

011615  
2ej

Análisis Espectral Modal  
por  
Superposición Directa  
de  
Vectores de RITZ

Juan José Pérez-Gavilán Escalante.  
Alumno de la División de Estudios de Posgrado  
de la Facultad de Ingeniería, U.N.A.M.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Contenido

Capítulo 1 Introducción .....	1
Capítulo 2 Aspectos generales .....	4
2.1 El problema .....	4
2.2 Propiedades de los valores y vectores característicos. <sup>2,4</sup> .....	7
2.3 Análisis modal espectral <sup>3</sup> .....	11
Capítulo 3 Revisión de algunos métodos .....	16
3.1 Vectores de Ritz .....	16
3.2 Condensación estática .....	17
3.3 Iteración Inversa .....	20
3.4 Iteración del subespacio .....	23
3.5 Método de Lanczos .....	26
Capítulo 4 Presentación del método WYD .....	28
4.1 Obtención de los vectores de Ritz .....	30
Capítulo 5 Implantación .....	33
5.1 Consideraciones Adicionales .....	33
5.2 Procedimiento de cálculo .....	36
5.3 Esquema del sistema .....	38
5.4 Listado .....	40
Capítulo 6 Ejemplos .....	43
6.1 MARCO 1 .....	45
6.2 MARCO 2 .....	48
6.3 TRANSPORTADOR .....	51
6.4 PALAPA .....	55
Capítulo 7 Análisis de Resultados .....	59
Capítulo 8 Conclusiones .....	62

## Índice de Figuras

Esquema del sistema .....	38
Marco de prueba 1 .....	45
Tiempos de solución, Marco de prueba 1 .....	46
Errores calculados, Marco de prueba 1 .....	47
Marco de prueba 2. ....	48
Tiempos de solución, Marco de prueba 2. ....	50
Errores calculados, Marco de prueba 2. ....	51
Transportador .....	52
Tiempos de cálculo, Transportador .....	53
Errores calculados, Transportador .....	54
Modos, Transportador .....	55
Palapa .....	56
Tiempos de solución, Palapa .....	57
Errores calculados, Palapa .....	58
Modos, Palapa .....	59

### Reconocimientos

Quisiera dar las gracias a Investigación de Operaciones e Ingeniería de Sistemas S.A. por el apoyo que me brindó para el desarrollo de este trabajo, especialmente a su titular Jaime Antoniano. Al doctor Gustavo Ayala por la paciencia y por lo generoso que siempre se muestra con sus conocimientos

(Sec. Reconocimientos)

para Gaby (chochas)

## Capítulo 1 Introducción

Sin duda uno de los aspectos que más ha preocupado a los ingenieros encargados de analizar y diseñar estructuras, es el comportamiento de estas ante excitaciones dinámicas, particularmente las generadas como consecuencia de un sismo. En estructuras complejas, sobre todo del tipo industrial, no es posible hacer suposiciones en cuanto a la distribución de la masa y rigideces para lograr modelos simplificados lo que nos lleva inevitablemente a concebir modelos estructurales más realistas que liberen las hipótesis restrictivas de los modelos tradicionales; que permitan estudiar fenómenos tales como la flexibilidad de los diafragmas de piso, el comportamiento fuera del plano, la interacción del suelo con la estructura, las no linealidades geométricas y del material, distribuciones irregulares de la masa ...etc, etc.

En este sentido, en las últimas dos décadas, se han hecho avances importantes principalmente debido al uso del método de los elementos finitos. Este método ha probado su efectividad en la solución de muchos problemas prácticos. La generalidad del método de los elementos finitos y sobre todo la relativa sencillez con que puede ser implantado en una computadora lo han convertido en una de las herramientas más poderosas con que cuenta el ingeniero para modelar sus estructuras.

La idealización tridimensional de las estructuras es otro aspecto que contribuye notablemente al mejoramiento de nuestros modelos.

Desafortunadamente el uso del método de los elementos finitos y la modelación en el espacio de las estructuras que se desean analizar dan lugar, en la mayoría de los casos, a modelos de una gran complejidad, lo que se traduce en un incremento en el esfuerzo de cómputo requerido para llevar a cabo la solución.

En particular en el caso de la solución de la ecuación de movimiento de la estructura por superposición modal, la determinación de los eigenvectores es la fase más importante y que consume más tiempo dentro de la solución.

Los métodos que se han desarrollado para la extracción de los eigenvectores se pueden clasificar en dos grupos: Los métodos de extracción directa, que para obtener los valores y vectores característicos operan directamente sobre la matriz de rigideces y de masas del sistema con  $n$  grados de libertad, y los

llamados métodos de reducción o subestructuración dinámica, que reducen el sistema de  $n$  grados de libertad a otro de menor tamaño pero de tal manera que los vectores y valores característicos de baja frecuencia se conserven.

Entre los métodos de extracción directa se encuentran los siguientes: El conocido método de iteración inversa<sup>2</sup>, útil en el caso en que se requiera un número pequeño de vectores. Los métodos de Jacobi y Jacobi Generalizado<sup>2</sup>, transforman la matriz de rigideces a una matriz diagonal: Jacobi se utiliza para la solución del problema standard, esto es un problema de la forma  $K\phi = \lambda\phi$ , mientras que Jacobi generalizado se utiliza para resolver el problema  $K\phi = \lambda M\phi$ , transformando la matriz de masas y de rigideces simultáneamente. Ambos métodos han tenido aceptación por su simplicidad y son utilizados con frecuencia en conjunto con los métodos de reducción. El método de Householder<sup>2</sup> transforma la matriz de rigideces a una matriz tridiagonal utilizando transformaciones que adoptan la forma de matrices de reflexión, los eigenvalores se obtienen posteriormente utilizando los algoritmos QL o QR basados en transformaciones sucesivas. Quizá el método más importante en este grupo es el método de la búsqueda del determinante, que combina las técnicas de iteración inversa e iteración con el polinomio característico para obtener los menores valores característicos del sistema.

Los métodos de reducción están encabezados por el método de Guyan<sup>11</sup> que reduce simultáneamente a las matrices de rigidez y la matriz consistente de masas del problema en base a la selección de grados de libertad maestros, estos últimos son aquellos en los que se supone que esta concentrada la masa de la estructura. Después de la reducción sólo los grados de libertad maestros quedan representados en el modelo. En este método es de importancia fundamental la selección de dichos grados de libertad maestros lo que generalmente depende del juicio del ingeniero, sin embargo se han desarrollado algunos algoritmos<sup>10</sup> para determinar de manera automática los grados de libertad maestros que deben seleccionarse para lograr buenos resultados. Sigue el método de iteración del subespacio, basado en la formulación de Ritz<sup>1,2</sup> y más recientemente por los métodos de Lanczos<sup>7,12</sup> y el método Wilson Yuan Dickens (WYD<sup>a</sup>).

En este trabajo se estudiará el método de subestructuración dinámica WYD, con el objetivo de implantarlo como parte de un programa de computadora

general de análisis estructural tridimensional. Para poder comprender el método, fue necesario repasar las principales propiedades de los valores y vectores característicos y luego los principales métodos de extracción.

El estudio comienza en el Capítulo 2 con la descripción del problema que se desea resolver<sup>2</sup>, se plantea la solución para sistemas elásticos por superposición modal, se hace un breve resumen de las propiedades de los valores y vectores característicos<sup>4,2</sup> que es importante tener en mente y por último se presenta la solución modal espectral. En el capítulo 3 se hace una revisión de algunos métodos importantes para el cálculo de valores característicos<sup>1,2,3,5</sup>, el método de Lanczos entre ellos<sup>7,12</sup>. Los métodos que se revisan en este capítulo introducen las ideas fundamentales que se utilizan en la extracción de los valores y vectores característicos. Con estos antecedentes se pasa a la presentación del método WYD<sup>6</sup>, en el capítulo 4. Se hace un extenso análisis del método a la luz de los conceptos introducidos en los capítulos anteriores. En el capítulo 5 se trata el tema de la implantación del método. Se muestra esquemáticamente la organización del programa y se resumen los pasos a seguir en la extracción de los vectores de Ritz. En el capítulo 6 se presentan algunos resultados obtenidos con el programa usando el método WYD y el de Lanczos, haciendo algunas observaciones importantes. En el capítulo 7 se hace el análisis de los resultados y por último en el capítulo 8 se presentan las conclusiones del trabajo.

## Capítulo 2

### Aspectos generales

#### 2.1 El problema

La ecuación

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = R \quad (2.1)$$

representa el sistema de ecuaciones de equilibrio dinámico de un sistema estructural, donde  $M$ ,  $C$  y  $K$  son la matriz de masas, amortiguamiento y rigideces del sistema respectivamente,  $R$  es el vector de cargas externas, y  $\ddot{U}$ ,  $\dot{U}$  y  $U$  son los vectores de aceleración, velocidad y desplazamiento del sistema. Se han desarrollado gran número de procedimientos para resolver la ecuación (2.1), basados fundamentalmente en dos métodos: de integración directa y la superposición modal. Con el método de integración directa se resuelve el sistema de ecuaciones para incrementos discretos de tiempo  $\Delta t$  considerando una cierta variación de la aceleración, velocidad y desplazamiento entre los intervalos de tiempo. Los diferentes algoritmos de integración directa se diferencian básicamente en la forma de las variaciones que se asumen entre cada intervalo de tiempo; también de esta forma se derivan las principales propiedades de estos métodos: tiempo de solución, estabilidad y precisión. En general el tiempo de solución de estos métodos es inversamente proporcional al incremento de tiempo considerado y a las características de la matriz de rigideces. Estos algoritmos son utilizados casi exclusivamente para sistemas no lineales.

El método de superposición modal se aplica a modelos lineales. Primero se transforma el sistema (2.1) de modo que se obtengan unas nuevas matrices  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{C}$  y  $\tilde{K}$  utilizando una relación del tipo

$$U = PX \quad (2.2)$$

donde  $X$  es un vector dependiente del tiempo conocido como el vector de desplazamientos generalizados y  $P$  es una matriz cuadrada de orden  $n$  no singular para lograr que la relación entre  $U$  y  $X$  sea única. Sustituyendo (2.2) en (2.1) y premultiplicando por  $P^T$  se tiene

$$\tilde{M}\dot{X} + \tilde{C}X + \tilde{K}X = R \quad (2.3)$$

donde

$$\tilde{M} = P^T M P; \quad \tilde{C} = P^T C P; \quad \tilde{K} = P^T K P; \quad \tilde{R} = P^T R \quad (2.4)$$

La matriz  $P$  se obtiene usando los desplazamientos del problema de vibración libre sin considerar el amortiguamiento

$$M U + K U = 0 \quad (2.5)$$

La solución de (2.5) puede asumirse de la forma

$$U = \phi \sin \omega(t - t_0) \quad (2.6)$$

donde  $\phi$  es un vector de orden  $n$ ,  $t$  es la variable de tiempo,  $t_0$  una constante y  $\omega$  es la frecuencia angular de vibración del vector  $\phi$ . Substituyendo (2.6) en (2.5) se obtiene el problema de valores y vectores característicos generalizado,

$$K \phi = \omega^2 M \phi \quad (2.7)$$

de donde  $\phi$  es un vector característico y  $\omega^2$  es el valor característico correspondiente que deben determinarse.

La ecuación (2.7) tiene  $n$  soluciones  $(\omega_1^2, \phi_1), (\omega_2^2, \phi_2), \dots, (\omega_n^2, \phi_n)$ , escalando los vectores adecuadamente siempre puede lograrse que

$$\phi_i^T M \phi_j = \begin{cases} = 1 & i = j \\ = 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.8)$$

y entonces

$$\Phi^T K \Phi = \Omega^2 \quad (2.9)$$

donde  $\Phi$  es una matriz que tiene por columnas a  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n$  y  $\Omega^2$  es una matriz que guarda las frecuencias en la diagonal principal, esto es,  $\Omega^2 = \omega_u^2$ .

la matriz de transformación que se buscaba es  $\Phi$ , entonces

$$U = \Phi X \quad (2.10)$$

Haciendo  $P = \Phi$  en la ecuación (2.4), se obtiene la ecuación de equilibrio en términos de los desplazamientos generalizados

$$\dot{X} + \Phi^T C \Phi \dot{X} + \Omega^2 X = \Phi^T R \quad (2.11)$$

en la que si se desprecia el amortiguamiento se desacopla el sistema

$$\ddot{X} + \Omega^2 X = \phi^T R \quad (2.12)$$

esto es, se tienen  $n$  ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i &= r_i \\ r_i &= \phi_i^T R \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.13)$$

Siendo la  $i$ ésima ecuación la ecuación de un sistema de un grado de libertad con masa unitaria y rigidez  $\omega_i^2$

la solución a cada una de las ecuaciones en (2.14) puede calcularse haciendo uso de la integral de Duhamel

$$x_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t r_i(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau + \alpha_i \sin \omega_i t + \beta_i \cos \omega_i t \quad (2.14)$$

con condiciones iniciales de la siguiente forma

$$\begin{aligned} x_i(t=0) &= \phi_i^T M U_0 \\ \dot{x}_i(t=0) &= \phi_i^T M \dot{U}_0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

La integral de Duhamel suele evaluarse numéricamente, para tal efecto, pueden utilizarse los métodos de integración directa con las matrices ya transformadas. Cuando la excitación puede representarse por medio de un diagrama de aceleraciones o velocidades a base de segmentos de variación lineal respecto al tiempo, como es el caso de la excitación sísmica, es posible obtener la solución exacta de la ecuación (2.15). Para obtener la solución completa deben calcularse las soluciones de las  $n$  ecuaciones (2.14), y la respuesta de la estructura se calcula después como la superposición de los modos, utilizando la ecuación (2.11)

$$U = \sum_{i=1}^n \phi_i x_i \quad (2.16)$$

La medida en que cada uno de los términos en (2.16) contribuyen a la solución depende de la forma del vector  $\phi_i$  y de la frecuencia de vibración de ese modo  $\omega_i$ . La propiedad fundamental del método de superposición modal es que es necesario evaluar un número reducido de vectores en (2.16) para lograr una buena aproximación a la respuesta.

## 2.2 Propiedades de los valores y vectores característicos.<sup>1,4</sup>

En esta sección se describen las propiedades más importantes de los problemas de valores y vectores característicos. En las siguientes secciones se hará referencia a estas propiedades porque los diferentes métodos para la solución de la ecuación característica basan sus estrategias en alguna de ellas. La mayoría de las propiedades se presentan sin ninguna demostración formal, sin embargo se han incluido algunas que son especialmente útiles para comprender el sentido profundo de algunas de las propiedades que se muestran.

En la sección anterior se vio que para un análisis modal se utilizan las formas modales para desacoplar las ecuaciones de equilibrio. Estas formas modales se obtienen al resolver el problema de vibración libre de la estructura sin considerar el amortiguamiento. La forma general de este problema es

$$K\phi = \lambda M\phi \quad (2.2.1)$$

con

$$\lambda = \omega^2$$

donde la matriz de rigideces  $K$  es una matriz positiva definida o semidefinida de orden  $n$ , la matriz de masas  $M$  puede ser una matriz diagonal posiblemente con algunos elementos nulos o bien una matriz con elementos no nulos fuera de la diagonal en cuyo caso es siempre positiva definida.

El sistema (2.2.1) tiene  $n$  pares de soluciones  $(\phi_i, \lambda_i)$  y

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n \quad (2.2.2)$$

$0 \leq \lambda_i$  si  $K$  es positiva semidefinida y  $0 < \lambda_i$  si  $K$  es positiva definida. Cuando se arma la matriz de rigidez de una estructura que no tiene ningún apoyo se obtiene una matriz positiva semidefinida, en ese caso los valores de  $\lambda_i = 0$  corresponden a los modos de vibrar de cuerpo rígido. Cuando se tiene una matriz  $M$  de masas diagonal con  $k$  elementos nulos entonces existen  $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+k-1} = \infty$ . Además los vectores característicos son vectores reales.

Del problema (2.2.1) puede observarse que

$$K\alpha\phi = \lambda M(\alpha\phi) \quad (2.2.3)$$

y por lo tanto si  $\phi_i$  es un vector característico entonces  $\alpha\phi$ , también lo es. Esto significa que la magnitud de los vectores característicos no queda definida, sino solo su dirección o forma, por lo tanto es posible escalar los vectores de modo que

$$\phi_i^T M \phi_i = 1 \quad (2.2.4)$$

se dice entonces que los vectores característicos son ortonormales con respecto a la masa, esto es

$$\phi_i^T M \phi_j = \delta_{ij} \quad (2.2.5)$$

esta relación conduce a

$$\phi_i^T K \phi_j = \lambda_i \delta_{ij} \quad (2.2.6)$$

por lo tanto los vectores también son ortogonales respecto a  $K$ .

Es posible que en la solución se tengan valores característicos repetidos, digáanse  $m$  veces,  $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+m-1}$ , en ese caso los correspondientes vectores característicos no son únicos, sin embargo forman un conjunto de vectores independiente que puede escogerse de tal manera que cumplan con las propiedades (2.2.5) y (2.2.6).

Es importante notar que las condiciones (2.2.5) y (2.2.6) son condiciones necesarias para que un vector sea vector característico pero no son suficientes, supongase que  $p$  vectores  $x_1, x_2, \dots, x_p$  cumplen con las condiciones de ortogonalidad

$$X^T K X = D \quad (2.2.7)$$

y

$$X^T M X = I \quad (2.2.8)$$

donde  $X = x_1, x_2, \dots, x_p$  y  $D = \text{diag}(d_i)$ . Los vectores  $x_i$  no son necesariamente eigenvectores y  $d_i$  no son necesariamente eigenvalores, a menos que  $p = n$  en cuyo caso  $\Phi = X$  y  $\Lambda = D$  donde  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$

Los eigenvalores  $\lambda_i$  del problema (2.2.1) son las raíces del polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(K - \lambda M) \quad (2.2.9)$$

propiedad que se deduce directamente de (2.2.11). Reescribiendo (2.2.1) de la forma

$$(K - \lambda_i M)\phi_i = 0 \quad (2.2.10)$$

se deduce que la relación (2.2.1) tiene solución no trivial (con los elementos de  $\phi_i$  no todos nulos) solo si la matriz  $K - \lambda_i M$  es singular, lo que se cumple, justamente, si el determinante de la matriz anterior es cero.

Por otra parte, un buen número de propiedades puede deducirse utilizando el cociente de Rayleigh<sup>5</sup> que se define como

$$\rho(v) = \frac{v^T K v}{v^T M v} \quad (2.2.11)$$

donde  $v$  es un vector de orden  $n$ . Este cociente cumple con la importante relación

$$\lambda_1 \leq \rho(v) \leq \lambda_n \quad \forall v \quad (2.2.12)$$

además, de la definición del cociente de Rayleigh se desprende inmediatamente que

$$\rho(\phi_i) = \lambda_i \quad (2.2.13)$$

Supongase ahora que  $\bar{\phi}_i$  es una aproximación de  $\phi_i$ , esto se expresa así

$$\bar{\phi}_i = \phi_i + \epsilon x \quad (2.2.14)$$

donde  $\epsilon$  es una constante y  $x$  es un vector del mismo orden que  $\phi_i$ , entonces

$$\rho(\bar{\phi}_i) = \lambda_i + o(\epsilon^2) \quad (2.2.15)$$

donde  $o(\epsilon^2)$  significa de orden  $\epsilon^2$ , esto significa que si  $\delta = o(\epsilon^2)$  entonces  $\delta \leq b\epsilon^2$ , donde  $b$  es una constante. La anterior propiedad indica que se puede obtener una mucho mejor aproximación de los valores característicos de lo que en general se puede de las formas modales.

La caracterización *minimax* de los valores característicos es un importante resultado deducido a partir del cociente de Rayleigh. Antes de definir esta

propiedad considerese lo siguiente: si se varía  $v$  en la ecuación (2.2.11) hasta encontrar el mínimo  $\rho(v)$ , entonces,  $v = \phi_1$  y  $\rho(v) = \lambda_1$ , esto mismo se escribe de la siguiente forma

$$\lambda_1 = \min\{\rho(v)\} \quad (2.2.16)$$

Supongase ahora que al vector  $v$  se le impone la restricción adicional en la que  $v$  sea ortogonal a un vector arbitrario  $w$  y entonces, variando  $v$  sujeto a esta condición se calcule el mínimo cociente de Rayleigh. Una vez calculado el mínimo  $\rho(v)$  con la condición de que  $v^T w = 0$ , se podría empezar a variar  $w$  y para cada  $w$  calcularse un nuevo mínimo de  $\rho(v)$ . Se encontrará que el máximo de los mínimos valores calculados es  $\lambda_2$ . Este resultado puede generalizarse al siguiente principio conocido como la caracterización *minimax* de los valores característicos

$$\lambda_r = \max\{\min\{\rho(v)\}\} \\ v^T w_i = 0 \quad i = 1, \dots, r-1 \quad (2.2.17)$$

Para evaluar (2.2.17) se seleccionan vectores  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, r-1$ , y luego se obtiene el mínimo  $\rho(v)$  con  $v$  satisfaciendo la condición  $v^T w_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, r-1$ . Después de calcular este mínimo se varían los vectores  $w_i$  siempre calculando luego el mínimo. El máximo de los mínimos es  $\lambda_r$ .

La propiedad más importante que puede establecerse en base a la caracterización *minimax* de los valores característicos es la propiedad de separación de los eigenvalores.

El *résimo* eigenproblema restringido asociado a  $K\phi = \lambda M\phi$  se escribe

$$K^{(r)}\phi^{(r)} = \lambda^{(r)} M^{(r)}\phi^{(r)} \quad (2.2.18)$$

en donde  $K^{(r)}$  y  $M^{(r)}$  son las matrices  $K$  y  $M$  con las últimas  $r$  columnas y últimos  $r$  renglones eliminados.

Se puede demostrar que los eigenvalores del problema asociado  $r+1$  se separan de los del problema  $r$ , esto significa que

$$\lambda_1^{(r)} \leq \lambda_1^{(r+1)} \leq \lambda_2^{(r)} \leq \lambda_2^{(r+1)} \leq \dots \leq \lambda_{n-r-1}^{(r)} \leq \lambda_{n-r-1}^{(r+1)} \leq \lambda_{n-r}^{(r)} \quad (2.2.19)$$

El hecho que se utiliza en la obtención de los valores y vectores característicos y que está basado en la separación de los eigenvalores (2.2.19) es el siguiente: Supongase que es posible hacer la descomposición de la matriz  $K - \mu M$ , donde  $\mu$  es una constante, en  $LDL^T$ , siendo  $L$  una matriz triangular inferior con elementos unitarios en la diagonal y  $D$  una matriz diagonal, entonces el número de elementos negativos en  $D$  es igual al número de eigenvalores menores que  $\mu$  o alternativamente, si  $\lambda_i < \mu < \lambda_{i+1}$  habrá exactamente  $i$  elementos negativos en  $D$ . Adicionalmente a la separación de los eigenvalores es necesario observar que una vez hecha la descomposición de  $K - \mu M$ , tenemos según (2.2.9) lo siguiente

$$p(\mu) = \det(LDL^T) = \prod_{i=1}^n d_{ii} \quad (2.2.20)$$

y consecuentemente

$$p^{(r)}(\mu) = \prod_{i=1}^{n-r} d_{ii} \quad (2.2.21)$$

donde  $p^{(r)}$  es el polinomio característico del *resimo* problema restringido.

### 2.3 Análisis modal espectral<sup>5</sup>

En la sección (2.1) se vio cómo obtener la solución de la ecuación (2.1), desacoplando primero el sistema y luego utilizando la integral de Duhamel. Ese procedimiento daría como resultado la historia de desplazamientos y aceleraciones en el intervalo de tiempo que se considere la excitación, sin embargo, para fines de diseño, esta historia de desplazamiento, con los correspondientes elementos mecánicos, no es de mucha utilidad, pues en el diseño se buscan valores de desplazamiento y esfuerzo máximos probables, mas que una historia completa de comportamiento. Además el esfuerzo de cómputo para hacer esta labor es enorme. Es por estas razones que se hizo necesario establecer un procedimiento que permitiera estimar dichas respuestas máximas probables. El procedimiento aceptado para calcular dichos máximos es el llamado análisis espectral.

Se estudiará aquí la formulación modal espectral para una estructura fija en una base sujeta a aceleraciones  $v_g$ , sin tomar en cuenta el amortiguamiento, la ecuación (2.1) en estas condiciones adopta la forma

$$M\ddot{U}_i + KU = 0 \quad (2.3.1)$$

donde  $U_i$  es un vector de desplazamientos totales y  $U$  en este caso representa los desplazamientos relativos a la base del sistema. Los desplazamientos totales pueden expresarse como la suma de los desplazamientos en la base  $U_g$  y los desplazamientos  $U$  relativos a la base, la ecuación (2.3.1) queda entonces

$$M(\ddot{U}_g + \ddot{U}) + KU = 0 \quad (2.3.2)$$

y alternativamente

$$MU + KU = -MU_g \quad (2.3.3)$$

Las aceleraciones en todos los grados de libertad  $U_g$  debidos a una aceleración en la base pueden expresarse como un vector de forma  $r$  invariable en el tiempo por una cantidad escalar  $v_g$  que depende del tiempo si además se lleva a cabo un cambio de coordenadas al sistema espectral tal como se hizo en la sección (2.1), la ecuación (2.3.3) queda como

$$\Phi^T M \Phi \ddot{X} + \Phi^T K \Phi X = -\Phi^T M r \ddot{v}_g \quad (2.3.4)$$

donde  $U = \Phi X$  y  $\Phi = \phi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Esta ecuación representa a un sistema de  $n$  ecuaciones de la forma

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = l_i \ddot{v}_g \quad i = 1, \dots, n \quad (2.3.5)$$

ya que  $\Phi^T M \Phi = \delta_{ij}$ ,  $\omega_i^2 = \phi_i^T K \phi_i$  y  $l_i = -\phi_i^T M r$  que es conocido como el factor de participación del modo  $i$ .

La solución de cada una de estas ecuaciones se presentó en la sección (2.1) en términos de la integral de Duhamel que para una aceleración en la base y suponiendo que el sistema esta en reposo antes de la excitación se puede escribir así

$$x_i = \frac{l_i}{\omega_i} \int_0^t \ddot{v}_g \sin \omega_i(t - \tau) d\tau \quad (2.3.6)$$

y la respuesta máxima está dada por

$$x_i \max = \frac{l_i}{\omega_i} S_v(\omega_i) \quad (2.3.7)$$

donde

$$S_v(\omega_i) = \left[ \int_0^t \ddot{v}_g \sin \omega_i(t - \tau) d\tau \right]_{\max} \quad (2.3.8)$$

En la práctica en el caso de excitaciones debidas a sismo se hacen consideraciones adicionales ya que la respuesta máxima a un evento particular no es aceptable de ser considerada como "máxima probable" por el contrario un gran número de excitaciones deben tomarse en cuenta. Otro aspecto adicional es que se considera en el modelo de un grado de libertad un cierto amortiguamiento  $\xi$ , quedando entonces la respuesta máxima en función de este

$$x_{i, \max} = \frac{1}{\omega} S_v(\xi_i, \omega_i) \quad (2.3.9)$$

El valor  $S_v(\xi, \omega)$  se conoce como la pseudo velocidad espectral.

Finalmente para obtener la respuesta de todo el sistema se había planteado en la sección (2.1) el regreso al sistema de coordenadas original por medio de la ecuación

$$U = \sum_{i=1}^n \phi_i x_i(t) \quad (2.3.10)$$

donde la sumatoria debe llevarse a cabo en todo el intervalo de tiempo considerado. Con la introducción de los valores máximos de  $x_i$  la ecuación (2.3.10) no puede aplicarse pues los valores máximos no coinciden en el tiempo. Alternativamente, se han diseñado algunos procedimientos fundamentados en la teoría de probabilidades que permiten hacer una superposición más realista de las respuesta de cada modo, la más conocida de ellas desarrollada por Rosenblueth<sup>10</sup>, establece que la respuesta máxima probable de la estructura se puede obtener como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las respuesta modales individuales (SRSS).

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^n R_i^2} \quad (2.3.11)$$

donde  $R_i$  es la respuesta: desplazamiento, velocidad, fuerzas internas ...etc, del modo  $i$  y  $n$  es el número de modos de la estructura. Este método ha sido utilizado hasta nuestros días, sin embargo investigaciones más recientes hechas por el mismo Rosenblueth<sup>10</sup> y otros investigadores<sup>14</sup> basandose en la teoría de procesos estocásticos, encontraron que este método de superposición tiene errores importantes cuando las frecuencia de los modos no están suficientemente espaciadas, este es el caso de estructuras tridimensionales complejas, en donde por lo general las frecuencias de los modos aparecen en grupos. Wilson et al <sup>14</sup> propusieron un método de superposición conocido

como el método de la combinación cuadrática completa (CQC) y que incluye la correlación de un modo con otro. Este método converge al (SRSS) cuando las frecuencias de los diferentes modos están suficientemente espaciadas. El método propone la siguiente expresión

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_i \rho_{ij} R_j} \quad (2.3.12)$$

donde  $\rho_{ij}$  son los coeficientes de correlación modal, función de las frecuencias de vibración de los modos y de sus relaciones de amortiguamiento; además se supone que la duración del sismo es muy grande comparada con los períodos de vibración de la estructura y el espectro de respuesta es uniforme en un rango de frecuencias amplio. El coeficiente de correlación modal se obtiene con

$$\rho_{ij} = \frac{8(\xi_i \xi_j)^{1/2} (\xi_i + r \xi_j) r^{3/2}}{(1 - r^2) + 4\xi_i \xi_j r(1 + r^2) + 4\xi_i^2 \xi_j^2 r^2} \quad (2.3.13)$$

donde

$$r = \frac{\omega_j}{\omega_i}$$

y  $\xi_i, \xi_j$  representan la fracción de amortiguamiento crítico para el modo  $i$  y  $j$  respectivamente.

Si  $\xi$  es constante para todos los modos, entonces

$$\rho_{ij} = 8\xi^2 \left( \frac{1 + r r^{3/2}}{(1 - r^2)^2 + 4\xi r(1 + r)^2} \right) \quad (2.3.14)$$

Escobar<sup>13</sup> recientemente realizó un estudio de los diferentes métodos de combinación modal conocidos, haciendo una comparación de las estimaciones que arrojan los métodos contra los valores de espectros calculados con un análisis paso a paso. Los resultados de ese estudio establecen que el método SRSS subestima hasta en un 31% la respuesta en suelo duro y relaciones de amortiguamiento crítico entre .02 y .05, en el sentido de la excitación, mientras que para el sentido perpendicular a la excitación la sobrestima hasta en un 210%. En general los métodos estudiados por Escobar, excepto (SRSS) y los que lo incluyen, no presentan desviaciones muy grandes en la dirección paralela a la excitación, hasta un 15%, pero en todos los casos se sobrestima la respuesta en la dirección perpendicular alcanzando un 387% para el método de suma de

valores absolutos de las respuesta modales. La excepción es el método de la suma cuadrática completa (CQC) que en la dirección de la excitación subestimó la respuesta en un 2.7% y en la dirección perpendicular la sobrestimó en un 37.5%.

En todos los casos estudiados por Escobar el método (CQC) es el que proporciona errores relativos menores.

## Capítulo 3

## Revisión de algunos métodos

## 3.1 Vectores de Ritz

Una de las técnicas más generales para calcular aproximaciones a los vectores característicos de más baja frecuencia es el análisis de Rayleigh-Ritz. Las ideas que introduce esta técnica se utilizan en gran número de métodos para la solución de eigenvalores, es por eso que su estudio es de importancia en este ramo de la ingeniería.

Recuérdese el principio del mínimo que dice:

$$\lambda_1 = \min \rho(v) \quad (3.1.1)$$

en donde el mínimo se calcula sobre todos los posibles  $v$ , y  $\rho(v)$  es el cociente de Rayleigh.

Considere ahora el vector

$$\bar{\phi} = \sum_{i=1}^q x_i \psi_i \quad (3.1.4)$$

en donde  $\psi_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , es un conjunto de vectores linealmente independientes que expanden el espacio de Ritz  $V_q$ . En general  $q < n$ , entonces  $V_q$  es un subespacio de  $V_n$ ,  $\bar{\phi}$  es un vector que reside en ese espacio y el vector  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, q$  son las coordenadas del vector  $\bar{\phi}$  en el espacio de Ritz. En el análisis de Rayleigh-Ritz se pretende encontrar vectores específicos  $\bar{\phi}_i$  que mejor aproximen a los eigenvectores deseados.

Evalúese ahora el cociente de Rayleigh usando el vector  $\bar{\phi}$  para después utilizar el principio del mínimo:

$$\rho(\bar{\phi}) = \frac{\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q x_i x_j K_{ij}}{\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q x_i x_j M_{ij}} = \frac{k}{m} \quad (3.1.5)$$

donde

$$K_{ij} = \psi_i^T K \psi_j \quad (3.1.6)$$

$$\bar{m}_{ij} = \psi_i^T M \psi_j \quad (3.1.7)$$

La condición para obtener el mínimo del cociente anterior es que  $\partial \rho(\bar{\Phi}) / \partial x_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, q$  ya que las coordenadas son las únicas variables. Llevando a acabo la derivada tenemos:

$$\frac{\partial \rho(\bar{\Phi})}{\partial x_i} = \frac{2\bar{m} \sum_{j=1}^q x_j \bar{k}_{ij} - 2\bar{k} \sum_{j=1}^q x_j \bar{m}_{ij}}{\bar{m}^2} \quad (3.1.8)$$

si en la ecuación anterior se sustituye a  $\rho$  por  $k/\bar{m}$ , la condición para obtener el mínimo de  $\rho(\bar{\Phi})$  queda:

$$\sum_{j=1}^q x_j (\bar{k}_{ij} - \rho \bar{m}_{ij}) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, q \quad (3.1.9)$$

Escribiendo las  $q$  ecuaciones anteriores en forma matricial se tiene

$$\bar{K} X = \rho \bar{M} X \quad (3.1.10)$$

Las matrices  $\bar{K}$  y  $\bar{M}$  son matrices de  $q \times q$  con elementos definidos en (3.1.6) y (3.1.7), y  $X$  es una matriz de orden  $q \times q$  que guarda los vectores de coordenadas de Ritz. La solución al eigenproblema (3.1.10) da como resultado  $q$  eigenvalores  $\rho_1, \dots, \rho_q$  que son aproximaciones a los eigenvalores del sistema original  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ , y  $q$  eigenvectores,  $x_1, \dots, x_q$  estos son los vectores coordenados de Ritz con los que se puede construir la mejor aproximación de los vectores característicos del sistema original contenidos en el espacio de Ritz  $V_q$ . Utilizando (3.1.4) se obtiene la siguiente relación matricial:

$$\bar{\Phi} = \Psi X \quad (3.1.11)$$

en donde  $\bar{\Phi}$  contiene a  $q$  vectores  $\bar{\Phi}_1, \dots, \bar{\Phi}_q$ .

### 3.2 Condensación estática

En el método de la condensación estática la hipótesis principal es que la masa del sistema puede concentrarse en determinados puntos sin afectar notablemente la precisión en el cálculo de las frecuencias de las formas modales de interés. El criterio del ingeniero es el que determina como ha de distribuirse la masa del sistema. El problema queda de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ac} \\ K_{ca} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_c \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} M_a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_c \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

donde  $\phi_a$  son los desplazamientos de los grados de libertad que tienen asignada masa y  $\phi_c$  son los desplazamientos de los que no tienen asignada masa;  $M_a$  es una matriz diagonal. Realizando los productos indicados en la ecuación anterior se obtiene

$$K_{aa}\phi_a + K_{ac}\phi_c = \lambda M_a \phi_a \quad (3.2.2)$$

$$K_{ca}\phi_a + K_{cc}\phi_c = 0 \quad (3.2.3)$$

Despejando de esta última ecuación a  $\phi_c$  y sustituyendo en (3.2.2) se obtiene el problema de eigenvalores del sistema reducido.

$$K_a \phi_a = \lambda M_a \phi_a \quad (3.2.4)$$

donde

$$K_a = K_{aa} - K_{ac} K_{cc}^{-1} K_{ca}$$

El método se vuelve ineficiente a medida que el número de grados de libertad con masa asignada crece, ya que la matriz  $K_a$  es prácticamente llena. La aproximación a los vectores característicos de interés depende en gran medida del criterio del ingeniero al hacer la distribución de masa del sistema.

Guyan<sup>11</sup> estableció un procedimiento para obtener una matriz de masas reducida cuando la matriz de masas es una matriz de masas consistente, como la que resulta cuando se usa el método del elemento finito para llevar a cabo el análisis de una estructura.

El planteamiento de condensación estática que se vio en los párrafos anteriores puede verse como una transformación de coordenadas, de la forma  $\phi = T\phi_n$ , con  $T$  definida como

$$\phi = \begin{Bmatrix} \phi_a \\ \phi_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -K_{cc}^{-1} K_{ca} \end{bmatrix} \{\phi_a\} \quad (3.2.5)$$

donde ahora las submatrices que contienen el subíndice  $c$  contienen a los grados de libertad que se desean reducir.

La energía cinética y la energía de deformación de la estructura están definidas respectivamente como

$$Q = \Phi^T M \Phi / 2 \quad (3.2.6)$$

y

$$V = \Phi^T K \Phi / 2 \quad (3.2.7)$$

sustituyendo la transformación anterior se tiene

$$Q = \frac{1}{2} \phi_a^T T^T M T \phi_a \quad (3.2.8)$$

$$V = \frac{1}{2} \phi_a^T T^T K T \phi_a \quad (3.2.9)$$

La matriz de rigideces reducida es claramente  $K_u = T^T K T$  y la matriz de masas reducida  $M_u = T^T M T$ . Si la matriz de masas se define como

$$M = \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ac} \\ M_{ca} & M_{cc} \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

entonces la matriz de masas reducida es

$$M_u = M_{aa} - M_{ac} K_{cc}^{-1} K_{ca} - (K_{cc}^{-1} K_{ac})^T (M_{ac} - M_{cc} K_{cc}^{-1} K_{ca}) \quad (3.2.11)$$

Este notable resultado convirtió al artículo de Guyan en una referencia clásica de la materia.

Con el procedimiento establecido por Guyan, es posible reducir las matrices de masas consistentes, sin embargo, resta por resolver el problema de cómo seleccionar los grados de libertad que han de reducirse y cuáles dejar activos. Se ha mencionado que un ingeniero con experiencia puede vislumbrar la distribución de masa de modo que se extraigan los modos más flexibles de la estructura, pero, imaginar esa distribución para modos de más alta frecuencia es una labor difícil aún para el ingeniero experimentado. Lo anterior a dado lugar a numerosas investigaciones tendientes a establecer criterios que permitieran seleccionar de manera automática los grados de libertad 'maestros' o que deben mantenerse en el sistema reducido. Destaca por su sencillez, el que propone Henshell y Ong<sup>10</sup>, el cual establece que una medida de cómo un grado de libertad puede ser más o menos excitado es el cociente  $k_u/m_u$  pues esto indica si ese grado de libertad tiene mucha masa o bien que es poco rígido, en ambos casos, provocando que tienda a excitarse. Con estas ideas,

el método establece simplemente que los grados de libertad que deben mantenerse son aquellos que tengan el cociente anterior mínimo. En ningún caso de los ejemplos que estudió Henshell la determinación manual de los grados de libertad maestros arrojó un mejor resultado, y sí en cambio se obtuvo un mejoramiento en las aproximaciones de los modos que se obtuvieron. Otro aspecto muy importante es que el criterio es consistente y tiende a comportarse de manera mas o menos uniforme, evitando con esto una omisión grave que pudiera 'disparar' los resultados.

Este tipo de procedimientos de selección de los grados de libertad maestros es ideal para su implantación en un programa de análisis que utilice la reducción de las matrices de masas y rigideces.

El principal problema a que se enfrenta el método de condensación estática y la reducción de Guyan, es que no existe una distribución de masa que sea buena para extraer todos los modos que participan en la respuesta de la estructura, en general los primeros modos, de baja frecuencia, podrán ser aproximados con buena precisión, pero a medida que más modos contribuyen a la respuesta los errores que se comenten con estos métodos de reducción son mayores.

### 3.3 Iteración Inversa

El procedimiento de iteración inversa se ha utilizado con éxito para calcular eigenvectores y sus correspondientes valores característicos. Aunque actualmente no se usa en forma directa en los programas de análisis, muchos métodos utilizan estas ideas dentro de sus planteamientos, entre los que se incluyen el método de iteración del subespacio y el método de WYD.

El procedimiento se basa en la siguiente ecuación recurrente:

$$K \bar{x}_{k+1} = M x_k \quad (3.3.1)$$

y

$$x_{k+1} = \frac{\bar{x}_{k+1}}{(\bar{x}_{k+1}^T M \bar{x}_{k-1})^{1/2}} \quad (3.3.2)$$

en donde

$$x_{k+1} \rightarrow \phi_1 \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty$$

siempre y cuando el vector  $x_1$  no sea ortogonal a  $\phi_1$ , con respecto a la matriz de masas, esto es,

$$x_1^T M \phi_1 \neq 0$$

Para determinar la convergencia se utiliza el cociente de Rayleigh

$$\lambda_1^{k+1} = \rho(\bar{x}_{k+1}) = \frac{\bar{x}_{k+1}^T K \bar{x}_{k+1}}{\bar{x}_{k+1}^T M \bar{x}_{k+1}} \quad (3.3.3)$$

y la convergencia se obtiene cuando

$$\frac{|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}|}{\lambda_1^{(k+1)}} \leq tol \quad (3.3.4)$$

donde  $tol \leq 10^{-s}$ , siendo  $s$  el número de dígitos de aproximación requeridos para  $\lambda_1$ .

La demostración de la convergencia es muy ilustrativa. Llevese a cabo un cambio de coordenadas haciendo

$$x_k = \phi z_k \quad (3.3.5)$$

donde  $\phi$  contiene a los eigenvectores; sustituyendo en (3.3.1), premultiplicando por  $\phi^T$ , y utilizando las propiedades de ortogonalidad  $\phi^T K \phi = \Lambda$  y  $\phi^T M \phi = I$  se obtiene

$$\Lambda z_{k+1} = z_k \quad (3.3.6)$$

donde  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$ . El sistema (3.3.6) es equivalente al sistema (3.3.1).

En estas nuevas coordenadas los valores característicos son los elementos de la diagonal de  $\Lambda$  y los eigenvectores son los vectores unitarios  $e_i$ . Para demostrar el procedimiento expuesto arriba, escojase un vector inicial  $z_1$  que no sea ortogonal a  $\phi_1$  por ejemplo

$$z_1^T = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1] \quad (3.3.7)$$

entonces, utilizando la ecuación (3.3.6) para  $k = 1, \dots, l$ , se tiene

$$\bar{z}_{l+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\lambda_1^l} \\ \frac{1}{\lambda_2^l} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{1}{\lambda_n^l} \end{bmatrix} \quad (3.3.8)$$

Si se supone que  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Para mostrar que  $z_{l+1}$  converge a un múltiplo de  $e_1$  cuando  $l \rightarrow \infty$ , se multiplica a  $z_{l+1}$  en (3.3.8) por  $\lambda_1^l$  para obtener

$$\bar{z}_{l+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ (\lambda_1/\lambda_2)^l \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (\lambda_1/\lambda_n)^l \end{bmatrix} \quad (3.3.9)$$

de donde se observa que  $\bar{z}_{l+1}$  converge a  $e_1$  a medida en que  $l \rightarrow \infty$ .

Observese que para obtener un vector  $z_1$  que sea ortogonal a  $e_1$ , basta con hacer nula la primera posición del vector

$$z_1^T = [0 \ 1 \ 1 \dots \ 1] \quad (3.3.10)$$

Utilizando la ecuación (3.3.6) se llega a

$$\bar{z}_{l+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\lambda_2^l} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{1}{\lambda_n^l} \end{bmatrix} \quad (3.3.11)$$

Se supone ahora que  $\lambda_2 < \lambda_3$ ; si a (3.3.11) se multiplica ahora por  $\lambda_2$  se llega

$$\bar{z}_{l+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ (\lambda_2/\lambda_q)^l \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (\lambda_2/\lambda_n)^l \end{bmatrix} \quad (3.3.12)$$

De (3.3.11) se desprende inmediatamente que  $z_{l+1}$  nunca podrá converger a  $e_1$ , esto demuestra lo que ya se había mencionado, que si el vector inicial  $x_1$  es ortogonal al eigenvector  $\phi_1$ , el procedimiento de iteración conducirá necesariamente a un vector que no es  $\phi_1$ , más aún, según (3.3.12), se llegará a  $\phi_2$ , el siguiente eigenvector.

Este hecho sugiere un procedimiento en el que para obtener un nuevo eigenvector, se parte de un vector inicial  $\tilde{x}_1$  que se ha ortogonalizado previamente con los demás eigenvectores calculados. Esta ortogonalización suele llevarse a cabo por medio del conocido proceso de Gram-Schmidt. Supongase que ya se han encontrado  $q$  vectores característicos  $[\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_q]$ , y  $x_1$  es nuestro nuevo vector inicial, entonces por el proceso de Gram-Schmidt se tiene

$$\tilde{x}_1 = x_1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i \phi_i \quad (3.3.12)$$

donde

$$\alpha_i = \phi_i^T M x_1; \quad i = 1, \dots, q \quad (3.3.13)$$

Utilizando a  $\tilde{x}_1$  como vector inicial de la iteración se llegará a  $\phi_{q+1}$  y utilizando el cociente de Rayleigh a  $\lambda_{q+1}$ .

En la implantación de este procedimiento es necesario calcular los vectores característicos con gran precisión para que la ortogonalización funcione adecuadamente, adicionalmente el vector con que se está iterando debe ortogonalizarse en cada iteración respecto a los eigenvectores ya calculados.

### 3.4 Iteración del subespacio

Se desean obtener los primeros  $p$  valores y vectores característicos del sistema

$$K\Phi = \Lambda M\Phi \quad (3.4.1)$$

Este método utiliza, fundamentalmente las ideas introducidas en el análisis de Rayleigh-Ritz y el método de iteración inversa, adicionalmente se utiliza la propiedad de la secuencia de Sturm para determinar si los eigenvalores calculados son efectivamente los deseados.

Los pasos a seguir son los siguientes

- a) Se proponen los  $q$  vectores iniciales con  $q > p$ ,
- b) Se hace un ciclo de iteración inversa y un análisis de Ritz para obtener la mejor aproximación de los valores y vectores característicos en el espacio  $V_q$ ,
- c) Se verifica la convergencia; si no se satisface se utilizan los vectores calculados para efectuar nuevamente el paso (b),
- d) Se usa la secuencia de Sturm para verificar si los valores y vectores característicos calculados son los que se deseaban.

La iteración indicada en b) es de la forma

$$K\bar{X}_{k+1}^T = M X_k \quad (3.4.2)$$

las proyecciones de  $K$  y  $M$  sobre  $V_q^{k+1}$  se obtienen al hacer

$$K_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T K \bar{X}_{k+1} \quad (3.4.3)$$

$$M_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T M \bar{X}_{k+1} \quad (3.4.4)$$

Las matrices  $K_{k+1}$  y  $M_{k+1}$  son de orden  $q$ . El problema de valores característicos reducido queda en términos de estas matrices así

$$K_{k+1} Q_{k+1} = M_{k+1} Q_{k+1} \Lambda_{k+1} \quad (2.4.5)$$

donde  $Q_{k+1}$  es una matriz de  $q \times q$  que contiene a los vectores característicos del sistema reducido con los que puede obtenerse una mejor aproximación a los vectores característicos del sistema original con la expresión

$$X_{k+1} = \bar{X}_{k+1} Q_{k+1} \quad (3.4.6)$$

Si los vectores en  $X_1$  no son ortogonales a alguno de los eigenvalores deseados entonces

$$\Lambda_{k+1} \rightarrow \Lambda \quad \text{y} \quad X_{k+1} \rightarrow \Phi \quad \text{si} \quad k \rightarrow \infty \quad (3.4.7)$$

El proceso de Ritz reacondiciona los vectores  $X_k$ , haciéndolos perpendiculares respecto a la masa, lo que asegura que ninguno de los vectores tienda al mismo vector característico. Este proceso de ortogonalización tiene ventajas sobre el proceso de Gram-Schmidt, porque no solo se logra que los vectores sean ortogonales respecto a la masa sino que se obtiene una mejor aproximación de los eigenvectores, además numéricamente, la ortogonalización de los vectores por el proceso de Gram-Schmidt puede no ser estable, esto último se debe a que durante la iteración los vectores tienden a hacerse cada vez más paralelos y entonces por la precisión finita con que se cuenta en la computadora, en ocasiones, resulta imposible ortogonalizar los vectores. Por el otro lado, la proyección de las matrices al espacio de Ritz es muy costosa respecto al de la ortogonalización, y se vuelve ineficiente a medida que el número de vectores con que se está iterando crece. En la implantación de este método a la computadora se suele optar por ortogonalizar proyectando las matrices al espacio de Ritz, principalmente por la estabilidad numérica de este proceso.

La solución del problema de valores y vectores característicos reducido puede hacerse con mucho éxito por medio del método de Jacobi, este método funciona muy rápido si las matrices  $K$  y  $M$  tienen un ancho de banda pequeño, que es justamente lo que sucede a medida que se avanza en la iteración del subespacio.

El número de iteraciones requeridas para obtener una buena aproximación a los vectores característicos puede reducirse si el conjunto de vectores iniciales aproximan al subespacio menos dominante, en el caso que los vectores iniciales caractericen este subespacio, entonces los  $p$  vectores característicos que corresponden a los  $p$  eigenvalores menores, son una combinación lineal de estos vectores iniciales y la iteración del subespacio converge en un solo paso. Este es el caso cuando en una matriz de masa diagonal existen  $p$  elementos no nulos y los  $p$  vectores iniciales son vectores unitarios  $e_i$  con el 1 correspondiendo a los grados de libertad con masa no nula. En ese caso la iteración del subespacio se convierte en una condensación estática según se mostró en la sección 3.1

En la práctica el primer vector inicial es la diagonal de la matriz de masa, para asegurar que todos los grados de libertad sean excitados (ver el capítulo 4), y los vectores restantes son vectores unitarios  $e_i$  con el 1 en los grados de libertad que tengan el cociente  $k_{ii}/m_{ii}$  mínimo.

Es importante notar que, como en el caso del proceso de Ritz, para obtener la convergencia es necesario solo que los vectores aproximen adecuadamente al subespacio  $V_q^*$  y no que cada uno de los vectores aproxime a un eigenvector específico. Este hecho hace las cosas simples, pues es en general más fácil encontrar  $p$  vectores que aproximen al subespacio  $V_q^*$  que encontrar  $p$  vectores que cada uno aproxime a un eigenvector.

La convergencia se establece de la misma manera que para el caso de iteración inversa.

$$\frac{|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}|}{\lambda_1^{(k+1)}} \leq tol \quad (3.4.8)$$

### 3.5 Método de Lanczos

El método de Lanczos para obtener los vectores característicos, ha cobrado gran importancia en los últimos años pues ha mostrado ser muy efectivo comparado con los métodos como iteración del subespacio e iteración inversa simultánea.

El método de Lanczos es considerado un método de extracción directa basado en las llamadas secuencias de Krylov<sup>7</sup>, llamado de iteración inversa minimizada. El método sigue una secuencia muy similar a la expuesta en el método de Iteración inversa

$$x_{k+1} = Kx_k - \alpha_k x_k - \beta_{k-1} x_{k-1} \quad (3.5.1)$$

La diferencia entre el método de iteración y el de iteración minimizada reside en los últimos dos términos de la ecuación que son los que mejoran las características del método de iteración.

En la ecuación (3.5.1) se selecciona  $\alpha_k$  y  $\beta_{k-1}$  de manera que el siguiente vector  $x_{k+1}$  sea ortogonal a  $x_k$  y a  $x_{k-1}$ , los coeficientes  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  representan la diagonal y subdiagonal de una matriz simétrica tridiagonal

$$T_m = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & & 0 \\ & \beta_2 & \alpha_3 & \beta_3 & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ 0 & & & \cdot & \cdot & \beta_{m-1} \\ & & & \beta_{m-1} & \alpha_m & \end{bmatrix} \quad (3.5.2)$$

cuyos eigenvalores aproximan a los del sistema  $K\Phi = \Lambda\Phi$ :

Aunque la convergencia del método es realmente notable, al igual que los demás métodos de iteración, no es posible escoger anticipadamente que vector debe obtenerse y en general se obtienen los  $m$  vectores de mas baja frecuencia del sistema. Para saber que efectivamente se han obtenido los vectores de mas baja frecuencia suele agregarse la prueba de Sturm.

## Capítulo 4

## Presentación del método WVD

El procedimiento para resolver el problema de valores y vectores característicos que se presenta a continuación es un método de generación automática de vectores de Ritz. Una vez obtenidos los vectores se utiliza el método de Rayleigh-Ritz para aproximar a los vectores característicos.

Los vectores son generados tomando en cuenta la distribución espacial de la carga, dando como resultado que los modos de baja frecuencia, que son perpendiculares a la carga y por lo mismo no participan en la respuesta, no son calculados, aun cuando la frecuencia de esos modos esté contenida en la de la carga.

Esta característica del método hace que se requieran, para una precisión dada, menos vectores para aproximar la respuesta de la estructura que los necesarios por otros métodos

El método que a continuación se discute puede considerarse como un método de subestructuración dinámica, tal como los algoritmos de Condensación Estática de Guyan, pero que sin embargo, este se hace en una forma más racional para hacer la reducción.

La reducción del sistema por el procedimiento que aquí se describe puede manejar los casos de matrices de masa consistentes y los efectos de masas nulas en la diagonal en los casos de matrices de masas concentradas.

En todos los problemas estudiados por Wilson<sup>o</sup>, se obtuvieron aproximaciones mejores con menos vectores Ritz, que las obtenidas con la extracción directa de los eigenvectores.

Para presentar el método considerese la ecuación de equilibrio de un sistema estructural sin amortiguamiento

$$M\ddot{U} + KU = Rg(t) \quad (4.1)$$

donde  $R$  es un vector que depende solo de la variable de espacio y  $g(t)$  es una función escalar que depende del tiempo.

Se ha mencionado en secciones anteriores que este sistema de ecuaciones puede desacoplarse utilizando las propiedades de ortogonalidad de los vectores característicos respecto a la matriz de masas y de rigideces, obteniendose

$$\Phi^T M \Phi \dot{X} + \Phi^T K \Phi X = \Phi^T R g(t) \quad (4.2)$$

donde

$$K \Phi = \Lambda M \Phi \quad (4.3)$$

Supongase ahora que se han seleccionado un conjunto de vectores de Ritz  $\psi_1, \dots, \psi_q$  linealmente independientes. Con estos vectores es posible construir una aproximación de los vectores característicos

$$\bar{\phi}_i = \Psi z_i, \quad i = 1, \dots, q \quad (4.4)$$

donde  $\bar{\phi}_i$  es una aproximación a vector  $\phi_i$ ,  $\Psi$  es una matriz de  $n \times q$  que guarda en sus columnas los  $q$  vectores de Ritz  $\psi_1, \dots, \psi_q$  y  $z_i$  es el vector de coordenadas del vector  $\bar{\phi}_i$ . La ecuación (4.4) en forma matricial se escribe

$$\bar{\Phi} = \Psi Z \quad (4.5)$$

por lo que la ecuación (4.3) puede escribirse en términos de las aproximaciones a los vectores característicos

$$K \bar{\Phi} = \bar{\Lambda} M \bar{\Phi} \quad (4.6)$$

sustituyendo (4.5) en (4.6) y premultiplicando por  $\Psi^T$  se tiene

$$K^* Z = \bar{\Lambda} M^* Z \quad (4.7)$$

donde

$$K^* = \Psi^T K \Psi \quad (4.8)$$

$$M^* = \Psi^T M \Psi \quad (4.9)$$

Con la ecuación (4.7) se calcula  $\bar{\Lambda}$  que contiene las aproximaciones a los valores característicos del sistema original y  $Z$  que contiene las coordenadas de los vectores que aproximan a los vectores característicos, que según el proceso de Ritz, son las coordenadas de los vectores que "mejor" aproximan a los vectores característicos del sistema original.

El sistema (4.7) representa un problema de valores característicos reducido de orden  $q$  donde  $q$  difícilmente es mayor de 20, por lo que puede resolverse por algún método de extracción directa de vectores característicos. Uno de esos métodos, el de Jacobi, es muy efectivo en problemas pequeños, además es muy simple de implantar en la computadora.

Ritz)

Con (4.5) es posible encontrar los vectores característicos aproximados  $\bar{\Phi}$ . Sustituyendo estos vectores en (4.2) se tiene un sistema de ecuaciones desacoplado que puede resolverse por cualquier método.

#### 4.1 Obtención de los vectores de Ritz

Es claro que la precisión que pueda lograrse con el método de Ritz, depende en mucho de los vectores de Ritz seleccionados, Es aquí donde entra el método de WYD para la generación de los vectores.

Los vectores de Ritz se generan con la siguiente ecuación recurrente

$$K \bar{x}_i = M x_{i-1} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.1.1)$$

donde el primer vector de la serie se obtiene de la solución de

$$K \bar{x}_1 = R \quad (4.1.2)$$

y los vectores son ortogonalizados en cada paso mediante el proceso de Gram-Schmidt con las siguientes expresiones

$$x_i = \bar{x}_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_j x_j \quad (4.1.3)$$

donde

$$c_j = x_j^T M \bar{x}_i$$

Después de que cada vector es calculado se normaliza respecto a la masa

$$x_i = \frac{x_i}{(x_i^T M x_i)^{1/2}} \quad (4.1.4)$$

por lo tanto

$$x_i^T M x_i = 1$$

Wilson<sup>o</sup> hace la siguiente interpretación acerca del procedimiento que se sigue para generar los vectores: El primer vector representa la respuesta estática debida a la carga  $R$ . Las fuerzas dinámicas que son despreciadas en ese análisis estático son de la forma  $\omega^2 M x_1$ , donde  $\omega^2$  representa una componente de frecuencia típica de la carga. Estas fuerzas son aplicadas en el siguiente paso para generar el siguiente vector de Ritz. Otra vez, esta nueva solución estática, desprecia términos dinámicos que son utilizados como

Ritz)

vector de carga para obtener el siguiente vector de Ritz. La secuencia termina cuando el nuevo vector obtenido es ortogonal a todos los vectores anteriores.

También se puede entender el método de la siguiente forma: Se puede ver que la ecuación (4.1.1) para generar los vectores tiene la misma forma que el proceso de iteración inversa, sin embargo como en cada iteración se ortogonaliza el nuevo vector respecto a los anteriores, es como si en cada iteración se iniciara el proceso para aproximar un vector característico diferente. Este procedimiento utiliza al máximo el hecho, que tanto se ha enfatizado, que establece que el proceso de iteración parte de un vector  $x_1$  y converge a  $\phi_1$ , siempre y cuando  $x_1$  no sea ortogonal a  $\phi_1$ . La ortogonalización es entonces para asegurar que el nuevo vector generado tienda a aproximar un vector diferente a los ya obtenidos. Es muy importante tener en mente que en esta primera fase del método no interesa conocer con precisión cada uno de los vectores característicos, sino solo obtener un subespacio donde los vectores característicos que sean de interés puedan representarse adecuadamente. Esto significa que los vectores característicos puedan escribirse como una combinación lineal de los vectores calculados. La aproximación de los vectores característicos a partir del subespacio ya construido es la segunda fase del método y consiste en minimizar el cociente de Rayleigh por medio del proceso de Ritz.

Es interesante notar que se utiliza el vector  $R$  para iniciar el proceso. Para tratar de visualizar el efecto de este hecho en la generación de los vectores imagínese un edificio regular con ejes  $X$  y  $Y$  en planta, modelado con masas concentradas, sujeto a una acción sísmica en una de las direcciones principales, digase  $X$ . El vector  $R$  es, en este caso, el vector de masas con únicamente los términos en la dirección de la excitación, al aplicar el primer paso del método  $Kx_1 = R$  se obtendrá necesariamente un vector con desplazamientos en la dirección  $X$  y pequeños desplazamientos verticales en  $Z$ , pero los desplazamientos en  $Y$  se conservan nulos. Al aplicar los siguientes pasos del método los desplazamientos en  $Y$  siempre son nulos, aun después de las ortogonalizaciones. Para este ejemplo en particular los grados de libertad en  $Y$  nunca son excitados lo que da lugar a vectores de Ritz y luego a vectores característicos en el plano  $XZ$ . El método no ha extraído un buen número de

Ritz)

modos de baja frecuencia que definitivamente no intervienen en la respuesta total de la estructura debido a que la forma de la carga es ortogonal a esos modos, y lo que es mas, el método es incapaz de obtener esos otros modos.

Se hizo referencia a un edificio y carga sísmica solamente porque el efecto de "filtro" que proporciona la carga es muy evidente en ese caso, sin embargo los efectos benéficos generados al incluir la distribución espacial de la excitación en la extracción de los vectores de Ritz, es de carácter general.

Capítulo 5  
Implantación

### 5.1 Consideraciones Adicionales

En la implantación del método de WYD para la extracción de los vectores de Ritz se hacen algunas consideraciones adicionales para reforzar la conveniencia de considerar un vector paralelo a la distribución espacial de la carga.

La forma de la carga puede expresarse en términos de los vectores extraídos como

$$R = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \dots + \alpha_q \psi_q \quad (5.1)$$

Esta expansión de  $R$  es generalmente incompleta a menos que  $q = n$  o bien que  $R$  este totalmente contenido en el subespacio  $V_q$  caracterizado por los vectores de Ritz.

Una vez que se ha obtenido el primer vector se puede calcular la parte de la carga que aún no ha sido representada así:

$$\bar{R}_1 = R - \alpha_1 \psi_1 \quad (5.2)$$

y

$$R_1 = M \bar{R}_1 \quad (5.3)$$

para lograr que  $\bar{R}_1$  quede representado solo por los vectores restantes, es necesario hacerlo perpendicular a  $\psi_1$ , esto es

$$\bar{R}_1^T M \psi_1 = 0 \quad (5.4)$$

sustituyendo (5.2) en la ecuación anterior se tiene

$$R^T M \psi_1 - \alpha_1 \psi_1^T M \psi_1 = 0 \quad (5.5)$$

de donde

$$\alpha_1 = R^T M \psi_1 \quad (5.6)$$

con  $\psi_1^T M \psi_1 = 1$ . Este procedimiento elimina la posibilidad de que  $R_{-1}$  tienda a excitar al mismo vector  $\psi_1$ .

Al extraer el siguiente vector con  $K\psi_2 = R_1$  se puede, de nueva cuenta, obtener el residuo de la carga

$$\bar{R}_2 = R - \alpha_1 \psi_1 - \alpha_2 \psi_2 \quad (5.7)$$

si se hace como anteriormente que  $\bar{R}_2$  solo quede representado por los vectores restantes, entonces debe cumplirse que

$$\bar{R}_2^T M \psi_1 = 0 \quad (5.8)$$

y

$$\bar{R}_2^T M \psi_2 = 0 \quad (5.9)$$

operando sobre (5.7), (5.8) y (5.9) se obtendrá

$$\alpha_1 = R^T M \psi_1 \quad (5.10)$$

y

$$\alpha_2 = R^T M \psi_2 \quad (5.11)$$

el nuevo vector  $\bar{R}_2$  tenderá a excitar vectores diferentes de  $\psi_1$  y  $\psi_2$ .

Es ahora evidente que si

$$R^T M \psi_{q,i} = 0 \quad (5.12)$$

entonces la carga estará contenida totalmente en el subespacio  $V_q$  y el método no podrá generar mas vectores, por otro lado, no es necesario, pues la respuesta podrá representarse exactamente, ya que también esta estará contenida en el subespacio  $V_q$ .

En el programa se utiliza un procedimiento totalmente equivalente a los expuesto, pero que resulta más conveniente, y que consiste simplemente en expresar el siguiente vector residuo en términos del anterior

$$\bar{R}_i = \bar{R}_{i-1} - \alpha_i \psi_i \quad (5.13)$$

donde

$$\alpha_i = \bar{R}_{i-1}^T M \psi_i \quad (5.14)$$

Es muy deseable en la implantación de un método de extracción de vectores característicos el poder determinar si es necesario seguir adelante con la extracción de un nuevo vector o si se ha alcanzado la precisión deseada para terminar el proceso de extracción.

No es difícil ver que una medida de qué tan 'buenos' son los vectores que se están extrayendo, es la capacidad de estos para representar a la carga. Esto queda expresado en la siguiente norma

$$e_i = \sqrt{\frac{\bar{R}_i^T \bar{R}_i}{R^T R}} \quad (5.15)$$

$e_i$  representa la parte de la carga que falta por representar después de haber calculado  $i$  vectores de Ritz.

A diferencia de las normas a *posteriori* que suelen utilizarse, esta norma puede calcularse después de extraer cada uno de los vectores de Ritz y decidir en base a ella si es necesario continuar con la extracción del siguiente vector.

En el caso en que la carga sea debida a una excitación en la base es de la forma

$$Rg(t) = M\dot{U}_g \quad (5.16)$$

donde  $U_g$  son los desplazamientos de los grados de libertad iguales al desplazamiento de la base.  $\dot{U}_g$  puede escribirse como un vector de forma  $r$  multiplicado por una función escalar dependiente del tiempo  $v_g$

$$\dot{U}_g = Mr\dot{v}_g$$

la forma de la carga es entonces

$$R = Mr$$

que puede escribirse como

$$R = M \sum_{j=1}^q \alpha_j \phi_j \quad (5.17)$$

Si se premultiplica la ecuación anterior por  $\phi_i^T$  y debido a las propiedades de ortonormalidad de los vectores  $\phi_i$  respecto a la masa, se obtiene

$$\phi_i^T R = \sum_{j=1}^q \alpha_j \phi_j^T M \phi_j = \alpha_i \quad (5.19)$$

sustituyendo este resultado en (5.17) se tiene

$$R = M \sum_{j=1}^q \phi_j^T R \phi_j \quad (5.20)$$

finalmente como  $\phi_i^T R$  es precisamente el factor de participación, la ecuación (5.20) adopta la siguiente forma

$$R = \sum_{j=1}^q \rho_j M \phi_j \quad (5.21)$$

Con base en esta expresión se puede calcular la contribución de cada vector a la expansión de la carga como

$$h_j = R^T \rho_j M \phi_j / R^T R \quad (5.22)$$

y el error cometido después de calcular  $q$  vectores es simplemente

$$e = 1 - \sum_{j=1}^q h_j \quad (5.23)$$

## 5.2 Procedimiento de cálculo

En la tabla 5.1 se muestra un resumen de los pasos que deben seguirse en la implantación del método WYD para la extracción de  $q$  vectores de Ritz.

En la figura 5.2 se presenta el diagrama del sistema que fue implantado. El programa desarrollado es el RTZ88 que tiene las siguientes características:

El programa ...

- hace un análisis modal espectral de estructuras con excitación en la base.
- considera un modelo tridimensional a base de elementos prismáticos de eje recto o curvo y de elementos finitos como el elemento panel.
- calcula los elementos mecánicos y desplazamientos de la estructura en base a espectros de respuesta especificados para las tres direcciones principales (X, Y, Z).
- utiliza el método WYD para generar los vectores de Ritz que se ocupan en la aproximación de los vectores característicos del sistema.

- e) es capaz de extraer los vectores característicos para cualquier dirección de la excitación, misma que se define en base a sus cosenos directores.
- f) puede extraer un número determinado de vectores especificado por el usuario o detener la extracción de vectores en base a la norma de la ecuación (5.15), en este último caso el usuario especifica un error máximo permitido.
- g) Efectúa la superposición modal con uno de tres métodos de superposición disponibles: a) Suma de valores absolutos (ABS), raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (SRSS) y la suma cuadrática completa (CQC).

---

**TABLA 5.1 Resumen de la extracción de vectores de Ritz por WYD**


---

a)	$Kx = R$	Respuesta estática
b)	$f_1 = Mx$	primera carga dinámica
c)	$K\bar{\psi}_1 = f_1$	Primer vector de Ritz
d)	$\bar{\psi}_1 = \frac{\bar{\psi}_1}{(\bar{\psi}_1^T M \bar{\psi}_1)^{1/2}}$	Normalización
e)	$\bar{f}_2 = f_1 - (\bar{f}_1^T M \bar{\psi}_1) \bar{\psi}_1$	Residuo estático
f)	$f_2 = M\bar{f}_2$	Siguiente carga
g)	$e_1 = \bar{f}_2^T \bar{f}_2 / \bar{f}_1^T \bar{f}_1$	Error con 1 vector
	para $i = 2, \dots, q$	
h)	$K\bar{\psi}_i = f_i$	Siguiente vector
i)	$\bar{\psi}_i = \bar{\psi}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\bar{\psi}_j^T M \bar{\psi}_i) \bar{\psi}_j$	Ortogonalización
j)	$\bar{\psi}_i = \frac{\bar{\psi}_i}{(\bar{\psi}_i^T M \bar{\psi}_i)^{1/2}}$	Normalización
k)	$\bar{f}_{i+1} = \bar{f}_i - (\bar{f}_i^T M \bar{\psi}_i) \bar{\psi}_i$	Residuo estático
l)	$f_{i+1} = M\bar{f}_{i+1}$	Siguiente carga

$$m) \quad e_i = \frac{\int_{t_i}^T \int_{t_i}^T f_i}{\int_1^T \int_1^T f_1} \quad \text{Error con } i \text{ vectores}$$

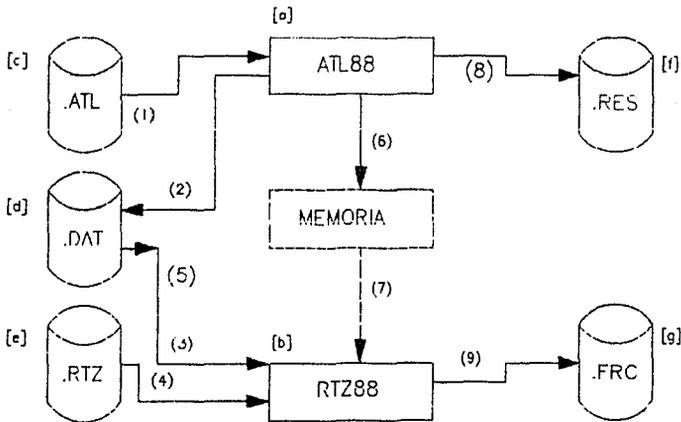
- h) utiliza un esquema de memoria para la matriz de rigideces en perfil.
- i) La solución de ecuaciones se lleva a cabo descomponiendo la matriz de rigideces  $K$  en el producto  $I.D.I'$
- i) puede hacer uso de la memoria expandida si se tiene disponible en el equipo utilizando el esquema LIM (Lotus Intel MicroSoft) o bien manejando directamente las tarjetas de expansión, en cuyo caso deberán ser del tipo JRAM.

El programa RTZ88 depende del programa ATL88<sup>10</sup> para la generación y descomposición de la matriz de rigideces del sistema como se explica en la figura 5.2.

El ATL88 es un programa para el análisis estático tridimensional de estructuras y cuyas características son las mismas que las descritas anteriormente, con excepción de las que se refieren al análisis dinámico en sí.

### 5.3 Esquema del sistema

Fig 5.2 Esquema del sistema



- a) Programa para el análisis estático  
(Análisis Tridimensional Lineal)
- b) Análisis dinámico  
(Por vectores de RITZ)
- c) Archivo de datos para el análisis estático (texto)
  - Geometría
  - Cargas
- d) Base de datos del sistema (binario)  
Contiene:
  - los datos del Análisis estático,
  - datos del análisis dinámico,
  - resultados del análisis estático y dinámico
- e) Archivo de datos adicionales para el análisis dinámico (texto)
- f) Archivo de resultados del análisis estático. (Texto)
- g) Archivo de resultados del análisis dinámico. (Texto)

#### RELACIONES

- 1) El programa ATL88 lee la geometría y cargas.
  - 2) El ATL88 crea el archivo (.DAT) con los datos de
    - Geometría y Cargas
    - Desplazamientos para cada condición de carga
    - Elementos mecánicos para cada condición de carga.
    - La matriz de rigideces descompuesta (L D Lt)
  - 3) RTZ88 lee la matriz de rigideces (L D Lt)
  - 4) RTZ88 lee
    - Masas
    - Espectros
    - Dirección de la excitación
  - 5) RTZ88 escribe en el archivo (.DAT)
    - los datos para el análisis dinámico
    - las frecuencias y factores de participación
    - las formas modales
    - desplazamientos
    - elementos mecánicos
  - 6) En caso de que el problema sea muy grande y que se cuente con memoria expandida, el ATL88 no guarda la matriz de rigideces en la base de datos (ocuparía demasiado espacio) en cambio deja la matriz ya descompuesta en memoria expandida.
  - 7) RTZ88 al leer los datos del (.DAT) se da cuenta si la matriz de rigideces esta en memoria expandida, de ser así, hace uso de ella directamente.
  - 8) ATL88 escribe los datos y resultados al archivo (.RES), con formato para impresión.
  - 9) RTZ88 escribe los datos del dinámico y los resultados al archivo (.FRC) con formato para impresión
-

#### 5.4 Listado

Se muestra a continuación las subrutinas utilizadas para la extracción de los vectores de Ritz y la rutina para ortogonalizar los vectores. Se aclara el esquema que se utilizó para el manejo de la matriz de rigideces. La rutina que se lista no muestra algunos detalles del manejo de memoria, con el objeto de centrar la atención en el proceso de extracción de los vectores.

```

/*-----
ortog:
Ortogonaliza el vector 'rx' respecto a rz[1...i-1]
rz: Vectores de Ritz ya calculados
ma: Vector de masas concentradas
rx: Vector a ortogonalizar, se regresa ortogonalizado.
i: Número de vector que corresponde a 'rx'
n: Número de ecuaciones.

Nota: El vector rz[i] se utiliza como auxiliar
-----*/
void ortog(
float *rz[],
float *ma,
float *rx,
int i,
int n)
{
double c;
int j,k;

for(k=1; k<=n; k++)
rx[k]= (rz[i,k]= rx[k]) * ma[k];

if(i==1)
goto normaliza;
for(j=1; j<i; j++)
{
c= 0.0;
for(k=1; k<=n; k++)
c+= rx[k] * rz[j,k];

for(k=1; k<=n; k++)
rz[i,k]-= c* rz[j,k];
}

normaliza:
c= 0.0;
for(k=1; k<=n; k++)
c+= rz[i,k]*ma[k]*rz[i,k];

c= sqrt(c);
for(k=1; k<=n; k++)
rx[k]= (rz[i,k]/=c);
}

```

/\*-----\*/

ritzv:

Genera los vectores de Ritz

Matriz de rigideces, esquema de almacenamiento:

			dd:		
1	3	6	13	1	
	2	5	12	2	
		4	8	11	4
			7	10	7
				9	9

dp: 1 1 1 3 1

La matriz de rigideces esta descompuesta en  $K = L D L^t$ ,  $K d = F$  las siguientes rutinas resuelven el sistema de ecuaciones anterior.

saflx:  $X = D L^t d$ , resuelve  $L X = F$  calcula  $X$

soxdy:  $Y = L^t d$ , resuelve  $D Y = X$  calcula  $Y$

soyle: resuelve  $L^t d = Y$  calcula  $d$

donde  $F = fm$

y  $K = kp$

dd: Direcciones de la diagonal.

dp: Direcciones del primer elemento.

kp: Matriz de rigideces

ma: Matriz de masas concentradas

fm: Vector de carga (se altera)

rz: Matriz de vectores de Ritz (se calculan los vectores)

rx: Vector auxiliar de 'n' posiciones

re: ==0 Indica que el residuo estático debe incluirse como vector de Ritz

n: Número de ecuaciones

nr: Número de vectores máximo (puede alterarse, si no hay suficiente memoria central)

-----\*/

```

void ritzv(
long *dd,
int *dp,
float huge *kp,
float *ma,
float *fm,
float *r[],
float *rx,
int re,
int n,
int *nr)
{
int i,k,nospace;
double c,c0,ck;

soflx(dp,dd,fm,kp,n,1);
soxdy(dd,fm,kp,n,1);
soyle(dd,fm,kp,n,1);

```

```

if(*nr==1 && re==0) {
  obrzmem( 1, nr, n);          /* reserva espacio para el vector de Ritz */
  c= 0.0;
  for(i=1; i<=n; i++)        /* calcula el residuo estatico */
    c+= fm[i]*ma[i]*fm[i];

  c= sqrt(c);                /* normaliza */
  for(i=1; i<=n; i++)
    rz[1,i]= fm[i]/c;

  return;
}

for(i=1; i<=n; i++)
  rx[i]= ma[i]*fm[i];

c0= 0.0;                      /* calcula la norma del vector inicial */
for(i=1; i<=n; i++)
  c0+= rx[i]*rx[i];

printf("RITZV #... residuo ..... ");

for(k=1; k<=*nr; k++) {
  printf("      %3d",k);

  nospace= obrzmem(k, nr, n);
  if( nospace ) *
    break;

  /* si es el ultimo vector, tomo el residuo estatico */
  if( k==*nr && re==0 ) {
    for(i=1; i<=n; i++)
      rx[i]= fm[i];
  }
  else {
    soflx(dp,dd,rx,kp,n,1);
    soxdy(dd,rx,kp,n,1);
    soyle(dd,rx,kp,n,1);
  }

  ortog(rz,ma,rx,k,n);        /* ortogonaliza */

  c= 0.0;
  for(i=1; i<=n; i++)        /* calcula el residuo estatico */
    c+= fm[i]*ma[i]*rx[i];
  for(i=1; i<=n; i++)
    fm[i]-= c*rx[i];

  for(i=1; i<=n; i++)
    rx[i]= ma[i]*fm[i];

  ck= 0.0;
  for(i=1; i<=n; i++)
    ck+= rx[i]*rx[i];

  printf("%3d residuo %14.7le",k,ck/c0);
}
}

```

## Capítulo 6

## Ejemplos

Con el propósito de estudiar el comportamiento del método WYD, se calcularon las frecuencias de vibración de cuatro estructuras. En los estudios se llevó a cabo el análisis con el programa RTZ88 que utiliza el método WYD en la solución, y el programa LNZ88 que utiliza el método de Lanczos. En todos los casos se comparó el tiempo que requieren los dos métodos para extraer los vectores y la calidad de los mismos. Como medida de la calidad de los vectores extraídos por los métodos se utilizó la norma introducida en el capítulo 5 (ec 5.23).

Los programas fueron implantados en lenguaje 'C' y ejecutados en una máquina IBM PC compatible con un procesador INTEL 80286 y una velocidad de reloj de 12 Mhz. La máquina no contaba con el coprocesador matemático 80287.

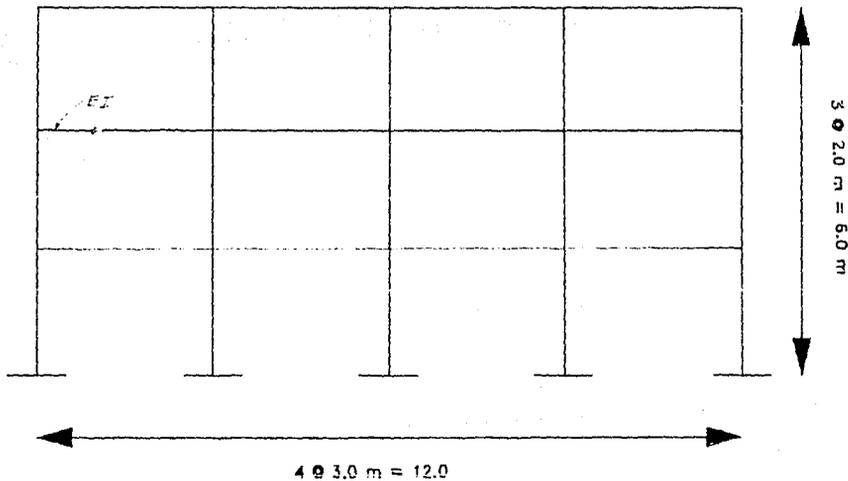
A diferencia de Bahram, que utilizó 2 programas como "cajas negras", los programas RTZ88 y LCZ88 fueron desarrollados especialmente para la realización de este trabajo, cuidando que ambos programas fueran realmente comparables. Por ejemplo: Los dos programas utilizan exactamente el mismo esquema para manejar la matriz de rigideces, utilizan las mismas rutinas para hacer la sustitución hacia adelante y hacia atrás, y los algoritmos para multiplicar un vector por la matriz de rigideces son también idénticos, etc. En forma general, toda la organización de los programas se hizo, hasta donde fue posible, similar. Se cuidaron todos estos detalles para lograr que las diferencias en comportamiento que se obtuvieran se debieran, efectivamente, a las ventajas o desventajas de un método sobre el otro y no debidas a diferencias en la implantación de los métodos.

Se incluyen los Marcos de prueba 1 y 2, fig. 6.1 y 6.4 que fueron utilizados por Bahram Nour-Omid<sup>c</sup> en un estudio en el que se comparaban los tiempos utilizados por los métodos de Lanczos y de iteración del subespacio, en el cálculo de frecuencias. En ese estudio se hace evidente la superioridad del método de Lanczos sobre el método de Iteración del Subespacio.

Los otros ejemplos incluidos en el trabajo corresponden a estructuras reales. Una es un transportador y la otra una palapa figs. 6.7 y 6.11. Los tres primeros casos son estructuras cuya geometría se define en el plano y la última es una construcción espacial.

### 6.1 MARCO 1

Se trata de un marco típico de 4 crujeías y 3 entrepisos. El modelo de la estructura junto con las propiedades de todos sus elementos se muestra en la fig 6.1



$$K = 0.101 \text{ ton / m}^2$$

$$w_k = 0.001 \text{ ton / m}$$

$$A = 1.0 \text{ m}^2$$

$$I = 1.0 \text{ m}^4$$

Numero de ecuaciones = 45

Fig. 6.1 Marco de prueba 1

### Ritz vs Lanczos Tiempos de solución (Marco 1)

Tiempo en segundos

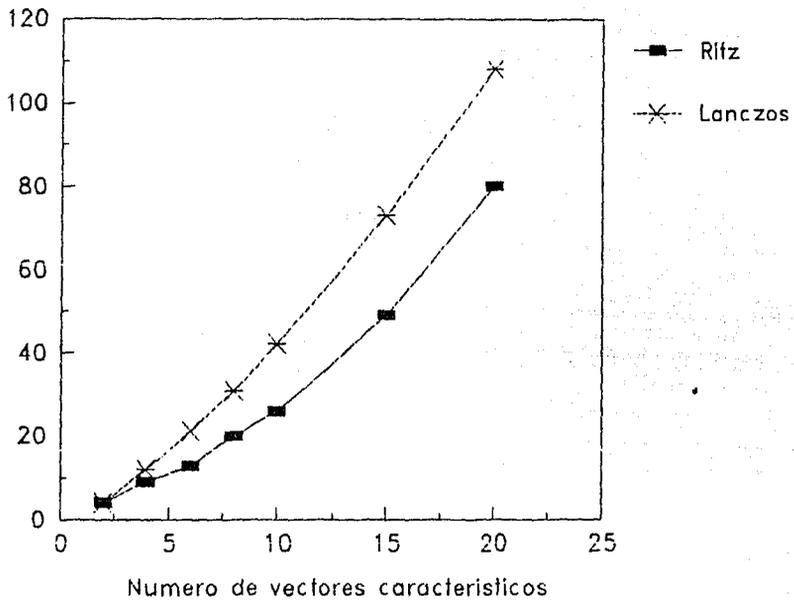


Fig. 6.2 Tiempos para el cálculo de frecuencias del Marco de prueba 1.

### Ritz vs Lanczos

#### Comparacion de error (Marco 1)

Error

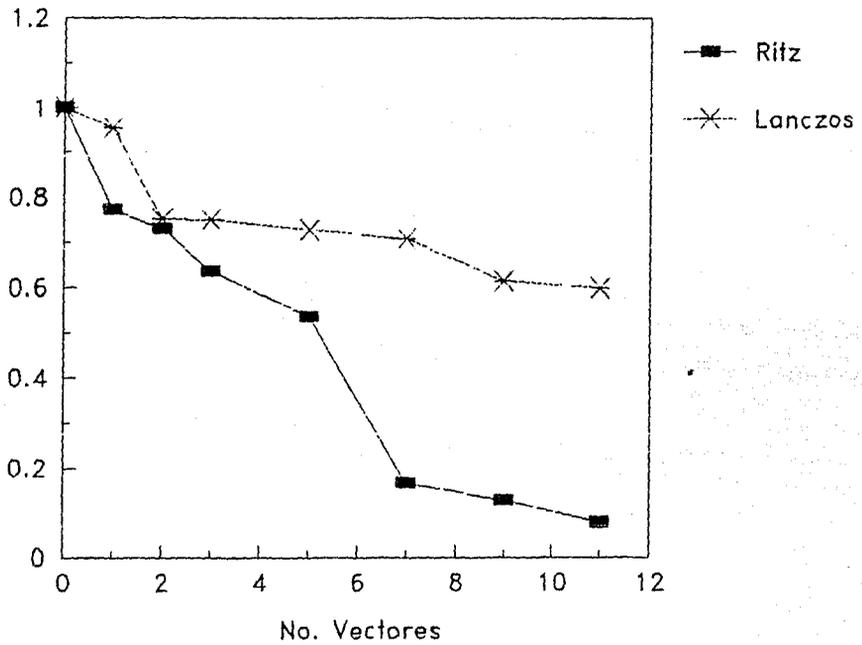
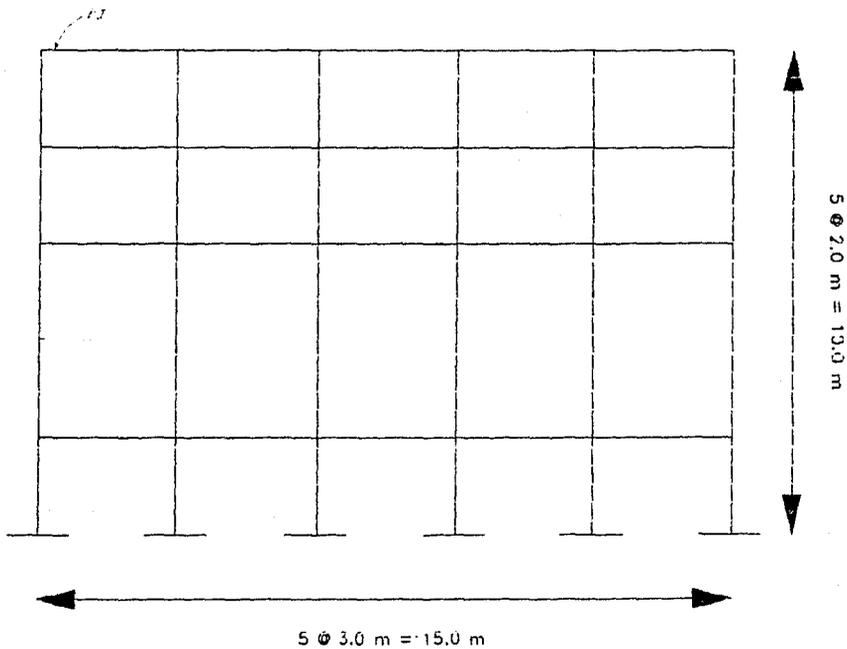


Fig. 6.3 Errores calculados en la superposición modal, Marco de prueba 1.

## 6.2 MARCO 2

El marco de prueba 2 consta de 5 cruías y 5 entrepisos. El modelo y propiedades de los elementos se muestran en la fig 6.4. Como era de esperarse los resultados obtenidos con este marco son cualitativamente similares a los del marco de prueba 1.



$E = 0.101 \text{ ton / m}^2$   
 $w = 0.001 \text{ ton / m}$   
 $A = 1.0 \text{ m}^2$   
 $I = 1.0 \text{ m}^4$   
Número de ecuaciones = 90

Fig. 6.4 Marco de prueba 2

# Ritz vs Lanczos

## Tiempos de solución (Marco 2)

Tiempos en segundos

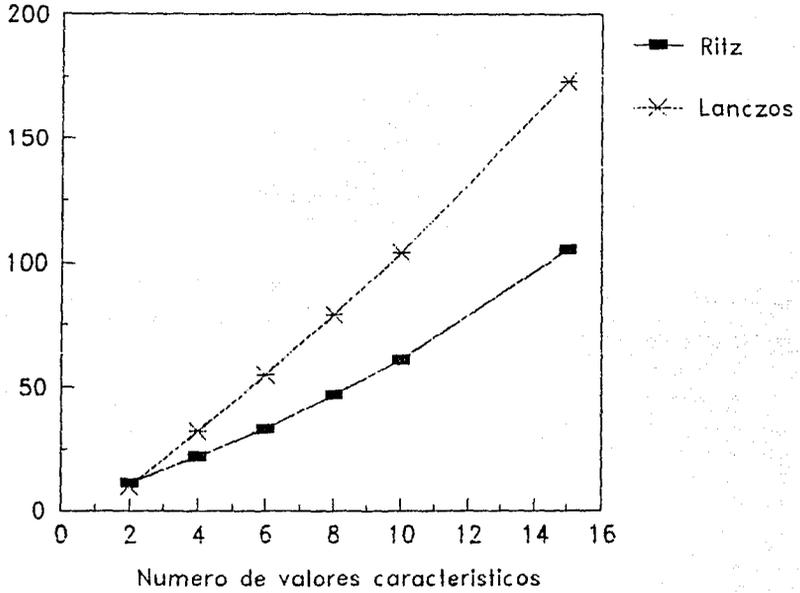


Fig. 6.5 Tiempos para el cálculo de frecuencias del Marco de prueba 2.

### Ritz vs Lanczos

#### Comparacion de error (Marco 2)

Error

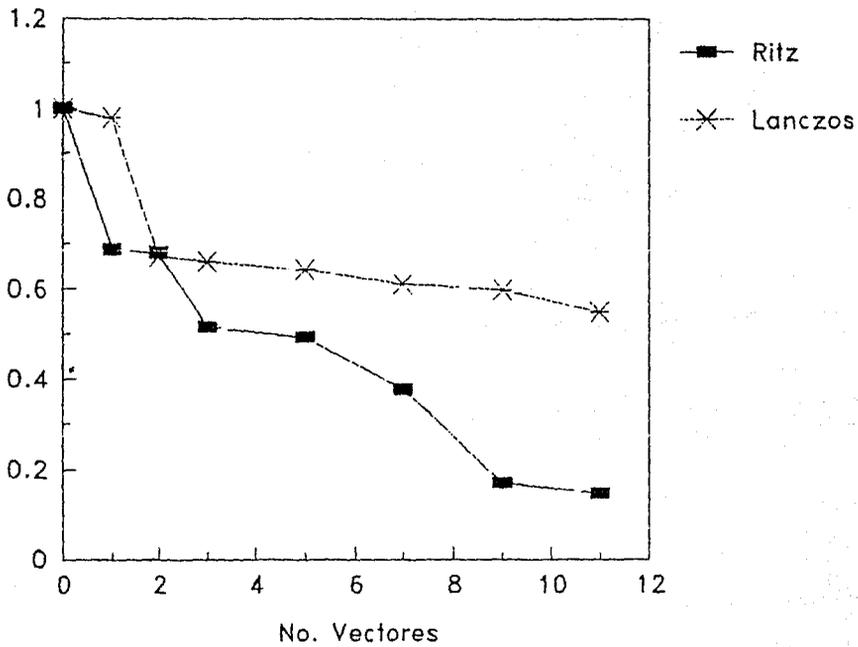


Fig. 6.6 Errores calculados en la superposición modal, Marco de prueba 2.

### 6.3 TRANSPORTADOR

Se trata de una estructura elevada por la que corre una banda transportadora de carbón. El análisis de la estructura se realizó en el plano debido a que la estructura está restringida en la dirección perpendicular al plano de estudio. El modelo de la estructura se presenta en la fig 6.7.

Es importante notar en la figura 6.9 que con Lanczos se requirieron 3 vectores para lograr un error menor a 0.025 mientras que con Ritz solo se requirió de uno. Si Lanczos extrae los modos en orden de frecuencia esto significa necesariamente que el primer vector extraído por Ritz, no se parece al primer modo extraído por Lanczos, esto es, no es un modo, sin embargo la respuesta de la estructura puede representarse mejor con este vector que con los verdaderos modos.

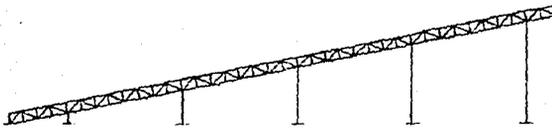


Fig. 6.7 Transportador

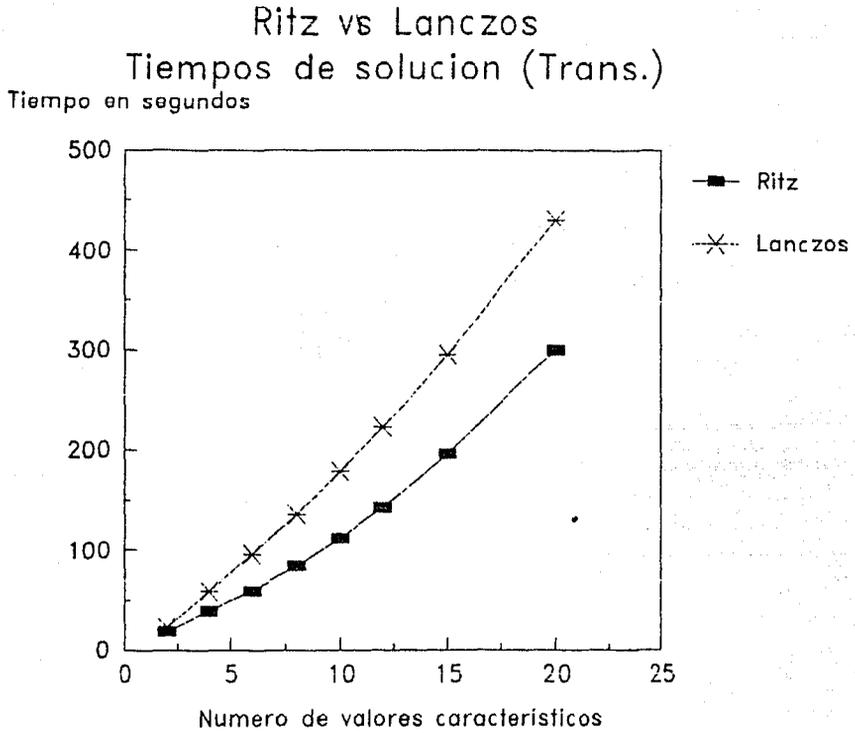


Fig 6.8 Tiempos para el cálculo de frecuencias del trasportador.

# Ritz vs Lanczos

## Comparacion de error (Transportador)

Error

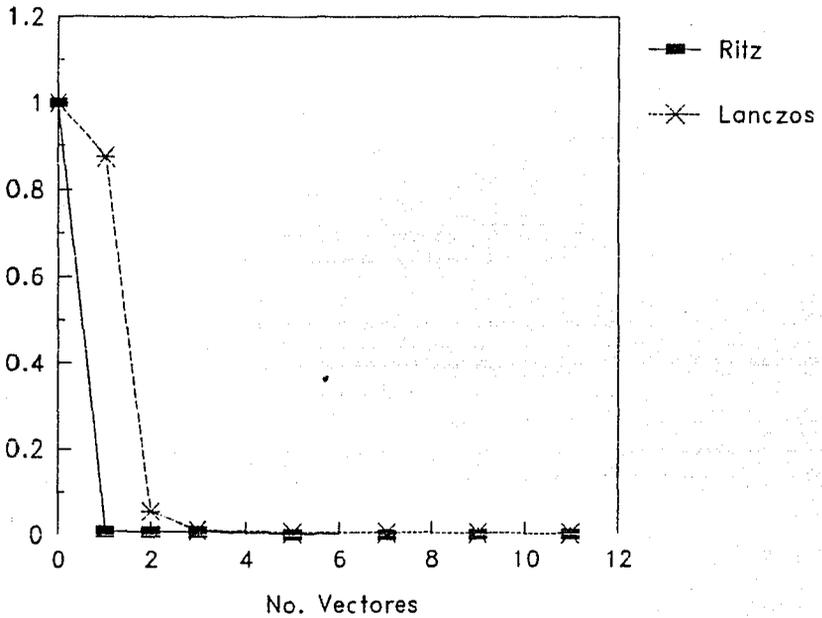


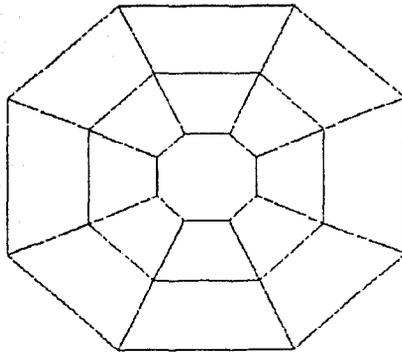
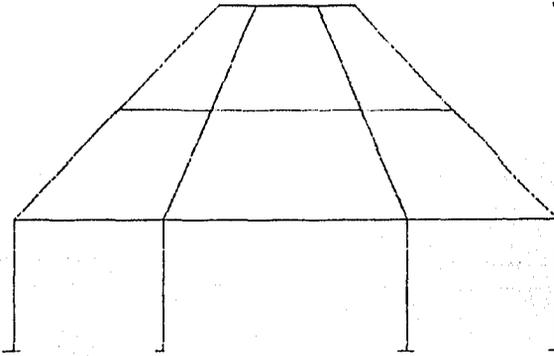
Fig 6.9 Errores calculados en la superposición modal, transportador.



Fig 6.10 Transportador, primer modo  $T=0.11921$ , segundo modo  $T=0.05074$

#### 6.4 PALAPA

La palapa que se muestra en la fig 6.11 es una estructura espacial axisimétrica en la que se presentan los modos, en orden de frecuencia, por pares, pues habrá modos similares para las dos direcciones principales de la estructura. En este ejemplo se muestra claramente que, aunque tengan baja frecuencia, no participan en la respuesta de la estructura por ser estas formas modales ortogonales a la de la excitación, mientras que con Lanczos, al extraer los modos en orden de frecuencia, calcula un gran número de vectores inútiles.



**Geometría:**

Dímetros que inscriben a los octágonos....: 36.249m, 20.898m, 9.264m.  
 Altura de los anillos desde el desplante....: 9.000m, 17.000m, 24.000m.

Material:  
E= 21000000 70n / m2  
nu= .3

Secciones

e	Ax (m2)	Ay (m2)	Az (m2)	Ix (m4)	Iy (m4)	Iz (m4)
col.n1	.02100	.02100	.02500	.001085	.001085	.0331000
col.n2-3	.00094	.00094	.01130	.002390	.000163	.0000004
anillos	.00123	.00123	.01480	.001650	.001650	.0000004

Fig. 6.11 Palapa

### Ritz vs Lanczos Tiempos de solucion (Palapa)

Tiempo en segundos

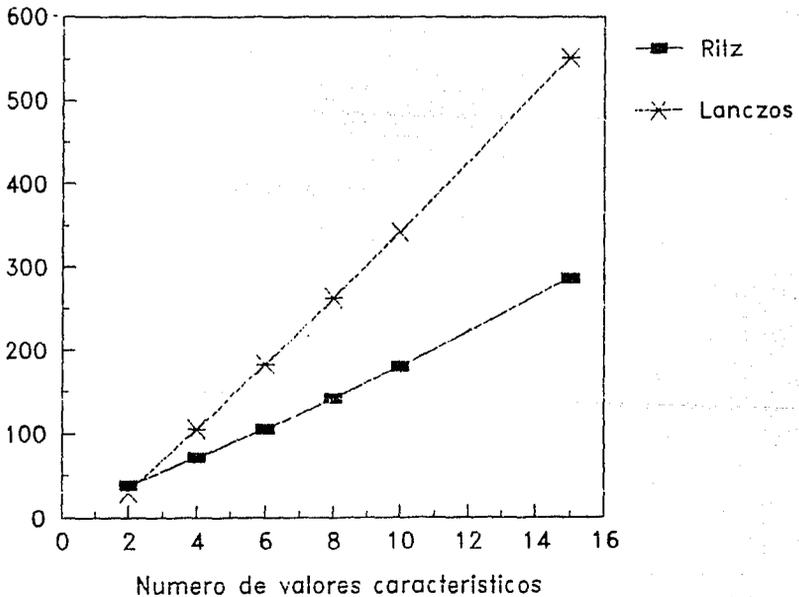


Fig. 6.12 Tiempos de cálculo de frecuencias para la Palapa.

### Ritz vs Lanczos

#### Comparacion de errores (Palapa)

Error

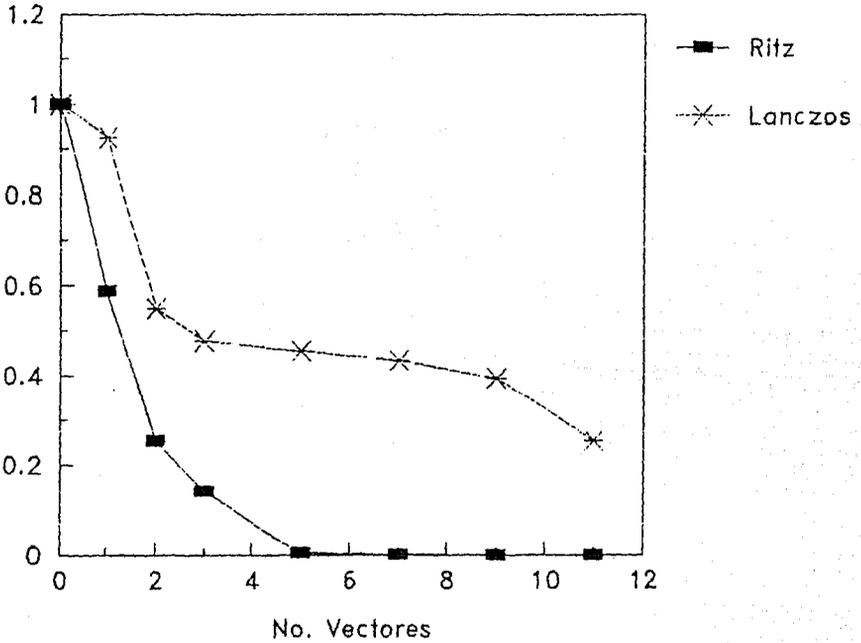


Fig. 6.13 Errores calculados en la superposición modal, Palapa.

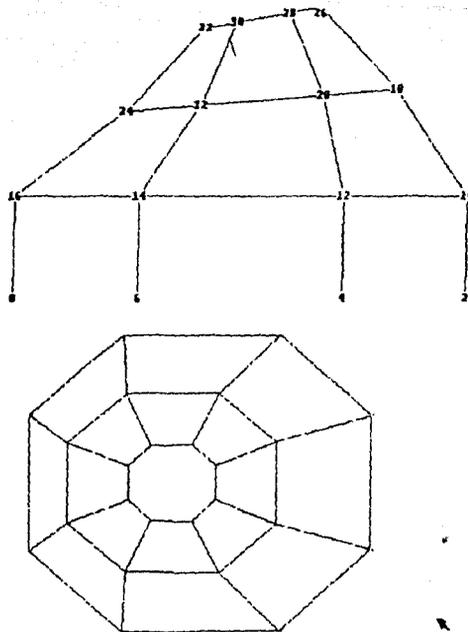


Fig. 6.14 Palapa, primer modo  $\gamma=0.29639$ , segundo modo  $\gamma=0.20619$

## Capítulo 7

### Análisis de Resultados

El buen comportamiento del método WYD se hizo evidente en los ejemplos del capítulo 6, en las figuras 6.3, 6.6 y 6.13. Vease en particular el caso de la Palapa (Fig. 6.13); mientras que el método de Lanczos obtiene 7 vectores prácticamente sin lograr ninguna mejora en la precisión de la respuesta (meseta en la gráfica del modo 3 al 8), con el método de WYD cada vector extraído contribuye notablemente en el mejoramiento de la solución logrando un resultado prácticamente exacto con apenas cinco vectores mientras que el método de Lanczos con 11 vectores extraídos todavía le resta por representar aproximadamente un 25% por ciento de la respuesta.

Es de esperarse que en estructuras tridimensionales complejas con un gran número de grados de libertad se acentúe el comportamiento del método WYD descrito en el párrafo anterior, debido a que en general en ese tipo de estructuras los modos se presentan en grupos de modos que tienen una frecuencia similar, sin embargo la forma de los modos en dicho grupo suele ser totalmente diferente (no residen en el mismo subespacio) esto significa, que para una excitación determinada, solo uno de los modos o unos cuantos de esos modos contribuyen significativamente en la respuesta. Los métodos que extraen los vectores en orden de frecuencia (típicamente de menor a mayor) no pueden percatarse de este hecho extrayendo un número grande de vectores que no intervienen en la respuesta (inútiles), el método WYD, en cambio, al hacer intervenir la distribución espacial de la excitación en el proceso de extracción de los vectores logra determinar los vectores que contribuyen significativamente en la representación de la respuesta del sistema.

En la presentación de los métodos se vio que el método de Ritz es la pieza fundamental en muchos métodos de extracción de eigenvectores y que incluso métodos como el de condensación estática y Guyan pueden entenderse como procesos de Ritz, que su comportamiento depende esencialmente del conjunto inicial de vectores seleccionado o dicho de otra manera del subespacio que caracterizan los vectores de Ritz seleccionados. Se vio también que el método de WYD establece precisamente un procedimiento para encontrar el conjunto de vectores de Ritz que definen un subespacio en el que puede representarse la respuesta de

la estructura efectivamente. Es interesante hacer notar como es que el método de Guyan define el subespacio al que se ha hecho referencia y porqué resulta menos efectivo que el método de WYD.

En Guyan al definir los grados de libertad maestros se está reduciendo el número de coordenadas que se utilizan para expresar la configuración deformada de la estructura y la posición del resto de los grados de libertad queda en función de los grados de libertad maestros, este es el mecanismo que se usa en Guyan para definir el subespacio de Ritz. Este sistema parece razonable en estructuras como son los edificios regulares pues es claro que si la losa es suficientemente rígida, la posición de los puntos sobre la losa puede calcularse en función del movimiento de unos cuantos puntos de la misma losa, esto es, no se requieren mas que un número muy reducido de coordenadas para establecer, con mucha precisión, la cinemática de la estructura, además en este tipo de estructuras las masas están concentradas al nivel de los pisos lo que hace que los efectos dinámicos puedan determinarse igualmente en función de unas cuantas coordenadas. Esta situación cambia radicalmente en una estructura en la que la masa y la rigidez de la misma está uniformemente distribuida imagínese por ejemplo una tridilosa, en este caso es evidente que la cinemática de la estructura no puede establecerse con precisión a menos que se utilice un gran número de coordenadas. En el caso del método de WYD los vectores son seleccionados de modo que la respuesta esté contenida en el subespacio expandido por dichos vectores, en este caso sin embargo, los vectores tienen definidas todas sus coordenadas, no están implícitas hipótesis cinemáticas. En términos del ejemplo de la tridilosa se tiene que con un solo vector de Ritz obtenido con WYD es posible obtener una muy buena aproximación a la respuesta lo que con el método de Guyan equivaldría a representar la respuesta de la estructura con una sola coordenada (grado de libertad maestro).

De las observaciones anteriores se desprende que el método de Guyan se vuelve incapaz de representar adecuadamente la respuesta de la estructura cuando se trata de una excitación que contenga componentes de alta frecuencia porque en general las configuración de las estructuras ante tal tipo de excitación es compleja y requiere un gran número de coordenadas para ser representada adecuadamente. Este no es el caso, al menos en teoría, con el método de WYD que aún en el caso de

excitaciones con componentes de alta frecuencia puede determinar la respuesta con precisión siempre y cuando la respuesta este contenida en un subespacio que pueda caracterizarse con un número limitado de vectores de Ritz.

## Capítulo 8 Conclusiones

En los capítulos anteriores se estudiaron las técnicas numéricas más modernas para la extracción de valores y vectores característicos en el análisis dinámico modal espectral de estructuras. Se presentó el método WYD como un método de subestructuración dinámica y sus características más sobresalientes, entre ellas, quizá la más importante es que el método toma en cuenta la distribución espacial de la carga para la extracción de los vectores de Ritz. Esta cualidad permite al método discriminar a aquellos modos que no participan en la respuesta aunque la frecuencia de los mismos esté contenida en la de la excitación.

El buen comportamiento del método se hizo evidente en los ejemplos que se estudiaron en el capítulo 6. En todos los ejemplos estudiados el método de WYD logró, con el mismo número de vectores extraídos, una mejor representación de la respuesta que con el método de Lanczos, adicionalmente el método de WYD tomó menos tiempo en extraer cada nuevo vector.

En suma puede decirse que el método WYD establece una secuencia para determinar los vectores de Ritz que resulta mucho más racional y efectiva que la utilizada hasta ahora por los diferentes métodos de subestructuración dinámica.

## Referencias

1. K.J. Bathe, y E.L. Wilson, "Large Eigenvalue Problems in Dynamic Analysis", A.S.C.E. Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 99, 1973.
2. K.J. Bathe, y E.L. Wilson, "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice-Hall, Inc. 1986.
3. J.S. Przemieniecki, "Theory of Matrix Structural Analysis", McGraw-Hill, Inc. 1968.
4. L. Bentley, "Linear Algebra with Differential Equations", Holt Rinehart and Winston, Inc. 1973.
5. W. Clough y J. Penzien, "Dynamics of Structures", McGraw-Hill Inc., 1975.
6. Bahran Nour-Omid Beresford y N. Parlet, "Lanczos Versus Subspace Iteration for Solution of Eigenvalue Problems", Rep. UCB/SESM-80/08 Department of Civil Engineering, University of California Berkley, 1980.
7. P.C. Chowdhury, "The Truncated Lanczos Algorithm for Partial Solution of the Symmetric Eigenproblem", Department of Naval Architecture and Shipbuilding, University of Newcastle upon Tyne, England., 1975.
8. E.L. Wilson, M. Yuan y J.M. Dickens, "Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors", Rep. UCB/EERC-82/04, College of Engineering, Department of Civil Engineering, University of California, 1982.
9. E.L. Wilson, "CAL-86 Computer Assisted Learning of Structural Analysis and the CAL/SAP Development System", Rep. UCB/SESM-86/05, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, California, 1986
10. R.D. Henshell y J.H. Ong, "Automatic Masters for Eigenvalue Economization", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 3, 375-383, 1975.
11. J. Guyan, "Reduction of Stiffness and Mass Matrices", AIAA Journal Vol. 3, No. 2, 1964.
12. Weaver, Jr. y David M. Yoshida, "The Eigenvalue Problem for Banded Matrices", Computer & Structures, Vol. 1, pp. 651-654, 1971.

13. J. A. Escobar, "Efecto de Incertidumbres en las Características de Sistemas Estructurales Sobre su Respuesta Modal Espectral", Tesis de Maestría, DEFFI UNAM, 1987.
14. E.L. Wilson, A.D. Kiureghian y E.P. Bayo "A Replacement for SRSS Method of Seismic Analysis", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 9, 187-194, 1981.
15. E.L. Wilson y M.R. Button, "Three-Dimensional Dynamic Analysis for Multi-Component Earthquake Spectra", Rep. UCB/EERC-62/04, p. 37-50. University of California, Berkeley, California, 1982.
16. P. Bezler, M. Subudhi y M. Hartzman, "Piping Benchmark Problems, Dynamic Analysis, Independent Support Motion, Response Spectrum Method", NUREG/CR-1677 BNL NUREG-51267 Vol II RM, Structural Analysis Division, Department of Nuclear Energy, 1985
17. J.F. Imbert, "A Survey of Current Capability for Dynamic Analysis of Complex Structures", Centre National d'Etudes Spatiales, Toulouse France
18. E. Rosenblueth y J. Elorduy "Response of linear Systems to Certain Transient Disturbances", Proc. Fourth World Conference Earthquake Engng 1, Santiago, Chile, 185-196, 1969
19. E. Rosenblueth "Sobre la Respuesta Sísmica de Estructuras de Comportamiento Lineal", Instituto de Ingeniería, UNAM, No. 179, México, Julio de 1968
20. J. Antoniano. "At188 Análisis Tridimensional Lineal", IOIS 1988
21. J. Cesín. "LNZ88 Análisis Dinámico Tridimensional", IOIS 1989.