

$$Q = \frac{8}{15} \sqrt{2g} \operatorname{tg}(\theta/2) \mu h^{5/2}$$

$$h = \left[\frac{15 Q}{8 \sqrt{2g} \operatorname{tg}(\theta/2) \mu} \right]^{2/5}$$

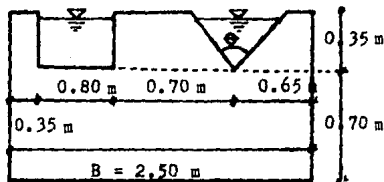
De la tabla 7.2 de la (Ref.No.2.): $\mu = 0.58$

$$h = \left[\frac{15 (0.100)}{8 \sqrt{2g} \operatorname{tg} 45^\circ (0.58)} \right]^{2/5}$$

$$h = 0.351 \text{ m}$$

Problema No. 32.

En un canal de 2.5 m de ancho se colocan 2 vertedores de pared delgada; uno rectangular de 0.80 m de longitud de cresta y otro triangular con $\phi = 60^\circ$, practicados sobre la misma placa. Determinar el gasto total vertido con una carga común de 0.35 m, si la altura de la cresta al fondo es de 0.70 m.



$$Q_{\text{total}} = Q_R + Q_T$$

$$Q_R = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \mu b h^{3/2}$$

$$Q_T = \frac{8}{15} \sqrt{2g} \text{tg}(\phi/2) \mu h^{5/2}$$

Coefficientes de la tabla 7.1 y 7.2 de la (Ref.No.2.)

$$\mu_R = 0.616 \left(1 - \frac{0.80}{1.50(10)} \right) = 0.5831 \quad (\text{Hamilton-Smith})$$

$$\mu_T = (0.5775 + 0.214 (0.35)^{1.25}) \left[1 + \frac{(0.35)^2}{1.30(0.7+0.35)} \right]^2$$

$$\mu_T = 0.6402 \quad (\text{Heyndrickx})$$

$$Q_R = \frac{2}{3} \sqrt{2g} (0.5831)(0.80)(0.35)^{3/2} = 0.2852 \text{ m}^3/\text{seg}$$

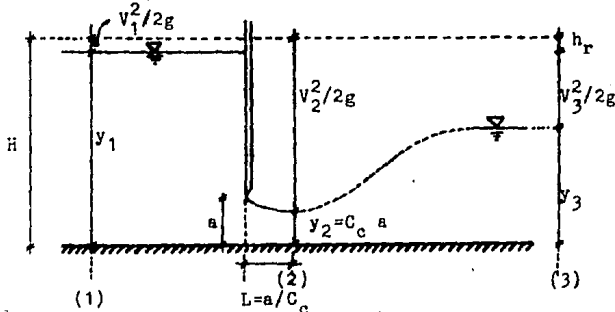
$$Q_T = \frac{8}{15} \sqrt{2g} \text{tg} 30^\circ (0.6402)(0.35)^{5/2} = 0.0633 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_{\text{Total}} = 0.2852 + 0.0633 = 0.3485 \text{ m}^3/\text{seg}$$

V.3. ECUACION GENERAL DE UNA COMPUERTA.

Una compuerta consiste en una placa móvil plana o curva con la cual podemos graduar una abertura y de este modo controlar la descarga. Esta abertura se forma entre el piso de un canal y el borde inferior de la compuerta, por lo que su ancho coincide con el del canal.

El caso más general es el de una compuerta plana con una inclinación de $\phi = 90^\circ$ con respecto a la horizontal y un ancho (b) (Fig.V.11).



(Fig.V.11.) Compuerta plana con inclinación de 90° .

Donde: a = apertura de la compuerta.

C_c = Coeficiente de contracción.

y_1, y_2, y_3 = Nivel del agua o tirante.

Y además se considera canal rectangular.

Al plantear Bernoulli entre 1 y 2 (en la contracción):

$$y_1 + \frac{v_1^2}{2g} = y_2 + \frac{v_2^2}{2g} \quad ; \quad y_2 = C_c a \quad ; \quad \text{por ser canal rectangu-}$$

$$\text{lar: } A_1 = b y_1 \quad \text{y} \quad A_2 = b y_2$$

Por continuidad: $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$

Sustituyendo: $Q = V_1 b y_1 = V_2 b C_c a$

Despejando V_1 y elevando al cuadrado: $V_1^2 = V_2^2 \left[\frac{C_c a}{y_1} \right]^2$

Sustituyendo en la ecuación de la energía:

$$y_1 + \frac{V_2^2}{2g} \left[\frac{C_c a}{y_1} \right]^2 = C_c a + \frac{V_2^2}{2g}$$

Factorizando y reduciendo términos nos queda:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2 g y_1}{\frac{C_c a}{y_1} + 1}}$$

Y al incluir el coeficiente de velocidad (C_v) para obtener la velocidad real tenemos que:

$$V_2 = \frac{C_v}{\sqrt{\frac{C_c a}{y_1} + 1}} \sqrt{2 g y_1}$$

El gasto será entonces: $Q = \frac{y_2 C_v b}{\sqrt{\frac{C_c a}{y_1} + 1}} \sqrt{2 g y_1}$

$y_2 = C_c a$. por lo que: $Q = \frac{C_c C_v a b}{\sqrt{\frac{C_c a}{y_1} + 1}} \sqrt{2 g y_1}$

Si hacemos $C_D = \frac{C_c C_v}{\sqrt{\frac{C_c a}{y_1} + 1}}$

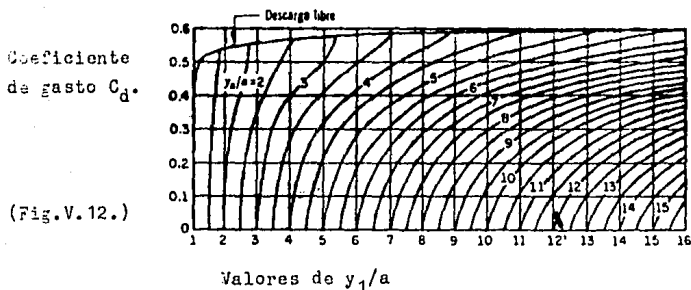
nos queda finalmente:

$$Q = C_D a b \sqrt{2 g y_1} \quad \text{---(Ec.V.15.)}$$

(Ecuación general de descarga de una compuerta).

A través de numerosos experimentos se han obtenido valores para los coeficientes C_V , C_C y C_D , los cuales pueden variar un poco dependiendo del investigador que los proponga

En la siguiente figura (Fig.V.12,) tomada de la referencia (Ref.No. 2), se puede obtener el coeficiente de descarga de una compuerta plana vertical, según Cofré y Buchheister en función de los valores de y_1/a , así como también para una descarga ahogada.



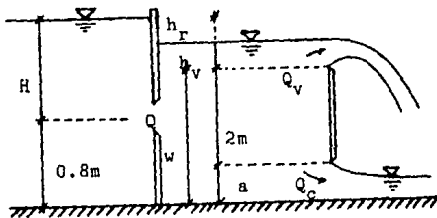
Como se observa, C_D tiene un valor aproximado entre --- 0.5 y 0.6.

V.3.1. PROBLEMAS RESUELTOS.

Problema No.33.

En el tanque que se muestra en la figura, descarga un orificio de pared delgada de $D = 0.25$ m un gasto de ----- 600 Lts/seg que es descargado en partes iguales por un vertedor rectangular sin contracciones laterales y una compuerta. Ambas estructuras con un ancho $b = 0.50$ m. Vertedor y compuerta con descarga libre y $\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$. Calcular:

- Abertura (a) de la compuerta y la carga (h_v) del vertedor.
- La carga H de aguas arriba del orificio.



a) $Q = Q_v + Q_c$; pero $Q_v = Q_c$; por lo que: $Q_v = Q_c = 300$ Lts/s

Suponiendo $M = 0.64$

$$Q_v = \frac{2}{3} \sqrt{2g} M b h^{3/2}$$

$$h = \left[\frac{3Q}{2M b \sqrt{2g}} \right]^{2/3} = 0.465 \text{ m. Para (a): } Q_c = C_d a b \sqrt{2g y_1}$$

$$y_1 = a + 2 \text{ m} + h$$

$$y_1 = a + 2.465 \text{ m}$$

$$a^3 = \frac{Q}{C_d b \sqrt{2g y_1}} \quad ; \quad \text{Iterando:}$$

a	y ₁	y ₁ /a	C _d	a*
0.12	2.585	21.54	0.6	0.14
0.14	2.605	18.60	0.6	0.139
0.139	2.604	18.73	0.6	0.139

Por lo tanto a = 0.139 m

Lo que da w = 2.604 - 0.465 = 2.139 m

Revisando: μ Por Rehbock (tabla 7.1) (Ref. No. 2.)

$$\mu = \left[0.6035 + 0.0813 \left(\frac{h + 0.0011}{w} \right) \right] \left[1 + \frac{0.0011}{h} \right]^{3/2}$$

h = 0.465 ; w = 2.139 ; Por lo tanto $\mu = 0.623$

Rectificando: $h = \left[\frac{3Q}{2\mu b\sqrt{2g}} \right]^{2/3} = 0.473$ m

Revisando (a): $y_1 = a + 2.473$ $a^* = \frac{Q}{C_d b\sqrt{2g} y_1}$

a	y ₁	y ₁ /a	C _d	a*
0.139	2.612	18.79	0.6	0.139

Por lo tanto: h_v = 0.473 m y a = 0.139 m

b) En orificio ahogado $Q = C_d A_o \sqrt{2g \Delta h}$

$$A_o = 0.049 \text{ m}^2$$

$$\Delta h = H + 0.8 - y_1$$

$$H = \Delta h + y_1 - 0.8$$

$$\text{Ahora: } \Delta h = \left(\frac{Q}{C_d A_o} \right)^2 \frac{1}{2g}$$

Suponiendo C_d = 0.6; $\Delta h = 21.22$ m ; Revisando: C_d:

$$R_e = \frac{D \sqrt{2g \Delta H}}{\sqrt{}} = 5.1 \times 10^6 \quad \text{De la (Fig.V.4.): } C_d = 0.6$$

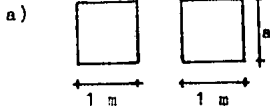
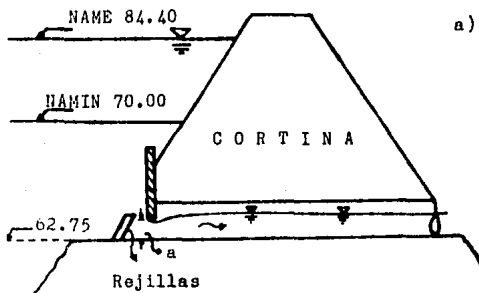
$$H = 21.22 \text{ m} + 2.612 - 0.8$$

$$H = 23.03 \text{ m}$$

Problema No.34.

En la obra de toma mostrada, las extracciones desde el embalse se controlan mediante dos compuertas de servicio que obturan dos orificios de un metro de ancho cada uno. Dentro del intervalo de niveles del embalse indicados, suponiendo - despreciable la pérdida de energía por entrada y rejilla.

- Calcular la abertura "a" para que con el nivel mínimo y - las compuertas abiertas el gasto sea de $15 \text{ m}^3/\text{seg}$.
- Calcular la abertura de las compuertas para el mismo gas- to cuando el nivel sea el máximo.



$$Q = Q_T / 2 = 7.5 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Con NAMIN: $y_1 = 70 - 62.75 = 7.25 \text{ m}$

$$Q = C_D a b \sqrt{2g y_1}$$

$$a = \frac{Q}{C_D b \sqrt{2g y_1}}$$

Suponiendo $C_D = 0.6$: $a = 1.05 \text{ m}$

$$y_1/a = 7.25/1.05 = 6.91$$

De la (Fig.V.12.) $C_D = 0.58$

Y calculando la abertura: $a = 1.08 \text{ m}$

$$y_1/a = 7.25 / 1.08 = 6.71$$

Entrando con este valor a la (Fig.V.12.): $C_D = 0.58$

Por lo tanto: $a = 1.08$ m.

b) Calculando (a) para el nivel máximo con el mismo Q:

$$y_1 = 84.4 - 62.75 = 21.65 \text{ m}$$

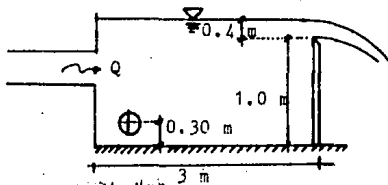
$$\text{Si } C_D = 0.6 ; \quad a = \frac{Q}{C_D b \sqrt{2g y_1}} = 0.606 \text{ m}$$

$$y_1/a = 21.65/0.606 = 35.72$$

De la (Fig.V.12.): $C_D = 0.6$; por lo tanto: $a=0.606$ m

V.4. PROBLEMAS PROPUESTOS.

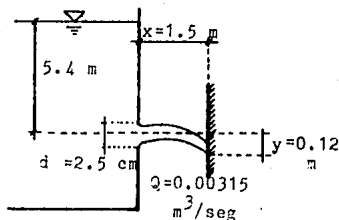
- 1.- En el depósito que se muestra descarga un orificio con $D_o = 0.30\text{m}$ y un vertedor triangular de $\Theta = 60^\circ$. Calcule el gasto que debe alimentar al depósito para no variar el nivel. $K_v = 1$ y $\mu_v = 0.6$
 $\gamma = 1.002 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}.$



Solución: $Q_{\text{total}} = 0.2796 \text{ m}^3/\text{seg}$

- 2.- A través de un orificio circular de 2.5 cm de diámetro circula agua bajo una carga de 5.4 m con un gasto de $0.00315 \text{ m}^3/\text{seg}$. El chorro choca contra una pared situada a 1.5 m de distancia horizontal y a 0.12 m verticalmente por debajo del centro de la sección contraída del chorro. Calcular los coeficientes C_d , C_v y C_c .

Solución: $C_d = 0.625$, $C_v = 0.931$ y $C_c = 0.671$

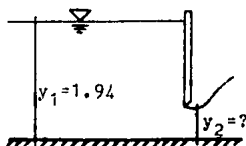


- 3.- Calcular el gasto que pasa por la compuerta, el tirante y_2 , el coeficiente de contracción y el empuje dinámico sobre dicha compuerta. Comparar este empuje suponiendo que la distribución de presiones es hidrostática. Considerando los datos de la figura mostrada.

Solución: $Q = 2.998 \text{ m}^3/\text{seg}$, $y_2 = 0.2615 \text{ m}$, $C_c = 0.539$

Empuje dinámico = 2.173 ton.

Empuje suponiendo distribución de presiones hidrostática = 2.8052 ton.



Datos:

$a = 0.485$

$b = 2 \text{ m}$

C A P I T U L O - V I

TUBERIAS

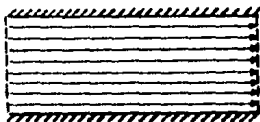
- VI.1. RESISTENCIA AL FLUJO EN CONDUCTOS A PRESION.
- VI.2. PERDIDAS POR FRICCION (ECUACION DE - Darcy-Weisbach).
- VI.3. PERDIDAS LOCALES (O PERDIDAS MENO-- RES).
- VI.4. TUBOS EN PARALELO.
- VI.5. REDES ABIERTAS.
- VI.6. PROBLEMAS PROPUESTOS.

VI.1. RESISTENCIA AL FLUJO EN CONDUCTOS A PRESION.

Hasta este momento, no ha sido necesario el cálculo de las pérdidas por fricción. En el caso de estructuras largas, la pérdida de energía debida a la fricción es muy importante, por lo que ha sido objeto de muchas investigaciones. En este capítulo se determinarán las pérdidas de energía debidas a la fricción.

Primeramente se debe distinguir entre un flujo laminar y un flujo turbulento. Esta diferencia es un resultado de la viscosidad del fluido y no existe diferencia entre ambos en ausencia de la misma. El flujo laminar se caracteriza porque el movimiento de las partículas se produce siguiendo trayectorias separadas perfectamente definidas (no necesariamente paralelas), y sin que exista intercambio transversal entre ellas.

En un flujo turbulento, las partículas se mueven sobre trayectorias completamente erráticas, sin seguir un orden establecido. Existen pequeñas componentes de la velocidad en direcciones transversales a la del movimiento general, - las cuales no son constantes sino que fluctúan con el tiempo. Estas componentes en cada punto originan un mezclado intenso de las partículas que consume parte de la energía del movimiento por efecto de fricción interna y que también es resultado de los efectos viscosos del fluido. (Fig.VI.1a) y (Fig.VI. 1b.)



(Fig.VI.1.a.) Esquema de flujo laminar.



(Fig.VI.1.b.) Esquema de flujo turbulento.

Un criterio que permite distinguir un flujo laminar de uno turbulento fué establecido por Osborne Reynolds, mediante el número que lleva su nombre, el cual nos permite evaluar la importancia de las fuerzas viscosas sobre las de inercia.

Esta relación es F_i/F_v , donde $F_i = M a$, y $F_v = A \zeta$.

Recordando que el cortante viscoso es: $\zeta = \mu \frac{dv}{dy}$, se tiene:

$$Re = \frac{\rho L^3 v T}{L^2 \mu T} \quad \text{Donde: } M = \rho L^3 ; \text{ y } A = L^2$$

$$Re = \frac{L v}{\nu} \quad \text{---(Ec.VI.1.)}$$

En conductos circulares, la longitud característica es el diámetro, y el número de Reynolds se expresa entonces:

$$Re = \frac{v D}{\nu} \quad \text{---(Ec.VI.2.)}$$

Reynolds encontró que en un tubo el flujo laminar se vuelve inestable cuando (Re) ha rebasado un valor crítico, para tornarse después en turbulento. De acuerdo con diferentes investigadores el número crítico de Reynolds adquiere valores muy distintos que van desde 2000 (determinado por el mismo Reynolds) hasta 40 000 (calculado por Eckman). De ello se deduce que dicho valor depende en mucho de los disturbios iniciales y define además un cierto límite, abajo del cual éstos se amortiguan, estabilizando al flujo laminar.

Cuando la superficie de la pared de un conducto se amplifica, se observa que está formada por irregularidades o

asperezas de diferentes alturas y con distribución irregular o aleatoria. Dicha característica es difícil de definir científicamente pues depende de factores como la altura media de las irregularidades de la superficie, la forma y distribución geométrica, la distancia entre dos irregularidades vecinas, etcétera.

Puesto que prácticamente es imposible tomar en consideración todos esos factores, se admite que la rugosidad puede expresarse por la altura media de las asperezas, rugosidad absoluta (\mathcal{L}), como un promedio obtenido del resultado de un cálculo de las características del flujo, mas no propiamente por el obtenido como la media de las alturas determinadas físicamente de la pared, en cada conducción. Es más importante la relación que la rugosidad absoluta guarda con el diámetro del tubo, esto es, la relación (\mathcal{L}/D), que se conoce como rugosidad relativa.

VI.2. PERDIDAS POR FRICCION (ECUACION DE Darcy-WEISBACH).

Numerosos investigadores han obtenido en forma experimental diferentes fórmulas para la determinación de la pérdida de energía debida a la fricción (h_f).

En este caso se hará uso de la fórmula de Darcy-Weisbach, fórmula que se obtuvo experimentalmente en 1850:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad \text{---(Ec.VI.3.)}$$

Donde: V = velocidad media, m/seg.

h_f = pérdida por fricción, en m.

f = factor de fricción adimensional.

g = aceleración de la gravedad, en m/seg²

D = diámetro del conducto, en m.

L = longitud del tubo, en m.

La pendiente de fricción (S_f) representa la relación entre la pérdida de energía (h_f) y la longitud del tubo (L), esto es:

$$S_f = \frac{h_f}{L} \quad \text{---(Ec.VI.4.)}$$

por lo que de acuerdo a la (Ec.VI.3.) nos queda:

$$S_f = \frac{f}{D} \frac{v^2}{2g} \quad \text{---(Ec.VI.5.)}$$

El problema ahora es determinar el factor de fricción (f), el cual es función de la rugosidad relativa (ϵ/D) y del número de Reynolds (Re) en el tubo, esto es:

$$f = f(\epsilon/D, Re) \quad \text{---(Ec.VI.6.)}$$

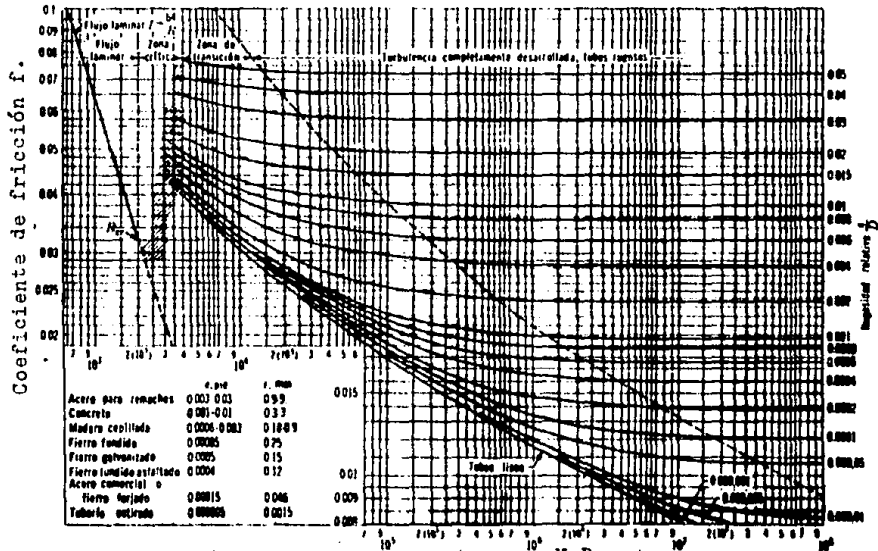
Así, el factor de fricción en flujo laminar se puede determinar a partir de la ecuación de Poiseville.

$$f = \frac{64}{Re} = \frac{64}{VD/\nu} \quad \text{--- (Ec.VI.7.) Ecuación de Poiseville.}$$

La cual es válida para tubos lisos y rugosos, siempre y cuando el número de Reynolds no sea mayor de 2300.

Con base a los resultados obtenidos por diferentes investigadores, L.F. Moody preparó un diagrama para determinar el coeficiente de fricción en tubos comerciales; en este diagrama (Fig.VI.2.), como se puede observar para $Re < 2000$ el factor de fricción es sólo función del número de Reynolds e independiente de (ϵ/D) , es decir los efectos de la viscosidad son los únicos importantes.

Existe una zona de transición, función de la rugosidad relativa y del número de Reynolds y por último la zona de turbulencia completa donde el factor de fricción solo es función de (ϵ/D) e independiente de Reynolds.



(Fig.VI.2.) Diagrama universal de Moody.

VI.3. PERDIDAS LOCALES (O PERDIDAS MENORES).

Dado que la tuberías de conducción por lo general están compuestas por tramos rectos y curvos, así como de diferentes dispositivos, se considera que existen otro tipo de pérdidas diferentes a las de fricción, las cuales se conocen como pérdidas locales y se localizan en el mismo sitio donde se altera el flujo; estas pérdidas se expresan en magnitud como una fracción de la carga de velocidad, inmediatamente aguas abajo del sitio donde se produjo la pérdida.

La fórmula general para evaluar éstas pérdidas es:

$$h_L = k \frac{v^2}{2g} \quad \text{---(Ec.VI.78.)}$$

Donde: h_L = pérdida local de energía, en m.

k = coeficiente adimensional que depende del tipo de pérdida que se trate, del número de Reynolds y de la rugosidad del tubo.

$v^2/2g$ = carga de velocidad aguas abajo de la alteración del flujo, en m.

Los dispositivos que originan este tipo de pérdidas son los tipos de entrada, rejillas, ampliaciones y reducciones, cambios de dirección, codos, válvulas, etcétera.

Los coeficientes de pérdidas debidas a estos dispositivos se pueden obtener tanto en la (Ref.No. 2.) como en la -- (Ref. No.6.), o en algún manual que haga referencia a este tipo de pérdidas.

VI.2.1. PROBLEMAS RESUELTOS.

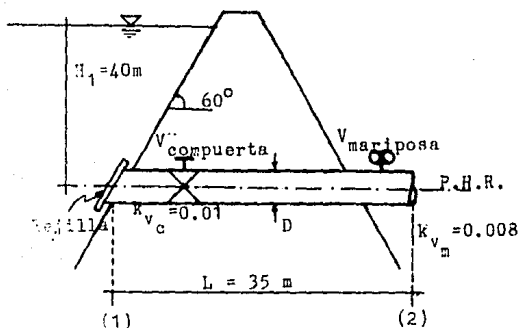
Problema No.35.

A partir de la figura mostrada calcular:

a) El diámetro de la tubería de acero soldado y nuevo para tener un gasto de $45 \text{ m}^3/\text{seg}$ con las válvulas totalmente abiertas.

b) Determinar la abertura de la válvula de mariposa en el caso que se desee un gasto de $25 \text{ m}^3/\text{seg}$.

La rejilla consiste en placas rectangulares de 3.8 cms de espesor y 15 cms de separación de centro a centro. La velocidad entre rejillas es de $0.6 \text{ m}/\text{seg}$. Los coeficientes de pérdida en las valvulas totalmente abiertas son $k_{v_c} = 0.01$ y $k_{v_m} = 0.008$.



Aplicando la ecuación de la energía de la sección 1 a la 2:

$$H_1 = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \sum_1^2 h_r \quad ; \text{ como } z_2 = 0$$

$$H_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \sum_1^2 h_r \quad \text{--- (1)}$$

$$\sum_1^2 h_r = h_{f_{1-2}} + h_{r_{rejilla}} + h_{r_{V.comp.}} + h_{r_{V.mariposa.}}$$

Calculando pérdidas y sustituyendo en (1):

$$H_1 = \frac{V^2}{2g} + f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + k_{rejilla} \frac{V^2}{2g} + k_{V_c} \frac{V^2}{2g} + k_{V_m} \frac{V^2}{2g}$$

Factorizando:

$$H_1 = \frac{V^2}{2g} \left(1 + f \frac{L}{D} + k_{V_c} + k_{V_m} \right) + k_{rejilla} \frac{V^2}{2g}$$

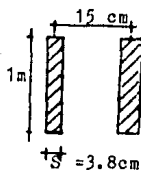
$$\text{Despejando } V : V = \sqrt{\frac{2g(H_1 - k_r V_0^2/2g)}{\left(1 + f \frac{L}{D} + k_{V_c} + k_{V_m} \right)}}$$

$$\text{Por continuidad: } Q = VA ; A = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$\text{Por lo tanto: } Q = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2g(H_1 - k_r V_0^2/2g)}{\left(1 + f \frac{L}{D} + k_{V_c} + k_{V_m} \right)}} \quad \text{---(2)}$$

a) Para $Q = 45 \text{ m}^3/\text{seg}$ y válvulas totalmente abiertas:

Rejillas: De la Ec. 8.16 de la (Ref.No.2.)



$$A_b = (15 + 3.8)100 = 0.188 \text{ m}^2$$

$$A_n = (15 - 3.8)100 = 0.112 \text{ m}^2$$

$$k_r = 1.45 - 0.45 (A_n/A_b) - (A_n/A_b)^2$$

$$k_r = 0.827$$

Por ser acero soldado nuevo $\epsilon = 0.01 \text{ mm}$. Tabla 8.18 (Ref.No.2)
 y $V = 1.2 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$. Sustituyendo en (2):

$$\frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{784.5}{\left(f \frac{35}{D} + 1.018\right)}}$$

Iterando para obtener $Q = 45 \text{ m}^3/\text{seg.}$:

D	A	V=Q/A	ϵ/D	Re=VD/v	f	Q
(m)	(m ²)	(m/s)	--	---	---	(m ³ /seg.)
1	0.7854	57.29	0.00001	4.77×10^7	0.0082	$19.25 \neq 45$
2	3.1416	14.32	0.000005	2.38×10^7	0.008	$81.76 \neq 45$
1.5	1.7671	25.46	0.0000066	3.18×10^7	0.0081	$45.05 \approx 45$

Por lo tanto: $D = 1.5 \text{ m}$

Para calcular el ángulo de apertura Θ conocido el diámetro. De la Ec. (2) para $Q = 25 \text{ m}^3/\text{seg.}$:

$$Q = 1.7671 \sqrt{\frac{784.5}{1.199 + k_{v_m}}}$$

$$k_{v_m} = \frac{(1.7671)^2 (784.5)}{Q^2} - 1.199$$

$$k_{v_m} = 2.7211$$

De la tabla 8.13 de la (Ref.No.2.):

k	Θ	A/A_0
0.51	25°	0.577
0.91	30°	0.5

Para $k=2.7211$, $\Theta = 27.1^\circ$

$$A_0 = 1.7671 \quad A/A_0 = 0.532$$

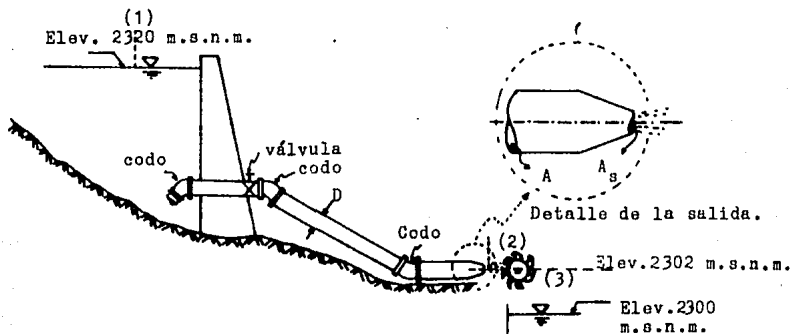
$$A_{\text{paso}} = 0.9405 \text{ m}^2$$

Problema No.36.

En la planta hidroeléctrica que se muestra calcule:

- El gasto que circula por el sistema.
- La potencia generada si la turbina tiene una eficiencia $\eta = 90\%$.

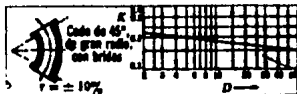
Considere los siguientes datos: $\epsilon = 0.1 \text{ mm}$, $D = 0.60 \text{ m}$,
 $\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$, $L = 240 \text{ m}$ y $A_B/A = 0.10$



Obtención de los coeficientes de pérdidas locales:

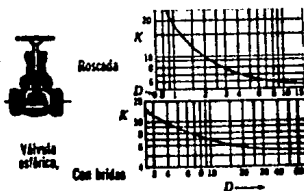
k_{codos} (Codo regular de 45° de gran radio con bridas). De la fig. 8.18 de la (Ref.No.2.): Entrando con $D = 60 \text{ cms.}$:

$$k_c = 0.15.$$



$k_{\text{válvula}}$ (Válvula esférica con bridas) de la fig. 8.30 de la (Ref.No.2.): Entrando con $D = 60 \text{ cms.}$:

$$k_v = 5.5$$



K_{entrada} (Entrada recta) de la fig. 8.8 de la (Ref.No.2.);

$$k_e = 0.5$$



K_{salida} (Salida con una relación de $A_s/A = 0.1$) de la tabla 8.19 de la (Ref.No.2.): $k_s = 0.83$

Por otro lado tenemos que por continuidad: $V_s A_s = V_T A_T$

de donde: $V_s = V_T \frac{A_T}{A_s}$; si tenemos que $A_s/A_T = 0.1$, entonces:

$$V_s = V_T / 0.10 = 10 V_T \quad \text{y} \quad V_s^2 = 100 V_T^2$$

Plantando la ecuación de la energía de la sección 1 a la 2:

$$H_1 = H_2 + k_v \frac{V^2}{2g} + 100k_s \frac{V^2}{2g} + k_e \frac{V^2}{2g} + 3k_c \frac{V^2}{2g} + f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + 100 \frac{V^2}{2g}$$

$$\text{Despejando: } H_1 = H_2 + \frac{V^2}{2g} \left[k_v + 100k_s + k_e + 3k_c + f \frac{L}{D} + 100 \right]$$

Despejando a V tenemos que:

$$V = \sqrt{\frac{(H_1 - H_2) 2g}{(\sum k + f \frac{L}{D} + 100)}} \quad Q = A \sqrt{\frac{(H_1 - H_2) 2g}{(\sum k + f \frac{L}{D} + 100)}}$$

En donde tenemos que: $L = 240 \text{ m}$ $H_1 - H_2 = 2320 - 2302 = 18 \text{ m}$

$D = 0.60 \text{ m}$ $A = 0.2827 \text{ m}^2$ $\sum k = 5.5 + 100(0.83) + 0.5 + 3(0.15)$
 $\sum k = 89.45$

Suponiendo $f = 0.01$ y sustituyendo datos en V tenemos:

$V = 1.35$ y $Q = 0.2827 (1.35) = 0.382 \text{ m}^3/\text{seg}$

del diagrama de Moody con	} $Re = \frac{0.382(0.6)}{1 \times 10^{-6}} = 2.29 \times 10^5$	} $f = 0.0167$

Con $f = 0.0167$: $V = 1.34 \text{ m/seg}$.

y $Q = 0.2827(1.34) = 0.379 \text{ m}^3/\text{seg}$

del diagrama de Moody con	} $Re = \frac{0.379(0.6)}{1 \times 10^{-6}} = 2.27 \times 10^5$	} $f = 0.0165$

Con $f = 0.0165$: $V = 1.34 \text{ m/seg}$

del diagrama de Moody con	} $Re = 2.27 \times 10^5$	} $f = 0.0165$

Por lo tanto: $Q = 0.379 \text{ m}^3/\text{seg}$.

b) Planteando energía de 2 a 3:

$$z_2 + \frac{v_2^2}{2g} = H_T + z_3$$

$$v_2 = v_s = 10 \quad v_T = 10 (1.34) = 13.4 \text{ m/seg.}$$

$$\frac{v_2^2}{2g} = 9.15$$

$$\text{Despejando: } H_T = z_2 - z_3 + \frac{v_2^2}{2g}$$

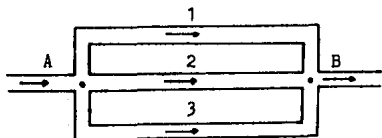
$$\text{Sustituyendo valores: } H_T = 2302 - 2300 + 9.15 = 11.15 \text{ m}$$

$$P = \frac{\gamma Q H_T \eta}{75} = \frac{1000 (0.379) 11.15 (0.9)}{75} = 50.71 \text{ C.V.}$$

VI.4. TUBOS EN PARALELO.

Un sistema de tuberías en paralelo está constituido por dos ó más tubos conectados como los que se muestran en la -- (Fig.VI.3.), de tal manera que el flujo se distribuye entre las varias ramas y se vuelve a unir más adelante. En un sistema de tuberías en serie, la misma cantidad de fluido escurre através de todos los conductos y las pérdidas de energía se van acumulando a lo largo de la serie; por lo contrario, en un sistema de tuberías en paralelo, las mismas pérdidas de energía se tienen en cada rama y la suma de los gastos correspondientes a cada una de ellas es igual al gasto a través de todo el sistema.

Para analizar sistemas de tuberías en paralelo, se supone que las pérdidas menores se pueden agregar como longitudes equivalentes de tubería a cada rama correspondiente. De la (Fig.VI.3.), se deben satisfacer las siguientes condiciones:



(Fig.VI.3.) Sistema de tuberías en paralelo.

$$h_{f_1} = h_{f_2} = h_{f_3} = H_A - H_B$$

$$Q_A = Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_B$$

Se pueden presentar dos tipos de problemas:

- a) Determinar el gasto Q una vez conocida la posición de la línea de cargas piezométricas en A y en B

- b) Determinar la distribución del flujo y las pérdidas de carga una vez conocido el gasto Q . Se supone que los diámetros y longitudes de las tuberías, las propiedades del fluido y la rugosidad son conocidas.

El inciso (a) corresponde a la determinación del gasto en un problema de tuberías simple, dado que la caída de cargas piezométricas corresponde a la pérdida de carga. Una vez determinados los gastos individuales, se suman para encontrar el gasto total.

$$h_f = k_i \frac{v_i^2}{2g} \quad \text{---(Ec.VI.9.)}$$

$$v_i = \sqrt{\frac{2g \cdot h_f}{k_i}} \quad \text{---(Ec.VI.10.)}$$

$$k_i = f_i \frac{L_i}{D_i} + \sum K_{L_i} \quad \text{---(Ec.VI.11.)}$$

El segundo tipo de problema es más complicado, pues no se conoce la pérdida de carga ni el gasto en ninguna de las tuberías que forman el sistema. Se recomienda el siguiente procedimiento:

- 1.- Suponer un gasto Q_1^i através de la tubería 1.
- 2.- Determinar $h_{f_L}^1$ utilizando para ello el gasto supuesto.
- 3.- Encontrar Q_2^i y Q_3^i utilizando para ello $h_{f_L}^1$.
- 4.- Con los tres gastos correspondientes a una misma pérdida de carga, suponer que el gasto Q dado se divide en proporción a Q_1^i , Q_2^i y Q_3^i , es decir:

$$Q_1 = \frac{Q_1'}{\sum Q'} Q ; Q_2 = \frac{Q_2'}{\sum Q'} Q ; Q_3 = \frac{Q_3'}{\sum Q'} Q \quad \text{---(Ec.VI.12.)}$$

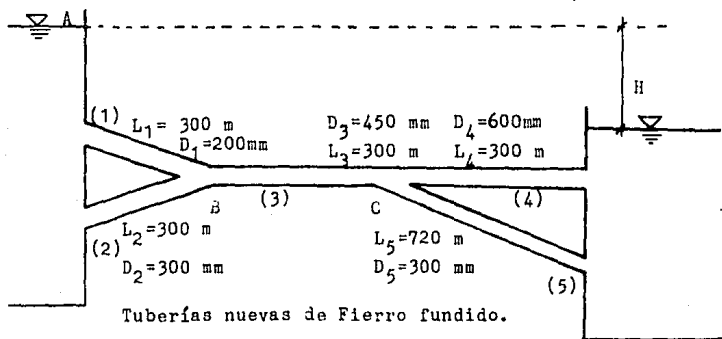
- 5.- Verificar qué tan correctos son estos gastos, calculando h_{f_1} , h_{f_2} y h_{f_3} correspondientes a Q_1, Q_2 y Q_3 .

El procedimiento es válido para cualquier número de tuberías en el sistema. Si se efectúa una selección apropiada de Q_1' , mediante la estimación del porcentaje del gasto total que debe pasar por la tubería 1 (teniendo en cuenta el diámetro, la longitud y la rugosidad), se pueden obtener, de acuerdo con la (Ec.VI.12.), valores para los gastos muy próximos a los valores reales (un pequeño porcentaje de error), lo cual constituye un resultado aceptable si se toma en cuenta la precisión que se tiene al determinar los factores de fricción.

VI.4.1. PROBLEMAS RESUELTOS.

Problema No.37.

Calcular el gasto en las tuberías del sistema mostrado en la figura, si por la de 200 mm. de diámetro la velocidad debe ser de 1 m/seg. $\nu = 0.012 \text{ cm}^2/\text{seg}$. Tubería de fierro fundido nuevo. Solo considere pérdidas por fricción.



En el tramo (1): $V_1 = 1 \text{ m/seg}$, $D_1 = 200 \text{ mm} = 0.20 \text{ m}$

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi (0.20)^2}{4} = 0.0314 \text{ m}^2$$

$$Q = VA = 1 \text{ m/seg} (0.0314 \text{ m}^2) = 0.0314 \text{ m}^3/\text{seg}.$$

$$f_1 = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad \text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{100 \text{ cm/seg} (20 \text{ cm})}{0.012 \text{ cm}^2/\text{seg}} = 1.666 \times 10^5$$

Para tubería de fierro fundido nuevo $\mathcal{E} = 0.25 \text{ mm}$ de la tabla 2.18 (Ref.No.2.):

$$\mathcal{E}/D = \frac{0.25 \text{ mm}}{200 \text{ mm}} = 0.00125$$

Entrando con (Re) y (ϵ/D) al diagrama universal de Moody -- (Fig.VI.2.): $f_1 = 0.022$

$$\text{Por lo que: } h_{f_1} = 0.022 \frac{300}{0.20} \frac{1}{2(9.81)} = \dots$$

Para el tramo (2): Se tiene que: $h_{f_1} = h_{f_2}$, e iteramos para encontrar el valor de f y con esto el valor de V_2 :

$$h_{f_2} = f_2 \frac{300}{0.30} \frac{V_2^2}{2g} \quad \text{Sustituyendo: } 1.68 = f_2 \frac{300}{0.30} \frac{V_2^2}{2g}$$

f_2	V_2	Re	ϵ/D_2	Del diagrama de Moody f
0.022	1.224	3×10^5	0.00083	$0.0195 \neq 0.022$
0.0195	1.30	3.25×10^5	0.00083	$0.0196 \neq 0.0195$
0.0196	1.296	3.24×10^5	0.00083	$0.0196 = 0.0196$

$$\text{Por lo tanto: } V = \sqrt{\frac{2g(1.68)}{0.0196(1000)}} \quad A = \frac{\pi(0.30)^2}{4} = 0.071 \text{ m}^2$$

$$V = 1.296 \text{ m/seg.}$$

$$Q_2 = 1.296 \text{ m/seg } (0.071 \text{ m}^2) = 0.092 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

Para el tramo (3): Por continuidad: $Q_3 = Q_1 + Q_2$

$$Q_3 = 0.0314 + 0.092 = 0.1234 \text{ m}^3/\text{seg.} \quad A_3 = \frac{\pi(0.45)^2}{4} = 0.159 \text{ m}^2$$

$$V_3 = \frac{Q_3}{A_3} = \frac{0.1234}{0.159} = 0.776 \text{ m/seg.}$$

$$Re = \frac{77.6 \times 45}{0.012} = 2.91 \times 10^5 \quad \epsilon/D = \frac{0.25}{450} = 0.00055$$

Del diagrama universal de Moody: $f = 0.0018$

$$h_{f_3} = 0.018 \frac{300}{0.45} \frac{0.776^2}{19.62} = 0.368 \text{ m}$$

Para el tramo (4): $Q_3 = Q_4 + Q_5 = A_4 V_4 + A_5 V_5$

Y además: $h_{f_4} = h_{f_5}$

De aquí se tiene que: $f_4 \frac{L_4}{D_4} \frac{V_4^2}{2g} = f_5 \frac{L_5}{D_5} \frac{V_5^2}{2g}$

Sustituyendo valores y simplificando se tiene que:

$$V_4^2 = \frac{f_5}{f_4} \frac{2400}{500} V_5 \quad V_4 = 2.19 \sqrt{\frac{f_5}{f_4}} V_5 \quad \text{---(1)}$$

Como f es función de (Re) y (ϵ/D) y no se puede calcular (Re) se supondrá que f es independiente de (Re) (zona turbulenta) y solo función de (ϵ/D) .

$$\frac{\epsilon}{D_4} = 0.00041$$

$$\frac{\epsilon}{D_5} = 0.00083$$

Del diagrama de Moody para la zona turbulenta:

$$f_4 = 0.016 \quad \text{y} \quad f_5 = 0.0185$$

Sustituyendo en (1): $V_4 = 2.354 V_5$

De la ecuación de continuidad:

$$0.1234 = A_4 V_4 + A_5 V_5$$

$$0.1234 = 0.282(2.354 V_5) + (0.071)V_5$$

$$V_5 = \frac{0.1234}{0.7384} = 0.167 \text{ m/seg} ; \quad V_4 = 2.354(0.167) = 0.393 \text{ m/seg}$$

$$Q_5 = 0.071(0.167) = 0.0119 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_4 = 0.283(0.393) = 0.1112 \text{ m}^3/\text{seg}.$$

Revisando los factores de fricción del diagrama de Moody:

$$Re_4 = \frac{V_4 D_4}{\nu} = 1.96 \times 10^5 ; \quad \epsilon/D_4 = 0.00041 ; \quad f_4 = 0.015 \neq 0.016$$

$$Re_5 = \frac{V_5 D_5}{\nu} = 4.17 \times 10^4 ; \quad \epsilon/D_5 = 0.00083 ; \quad f_5 = 0.021 \neq 0.0185$$

Corrigiendo V_4 y V_5 con estos nuevos valores de f y siguiendo el mismo procedimiento.

$$V_5 = 0.154 \text{ m/seg} \quad \text{y} \quad V_4 = 0.399 \text{ m/seg}$$

$$Q_5 = 0.011 \text{ m}^3/\text{seg} \quad \text{y} \quad Q_4 = 0.113 \text{ m}^3/\text{seg}$$

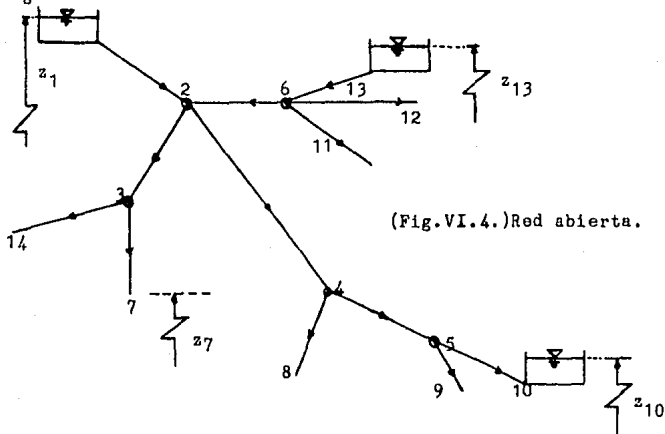
$$h_{f_4} = 0.015 \frac{300 \cdot 0.152}{0.6 \cdot 19.62} = 0.061 \text{ m}$$

$$H = h_{f_1} + h_{f_3} + h_{f_4} = 1.68 + 0.368 + 0.061 = 2.109 \text{ m}$$

VI.5. REDES ABIERTAS.

Decimos que una red abierta es aquella formada por tubos que se ramifican, sucesivamente, sin intersectarse después para formar circuitos. Los extremos de las ramificaciones pueden terminar en un recipiente o descargar a la atmósfera.

En la (Fig.VI.4.) se muestra un ejemplo de red abierta. De acuerdo con los niveles de los recipientes y la longitud de los tubos, se deberá conocer o suponer la dirección del gasto en cada tramo.



(Fig.VI.4.) Red abierta.

Planteando la ecuación de la energía entre el recipiente superior y los extremos de los tubos:

$$z_1 - \left(z_j + \frac{v_j^2}{2g} \right) = \sum_{i=1}^j h_r \quad \text{---(Ec.VI.13.)}$$

Donde: z_j = Nivel de la superficie libre del agua si el tubo descarga a un recipiente o bien, el nivel -- del centro de gravedad de la sección final, si el tubo descarga a la atmósfera.

Subíndice j = A las características hidráulicas en el punto j .

$\sum_{i=1}^j h_r$ = A la suma de las pérdidas de energía de los tubos que se encuentran en el recorrido, desde el punto 1 hasta el extremo j . Toma signo positivo para h en aquellos elementos en que la dirección del gasto coincide con la dirección del recorrido y negativo en caso contrario.

De la (Fig.VI.4.), para el extremo 7, la (Ec.VI.13.) queda:

$$z_1 - (z_7 + \frac{v_7^2}{2g}) = h_{r_{1-2}} + h_{r_{2-3}} + h_{r_{3-7}} \quad \text{---(Ec.VI.14.)}$$

y de acuerdo con la dirección supuesta de los gastos, para el extremo 13, queda:

$$z_1 - (z_{13} + \frac{v_{13}^2}{2g}) = h_{r_{1-2}} - h_{r_{2-6}} - h_{r_{6-13}} \quad \text{---(Ec.VI.15.)}$$

donde $h_{r_{i-j}}$ representa la suma de las pérdidas locales y de fricción en el tramo que va del nudo (i) al nudo (j).

Además, en cada punto de ramificación (nudo) se satisface la ecuación de continuidad siguiente:

$$\sum Q = 0 \quad \text{---(Ec.VI.16.)}$$

y se establece como convención que los gastos que lleguen al nudo tengan signo negativo; y positivo los que salgan del nudo. lo que es lo mismo:

$$\sum Q_{\text{entran}} = \sum Q_{\text{salen}}$$

Si el problema es de revisión, el resultado será un sistema de tantas ecuaciones, del tipo (Ec.VI.14.), como extremos finales tenga la red; y de tantas ecuaciones del tipo -- (Ec.VI.16.) como nudos existan. Para la red de la (Fig.VI.4) se pueden establecer ocho ecuaciones del primer tipo y cinco del segundo.

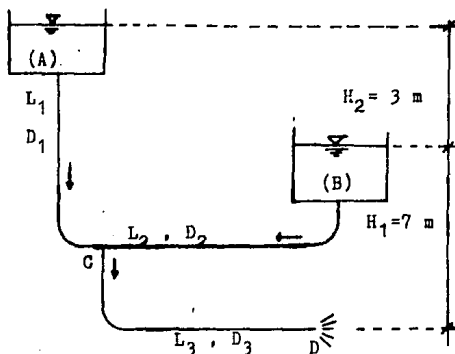
Si el problema es el diseño de una red en la que se conoce geometría y los gastos de cada tubo, se deberán elegir -por lo menos- $(l-m)$ diámetros de los l tramos que componen la red (m , número de extremos finales) para evitar la indeterminación del problema, ya que las ecuaciones de nudo se convierten en identidades.

VI.5.1. PROBLEMAS RESUELTOS.

Problema No. 38.

En el sistema de tubos se tiene: $L_1 = 200\text{m}$, $L_2 = 100\text{m}$, $L_3 = 150\text{m}$, $D_1 = D_3 = 100\text{mm}$, $D_2 = 80\text{mm}$, $H_1 = 7\text{m}$, $H_2 = 3\text{m}$, $\epsilon = 0.2\text{mm}$ y $\nu = 0.10\text{cm}^2/\text{seg}$.

Calcular: a) el gasto de cada tubo y b) la longitud que debería tener la tubería (3) para que $Q_2 = 0$.



a) Planteando energía entre A y D: (Despreciando pérdida locales).

$$H_A = H_D + h_{r1} + h_{r3}$$

$$10 = \frac{V_3^2}{2g} + f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + f_3 \frac{L_3}{D_3} \frac{V_3^2}{2g} \quad \text{--- (I)}$$

$$\epsilon/D_1 = 0.002 ; \quad \epsilon/D_2 = 0.0025 ; \quad \epsilon/D_3 = 0.002$$

Del Diagrama de Moody para la zona turbulenta:

$$f_1 = 0.024 \quad , \text{ entonces, } f_1 \frac{L_1}{D_1} = 48$$

$$f_2 = 0.025 \quad , \text{ entonces, } f_2 \frac{L_2}{D_2} = 31.25$$

$$f_3 = 0.024 \quad , \text{ entonces, } f_3 \frac{L_3}{D_3} = 36$$

$$\underline{\text{Sustituyendo en (I):}} \quad 10 = 1.886 V_3^2 + 2.446 V_1^2 \quad \text{---(II)}$$

Planteando energía entre B y D:

$$H_B = H_D + h_{r2} + h_{r3}$$

$$7 = \frac{V_3^2}{2g} + f_2 \frac{V_2^2}{2g} + f_3 \frac{V_3^2}{2g}$$

$$7 = 1.886 V_3^2 + 1.593 V_2^2 \quad \text{---(II')}$$

Por continuidad tenemos que: $A_1 V_1 + A_2 V_2 = A_3 V_3$, sustituyen
do:

$$0.0079 V_1 + 0.005 V_2 = 0.0079 V_3 \quad \text{---(III)}$$

Haciendo (II)-(II'):

$$3 = 2.446 V_1^2 - 1.593 V_2^2 \quad \text{---(IV)}$$

De (III) tenemos que: $V_1 = V_3 - 0.633 V_2$ --- (V)

Sustituyendo (V) en (IV):

$$3 = 2.446 (V_3 - 0.633 V_2)^2 - 1.593 V_2^2$$

$$3 = 2.446 V_3^2 - 3.097 V_3 V_2 - 0.6128 V_2^2$$

Despejando: $V_3^2 = 1.226 + 1.266 V_3 V_2 + 0.2505 V_2^2$

Sustituyendo V_3^2 en (II'):

$$7 = 2.312 + 2.388 V_3 V_2 + 0.472 V_2^2 + 1.593 V_2^2$$

$$2.065 V_2^2 + 2.388 V_3 V_2 - 4.688 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$V_2 = 0.79 \text{ m/seg}$$

$$V_3 = 1.789 \text{ m/seg}$$

$$\text{Y: } V_1 = 1.789 - 0.633 (0.79) = 1.289 \text{ m/seg}$$

Cumplen todas -
las ecuaciones
y si son flujos
turbulentos.

$$\text{Por lo tanto: } Q_1 = (0.0079)(1.289) = 0.0102 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_2 = (0.005)(0.79) = 0.004 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_3 = (0.0079)(1.789) = 0.0141 \text{ m}^3/\text{seg}.$$

b) Para este inciso, si $Q_2 = 0$; $H_C = H_B$ y $H_B = 7$ m

Planteando la ecuación de la energía entre C y D:

$$H_C = H_D + hf_3 \quad \text{---(I)}$$

Como $Q_2 = 0$ por continuidad tenemos que: $Q_1 = Q_3$

Planteando la ecuación de la energía entre A y D:

$$H_A = H_D + h'_{f1} + h'_{f3} \quad \text{---(II)}$$

De (I): $H_D = 7 - h_{f3}$; sustituyendó en (II):

$$10 = 7 - h_{f3} + h'_{f1} + h'_{f3}$$

$$3 = hf_1 = f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g}$$

Despejando: $V_1 = \sqrt{\frac{3 D_1 2g}{f_1 L_1}} = 1.107 \text{ m/seg.}$

$$Q_1 = A_1 V_1 = 0.0079 (1.107) = 0.0087 \text{ m}^3/\text{seg} = Q_3$$

De (I): $7 = H_D + h_{f3}$

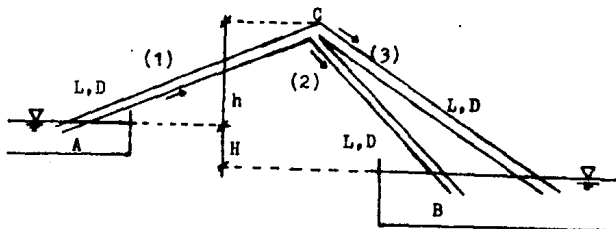
$$7 = \frac{V_3^2}{2g} + f_3 \frac{L_3}{D_3} \frac{V_3^2}{2g}$$

Despejando: $L_3 = \frac{7 - 0.062}{0.015}$

$$L_3 = 462.53 \text{ m}$$

Problema No. 39.

En el sifón se desea conocer: a) el gasto total que fluye de A a B si $L = 100$ m, $D = 100$ mm, $\nu = 0.01$ cm²/seg, $\epsilon = 0.2$ mm y $H = 5$ m. b) ¿Cuánto debe valer h para que la presión en C no sea inferior a -0.6 kg/cm²?



a) $Q_1 = Q_{total}$

Planteando la ecuación de la energía entre A y B por 1y2

$$H_A = H_B + h_{f1} + h_{f2}$$

$$H = f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{v_1^2}{2g} + f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{v_2^2}{2g} \quad \text{--- (I)}$$

$$\epsilon/D = 0.002 \quad H = 5\text{ m}$$

Del diagrama de Moody (Fig.VI.2.) suponiendo zona turbulenta, es decir, que f no depende de Re : $f = 0.0235$

Y sustituyendo en (I) tenemos que:

$$5 = 0.0235 \frac{100}{0.1} \frac{v_1^2}{2g} + 0.0235 \frac{100}{0.1} \frac{v_2^2}{2g}$$

$$5 = 1.1978 v_1^2 + 1.1978 v_2^2 \quad \text{--- (I')}$$

Planteando la ecuación de la energía entre A y B por 1y3

$$H = f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + f_3 \frac{L_3}{D_3} \frac{V_3^2}{2g}$$

$$5 = 1.1978 V_1^2 + 1.1978 V_3^2 \quad \text{---(II)}$$

$$\text{Haciendo (I')-(II): } 1.1978 V_2^2 - 1.1978 V_3^2 = 0$$

$$\text{De donde: } V_2 = V_3 \quad \text{---(III)}$$

$$\text{Por continuidad: } A_1 V_1 = A_2 V_2 + A_3 V_3 \quad ; \quad A_{1,2,3} = 0.0078 \text{ m}^2$$

$$\text{Sustituyendo: } 0.0078 V_1 = 0.0078 V_2 + 0.0078 V_3 \quad \text{---(IV)}$$

Sustituyendo (III) en (IV):

$$0.0078 V_1 = 0.0078 V_2 + 0.0078 V_2$$

$$0.0078 V_1 = 0.0156 V_2$$

$$V_1 = 2 V_2 \quad \text{---(V)}$$

Sustituyendo (V) en (I'):

$$5 = 1.1978 (2V_2)^2 + 1.1978 V_2^2$$

$$\text{De donde: } V_2 = 0.9137 \text{ m/seg.}$$

$$V_3 = 0.9137 \text{ m/seg.}$$

$$V_1 = 1.8274 \text{ m/seg.}$$

Del diagrama

$$Re_1 = \frac{(182.74)(10)}{0.01} = 1.82 \times 10^5 \quad \text{y } \epsilon/D = 0.002 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{de Moody.} \\ f_1 = 0.024 \end{array} \right.$$

$$Re_{2,3} = \frac{91.37(10)}{0.01} = 9.13 \times 10^4 \quad \text{y } \epsilon/D = 0.002 \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{2,3} = 0.025 \end{array} \right.$$

Corrigiendo los valores de $V_{1,2,3}$:

$$5 = 0.024 \frac{100}{0.1} \frac{V_1^2}{19.62} + 0.025 \frac{100}{0.1} \frac{V_2^2}{19.62}$$

$$5 = 1.223 V_1^2 + 1.274 V_2^2 \quad \text{---(I'')}$$

$$5 = 1.223 V_1^2 + 1.274 V_3^2 \quad \text{----(II'')}$$

$$V_1 = 2V_2 \quad \text{---(V')}$$

Sustituyendo (V') en (I''):

$$5 = 6.167 V_2^2 \quad ; \quad \text{entonces: } V_2 = 0.9004 \text{ m/seg}$$

$$V_3 = 0.9004 \text{ m/seg}$$

$$V_1 = 1.8008 \text{ m/seg}$$

$$Re_1 = 1.8 \times 10^5, \quad \epsilon/D=0.002 \quad ; \quad f_1 = 0.024 = 0.024$$

$$Re_{2,3} = 0.004 \times 10^4 \quad ; \quad \epsilon/D=0.002 \quad , \quad f_{2,3} = 0.025 = 0.025$$

Lo que significa que las velocidades son correctas, por lo que:

$$Q_{\text{total}} = Q_1 = A_1 V_1 = (0.0078)(1.8008) = 0.014$$

$$Q_{\text{total}} = 0.014 \text{ m}^3/\text{seg}$$

b) Planteando energía entre A y C:

$$H_A = H_C + h_{f1}$$

$$H = (H+h) + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g}$$

$$0 = h - 6 + \frac{(1.8008)^2}{19.62} + 0.024 \frac{100}{0.1} \frac{(1.8008)^2}{19.62}$$

$$0 = h - 6 + 0.165 + 3.967$$

$$h = 1.868 \text{ m}$$

VI.6. PROBLEMAS PROPUESTOS.

1.- En el sistema de conducción por gravedad que se muestra calcule el diámetro para conducir 100 Lts./seg.

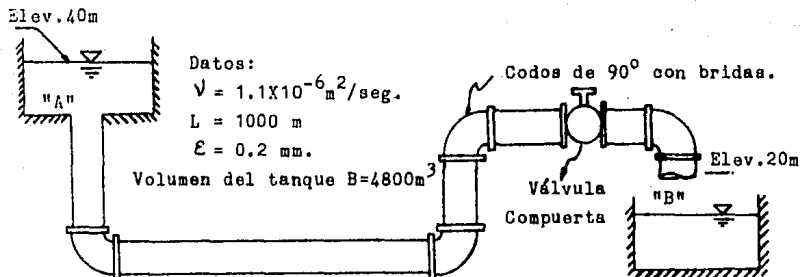
Las relaciones de los fabricantes para los coeficientes de pérdidas para codos y válvulas son:

$$\text{Codo } 90^\circ \text{ bridado } k_c = \frac{0.090}{D^{1.87}}$$

$$\text{Válvula de compuerta } k_v = 0.75$$

$$\text{De la (Ref.No.2) (Fig. 8.8) } k_e = 0.5$$

Solución: $D = 0.2446 \text{ m}$



- 2.- Determinar el gasto que transporta cada una de las tuberías del sistema mostrado en la figura, así como la pérdida total de A a B. Considere los siguientes datos:

$$D_1 = D_5 = 0.50 \text{ m} ; D_2 = D_4 = 0.40 \text{ m} ; D_3 = 0.60 \text{ m}$$

$$L_1 = L_5 = 750 \text{ m} ; L_2 = L_4 = 500 \text{ m} ; L_3 = 300 \text{ m}$$

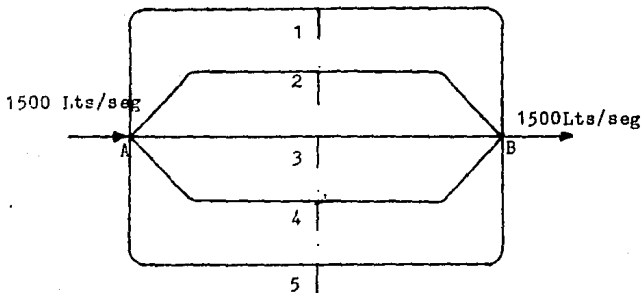
$$f_1 = f_5 = 0.025 ; f_2 = f_4 = 0.022 ; f_3 = 0.03$$

Solución: $Q_1 = Q_5 = 0.2598 \text{ m}^3/\text{seg}$

$$Q_2 = Q_4 = 0.1943 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_3 = 0.5917 \text{ m}^3/\text{seg}$$

La pérdida total de A a B = $h_{f_T} = 3.35 \text{ m}$



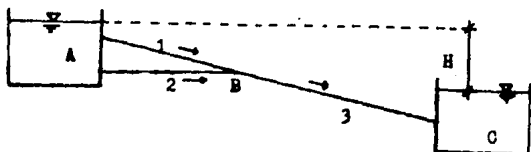
- 3.- En el sistema de tubos mostrado en la figura, la geometría es: $L_1 = 150 \text{ m}$, $L_2 = 200 \text{ m}$, $L_3 = 300 \text{ m}$

$$D_1 = 150\text{mm}, D_2 = 200\text{mm}, D_3 = 250\text{mm}$$

$$\epsilon_1 = 0.15\text{mm}, \epsilon_2 = 0.6\text{mm}, \epsilon_3 = 0.3\text{mm}$$

- a) Para $H=8 \text{ m}$, determinar el gasto en cada tubo del sistema.
 b) Calcular H si el gasto total se reduce a 200 Lts/seg

Figura problema 3.-



Solución: a) Los gastos van de A a C y son:

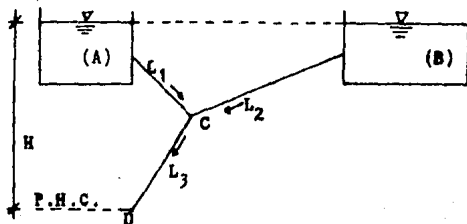
$$Q_1 = 0.0348 \text{ m}^3/\text{seg} , Q_2 = 0.0535 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_3 = 0.0883 \text{ m}^3/\text{seg}$$

b) $H = 41 \text{ m}$

4.- En el sistema de tubos mostrado calcular H, de manera -
que $Q = 12 \text{ lts/seg}$ para: $L_1=L_3 = 50 \text{ m}$, $L_2 = 200 \text{ m}$,
 $D = 100\text{mm}$, $\epsilon = 0.2 \text{ mm}$, $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{seg}$.

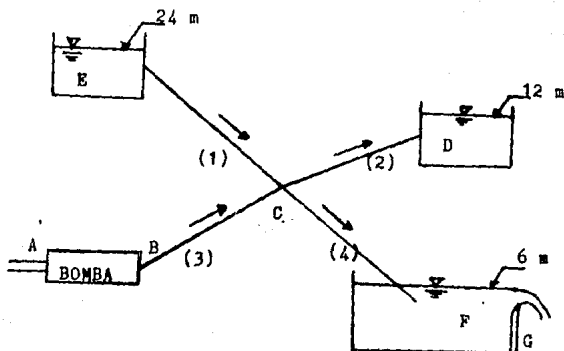
Solución: $H = 2.22 \text{ m}$



- 5.- La carga sobre el vertedor rectangular de pared delgada y sin contracciones laterales es de 0.33 m. El vertedor tiene una longitud de cresta de 3.6 m y la velocidad de llegada puede despreciarse. Para el sistema indicado en la figura, ¿cuál es la altura piezométrica en B y la distribución de gastos? Considere $f = 0.02$

Solución: $\frac{P_B}{\gamma} = 88.21 \text{ m}$

$$Q_1 = 0.2689 \text{ m}^3/\text{seg}$$
$$Q_2 = 0.1626 \text{ m}^3/\text{seg}$$
$$Q_3 = 1.1804 \text{ m}^3/\text{seg}$$
$$Q_4 = 1.2867 \text{ m}^3/\text{seg}$$



C A P I T U L O - V I I

CONCLUSIONES.

El tratamiento que se da a todos los temas es el de presentarlos de la manera más clara posible pero sin perder rigor, con el fin de que el alumno tenga claros todos los conceptos que seguirá empleando en las asignaturas del área de Hidráulica subsecuentes a Hidráulica I.

Originalmente se pensó en esta tesis como en un material de apoyo para el estudiante que se esté preparando para presentar el examen extraordinario de Hidráulica I. Pero la forma, presentación y contenido de los temas permiten que pueda ser usado como apuntes de la materia para cualquier alumno.

Hasta este momento este trabajo cumple con el objetivo de dar una introducción a la materia y servir como guía de estudio para preparar un examen extraordinario de la asignatura. Debido a la importancia de la materia se da la necesidad de una revisión del contenido de los temas con la finalidad ideal de aprobar la edición de este trabajo como apuntes de la facultad, y difundirlos entre los alumnos.

Básicamente, en los capítulos II y III el enfoque que se utiliza es el de la mayoría de los libros de Mecánica de Fluidos, dado que los conceptos que en estos temas se tratan, el alumno los ha manejado en cursos anteriores de física. En el caso particular de hidrostática el planteamiento está hecho para que el alumno domine el concepto de presión y con esto obtenga el empuje hidrostático en diferentes superficies. Se dan ejemplos de cálculos de empuje sobre estructuras que maneja el Ingeniero Civil como es el caso de compuertas y muros de contención.

La parte medular del curso corresponde al tema "Ecuaciones Fundamentales de la Hidráulica", ya que de él depende -- que el alumno pueda entender los cursos subsecuentes de la materia. La parte que corresponde a Cinemática de los Fluidos se maneja tomando los principios básicos para la determinación de las ecuaciones fundamentales dentro del mismo capítulo. Si el estudiante requiere de profundizar en el tema, se recomienda consultar algún texto de las referencias.

Se presentan ejemplos resueltos en donde el alumno puede observar la aplicación de los conceptos, y problemas propuestos para que mediante su solución reafirme los conocimientos adquiridos.

BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS.

- 1.- Russel E., George.
Hidráulica.
Ec. CECSA.
México, 1985.
- 2.- Sotelo Avila, Gilberto.
Hidráulica General Vol. I.
Fundamentos.
Ed. Limusa.
México, 1982.
- 3.- Streeter, Wylie.
Mecánica de los fluidos.
Ed. Mc Graw-Hill.
Sexta Edición, 1985.
- 4.- V. Giles, Ranald.
Mecánica de los fluidos e Hidráulica.
Serie Schaum.
Ed. Mc Graw-Hill.
Noviembre 1979.
- 5.- Mataix, Claudio.
Mecánica de Fluidos y máquinas hidráulicas.
Ed. HARLA.
Segunda edición, 1982.
- 6.- C.F.E. "Manual de Diseño de Obras Civiles"
Hidrotecnia. Sección A.2.3. Conducciones a presión.
México, 1981.