UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Sistema Graficador de Funciones Logarítmicas Exponenciales y Trigonométricas

TESIS PROFESIONAL
Que para obtener el Título de
MATEMATICO

presenta

JESUS ALBERTO CRUZ REBOLLEDO

MEXICO D.F. 1990

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

TABLA DE CONTENIDO

PREFACIO

Con grande satisfacción presentamos a profesores y alumnos de la UNAM ,de la Facultad de Ciencias y del Colegio de Ciencias y Humanidades el SISTEMA GRAFICADOR DE FUNCIONES EXPONENCIALES LOGARITMICAS Y TRIGONOMETRICAS (que será denominado SISTEMA GRAFICADOR a partir de este momento) .

La enorme población escolar ,la no seriación en las materias, la carencia de los profesores de una adecuada metodologia de enseñanza , la apatía y desinterés de los alumnos , así como la falta de un material apropiado de apoyo al proceso de enseñanza aprendizaje , son algunos de los motivos por los cuales en el Colegio de Ciencias y Humanidades el numero de alumnos que adeudan alguna materia del Area de Matemáticas ha crecido hasta alcanzar dimensiones monstruosas .

Una manera de resolver lo expresado anteriormente es emplear modernos métodos de enseñanza de la Matemática entre los que destaca el uso de la computadora (como auxiliar del maestro, no en substitución de él) , lo que conlleva a otra necesidad del C.C.H. : la elaboración de software acorde a sus caracteristicas particulares .

Es ampliamente conocido que en los cursos de Matemáticas (de manera particular en el Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM) un gran obstáculo para el completo entendimiento de la Geometria Euclidiana , Trigonometria , Geometria Analitica y Cálculo es el tener que hacer inferencias usando gráficas no muy correctas que el profesor de manera aproximada dibuja sobre el pizarrón.

Para evitar lo anterior ,buscamos esas gráficas en los textos que corresponden a los programas de nuestras materias pero, las dimensiones reducidas de ellas obliga a que los libros sean prestados a los alumnos de uno en uno , por lo que si se toma en consideración que cada alumno emplea un minuto para ver cada una de las gráficas , y que en una clase ordinaria se necesitan por lo menos 3 gráficas , y que además , en el C.C.H. los grupos en promedio tienen 50 alumnos , concluímos que se necesitan 2 horas y media tan solo para ver las gráficas correspondientes al tema, pero también se deben hacer explicaciones , dar ejemplos ,hacer preguntas, aclarar dudas, poner ejercicios , etc. , y al tener nuestra clase a lo más 2 horas de duración , de manera inmediata se concluye la imposibilidad de nuestra tarea.

Proponemos como solución elaborar en computadora una serie de programas con las gráficas mas usadas en los diferentes cursos de Matemáticas , conectar una televisión a una computadora (en todos los planteles del C.C.H. hay computadoras y televisiones) y correr (ejecutar) esos programas ante un grupo escolar.

Si se da el caso de que se disponga de una gran cantidad de computadoras personales (lo cual es posible ,pero tiene una muy pequeña probabilidad) entonces , proporcionar a los alumnos el SISTEMA GRAFICADOR y el tiempo de computadora que necesite .

Para complementar las instrucciones y sugerencias que se muestran al usuario en el monitor de la computadora , se ha escrito la presente TESIS (haremos también referencia a ella usando la palabra Manual) cuya lectura debe ser obligatoria antes de la ejecución de los programas del SISTEMA GRAFICADOR .

Con el propósito de que el usuario pueda imprimir esta TESIS sin alguna dificultad , se ha evitado el tener que recurrir a Procesadores de Texto ya que posiblemente no disponga de ellos o no conozca su uso . La TESIS puede ser impresa con tan solo seguir las instrucciones que va proporcionando la computadora al estarse ejecutando (corriendo) el programa TESIS.COM .

Otra opción es imprimir el archivo TESIS.TXT (TESIS) desde el sistema operativo , para lo cual se deben seguir las indicaciones que se dan en el CAPITULO IV .

Por último , deseamos mencionar que el SISTEMA GRAFICADOR ha sido elaborado teniendo como meta el contribuir a la creacion de esa serie de programas especialmente pensados para nuestro Colegio de Ciencias y Humanidades .

C A P I T U L O I

BREVE HISTORIA DEL USO DE LAS COMPUTADORAS EN LA EDUCACION

CONSIDERACIONES PRELIMINARES

Es posible aprender por medio de la computadora ya que se tienen los algoritmos , los programas , la resolución de los problemas , pero también debido a que la computadora es usada como un nuevo instrumento de la Didáctica . Es en esta sección donde se ubican muchas de las siglas que paulatinamente han ido introduciéndose en lo que se refiere al empleo de la computadora en la Didáctica :

En primer lugar CAI (Computer Assisted Instruction) que es el mas extendido de estos métodos . Le siguen otros como CAL (Computer Aided Learning) ,CMI (Computer Managed Instruction) y CML (Computer Managed Learning) .

Las anteriores iniciales hoy solamente tienen un valor histórico (con la excepción de CAI).Todas ellas son englobadas en castellano en la frase "Enseñanza Asistida por Computadora" .

Entiéndese por interactivo la manera en la cual el ser humano y la computadora intercambian información e instrucciones. Como el término lo indica , existe una acción recíproca entre el ser humano y la computadora puesto que las acciones de cualquiera de estas partes se modifican continuamente como resultado de la respuesta de la otra .

La primera máquina de enseñar (teaching machine) fué diseñada en 1925 en Ohio State University por el Psicólogo Sidney L. Pressey . Esta máquina planteaba al alumno varias preguntas , de una en una . El alumno empujaba una palanca para indicar su respuesta y la máquina no pasaba a la pregunta que seguía hasta que el alumno no daba la respuesta correcta .Cuando se contestaba acertadamente , caía un dulce a un receptáculo de la máquina , con lo que el alumno enriquecía su espíritu y su cuerpo simultáneamente .

La máquina de enseñar se enmarcó en los principios teóricos de la Enseñanza Programada ya que el aprendizaje se logra por un mecanismo de " estímulo y respuesta " .

Por cierto , la Enseñanza Programada se inició más tarde . En 1954 en la " Harvard Educational Review " apareció un artículo de Burrhus F. Skinner titulado " The Science of Learning and the Art of Teaching " que corresponde a su Acta de Nacimiento .

La Enseñanza Programada ha acrecentado su popularidad desde la aparición de las computadoras , existen sin embargo , otras teorías , como la Cognitivista que también se auxilia de la computadora pero que difiere de la Teoría Conductista (la de la Enseñanza Programada) al considerar que el aprendizaje se realiza sin recompensa y por lo tanto sin refuerzo .

Estas dos tendencias permanecen sólidas y vivas aún en el día de hoy en el campo de las aplicaciones de la computadora a la Didáctica .

RECORDATORIO HISTORICO

El uso de las computadoras en la educación empezó a llamar la atención en la década de los cincuentas cuando fueron usadas en la Enseñanza Asistida por Computadora (Computer Assisted Instruction o CAI). Un breve recordatorio histórico de este desarrollo es útil para así exponer la variedad de ideas que dieron forma al estado actual de esta técnica . En su desarrollo se observan cuatro fases claramente definidas : Inicios , Desilusión , Mejoras y Disponibilidad .

INICIOS

En los años cincuentas un movimiento del CAI basado en la enseñanza programada (Programmed Instruction o PI) empezó a usar la computadora en la educación . Las teorías psicológicas atrás de la instrucción programada , junto con la rapidez y precisión de las computadoras dió lugar al surgimiento de muy grandes esperanzas respecto de este nuevo uso de la tecnología.

El medio ambiente intelectual que surgió con la primera generación de los sistemas CAI en el principio de los sesentas estuvo fuertemente influenciada por el movimiento de enseñanza programada , el cual , desde el punto de vista de su mas famoso proponente B.F.Skinner ,fué visto como una continuación directa de los aparatos mecánicos de enseñanza propuestos por S.L. Pressey .

Con la rapidez de las computadoras para efectuar procesos y tomar decisiones , se obtuvo la flexibilidad que aparatos mecánicos anteriores no tenían .

Los entusiastas del CAI permanecieron optimistas argumentando que :

1) La educación es un trabajo de actividad intensiva .

2) La aplicación de la tecnología a otros trabajos de actividad intensiva habían anteriormente incrementado en gran manera la productividad y bajado los costos .

3) Con la instrucción programada como una estrategia de enseñanza , y con la computadora como herramienta , la tecnología de la educación finalmente había llegado .

4) Por lo tanto , CAI mejoraba de manera significativa la educación en las previsiones futuras , esto es , la hacía mas efectiva y barata .

Pero las expectaciones se vinieron abajo .Por 1970 varios hechos y conclusiones vinieron ganando aceptación , desalentaron el optimismo inicial y señalaron una reorientación .

a) El CAI no fué usado de manera rutinaria como un método de enseñanza .

b) La enseñanza programada y la ejercitación no fueron una tecnología universal de instrucción , en vez de eso tenían una muy limitada aplicabilidad .

c) Las restricciones a las pocas estrategias de enseñanza ya fijadas eran irrazonables (en lo particular , las que imponían un rígido control del diálogo para el programa). Estrategias de aprendizaje en las cuales el usuario controla el diálogo fueron enfatizadas .

d) CAI era bastante mas caro que la instrucción convencional en el salón de clase .

e) La meta de escribir software portable , y así poder distribuir entre mas usuarios el costo de la preparación de las lecciones no fué tomada en cuenta .

f) Los recursos del computador no eran suficientes . Se requería una respuesta inmediata y la capacidad de graficación .

g) El CAI se diluyó en muchos proyectos de tamaño pequeño .

Como consecuencia de esta introspección , los proyectos del CAI en los años setentas mostraron una mayor variedad de aproximaciones , menos dogmas y mayor experimentación que los proyectos de la primera generación .

DESILUSION

El rígido control impuesto en las estrategias de enseñanza en los inicios del CAI condujo a un desilusionamiento debido al poco imaginativo uso de las computadoras , pues en la gran mayoría de los casos , solamente servían como " volteadoras electrónicas de hojas" .

Como una alternativa surgió entonces el proyecto LOGO que iniciaron Feurzeig y Papert en el Instituto Tecnológico de Massachussets (MIT) , donde se promovió la creación de un Laboratorio de Computación para niños ,en el que se les conducía a aprender incitándoles a la exploración y en consecuencia al descubrimiento.

A mediados de los años sesentas y sin duda acicateados por el ánimo de avivar el entusiasmo por el CAI , otro movimiento ganó notoriedad para las computadoras en la educación . Su principal premisa era que solamente se había explotado una muy pequeña parte de la potencia de la computadora . Los propulsores de este movimiento sostenían que una computadora es tanto una gran herramienta como un gran juguete , y que su mas profundo impacto educacional podría ser materializado solamente si el estudiante tiene pleno control sobre ella , esto es , si puede programarla para resolver sus propios problemas .

La discrepancia de los partidarios de la resolución de problemas es entendida como una reacción en contra del uso trivial de la computadora como un " volteador electrónico de hojas ". La representación mas prominente de este movimiento fué el proyecto LOGO citado con anterioridad .En un escrito titulado " ¿ Puede la computadora enseñar al estudiante , o viceversa ?" Arthur Luehrman establece la proposición de que el principal papel de la computadora en la educación es el de hacer pensar y no el de presentar material .

Cuando la "máquina de pensar" y la "herramienta para resolver problemas" sean combinadas adecuadamente , el estudiante podrá interaccionar con la computadora en la forma que le sea mas agradable o interesante , sin que por ello deje de conducirle al aprendizaje .

MEJORAS

Durante la década de los setentas una nueva oleada de sistemas CAI encabezados por los proyectos PLATO y TICCIT de la Universidad de Illinois y Mitre Corporation respectivamente, trató de superar las limitaciones de los sistemas de la primera generación basados en el PI .Sus caracteristicas sobresalientes fueron las mejoras en los equipos lo que permitió la animacion gráfica y una gran variedad de estrategias de enseñanza que incluían simulación y la creación de modelos . Como un detalle interesante mencionamos que el proyecto PLATO fué comercializado por Control Data Corporation lo que ha dado lugar a que su creación sea erróneamente considerada a dicha Compañía .

Aunque hubo un amplio consenso en el sentido de que CAI tenia que hacer grandes cambios para tener éxito , hubo considerable desacuerdo respecto de la dirección en la que debian hacerse esos cambios .A continuación se presenta un resumen de opiniones de personas de diferentes bagajes intelectuales .

* Administradores .- Consolidar las investigaciones en pocos , pero grandes proyectos y desarrollar sistemas portables para así agrandar el potencial de usuarios .

* Educadores experimentales .- Abandonar el CAI tradicional y enseñar el uso de la computadora como herramienta para la resolución de problemas .

* Educadores teóricos .- Abandonar las estrategias de enseñanza que forzan a un rígido control del programa y hacer énfasis en el control del educando .

* Ingenieros .- Desarrollar mejor hardware .

* Programadores .- Abandonar los tradicionales lenguajes de autor tipo CAI en favor de lenguajes de alto nivel de propósito general añadiendo si son necesarias facilidades para la interacción tales como procedimientos gráficos y de medición del tiempo .

A principios de los años setentas en el Xerox Palo Alto Research Center de California USA ,el Learning Research Group empezó a desarrollar SMALLTALK un sistema diseñado para proporcionar un poderoso ambiente personal de programación a " niños de todas las edades " .

SMALLTALK permite pintar ,dibujar ,animar ,sintetizar música, almacenar y recuperar información documental , así como muchas otras actividades mas .Su propósito es mostrar que la tecnología de las computadoras del presente y del futuro puede contribuir a la creación de un poderoso medio ambiente para la resolución de problemas .

Con el paso de los años SMALLTALK ha evolucionado siendo en la actualidad un lenguaje de programación orientado a objetos. Dado que estos lenguajes han tenido poca difusión , presentamos una breve explicación de sus principales conceptos :

Un objeto es una abstracción de una estructura de datos . En los lenguajes orientados a objetos lo que interesa es la comunicación con cada uno de los objetos , lo que el objeto espera de nosotros y lo que el objeto produce para nosotros . Lo que damos al objeto y recibimos de él son llamados mensajes .

Una característica destacada es que los objetos son usados como "cajas negras" por lo que tan solo nos limitamos a enviar un mensaje (solicitud) y recibir un mensaje (respuesta) sin que tengamos que conocer la manera en que fué procesada nuestra solicitud , de manera análoga a lo que ocurre cuando solicitamos por correo un articulo cualquiera a una casa vendedora y como respuesta obtenemos (también por correo) ese articulo sin que conozcamos ni el funcionamiento interno de la Oficina de Correos ni de los Departamentos de Producción y Ventas de la Compañía .

Algunos otros lenguajes de programación orientados a objetos son Neon ,Object Pascal , ExperCommonLisp , Objective-C , Object Logo y Object Assembler .

Dado que la programación en lenguajes orientados a objetos es muy similar al proceso de interacción entre personas , se preveé que dentro de poco tiempo ocupen un lugar preponderante en la Enseñanza Asistida por Computadora .

DISPONIBILIDAD

La reciente proliferación de "máquinas inteligentes" capaces de un diálogo instruccional con el usuario , y sobre todo , la disponibilidad de computadoras personales han abierto nuevas áreas del CAI como son :

a) Máquinas que explican sobre su funcionamiento a un usuario casual (que no dispone de un manual escrito de instrucciones) y que le permite hacer uso de dicha máquina de conformidad con el paradigma " aprender haciendo ".

b) La computadora personal sirve como un nuevo medio para presentaciones , en competencia con el rotafolio y el proyector de transparencias .

Estos usos del CAI han tenido éxito donde anteriores ataques frontales habían fracasado , y ellos están introduciendo en la educación los diálogos con computadora como una herramienta de uso común .Mientras mas pronto mejore la producción de programas interactivos , mas pronto el diálogo computadora-usuario será un procedimiento típico .

En la actualidad ,el aumento en la producción de computadoras aunado a la disminución en su precio de venta ha dado lugar a que la Enseñanza Asistida por Computadora llegue a un mayor número de centros escolares y en consecuencia a los alumnos de estos centros . Se dispone de una gran cantidad de programas (y se están desarrollando muchos mas) que explican al estudiante los principales temas de sus materias de estudio pudiendo en muchos de estos programas hacerse una evaluación del aprendizaje del alumno .

Por otro lado , en los centros de trabajo se están empleando programas de tipo tutorial que explican a los principiantes como usar un determinado equipo así como otros que simulan su funcionamiento ,lo que permite al aprendiz adquirir la habilidad necesaria para la operación del mismo , eliminándose de esta forma la posibilidad de sufrir accidentes personales o de causar daños a equipos costosos en actividades como : aprender a volar un avión ,conducir un automóvil ,manejar materiales peligrosos , hacer simulacros de evacuación , etc. .

Estos desarrollos nos muestran que la Enseñanza Asistida por Computadora está en el dominio público , accesible a cualquiera que pueda usar un equipo de cómputo y que no tema al esfuerzo de programación que se requiere para la producción de diálogos instruccionales .

ALGUNOS PENSAMIENTOS

La educación hace buen uso de muchas herramientas y técnicas, pero ninguna de ellas originó un nuevo nombre para un estilo de instrucción . Sin embargo , se ha hecho una excepción con la computadora , y se ha acuñado la frase " Enseñanza Asistida por Computadora ".

Pensamos que los maestros deben , primero planear una estrategia sobre la base de lo que van a enseñar , a quien , y solamente de manera secundaria sobre la base de los medios que les servirán de apoyo . Pensamos que el maestro competente debe ser capaz de adaptarse a las situaciones típicas tales como la enseñanza en el salón de clase usando tan solo gis y pizarrón ,o inclusive usar la palabra hablada cuando no existan otros medios a su disposición .

Todo aquel que use computadoras en la educación deberá responder satisfactoriamente la pregunta ¿ Qué tiene esto que ver con la educación ? .

La respuesta sugerida es : " ni mas ni menos que los libros , pizarrones y otros medios " . Si esto es cierto entonces , se llegarán a olvidar las palabras " Educación asisitida por Computadora " y se hablará simplemente de la escritura y uso de diálogos instruccionales .

C A P I T U L O I I

CONSIDERACIONES ACERCA DEL USO DE LAS COMPUTADORAS EN LA ENSEÑANZA

INTRODUCCION

Anteriormente se veía al profesor tan solo como transmisor de conocimientos , como poseedor único y absoluto de la verdad y al alumno como un ente pasivo cuya única finalidad era alcanzar la sabiduría que le impartía el maestro , para a su vez convertirse en otro gran maestro semejante a aquellos que le habían formado.

En la actualidad , la anterior concepción ha cambiado de modo radical . En su lugar destaca la interacción maestro - alumno de manera tal que el maestro facilita las condiciones para que el alumno pueda responsabilizarse de su propio aprendizaje y avance en sus materias de estudio por sí mismo.

Uno de los mas modernos medios de que se dispone actualmente para complementar el proceso de enseñanza - aprendizaje es la computadora , la cual se ha popularizado de manera tal que muy pronto será tan popular como es ahora un receptor de televisión.

A continuación mencionamos algunas ventajas y desventajas en el uso de la computadora .

VENTAJAS

1) El alumno que podría intimidarse ante la presencia del profesor se siente con mucha más confianza frente a la computadora de la cual conoce que , es una máquina sumamente veloz , pero con instrucciones y alcances muy limitados .

2) El aprendizaje es interactivo e individualizado . En la actualidad se está incrementando continuamente el número de instituciones escolares donde se dispone (con algunas limitaciones , claro está) de equipo de cómputo para que el alumno pueda hacer sus prácticas escolares , pudiendo en la mayoría de los casos hacer las correcciones que proceden de conformidad con las indicaciones que le marca el programa de computadora .

3) La computadora propicia el trabajo en equipo . Con gran frecuencia los vemos agrupándose para colaborar entre sí para aclararse dudas y proponer sugerencias para la resolución de un problema común .

DESVENTAJAS

1) El profesor es un ser con sensibilidad frente a las particulares dificultades de cada alumno , sensibilidad que una computadora no posee , por lo que la enseñanza se deshumaniza .

2) Es probable que los profesores confíen demasiado en la eficacia de los programas y omitan comprobar la calidad del aprendizaje . Se debe tener muy en cuenta que individualizar el aprendizaje no es lo mismo que personalizarlo .

3) En vez de aprender ,el alumno puede dedicarse a tratar de ganarle a la computadora .Muchos de los programas otorgan puntos por cada respuesta correcta y se da el caso que el alumno desarrolle estrategias para ganar puntos (como si se tratara de apuestas en una carrera de caballos) y no tome en consideración el contenido temático que le ofrece el programa de computadora.

Del adecuado equilibrio entre estas (y otras) ventajas y desventajas depende el éxito en la enseñanza-aprendizaje con el auxilio de una computadora .

Algunos de los tipos de programas mas usados son :

a) De prácticas y ejercicios .

b) Juegos educativos .

c) De demostración .

d) De simulación .

e) Tutoriales .

PRACTICAS Y EJERCICIOS

Este tipo de programas permite al profesor liberarse de las tareas repetitivas y monótonas de la enseñanza pero posiblemente no descarga al alumno de las tareas meramente memorísticas.

Lo ideal es disponer de programas que hagan del estudiante un sujeto activo en su aprendizaje y nó un pasivo receptor , por lo que corresponde al maestro determinar si para un cierto problema se justifica el uso de la computadora ó si es preferible usar los métodos tradicionales (que no por ser tradicionales tienen que ser malos) como son el uso de cuadernos de notas , exámenes impresos , etcétera .

JUEGOS EDUCATIVOS

El abuso , nó el uso , es el gran inconveniente de este tipo de programas .En muchas ocasiones el alumno agudiza su talento e ingenio en el muy conocido y estimulante deporte llamado " GANAR A LA COMPUTADORA " y hace a un lado las grandes ventajas que le pueden proporcionar estos programas.

PROGRAMAS DE DEMOSTRACION

Estos programas sirven para presentar información nueva , así como para la ilustración de conceptos previamente conocidos . En ellos se presenta la información al ritmo y bajo el control del estudiante pudiendo en ocasiones presentar gráficas animadas ó fijas con lo que se obtiene una interacción (más bien pequeña) entre el alumno y la computadora .

PROGRAMAS DE SIMULACION

En este tipo de programas se logra obtener un alto grado de interacción entre la computadora y el alumno . Son introducidos datos y variables que permiten modificar los resultados que se obtienen en un experimento , por lo que de hecho, la computadora se convierte en un laboratorio artificial.

Las simulaciones se refieren a actividades , fenómenos y procesos naturales , industriales , técnicos ,etc. y actualmente se han extendido desde el ámbito puramente científico hasta sistemas comerciales , administrativos ó sociales .

TUTORIALES

Este tipo de programas muestran al alumno información nueva o ampliada de temas de su programa de estudios , con ejemplos de dichos temas y en la mayoria de ellos se presentan problemas que al resolverse de manera correcta (el mismo programa evalúa las respuestas) le permiten pasar a lecciones sobre temas avanzados y en el caso de no dar las respuestas correctas , se le envía nuevamente a la sección donde tuvo dificultades , con el objeto de reforzar la adquisición de esos temas .

C A P I T U L O I I I

ELABORACION DEL SOFTWARE

GENERALIDADES

Para la elaboración del sistema se utilizó el lenguaje de programación PASCAL llamado así en honor a Blaise Pascal científico y filósofo francés quién ,en el año 1642 construyó el primer artificio mecánico para calcular sumas , por lo que este artificio es (si se exceptúa al Abaco) el mas antiguo de los instrumentos de cómputo , lo que lo convierte en el mas remoto antecedente de nuestras actuales computadoras electrónicas.

Este lenguaje , creado por Niklaus Wirth profesor de Ciencias de la Computación en Zurich Suiza , ha venido a ser uno de los lenguajes de mas amplio futuro , ya que los procedimientos y funciones que se crean con él son tan básicos como las funciones primitivas en que se basa su vocabulario, lo que permite que una vez definidos estos nuevos procedimientos , puedan ser empleados con provecho en otros programas ,obteniéndose así la modularidad tan deseable en cualquiera de los lenguajes de programación.

Los motivos que inclinaron nuestra decisión para implementar el software de este trabajo en la versión TURBO fueron :

a) Las instrucciones de TURBO PASCAL son esencialmente de 3 tipos : secuenciales , condicionales y repetitivas quedando eliminadas las instrucciones de transferencia incondicional ó instrucciones del tipo GO TO (en realidad pueden ser usadas , pero se recomienda no hacerlo) siendo por lo tanto un lenguaje con las estructuras de control propias de los lenguajes estructurados , características buscadas por el Prof. Wirth quién creó la primera versión de PASCAL (que hoy conocemos como STANDARD) .

b) TURBO PASCAL aprovecha al máximo las características físicas del equipo de cómputo por lo que permite emplear funciones de graficación ,así como de almacenamiento y de recuperación de datos .

c) El que los programas elaborados en TURBO PASCAL se compilen con anterioridad a su ejecución hace que ésta sea mas rápida lo que es de gran importancia en el caso de la graficación , pues para cada valor de una variable se debe calcular el valor de otra y después se calcula también la posición en la pantalla donde se graficará el punto correspondiente , lo que es hecho de manera muy rápida por TURBO PASCAL .

LENGUAJES DE AUTOR

Con los lenguajes evolucionados de programación como PASCAL el profesor puede preparar sus propias lecciones , sin embargo esta no es una tarea fácil ni está al alcance de todos . El maestro que no tenga un conocimiento muy profundo del campo de la Informática (Ciencia de la Información) puede disponer de lenguajes orientados a tal fin . Son los lenguajes para autores de cursos que se han desarrollado a partir de los años sesentas.

Los lenguajes para autores de cursos (mas conocidos con el nombre de LENGUAJES DE AUTOR) han sido creados pensando en los profesores que no tienen mucha experiencia en Informática.

Los lenguajes de autor mas conocidos son : TUTOR de Control DATA , COURSEWRITER e IIS de IBM , ASET de UNIVAC y MASTER de OLIVETTI .

Un lenguaje de autor que hemos considerado mencionar aparte es PILOT (Programmed Inquiry Learning Or Teaching) .

El PILOT lo creó en 1968 un grupo de investigadores dirigido por John A. Starweather de la Universidad de California , San Francisco . La meta que se habian fijado era la de construir un lenguaje fácil de usar que pudiera aplicarse a la enseñanza de cualquier disciplina y no solamente a una en especial , como sucedía en las primeras aplicaciones de la computación a la Didáctica .

A partir del advenimiento de las microcomputadoras , PILOT ha llamado poderosamente la atención de los educadores . En Western Washington University , George Gerhold y Larry Kheriaty crearon la versión conocida como COMMON PILOT la cual ha sido ha servido hasta la fecha como la versión típica .

Todas las versiones de PILOT constan de un muy reducido número de instrucciones de las cuales con alrededor de una docena se puede preparar una lección .Con PILOT es posible hacer preguntas al alumno , analizar sus respuestas , enseñar gráficas y diagramas , producir efectos visuales y musicales , tomar el tiempo de respuesta , grabar las respuestas del alumno y grabar un juicio valorativo .

C A P I T U L O I V

OPERACION DEL SISTEMA GRAFICADOR

ESTE CAPITULO DEBE SER LEIDO TOTALMENTE ANTES DE EFECTUAR ALGUNA OTRA ACCION

INTRODUCCION

No es posible (ni se pretende) abarcar en un trabajo todos los temas de las diferentes materias del área de matemáticas del Colegio de Ciencias y Humanidades , pues de así intentarlo ,éste sería de un tamaño descomunal , posiblemente nunca podría llegarse a su término ,por lo que se ha optado por el desarrollo de los anteriores temas , que corresponden a una parte de los programas de Matemáticas III (funciones trigonométricas y relaciones trigonométricas inversas) y Matemáticas V (funciones exponenciales y logarítmicas) las que en opinión del autor no son desarrolladas en clase de manera completa por la falta de un adecuado material didáctico , siendo cubierto este faltante por el SISTEMA GRAFICADOR . Por último , deseamos mencionar que el desarrollo de las variaciones del seno es de una importancia fundamental en las materias experimentales (principalmente en Física) por lo que su inclusión ,además de mostrar aplicaciones prácticas de la Matemática ,permite apoyar a esas otras materias escolares .

DESCRIPCION Y USO

I) El SISTEMA GRAFICADOR está compuesto por :

a) Manual del usuario (TESIS.TXT este manual) .

b) Un diskette con los archivos :

```
COMMAND.COM          IO.SYS      ( archivo oculto )
AUTOEXEC.BAT         MSDOS.SYS   ( archivo oculto )
EXEC.BAT
GRAFTABL.EXE
GRAPHICS.EXE
MORE.COM
SIMCGA.COM
INICIO.COM
TESIS.COM
TESIS.BIS
LEE.ME
TESIS.TXT
```

2) El equipo que se requiere es :

a) Una computadora personal IBM ó compatible con IBM que tenga tarjeta gráfica CGA .

b) Una impresora en paralelo conectada a la computadora .

c) Recomendamos (no es indispensable) tener monitor a color.

3) Instrucciones para la ejecución .

a) Estando apagada la computadora , meter el diskette en el drive A .

b) Encender la computadora y seguir las instrucciones .

c) Si ya se tiene impreso el Manual (TESIS.TXT),debe leerse y entenderse en su totalidad .

d) Las palabras claves son : Jesus
Alberto
Cruz
Rebolledo

e) Si las palabras claves no se teclean exactamente como están indicadas , la ejecución del programa finalizará .

4) Notas y sugerencias .

a) El archivo LEE.ME también nos indica las palabras clave. Para usarlo se debe :

i) Estar en el sistema operativo .

ii) Teclear TYPE LEE.ME < RETURN > .

b) Si no se tiene impreso el Manual (TESIS.TXT) éste puede imprimirse siguiendo las instrucciones que aparecen en el monitor para después proceder a su lectura y entonces iniciar otra vez como se indica en el párrafo 3 .

c) Para imprimir cualquiera de las gráficas se debe :

i) Tener conectada una impresora en paralelo , la que deberá estar cargada con papel para la impresión .

ii) Al aparecer la gráfica que se desee imprimir :

1) Oprimir la tecla SHIFT (NO LEVANTAR EL DEDO).

2) Oprimir la tecla PrtSc .

3) Levantar los dos dedos .

LA GRAFICA SERA IMPRESA EN PAPEL .

d) Para obtener copias de este Manual sin tener que correr el programa se debe :

i) Estar en el sistema operativo .

ii) Conectar la impresora y alimentarla con papel .

iii) Teclear : TYPE TESIS.TXT > PRN

ó

COPY TESIS.TXT PRN

IV) Oprimir < RETURN > .

e) Si se carece de una impresora puede leerse en la pantalla el Manual . Para hacerlo se debe :

i) Estar en el sistema operativo .

ii) Quitar del diskette la etiqueta protectora de escritura .

iii) Teclear TYPE TESIS.TXT | MORE

iv) Oprimir < RETURN > .

C A P I T U L O V

INTERFAZ CON EL USUARIO

ANTES DE CONTINUAR CON ESTE CAPITULO DEBE HABERSE LEIDO EL ANTERIOR

INTRODUCCION

La parte central del SISTEMA GRAFICADOR es el programa TESIS.COM .Este programa genera las gráficas matemáticas que son el objeto de nuestro estudio.

Debido a la gran cantidad de gráficas que se presentan , ha sido necesario crear un MENU que nos permitirá seleccionar las que sean de nuestro interés inmediato .

La disposición del MENU aparece en la siguiente hoja .

MENU

- Funciones exponenciales
- Funciones logaritmicas
- Funciones exponenciales y logaritmicas
- Funciones trigonométricas
  - Seno
  - Coseno
  - Tangente
  - Cotangente
  - Secante
  - Cosecante
  - Menú anterior
- Relaciones trigonométricas inversas
  - Angulo seno
  - Angulo coseno
  - Angulo tangente
  - Angulo cotangente
  - Angulo secante
  - Angulo cosecante
  - Menú anterior
- Variaciones del Seno
- Exhibir gráficas grabadas
- Terminar la sesión

USO Y SUGERENCIAS

Para las Funciones Exponenciales , Funciones Logarítmicas y Variaciones del Seno se ha seguido el modelo de SIMULACION y por lo consiguiente , en ellos se permite una amplia interacción del usuario con la computadora . En los casos de las Funciones Exponenciales y Logarítmicas , Funciones Trigonométricas y Relaciones Trigonométricas Inversas , se ha seguido el modelo de DEMOSTRACION , pues nuestro único objetivo es que el usuario conozca la forma y propiedades de cada una de esas graficas . En la sección correspondiente a Exhibir gráficas grabadas empleamos los modelos de PRACTICAS Y EJERCICIOS , así como los de DEMOSTRACION y SIMULACION lo que da por resultado que este tema tenga una muy alta aplicabilidad al permitir la creación de una colección de gráficas acorde a los gustos y necesidades de cada usuario .

En el MENU aparece una flecha qué al iniciar una sesión de trabajo apunta hacia la opción Funciones trigonométricas , y en la parte baja de la pantalla se muestran las instrucciones que deben seguirse para cambiar ó aceptar dicha opción .

Es posible hacer que la flecha apunte hacia otros renglones, lo que se obtiene oprimiendo las teclas de movimiento del cursor (en el teclado aparecen como una flecha que apunta hacia arriba y otra que apunta hacia abajo) . Una vez que la flecha ha sido posicionada en el renglón de nuestra elección , se debe dar a la computadora la orden para que ejecute esa opción ,lo que se hace oprimiendo la tecla RETURN (ENTER) . Como medida de seguridad para el correcto funcionamiento del programa , si se oprime alguna tecla diferente a las mencionadas no se lleva a cabo acción alguna y el programa continúa esperando se opriman las teclas adecuadas .

De conformidad con lo que indica el MENU ,en las opciones " Funciones trigonométricas " y " Relaciones trigonométricas inversas " se dispone de un SUBMENU que muestra las distintas opciones a elegir , y para operarlo se deben seguir los mismos lineamientos que se dieron para el MENU.

Es interesante hacer notar que cada SUBMENU se encuentra en un nivel inferior respecto del MENU original , pues se ingresó a ellos al seguir una opción de dicho MENU , por lo que la última opción de cada SUBMENU permite el regreso al MENU original y de esta forma poder acceder a cualquiera de las opciones gráficas.

En este punto es cuando en realidad se inicia el estudio y presentación de las gráficas de este SISTEMA GRAFICADOR . Debido a la gran importancia que tiene el que el usuario no encuentre obstáculos para su cabal entendimiento , le recomendamos leer detalladamente este capítulo y avanzar tan solo cuando todo lo precedente haya sido comprendido .

El procedimiento que usaremos en todos los temas consistirá en una especie de " lecciones por computadora " , en las que le indicaremos que respuestas proporcionar a la computadora cuando ésta así se lo requiera , e iremos indicándole también las características de cada gráfica , características que pueden ser específicas ó genéricas.

Después que el usuario estudiante haya seguido todas nuestras sugerencias y comprendido el correspondiente tema , le pediremos (ó le exigiremos ?) que nuevamente corra el programa , pero introduciendo los datos que sean de su particular interes.

En caso que el usuario sea una persona que domine los temas que aquí se tratan (podría ser un profesor de Matemáticas) y no desee seguir paso a paso estas " lecciones " le recomendamos acuda al resumen que al final de cada tema se hará .

Antes de empezar a usar el SISTEMA GRAFICADOR se debe tener en cuenta qué : LAS COMPUTADORAS NO PIENSAN , PERO SI PUDIERAN HACERLO , LO UNICO QUE PENSARIAN ES QUE LOS SERES HUMANOS PENSAMOS CORRECTAMENTE .

C A P I T U L O   V I

FUNCIONES EXPONENCIALES

INTRODUCCION

Nuestro propósito es graficar la función $y = e^{kx}$ y mostrar al usuario su forma y propiedades , para lo cual se darán al parámetro k diversos valores y así poder determinar los cambios en la gráfica que corresponden a estos valores . Debemos hacer notar que si se dieran valores muy grandes (en valor absoluto) al parámetro k entonces los valores que tomaría la función crecerían ó decrecerían tan rápidamente que la correspondiente curva emplearía puntos que nó pueden ser representados en la pantalla (" la curva se saldría de la pantalla ") .El programa está elaborado en forma tal que solamente acepta para k valores mayores ó iguales que -5 pero al mismo tiempo menores ó iguales a 5 y cualquier intento del usuario por introducir otros valores será ignorado por la computadora .

Para evitar que el usuario introduzca valores para k que cumplan con las condiciones anteriores ,pero que tengan una gran cantidad de cifras decimales (lo que podría parar al programa) solamente se permite la introducción de un dígito decimal.

Debemos recordar que pretendemos mostrar las propiedades y la forma de las funciones exponenciales lo que obviamente es mas fácil de conseguir si por ejemplo , el valor de k es 2.1 y nó cuando el valor de k es 2.123456789123456789 .

Para una mayor aclaración ,los valores que pueden darse a k son -5 , -4.9 , -4.8 , -4.7 .... , 4.7 , 4.8 , 4.9 y 5 ; esta lista es expresada mas formalmente diciendo que los valores que toma k son de la forma 0.1n donde n es un entero mayor o igual a -50 , pero menor o igual a 50 . Si denotamos por S al conjunto de valores que puede tomar k , y usamos notación matemática , queda expresado como :

$$S = \{ 0.1n \text{ tales que } -50 \le n \le 50 \text{ siendo } n \text{ un entero} \} .$$

La introducción de valores para k se hará oprimiendo TAN SOLO las teclas correspondientes (NO OPRIMIR RETURN) por lo que se debe usar fielmente el formato de introducción que aparece en la pantalla y que mostramos a continuación :

PARA	INTRODUCIR
$k \ge 0$	dígito , punto decimal , dígito
$k < 0$	signo ,dígito , punto decimal , dígito

Para ilustrar lo anterior presentamos los ejemplos :

a) Si k = 3 oprimir 3 . 0

b) Si k = 2.7 oprimir 2 . 7

c) Si k = -2 oprimir - 2 . 0

d) Si k = 0 oprimir 0 . 0

e) Si k = -1.9 oprimir - 1 . 9

En la parte inferior de la pantalla aparecen las palabras coNtinuar , rEgresar en las que las letras N y E están en mayúsculas y con un color diferente al de las otras letras y palabras . Al oprimir N ó E (NO OPRIMIR RETURN) se dará paso a otra pantalla que contiene las instrucciones inmediatamente posteriores ó anteriores a las que están ante nuestra vista , lo que es de gran ayuda para el entendimiento de las instrucciones.

Cuando en la parte baja de la pantalla aparecen los números 1 2 3 con un color diferente al de las otras letras ó números, SOLAMENTE es posible continuar al oprimir alguna de las opciones numéricas (NO SE DEBE OPRIMIR RETURN) dibujándose entonces tantas curvas como se haya indicado.

Las limitaciones que nos impone en alta resolución la versión TURBO PASCAL nos obliga a usar tan solo un color en las gráficas por lo qué si hubiera más de 3 curvas en la pantalla , éstas podrían confundirse entre sí , siendo esta la razón por la que a lo más se grafican simultáneamente 3 curvas .

Si se desea imprimir o grabar alguna gráfica , ver en los capitulos IV y XII respectivamente ,los procedimientos a seguir.

ESTUDIO DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES DE LA FORMA $y = e^{kx}$

Al oprimir la opción 3 para graficar 3 curvas exponenciales, de inmediato se dibujará en la pantalla un sistema coordenado rectangular y aparecerá la indicación para introducir el valor del parámetro k (en la pantalla se muestra el aviso : k =).

Nuestra primera sugerencia es introducir el valor 1.0 para graficar la curva $y = e^{x}$ (aparecerá en pantalla como $y = e^{1.0x}$)

Esta primera curva es de especial interés por ser la curva modelo (curva original) respecto de la cual serán comparadas todas las demás curvas exponenciales . Para las otras 2 curvas proponemos usar k = 2.0 y k = 3.0 .

Nótese que al incrementar el valor de x también se incrementa el valor de y , es decir , todas estas curvas son crecientes .

También ha podido observarse que al incrementarse el valor de k la rapidéz de crecimiento de la curva también aumenta . Cuando k = 1.0 la curva crece con una rapidez menor que cuando k = 2.0 y ésta a su vez tiene una rapidez de crecimiento menor que cuando k = 3.0 .

Otra cosa que se ha podido observar y que debe ser tomado muy en cuenta es que cuando los valores de x se alejan más y más hacia la izquierda (en términos matemáticos nos expresamos cómo " x tiende a menos infinito ") entonces los valores que toma la " y " cada vez se acercan más y más hacia el valor cero , pero sin jamás llegar a él , por lo que la recta X'X (el eje de las equis) es asíntota de todas las funciones exponenciales .

¿ Será cierta nuestra afirmación anterior ? . Invitamos al usuario a que continúe graficando funciones exponenciales y dé a k todos los valores positivos que deseé hasta que se convenza que es cierta .

Otra propiedad importante (que seguramente ya descubrió el usuario) es que todas las curvas exponenciales pasan por el punto (0,1) lo que nada tiene de sorprendente pués es conocido desde el Algebra elemental que toda cantidad distinta de cero al ser elevada a la potencia cero dá 1 como resultado .

Cuando haya experimentado bastante con valores positivos para k , ha llegado el momento de que le introduzca valores negativos y entonces notará que todas las curvas ahora son decrecientes y que la rapidez de decrecimiento aumenta al disminuir el valor de k , conservándose las otras propiedades .

Hasta ahora no hemos usado k = 0 ; al usar este valor vemos que la nueva gráfica es una línea recta paralela al eje X'X y con ordenada al origen igual a 1 ,lo qué es fácil de entender si recordamos que toda cantidad al multiplicarse por cero dá cero como resultado , y en el presente caso , para todo valor de x se tiene una exponencial de base e y con exponente 0 por lo que para todo valor de x la función toma el valor 1 , y en este caso especial , nuestra función exponencial ha degenerado en una función constante .

Hemos podido también percatarnos de qué ninguna función exponencial permite que la variable "y" tome valores que no sean positivos , y por lo tanto hemos llegado a la conclusión de qué el conjunto de imágenes de la función (se le conoce también como RANGO) es el conjunto de los reales positivos.

SUMARIO

1) Todas las gráficas pasan por el punto (0,1) .

2) Todas las gráficas tienen como asintota al eje X'X .

3) Si k es positivo entonces la función es creciente .

   a) Al aumentar ó disminuir k aumenta ó disminuye la rapidez de crecimiento de la función .

4) Si k es negativo entonces la función es decreciente .

   a) Al aumentar ó disminuir k disminuye ó aumenta la rapidez de decrecimiento de la función .

5) Si k es cero entonces la función es constante .

6) Todas las funciones tienen como dominio al conjunto de números reales , y su imágen es el conjunto de reales positivos .

PENDIENTE DE INVESTIGAR

(por el usuario)

1) ¿ Cuáles son las propiedades de la función $y = a^{kx}$ dónde a es cualquier número positivo diferente de 1 ? .

2) ¿ Por qué la base debe ser positiva ? .

3) ¿ Por qué la base debe ser diferente de 1 ? .

C A P I T U L O V I I

FUNCIONES LOGARITMICAS

INTRODUCCION

Ahora se graficarán funciones de la forma $y = \ln x^k$. También para estas funciones, su muy grande rapidez de crecimiento ó decrecimiento cuando los valores que se le dan al paramétro k son muy grandes (en valor absoluto) hacen necesario el limitar los valores de k , por lo que el programa solamente admite valores mayores ó iguales a -5 y que al mismo tiempo sean menores ó iguales que 5 , y cualquier intento del usuario por introducir valores que no satisfagan estas condiciones será ignorado por el programa .Además , el formato de introducción de valores para k obliga a introducir el punto decimal y un digito .

Al igual que para la función exponencial , los valores para k son -5 , -4.9 , -4.8 , -4.7 ,.........., 4.7 , 4.8 , 4.9 y 5; esta lista es expresada mas formalmente diciendo que los valores que toma k son de la forma 0.1n donde n es un entero mayor o igual a -50 , pero menor o igual a 50 .Si denotamos por S al conjunto de valores que puede tomar k , y usamos notación matemática ,queda expresado como :

$S = \{ 0.1n$ tales que $-50 \le n \le 50$ siendo n un entero $\}$.

La introducción de valores para k se hará oprimiendo TAN SOLO las teclas correspondientes (NO OPRIMIR RETURN) por lo que se debe usar fielmente el formato de introducción que aparece en la pantalla y que mostramos á continuación :

PARA	INTRODUCIR
$k \ge 0$	digito , punto decimal , digito
$k < 0$	signo ,digito , punto decimal , digito

Para ilustrar lo anterior presentamos los ejemplos :

a) Si $k = 2$	oprimir 2 . 0
b) Si $k = 1.4$	oprimir 1 . 4
c) Si $k = -1$	oprimir - 1 . 0
d) Si $k = 0$	oprimir 0 . 0
e) Si $k = -2.7$	oprimir - 2 . 7

Las indicaciones para usar las pantallas con instrucciones son iguales a las que se dieron para las funciones exponenciales por lo que no los escribiremos (el usuario , en caso que las necesite puede volver a consultarlas) .

Si se desea imprimir o grabar alguna gráfica , ver en los capitulos IV y XII respectivamente ,los procedimientos a seguir.

ESTUDIO DE LAS FUNCIONES LOGARITMICAS

DE LA FORMA $y = \ln x^k$

Solicitemos graficar 3 curvas , y proporcionemos para k los valores 1 , 2 y 3 respectivamente (NO OLVIDAR SU FORMATO DE INTRODUCCION).

Al aparecer las 3 curvas observamos que todas son crecientes y que su rapidez de crecimiento depende directamente del valor de k (a mayor valor de k , mayor rapidez de crecimiento y viceversa) .

Otra interesante propiedad que se deduce de la observación visual es que para una abscisa cualquiera , las ordenadas correspondientes a estas tres curvas tienen valores que son proporcionales a 1 , 2 y 3 (esta propiedad es fácil de justificar al recordar una de las propiedades de los logaritmos ¿ cúal ?) .

En este momento permitimos al usuario introduzca para k cualquier valor diferente de cero que él desee , y que lo haga todas las veces que sean necesarias hasta que se convenza que todas las curvas pasan por el punto (1 , 0) (recordar que las curvas exponenciales pasan por el punto (0 , 1) y que las funciones logaritmicas son inversas de las exponenciales) .

Con lo escrito anteriormente , se entiende claramente por qué en ningún caso las abscisas toman valores negativos y que el eje Y'Y sea la asíntota común a todas las curvas estudiadas .

Hemos dejado para lo último el caso en que k = 0 . Sugerimos que se introduzca la opción 1 para hacer solamente una gráfica y que el valor 0 le sea dado al parámetro k , ¿ Puede el usuario explicar por qué (aparentemente) no aparece alguna gráfica ?.

SUMARIO

1) Todas las gráficas pasan por el punto (1,0) .

2) Todas las gráficas tienen como asíntota al eje Y'Y .

3) Si k es positivo entonces la función es creciente .

   a) Al aumentar ó disminuir k aumenta ó disminuye la rapidez de crecimiento de la función .

4) Si k es negativo entonces la función es decreciente .

   a) Al aumentar ó disminuir k disminuye ó aumenta la rapidez de decrecimiento de la función .

5) Si k es cero entonces la función es constante e igual a 0 .

6) Todas las funciones tienen como dominio al conjunto de los reales positivos , y su imágen es el conjunto de los reales .

PENDIENTE DE INVESTIGAR

(por el usuario)

1) ¿ Cuáles son las propiedades de la función y =logaritmo de x^k en base a dónde a es cualquier número positivo diferente de 1 ?.

2) ¿ Por qué la base debe ser positiva ? .

3) ¿ Por qué la base debe ser diferente de 1 ? .

C A P I T U L O V I I I

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

INTRODUCCION Y PROPIEDADES

Se muestran ahora en forma simultánea las gráficas de las funciones antes estudiadas (en el caso particular k = 1) por lo que aparecen las gráficas de $f(x) = e^{x}$ y $f(x) = \ln x$.

El que ambas gráficas correspondan a funciones inversas da lugar a que se cumplan las siguientes :

PROPIEDADES

PARA $f(x) = e^{x}$	PARA $f(x) = \ln x$
a) Creciente	a) Creciente
b) Cóncava hacia arriba	b) Cóncava hacia abajo
c) Pasa por el punto (0,1)	c) Pasa por el punto (1,0)
d) Es asintótica al eje X'X	d) Es asintótica al eje Y'Y

La inclusión de la gráfica de la función idéntica $f(x) = x$ tiene como propósito el convencernos de qué por ser funciones inversas sus gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$.

Recuérdese que en la función $f(x) = x$, cualquier elemento del dominio es igual a su imágen , por lo que su gráfica es el conjunto de puntos en el plano que tienen su abscisa igual a su ordenada , que es lo mismo que la línea recta que bisecta a los cuadrantes I y III .

Si se desea imprimir o grabar esta gráfica , ver en los capítulos IV y XII respectivamente ,los procedimientos a seguir.

PENDIENTE DE INVESTIGAR

(por el usuario)

Dando a k otro valor ,dibujar en papel coordenado rectangular las gráficas de $f(x) = x$, $f(x) = e^{kx}$, $f(x) = \ln x^{k}$ y verificar cuáles de las anteriores propiedades se cumplen y cuáles de ellas sufren cambios . Muy especialmente , sugerimos usar k = -1 .

CAPITULO IX

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

ANTECEDENTES A RECORDAR

A partir de este capitulo ,en todas las gráficas el ángulo se expresará en radianes lo qué puede ocasioner problemas a algunos usuarios , por lo que les recordamos los procedimientos de transformación usuales .

1) Para pasar de grados a radianes se debe multiplicar por 3.141592654 y dividir entre 180 .

2) Para pasar de radianes a grados se debe multiplicar por 180 y dividir entre 3.141592654 .

Este sección corresponde al tipo de programas de DEMOSTRACION por lo que nuestro objetivo es tan solo mostrar las gráficas de las funciones trigonométricas f(x) = sen x , f(x) = cos x , f(x) = tan x , f(x) = cot x , f(x) = sec x , f(x) = csc x , así como sus propiedades , semejanzas y diferencias .

F(X) = SEN X

DOMINIO

Cómo puede observarse en la gráfica ,la función está definida para cualquier valor ,siendo por lo tanto su dominio el conjunto de los números reales .

CONTRADOMINIO

Usualmente el conjunto de los números reales también es usado como contradominio de la función .

IMAGEN

La imágen (rango) es el intervalo [-1 , 1] .

PERIODICIDAD

Los valores de la función se repiten cada 2π radianes (360°) por lo qué se cumple $sen(x + 2\pi) = sen(x)$ para todo valor de x , lo que se expresa cómo " la función sen x tiene periodo 2π " .

CONTINUIDAD

Por la simple observación de la gráfica, y sin demostraciones rigurosas (las que están fuera del alcance de este trabajo), se concluye la continuidad de la función .

INTERSECCIONES CON LOS EJES

La gráfica intersecta al eje X'X en los puntos que tienen la forma ($n\pi$, 0) donde n es un entero. Al recordar que el ángulo se expresa en radianes concluimos que de manera aproximada las intersecciones se dan en los puntos de abscisa ...., -9.42 , -6.28 , -3.14 , 0, 3.14 , 6.28 , ..., etc. .

Solamente hay una intersección con el eje Y'Y .Esta se dá en el punto (0 , 0) .

OTRAS PROPIEDADES

ANGULO	FUNCION
x	sen x
0	0
$0 < x < \pi/2$	positivo creciente concavidad hacia abajo
$\pi/2$	1 (valor máximo)
$\pi/2 < x < \pi$	positivo decreciente concavidad hacia abajo
π	0
$\pi < x < 3\pi/2$	negativo decreciente concavidad hacia arriba

$3\pi/2$ — -1 (valor mínimo)

$3\pi/2 < x < 2\pi$ — negativo, creciente, concavidad hacia arriba

Para valores del ángulo x fuera de los arriba indicados las propiedades citadas se repiten debido a la periodicidad de la función.

Si se desea imprimir o grabar esta gráfica , ver en los capitulos IV y XII respectivamente ,los procedimientos a seguir.

F(X) = COS X

DOMINIO

Cómo puede observarse en la gráfica ,la función está definida para cualquier valor ,siendo por lo tanto su dominio el conjunto de los números reales .

CONTRADOMINIO

Usualmente el conjunto de los números reales también es usado como contradominio de la función .

IMAGEN

La imágen (rango) es el intervalo $[-1 , 1]$.

PERIODICIDAD

Los valores de la función se repiten cada 2π radianes (360°), por lo qué se cumple $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ para todo valor de x , lo que se expresa cómo " la función $\cos x$ tiene periodo 2π " .

CONTINUIDAD

Por la simple observación de la gráfica ,y sin demostraciones rigurosas (las qué están fuera del alcance de este trabajo), se concluye la continuidad de la función .

INTERSECCIONES CON LOS EJES

La gráfica intersecta al eje X'X en los puntos que tienen la forma (π(n + ½),0) donde n es un entero. Al recordar qué el ángulo se expresa en radianes concluímos qué las intersecciones se dan en los puntos de abscisa ..., -7.85 , -4.71 , -1.57 , 0, 1.57 , 4.71 , ...etc..

Solamente hay una intersección con el eje Y'Y .Esta se dá en el punto (0 , 1) .

OTRAS PROPIEDADES

ANGULO	FUNCION
x	$\cos x$
0	1 (valor máximo)
$0 < x < \pi/2$	positivo decreciente concavidad hacia abajo
$\pi/2$	0
$\pi/2 < x < \pi$	negativo decreciente concavidad hacia arriba
π	-1 (valor mínimo)
$\pi < x < 3\pi/2$	negativo creciente concavidad hacia arriba
$3\pi/2$	0

$3\pi/2 < x < 2\pi$ — positivo; creciente; concavidad hacia abajo

Para valores del ángulo x fuera de los arriba indicados las propiedades citadas se repiten debido a la periodicidad de la función.

Si se desea imprimir o grabar esta gráfica , ver en los capítulos IV y XII respectivamente ,los procedimientos a seguir.

F(X) = TAN X

DOMINIO

Cómo puede observarse en la gráfica ,la función está definida para cualquier valor real EXCEPTO aquellos que tienen la forma $\pi(n + ½)$ siendo n un entero .

CONTRADOMINIO

Cómo también puede observarse en la gráfica ,el contradominio de la función es el conjunto de los números reales .

IMAGEN

La imágen (rango) es el conjunto de números reales .

PERIODICIDAD

Los valores de la función se repiten cada π radianes (180°), por lo qué se cumple $\tan(x + \pi) = \tan(x)$ para todo valor de x , lo que se expresa cómo " la función tan x tiene período π " .

CONTINUIDAD

Por la observación de la gráfica , se deduce qué la función es discontinua para todos los valores de x de la forma $\pi(n + ½)$ donde n es un número entero .

ASINTOTAS

Hay una cantidad infinita de asíntotas para ésta función, siendo todas ellas rectas verticales por lo que les corresponden ecuaciones de la forma $x = \pi(n + ½)$ donde n es un entero .Las asíntotas se han marcado con líneas punteadas .

INTERSECCIONES CON LOS EJES

La gráfica intersecta al eje X'X en los puntos que tienen la forma ($n\pi$, 0) donde n es un entero .Cómo el ángulo se expresa en radianes , concluimos qué las intersecciones se dan en los puntos de abscisa ....., -9.42 , -6.23 , -3.14 , 0 , 3.14, 6.28, -9.42 , ...etc..

Solamente hay una intersección con el eje Y'Y . Esta se dá en el punto (0 , 0) .

OTRAS PROPIEDADES

ANGULO	FUNCION
x	tan x
0	0
$0 < x < \pi/2$	positivo creciente concavidad hacia arriba
$\pi/2 < x < \pi$	negativo creciente concavidad hacia abajo

Para valores del ángulo x fuera de los arriba indicados las propiedades citadas se repiten debido a la periodicidad de la función.

NOTA : Conviene recordar qué el periodo de la función tan x es de π radianes (180º) .

Si se desea imprimir o grabar esta gráfica , ver en los capítulos IV y XII respectivamente ,los procedimientos a seguir.

$F(X) = \cot X$

DOMINIO

Cómo puede observarse en la gráfica la función está definida para cualquier valor real EXCEPTO aquellos que tienen la forma $\pi(n + \frac{1}{2})$ siendo n un entero .

CONTRADOMINIO

El contradominio de la función es el conjunto de los reales .

IMAGEN

La imágen (rango) es el conjunto de números reales .

PERIODICIDAD

Los valores de la función se repiten cada π radianes (180°), por lo qué se cumple $\cot(x + \pi) = \cot(x)$ para todo valor de x , lo que se expresa cómo " la función cot x tiene periodo π " .

CONTINUIDAD

La función es discontinua para todos los valores de x de la forma $\pi(n + \frac{1}{2})$ dónde n es un número entero .

ASINTOTAS

Hay una cantidad infinita de asintotas para ésta función , siendo todas ellas rectas verticales por lo que los corresponden ecuaciones de la forma $x = \pi(n + \frac{1}{2})$ dónde n es un entero .Las asintotas se han marcado con líneas punteadas .

INTERSECCIONES CON LOS EJES

La gráfica intersecta al eje X'X en los puntos que tienen la forma ($n\pi$, 0) donde n es un entero , por lo que de manera aproximada las intersecciones se dan en los puntos de abscisa ...., -9.42 , -6.28 ,-3.14 , 0 , 3.14 , 6.28 , +9.42 , ... etc..

Solamente hay una intersección con el eje Y'Y . Esta se dá en el punto (0 , 0) .

OTRAS PROPIEDADES

ANGULO	FUNCION
x	cot x
0	0

$0 < x < \pi/2$ <
- negativo
- decreciente
- concavidad hacia abajo

$\pi/2 < x < \pi$ <
- positivo
- decreciente
- concavidad hacia arriba

Para valores del ángulo x fuera de los arriba indicados las propiedades citadas se repiten debido a la periodicidad de la función.

NOTA : Recordar qué el periodo de la función cot x es de π radianes (180°) .

Si se desea imprimir o grabar esta gráfica , ver en los capitulos IV y XII respectivamente ,los procedimientos a seguir.

F(X) = SEC X

DOMINIO

La función está definida para cualquier valor real EXCEPTO aquellos que tienen la forma $\pi(n + ½)$siendo n un entero .

CONTRADOMINIO

El contradominio es el conjunto de números reales .

IMAGEN

La imágen (rango) es el conjunto de reales EXCEPTO el intervalo (-1 , 1) .

PERIODICIDAD

Los valores de la función se repiten cada 2π radianes (360°) por lo qué se cumple sec(x + 2π) = sec(x) para todo valor de x, lo que se expresa cómo " la función sec x tiene periodo 2π " .

CONTINUIDAD

La función es discontinua para todos los valores de x de la forma $\pi(n + ½)$ dónde n es un número entero .

ASINTOTAS

Hay una cantidad infinita de asintotas para ésta función, siendo todas ellas rectas verticales por lo que les corresponden ecuaciones de la forma $x = \pi(n + ½)$ dónde n es un entero .Las asintotas se han marcado con líneas punteadas .

INTERSECCIONES CON LOS EJES

La única intersección se dá en el punto (0 , 1) .

OTRAS PROPIEDADES

ANGULO	FUNCION
x	sec x
0	1
$0 < x < \pi/2$	positivo creciente concavidad hacia arriba
$\pi/2 < x < \pi$	negativo creciente concavidad hacia abajo
π	-1
$\pi < x < 3\pi/2$	negativo decreciente concavidad hacia abajo

$3\pi/2 < x < 2\pi$ < positivo, decreciente, concavidad hacia arriba

Para valores del ángulo x fuera de los arriba indicados las propiedades citadas se repiten debido a la periodicidad de la función.

Si se desea imprimir o grabar esta gráfica, ver en los capítulos IV y XII respectivamente, los procedimientos a seguir.

F(X) = CSC X

DOMINIO

La función está definida para cualquier valor real EXCEPTO aquellos que tienen la forma $n\pi$ siendo n un entero.

CONTRADOMINIO

El contradominio es el conjunto de números reales.

IMAGEN

La imágen (rango) es el conjunto de reales EXCEPTO el intervalo (-1 , 1).

PERIODICIDAD

Los valores de la función se repiten cada 2π radianes (360°) por lo qué se cumple $\csc(x + 2\pi) = \csc(x)$ para todo valor de x, lo que se expresa cómo " la función csc x tiene periodo 2π ".

CONTINUIDAD

La función es discontinua para todos los valores de x de la forma $n\pi$ dónde n es un número entero.

ASINTOTAS

Hay una cantidad infinita de asíntotas para ésta función, siendo todas ellas rectas verticales por lo que les corresponden ecuaciones de la forma $x = n\pi$ dónde n es un entero. Las asíntotas se han marcado con líneas punteadas.

INTERSECCIONES CON LOS EJES

No hay intersecciones con los ejes.

OTRAS PROPIEDADES

ANGULO	FUNCION
x	$\csc x$
$0 < x < \pi/2$	positivo, decreciente, concavidad hacia arriba
$\pi/2$	1
$\pi/2 < x < \pi$	positivo, creciente, concavidad hacia arriba
$\pi < x < 3\pi/2$	negativo, creciente, concavidad hacia abajo
$3\pi/2$	-1
$3\pi/2 < x < 2\pi$	negativo, decreciente, concavidad hacia abajo

Para valores del ángulo x fuera de los arriba indicados las propiedades citadas se repiten debido a la periodicidad de la función.

Si se desea imprimir o grabar esta gráfica , ver en los capítulos IV y XII respectivamente ,los procedimientos a seguir.

TRABAJO A DESARROLLAR

1) Obtenga una copia impresa de cada una de las gráficas de las Funciones Trigonométricas (el CAPITULO IV dice como hacerlo).

2) De la comparación de las gráficas obtener las identidades :

a) $\cos x = \text{sen}(x + \pi/2)$

b) $\cot x = -\tan(x + \pi/2)$

c) $\csc x = \sec(x - \pi/2)$.

PARA INVESTIGAR

En cursos avanzados de Matemáticas se dice que $f(x) = \tan x$, $f(x) = \cot x$, $f(x) = \sec x$ y $f(x) = \csc x$ son continuas por tramos .Averiguar el significado de esa expresión .

CAPITULO X

RELACIONES Y FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

INTRODUCCION

Las Funciones Trigonométricas Inversas se obtienen por intercambio del papel del dominio y de la imágen (también se lo llama Rango) en las Funciones Trigonométricas ; por ejemplo ,el rango de $f(x) = \text{sen } x$ se usa como dominio de $f(x) = \text{arcsen } x$, y como $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$, el dominio de arcsen x es $-1 \leq x \leq 1$.

Debido a lo antes expuesto , la gráfica de la relación $f(x) = \text{arcsen } x$ es obtenida por el intercambio de los ejes X'X y Y'Y en la gráfica de la función seno , Sin embargo , la ecuación $f(x) = \text{arcsen } x$ tiene un número infinito de valores de f(x) para cada valor de x ,lo que claramente es observado en la pantalla , por lo que se trata de una relación y no de una función .

A fin de obtener una función , para cada relacion inversa se define su VALOR PRINCIPAL (ó RAMA PRINCIPAL) como se señala a continuación:

FUNCION	DOMINIO	RANGO
$f(x) = \text{arcsen } x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\pi/2 \leq f(x) \leq \pi/2$
$f(x) = \text{arccos } x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq f(x) \leq \pi$
$f(x) = \text{arctan } x$	{ números reales }	$-\pi/2 \leq f(x) \leq \pi/2$
$f(x) = \text{arccot } x$	{ números reales }	$\begin{cases} -\pi/2 \leq f(x) \leq \pi/2 \\ f(x) \text{ diferente de } 0 \end{cases}$
$f(x) = \text{arcsec } x$	$\begin{cases} x \leq -1 \\ \text{ó} \\ x \geq 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \leq f(x) \leq \pi \\ f(x) \text{ diferente de } \pi/2 \end{cases}$

$$f(x) = \text{arccsc}\ x \quad \begin{cases} x \le -1 \\ \text{ó} \\ x \ge 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -\pi/2 \le f(x) \le \pi/2 \\ f(x) \text{ diferente de } 0 \end{cases}$$

EN LAS GRAFICAS QUE SE PRESENTAN EN ESTA SECCION , DE MANERA MUY NOTORIA HACEMOS DESTACAR LA PARTE CORRESPONDIENTE A CADA FUNCION , PARA LO CUAL NOS AUXILIAMOS DE RECTANGULOS CON LADOS QUE APARECEN Y DESAPARECEN .

FUNCION $f(x) = \text{arcsen}\ x$

DOMINIO : El intervalo $[-1,1]$.

RANGO : El intervalo $[-\pi/2,\pi/2]$.

INTERSECCIONES CON LOS EJES : Unicamente en el punto (0,0) .

ASINTOTAS : No tiene .

CONCAVIDAD : Hacia abajo en el intervalo $[-1,0)$

Hacia arriba en el intervalo $(0,1]$.

PUNTOS DE INFLEXION : El punto (0,0) .

CRECIMIENTO O DECRECIMIENTO : Siempre es creciente .

VALOR MAXIMO : $\pi/2$ (cuando $x = 1$) .

VALOR MINIMO : $-\pi/2$ (cuando $x = -1$) .

Si se desea imprimir o grabar esta gráfica , ver en los capitulos IV y XII respectivamente ,los procedimientos a seguir.

FUNCION $f(x) = \arccos x$

DOMINIO : El intervalo $[-1,1]$.

RANGO : El intervalo $[0,\pi]$.

INTERSECCIONES CON LOS EJES : Unicamente en el punto (0,0) .

ASINTOTAS : No tiene .

CONCAVIDAD : Hacia arriba en el intervalo $[-1,0)$

Hacia abajo en el intervalo $(0,1]$.

PUNTOS DE INFLEXION : El punto (0,0) .

CRECIMIENTO O DECRECIMIENTO : Siempre es decreciente .

VALOR MAXIMO : π (cuando $x = -1$) .

VALOR MINIMO : 0 (cuando $x = 1$) .

Si se desea imprimir o grabar esta gráfica , ver en los capitulos IV y XII respectivamente ,los procedimientos a seguir.

FUNCION $f(x) = \arctan x$

DOMINIO : El conjunto de números reales .

RANGO : El intervalo $(-\pi/2,\pi/2)$.

INTERSECCIONES CON LOS EJES : Unicamente en el punto (0,0) .

ASINTOTAS : Las rectas horizontales : $y = \pi/2$

$y = -\pi/2$

CONCAVIDAD : Hacia arriba para todos los valores negativos de x

Hacia abajo para todos los valores positivos de x

PUNTOS DE INFLEXION : El punto (0,0) .

CRECIMIENTO O DECRECIMIENTO : Siempre es creciente .

VALOR MAXIMO : Tiende hacia $\pi/2$, pero no toma este valor .

VALOR MINIMO : Tiende hacia $-\pi/2$, pero no toma este valor .

Si se desea imprimir o grabar esta gráfica , ver en los capitulos IV y XII respectivamente ,los procedimientos a seguir.

FUNCION $f(x) = \text{arccot } x$

DOMINIO : El conjunto de números reales .

RANGO : La unión de los intervalos $[-\pi/2,0)$ y $(0,\pi/2]$

INTERSECCIONES CON LOS EJES : Unicamente en el punto $(0,-\pi/2)$

(En la gráfica PARECE que el punto $(0,\pi/2)$ también es otro punto de intersección con el eje Y'Y , ésto es cierto para la RELACION , pero en el caso de la función , el VALOR PRINCIPAL para arccot 0 es $-\pi/2$) .

ASINTOTAS : El eje X'X .

CONCAVIDAD : Hacia abajo para todos los valores negativos de x

Hacia arriba para todos los valores positivos de x

PUNTOS DE INFLEXION : El punto $(0,-\pi/2)$.

CRECIMIENTO O DECRECIMIENTO :Es decreciente para cualquier valor de x excepto para $x = 0$.

VALOR MAXIMO : Cuando x tiende por la derecha hacia 0,la función tiende hacia el valor $\pi/2$, pero no lo alcanza .

VALOR MINIMO : $-\pi/2$ (cuando $x = 0$) .

Si se desea imprimir o grabar esta gráfica , ver en los capitulos IV y XII respectivamente ,los procedimientos a seguir.

FUNCION $f(x) = \text{arcsec } x$

DOMINIO : Los números reales exceptuando el intervalo $(-1,1)$.

RANGO : La unión de los intervalos $[0,\pi/2)$ y $(\pi/2,\pi]$.

INTERSECCIONES CON LOS EJES : Unicamente en el punto $(1,0)$.

ASINTOTAS : La recta $y = \pi/2$.

CONCAVIDAD : Hacia arriba para $x < -1$.

Hacia abajo para $x > 1$.

PUNTOS DE INFLEXION : No tiene .

CRECIMIENTO O DECRECIMIENTO : Es creciente en todo su dominio excepto para $x = -1$, $x = 1$.

VALOR MAXIMO : π (cuando $x = -1$) .

VALOR MINIMO : 0 (cuando $x = 1$) .

Si se desea imprimir o grabar esta gráfica , ver en los capitulos IV y XII respectivamente ,los procedimientos a seguir.

FUNCION $f(x) = \text{arccsc } x$

DOMINIO : Los números reales exceptuando el intervalo $(-1,1)$

RANGO : La unión de los intervalos $[-\pi/2,0)$ y $(0,\pi/2]$.

INTERSECCIONES CON LOS EJES : No hay .

ASINTOTAS : La recta $y = 0$.

CONCAVIDAD : Hacia abajo para $x < -1$

Hacia arriba para $x > 1$

PUNTOS DE INFLEXION : No tiene .

CRECIMIENTO O DECRECIMIENTO: Es decreciente en todo su dominio excepto para $x = -1$, $x = 1$.

VALOR MAXIMO : $\pi/2$ (cuando $x = 1$) .

VALOR MINIMO : $-\pi/2$ (cuando $x = -1$) .

Si se desea imprimir o grabar esta gráfica , ver en los capitulos IV y XII respectivamente ,los procedimientos a seguir.

TRABAJO A DESARROLLAR

1) Obtenga una copia impresa de cada una de las gráficas de las Relaciones Trigonométricas Inversas (El CAPITULO IV dice como hacerlo) .

2) De la comparación de las gráficas obtener las identidades :

a) $\arccos x = \arcsen x - \pi/2$

b) $\operatorname{arccot} x = \pi/2 - \arctan x$

c) $\operatorname{arccsc} x = \operatorname{arcsec} x + \pi/2$.

3) Demuestre las identidades del párrafo anterior usando los métodos convencionales consistentes en la substitución de identidades anteriormente conocidas , después de lo cual esperamos que haya quedado convencido de la sencillez y facilidad del trabajo con gráficas .

CAPITULO XI

VARIACIONES DEL SENO

INTRODUCCION

Importante como muy pocas , la función $f(x) = \text{sen } x$ y sus generalizaciones ocupan un destacado lugar en la Física . Es suficiente mencionar sus aplicaciones en movimiento circular , oscilación armónica , movimiento ondulatorio , electricidad , ondas sonoras , electromagnetismo , ondas caloríficas , ondas luminosas etc. para justificar su inserción en este SISTEMA GRAFICADOR .

La funciones que a continuación estudiaremos son de la forma $f(x) = A\text{sen}B(x + C)$ en donde A representa la amplitud , B la frecuencia y C al ángulo de fase (o de defasamiento) . Al observar que la función $f(x) = \text{sen}x$, tan conocida desde la enseñanza secundaria es un caso muy particular de la función $f(x) = A\text{sen}B(x + C)$ (pues corresponde al caso en que $A=1$, $B=1$ y $C = 0$) , se observa la gran generalización lograda , y si además tomamos en consideración que al conocer el valor del seno de un ángulo es posible conocer los valores de las otras funciones trigonométricas del mismo ángulo ,concluimos que el presente tema debe ser obligatorio para cualquier estudioso de la Matemática y de la Física desde un nivel medio hasta el mas alto conocido .

INSTRUCCIONES

Suponemos que el usuario del SISTEMA GRAFICADOR ha llegado a este tema después de haber pasado por los anteriores y que por lo tanto , el manejo del MENU y de las pantallas que muestran instrucciones le es conocido (esta suposición DEBE SER CIERTA , pues se ha pedido como prerequisito la lectura del presente Manual) , por lo que nos concentraremos en la introducción de datos y a la comparación entre diferentes curvas .

INTRODUCCION DE DATOS

AMPLITUD

Los valores permitidos para la amplitud son 0.1 , 0.2 , 0.3, 0.4 , 0.5 , ... , 4.6 , 4.7 , 4.8 , 4.9 y 5 , por lo tanto diremos que los valores pueden incrementarse o decrementarse de 0.1 en 0.1 . Al denotar por S al anterior conjunto valores , se puede escribir como $S = \{ 0.1n$ tales que $1 \leq n \leq 50$ y n es un entero $\}$. El usar otros valores ocasionará que no sean aceptados y que se espere otra vez por el valor de la amplitud .

El formato de introducción es : DIGITO PUNTO DIGITO .

EJEMPLOS	Amplitud	Oprimir
	3	3 . 0
	1.8	1 . 8
	0.5	0 . 5

NO OPRIMIR RETURN

FRECUENCIA

Los valores permitidos para la frecuencia, así como su formato de introducción son idénticos a los de la amplitud , por lo que pedimos releer el párrafo anterior y nos limitamos a dar los siguientes ejemplos :

Frecuencia	Oprimir
1	1 . 0
0.5	0 . 5
2.3	2 . 3

ANGULO DE FASE

Los valores que se usan van desde 0 º hasta 360 º y serán aceptados solamente valores enteros .Internamente TURBO PASCAL y el programa utilizan el sistema circular en la medición de ángulos (usan radianes) , pero para el usuario elegimos el sistema sexagesimal pues el uso del sistema de radianes nos obligaría a introducir valores aproximados , en cambio , con el sexagesimal se proporcionarán valores exactos (enteros) .Otra vez , valores fuera del rango indicado serán ignorados , y el programa esperará de nuevo por el valor del defasamiento .

El formato de introducción es :

ANGULO DE FASE	INTRODUCIR
mayor o igual a cero	DIGITO DIGITO DIGITO
menor que cero	SIGNO DIGITO DIGITO DIGITO

EJEMPLOS	ANGULO DE FASE	OPRIMIR
	135 °	1 3 5
	45 °	0 4 5
	-120 °	- 1 2 0
	-30 °	- 0 3 0
	0 °	0 0 0

NO OPRIMIR RETURN

SESIONES DE TRABAJO

El tener 3 parámetros y disponer para cada uno las opciones de usarlos o nó (usarlo es equivalente a darle cualquier valor diferente de 0 ,no usarlo es lo mismo que asignarle el valor 0) da lugar a 8 diferentes arreglos , pero como la opción Amplitud = 0 , Frecuencia = 0 , Defasamiento = 0 conduce a la función trivial f(x) = 0 , trabajaremos con los 7 restantes arreglos lo que nos conduce a efectuar siete sesiones de trabajo (clases) .

SESION No.	VARIAR	FUNCION
1	Amplitud	$f(x) = A\text{sen } x$
2	Frecuencia	$f(x) = \text{sen } Bx$
3	Defasamiento	$f(x) = \text{sen}(x + C)$
4	Ampiitud y frecuencia	$f(x) = A\text{sen } Bx$
5	Amplitud y defasamiento	$f(x) = A\text{sen}(x + C)$
6	Frecuencia y defasamiento	$f(x) = \text{sen}B(x + C)$
7	Amplitud,frecuencia y defasamiento	$f(x) = A\text{sen}B(x + C)$

No se permite graficar simultáneamente mas de 3 funciones , pues de asi hacerlo se confundirian las gráficas .

En cada sesión se empleará la función $f(x) = \text{sen } x$ como la primera a graficar y así poder comparar con ella a todas las siguientes . A la función $f(x) = \text{sen } x$ lo llamaremos " función senoidal típica " y nuevamente le recordamos que es el caso especial de la función $f(x) = A\text{sen}B(x + C)$ en donde :

Amplitud = A = 1 , Frecuencia = B = 1 y Defasamiento = C = 0 ° .

Si se desea imprimir o grabar alguna gráfica , ver en los capítulos IV y XII respectivamente ,los procedimientos a seguir.

SESION 1

$f(x) = A\text{sen } x$

En respuesta a las peticiones de introducción de datos que nos hace el programa proponemos :

FUNCION	AMPLITUD (oprimir)	FRECUENCIA (oprimir)	DEFASAMIENTO (oprimir)
$f(x) = \text{sen } x$	1.0	1.0	000
$f(x) = 2\text{sen } x$	2.0	1.0	000
$f(x) = 0.5\text{sen } x$	0.5	1.0	000

De la observación de las gráficas obtenemos :

1) Las 3 curvas se intersecton en los puntos .... ,$(-3\pi,0)$, $(-2\pi,0)$, $(-\pi,0)$, $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(2\pi,0)$, $(3\pi,0)$, ... , los que también son puntos de inflexion .

2) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son comunes.

3) El valor máximo para cada función es el mismo que su amplitud y estos máximos se dan en los puntos cuya abscisa es de la forma $\pi/2 + 2\pi n$ donde n es un entero.

4) Los valores minimos (que son simétricos de los máximos) se dan en los puntos que tienen abscisa de la forma $\pi/2 + 2\pi n$ donde n es un entero .

SUMARIO

El único efecto ocasionado por el cambio en el valor del parámetro A es el de multiplicar los valores de la función por A .

Si el lector cree que es necesario hacer mas observaciones antes de dar conclusiones , le invitamos a que las haga una y otra vez hasta que se convenza de nustro afirmación .

SESION 2

$f(x) = \text{sen } Bx$

En respuesta a las peticiones de introducción de datos que nos hace el programa proponemos :

FUNCION	AMPLITUD (oprimir)	FRECUENCIA (oprimir)	DEFASAMIENTO (oprimir)
$f(x) = \text{sen } x$	1.0	1.0	.000
$f(x) = \text{sen } 2x$	1.0	2.0	.000
$f(x) = \text{sen } 0.5x$	1.0	0.5	.000

OBSERVACIONES

1) En la función senoidal típica $f(x) = \text{sen } x$ (modelo para hacer comparaciones) vemos que cada 2π radianes(360 °) se repiten sus valores , lo que se ve como una onda de anchura 2π que se repite hacia la izquierda y derecha .

2) En el caso de la función $f(x) = \text{sen } 2x$, su periodo se reduce a la mitad como con toda claridad se vé en la gráfica , por lo que en cualquier franja vertical donde quepa una onda de la función senoidal típica caben ahora dos ondas de la función $f(x) = \text{sen } 2x$.

3) En el caso de la función $f(x) = \text{sen } 0.5x$,observamos que su período es el doble del de la función senoidal típica, pues en cualquier franja vertical donde aparezcan 2 ondas de ésta ,cabe solamente una de aquella .

4) Al cambiar el ancho de cada onda , o lo que es lo mismo , al cambiar el período de la función senoidal , también cambian los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los puntos de inflexión y las intersecciones con el eje X'X .

De las observaciones anteriores , así como de las de otras gráficas que haga el usuario ,se llega al sumario que se muestra en la siguiente hoja .

SUMARIO

i) Cuando $x = 0$, $f(x) = 0$; además , el punto (0,0) es un punto de inflexión .

ii) Es creciente y positiva en el intervalo (0 , $\pi/2B$) .

iii) Alcanza su valor máximo cuando $x = \pi/2B$, siendo 1 ese valor máximo .

iv) Es decreciente y positiva en el intervalo ($\pi/2B$, π/B)

v) Cuando $x = \pi/B$, $f(x) = 0$; además , el punto (π/B , 0) es un punto de inflexion .

vi) Es decreciente y negativa en el intervalo (π/B , $3\pi/2B$)

vii) Alcanza su valor mínimo cuando $x = 3\pi/2B$, siendo -1 ese valor mínimo .

viii) Es creciente y negativa en el intervalo ($3\pi/2B$, $2\pi/B$).

ix) Para valores de x distintos de los anteriores se cumple : $f(x + 2\pi/B) = f(x)$.

NOTA : La justificación matemática de la igualdad en ix) es :

$$
\begin{aligned}
f(x + 2\pi/B) &= \text{sen}[B(x + 2\pi/B)] \\
&= \text{sen}(Bx + 2\pi) \\
&= \text{sen } Bx \\
&= f(x) \quad .
\end{aligned}
$$

SESION 3

$$f(x) = \text{sen}(x + C)$$

Introduciremos datos como sigue :

FUNCION	AMPLITUD (oprimir)	FRECUENCIA (oprimir)	DEFASAMIENTO (oprimir)
$f(x) = \text{sen } x$	1.0	1.0	000
$f(x) = \text{sen}(x + 60°)$	1.0	1.0	060
$f(x) = \text{sen}(x - 45°)$	1.0	1.0	− 045

Para la mejor comprensión del comportamiento de las funciones senoidales , es conveniente pensar que tienen una " onda generadora " que se repite indefinidamente hacia la izquierda y hacia la derecha , y que en el caso de la función senoidal típica esta onda generadora es la parte comprendida en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Al comparar las gráficas de las funciones arriba indicadas , notamos que tienen exactamente la misma forma y tamaño , y que se conservan siempre paralelas entre sí , difiriendo tan solo en la posición de su onda generadora , la que en el caso de $f(x) = sen(x + 60°)$ se encuentra desplazada 60° ($\pi/3$ radianes) hacia la izquierda (de la senoidal típica) y para la función $f(x) = sen(x - 45°)$ el desplazamiento es de $\pi/4$ radianes (45°) hacia la derecha de la función senoidal típica . Es fácil ahora el entender que si la senoidal típica es empujada(a la derecha) 45° , coincide con $f(x) = sen(x - 45°)$; y si es jalada (a la izquierda) 60° coincide con $f(x) = sen(x + 60°)$

Queda ahora al usuario la introducción de otras funciones del mismo tipo hasta que sea capaz de hacer (o entender) el sumario que sigue .

SUMARIO

i) Cuando $x = -C$, $f(x) = 0$; además ,el punto $(-C , 0)$ es un punto de inflexión .

ii) Es creciente y positiva en el intervalo $(-C , -C + \pi/2)$

iii) Alcanza su valor máximo cuando $x = -C + \pi/2$, siendo 1 ese valor máximo .

iv) Es decreciente y positiva en el intervalo $(-C + \pi/2 , -C + \pi)$.

v) Cuando $x = -C + \pi$, $f(x) = 0$;además ,el punto $(-C + \pi, 0)$ es un punto de inflexión .

vi) Es decreciente y negativa en el intervalo $(-C + \pi, -C + 3\pi/2)$.

vii) Alcanza su valor mínimo cuando $x = -C + 3\pi/2$,siendo -1 su valor mínimo .

viii) Es creciente y negativa en el intervalo $(-C+3\pi/2 , -C+2\pi)$.

ix) Para valores de x distintos de los anteriores se cumple: $f(x + 2\pi) = f(x)$.

NOTA : La justificación matemática de la igualdad en (*) es:

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \text{sen}[(x + 2\pi) + C] \\ &= \text{sen}[(x + C) + 2\pi] \\ &= \text{sen}(x + C) \\ &= f(x) \quad . \end{aligned}$$

SESION 4

$f(x) = A\text{sen}Bx$

Introduciremos datos como sigue :

FUNCION	AMPLITUD (oprimir)	FRECUENCIA (oprimir)	DEFASAMIENTO (oprimir)
$f(x) = 3\text{sen } x$	3.0	1.0	000
$f(x) = 2\text{sen } 0.5x$	2.0	0.5	000
$f(x) = 0.5\text{sen } 2x$	0.5	2.0	000

Después del análisis de las gráficas ,corresponde al usuario hacer mas prácticas usando para A y B valores diferentes a los anteriores hasta que pueda elaborar por sí mismo el sumario que sigue .

SUMARIO

Esta función es una combinación de las funciones estudiadas en las sesiones 1 y 2 ,por lo que los resúmenes de esas sesiones les son aplicables , y en caso de necesitarlos se debe recurrir a su consulta.

SESION 5

$$f(x) = A\,sen(x + C)$$

Introduciremos datos como sigue :

FUNCION	AMPLITUD (oprimir)	FRECUENCIA (oprimir)	DEFASAMIENTO (oprimir)
f(x) = 3sen(x − 60°)	3.0	1.0	−060
f(x) = 2sen(x + 90°)	2.0	1.0	090
f(x) = 1.5sen(x + 30°	1.5	1.0	030

Después del análisis de las gráficas , corresponde al usuario hacer mas prácticas usando para A y C valores diferentes a los anteriores hasta que pueda elaborar por si mismo el sumario que sigue .

SUMARIO

Esta es una combinación de las funciones estudiadas en las sesiones 1 y 3 ,por lo que los resúmenes de esas sesiones les son aplicables , y en caso de necesitarlos se debe recurrir a su consulta.

SESION 6

$$f(x) = sen(Bx + C)$$

Introduciremos datos como sigue :

FUNCION	AMPLITUD (oprimir)	FRECUENCIA (oprimir)	DEFASAMIENTO (oprimir)
f(x) = sen(3x − 60°)	1.0	3.0	−060
f(x) = sen(2x + 90°)	1.0	2.0	090
f(x) = sen(0.5x −120°	1.0	0.5	−120

Después del análisis de las gráficas , corresponde al usuario hacer mas prácticas usando para B y C valores diferentes a los anteriores hasta que pueda elaborar por si mismo el sumario que sigue .

SUMARIO

Esta es una combinación de las funciones estudiadas en las sesiones 2 y 3 ,por lo que los resúmenes de esas sesiones les son aplicables , y en caso de necesitarlos se debe recurrir a su consulta.

SESION 7

$$f(x) = A\text{sen}(Bx + C)$$

Introduciremos datos como sigue :

FUNCION	AMPLITUD (oprimir)	FRECUENCIA (oprimir)	DEFASAMIENTO (oprimir)
$f(x) = 0.5\text{sen}(1.5x - 60°)$	0.5	1.5	-060
$f(x) = 3\text{sen}(3x - 90°)$	3.0	3.0	-090
$f(x) = 2\text{sen}(2x + 180°)$	2.0	2.0	180

Después del análisis de las gráficas , corresponde al usuario hacer mas prácticas usando para B y C valores diferentes a los anteriores hasta que pueda elaborar por sí mismo un sumario equivalente al que sigue .

SUMARIO

i) La amplitud de las ondas es igual al valor de A (recuérdese que para A solamente permitimos valores positivos) ,por lo que para cada función,el valor máximo es A y su valor mínimo es -A .

ii) El periodo de la función (el intervalo que transcurre para que se repita una onda) es $2\pi/B$.

iii) El defasamiento es claramente perceptible como un empujón (a la derecha) o un jalón (a la izquierda) según sea el valor de C .

iv) Cuando $x = -C$, $f(x) = 0$; además , el punto ($-C$, 0) es un punto de inflexión .

v) Es creciente y positiva en el intervalo $(-C , -C + \pi/2B)$;

vi) Alcanza su valor máximo cuando $x = -C + \pi/2B$, siendo A ese valor máximo .

vii) Es decreciente y positiva en el intervalo $(-C + \pi/2B , -C + \pi/B)$

viii) Cuando $x = -C + \pi/B$, $f(x) = 0$; además , el punto $(-C + \pi/B , 0)$ es un punto de inflexión .

ix) Es decreciente y negativa en el intervalo $(-C + \pi/B, -C + 3\pi/2B)$

x) Alcanza su valor mínimo cuando $x = -C + 3\pi/2B$, siendo $-A$ su valor mínimo .

xi) Es creciente y negativa en el intervalo $(-C+3\pi/2B , -C+2\pi/B)$.

xii) Para valores de x distintos de los anteriores se cumple : $f(x + 2\pi/B) = f(x)$.

NOTA : La justificación matemática de la igualdad en xii) es :

$$
\begin{aligned}
f(x + 2\pi/B) &= A\operatorname{sen}B[(x + 2\pi/B) + C] \\
&= A\operatorname{sen}(Bx + 2\pi + BC) \\
&= A\operatorname{sen}[(Bx + BC) + 2\pi] \\
&= A\operatorname{sen}(Bx + BC) \\
&= A\operatorname{sen}B(x + C) \\
&= f(x) \quad .
\end{aligned}
$$

CAPITULO XII

EXHIBIR GRAFICAS GRABADAS

Para poder exhibir gráficas , estas deben haber sido grabadas con anterioridad ¿ verdad que parece lógico ? , sin embargo , es asombroso el número de casos que el autor ha presenciado en los que un usuario inexperto intenta reproducir lo que nunca ha sido grabado .

GRABACION DE GRAFICAS

1) Como se da por supuesto que el SISTEMA GRAFICADOR está en el drive A , se debe insertar en el drive B un diskette formateado que tenga capacidad suficiente para almacenar las gráficas que se deseen (usar varios diskettes formateados en caso necesario).

Si se tiene un disco duro no es requerido emplear otro diskette pues la grabación se puede hacer en el drive C .

Como cada gráfica ocupa 16384 bytes , fácilmente puede el usuario determinar cuantas podrá almacenar .

2) Al estar en pantalla la gráfica que se deseé grabar , y como respuesta al aviso DESEAS GRABAR LA GRAFICA S/N oprimir la tecla S (NO OPRIMIR RETURN) . Si no se desea grabar la gráfica oprimir la tecla N (NO OPRIMIR RETURN) .

3) Si se oprimió N el programa sigue su curso .Si se oprimió S aparece un aviso solicitando el drive y nombre de la gráfica que se guardará .Como ejemplo usemos el nombre GRAFICA1.GRF por lo que se debe :

a) Teclear B:GRAFICA1.GRF (si existen 2 unidades de disco).

ó

C:GRAFICA1.GRF (si hay disco duro)

Solamente se permiten 14 caracteres para el nombre de la gráfica incluidos la unidad de disco y la extensión .

b) Oprimir < RETURN >

En este momento se enciende la luz del drive indicado y al apagarse , la grabación ha sido efectuado .

Se advierte que es de la exclusiva responsabilidad del usuario el asegurarse que exista un disco formateado con suficiente capacidad de almacenamiento .

EXHIBIENDO GRAFICAS

Al elegir esta opción del MENU aparece un aviso solicitando drive y nombre . De nuevo se recurre a la ejemplificación y se supone que la gráfica se llama GRAFICA1.GRF por lo que se debe :

a) Teclear B:GRAFICA1.GRF
ó
C:GRAFICA1.GRF

b) oprimir < RETURN >

Advertimos al usuario que es de su absoluta responsabilidad el asegurarse que exista la gráfica que se pretende mostrar .Sin embargo , el programa prevee el caso en que por error se teclee un nombre equivocado , a lo que la computadora responde con dos avisos sonoros y un letrero solicitando la rectificación .

Para reducir al mínimo el riesgo de teclear un nombre erróneo recomendamos que las gráficas sean grabadas usando un nombre que tenga para el usuario un significado específico (o contracciones de este nombre)'. De manera especial sugerimos usar la extensión GRF .

Después de haber recuperado (exhibido) varias gráficas , el usuario observador (que dispone de un monitor a color) habrá podido darse cuenta que éstas tienen en ocasiones un color diferente al que tenían cuando fueron grabadas .Esto se hizo así con el propósito de hacer más amena el uso del SISTEMA GRAFICADOR . Por cierto , tan solo se emplean seis colores ¿ cuáles ? .

APLICACIONES

Creemos que el usuario ha podido percatarse del enorme potencial que tiene esta sección al permitirle la presentación de tantas gráficas como desee y en la secuencia que quiera .Como es natural , debe tener de antemano las gráficas necesarias ,así como un guión de la presentación , por lo que se deja a su imaginación encontrar las aplicaciones que sean de su agrado .

CONCLUSIONES

Terminamos este trabajo con sugerencias especiales para los profesores de matemáticas del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM .

Sugerimos que en una sala del Departamento Audiovisual se conecte una computadora personal con una televisión grande (puede ser conectada a su monitor al mismo tiempo) , y con el auxilio de un equipo amplificador de sonido se presente a un auditorio (no forzosamente de alumnos) una o mas HISTORIAS con la seguridad que obtendrán un rotundo éxito .

Otra sugerencia consiste en conectar la señal de salida de la computadora a una videograbadora para así grabar en videocinta algunas gráficas , después filmar algunas partes complementarias y hacer la adecuada edición con lo que se obtendrán videos que se proyectarán a grupos de estudiantes (o de profesores , o de trabajadores universitarios) , es mas , estos videos podrán ser copiados para prestarse a otros planteles del C.C.H. o de la UNAM . No parece muy descabellado el pensar en futuros clubes de videocintas con temas de matemáticas ; lo que se debe hacer es acudir al Departamento Audiovisual de cada plantel del Colegio de Ciencias y Humanidades . En ellos se tiene el material que se necesita (si no lo tiene podemos solicitar su adquisición) así como el personal técnico especializado que nos podrá ayudar a la creación de este anhelado VIDEOCLUB MATEMATICO . Esta idea no es tan loca como podría pensarse ; en el Plantel Azcapotzalco del C.C.H. un entusiasta grupo de profesores de matemáticas reunidos bajo el nombre de GRUPO GOOGOL está trabajando en este sentido y suponemos que en otros planteles se haga algo similar .

Naturalmente , es necesario que el profesor se actualice en temas de Didáctica y Elaboración de Guiones Audiovisuales (nos atrevemos a afirmar que , con muy pocas excepciones no está actualizado). Lo anterior implica que el profesor vuelva a las aulas como alumno .
¿ Será esto el comienzo de una gran aventura intelectual ? .
Creemos que si.

B I B L I O G R A F I A

Abramowitz and Stegun	Handbook of Mathematical Functions. Dover.
Allendoerfer y Oakley	Fundamentos de Matemáticas Universitarias. McGraw-Hill.
Arbib, Michael A.	Brains, Machines and Mathematics. McGraw-hill.
Bakhavalov	Numerical Methods. MIR Publishers.
Borland	Turbo Pascal Language Manual. Borland International.
Bruño, G.M.	Elementos de Trigonometría. Librería de Ch. Bouret.
Chandor, Anthony	The Penguin Dictionary of Computers. Penguin Books.
Demidovich	Computational Mathematics. MIR Publishers.
Devoney, Chris	Using PC DOS. QUE Corporation.
Farina, Mario V.	Diagramas de Flujo. Editorial Diana.
Forsythe	Lenguajes de diagramas de flujo. Limusa.
Fox y White	Gráficos animados por computadora. BYTE BOOKS/McGraw-Hill.
Goldstein y Goldstein	IBM PC. Prentice Hall.
Gottfried	Programación en Pascal. McGraw-Hill.
Grogono, Peter	Programación en Pascal. Fondo Educativo Interamericano.
Hall y Knigth	Trigonometría Elemental. UTEHA.
Hearn y Baker	Gráficas por computadora. Prentice Hall.

Korfhage — Lógica y Algoritmos.
Limusa.

Korshunov, Yu M. — Fundamentos Matemáticos de la Cibernética.
Editorial Mir.

McKenzie, J. et al — Interactive Computer Graphics in Science Teaching.
Ellis Horwood Publishers.

Microsoft MS-DOS — Users Guide.
Microsoft Corporation.

Nielsen, Kaj — Trigonometría Moderna.
CECSA.

Nievelgert, J. et al — Interactive Computer Programs for Education.
Addison-Wesley.

Norton, Peter — Programmer's Guide to the IBM PC.
Microsoft Press.

Ortiz Osornio Rosario — Algunas consideraciones para el diseño de cursos por computadora.
D.G.S.C.A. UNAM.

Park, Chan S. — Interactive Microcomputer Graphics.
Addison-Wesley.

Pascoe, Geoffrey A. — Elements of Object-Oriented Programming.
BYTE August 1986 Vol.11 No.8

Pekelis, V. — Pequeña Enciclopedia de la gran Cibernética.
Editorial Mir.

Pentiraro, Egidio — La computadora en el aula.
Publicaciones Cultural.

Pham, Daniel — Informática para uso de educadores.
Ediciones STVDIVM.

Plastock and Kalley — Computer Graphics.
Schaum McGraw-Hill.

Polya, George — Matemáticas y razonamiento plausible.
Editorial Tecnos.

Robson, David — Object-Oriented Software Systems.
BYTE August 1981 Vol.6 No.8

Ross Anderson, Alan — Mentes y Máquinas.
UNAM.

Ross Ashby ,W. — Introducción a la Cibernética ,
Ediciones Nueva Visión .

Stein , Jacob — Object-Oriented Programming and
Databases .
Dr. Dobb's Journal
137 March 1988

Swokowsky — Algebra y Trigonometría con
Geometría Analítica ,
Grupo Editorial Iberoamérica .

Thakhtenbrot ,B.A. — Algoritmos y Computadoras .
Limusa .

Thornburg ,David D. — Computer art and animation .
Addison-Wesley .

Viso Gurovich ,Elisa — Lenguajes de Programación I
UNAM ,Facultad de Ciencias .

Wells — Nueva Trigonometría Plana y Esférica .
D.C. Heath & Cía.

Wiener ,Norbert — Cibernética y Sociedad .
Editorial Sudamericana .

Wood ,Steve — Turbo Pascal Versión 3.0
Osborne/McGraw-Hill .