

28
29



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

CONEXIONES EN HACES VECTORIALES
Y
ESTRUCTURAS HOLOMORFAS

T E S I S

Que para obtener el título de:
M A T E M Á T I C O
P r e s e n t a :
ROMAN ALVAR SANCHEZ GARCIA

Ciudad Universitaria, Abril de 1990

FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Introducción

Los objetos con los cuales trabajaremos en esta tesis son haces vectoriales complejos C^∞ sobre una superficie de Riemann compacta. Sobre estos nos interesan dos tipos de estructuras: las conexiones y las estructuras holomorfas.

La idea general del trabajo es presentar la correspondencia biyectiva que existe entre las conexiones (unitarias) y las estructuras holomorfas de un haz vectorial C^∞ con métrica hermitiana.

En el caso particular del haz $S \times \mathbb{C}$ se establece una correspondencia uno a uno entre las clases de equivalencia de estructuras holomorfas y clases de equivalencia de conexiones unitarias planas.

Finalmente se identifican estas últimas con las representaciones unitarias del grupo fundamental de la superficie y, como conclusión, se tiene que las estructuras holomorfas en $S \times \mathbb{C}$ pueden parametrizarse por un toro de dimensión $2g$ donde g es el género de la superficie.

La tesis se divide en tres capítulos. El primero es de carácter meramente introductorio. Aquí revisamos rápidamente el concepto de superficie de Riemann y, en general, de variedad compleja. Exponemos, de forma resumida, la noción de estructura casi compleja de una superficie de Riemann así como la descomposición que ella induce en los espacios de formas complejas. Presentamos el concepto de haz vectorial (diferenciable y holomorfo) junto con las definiciones básicas relacionadas (secciones y marcos de un haz, formas con valores en un haz, métricas hermitianas, etc.).

Las dos estructuras mencionadas en el primer párrafo las tratamos en el segundo capítulo. Ambas estructuras se enfocan desde el punto de vista de operadores lineales que actúan en las secciones del haz y devuelven 1-formas con valores en el haz. Presentamos los conceptos de conexión plana (aquella cuya curvatura es cero) y de conexión unitaria (o compatible con una métrica hermitiana dada). Cómo

resultado principal se obtiene la correspondencia señalada en el segundo párrafo.

Este resultado se utiliza en el tercer capítulo para establecer la biyección entre clases de equivalencia de estructuras holomorfas y de conexiones unitarias planas. La equivalencia se dá en términos del grupo de automorfismos del haz, en el caso de las estructuras holomorfas, y, para las conexiones, se utiliza el grupo de automorfismos unitarios del haz.

El propósito de la tesis fue llegar a los resultados por el camino más directo posible. Esto se refleja en la ausencia del uso de las poderosas herramientas empleadas en el estudio de haces vectoriales y superficies de Riemann, tales como, por ejemplo, la cohomología de gavillas, con excepción de un lema del tercer capítulo en el que aparece, de forma implícita, un resultado básico de cohomología. Sin embargo, sí hacemos referencia a algunos resultados no triviales cuyas demostraciones utilizan fuertes técnicas del análisis funcional.

Como guía seguiremos las cuatro primeras lecciones del curso "Gauge theory on Riemann surfaces" dictado por N.J. Hitchin en Trieste en el "College on Riemann Surfaces" en noviembre de 1987.

Agradecimientos

Es mi opinión personal que la titulación es el producto, no sólo del trabajo de un año (o más) en una tesis, si no la consecuencia del esfuerzo (mucho o poco) realizado durante cuatro años en la Facultad. Por ello quiero aprovechar este espacio para mencionar a algunas personas que me han brindado su apoyo durante toda mi carrera.

En primer lugar quiero mencionar a dos personas que desde que principié mis estudios han estado presentes dándome su estímulo. De ellas he aprendido (aunque no siempre muy bien) que lo importante de las Matemáticas es disfrutarlas y no sufrirlas. Me refiero a los Drs. Luis Montejano y Javier Bracho (el Roli).

Una persona que con sus estupendas clases y su rostro serio me incitó a hacer mejor las cosas y a poner los pies sobre la tierra es el Dr. Jesús Muciño. A él le debo todo mi agradecimiento y mi respeto.

Quiero también agradecer al Dr. Xavier Gómez Mont quien al comenzar mi tesis me ayudó en un problema administrativo y en un problema académico.

Aprovecho también para dar mi sincero agradecimiento a la Srta. Verónica Esteve sin cuya ayuda los trámites habrían sido mucho más pesados de lo que de por sí fueron.

En cuanto a lo que se refiere al trabajo propiamente de tesis quiero agradecer primeramente al Dr. Ricardo Vila quien me propuso el tema de tesis y me dió el primer "empujón".

Así mismo, expreso mi agradecimiento a dos personas que, sin tener "vela en el entierro", accedieron a ser mis sinodales y, con toda paciencia, escucharon mis tropicadas exposiciones. Me refiero a los Drs. Javier Bracho y Mónica Clapp.

Otra persona que, sin siquiera conocerme, aceptó ser mi sinodal y con sumo cuidado revisó mi trabajo haciéndome muy atinadas correcciones que mejoraron considerablemente la forma final de la tesis, es el Dr. Marcelo Aguilar a quien le

debo mi más profundo agradecimiento.

Cuando la confusión se adueñaba de mi trabajo vino en mi auxilio una persona que puso orden en aquella masa informe de datos que era mi tesis en aquel entonces. Me refiero al Dr. Adolfo Sánchez. Gracias a él pude adquirir una mejor visión de todo el problema y logré, por fin, comenzar a escribir la tesis.

Cuando de agradecimientos se trata es común encontrarse frases por el estilo de: "no encuentro palabras para agradecer a..." y no es si no hasta que nos toca el turno que nos damos cuenta de la verdad que hay en ellas. Y, ciertamente, no hay espacio suficiente ni lenguaje adecuado para agradecer a la persona gracias a la cual todo esto tiene sentido. Diré solamente que, sin su invaluable ayuda, sin su paciencia infinita, sin su constante apoyo y aliento, sin todo esto y mucho más, la sólo idea de recibirme sería absurda. Me refiero, desde luego, a la M. en C. Ana Irene Ramírez.

Indice

Capítulo 1	Haces vectoriales	
1	Superficies de Riemann	1
2	Estructura casi compleja de una superficie de Riemann	4
3	Haces vectoriales	7
4	Formas complejas con valores en un haz	12
5	Haces holomorfos	13
6	Métricas hermitianas	14
Capítulo 2	Conexiones y estructuras holomorfas	
1	Conexiones	16
2	Curvatura	20
3	Estructuras holomorfas	26
4	Conexiones unitarias y estructuras holomorfas	30
Capítulo 3	El haz trivial lineal	
1	Automorfismos	34
2	Parametrización de estructuras holomorfas	37
	Bibliografía y referencias	49

Nuestro propósito central en este capítulo es presentar el concepto de haz vectorial sobre una superficie de Riemann así como exponer brevemente la herramienta, terminología y definiciones básicas que aparecen en el estudio de los haces. En la primera sección revisaremos someramente el concepto de superficie de Riemann.

1 Superficies de Riemann

Una *Superficie de Riemann* es una variedad compleja de dimensión 1, y aunque estamos interesados principalmente en superficies de Riemann, ocasionalmente necesitaremos el concepto de variedad compleja de mayor dimensión por lo que recordaremos aquí la definición general.

Definición. Una *estructura compleja* (holomorfa) en una variedad diferenciable M de dimensión $2n$, es una familia de cartas $z_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ tal que los abiertos U_i cubren a la variedad y los cambios de coordenadas son biholomorfismos. Una carta de M es *holomorfa* si al anexarla a la familia anterior seguimos teniendo una estructura compleja. La variedad M junto con una estructura compleja es una *variedad compleja* de dimensión (compleja) n .

Dos ejemplos bien conocidos— e importantes — de superficies de Riemann son la esfera y el toro. Consideremos la esfera $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ y tomemos las *proyecciones estereográficas*

$$z_1 = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \quad (x_3 \neq 1)$$

$$z_2 = \frac{x_1 - ix_2}{1 + x_3} \quad (x_3 \neq -1)$$

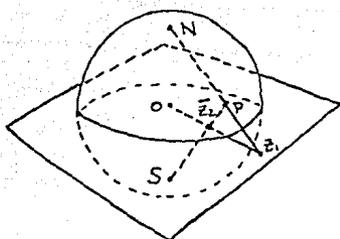


Fig. 1

El cambio de coordenadas está definido en $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ por el biholomorfismo $z_2 = 1/z_1$; por tanto $\{z_1, z_2\}$ determina una estructura compleja en S^2 .

Otra manera de dar una estructura compleja a la esfera es identificando S^2 con la *recta proyectiva compleja* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Recordemos que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ es el espacio cociente

$$\mathbb{C}^2 - \{0\} / (z, w) \sim \lambda(z, w)$$

La clase de equivalencia de (z, w) se acostumbra denotar por $[z : w]$. Si tomamos las cartas

$$z_1 = z/w \quad (w \neq 0) \qquad z_2 = w/z \quad (z \neq 0)$$

el cambio de coordenadas nuevamente está definido en \mathbb{C}^* por el biholomorfismo $z_2 = 1/z_1$, por lo cual $\{z_1, z_2\}$ también determina una estructura compleja en la esfera.

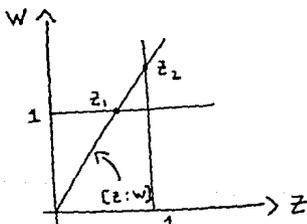


Fig. 2

Aún podríamos dar otra estructura compleja a la esfera, identificando los dos espacios anteriores con la compactificación a un punto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ del plano complejo. Sin embargo, cabe destacar que, salvo equivalencias, sólo hay una estructura

compleja en S^2 . Este hecho es una consecuencia inmediata del teorema de uniformización de Koebe-Poincaré.¹ (ver [A])

Es bien sabido que el toro T^2 es el cociente \mathbb{R}^2/Γ de \mathbb{R}^2 por una retícula Γ generada por dos vectores linealmente independientes. La proyección al cociente $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ es un homeomorfismo local y podemos tomar sus inversas locales como cartas de T^2 . Los cambios de coordenadas son traslaciones por elementos de Γ y, por tanto, son biholomorfismos, de manera que estas cartas constituyen una estructura compleja en el toro.

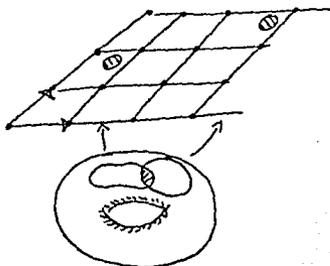


Fig. 3

Observemos que dos retículas distintas siempre pueden ser llevadas una en otra por un difeomorfismo pero no necesariamente por un biholomorfismo. Este hecho implica que distintas retículas Γ determinan, en general, distintas estructuras complejas sobre la misma variedad diferenciable. De hecho, se sabe que el conjunto de estructuras complejas en el toro se puede parametrizar por un parámetro complejo (ver [B]).

No daremos más ejemplos explícitos de superficies de Riemann pero mencionaremos aquí el hecho de que toda superficie orientable con métrica riemanniana admite una estructura compleja²— y siempre podemos construir una métrica riemanniana en cualquier superficie. En particular, toda superficie orientable y compacta es una superficie de Riemann. A lo largo de este trabajo entenderemos que una superficie de Riemann es compacta.

¹ El teorema de uniformización afirma que una superficie de Riemann simplemente conexa es equivalente al disco D^2 , al plano complejo \mathbb{C} o a la esfera de Riemann S^2 .

² La construcción de la estructura compleja usando las llamadas *coordenadas isotermas* puede encontrarse en [Ch], cap.1 y la existencia de coordenadas isotermas puede verse en [B].

2 Estructura casi compleja de una superficie de Riemann

La definición que dimos de superficie de Riemann concuerda con el espíritu con que se estudian las variedades complejas: a partir de estructuras diferenciables se obtienen las estructuras holomorfas. Por otra parte, la idea básica para clasificar estructuras holomorfas consiste en hacerlo mediante ciertos "operadores globales" que se definen con base en la estructura diferenciable de la variedad. Daremos ahora una definición alternativa de superficie de Riemann, quizás menos natural pero sí más acorde con esta idea y más útil para nuestros fines.

Dado que una superficie de Riemann S está modelada por el plano complejo, es natural pensar que cada plano tangente $T_p S$ adquiere una estructura compleja cuando tomamos en cuenta la estructura compleja de la superficie. De hecho, si $z = x + iy$ es una carta arbitraria de S alrededor de p , podemos definir un automorfismo lineal (sobre \mathbb{R}) en $T_p S$ por las siguientes relaciones:

$$J_p \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p$$

$$J_p \left(\frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \Big|_p$$

Definiendo $iX_p = J_p(X_p)$ para $X_p \in T_p S$ e $i = \sqrt{-1}$, obtenemos una estructura de espacio vectorial complejo en el espacio real $T_p S$. Ahora bien, si utilizamos exclusivamente cartas holomorfas, esta estructura compleja es independiente de la carta y podemos juntar todos los automorfismos J_p en un automorfismo J de la variedad tangente TS a la superficie (la independencia de las cartas es una consecuencia inmediata de las ecuaciones de Cauchy-Riemann para el cambio de coordenadas de dos cartas holomorfas). Este automorfismo satisface la propiedad $J^2 = -1_{TS}$ y recibe el nombre de *estructura casi compleja* de la superficie. Cualquier automorfismo $J: TS \rightarrow TS$ de la variedad tangente a una superficie diferenciable S con la propiedad $J^2 = -1_{TS}$ induce una estructura compleja en S cuya estructura casi compleja coincide con J .³ Esto nos permite definir una superficie de Riemann como una superficie diferenciable en la que se tiene un automorfismo de este tipo. La razón por la cual se antepone el adverbio "casi" es que, en dimensiones mayores, el automorfismo J debe, además, satisfacer ciertas condiciones de integrabilidad (ver p.6) para poder determinar una estructura compleja en la variedad.

En lo que sigue denotaremos por $\mathcal{E}^k(S)$ el espacio de k -formas diferenciables en S y por $\mathcal{E}^k(S)_{\mathcal{G}}$ su complejificación.⁴ El operador diferencial (o derivada exterior)

³ Este hecho es esencialmente equivalente a la existencia de coordenadas isotermas en una superficie con métrica riemanniana (ver [Ch], cap.3 y la nota anterior).

⁴ La notación la tomamos de [W].

$d: \mathcal{E}^k(S) \rightarrow \mathcal{E}^{k+1}(S)$ se extiende por linealidad a las respectivas complejificaciones y lo denotamos igualmente por d .

Veamos ahora con más detalle la forma en que la estructura casi compleja de una superficie de Riemann S interviene en el haz tangente.

Definición.- Una transformación lineal $\ell: T_p S \rightarrow \mathbb{C}$, esto es, un elemento de la complejificación $(T_p S)_{\mathbb{C}}^*$ del espacio dual de $T_p S$, es \mathbb{C} -lineal, si $\ell(JX_p) = i\ell(X_p)$ y \mathbb{C} -anti lineal si $\ell(JX_p) = -i\ell(X_p)$.⁵

Un elemento $\ell \in (T_p S)_{\mathbb{C}}^*$ puede escribirse en la siguiente forma:

$$\ell = \frac{1}{2}(\ell - i\ell \circ J) + \frac{1}{2}(\ell + i\ell \circ J)$$

y un cálculo sencillo muestra que el primer sumando es \mathbb{C} -lineal y el segundo \mathbb{C} -anti lineal; más aún, el único elemento que es \mathbb{C} -lineal y \mathbb{C} -anti lineal al mismo tiempo es el cero y, por consiguiente, podemos descomponer $(T_p S)_{\mathbb{C}}^*$ en la siguiente suma directa:

$$(T_p S)_{\mathbb{C}}^* = (T_p S)^{1,0} \oplus (T_p S)^{0,1}$$

donde $(T_p S)^{1,0}$ y $(T_p S)^{0,1}$ son los espacios de transformaciones \mathbb{C} -lineales y \mathbb{C} -anti lineales respectivamente. Se verifica fácilmente que la conjugación establece un isomorfismo lineal (sobre \mathbb{R}) entre $(T_p S)^{1,0}$ y $(T_p S)^{0,1}$.

Aplicando esta descomposición en cada punto de la superficie podemos, así mismo, separar el espacio de 1-formas complejas (diferenciables) en la suma directa:

$$\mathcal{E}^1(S)_{\mathbb{C}} = \mathcal{E}^{1,0}(S) \oplus \mathcal{E}^{0,1}(S)$$

donde $\mathcal{E}^{1,0}(S)$ consta de las 1-formas complejas \mathbb{C} -lineales en cada punto y $\mathcal{E}^{0,1}(S)$ de las 1-formas complejas \mathbb{C} -anti lineales en cada punto. Esto nos lleva, a su vez, a una descomposición del operador diferencial

$$\mathcal{E}(S)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{1,0}(S) \oplus \mathcal{E}^{0,1}(S) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2(S)_{\mathbb{C}}, \quad d = d' + d''$$

donde d' y d'' son las proyecciones de d a cada sumando en la primera aplicación, y, en la segunda,

$$d' = \begin{cases} 0 & \text{en } \mathcal{E}^{1,0}(S) \\ d & \text{en } \mathcal{E}^{0,1}(S) \end{cases} \quad d'' = \begin{cases} d & \text{en } \mathcal{E}^{1,0}(S) \\ 0 & \text{en } \mathcal{E}^{0,1}(S) \end{cases}$$

⁵ La terminología se debe a que con la estructura de espacio vectorial complejo inducida por J en $T_p S$, una transformación \mathbb{C} -lineal es lineal sobre \mathbb{C} .

Podemos expresar estos operadores en términos de una carta holomorfa $z = x + iy$ de S : si $f \in \mathcal{E}(S)_{\mathbb{C}}$ entonces la diferencial de f está dada por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

y expresando dx y dy en términos de dz y $d\bar{z}$ obtenemos:

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Una comprobación directa muestra que dz es de tipo $(1, 0)$ (debido a que z es una carta holomorfa) y, por tanto, $d\bar{z}$ es de tipo $(0, 1)$,⁶ y, en consecuencia,

$$d'f = \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad d''f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

El operador diferencial $d''f: \mathcal{E}(S)_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{E}^1(S)_{\mathbb{C}}$ nos permite caracterizar a las funciones holomorfas en S : la ecuación $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ es equivalente a las ecuaciones de Cauchy-Riemann por lo cual f es holomorfa si y solo si $d''f = 0$. Los operadores d' y d'' satisfacen, al igual que el operador diferencial, la propiedad de que sus cuadrados se anulan. Conviene hacer la observación de que en una variedad diferenciable M en la que se tenga una estructura casi compleja $J: TM \rightarrow TM$, es posible descomponer los espacios de k -formas complejas en una suma directa del tipo

$$\mathcal{E}^k(S)_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{E}^{p,q}(S)$$

donde $\mathcal{E}^{p,q}(S)$ involucra p términos de tipo $(1, 0)$ y q términos de tipo $(0, 1)$ y los operadores d' y d'' se obtienen proyectando el operador diferencial en los sumandos adecuados. Las condiciones

$$d'^2 = d''^2 = 0$$

son las condiciones de integrabilidad a que nos referimos anteriormente, que debe satisfacer J para poder determinar una estructura compleja en M .⁷

⁶ Debido a esto dz y $d\bar{z}$ generan localmente a $\mathcal{E}^{1,0}(S)$ y $\mathcal{E}^{0,1}(S)$ respectivamente.

⁷ Ver, por ejemplo, [Ch], cap. 3

3 Haces vectoriales

Definición.- Un haz vectorial complejo C^∞ de rango r sobre una superficie de Riemann S es una variedad diferenciable E junto con una aplicación $\pi: E \rightarrow S$ diferenciable y suprayectiva con las siguientes propiedades:

- a) Para cada $p \in S$ la fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$ es un espacio vectorial complejo de dimensión r y
- b) en torno a cada punto de S existe un abierto U de S y un difeomorfismo $h_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^r$ tal que $h_U(E_p) \subset \{p\} \times \mathbb{C}^r$ para $p \in U$, y $h_U: E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{C}^r$ es un isomorfismo lineal (sobre \mathbb{C}).

A la variedad E se le identifica como el *espacio total* del haz, S es el *espacio base* y π la *proyección* del haz. Las funciones h_U de la condición (b) se llaman *trivializaciones* locales del haz. En general nos referiremos a un haz vectorial E sobre S por la notación $E \xrightarrow{\pi} S$ o, simplemente, $E \rightarrow S$.

El haz vectorial más sencillo sobre una superficie de Riemann S es el producto $S \times \mathbb{C}^r$ tomando como proyección del haz la proyección al primer factor. Un haz es *trivial* si podemos encontrar una trivialización global $h: E \rightarrow S \times \mathbb{C}^r$. La condición (b) de la definición indica que la estructura local de un haz vectorial siempre es trivial puesto que una trivialización h_U da una representación de $\pi^{-1}(U)$ como un cilindro $U \times \mathbb{C}^r$ que tiene la misma estructura diferenciable y la misma estructura algebraica fibra a fibra.

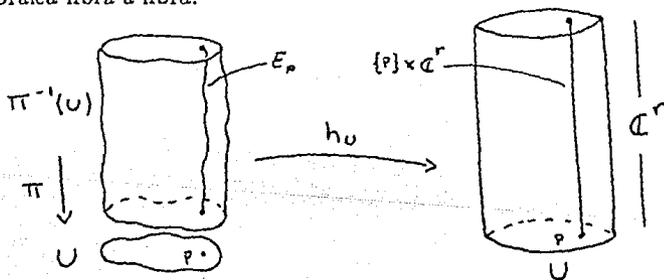


Fig. 4

Si h_U y h_V son dos trivializaciones locales, tenemos dos representaciones distintas para $\pi^{-1}(U \cap V)$ y las fibras $\{p\} \times \mathbb{C}^r$ en ambos cilindros se relacionan por medio del isomorfismo

$$g_{UV}(p) = (h_U \circ h_V^{-1})|_{\{p\} \times \mathbb{C}^r}$$

que puede considerarse como un elemento del grupo lineal $GL(r, \mathbb{C})$.

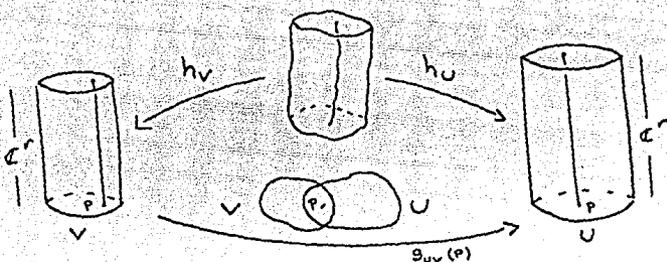


Fig. 5

Las funciones de transición $g_{UV}: U \cap V \rightarrow GL(r, \mathbb{C})$ proporcionan una idea de cómo se conforma la estructura de un haz vectorial: comenzamos localmente tomando los cilindros $U \times \mathbb{C}^r$ y entonces usamos las funciones de transición para "pegar" todos los cilindros a lo largo de las fibras comunes. De hecho podemos construir un haz vectorial sobre S partiendo de una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de S y de funciones C^∞ $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(r, \mathbb{C})$ por cada par de elementos de la cubierta. Para asegurar que las identificaciones dos a dos de tres o más cilindros concuerdan, debemos pedir que las funciones $g_{\alpha\beta}$ satisfagan las identidades:

- a) $g_{\alpha\alpha} \equiv I$
- b) $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$

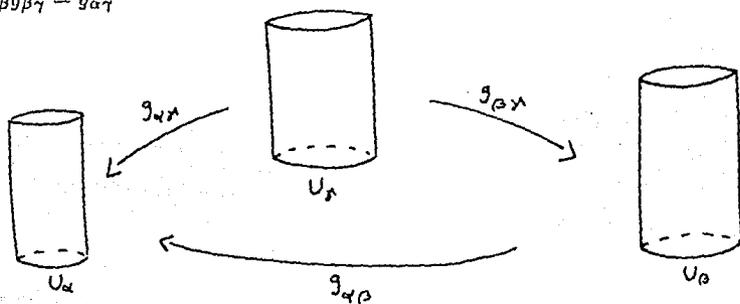


Fig. 6

Las funciones de transición en un haz vectorial satisfacen esta propiedad. Una descripción más detallada de esta construcción puede hallarse en [W].

Definición.- Si $E \rightarrow S$ es un haz vectorial sobre S , una *sección* (local) del haz sobre un abierto U de S es una aplicación diferenciable $\sigma: U \rightarrow E$ tal que $\sigma(p) \in E_p$, para $p \in U$. Un *marco* (local) de E sobre U es un conjunto $\{\sigma_j\}$ de r secciones sobre U ,

linealmente independientes en cada punto (i.e. $\{\sigma_j(p)\}$ es una base de E_p).

Esencialmente, un marco local es lo mismo que una trivialización: si

$$h_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^r$$

es una trivialización, las secciones $\sigma_j(p) = h_U^{-1}(p, e_j)$, donde $\{e_j\}$ es la base canónica de \mathbb{C}^r , constituyen un marco sobre U . Recíprocamente, si $\{\sigma_j\}$ es un marco sobre U , definimos una trivialización h_U por $h_U(\lambda) = (p, (\lambda^1 \dots \lambda^r))$ donde $\lambda = \sum_j \lambda^j \sigma_j(p) \in E_p$. Dados dos marcos $\{\sigma_j\}$ y $\{\rho_j\}$ sobre U y V respectivamente, expresamos uno en términos del otro por las relaciones:

$$\rho_j(p) = \sum_i g_j^i(p) \sigma_i(p), \quad p \in U \cap V$$

La matriz $g = (g_j^i)$ es una función diferenciable $g: U \cap V \rightarrow GL(r, \mathbb{C})$. Ahora, si h_U y h_V son las trivializaciones del haz construidas a partir de estos marcos, entonces:

$$\begin{aligned} g_{UV}(p)(p, e_j) &= (h_U \circ h_V^{-1})(p, e_j) \\ &= h_U(\rho_j(p)) \\ &= \sum_i g_j^i(p) h_U(\sigma_i(p)) \\ &= \sum_i g_j^i(p)(p, e_i) \\ &= (p, g(p)e_j) \end{aligned}$$

Por tanto, el cambio de coordenadas g coincide con la función de transición g_{UV} .

En términos de un marco local $\{\sigma_j\}$ —o de una trivialización— sobre U , podemos representar cualquier sección σ sobre U , de manera única, como un vector

$$f = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^r \end{pmatrix}$$

de funciones C^∞ de valores complejos escribiendo:

$$\sigma(p) = \sum_j f^j(p) \sigma_j(p)$$

Si f' es la representación de σ en términos de un marco $\{\rho_j\}$ sobre V , entonces en $U \cap V$ tenemos $f' = g^{-1}f$.

El conjunto de secciones del haz sobre un abierto U , $\mathcal{E}(U, E)$, tiene una estructura natural de espacio vectorial complejo operando punto a punto. La correspondencia $\sigma \mapsto f$ es un isomorfismo entre este espacio y $\mathcal{E}(U)_{\mathbb{C}}$.

Como ejemplo de haz vectorial veamos la recta proyectiva compleja $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. A cada punto $p \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ le asociamos la recta compleja $L_p \subset \mathbb{C}^2$ parametrizada por este punto (es decir: todos los múltiplos no nulos de un representante de p).

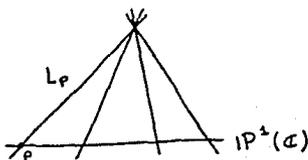


Fig. 7

El conjunto de todas estas rectas puede describirse fácilmente por el subconjunto de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^2$ dado por

$$L = \{(p, w) / w \in L_p\}$$

Tenemos una proyección natural

$$L \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

y la fibra sobre cada punto es, básicamente, el espacio vectorial L_p . Para hacer de L un haz vectorial sobre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ investiguemos cuáles deben ser las funciones de transición.

Dos marcos naturales de L se obtienen al intersectar el haz de rectas por el origen en \mathbb{C}^2 con las rectas $z = 1$ y $w = 1$.

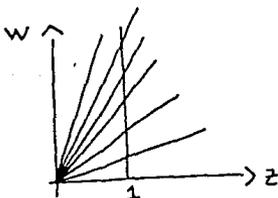


Fig. 8

Si $p = [z : w] \neq [0 : 1]$, L_p intersecta la recta $z = 1$ en el punto $(1, w/z)$ y para $p \neq [1 : 0]$ la intersección con la recta $w = 1$ es el punto $(z/w, 1)$. Obtenemos así

dos marcos

$$\sigma(p) = (p, (1, w/z)) \quad \tau(p) = (p, (z/w, 1))$$

definidos en $\mathbb{P}^1 - \{[0 : 1]\}$ y $\mathbb{P}^1 - \{[1 : 0]\}$ respectivamente. En $\mathbb{P}^1 - \{[1 : 0], [0 : 1]\}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \tau(p) &= (p, (z/w, 1)) \\ &= (p, \frac{z}{w}(1, w/z)) \\ &= \frac{z}{w}\sigma(p) \end{aligned}$$

Por tanto, para dar la construcción precisa de L debemos tomar la cubierta $\{\mathbb{P}^1 - \{[0 : 1]\}, \mathbb{P}^1 - \{[1 : 0]\}\}$ y las funciones de transición

$$g_{12}(p) = z/w \quad g_{21}(p) = w/z \quad p = [z : w]$$

Vale la pena notar que este haz es topológicamente no trivial. A continuación exponemos un argumento sencillo de por qué esto es así.

Una sección de L se determina por una aplicación diferenciable $f: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que $f(p) \in L_p$ para cada $p \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Si L fuera trivial podría encontrarse una sección global que no se anule en ninguna parte. Por tanto podemos suponer que f toma valores en $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ (dividiendo por la norma de f). Pero entonces, la aplicación $\varphi: \mathbb{P}^1 \times S^1 \rightarrow S^3$ dada por

$$\varphi(p, \lambda) = \lambda f(p)$$

sería una aplicación continua y biyectiva (como se verifica fácilmente) y, por tanto, un homeomorfismo. Una inspección a los grupos fundamentales de $\mathbb{P}^1 \times S^1 = S^2 \times S^1$ y S^3 (\mathbb{Z} y el trivial respectivamente) muestra que esto último no es posible.

Este haz recibe el nombre de haz *canónico lineal* sobre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Otro ejemplo de haz vectorial se obtiene al considerar la variedad tangente TS a una superficie de Riemann imponiendo en cada plano tangente $T_p S$ la estructura de espacio vectorial complejo inducida por la estructura casi compleja de S (ver p.4). Si $z = x + iy$ es una carta holomorfa de S , una trivialización local de TS se obtiene definiendo

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p &\mapsto (p, 1) \\ \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p &\mapsto (p, i) \end{aligned}$$

y extendiendo por linealidad. Fácilmente se comprueba que esta trivialización es lineal sobre \mathbb{C} en cada plano tangente.

Observemos que si S es la esfera S^2 , el haz es topológicamente no trivial (la esfera "no se puede peinar") mientras que si S es el toro T^2 el haz es trivial (puesto que T^2 es un grupo de Lie).

4 Formas complejas con valores en un haz

Una *1-forma compleja* en S con valores en E es una correspondencia ω que asigna a cada punto $p \in S$ una aplicación lineal (sobre \mathbb{R})

$$\omega(p): T_p S \rightarrow E_p$$

y, análogamente, una *2-forma compleja* Ω con valores en E asigna a cada $p \in S$ una aplicación bilineal y alternante

$$\Omega(p): T_p S \times T_p S \rightarrow E_p$$

En términos de un marco local $\{\sigma_j\}$ sobre U , representamos una k -forma ω con valores en V por un vector

$$\zeta = \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \vdots \\ \zeta^r \end{pmatrix}$$

de k -formas complejas en U al escribir:

$$\omega = \sum_j \zeta^j \otimes \sigma_j$$

Si ζ' es otra representación vectorial de ω , entonces $\zeta' = g^{-1}\zeta$ donde g es el cambio de coordenadas (o función de transición). Decimos que ω es *diferenciable* si las ζ^j son k -formas C^∞ . El espacio de k -formas (diferenciables) en U con valores en E lo denotamos por $\mathcal{E}^k(U, E)$. Al igual que las secciones, $\mathcal{E}^k(U, E)$ es un espacio vectorial complejo.

Al igual que con las 1-formas complejas, podemos hacer uso de la estructura casi compleja de la superficie para descomponer el espacio de 1-formas con valores en E en la suma directa:

$$\mathcal{E}^1(S, E) = \mathcal{E}^{1,0}(S, E) \oplus \mathcal{E}^{0,1}(S, E)$$

donde

$$\omega(p)(JX_p) = i\omega(p)(X_p)$$

para $X_p \in T_p S$ si $\omega \in \mathcal{E}^{1,0}(S, E)$ y

$$\omega(p)(JX_p) = -i\omega(X_p)$$

si $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(S, E)$.

5 Haces holomorfos

Si en la definición que dimos de haz vectorial sobre una superficie de Riemann S reemplazamos el espacio total E por una variedad compleja y pedimos que la proyección π sea holomorfa al igual que las trivializaciones locales entonces $E \rightarrow S$ es un *haz vectorial holomorfo*. En este caso el cambio de coordenadas entre dos trivializaciones h_U y h_V es una función holomorfa $g_{UV}: U \cap V \rightarrow GL(r, \mathbb{C})$. Este carácter holomorfo de las funciones de transición no depende de la estructura de variedad compleja de E , y de hecho podemos dar a un haz C^∞ , $E \rightarrow S$, una estructura de haz holomorfo partiendo de una familia de marcos $\sigma^\alpha = (\sigma_1^\alpha, \dots, \sigma_r^\alpha)$ que cubran a la superficie, con funciones de transición holomorfas. Para ello construimos cartas φ_α de E mediante la composición:

$$\pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{h_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{(z_\alpha \times \text{id})} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^r = \mathbb{C}^{r+1}$$

donde h_α es la trivialización correspondiente a σ_α y $z_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ es una carta holomorfa de S . Los cambios de coordenadas $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ están dados, en el factor \mathbb{C} , por el cambio de coordenadas $z_\alpha \circ z_\beta^{-1}$ que es holomorfo, y, en el factor \mathbb{C}^r , por la función de transición $g_{\alpha\beta}$ también holomorfa según la hipótesis. Por tanto, la familia $\{\varphi_\alpha\}$ es una estructura compleja en E y es inmediato probar que tanto la proyección como las trivializaciones h_α resultan holomorfas en términos de esta estructura. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición.- Sea E un haz vectorial C^∞ sobre una superficie de Riemann S . Una *estructura holomorfa* en $E \rightarrow S$ es una familia de marcos locales del haz que cubren a la superficie y cuyas funciones de transición son funciones holomorfas.

Notemos, sin embargo, que para nosotros ésta es una definición provisional. En el siguiente capítulo veremos la definición correspondiente en términos de un "operador global" sobre la estructura diferenciable de la superficie.

Por supuesto el ejemplo más sencillo de haz vectorial holomorfo es el haz producto $S \times \mathbb{C}^r$ con la estructura holomorfa usual del producto. Sin embargo hacemos

notar que un haz holomorfo puede ser topológicamente trivial mas no trivial en su estructura holomorfa, esto es, podemos dar a $S \times \mathbb{C}^r$ estructuras complejas distintas a la usual. De hecho, en el tercer capítulo vamos a clasificar todas las estructuras holomorfas en el haz lineal $S \times \mathbb{C}$.

Otro ejemplo de haz holomorfo es el haz canónico lineal L sobre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ que construimos anteriormente: las funciones de transición g_{12} y g_{21} (ver p.11) son funciones holomorfas en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{[1:0], [0:1]\}$.

6 Métricas hermitianas

Definición.- Una *métrica hermitiana* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en un haz vectorial E sobre una superficie de Riemann S es un producto interior hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ en cada fibra E_p del haz, que varía diferenciablemente con $p \in S$ en el sentido de que si ξ y η son secciones del haz, la aplicación

$$p \mapsto \langle \xi(p), \eta(p) \rangle_p \in \mathbb{C}$$

es C^∞ .

En el haz trivial $S \times \mathbb{C}^r$ hay una métrica hermitiana natural definida en términos del producto interior hermitiano usual de \mathbb{C}^r :

$$\left\langle (p, (z_1, \dots, z_r)), (p, (w_1, \dots, w_r)) \right\rangle_p = \sum_i z_i \bar{w}_i$$

En general, sea $E \rightarrow S$ un haz vectorial. Si \mathcal{O} es una cubierta localmente finita de S y tenemos una trivialización local h_U por cada elemento $U \in \mathcal{O}$, podemos definir una métrica hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle^U$ en cada $\pi^{-1}(U)$ tomando la métrica usual en la representación "cilíndrica" $U \times \mathbb{C}^r$ de $\pi^{-1}(U)$. Usando entonces una partición de la unidad $\{\varphi_U\}$ subordinada a \mathcal{O} , "pegamos" estas métricas definiendo

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \sum_{U \in \mathcal{O}} \varphi_U \langle \cdot, \cdot \rangle^U$$

y obtenemos así, una métrica hermitiana en E . Vemos entonces que las métricas hermitianas siempre existen.

Si $\{\sigma_j\}$ es un marco cualquiera del haz, damos una descripción matricial de una métrica hermitiana de la siguiente manera: Si ξ y η son secciones del haz y

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^r \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^r \end{pmatrix}$$

son sus representaciones vectoriales, entonces:

$$\begin{aligned} \langle \xi, \eta \rangle &= \left\langle \sum_j \xi^j \sigma_j, \sum_i \eta^i \sigma_i \right\rangle \\ &= \sum_{i,j} \bar{\eta}^i h_{ij} \xi^j, \quad h_{ij} = \langle \sigma_j, \sigma_i \rangle \\ &= \bar{\eta}^t h \xi, \quad h = (h_{ij}) \end{aligned}$$

y así, la matriz h representa a la métrica en términos de $\{\sigma_j\}$. Si h' es otra representación matricial correspondiente a otro marco $\{\rho_j\}$, tenemos la relación:

$$h' = \bar{g}^t h g$$

donde g es el cambio de coordenadas entre $\{\sigma_j\}$ y $\{\rho_j\}$.

Un marco $\{\sigma_j\}$ del haz es *unitario* si $\{\sigma_j(p)\}$ es una base ortonormal de E_p para cada $p \in S$. Localmente siempre existen marcos unitarios puesto que podemos tomar un marco cualquiera y normalizarlo mediante el proceso de Gram-Schmidt. Las funciones de transición $g_{\alpha\beta}$ entre dos marcos unitarios son funciones C^∞ $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow U(r)$ con valores en el grupo unitario de orden r . Podemos describir el haz vectorial por una familia de marcos que cubran a S cuyas funciones de transición tomen valores en $U(r)$. Esta descripción es similar a la que dimos en el caso de haces holomorfos, pero observemos que las funciones de transición holomorfas y las unitarias son diametralmente opuestas: si $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow U(r)$ es holomorfa, entonces \bar{g}^t también debe ser holomorfa puesto que coincide con g^{-1} (la notación significa: $g_{\alpha\beta}^{-1}(p) = (g_{\alpha\beta}(p))^{-1}$). Pero la conjugación no es una aplicación holomorfa y, en consecuencia, $g_{\alpha\beta}$ debe ser constante. Por tanto, en un haz holomorfo, un marco holomorfo, en general, no es unitario y viceversa.

Conexiones y estructuras holomorfas

En este capítulo estudiaremos los dos conceptos que dan nombre a esta tesis: conexiones y estructuras holomorfas. Básicamente, una conexión en un haz vectorial es una forma de "diferenciar" secciones del haz, mientras que una estructura holomorfa nos permite hacer del haz un haz holomorfo según lo definimos en el capítulo anterior. Ambos conceptos, *a priori*, de naturaleza distinta están, no obstante, íntimamente relacionados y nuestro objetivo será establecer, de manera precisa, cuál es esta relación.

1 Conexiones

Definición.- Una *conexión* en un haz vectorial E sobre una superficie de Riemann S es una aplicación lineal (sobre \mathbb{C}):

$$D: \mathcal{E}(S, E) \longrightarrow \mathcal{E}^1(S, E)$$

que satisface la regla de Leibnitz:

$$D(\varphi\xi) = d\varphi \otimes \xi + \varphi D\xi \quad \text{para } \varphi \in \mathcal{E}(S)_{\mathbb{C}} \text{ y } \xi \in \mathcal{E}(S, E)$$

El ejemplo más sencillo de conexión está, desde luego, en el haz producto. Una sección en $S \times \mathbb{C}^r$ se determina por un vector

$$f = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^r \end{pmatrix}$$

de funciones complejas C^∞ en S (o, lo que es igual, una función C^∞ en S con valores en C^r). La diferencial ordinaria de f , df , satisface la regla de Leibnitz usual para funciones y es, por tanto, una conexión en $S \times C^r$. En este sentido, una conexión generaliza el concepto de diferenciación.

Localmente, todo haz es trivial y se puede saber "qué tan lejos" o "qué tan cerca" está una conexión arbitraria D , en un haz $E \rightarrow S$, de ser una diferenciación ordinaria en cada trivialización local. Si $\{\sigma_j\}$ es un marco local del haz podríamos pensar en aplicar la conexión a cada sección del marco y escribir:

$$D\sigma_j = \sum_i \theta_j^i \otimes \sigma_i$$

para ciertas 1-formas complejas θ_j^i , y entonces aplicar la regla de Leibnitz para encontrar la expresión local de la conexión de una sección cualquiera $\xi = \sum_j f^j \sigma_j$. Pero hay un problema técnico: la expresión $D\sigma_j$, en principio, no tiene sentido puesto que las conexiones se aplican a secciones globales del haz. Por tanto, quisiéramos tener, para cada abierto $U \subseteq S$, una conexión

$$D_U: \mathcal{E}(U, E) \rightarrow \mathcal{E}^1(U, E)$$

de manera que si ξ es una sección global entonces $(D\xi)|_U = D_U(\xi|_U)$. Esto es posible y la construcción se basa en el hecho de que el valor de $D\xi$ en un punto p en S depende solamente del comportamiento de ξ en una vecindad de p . Estableceremos esto con ayuda del siguiente resultado.

Lema 1.- Si $\xi \in \mathcal{E}(S, E)$ es una sección que se anula en un abierto $U \subseteq S$ entonces $D\xi = 0$ en U .

Demostración.- Tomando un punto arbitrario $q \in U$ construimos una función $C^\infty f: S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \equiv 1$ en una vecindad $V \subset U$ de q y cuyo soporte esté contenido en U (el soporte de f , $\text{supp } f$ es la cerradura del conjunto $\{p \in S / f(p) \neq 0\}$).

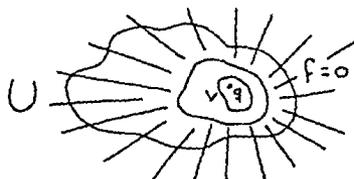


Fig. 1

La sección $f\xi$ se anula en toda la superficie y, por tanto, $D(f\xi) = 0$ puesto que D es lineal. Aplicando la regla de Leibnitz y observando que $df = 0$ en V , tenemos:

$$0 = D(f\xi) = df \otimes \xi + fD\xi = D\xi \quad \text{en } V$$

Dado que q es un punto cualquiera de U vemos que $D\xi$ se anula en todo el abierto U . \square

Ahora, si ξ y η son dos secciones que coinciden en U , aplicamos el lema anterior a $\xi - \eta$ y concluimos que $D\xi = D\eta$ en U .

Podemos ahora construir la restricción D_U de una conexión D en $E \rightarrow S$ a un abierto $U \subseteq S$ como sigue:

Sea $\xi \in \mathcal{E}(U, E)$ una sección sobre U y $p \in U$. Con la misma técnica que la usada en la demostración del lema anterior vemos que podemos construir una sección global $\tilde{\xi} \in \mathcal{E}(S, E)$ tal que $\tilde{\xi} = \xi$ en una vecindad $V \subseteq U$ de p . Definimos $(D_U \xi)(p) = (D\tilde{\xi})(p)$. La definición no depende de cuál extensión de ξ usemos pues cualesquiera dos coinciden en una vecindad de p y, por tanto, las conexiones correspondientes coincidirán en una vecindad de p .

Regresando a la descripción de la conexión D en términos de un marco $\{\sigma_j\}$, calculamos la conexión de $\xi = \sum_j f^j \sigma_j$ como sigue:

$$\begin{aligned} D\xi &= D\left(\sum_j f^j \sigma_j\right) \\ &= \sum_j (df^j \otimes \sigma_j + f^j D\sigma_j) \\ &= \sum_j df^j \otimes \sigma_j + \sum_j f^j \left(\sum_i \theta_j^i \otimes \sigma_i\right) \\ &= \sum_i df^i \otimes \sigma_i + \sum_i \left(\sum_j f^j \theta_j^i\right) \otimes \sigma_i \\ &= \sum_i \left(df^i + \sum_j \theta_j^i f^j\right) \otimes \sigma_i \\ &= \sum_i (df + \theta f)^i \otimes \sigma_i \end{aligned} \tag{1}$$

donde

$$f = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^r \end{pmatrix}$$

y $\theta = (\theta_j^i)$. Entonces $df + \theta f$ es la representación vectorial de $D\xi$ en términos de $\{\sigma_j\}$ y, así, la conexión D se describe por medio del operador $d + \theta$ que actúa en vectores. La matriz de 1-formas complejas θ es la *matriz de conexión* asociada al marco $\{\sigma_j\}$.

Esta descripción local de las conexiones nos muestra que D difiere de la diferenciación ordinaria (valga la redundancia) por una matriz de 1-formas complejas. Pero esta discrepancia podría aún deberse a una selección "incorrecta" del marco local y nos preguntamos si existirá un marco adecuado respecto al cual la matriz de conexión sea cero. La respuesta es negativa en general, pero las conexiones para las cuales esto es cierto constituyen un caso importante que trataremos más adelante.

Para darnos una idea más concreta de las conexiones, veamos un ejemplo no trivial de una conexión en el haz canónico lineal L sobre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ que construimos en el capítulo anterior (ver p.10). Dado que cada fibra L_p del haz L es una recta compleja por el origen en \mathbb{C}^2 , una sección de L está dada por una función C^∞ , $f: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que $f(p) \in L_p$ para $p \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Si X_p es un vector tangente a $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ en p , $df_p(X_p)$ es entonces un vector en \mathbb{C}^2 . Proyectando ortogonalmente sobre L_p obtenemos una aplicación lineal $T_p\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow L_p$ dada por:

$$Df_p(X_p) = R_p \circ df_p(X_p)$$

donde $R_p: \mathbb{C}^2 \rightarrow L_p$ es la proyección ortogonal de \mathbb{C}^2 sobre L_p

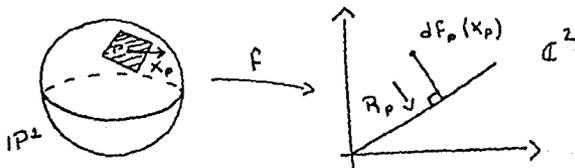


Fig. 2

El operador D es una conexión en L puesto que d satisface la regla de Leibnitz y R_p es lineal. Si $p = [z : w]$, la proyección R_p está dada por:

$$R_p(u, v) = \frac{(u, v) \cdot (z, w)}{\|(z, w)\|^2} (z, w)$$

donde $(u, v) \cdot (z, w)$ es el producto interior usual en \mathbb{C}^2 . Para describir localmente a D tomemos el marco de L determinado por la función $\sigma(p) = (1, w/z)$ definida

para $p \neq [0 : 1]$. La conexión de σ es:

$$\begin{aligned} D\sigma_p(X_p) &= \frac{d\sigma_p(X_p) \cdot (z, w)}{\|(z, w)\|^2} (z, w) \\ &= \frac{d\sigma_p(X_p) \cdot (z, w)}{\|(z, w)\|^2} z\sigma(p) \end{aligned}$$

La 1-forma compleja θ definida por

$$\theta_p(X_p) = \frac{d\sigma_p(X_p) \cdot (z, w)}{\|(z, w)\|^2} z$$

es, entonces, la matriz de conexión asociada a σ . Tomando la coordenada no homogénea $\zeta = w/z$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{[0 : 1]\}$, podemos expresar a θ en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \theta_p(X_p) &= \frac{\bar{z}d\sigma_p(X_p) \cdot (1, w/z)}{z\bar{z}(1 + \frac{w\bar{w}}{z\bar{z}})} z \\ &= \frac{z\bar{z}d\sigma_p(X_p) \cdot (1, \zeta)}{z\bar{z}(1 + \zeta\bar{\zeta})} \\ &= \frac{d\sigma_p(X_p) \cdot (1, \zeta)}{1 + \zeta\bar{\zeta}} \end{aligned}$$

Como $\sigma(p) = (1, w/z) = (1, \zeta)$, entonces $d\sigma_p = (0, d\zeta_p)$. Por tanto:

$$\begin{aligned} \theta_p(X_p) &= \frac{(0, d\zeta_p(X_p)) \cdot (1, \zeta)}{1 + \zeta\bar{\zeta}} \\ &= \frac{\bar{\zeta}d\zeta_p(X_p)}{1 + \zeta\bar{\zeta}} \end{aligned}$$

Finalmente, eliminando los argumentos, tenemos que

$$\theta = \frac{\bar{\zeta}d\zeta}{1 + \zeta\bar{\zeta}}$$

2 Curvatura

Dada una conexión D en un haz vectorial $E \rightarrow S$ podemos construir una aplicación lineal (que también denotaremos por D):

$$D: \mathcal{E}^1(S, E) \rightarrow \mathcal{E}^2(S, E)$$

forzando la regla de Leibnitz:

$$D(\omega \otimes \xi) = d\omega \otimes \xi - \omega \wedge D\xi \quad \text{para } \omega \in \mathcal{E}^1(S)_G \quad \text{y} \quad \xi \in \mathcal{E}(S, E)$$

donde $\omega \wedge D\xi$ se define por

$$(\omega \wedge D\xi)_p(X_p, Y_p) = \omega_p(X_p)(D\xi)_p(Y_p) - \omega_p(Y_p)(D\xi)_p(X_p)$$

Usando esta extensión de la conexión definimos la *curvatura* F_D de D como la composición:

$$F_D = D^2 = D \circ D: \mathcal{E}(S, E) \longrightarrow \mathcal{E}^2(S, E)$$

A diferencia de la conexión, la curvatura es lineal sobre el anillo $\mathcal{E}(S)_G$:

$$\begin{aligned} F(\varphi\xi) &= D(D(\varphi\xi)) \\ &= D(d\varphi \otimes \xi + \varphi D\xi) \\ &= D(d\varphi \otimes \xi) + D(\varphi D\xi) \\ &= -d\varphi \wedge D\xi + d\varphi \wedge D\xi + \varphi D(D\xi) \\ &= \varphi F(\xi) \end{aligned}$$

Por consiguiente, el valor de $F_D\xi$ en un punto $p \in S$ depende exclusivamente del valor de ξ en p . Entonces F_D determina una 2-forma con valores en el haz $End(E)$ (cuya fibra en p es el espacio de endomorfismos en E_p) definiendo:

$$F_D(p)(X_p, Y_p)\xi_p = (F_D\xi)_p(X_p, Y_p) \in E_p \quad \text{para } X_p, Y_p \in T_pS \quad \text{y} \quad \xi \in E_p$$

donde ξ es cualquier extensión de ξ_p a una sección en $\mathcal{E}(S, E)$. Si θ es una matriz de conexión de D y f un vector de funciones, tenemos:

$$\begin{aligned} (d + \theta)^2 f &= (d + \theta)(df + \theta f) \\ &= d(\theta f) + \theta \wedge df + (\theta \wedge \theta) f \\ &= (d\theta) f - \theta \wedge df + \theta \wedge df + (\theta \wedge \theta) f \\ &= (d\theta + \theta \wedge \theta) f \end{aligned} \tag{2}$$

Así, la matriz $\Omega = d\theta + \theta \wedge \theta$ de 2-formas complejas describe localmente la curvatura F . Ω es la *forma de curvatura* asociada al marco dado.

La siguiente proposición muestra como cambian la matriz de conexión y la forma de curvatura de una conexión cuando efectuamos un cambio de marco.

Proposición 2.- Sea D una conexión en un haz $E \rightarrow S$. Sean $\{\sigma_j\}$ y $\{\rho_j\}$ dos marcos locales del haz y sean θ , Ω , $\hat{\theta}$ y $\hat{\Omega}$ las matrices de conexión y las formas

de curvatura asociadas a los marcos $\{\sigma_j\}$, $\{\rho_j\}$ respectivamente. Entonces tienen lugar las siguientes relaciones:

$$\hat{\theta} = g^{-1}dg + g^{-1}\theta g \quad (3)$$

$$\hat{\Omega} = g^{-1}\Omega g \quad (4)$$

donde g es el cambio de marco entre $\{\sigma_j\}$ y $\{\rho_j\}$.

Demostración.- Por un lado tenemos:

$$\begin{aligned} D\rho_j &= \sum_i \hat{\theta}_j^i \otimes \rho_i \\ &= \sum_i \hat{\theta}_j^i \otimes \left(\sum_k g_i^k \sigma_k \right) \\ &= \sum_k \left(\sum_i g_i^k \hat{\theta}_j^i \right) \otimes \sigma_k \end{aligned}$$

y, por otra parte, aplicando (1) al vector

$$\rho_j = \begin{pmatrix} g_j^1 \\ \vdots \\ g_j^r \end{pmatrix}$$

tenemos:

$$D\rho_j = \sum_j \left(dg_j^k + \theta_j^k g_j^i \right) \otimes \sigma_k$$

Igualando coeficientes obtenemos:

$$g\hat{\theta} = dg + \theta g$$

que prueba (3).

Diferenciando la expresión anterior tenemos:

$$dg \wedge \hat{\theta} + g d\hat{\theta} = (dg)g - \theta \wedge dg$$

y sustituyendo

$$dg = g\hat{\theta} - \theta g$$

llegamos a:

$$g\hat{\theta} \wedge \hat{\theta} - \theta g \wedge \hat{\theta} + g d\hat{\theta} = (dg)g - \theta \wedge g\hat{\theta} + \theta \wedge \theta g$$

finalmente:

$$g(d\hat{\theta} + \hat{\theta} \wedge \hat{\theta}) = (d\theta + \theta \wedge \theta)g$$

o bien:

$$g\hat{\Omega} = \Omega g$$

y esto implica (4) \square

Definición.- Una conexión D en un haz vectorial $E \xrightarrow{\pi} S$ es una conexión plana si $F_D = 0$.

Veremos en un momento que las conexiones planas son aquellas para las cuales es posible encontrar trivializaciones locales en donde la matriz de conexión sea cero.

Para darnos una idea de lo que sucede cuando $F_D = 0$ consideremos primero una estructura plana en el haz, es decir, una familia de marcos $\{\sigma_j^\alpha\}$ del haz, sobre abiertos U_α que cubran a la superficie y cuyas funciones de transición $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(r, \mathbb{C})$ sean constantes. En cada representación "cilíndrica" $U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ del haz, una sección horizontal (i.e: dada por una función constante) es lo que intuitivamente consideraríamos como una sección plana. Como las funciones de transición $g_{\alpha\beta}$ son constantes, en el "proceso de pegado" para construir el haz, los "cilindros" $U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ son unidos por $g_{\alpha\beta}$ a lo largo de secciones planas de manera que, intuitivamente, podemos pensar al haz como un haz "plano".

Esta noción de estructura plana es independiente de cualquier conexión. Sin embargo, una estructura plana $\{\sigma_j^\alpha\}$ determina de forma natural, una conexión plana en el haz. Para ver esto comenzamos localmente construyendo una conexión D_α en $\pi^{-1}(U_\alpha)$ definiendo $D_\alpha \sigma_j^\alpha = 0$ y forzando la regla de Leibnitz, esto es, si

$$\xi = \sum_j f^j \sigma_j^\alpha$$

entonces

$$D_\alpha \xi = \sum_j (df^j \otimes \sigma_j^\alpha + f^j D_\alpha \sigma_j^\alpha) = \sum_j df^j \otimes \sigma_j^\alpha$$

Ahora, si $\xi \in \mathcal{E}(S, E)$, definimos una conexión D en el haz por

$$(D\xi)|_{U_\alpha} = D_\alpha(\xi|_{U_\alpha})$$

La definición no depende del abierto U_α pues en $U_\alpha \cap U_\beta$ tenemos:

$$D_\alpha \sigma_j^\beta = D_\alpha \left(\sum_i (g_{\alpha\beta})^i_j \sigma_i^\alpha \right) = \sum_i [d(g_{\alpha\beta})^i_j \otimes \sigma_i^\alpha] = 0 = D_\beta \sigma_j^\beta$$

puesto que $d(g_{\alpha\beta})_j^i = 0$. Para esta conexión es claro que $D\sigma_j^\alpha = 0$ de manera que las matrices de conexión asociadas θ_α son cero y, por tanto, también las formas de curvatura Ω_α se anulan y la conexión es plana.

Recíprocamente, quisiéramos construir una estructura plana en un haz partiendo de una conexión plana D . Para ello basta mostrar que la ecuación $D\xi = 0$ admite suficientes soluciones locales ("suficientes" significa que exista una base de soluciones locales), porque si $\{\sigma_j\}$ y $\{\rho_j\}$ son dos marcos solución relacionados por funciones de transición g_j^i entonces:

$$0 = D\rho_j = D\left(\sum_i g_j^i \sigma_i\right) = \sum_i (dg_j^i \otimes \sigma_i + g_j^i D\sigma_i) = \sum_i dg_j^i \otimes \sigma_i$$

de donde $dg_j^i = 0$ que, a su vez, implica que las g_j^i son constantes. Por lo tanto, las soluciones de $D\xi = 0$ constituyen una estructura plana en el haz.

Proposición 3.- Sea D una conexión en un haz vectorial $E \rightarrow S$. En torno a cada punto $p \in S$ existe un marco local $\{\sigma_j\}$ del haz cuyas secciones satisfacen la ecuación

$$D\xi = 0$$

Demostración.- Localmente, la ecuación $D\xi = 0$ puede escribirse en la forma $df + \theta f = 0$ donde θ es una matriz de conexión de D y la incógnita f es una función C^∞ en un abierto $U \subseteq S$ con valores en \mathbb{C}^r . La idea de la demostración de que esta ecuación admite soluciones es usar el teorema de integrabilidad de Frobenius (ver por ej. [S], p.293) para encontrar las secciones solución como las subvariedades integrales de cierta distribución de dimensión 2 en $U \times \mathbb{C}^r$.

Sea w la carta usual de \mathbb{C}^r y $\eta = dw + \theta w$ considerada como un vector de 1-formas complejas en $U \times \mathbb{C}^r$. Si θ se separa en sus partes real e imaginaria por $\theta = \alpha + i\beta$ y $w = u + iv$ entonces $\eta = \mu + i\nu$ donde

$$\mu = du + (\alpha u - \beta v)$$

$$\nu = dv + (\alpha v + \beta u)$$

Las $2r$ 1-formas reales μ^j, ν^j son linealmente independientes (esto es inmediato) y, por tanto, generan una distribución Δ de dimensión 2 en $U \times \mathbb{C}^r$ dada por la correspondencia:

$$\begin{aligned} (p, w) \mapsto \Delta_{(p,w)} &= \bigcap_{j=1}^r (\ker \mu_{(p,w)}^j \cap \ker \nu_{(p,w)}^j) \\ &= \bigcap_{j=1}^r \ker \eta_{(p,w)}^j \\ &= \ker \eta_{(p,w)} \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} d\eta &= d(dw + \theta w) \\ &= d\theta w - \theta \wedge dw \end{aligned}$$

y usando el hecho de que $d\theta + \theta \wedge \theta = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} d\eta &= -\theta \wedge \theta w - \theta \wedge dw \\ &= -\theta \wedge \eta \end{aligned}$$

y separando las partes real e imaginaria

$$\begin{aligned} d\mu &= -\alpha \wedge \mu + \beta \wedge \nu \\ d\nu &= -\beta \wedge \mu - \alpha \wedge \nu \end{aligned}$$

que, entrada a entrada nos dan

$$\begin{aligned} d\mu^j &= -\sum_k \alpha_k^j \wedge \mu^k + \sum_k \beta_k^j \wedge \nu^k \\ d\nu^j &= -\sum_k \beta_k^j \wedge \mu^k - \sum_k \alpha_k^j \wedge \nu^k \end{aligned}$$

Estas son las condiciones de Frobenius para que la distribución Δ sea integrable.

Sea $(p_0, w_0) \in U \times \mathbb{C}^r$ y (X_{p_0}, a) un vector tangente a $U \times \mathbb{C}^r$ en (p_0, w_0) . Entonces $\eta_{(p_0, w_0)}(X_{p_0}) = a + \theta_{p_0}(X_{p_0})w_0$

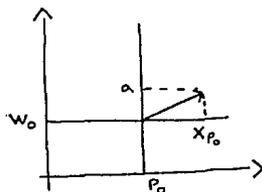


Fig. 3

En particular, si $X_{p_0} = 0$, $\eta_{(p_0, w_0)}(0, a) = a = 0$ sólo si $a = 0$. Por consiguiente,

$$\Delta_{(p_0, w_0)} = \ker \eta_{(p_0, w_0)}$$

no es paralelo a $T_{w_0}\mathbb{C}^r$ y, entonces, la subvariedad integral de Δ que pasa por (p_0, w_0) es (en una vecindad de (p, w_0)) la gráfica de una función $C^\infty f: V \subseteq U \rightarrow \mathbb{C}^r$ donde V es un abierto alrededor de p_0 . Finalmente, como η se anula en esta

gráfica podemos concluir que $df + \theta f = 0$. Como la condición inicial $w_0 = f(p_0)$ es arbitraria, podemos escoger $w_0^1, \dots, w_0^r \in \mathbb{C}^r$ linealmente independientes, y las correspondientes soluciones $f^1 \dots f^r$ serán linealmente independientes en p_0 y, por continuidad, en una vecindad de p_0 . \square

3 Estructuras holomorfas

Recordemos que en el capítulo 1 definimos una estructura holomorfa en un haz vectorial a partir de una familia de marcos con funciones de transición holomorfas. Como toda función constante es holomorfa, vemos entonces que toda estructura plana en el haz es también una estructura holomorfa; en consecuencia, según lo que describimos en la sección anterior, toda conexión plana en un haz vectorial determina una estructura holomorfa en el haz. Lo anterior es un caso particular del hecho más general de que toda conexión en un haz vectorial sobre una superficie de Riemann (no necesariamente plana) determina una estructura holomorfa en el haz. Con miras a establecer esto, daremos ahora una nueva definición de estructura holomorfa que, en su forma, es muy similar a la definición de conexión.

Definición.- Una *estructura holomorfa* en un haz vectorial E sobre una superficie de Riemann S es una aplicación lineal (sobre \mathbb{C})

$$D'' : \mathcal{E}(S, E) \longrightarrow \mathcal{E}^{0,1}(S, E)$$

que satisface la siguiente regla de Leibnitz:

$$D''(\varphi\xi) = d''\varphi \otimes \xi + \varphi D''\xi$$

Todo lo que dijimos acerca del carácter local de las conexiones es aplicable a las estructuras holomorfas y podemos encontrar representaciones locales de una estructura holomorfa D'' en términos de un marco local por medio de un operador $d'' + \theta''$ donde ahora θ'' es una matriz de 1-formas complejas de tipo $(0,1)$. Dos matrices θ'' y $\hat{\theta}''$ que representen a D'' se relacionan por la fórmula:

$$\hat{\theta}'' = g^{-1}d''g + g^{-1}\theta''g \quad (5)$$

donde g es la correspondiente función de transición. Esta relación se deduce de manera similar a como se dedujo (3)

Al igual que con estructuras planas, podemos construir una estructura holomorfa en un haz vectorial $E \rightarrow S$ a partir de una familia de marcos $\{\sigma_j^\alpha\}$ con funciones de transición holomorfas definiendo localmente $D''\sigma_j^\alpha = 0$ y forzando la regla de Leibnitz, y luego "pegando" estos operadores para obtener una estructura holomorfa

D'' . La diferencia es que la compatibilidad del "pegado" en el caso de estructuras planas se basa en que $d(g_{\alpha\beta})^i_j = 0$ porque las $(g_{\alpha\beta})^i_j$ son constantes. En este caso la compatibilidad descansa en el hecho de que $d''(g_{\alpha\beta})^i_j = 0$ porque las $(g_{\alpha\beta})^i_j$ son holomorfas.

Análogamente, si $\{\sigma_j\}$ y $\{\rho_j\}$ son dos marcos solución de la ecuación $D''\xi = 0$ para una estructura holomorfa D'' , y g es el cambio de coordenadas, entonces:

$$0 = D''\rho_j = D''\left(\sum_i g^i_j \sigma_i\right) = \sum_i (d''g^i_j \otimes \sigma_i + g^i_j D''\sigma_i) = \sum_i d''g^i_j \otimes \sigma_i$$

de manera que $d''g^i_j = 0$ por lo cual las g^i_j son holomorfas. Por tanto, a partir de D'' podemos construir una estructura holomorfa (en el sentido del capítulo I) partiendo de las soluciones de $D''\xi = 0$. La demostración de que esta ecuación tiene suficientes soluciones puede encontrarse en (Atiyah).¹ Nosotros nos limitaremos a mostrar la existencia de soluciones para el caso en que el haz es lineal.

Proposición 4.- Sea $E \rightarrow S$ un haz vectorial de rango 1 sobre una superficie de Riemann S y sea D'' una estructura holomorfa en el haz. En torno a cada punto de S existe una sección no nula que satisface la ecuación

$$D''\xi = 0$$

Demostración.- La ecuación $D''\xi = 0$ es, localmente, de la forma $d''f + \theta f = 0$ donde θ es una 1-forma compleja de tipo $(0, 1)$ sobre un abierto $U \subseteq S$, y f una función C^∞ de valores complejos. Si $z: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una carta holomorfa de S , entonces $\theta = a d\bar{z}$ ² donde $a: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función C^∞ . Entonces la ecuación que queremos resolver es:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + af\right) d\bar{z} = 0$$

o, simplemente:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + af = 0$$

Como f debe ser una función que no se anule, podemos pensar en encontrar una solución del tipo $f = e^g$. La ecuación se transforma en:

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} e^g + a e^g = 0$$

¹ Para esta ecuación no necesitamos una condición como $D^2 = 0$ porque $D''^2 = 0$ siempre

² Ver la nota 6 del capítulo I, p.6

y, dado que $e^g \neq 0$ en todo punto, esto equivale a:

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \varphi$$

donde $\varphi = -a$. Como este es un problema local, podemos suponer que U es un disco Δ en el plano complejo y φ es C^∞ en $\bar{\Delta}$. Multiplicando a φ por una función adecuada podemos suponer que $\text{supp } \varphi \subset \Delta$ de manera que φ se anule en una vecindad de la frontera de Δ

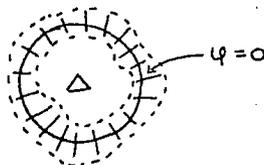


Fig. 4

La fórmula integral de Cauchy para funciones C^∞ ,³ aplicada a φ nos da:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{\varphi(w)}{w-z} dw + \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Delta} \frac{\partial\varphi(w)}{\partial\bar{w}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Delta} \frac{\partial\varphi(w)}{\partial\bar{w}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z} \end{aligned}$$

puesto que $\varphi = 0$ en $\partial\Delta$. Sea

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Delta} \varphi(w) \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z}$$

Como $\text{supp } \varphi \subset \Delta$ podemos escribir:

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathcal{G}} \varphi(w) \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathcal{G}} \varphi(u+z) \frac{du \wedge d\bar{u}}{u} \end{aligned}$$

³ Ver, por ejemplo, [F]

haciendo $u = w - z$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathcal{G}} \frac{\partial \varphi(u+z)}{\partial \bar{z}} \frac{du \wedge d\bar{u}}{u} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathcal{G}} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{w}}(u+z) \frac{du \wedge d\bar{u}}{u} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathcal{G}} \frac{\partial \varphi(w)}{\partial \bar{w}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Delta} \frac{\partial \varphi(w)}{\partial \bar{w}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z} \\ &= \varphi(z) \blacksquare \end{aligned}$$

Con esta definición de estructura holomorfa es inmediato que toda conexión D en un haz vectorial $E \rightarrow S$ determina una estructura holomorfa en el haz. En efecto, la descomposición de $\mathcal{E}^1(S, E)$ en la suma directa:

$$\mathcal{E}^1(S, E) = \mathcal{E}^{1,0}(S, E) \oplus \mathcal{E}^{0,1}(S, E)$$

induce una descomposición de D en dos sumandos, $D = D' + D''$ donde

$$D': \mathcal{E}(S, E) \rightarrow \mathcal{E}^{1,0}(S, E)$$

$$D'': \mathcal{E}(S, E) \rightarrow \mathcal{E}^{0,1}(S, E)$$

son aplicaciones lineales. Si $\varphi \in \mathcal{E}(S)_{\mathcal{G}}$ y $\xi \in \mathcal{E}(S, E)$, la regla de Leibnitz para D nos da:

$$\begin{aligned} D'(\varphi\xi) + D''(\varphi\xi) &= D(\varphi\xi) \\ &= d\varphi \otimes \xi + \varphi D\xi \\ &= (d'\varphi + d''\varphi) \otimes \xi + (\varphi(D'\xi + D''\xi)) \\ &= (d'\varphi \otimes \xi + \varphi D'\xi) + (d''\varphi \otimes \xi + \varphi D''\xi) \end{aligned}$$

e igualando las partes $(0, 1)$ tenemos:

$$D''(\varphi\xi) = d''\varphi \otimes \xi + \varphi D''\xi$$

Así que D'' satisface la regla de Leibnitz y es, por tanto, una estructura holomorfa en E . Claramente, si θ es una matriz de conexión de D y $\theta = \theta' + \theta''$ es la

descomposición de θ en sus partes $(1, 0)$ y $(0, 1)$, entonces $d'' + \theta''$ es la representación de D'' .

Como ejemplo consideremos la conexión D que construimos en el haz lineal L sobre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. La matriz de conexión asociada al marco $\sigma(p) = (1, w/z)$

$$\theta = \frac{\bar{\zeta}}{1 + \zeta\bar{\zeta}} d\zeta \quad \zeta = w/z$$

es de tipo $(1, 0)$. Esto significa que $D''\sigma = 0$ puesto que $\theta'' = 0$ y lo mismo sucede para el marco $\tau(p) = (z/w, 1)$. Por tanto, la estructura holomorfa inducida por D coincide con la estructura holomorfa determinada por las secciones σ y τ . Esta conexión no es plana pues:

$$\begin{aligned} d\theta &= d\left(\frac{\bar{\zeta}}{1 + \zeta\bar{\zeta}}\right) \wedge d\zeta \\ &= \left(\frac{(1 + \zeta\bar{\zeta})d\bar{\zeta} - d(1 + \zeta\bar{\zeta})\bar{\zeta}}{(1 + \zeta\bar{\zeta})^2}\right) \wedge d\zeta \\ &= \left(\frac{d\bar{\zeta} + \zeta\bar{\zeta}d\bar{\zeta} - \bar{\zeta}d(\zeta\bar{\zeta})}{(1 + \zeta\bar{\zeta})^2}\right) \wedge d\zeta \\ &= \left(\frac{d\bar{\zeta} + \zeta\bar{\zeta}d\bar{\zeta} - \bar{\zeta}\bar{\zeta}d\zeta - \zeta\bar{\zeta}d\bar{\zeta}}{(1 + \zeta\bar{\zeta})^2}\right) \wedge d\zeta \\ &= \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{(1 + \zeta\bar{\zeta})^2} \neq 0 \end{aligned}$$

4 Conexiones unitarias y estructuras holomorfas

Hasta ahora hemos visto que toda conexión en un haz vectorial $E \rightarrow S$ determina una estructura holomorfa en el haz tomando su parte $(0, 1)$. Es cierto también que toda estructura holomorfa es la parte $(0, 1)$ de alguna conexión (esto quedará claro en un momento) pero tal conexión no es única. Por ejemplo, en el haz trivial $S \times \mathbb{C}^r$, una conexión se determina *globalmente* por una matriz de 1-formas complejas en S y es claro que cualesquiera dos matrices cuyas partes $(0, 1)$ coincidan, determinan la misma estructura holomorfa aún cuando sus partes $(1, 0)$ no sean iguales. Con el propósito de establecer cierta unicidad, introducimos una métrica hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en el haz. Si $\zeta \in \mathcal{E}^1(S, E)$ y $\xi \in \mathcal{E}(S, E)$ definimos la 1-forma compleja en S , $\langle \zeta, \xi \rangle$ por:

$$\langle \zeta, \xi \rangle_p(X_p) = \langle \zeta_p(X_p), \xi_p \rangle \quad X_p \in T_p S$$

Con esta extensión de la métrica decimos que una conexión D en el haz es *unitaria* (o compatible con la métrica) si:

$$d\langle \xi, \eta \rangle = \langle D\xi, \eta \rangle + \langle \xi, D\eta \rangle \quad \xi, \eta \in \mathcal{E}(S, E)$$

En términos de un marco $\{\sigma_j\}$ del haz tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle D\sigma_j, \sigma_i \rangle + \langle \sigma_j, D\sigma_i \rangle &= \left\langle \sum_k \theta_j^k \otimes \sigma_k, \sigma_i \right\rangle + \left\langle \sigma_j, \sum_k \theta_i^k \otimes \sigma_k \right\rangle \\ &= \sum_k \theta_j^k h_{ik} + \sum_k \bar{\theta}_k^i h_{kj} \\ &= (h\theta)_j^i + (\bar{\theta}^t h)_j^i \\ &= (h\theta + \bar{\theta}^t h)_j^i \end{aligned}$$

donde $h = (h_{ij})$ es la matriz de la métrica asociada al marco $\{\sigma_j\}$. Como $dh_{ij} = d \langle \sigma_j, \sigma_i \rangle$ vemos que la conexión es unitaria si y sólo si

$$dh = h\theta + \bar{\theta}^t h \quad (6)$$

para cualquier marco $\{\sigma_j\}$. Si nos restringimos a marcos unitarios entonces $h = I$ y la condición se reduce a:

$$\theta + \bar{\theta}^t = 0 \quad (7)$$

Si θ' y θ'' son las partes (1,0) y (0,1) de θ , entonces (6) puede escribirse como:

$$\theta' = -\overline{(\theta'')}^t \quad (8)$$

Esta última expresión muestra que una conexión unitaria se determina una vez que se conoce su parte (0,1). Esta expresión nos permite construir, de manera única, una conexión unitaria a partir de una estructura holomorfa.

Proposición 5.- Sea $E \rightarrow S$ un haz vectorial sobre una superficie de Riemann y D'' una estructura holomorfa en el haz. Dada una métrica hermitiana en el haz, existe una única conexión unitaria D cuya parte (0,1) coincide con D'' .

Demostración.- Sea θ'' la matriz asociada a D'' en términos de un marco unitario del haz. Definimos la conexión D , localmente, haciendo

$$\theta = \theta' + \theta''$$

donde θ' está dada por (8). Para ver que D está bien definida globalmente debemos verificar que θ se transforma según (3) cuando cambiamos de marco unitario. Si $\hat{\theta}''$ es otra matriz asociada a D'' , en términos de un marco unitario, ciertamente se satisface:

$$\hat{\theta}'' = g^{-1} \theta'' g + g^{-1} \theta'' g$$

Como estamos usando marcos unitarios, la función de transición g toma valores en $U(r)$ por lo cual $g^{-1} = \bar{g}^t$. Entonces:

$$\hat{\theta}'' = \bar{g}^t d''g + \bar{g}^t \theta''g$$

Trasponiendo y conjugando de ambos lados:

$$\overline{(\hat{\theta}'')}^t = \overline{(d''g)}^t g + \bar{g}^t \overline{(\theta'')}^t g$$

o bien:

$$\hat{\theta}' = -\overline{(d''g)}^t g + \bar{g}^t \theta'g \quad (*)$$

Igualando las partes (1,0) en la expresión $\overline{dg} = d\bar{g}$ obtenemos que $\overline{d''g} = d'\bar{g}$. Por tanto,

$$\overline{(d''g)}^t g = (d'\bar{g}^t)g$$

Dado que $\bar{g}^t g = I$ vemos que:

$$0 = d'I = d'(\bar{g}^t g) = \bar{g}^t d'g + (d'\bar{g}^t)g$$

esto es:

$$(d'\bar{g}^t)g = -\bar{g}^t d'g$$

sustituyendo en (*) llegamos a:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}' &= \bar{g}^t d'g + \bar{g}^t \theta'g \\ &= g^{-1} d'g + g^{-1} \theta'g \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} g^{-1} dg + g^{-1} \theta g &= (g^{-1} d'g + g^{-1} \theta'g) + (g^{-1} d''g + g^{-1} \theta''g) \\ &= \hat{\theta}' + \hat{\theta}'' \\ &= \hat{\theta} \end{aligned}$$

Obtenemos así, una conexión unitaria cuya parte (0,1) coincide con la estructura holomorfa original. Esta conexión es única puesto que si dos conexiones unitarias coinciden en sus partes (0,1), en virtud de (8), también coinciden en sus partes (1,0) y, por tanto, son iguales. ■

Para enfatizar la importancia de los resultados obtenidos los englobaremos en el siguiente teorema.

Teorema 6.- Sea E un haz vectorial con métrica hermitiana sobre una superficie de Riemann S . La correspondencia

$$D \longmapsto D''$$

que asigna a cada conexión unitaria D su parte $(0, 1)$ D'' , es una correspondencia uno a uno entre el conjunto de conexiones unitarias del haz y el conjunto de estructuras holomorfas del haz. En términos de un marco unitario del haz, la correspondencia está dada por

$$\theta \longmapsto \theta''$$

y la correspondencia inversa por

$$\theta'' \longmapsto \theta'' - \overline{(\theta'')}^t$$

Es interesante observar que este resultado nos proporciona una parametrización de un conjunto que depende de la estructura compleja de la superficie (las estructuras holomorfas), por un conjunto que se determina solamente por la estructura diferenciable de la superficie (las conexiones unitarias).

El resultado del capítulo anterior nos permite estudiar las estructuras holomorfas en un haz vectorial a partir de las conexiones del haz. En este capítulo veremos un ejemplo de esto al considerar las estructuras holomorfas en el haz trivial de rango uno sobre una superficie de Riemann. Lo que haremos de hecho, es dar una noción de equivalencia de estructuras holomorfas y estudiar entonces el conjunto de clases de equivalencia.

1 Automorfismos

Definición.- Un *automorfismo* de un haz vectorial E sobre una superficie de Riemann S es un difeomorfismo

$$A: E \longrightarrow E$$

tal que $A(E_p) \subseteq E_p$ para p en S y, en cada fibra E_p , A es un isomorfismo lineal sobre \mathbb{C} .

Denotaremos por $\mathcal{G}(E)$ al conjunto de automorfismos de un haz vectorial $E \rightarrow S$. Obsérvese que $\mathcal{G}(E)$ es un grupo bajo la composición de funciones.

Un automorfismo A de un haz vectorial $E \rightarrow S$ induce aplicaciones lineales

$$\mathcal{E}^k(S, E) \xrightarrow{A} \mathcal{E}^k(S, E) \quad k = 0, 1, 2$$

definidas puntualmente de la manera natural. Es fácil ver que si $\zeta \in \mathcal{E}^1(S, E)$ es de tipo $(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$), entonces $A\zeta$ también es de tipo $(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$). En particular, también tenemos una aplicación lineal

$$\mathcal{E}^{0,1}(S, E) \xrightarrow{A} \mathcal{E}^{0,1}(S, E)$$

En estos términos, si $D'': \mathcal{E}(S, E) \rightarrow \mathcal{E}^{0,1}(S, E)$ es una estructura holomorfa y A es un automorfismo, la conjugación $A^{-1}D''A$ de D'' también es una estructura holomorfa puesto que si $\phi \in \mathcal{E}(S)_\sigma$ y $\xi \in \mathcal{E}(S, E)$ entonces:

$$\begin{aligned} (A^{-1}D''A)(\phi\xi) &= A^{-1}\left(D''(A(\phi\xi))\right) \\ &= A^{-1}\left(D''(\phi A\xi)\right) \\ &= A^{-1}\left(d''\phi \otimes A\xi + \phi D''(A\xi)\right) \\ &= A^{-1}\left(d''\phi \otimes A\xi\right) + A^{-1}\left(\phi D''(A\xi)\right) \\ &= d''\phi \otimes A^{-1}A\xi + \phi A^{-1}\left(D''(A\xi)\right) \\ &= d''\phi \otimes \xi + \phi(A^{-1}D''A)\xi \end{aligned}$$

que es la regla de Leibnitz. De hecho, si $\mathcal{H}(E)$ denota al conjunto de estructuras holomorfas en E , la correspondencia

$$(A, D'') \mapsto A^{-1}D''A \quad A \in \mathcal{G}(E), D'' \in \mathcal{H}(E)$$

define una acción (por la derecha) del grupo $\mathcal{G}(E)$ en $\mathcal{H}(E)$. Diremos que dos estructuras holomorfas D''_A y D''_B son *equivalentes* si están en la misma $\mathcal{G}(E)$ -órbita.

En el capítulo 2, sección 3, vimos que una estructura holomorfa D'' en un haz vectorial $E \rightarrow S$, sobre una superficie de Riemann, determina una familia de marcos locales del haz, $\{\sigma_j^\alpha\}$ con funciones de transición holomorfas. Esta familia, a su vez, determina una estructura compleja $\{\phi_\alpha\}$ en E (ver cap.1, secc.5). Ahora bien, un automorfismo $A \in \mathcal{G}(E)$ lleva soluciones η de la ecuación

$$D''\xi = 0$$

a soluciones $A^{-1}\eta$ de la ecuación

$$A^{-1}D''A\xi = 0$$

de manera que obtenemos otra familia de marcos $\{\rho_j^\alpha = A^{-1}\sigma_j^\alpha\}$ con funciones de transición holomorfas. Si $\{\psi_\alpha\}$ es la correspondiente estructura compleja en E , un cálculo sencillo nos muestra que la aplicación

$$A: (E, \{\psi_\alpha\}) \rightarrow (E, \{\phi_\alpha\})$$

es un biholomorfismo. Esto indica que la noción de equivalencia de estructuras holomorfas en E bajo la acción de $\mathcal{G}(E)$ corresponde con la noción de equivalencia de estructuras complejas en E .

Dado un haz vectorial $E \rightarrow S$, el grupo $\mathcal{G}(E)$ también actúa en el conjunto de conexiones del haz. Más aún, si D es una conexión plana y $A \in \mathcal{G}(E)$, la conexión $A^{-1}DA$ también es plana puesto que:

$$(A^{-1}DA)^2 = A^{-1}DAA^{-1}DA = A^{-1}D^2A = 0$$

y, por tanto, también podemos considerar $\mathcal{G}(E)$ -órbitas de conexiones planas.

Ahora, si en el haz tenemos una métrica hermitiana, no podemos esperar que las conexiones unitarias se preserven ante automorfismos ya que la métrica es una estructura adicional en el haz. Para conservar el concepto de equivalencia debemos considerar automorfismos *unitarios*, esto es, automorfismos que preserven la métrica:

$$\langle A\xi, A\eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$$

Si D es una conexión unitaria y A un automorfismo unitario entonces $A^{-1}DA$ también es unitaria:

$$\begin{aligned} \langle (A^{-1}DA)\xi, \eta \rangle + \langle \xi, (A^{-1}DA)\eta \rangle &= \langle A^{-1}(D(A\xi)), A^{-1}(A\eta) \rangle \\ &\quad + \langle A^{-1}(A\xi), A^{-1}(D(A\eta)) \rangle \\ &= \langle D(A\xi), A\eta \rangle + \langle A\xi, D(A\eta) \rangle \\ &= d\langle A\xi, A\eta \rangle \\ &= d\langle \xi, \eta \rangle \end{aligned}$$

Denotemos por $\mathcal{U}(E) \subseteq \mathcal{G}(E)$ al subgrupo de automorfismos unitarios de E y por $\mathcal{F}(E)$ al conjunto de conexiones unitarias planas del haz. Por lo expresado arriba vemos que la correspondencia

$$(A, D) \mapsto A^{-1}DA \quad A \in \mathcal{U}(E), D \in \mathcal{F}(E)$$

define una acción (derecha) del grupo $\mathcal{G}(E)$ en $\mathcal{F}(E)$. Como en el caso de estructuras holomorfas, diremos que dos conexiones unitarias planas son *equivalentes* si están en la misma $\mathcal{U}(E)$ -órbita.

Veremos en la siguiente sección que los espacios de órbitas

$$\mathcal{H}(E)/\mathcal{G}(E) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}(E)/\mathcal{U}(E)$$

están en correspondencia biunívoca.

En términos de un marco local, un automorfismo de un haz vectorial $E \rightarrow S$ es una aplicación C^∞

$$g: U \subseteq S \rightarrow \mathcal{G}(r, \mathbb{C})$$

y la condición para que dos conexiones D_A y D_B sean equivalentes es que sus matrices de conexión θ y $\hat{\theta}$ se relacionen por la fórmula

$$\theta_B = g^{-1}dg + g^{-1}\theta_A g$$

de manera que, localmente, en virtud de la proposición 2 del capítulo anterior (ver p.22), podemos considerar que las dos conexiones coinciden si interpretamos a g como un cambio de marco en lugar de un automorfismo. Si el haz es trivial, la identificación puede hacerse globalmente.

De forma análoga, dos estructuras holomorfas D''_A y D''_B son equivalentes si, localmente, sus matrices se relacionan por la fórmula

$$\theta''_B = g^{-1}d''g + g^{-1}\theta''_A g$$

que es análoga a la fórmula (5) del capítulo anterior (ver p.26).

Finalmente, si tomamos marcos unitarios, la condición de que el automorfismo A sea unitario es que la aplicación $g: U \rightarrow \mathcal{G}(r, \mathbb{C})$ tome valores en el grupo unitario $U(r)$. Recordemos que esta es la propiedad que satisfacen las funciones de transición entre dos marcos unitarios.

2 Parametrización de estructuras holomorfas

Una vez establecido el concepto de equivalencia nos concentraremos ahora en las estructuras holomorfas del haz trivial $S \times \mathbb{C}$. Dividiremos el problema en dos partes: primero identificaremos las estructuras holomorfas con las conexiones unitarias planas y entonces veremos que éstas se pueden identificar con un objeto bien conocido.

Antes de enunciar el siguiente teorema, mencionaremos algunos conceptos y resultados que utilizaremos en la demostración.

En primer lugar utilizaremos el *operador de Hodge* definido en el espacio de 1-formas $\mathcal{E}^1(S)_{\mathbb{C}}$ por

$$*\omega = i(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)$$

donde ω_1 y ω_2 son las partes $(1,0)$ y $(0,1)$ de ω respectivamente. Una propiedad importante de este operador es

$$d * df = 2id'd''\bar{f}$$

Con este operador se puede introducir una norma en $\mathcal{E}^1(S)_{\mathbb{C}}$ definida por

$$\|\omega\| = \int_S \omega \wedge * \omega$$

El que $\|\cdot\|$ así definida es, en efecto, una norma, así como lo concerniente en general, al operador de Hodge, puede encontrarse en [F].

Un resultado importante y no trivial es el siguiente.

Teorema 1.- Toda 1-forma ω en una superficie de Riemann compacta puede escribirse de la manera:

$$\omega = \omega_c + *df$$

donde ω_c es una 1-forma cerrada y f una función C^∞ .

Una demostración, utilizando técnicas de espacios de Hilbert, aplicadas a la *completación* de $\mathcal{E}^1(S)_{\mathbb{C}}$ (en términos de la norma definida), puede encontrarse en [AS]. También puede mostrarse este resultado utilizando herramientas de topología algebraica y una demostración puede hallarse en [F]. El teorema es un caso especial del teorema de descomposición de Hodge (ver [F] o [GH] p.ej.)

Teorema 2.- Toda estructura holomorfa en el haz trivial $S \times \mathbb{C}$ sobre una superficie de Riemann es equivalente a la estructura holomorfa inducida por una conexión unitaria plana y esta conexión es única salvo automorfismos unitarios del haz.

Nota: tomamos la métrica hermitiana usual en $S \times \mathbb{C}$

Demostración.- En términos del marco unitario $\sigma(p) = (p, 1)$ una estructura holomorfa puede escribirse *globalmente* como

$$D_A'' = d'' + \theta_A''$$

donde θ_A'' es una $(0, 1)$ -forma compleja en S . Una estructura equivalente D_B'' es de la forma

$$D_B'' = g^{-1} D_A'' g$$

donde g es una aplicación C^∞ en S con valores en $\mathcal{G}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$. La $(0, 1)$ -forma asociada a D_B'' es

$$\theta_B'' = g^{-1} d'' g + g^{-1} \theta_A'' g = g^{-1} d'' g + \theta_A''$$

y entonces, la conexión unitaria correspondiente es

$$D_B = d + \theta_B'' - \overline{\theta_B''} = d + \theta_B$$

Lo que debemos hacer es encontrar un automorfismo g tal que la conexión D_B sea plana. Como g no puede anularse, podemos pensar en encontrar una solución de la forma

$$g = e^f$$

donde $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ es C^∞ . La $(0,1)$ -forma θ_B'' se transforma entonces en

$$\theta_B'' = d''f + \theta_A''$$

y la conexión D_B es

$$\begin{aligned} D_B &= d + (d''f + \theta_A'') - \overline{(d''f + \theta_A'')} \\ &= d + (d''f + \theta_A'') - (\overline{d''f} + \overline{\theta_A''}) \\ &= d + (d''f + \theta_A'') - (d'\bar{f} + \overline{\theta_A''}) \end{aligned}$$

D_B es plana si y sólo si $d\theta_B + \theta_B \wedge \theta_B = d\theta_B = 0$, esto es

$$\begin{aligned} 0 &= d((d''f + \theta_A'') - (d'\bar{f} + \overline{\theta_A''})) \\ &= dd''f + d\theta_A'' - dd'\bar{f} - d\overline{\theta_A''} \\ &= d'd''f + d\theta_A'' - d''d'\bar{f} - d\overline{\theta_A''} \end{aligned}$$

Ahora, como $d^2 = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} (d' + d'')^2 &= d'^2 + d'd'' + d''d' + d''^2 \\ &= d'd'' + d''d' \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces $d'd'' = -d''d'$ y la condición para que D_B sea plana es:

$$d'd''(f + \bar{f}) + d(\theta_A'' - \overline{\theta_A''}) = 0$$

Según lo mencionado antes, el operador $d'd''$ es igual a $(1/2i)d * d$. Usando el resultado del teorema 2 aplicado a la 1-forma $2i(\overline{\theta_A''} - \theta_A'')$ tenemos:

$$2id(\overline{\theta_A''} - \theta_A'') = d\omega_c + d * df = d * df$$

Ahora, $d * df$ debe ser una 1-forma real puesto que $\overline{\theta_A''} - \theta_A''$ es imaginaria pura. Entonces:

$$d * d(\text{Re}f) = \text{Re}d * df = d * df$$

Por tanto,

$$2id(\overline{\theta_A''} - \theta_A'') = d * d(f + \bar{f}) = 2id'd''(f + \bar{f})$$

Así:

$$d'd''(f + \bar{f}) + d(\theta_A'' - \overline{\theta_A''}) = 0$$

y $g = e^f$ es el automorfismo buscado.

Para la unicidad debemos mostrar que si D_A y D_B son dos conexiones unitarias planas cuyas estructuras holomorfas son equivalentes entonces D_A y D_B son equivalentes por un automorfismo unitario.

Si $D_A = d + \theta_A$ y $D_B = d + \theta_B$, entonces existe un automorfismo $g: S \rightarrow \mathbb{C}^*$ tal que $\theta_B'' = g^{-1}d''g + \theta_A''$ o, equivalentemente:

$$d''g + (\theta_A'' - \theta_B'')g = 0$$

Podemos escribir esto en la forma:

$$D_C''g = 0$$

donde $D_C = d + \theta_C = d + \theta_A - \theta_B$ es una conexión unitaria plana (porque D_A y D_B lo son). La condición $D_Cg = 0$ indicará que D_A y D_B son equivalentes. Por tanto debemos mostrar que $D_C'g$ también se anula. Para ello consideremos la norma de $D_C'g$

$$\|D_C'g\|^2 = \int_S D_C'g \wedge *(D_C'g)$$

Como $D_C'g$ es de tipo $(1,0)$ tenemos:

$$D_C'g \wedge *(D_C'g) = iD_C'g \wedge \overline{D_C'g}$$

Entonces

$$\|D_C'g\|^2 = i \int_S D_C'g \wedge \overline{D_C'g}$$

Un cálculo tedioso pero sencillo nos lleva a que:

$$(D_C''D_C'g)\bar{g} - D_C'g \wedge \overline{D_C''g} = d(\bar{g}(d'g - g\theta_C'))$$

y el teorema de Stokes nos dá:

$$i \int_S D_C'g \wedge \overline{D_C''g} = i \int_S (D_C''D_C'g)\bar{g}$$

Ahora, como la conexión D_C es plana tenemos:

$$0 = D_C^2 = (D_C' + D_C'')^2 = D_C' D_C'' + D_C'' D_C'$$

Además, dado que $D_C'' g = 0$, entonces $D_C' D_C'' g = 0$. Por tanto $D_C'' D_C' g = 0$ y concluimos que $\|D_C' g\|^2 = 0$ de manera que $D_C' g = 0$

Ahora bien, el automorfismo g no tiene por qué ser unitario. Sin embargo, como la conexión D_C es unitaria tenemos:

$$d\langle g, g \rangle = \langle D_C g, g \rangle + \langle g, D_C g \rangle = 0$$

por lo cual $\|g\|$ es constante. Por tanto,

$$D_C \left(\frac{g}{\|g\|} \right) = \frac{1}{\|g\|} D_C g = 0$$

y entonces $g/\|g\|$ es un automorfismo unitario que lleva D_A en D_B \square

La consecuencia de este teorema es que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(E)/\mathcal{U}(E) & \longrightarrow & \mathcal{H}(E)/\mathcal{G}(E) \\ [D] & \longmapsto & [D''] \end{array}$$

donde $[]$ denota las correspondientes órbitas, es una correspondencia uno a uno entre el espacio de órbitas de conexiones unitarias planas bajo la acción de $\mathcal{U}(E)$ y el espacio de órbitas de estructuras holomorfas bajo la acción de $\mathcal{G}(E)$.

Estudiaremos ahora el espacio $\mathcal{F}(E)/\mathcal{U}(E)$. Para ello consideremos una conexión plana $D_A = d + \theta_A$ en $S \times \mathbb{C}$. La 1-forma θ_A es cerrada por lo cual si γ_1 y γ_2 son dos curvas en S con los mismos extremos y homotópicas, entonces:

$$\int_{\gamma_1} \theta_A = \int_{\gamma_2} \theta_A$$

En particular, si fijamos un punto p_0 en S y γ es un lazo en S basado en p_0 , la integral

$$\int_{\gamma} \theta_A$$

depende solamente de la clase de homotopía de γ . Podemos definir entonces una aplicación

$$L_A: \Pi_1(S, p_0) \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

del grupo fundamental de S (basado en p_0) en el grupo multiplicativo \mathbb{C}^* por la correspondencia:

$$\gamma \mapsto e^{\int_{\gamma} \theta_A}$$

Si γ_1 y γ_2 son lazos basados en p_0 , la aditividad de la integral de línea nos dá

$$\int_{\gamma_1 \gamma_2} \theta_A = \int_{\gamma_1} \theta_A + \int_{\gamma_2} \theta_A$$

donde $\gamma_1 \gamma_2$ es el lazo obtenido al recorrer primero γ_1 y luego γ_2 . Tomando la exponencial vemos entonces que toda conexión plana D_A determina una *representación* del grupo fundamental de la superficie en $\mathcal{G}(1, \mathbb{C})$ (esto es, L_A es un homomorfismo de grupos).

Si la conexión D_A es unitaria, la 1-forma θ_A es imaginaria pura (pues $\theta_A + \overline{\theta_A} = 0$) y el homomorfismo L_A toma valores en $S^1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} = U(1)$. Por tanto la representación de $\Pi_1(S, p_0)$ correspondiente a D_A es unitaria. Veremos ahora que dos conexiones determinan la misma representación precisamente cuando son equivalentes.

Proposición 3.- Sean $D_A = d + \theta_A$ y $D_B = d + \theta_B$ conexiones unitarias planas en $S \times \mathbb{C}$. Las representaciones correspondientes L_A y L_B coinciden si y sólo si D_A es equivalente a D_B .

Demostración.- Si D_A y D_B son equivalentes, existe una función C^∞ $g: S \rightarrow S^1$ tal que

$$\theta_A - \theta_B = g^{-1} dg$$

Sea $\gamma: [0, 1] \rightarrow S$ un lazo basado en p_0 . La integral de $\theta_A - \theta_B$ se calcula como sigue:

$$\int_{\gamma} \theta_A - \theta_B = \int_{\gamma} g^{-1} dg = \int_0^1 \frac{dg(\gamma'(t))}{g(\gamma(t))} dt = \int_0^1 \frac{h'(t)}{h(t)} dt$$

donde $h = g \circ \gamma$. Definamos la función

$$f(t) = \int_0^t \frac{h'(s)}{h(s)} ds$$

Por el teorema fundamental del cálculo tenemos que $f'(t) = h'(t)/h(t)$. De esto concluimos que la derivada de $e^{-f(t)}h(t)$ se anula en todo $[0, 1]$ y, por tanto, $e^{-f(t)}h(t)$

es constante. Por tanto, $e^{f(1)} = h(1)/h(0) = 1$ de donde $f(1) = \int_{\gamma} \theta_A - \int_{\gamma} \theta_B$ es un múltiplo entero de $2\pi i$. Esto implica que $L_A(\gamma) = L_B(\gamma)$.

Recíprocamente, si $L_A(\gamma) = L_B(\gamma)$ para todo lazo γ basado en p_0 , podemos definir una función $g: S \rightarrow S^1$ por

$$g(p) = e^{\int_{\alpha} \theta_A - \theta_B}$$

donde α es cualquier curva que una p_0 con p . Si β es otra curva que une p_0 con p entonces

$$\int_{\alpha^{-1}\beta} \theta_A - \theta_B = L_A(\alpha - \beta) L_B(\alpha - \beta)^{-1} = 1$$

puesto que $L_A = L_B$ por hipótesis, de manera que g está bien definida. Supongamos que $U \subseteq S$ es un abierto simplemente conexo. Sea $p_1 \in U$ y α una curva de p_0 a p_1 .

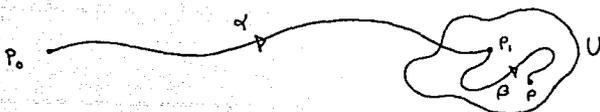


Fig. 1

Si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ se define por $f(p) = \int_{\beta} \theta_A - \theta_B$ donde β es cualquier curva en U de p_1 a p (f está bien definida porque U es simplemente conexo), entonces f es C^∞ y

$$g(p) = e^{\int_{\alpha} \theta_A - \theta_B} e^{f(p)}$$

Esto muestra que g es C^∞ y $g^{-1}dg = df = \theta_A - \theta_B$. Como podemos cubrir a S con abiertos simplemente conexos, vemos así que D_A y D_B son equivalentes. ■

De esta proposición es claro que la correspondencia

$$D_A \mapsto L_A$$

sólo depende de la clase de equivalencia unitaria de D_A y, por tanto, define una aplicación inyectiva del conjunto de clases de equivalencia de conexiones unitarias planas módulo automorfismos unitarios, en el conjunto de representaciones unitarias de grupo fundamental $\Pi_1(S, p_0)$. Mostraremos ahora que esta aplicación es suprayectiva. Para ello necesitamos el siguiente resultado. (Ver [F], p.100)

Lema 4.- Sea $\{U_j\}$ una cubierta abierta de S y supongamos que para cada par ordenado (i, j) de índices tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ tenemos una función C^∞

$$h_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}$$

con la propiedad de que

$$h_{ij} + h_{jk} = h_{ik}$$

en $U_i \cap U_j \cap U_k$ cada vez que esta triple intersección sea no vacía. Entonces, para cada j existe una función $h_j: U_j \rightarrow \mathbb{C}$ C^∞ tal que

$$h_i - h_j = h_{ij}$$

en $U_i \cap U_j$.

Demostración.- Sea $\{\psi_j\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_j\}$. La función $\psi_j h_{ij}$ está definida y es C^∞ en $U_i \cap U_j$ y como $\text{supp } \psi_j \subset U_j$ podemos extenderla diferenciablemente a todo U_i definiéndola como cero fuera de su soporte. Sea $h_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$h_i = \sum_j \psi_j h_{ij}$$

En $U_i \cap U_j$ tenemos:

$$\begin{aligned} h_i - h_j &= \sum_k \psi_k h_{ik} - \sum_k \psi_k h_{jk} \\ &= \sum_k \psi_k (h_{ik} - h_{jk}) \\ &= \sum_k \psi_k h_{ij} \\ &= h_{ij} \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 5.- Sea $L: \Pi_1(S, p_0) \rightarrow \mathbb{C}$ un homomorfismo del grupo fundamental de S en el grupo aditivo \mathbb{C} . Existe una 1-forma cerrada θ en S tal que

$$\int_\gamma \theta = L(\gamma)$$

para todo lazo γ basado en p_0 .¹

¹ Este teorema se debe a Behnke-Stein y un tratamiento amplio acerca de 1-formas con periodo dado se puede encontrar en [F].

Demostración.- Sea $\rho: \tilde{S} \rightarrow S$ la cubriente universal de S con la estructura diferenciable inducida por ρ . Supongamos que $U \subseteq S$ es un abierto tal que

$$\rho^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$$

donde los V_λ son abiertos disjuntos y $\rho: V_\lambda \rightarrow U$ es un difeomorfismo. Sea $\lambda_0 \in \Lambda$. Para cada $\lambda \in \Lambda$ existe un único $\gamma \in \Pi_1(S, p_0)$ tal que $T_\gamma(V_{\lambda_0}) = V_\lambda$ donde T_γ es la acción del grupo fundamental en la cubriente universal definida a partir de un punto $\tilde{p}_0 \in \rho^{-1}(p_0)$. Entonces $\rho^{-1}(U)$ se puede escribir en la forma:

$$\tilde{U} = \rho^{-1}(U) = \bigcup_{\gamma \in \Pi_1} T_\gamma(V_{\lambda_0})$$

Definimos $\tilde{h}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}$ por:

$$\tilde{h}(\tilde{p}) = L(\gamma)$$

si $\tilde{p} \in T_\gamma(V_{\lambda_0})$. \tilde{h} es C^∞ en \tilde{U} puesto que es constante en cada V_λ . La función \tilde{h} depende del índice λ_0 que hallamos escogido pero lo importante es que para cada $\gamma \in \Pi_1(S, p_0)$ se cumple:

$$\tilde{h} \circ T_\gamma - \tilde{h} = L(\gamma) \quad (*)$$

En efecto, si $\tilde{p} \in \rho^{-1}(U)$ está en $T_{\gamma_0}(V_{\lambda_0})$ se tiene:

$$T_\gamma(\tilde{p}) \in T_\gamma(T_{\gamma_0}(V_{\lambda_0})) = T_{\gamma\gamma_0}(V_{\lambda_0})$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \tilde{h}(T_\gamma(\tilde{p})) - \tilde{h}(\tilde{p}) &= L(\gamma\gamma_0) - L(\gamma_0) \\ &= L(\gamma) + L(\gamma_0) - L(\gamma_0) \\ &= L(\gamma) \end{aligned}$$

Lo que queremos es buscar una función definida en todo \tilde{S} que satisfaga esta propiedad.

Sea $\{U_j\}$ una cubierta abierta de S tal que cada U_j es como el abierto U de arriba. Podemos definir entonces en cada $\tilde{U}_j = \rho^{-1}(U_j)$ una función C^∞

$$\tilde{h}_j: \tilde{U}_j \rightarrow \mathbb{C}$$

que satisfaga (*) en \tilde{U}_j . Para cada par ordenado de índices (i, j) con $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j \neq \emptyset$ definamos \tilde{h}_{ij} en $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j$ por:

$$\tilde{h}_{ij} = \tilde{h}_i - \tilde{h}_j$$

Estas funciones son C^∞ y satisfacen:

$$\tilde{h}_{ij} \circ T_\gamma = \tilde{h}_{ij}$$

para $\gamma \in \Pi_1(S, p_0)$. Esto significa que las \tilde{h}_{ij} son invariantes ante las transformaciones de cubierta T_γ y, en consecuencia, determinan funciones C^∞

$$h_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}$$

tales que $h_{ij} \circ \rho = \tilde{h}_{ij}$. Estas últimas funciones satisfacen la condición:

$$h_{ij} + h_{jk} = h_{ik}$$

y por el lema anterior, existen funciones C^∞ $h_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}$ tales que:

$$h_{ij} = h_i - h_j$$

en $U_i \cap U_j$.

Definamos ahora funciones $\tilde{f}_i: \tilde{U}_i \rightarrow \mathbb{C}$ por:

$$\tilde{f}_i = \tilde{h}_i - h_i \circ \rho$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i \circ T_\gamma - \tilde{f}_i &= \tilde{h}_i \circ T_\gamma - h_i \circ \rho \circ T_\gamma - \tilde{h}_i + h_i \circ \rho \\ &= \tilde{h}_i + L(\gamma) - h_i \circ \rho - \tilde{h}_i + h_i \circ \rho \\ &= L(\gamma) \end{aligned}$$

Además, en $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j$ tenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i - \tilde{f}_j &= \tilde{h}_i - h_i \circ \rho - \tilde{h}_j + h_j \circ \rho \\ &= \tilde{h}_{ij} - (h_i - h_j) \circ \rho \\ &= \tilde{h}_{ij} - h_{ij} \circ \rho \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto podemos juntar todas las funciones \tilde{f}_i en una función C^∞

$$\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow \mathbb{C}$$

que satisfaga (*).

Sea ahora $\tilde{\theta} = d\tilde{f}$. Para cada $\gamma \in \Pi_1(S, p_0)$ tenemos:

$$T_\gamma^* \tilde{\theta} = T_\gamma^*(d\tilde{f}) = d(\tilde{f} \circ T_\gamma) = d(\tilde{f} + L(\gamma)) = \tilde{\theta}$$

De esta invarianza de $\tilde{\theta}$ ante las transformaciones de cubierta T_γ concluimos que existe una 1-forma cerrada θ en S tal que $\rho^* \theta = \tilde{\theta}$.

Es fácil mostrar que si ω es una 1-forma en S y α una curva en S entonces

$$\int_\alpha \omega = \int_{\tilde{\alpha}} \rho^* \omega$$

donde $\tilde{\alpha}$ es cualquier levantamiento de α . Por tanto, para cada $\gamma \in \Pi_1(S, p_0)$ tenemos:

$$\int_\gamma \theta = \int_{\tilde{\gamma}} \theta = \int_{\tilde{\gamma}} d\tilde{f} = \tilde{f}(\tilde{\gamma}(1)) - \tilde{f}(\tilde{\gamma}(0))$$

Tomando el levantamiento $\tilde{\gamma}$ de γ a partir de \tilde{p}_0 es sencillo ver que

$$\tilde{f}(\tilde{\gamma}(1)) - \tilde{f}(\tilde{\gamma}(0)) = \tilde{f} \circ T_\gamma(\tilde{p}_0) - \tilde{f}(\tilde{p}_0) = L(\gamma)$$

Corolario 6.-La aplicación

$$D_A \mapsto L_A$$

es suprayectiva.

Demostración.- Supongamos que $L: \Pi_1(S, p_0) \rightarrow S^1$ es un homomorfismo. El hecho de que $\Pi_1(S, p_0)$ está finitamente generado nos permite construir un homomorfismo $M: \Pi_1(S, p_0) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $L = e^M$. El teorema anterior nos proporciona una 1-forma cerrada θ en S tal que

$$\int_\gamma \theta = M(\gamma)$$

para $\gamma \in \Pi_1(S, p_0)$. Por tanto

$$e^{\int_\gamma \theta} = L(\gamma) \in S^1$$

Ahora, si $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ donde θ_1 y θ_2 son 1-formas reales, entonces $\int_\gamma \theta_1 = 0$ puesto que $\int_\gamma \theta$ es imaginaria pura. De esta manera, $\theta_A = i\theta_2$ es una 1-forma cerrada imaginaria pura tal que

$$e^{\int_\gamma \theta_A} = L(\gamma)$$

para $\gamma \in \Pi_1(S, p_0)$ por lo que la conexión asociada $D_A = d + \theta_A$ es una conexión unitaria plana tal que $L_A = L$. Por tanto, la correspondencia $D_A \mapsto L_A$ es suprayectiva. \square

Si la superficie de Riemann es de género g , se sabe que el grupo fundamental $\Pi_1(S)$ está generado por $2g$ generadores $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$ con la relación

$$\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1}, \dots, \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1} = 1$$

Todo homomorfismo $\Pi_1(S) \xrightarrow{L} S^1$ se determina por los valores de L en los generadores y, dado que S^1 es abeliano, cualesquiera $2g$ puntos en S^1 determinan un homomorfismo. Como conclusión tenemos el siguiente teorema.

Teorema 7.- Si S es una superficie de Riemann compacta de género g , el espacio de órbitas

$$\mathcal{H}(S \times \mathbb{C}) / \mathcal{G}(S \times \mathbb{C})$$

de estructuras holomorfas, se puede parametrizar por un toro $S^1 \times \dots \times S^1$ de dimensión $2g$.

Bibliografía

- [Ch] S.-s. Chern, *Complex manifolds without potential theory*, Springer-Verlag, 1979.
- [F] O. Forster, *Lectures on Riemann surfaces*, Springer-Verlag, 1981.
- [H] N.J. Hitchin, *Gauge theory on Riemann surfaces*, College on Riemann Surfaces, 1987.
- [K] S. Kobayashi, *Differential geometry of complex vector bundles*, Mathematical Society of Japan, 1987.
- [W] R.O. Wells, *Differential analysis on complex manifolds*, Springer-Verlag, 1979.

Referencias

- [AB] M.F. Atiyah y R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Phil.Trans.R. Soc. London 523-615.
- [AS] L.V. Ahlfors y L. Sario, *Riemann surfaces*, Princeton University, 1960.
- [GH] P. Griffiths y J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, John Wiley and sons, 1978.
- [S] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, V.I, Publish or perish, Inc., 1979.
- [A] L.V. Ahlfors, *Conformal invariants*, Mc. Graw-Hill, 1973.
- [B] L. Bers, *Riemann surfaces*, New York, Stevens and co., 1958.

ESTE LIBRO NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA