UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL ANALISIS DE DURACION:

UNA APLICACION A VALORES DE RENTA FIJA.

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A

ELOY FRANCISCO RAMIREZ RAMIREZ

MEXICO, D. F. 1990

I N D I C E.

I N T R O D U C C I O N.

Los seres humanos, individualmente o en grupos, se enfrentan diariamente a una gran cantidad de problemas. Dedicando la mayor parte de su tiempo a buscar soluciones, las cuales van desde las muy triviales a las altamente complejas. Para resolver muchos de esos problemas no es suficiente el uso de simples métodos observacionales, ya que estos pueden resultar ser engañosos, sino que, es necesario emplear técnicas de investigación y experimentación (pruebas) para la percepción y formulación del problema, para que de esta manera se obtengan soluciones óptimas. Formulado el problema, se pasa a la construcción del modelo que refleje, lo más realmente posible, la situación que se pretende resolver. En la construcción del modelo y en el análisis para su solución, por lo general se requieren elementos matemáticos, los cuales permiten expresar de manera sencilla y clara la situación que se esta investigando. Encontrandose en condiciones para dar solución al problema, es necesario que antes se consideren todas las alternativas y cursos de acción posibles, así mismo sus consecuencias, asegurandose que no se escape del análisis ninguna situación especial. Después de lo anterior, se evaluan cada una de las alternativas, según los objetivos que se persiguen en la solución del problema y se toma una decisión, eligiendo la alternativa que proporcione la solución óptima. Nótese la importancia del uso de parámetros cuantitativos en los modelos, ya que estos permiten las comparaciones entre las alternativas para que de esta manera se pueda elegir a la que proporciona un mayor beneficio.

El párrafo anterior muestra que el procedimiento para encontrar soluciones a problemas puede ser visto como un proceso de toma de decisiones. Y en concreto, éste consiste en una elección entre dos o más alternativas, las cuales después de evaluarlas cuidadosamente permiten alcanzar la total realización de uno o más objetivos. Estas decisiones implican generalmente la aplicación de una considerable cantidad de experiencia y criterios humanos, y la mejor manera de tomar decisiones es reunir la máxima cantidad de información antes de elegir una de las alternativas.

Por otro lado, la toma de decisiones es una parte esencial en las organizaciones modernas. En el ambiente financiero, se realizan gran cantidad de decisiones (decisiones financieras), las cuales se caracterizan por considerar principalmente tres factores: el dinero, el tiempo y el riesgo. La teoría financiera se ocupa del problema de evaluación de flujos de efectivo(dinero) futuros. Y como el futuro es incierto el problema anterior se convierte en un problema de evaluación de flujos inciertos de efectivo en el tiempo.

En la actualidad, el empleo de los avances científicos y tecnológicos en todas las areas del conocimiento humano, han generado altos niveles de calidad en los servicios. En el ambiente financiero el nivel de calidad y disponibilidad en los servicios que ofrecen las compañías financieras se han elevado enormemente, gracias a la aplicación de técnicas modernas de evaluación y modelación de las inversiones y al uso de las computadoras y sistemas de comunicación. En concreto, el empleo de la tecnología moderna en los procesos de toma de decisiones y solución de problemas han generado excelentes resultados tanto para los proveedores de servicios financieros como para sus clientes.

Ahora bien, el objetivo de este trabajo es presentar el **Análisis de Duración** como una alternativa para tomar decisiones financieras de inversión con valores de renta fija y mostrar prácticamente (con un ejemplo) una de sus aplicaciones.

A continuación se da una breve descripción del contenido de este trabajo, señalando que para su completa comprensión sólo se requieren conocimientos básicos de álgebra y cálculo elemental.

El capítulo 1 contiene una descripción general de las matemáticas financieras de los valores de renta fija, como lo son bonos e hipotecas, así mismo se derivan las ecuaciones de precio de estos valores las cuales son usadas en capítulo 3.

En el capítulo 2 se mencionan y describen, con cuadros y tablas, las características particulares de los principales valores de renta fija que se manejan en el Sistema Financiero Mexicano.

El capitulo 3 presenta el desarrollo teórico completo del Análisis de Duración; se da su definición, se analiza su significado y se muestra que es un buen indicador de los cambios en precio por cambios en rendimiento. También se obtienen fórmulas sencillas para el calculo de la Duración de los valores de renta fija a nivel general.

El capitulo 4 presenta una aplicación del Análisis de Duración, describiéndose primeramente el modelo teórico de la estrategia de inversión inmunizada basada en la Duración, para posteriormente mostrar en forma numérica el como podría ser usado ese modelo teórico en una situación real con una cartera de valores de renta fija del Sistema Financiero Mexicano.

Finalmente se dan conclusiones, en donde se hace notar la importancia del Análisis de Duración y sus alcances de aplicación.

Asi mismo se presenta una amplia bibliografía, la cual puede ser consultada por aquellas personas que deseen profundizar en los temas aquí tratados.

CAPITULO 1.[1]

MATEMATICAS FINANCIERAS DE LOS VALORES DE RENTA FIJA.

Los instrumentos de crédito, creados entre prestamistas o inversionistas y deudores, normalmente aseguran flujos de efectivo en fechas futuras. A los instrumentos financieros que aseguran flujos fijos de efectivo son llamados **VALORES DE RENTA FIJA.** Los valores de renta fija son los instrumentos o títulos de deuda que más se negocian en bolsa, ver tabla 1.1. Esos valores tienen cadenas de ingreso o flujos de efectivo predefinidos que permiten el desarrollo de fórmulas que expresan el valor del instrumento en términos del rendimiento y otras características del valor. Los valores de renta fija tienen dos caracteríticas básicas que los distinguen del resto de los instrumentos de inversión financiera, y estas son, un rendimiento y un plazo predeterminado. En las siguientes secciones de este capitulo se muestran algunos conceptos y características generales de los valores de renta fija como lo son los bonos e hipotecas. Estos conceptos y características se estudian en cursos básicos de Matemáticas Financieras.

1. Para mayor información sobre los temas que en este capitulo se presentan, consultar de la bibliografía que se lista al final este trabajo la cita número 1 y 8.

MERCADO DE CAPITALES		
RENTA VARIABLE	**I M P O R T E**	**%**
Acciones Inds. Com. y de Servicios Contado	11 710 492	1.21
Acciones Seguros y Fianzas Contado	113 208	0.01
Acciones Sociedades de Inversion Contado	4 518 463	0.47
Acciones, Casas de Bolsa Contado	543 453	0.06
CAP's (Cert. de Aport. Patrimonial) Contado	659 672	0.07
Total Renta Variable	17 545 288	1.82
RENTA FIJA		
Obligaciones Industriales Contado	1 967 214	0.20
Obligaciones Subordinadas Contado	50 375	0.01
Obligaciones con Rend. Capitalizable Contado	36 532	0.00
Petrobonos Contado	7 676 989	0.79
Bonos de Indemnizacion Bancaria Contado	62 024	0.01
Bonos Bancarios de Desarrollo Contado	0	0
Bonos de Renovacion Urbana Contado	3 252	0.00
Cert. de Participacion Inmobil. Contado	78 666	0.01
Total Renta Fija	9 875 044	1.02
Total Mercado de Capitales	27 420 331	2.84
MERCADO DE DINERO		
Cert. de la Tesoreria de la Fed.	543 493 938	56.28
CETES (Mismo dia)	292 966 762	30.34
Papel Comercial	23 289 352	2.41
Papel Comercial Quirografario	104 142	0.01
Aceptaciones Bancarias	6 677 063	0.69
Pagares con Rend. Liquidable al Venc.	38 712 982	4.01
Pag.con Rend. Liq.al Venc.(mismo dia)	6 068 485	0.63
Pagares de la Tesoreria de la Fed.	16 271 152	1.68
Bonos de Desarrollo del Gob. Fed.	10 609 792	1.10
Total Mercado de Dinero	938 187 668	97.15
MERCADO DE METALES		
Certificados de Plata	76 606	0.01
Total Mercado de Metales	76 606	0.01
TOTAL MERCADO DE VALORES	965 686 605	100.00

TABLA 1-1. OPERACIONES EN BOLSA DURANTE 1988*.COMO PUEDE OBSERVARSE MAS DEL 98% DE LAS OPERACIONES SE EFECTUARON CON INSTRUMENTOS DE RENTA FIJA. (1.02% DEL MERCADO DE CAPITALES Y 97.15% DEL MERCADO DE DINERO).

* INFORMACION OBTENIDA DEL ANUARIO BURSATIL 1988.

1.1 CADENAS DE INGRESO.

Los valores de renta fija pueden ser representados como:

$$(F_1, F_2, \ldots, F_t, \ldots) \qquad \text{donde} \qquad t=1,2,\ldots m \qquad (1.1)$$

y donde F_t son los flujos de efectivo que se aseguran al final del periodo t y m es el último periodo en el cual se obtiene un flujo de efectivo F_m. El tamaño del periodo dependera de las caracteristicas especificas del valor que se este analizando

El modelo de flujo de los valores de renta fija puede variar considerablemente de un valor a otro. El flujo de efectivo en cada fecha de vencimiento se divide por lo general en componentes. La división de los flujos en partes es importante por varias razones. Primera, las magnitudes de esas componentes son de gran utilidad en la valuación de los instrumentos financieros. Segunda, las leyes de impuestos sobre ingresos y ganancias de capital podrian aplicarse de manera distinta a diferentes componentes.

La cadena de ingresos sobre cualquier instrumento financiero puede ser considerada como una combinación de varias cadenas de ingreso fundamentales. La cadena de ingresos (1.1), es un resumen de los m pagos de las cadenas de ingresos:

$$\begin{array}{c} (F_1,0,0,\ldots\ldots,0) \\ (0,F_2,0,\ldots\ldots,0) \\ \vdots \\ (0,0,\ldots\ldots,0,F_m) \end{array} \qquad (1.2)$$

Un prestamista o inversionista que adquiere la cadena de ingresos $(F_1,F_2,...,F_t,...,F_m)$ puede ser considerado como si adquiriera un paquete de m cadenas de ingresos como en (1.2). El inversionista adquiere el mismo flujo de efectivos en cualquier caso. Cada uno del los pagos únicos de la cadena en (1.2) es también un resumen de una cadena de ingresos con varios pagos unitarios. Por ejemplo, la cadena de ingresos $(F_1,0,0,...,0)$ consiste de F_1 unidades de la cadena de ingreso $(1,0,0,...,0)$. Por tanto la cadena de ingresos de una unidad monetaria,

$$
\begin{array}{c}
(1,0,0,...,0) \\
(0,1,0,...,0) \\
\vdots \\
(0,0,0,...,1)
\end{array}
\tag{1.3}
$$

es una construcción básica de todas las cadenas de ingreso. Para propósitos de valuación es de gran utilidad pensar cualquier cadena de ingresos como si estuviera compuesta de combinaciones de esas cadenas de ingreso unitarias.

1.2 FUNCIONES DE DESCUENTO.

Las cadenas de ingresos aquí consideradas representan efectivo que es recibido en fechas futuras predefinidas. Una función de descuento transforma una cadena de ingresos en su valor actual o presente. Si una función de descuento es elegida apropiadamente, este valor presente representa el valor real de mercado de la cadena de ingresos.

Sea d(t) la función de descuento que transforma una unidad monetaria que se recibirá al final de t periodos. Esto es, $d(t)$ es el valor real o actual de \$1.00 que será recibido t periodos después. Por ejemplo, si un prestamista acepta recibir un \$1.00 al final de un mes, el deudor podría aceptar \$0.95 ahora. En este caso $d(t)$ es 0.95 y t es un mes. Si un inversionista adquiere la cadena de ingresos $(0,0,\ldots,F_t,\ldots,0)$, el valor actual de esta cadena de ingresos puede ser considerada como $F_t d(t)$. En otras palabras se supone que el inversionista que compra F_t cadenas de ingresos unitarias de un sólo pago, pagará exactamente el mismo precio por cada una de las cadenas. Es decir, el precio $d(t)$ de una cadena de ingresos de un sólo pago unitario es independiente del número de unidades que se adquieran. Si la idea anterior es extendida a todas las componentes, el valor presente de la cadena de ingresos puede ser expresada como:

$$V = \sum_{t=1}^{m} F_t d(t) = d(1)F_1 + d(2)F_2 + \ldots + d(m)F_m \qquad (1.4)$$

Esta fórmula de evaluación refleja la suposición de aditividad del valor. El valor de una componente de la cadena, dígase $d(k)F_k$ no es afectada por el valor de las otras componentes $d(i)F_i$ para $i \neq k$. Si la suposición de la aditividad del valor fuera violada, otros términos tendrían que ser agregados al lado derecho de (1.4) para reflejar las interacciones de los flujos F_t. La editividad del valor refleja la suposición del valor competitivo de las cadenas de ingresos, una suposición hecha con mucha frecuencia. Si los inversionistas pueden adquirir los flujos F_t independientemente de los diferentes prestatarios o mercados, entonces el valor del paquete de flujos es la suma del valor de sus componentes. Características de valor de competencia imperfecta se suponen no posibles en el desarrollo de este trabajo.

En otras palabras, como es común en la valuación de cadenas de ingreso, se supone que cada flujo F_t con $t=1,...,m$, es vendido en diferentes mercados competitivos al precio de $d(t)$ por unidad monetaria en cada mercado. Esto es, el valor de una cadena de ingresos con m pagos futuros es considerada como la suma del valor de m flujos diferentes cada uno de los cuales tiene implícitamente un mercado separado.

La función de descuento $d(t)$, es algunas veces llamada factor de descuento y es frecuentemente expresada como función de una o más tasas de interés. Es importante notar lo que las funciones de descuento hacen. Su expresión, como función de una o más tasas de interés, involucra suposiciones adicionales acerca de la naturaleza de valuación. Sin embargo expresada como $d(t)$, la función de descuento o conjunto de factores de descuento representan precios de los bloques básicos construidos de la cadena de ingresos.

Algunas propiedades generales acerca de $d(t)$, son postuladas frecuentemente. Claramente $d(t) > 0$, ya que el valor actual de una unidad monetaria que se recibirá en el futuro es seguramente positiva. Las unidades monetarias futuras, bajo muchas condiciones no pueden ser consideradas como gratis ni malas. Si $d(t)$ fuera negativa significaría que el inversionista estaría dispuesto a pagar algo para obtener un contrato que le asegura un desembolso de efectivo en el futuro. Evidentemente la promesa de efectivo es como basura para la cual el inversionista esta dispuesto a pagar para tener que llevarsela. Por tanto es razonable suponer que $d(t) > 0$. Bajo muchas circunstancias es también razonable suponer que $d(t) < 1$. Los inversionistas normalmente no están dispuestos a dar una unidad monetaria ahora para obtener esa misma cantidad en el futuro. Esto es, se considera que los inversionistas tienen preferencias positivas en el tiempo; ellos preferirían tener una unidad monetaria para gastar ahora que para gastar después , y por tanto, si depositan $d(t)$ unidades monetarias ahora deben ser recompensados posteriormente por el ingreso de las $d(t)$ unidades más un incremento de $[1-d(t)]$, para compensar el sacrificio actual en el depósito. Por ejemplo, si \$0.90 son depósitados ahora, el inversionista podría ser recompensado recibiendo un incremento a \$0.90 de (\$1.00-\$0.90). Además se podría también esperar que $d(t) < d(t-1)$. El pago que un inversionista estaría dispuesto a hacer en este momento para obtener una unidad monetaria en un período más lejano es menor. Este es otro aspecto de las preferencias en el tiempo del inversionista y muestra que prefiere tener a su disposición efectivo a corto plazo que a largo plazo. Estas suposiciones implican que $d(t)$ es una función monótona decreciente de t y que está acotada en el intervalo $(0,1)$. Tales propiedades proporcionan una amplia variedad de funciones de descuento. La figura 1-1 muestra las gráficas de dos funciones de descuento muy diferentes, cada una de las cuales es consistente con las tres propiedades aquí mostradas. En cada uno de los dos diagramas d(t) es un número positivo menor que la unidad y decrece conforme la fecha de pagos está más alejada.

La valuación de una cadena de ingresos con esas dos funciones pueden ser considerablemente diferentes. Las restricciones razonables aquí impuestas sobre las funciones de descuento son muy débiles. Una enorme variedad de tales funciones son consistentes con las tres propiedades aquí asumidas.

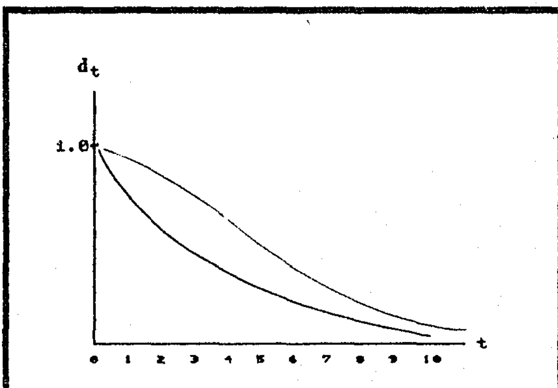

Figura 1-1. DOS FUNCIONES DE DESCUENTO, DECRECIENTES Y ACOTADAS POR UNO.

1.3 LA TASA DE INTERES COMO UN INDICADOR DE LA TASA DE DESCUENTO.

En los mercados para instrumentos de deuda, cada uno de los factores de descuento es expresado con frecuencia como una función de un sólo número llamado tasa de interés. En este caso, el factor de descuento puede ser definido como

$$d(t)=(1+i)^{-t}\ , \qquad t=1,2,3,...,m\ , \tag{1.5}$$

donde i es la tasa de interés que se supone es un número positivo que no depende de t. En esta forma cada factor de descuento en el conjunto [d(1),d(2),...,d(m)] es función del número i. En vez de requerir conocer cada d(t), t=1,2,...,m , sólo se necesita conocer el valor de i. Por cada valor de i se puede calcular fácilmente el valor de cada factor de descuento usando la ecuación (1.5). La tasa de interés i es entonces un INDICADOR o INDICE de todos los factores de descuento. La tabla 1-2 muestra varios valores de d(t) para un conjunto seleccionado de i's. En esa tabla, por ejemplo, cuando r=0.08, d(t) decrece de 0.926 para t=1 a 0.463 para t=10. Por cada tasa de interés dada, se observa que

$$\begin{aligned} &d(t) > 0\\ &d(t) < 1 \qquad y\\ &d(t) < d(t-1). \end{aligned}$$

El factor de descuento definido en (1.5) tiene las tres propiedades mostradas previamente. La tabla 1-2 muestra el uso de la tasa de interés i como un número índice, o como un indicador de todos los factores de descuento. La ecuación (1.5) es una función muy especial. Hay muchas formas alternativas para definir una función de descuento que sea consistente con las tres propiedades antes mostradas. La ventaja de usar (1.5) es clara. Uno puede calcular el valor de cualquier cadena de ingresos conociendo sólo las componentes de la cadena de ingresos y el valor de i, la tasa de interés.

TIEMPO (t)	TASAS DE INTERES (i).					
	.08	.09	.10	.11	.12	.13
1	.926	.917	.909	.901	.893	.885
2	.857	.842	.826	.812	.797	.783
3	.794	.772	.751	.731	.712	.693
4	.735	.708	.683	.659	.636	.613
5	.681	.650	.621	.593	.567	.543
6	.630	.596	.564	.535	.507	.480
7	.583	.547	.513	.482	.452	.425
8	.540	.502	.467	.434	.404	.376
9	.500	.460	.424	.391	.361	.333
10	.463	.422	.386	.352	.322	.295

TABLA 1-2. VALORES DE d(t) PARA VARIOS VALORES DE TASA DE INTERES i.

1.4 LA TASA DE INTERES COMO UNA TASA DE RENDIMIENTO.

La tasa de interés i, como se usó en la ecuación (1.5), es por lo general interpretada como una tasa de rendimiento. Por ejemplo, supóngase que un inversionista adquiere una cadena de ingresos simple (1,0,0,...,0) por el precio de $d(1)=(1+i)^{-1}$

unidades monetarias ahora para obtener una unidad monetaria un periodo más tarde. Si se multiplica $d(1)$ por $(1+i)$ se obtiene una unidad monetaria. Esto es, el ingreso de una unidad monetaria puede ser escrito como $d(1)(1+i)=d(1)+id(1)$. Al final de un periodo el inversionista obtiene la inversión inicial de $d(1)$ unidades monetarias más un monto adicional de $id(1)$, el cual es llamado interés sobre la inversión. En la tabla 1-2, $i=0.08$ representa el porcentaje de una tasa de rendimiento del 8 por ciento. Esto es, 8 por ciento de $d(1)$ es \$0.074; este es el incremento a $d(1)$ (=\$0.926) recibido como interés en un periodo.

También se puede interpretar a i como la tasa de ganancia de una inversión. Esto es claro cuando la inversión es por más de un periodo. Por ejemplo, supóngase que el inversionista adquiere la cadena de ingresos simple (0,1,0,0,...,0) por el precio de $d(2)=(1+i)^{-2}$ unidades monetarias. Multiplicando $d(2)$ por $(1+i)^2$ nos da el ingreso de una unidad monetaria al final de dos periodos. Esto es equivalente a invertir $d(2)$ unidades monetarias por un periodo para obtener $d(2)(1+i)$ y luego reinvertir ese monto por un periodo más para obtener el ingreso $d(2)(1+i)(1+i) = d(2)(1+i)^2$. La tasa de ingreso se dice que será i por periodo, y es la misma que la tasa de ganancia de la inversión $d(2)$ para dos periodos. La misma idea se extiende a cualquier número de periodos. Nótese que después de un periodo la reinversión del monto $d(2)(1+i)$ involucra una reinversión de interés $id(2)$. El ingreso sobre el último periodo, escrito como:

$$d(2)(1+i)^2 = d(2)(1+i) + id(2)(1+i)$$

incluye el término $id(2)(1+i)$, el cual es el interés sobre la inversión del interés ganado en el primer periodo. Este interés sobre interés es llamado interés compuesto.

Generalmente las tasas de interés son expresadas como tasas anuales. Y el método para especificar factores de descuento apropiados para la evaluación de flujos, Ft, los cuales son una parte del año, es como se explica a continuación. Si los flujos son mensuales, la tasa mensual es expresada convencionalmente por $i/12$. Si los flujos son expresados en trimestres la tasa trimestral es expresada como $i/4$. En general, si los flujos ocurren en intervalos de igual magnitud, la tasa por periodo es expresada como i/n donde n es el número de intervalos en un año. La tasa diaria es expresada como $i/360$ suponiendo que hay 360 dias en el año. Esas convenciones hacen que los calculos de los factores de descuento sean muy simples. Sin embargo, los efectos de calculo hacen que las comparaciones de inversiones no sean muy precisas. Por ejemplo, una unidad monetaria invertida por dos periodos de seis meses gana: $[1+(i/2)]^2$ en un año, pero una unidad monetaria invertida por un año acumula exactamente $(1+i)$ unidades monetarias y $(1+i) < [1+(i/2)]^2 = 1+i+(i/2)^2$. El efecto en el calculo de $(i/2)^2$ es frecuentemente ignorado cuando se hacen tales comparaciones.

1.5 VALOR CONSTANTE DEL DINERO EN EL TIEMPO.

Si i se mantiene constante y $d(t)$ es el factor de descuento como se definió en la ecuación (1.5), entonces el valor actual o presente de \$1.00 a ser recibido t periodos después no cambia con el paso del tiempo. Por ejemplo, si $i=0.08$, entonces el precio el primero de Enero de 1989 de \$1.00 que es recibido el primero de Enero de 1990 es $d(1)=\$0.926$; y si i permanece invariable, el precio el primero de Enero de 1990 de \$1.00 que será recibido el primero de Enero de 1991 será $d(1)=\$0.926$. Si la tasa de interés i no cambia con el paso del tiempo, la función de descuento así definida implica un precio constante del dinero en el tiempo. El costo de una unidad monetaria futura sólo depende del tamaño del intervalo de tiempo entre la fecha de compra y la fecha en que será recibido el flujo. Usando la función de descuento de la ecuación (1.5), el valor presente de la cadena de ingresos $(F_1,F_2,F_3,\ldots,F_m)$ es:

$$V = \sum_{t=1}^{m} d(t)F_t = \sum_{t=1}^{m} F_t(1+i)^{-t} \qquad (1.6)$$

La tasa de rendimiento no depende de las características de la cadena de ingresos F_t, y por tanto la acumulación de la inversión sólo depende de la inversión inicial V y la tasa de rendimiento i y entonces se puede invertir en cualquier cadena de ingresos y se dice que los flujos de efectivo son sustitutos perfectos.

1.6 RENDIMIENTO AL VENCIMIENTO.

El vencimiento de una cadena de ingresos es el tamaño del intervalo de tiempo desde la fecha de compra a la fecha del último flujo recibido. La cadena de ingresos $(F_1, F_2, ..., F_m)$ tiene un vencimiento de m periodos.

Si V es el valor presente inicial de la cadena de ingresos, la tasa de interés, i, no cambia con el tiempo, y todos los flujos de efectivo son reinvertidos.

Entonces el valor terminal o acumulado de la inversión inicial al vencimiento es $VA = V(1+i)^m$. Este resultado se sigue de la última sección porque todos los valores son sustitutos perfectos y existe un valor constante del dinero en el tiempo. En este contexto la tasa de interés i es llamada rendimiento al vencimiento (ganancia) de la inversión cuando las tasas de interés no cambian y hay un valor constante del dinero en el tiempo. Este rendimiento puede ser visto como el ingreso por intereses por periodo durante la vida de la cadena de ingresos. A partir de aquí el rendimiento al vencimiento de un valor estará representado por r.

1.7 VALUACION DE BONOS.

Los Bonos comunmente aseguran a sus poseedores o propietarios un pago de efectivo periodicamente. Este pago periodico de efectivo depende del **VALOR NOMINAL** y la **TASA DE CUPON** del bono.

El valor nominal del bono sólo se incluye en el último pago al poseedor quien lo recibe en la fecha de vencimiento del bono. Se llama valor nominal porque este valor está impreso con letras grandes al frente del contrato del bono o escritura. El valor nominal es usualmente de $10,000.00 o múltiplos de $10,000.00. Denótese el valor nominal de un bono por F. Exprésese la tasa de cupón anualizada como c (en forma decimal). El flujo de efectivo anual de un bono, se encuentra multiplicando el valor nominal por la tasa de cupón. El flujo de efectivo por n-periodo es entonces cF/n. La cadena de ingresos completa del bono puede ser expresada como:

$$(cF/n, cF/n, \ldots, cF/n, [cF/n]+F),$$

donde el último pago al vencimiento incluye a F. Por ejemplo, un bono de $10,000.00 a una tasa de cupón del 10% por n-periodo tendría la siguiente cadena de ingresos:

($1000.00,$1000.00,....,$1000.00,$11000.00).

La cadena de ingresos que un bono asegura es descrita completamente por su fecha de vencimiento, la tasa de cupón, y el valor nominal. Si dos bonos difieren con respecto a una de las tres caracteristicas mencionadas, sus modelos de flujo de efectivo también diferiran.

Para algunos bonos el valor nominal puede ser considerado como el monto inicial invertido o principal, y el ingreso de cupón como el interés periodico sobre el principal. Para esos bonos, los flujos de efectivo recibidos antes del vencimiento representan interés pagado y el pago final incluye la reintegración del principal. En este contexto, la tasa de cupón es llamada con frecuencia "tasa de interés", pero esto podría no ser lo mismo que el rendimiento al vencimiento. Hay muchos bonos, para los cuales el valor nominal no representa el principal y para los cuales el ingreso de cupón no representa el interés.

Sea r es la tasa de interés anual o rendimiento al vencimiento, entonces, la tasa de rendimiento por período es r/n, donde n es el número de períodos en que se divide el año. Esto es, la función de descuento es $d(t) = (1+r/n)^{-t}$ donde t es el número de n-períodos de año. El precio de un bono con vencimiento en m años es entonces

$$P = \sum_{t=1}^{nm} d(t)F_t = \sum_{t=1}^{nm} F_t(1+r/n)^{-t} \qquad (1.7)$$

$$P = \sum_{t=1}^{nm} (cF/n)(1+r/n)^{-t} + F(1+r/n)^{-nm}$$

$$= (cF/n) \sum_{t=1}^{nm} (1+r/n)^{-t} + F(1+r/n)^{-nm} \qquad (1.8)$$

donde hay nm n-períodos en m años. La ecuación (1.8) representa una aplicación especial de la ecuación (1.6). Esa ecuación simplemente especifica el conteo en n-intervalos de año entre fechas de pago. El flujo de efectivo es cF/n en cada fecha de pago y F es pagado en la última fecha mientras que la tasa de interés usada en la función de descuento es la tasa por n-período anual . La ecuación (1.8) muestra que el valor del bono es divisible en dos partes. La primera parte involucra la suma de los factores de descuento multiplicados por cF/n lo cual es el valor actual de los pagos de cupón. La segunda parte es el valor actual del valor nominal a ser recibido en el vencimiento.

Cuando el número de fechas de pago es muy grande el uso de la ecuación (1.8) podría requerir una considerable cantidad de calculos, para simplificarlo considérese la siguiente suma:

$$\sum_{t=1}^{nm} (1+r/n)^{-t} = \sum_{t=1}^{nm} x^{t} \qquad \text{donde} \quad x = (1+r/n)^{-1}$$

Sea

$$A = \sum_{t=1}^{nm} x^{t}$$

$$xA = \sum_{t=1}^{nm} x^{t+1}$$

$$A - xA = \sum_{t=1}^{nm} x^{t} - \sum_{t=1}^{nm} x^{t+1}$$

$$A(1-x) = x - x^{nm+1}$$

$$A = (x-x^{nm+1})/(1-x)$$

$$A = x(1-x^{nm})/x[(1/x)-1]$$

$$A = (1-x^{nm})/[(1/x)-1]$$

Sustituyendo el valor de x en A se tiene que

$$\sum_{t=1}^{nm} (1+r/n)^{-t} = [1-(1+r/n)^{-nm}]/(1+r/n-1)$$

$$= (n/r)[1-(1+r/n)^{-nm}] \qquad (1.9)$$

La ecuación (1.9) proporciona el valor de un peso a ser recibido en cada uno de los nm periodos futuros de pago. Multiplicando (1.9) por cF/n da el valor de una anualidad que asegura cF/n unidades monetarias por n-periodo anual.

La sustitución de (1.9) en (1.8) muestra que el valor del bono puede ser expresado como:

$$P=cF/r[1-(1+r/n)^{-nm}] + F(1+r/n)^{-nm} \qquad (1.10)$$

Esta fórmula es más fácil de usar que la ecuación (1.8) porque requiere de mucho menos calculos.

Para estandarizar el precio de bonos que tienen diferentes valores nominales, divídase P en la ecuación (1.10) por F y exprésese como un porcentaje. En esta forma, el precio estandarizado es:

$$p = (100)P/F$$

$$p = [(100)c/r][1-(1+r/n)^{-nm}] + 100(1+r/n)^{-nm} \qquad (1.11)$$

En esta forma, el precio del bono es expresado como un porcentaje de su valor nominal. Dado el precio p, uno puede fácilmente cálcular el precio P multiplicando p por F/100. Los títulos que difieren sólo en sus "valores nominales" tendrán entonces el mismo precio p, o precio estandarizado. Los bonos vendidos a un precio p=89 en efecto son vendidos al 89% de su valor nominal. Los bonos para los cuales p=100 son llamados **BONOS A LA PAR.** Si $p > 100$, los bonos son llamados **CON PREMIO O PREMIADOS** y si $p < 100$, los bonos son llamados **BONOS DESCONTADOS**.

1.7.1 BONOS A LA PAR.

La ecuación (1.11) puede ser reescrita como:

$$p = (100)c/r + (100)(1-c/r)(1+r/n)^{-nm} \qquad (1.12)$$

Es fácil ver que p=100 cuando c=r y esos bonos son llamados bonos A LA PAR. El precio de este bono no puede variar con el vencimiento m mientras c=r. Dado que p=100P/F, se sigue que P=F. El precio de un bono a la par es siempre igual a su valor nominal. Para bonos a la par el valor nominal F es el principal invertido, y el ingreso de cupón, cF/n=rF/n, es el interés ganado en un n-período anual. Conforme el tiempo pasa, el precio de un bono a la par permanacerá en 100% mientras la tasa de interés permanezca invariable e iqual a la tasa de cupón. Si ese es el caso, la inversión inicial se mantendrá en F unidades monetarias a través de la vida del bono y el flujo de efectivo consistira unicamente de intereses.

1.7.2 BONOS DESCONTADOS.

Si $c < r$, el bono es un bono descontado y entonces $p < 100$. Para mostrar esto, restése 100 de ambos lados de la ecuación (1.12):

$$d = (100)-p = -(100)(c/r-1)-(100)(1-c/r)(1+r/n)^{-nm}$$

$$d = (100)(c/r-1)[(1+r/n)^{-nm} -1] \qquad (1.13)$$

Si $c<r$, el lado derecho debe ser positivo porque $(1+r/n)^{-nm} -1 < 0$ y $c/r-1 < 0$. Por tanto, $d = 100-p$ es positivo. Aquí, d es llamado el descuento, y es el número de unidades monetarias restadas del valor nominal para determinar el precio. Los bonos que se venden con descuento deben entonces venderse a un precio menor al de su valor nominal.

En el caso más extremo de un bono con descuento, c=0. La cadena ingresos para el bono estandarizado se convierte en

$$(0,0,\ldots,0,100)$$

Un bono para lo cual esto se cumple es llamado bono de cupón cero o un bono de descuento puro. Esos bonos no aseguran flujos de efectivo periodicamente; no hay pagos periodicos de efectivo por interés. El interés acumulado es recibido totalmente en la fecha de vencimiento. Usando la ecuación (1.11), observamos que el bono de descuento puro tiene el precio

$$p = (100)(1+r/n)^{-nm} \tag{1.14}$$

Los bonos de descuento puro tienen una trayectoria de crecimiento análogo a un proceso de reinversión. Por ejemplo, si pasa un período y la tasa de interés no cambia, el precio del bono se convierte en

$$p' = (100)(1+r/n)^{-(nm-1)} \tag{1.15}$$

porque ahora restan (nm-1) períodos antes del vencimiento. Nótese que

$$p' = (1+r/n)p = p + (r/n)p \tag{1.16}$$

así que el incremento de valor es exactamente igual al interés n-período, $p(r/n)$. El interés no es recibido en efectivo, debido a que no hay pagos antes del vencimiento. Es entonces innecesario para el inversionista reinvertir los flujos de efectivo; los intereses son automáticamente reinvertidos a la tasa anual r y se incluyen como un incremento al precio del valor. Los certificados de depósito en bancos, son un ejemplo de bonos de cupón cero. El interés no es recibido en efectivo, se acumula como parte del incremento de valor de la inversión. Un bono descontado que tiene pagos de cupón periodicamente ($0<c<r$) es un bono sobre el cual parte del interés es reinvertido automáticamente y el resto no. Si el bono es comprado por p unidades monetarias, entonces el interés ganado el primer periodo es rp/n. El monto del ingreso de cupón es $100c/n$. Los intereses ganados exceden el ingreso de cupón recibido por un monto de $(rp-c100)/n)$. Este exceso en monto, usando la ecuación (1.12), puede ser expresado como:

$$
\begin{aligned}
[rp - c(100)]/n &= (rp/n) - (c/n)(100) \\
&= (r/n)[(r/n)(100)+(100)(1-c/r)(1+r/n)^{-nm}] - \\
&\quad (c/n)(100) \\
&= 100(c/n)+100[(r-c)/n](1+r/n)^{-nm} - 100(c/n) \\
&= 100[(r-c)/n)](1+r/n)^{-nm} > 0 \qquad (1.17)
\end{aligned}
$$

Esta porción de interés ganado pero no recibido en efectivo representa un incremento en el valor del bono y puede ser considerado como interés que es reinvertido automáticamente.

1.7.3 BONOS PREMIADOS.

Si $c > r$, el bono es un bono premiado. En este caso, como puede verse en la ecuación (1.13), $p-100 > 0$, el precio excede el valor nominal del título. Esta cantidad adicional pagada por el bono es llamada premio.

Los bonos premiados aseguran pagos de cupón que exceden los intereses ganados. El interés ganado en un n-período de año es rp/n, pero el ingreso de cupón recibido por el inversionista es $100c/n$. El ingreso de cupón excede el interés ganado. Esto puede verse fácilmente en la ecuación (1.17), para este caso, donde la expresión del lado derecho es claramente negativa dado que $c>r$. El flujo de efectivo excede el interés. Este exceso puede ser considerado como un pago parcial del monto inicial prestado así que el precio del bono se reduce. Este resultado es exactamente el opuesto al del caso de bonos descontados, es decir que para bonos premiados el ingreso de cupón recibido en exceso del interés ganado puede ser considerado como una desinversión automática.

1.8 VALUACION DE HIPOTECAS.

Las hipotecas son contratos de préstamo que son utilizados principalmente para financiar las compras de casas, comercios y otros tipos de propiedades. Normalmente las hipotecas tienen cadenas de ingreso constante. Esto implica que una parte de cada flujo de efectivo o pago es interés y otra porción podría ser una reducción del valor amortizado de la deuda. Normalmente las hipotecas requieren de pagos mensuales así que la tasa de interés mensual es r/12, donde r es la tasa de interés anual. Si F es el pago mensual el valor presente o precio de una hipoteca es:

$$P = F \sum_{t=1}^{12m} (1+r/12)^{-t} \tag{1.18}$$

donde m es el número de años al vencimiento. Aquí, la cadena de ingresos es (F,F,...,F,F) así que (1.18) simplemente descuenta cada uno de los flujos de efectivo por el factor de descuento.

La expresión

$$\sum_{t=1}^{12m} (1+r/12)^{-t}$$

es el valor de una anualidad que asegura $1.00 cada mes. Una anualidad similar fue evaluada en la sección 1.7 . Usando el resultado que se obtuvo en esa sección se sigue que el precio de una hipoteca puede ser expresado como:

$$P = F(12/r)[1-(1+r/12)^{-12m}] \tag{1.19}$$

CAPITULO 2.[2]

LOS VALORES DE RENTA FIJA EN EL SISTEMA FINANCIERO MEXICANO.

En este capitulo se presentará un esquema general de los principales valores de renta fija que se manejan en México; así mismo se hará una descripción de cada uno de esos valores y sus características más sobresalientes, las cuales intervienen en la evaluación y determinación de su precio. El precio, como se mostró en el capitulo 1, está en función del rendimiento, el cual a su vez está determinado por el nivel general de las tasas de interés en el sistema financiero. Por tanto, es impotante hacer notar que la magnitud de los éxitos que se obtengan dependeran de los aciertos en el pronóstico de los rendimientos.

2.1 LOS VALORES DE RENTA FIJA EN MEXICO.

En México existen actualmente tres categorias principales de instrumentos financieros de inversión de renta fija, los

2. Para mayor informacion sobre los temas que en este capitulo se presentan, consultar de la bibliografia que se lista al final de este trabajo las citas numero 2,3,4 y 5.

bursátiles a corto plazo, los bursátiles a largo plazo y los bancarios. No se hará mención de los valores de renta fija que se manejan fuera del sistema financiero (Bolsa Mexicana de Valores y Sociedades Nacionales de Crédito). A continuación se presenta un desglose de las tres categorías antes mencionadas, cabe mencionar que esos valores se encuentran en constante cambio, debido a lo dinámico del mercado en donde se manejan.

I. Bursátiles a corto plazo:

- Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES).
- Pagarés de la Tesorería de la Federación (PAGAFES).
- Aceptaciones Bancarias.
- Pagaré Empresarial.
- Pagaré Bursátil.
- Papel Comercial Bursátil.
- Bonos de la Tesorería de la Federación (TESOBONOS).

II. Bursátiles a largo plazo:

- Bonos de Indemnización Bancaria (BIB's).
- Bonos de desarrollo (BONDES).
- Bonos Bancarios de desarrollo.
- Bonos de renovación urbana (BORE's)
- Obligaciones
  * Quirografarias
  * Hipotecarias
  * Prendarias
  * Subordinadas convertibles.
- Certificados de participación inmobiliaria.
- Petrobonos.
- Bonos Ajustables del Gobierno Federal (AJUSTABONOS).

III. Bancarios:

- Depósitos retirables en días preestablecidos.
- Certificados de depósito bancario.
- Pagaré bancario.

2.2 INSTRUMENTOS BURSATILES A CORTO PLAZO.

En está sección se da una descripción general de cada uno de los instrumentos financieros bursátiles a corto plazo. Estos instrumentos por su característica se dice que son de mercado de dinero ya que la caracteristica principal de un mercado de dinero es el corto plazo y esto implica la liquidez del instrumento.

CERTIFICADOS DE LA TESORERIA DE LA FEDERACION (CETES). Los Cetes son instrumentos emitidos por el Gobierno Federal, a plazos establecidos de 28, 56, 91 y 182 dias. Estos instrumentos, además de ser vehiculo de financiamiento público, cumplen con una importante función de regulación monetaria. El valor nominal de cada Cete es de 10,000 pesos. Se negocian a tasa de descuento, otorgando su tasa de rendimiento equivalente. Son emitidos semanalmente por el Gobierno Federal a través del Banco de México, mediante el sitema de subasta, a la cual concurre la intermediación bursátil en su conjunto (bancos, casas de bolsa y aseguradoras). Con los Cetes se pueden efectuar diversas operaciones como son: al contado, 24 horas, valor mismo día y reportos.

Una de las ventajas de estos instrumentos, que ha sido vital para la gran aceptación que han tenido, es la liquidez, ya que en este sentido la liquidez ofrecida es casi inmediata. En cuanto al tratamiento fiscal de estos instrumentos, las personas físicas estan exentas del Impuesto Sobre la Renta, mientras que para las personas morales los rendimientos son acumulables a sus ingresos. La tenencia de estos títulos es reservada a personas mexicanas.

PAGARES DE LA TESORERIA DE LA FEDERACION (PAGAFES). Los Pagafes cumplen funciones similares a las de los Cetes, además de que fomentan el ahorro interno y brindan cobertura a sus tenedores ante contingencias cambiarias. Los Pagafes tienen un valor nominal de 1000 dolares americanos; sin embargo, la adquisición por parte de las inversionistas y la amortización por parte del Banco de México, se realiza en moneda nacional, considerando el tipo de cambio controlado para tal efecto. Los plazos de emisión son variables y similares a los que se presentan en Cetes.

Se negocian a tasa de descuento y otorgan una tasa de rendimiento a sus tenedores; el proceso de colocación primaria también se realiza mediante el sistema de subastas en el Banco de México. La liquidez y cobertura ante eventualidades cambiarias son dos ventajas que han fortalecido la aceptación entre el público inversionista. Por lo que toca al régimen fiscal y a la tenencia de Pagafes, las normas en función son las mismas que rigen a los Cetes.

PAPEL COMERCIAL. El papel comercial es un instrumento de financiamiento de empresas, documentado mediante un pagaré con vencimiento fijo. Actualmente existen diferentes tipos de Papel Comercial, pero en esencia otorgan los mismos beneficios: Papel Comercial Bursátil, Papel Comercial Quirografario, Papel Comercial avalado por una Sociedad Nacional de Crédito, y Extrabusátil.

El Papel Comercial Bursátil es emitido exclusivamente por empresas que tienen cotizadas sus acciones en Bolsa.

El Papel Comercial Quirografario es emitido por empresas inscritas en la sección de valores del Registro Nacional de Valores e intermediarios de la Comisión Nacional de Valores.

El Papel Comercial avalado por una S.N.C. es, como su nombre lo indica el avalado por una de esas instituciones.

El Papel Comercial Extrabursátil es un pagaré emitido por una empresa que puede o no tener cotización en el mercado accionario de la Bolsa. Hasta finales de 1984 este mercado existía en forma no regulada tanto entre empresas, que prestaban fondos (documentados por pagarés) directamente entre sí, como con la intermediación de una casa de bolsa que actuaba como contacto entre prestamista y prestatario. A principios de 1985 la Comisión Nacional de Valores emitió una circular reconociendo este mercado y solicitando a las casas de bolsa que le informaran de las operaciones con este instrumento.

El Papel Comercial en cualquiera de sus modalidades constituye una fuente de recursos para empresas con escasez de efectivo que necesitan financiar su capital de trabajo y operaciones diarias. El valor nominal de cada título es 100,000 pesos, no se encuentra garantizado por activos especificos, sino únicamente por el prestigio y el buen nombre de la empresa. Los plazos de emisión varían de acuerdo a las necesidades de financiamiento a corto plazo de las empresas y a las condiciones del mercado. El plazo mínimo autorizado es de 15 días y el máximo es de 91 días. Las tasas de descuento y de rendimiento se determinan libremente, aunque son mayores que las tasa del Cete, al constituir el Papel Comercial un instrumento de mayor riesgo.

El régimen fiscal para personas físicas es la retención del 21% sobre los primeros doce puntos, es decir el 2.52%, en tanto que para las personas morales el rendimiento obtenido es acumulable a sus ingresos.

ACEPTACIONES BANCARIAS. Las Aceptaciones Bancarias son letras de cambio emitidas por empresas con cargo a un banco que acepta la abligación de pagar.

Estos intrumentos están garantizados por el banco aceptante quien es el que contrae el compromiso de pagar, el valor nominal de cada título es de 100,000 pesos, los plazos de emisión son variables, de acuerdo con las necesidades del emisor, el plazo mínimo autorizado es de 15 días y el máximo de 91 días.

Este intrumento tiene por objetivo proporcionar financiamiento a empresas con necesidades de recursos a corto plazo, que por ser de menor calidad o por no estar registradas en bolsa no pueden emitir deuda directamente.

El rendimiento que ofrezcan las Aceptaciones Bancarias dependerá de la tasa de interés del mercado, aunque, al estar garantizadas por el banco aceptante, generalmente darán un rendimiento menor que el Papel Comercial.

El regimen fiscal de las Aceptaciones Bancarias es el mismo que para Papel Comercial.

PAGARE EMPRESARIAL. El pagaré empresarial bursátil se emitió por primera vez en 1986. Su aparición se debió al enorme auge del papel comercial extrabursátil, y representó un intento de formalizar este mercado.

Al igual que el papel comercial extrabursátil, este instrumento se emite por una empresa que puede o no tener una cotización en Bolsa. Sin embargo, el pagaré empresarial tiene dos diferencias importantes del extrabusátil. La primera es que se encuentra garantizado por Cetes, aceptaciones o petrobonos, en un monto que debe alcanzar un mínimo de 115% del valor nominal de los pagarés emitidos. La segunda es que el pagaré se inscribe en la Bolsa Mexicana de Valores, y, por lo tanto, se opera en Bolsa.

Por su mayor garantía, las tasas de rendimiento del pagaré empresarial se encuentran a un nivel abajo de las del papel comercial bursátil y extrabursátil, pero arriba de las aceptaciones bancarias.

PAGARE BURSATIL. Los pagarés bursatiles son títulos bancarios expedidos por instituciones de crédito a nombre del inversionista, quien desde el momento mismo de la contratación, conoce la tasa de rendimiento y el importe total de los intereses que devengará su inversión al vencimiento.

Los plazos de emisión son 1, 3, 6, 9 y 12 meses, el valor nominal de cada título es de 100,000 pesos, el régimen fiscal es el mismo que para el Papel Comercial y las Aceptaciones Bancarias, el rendimiento de los pagarés es fácilmente comparable con los que ofrecen otros instrumentos de inversión, Cetes, Papel Comercial y Aceptaciones Bancarias.

BONOS DE LA TESORERIA DE LA FEDERACION (TESOBONOS) : Los Tesobonos son títulos de crédito denominados en moneda extranjera, en los cuales se consigna la obligación del Gobierno Federal de pagar, en una fecha determinada, una suma en moneda nacional, equivalente al valor de dicha moneda extranjera, calculada al tipo de cambio libre. El objetivo de estos titulos es el de ampliar la gama de instrumentos a disposición de los inversionistas, fomentando así el ahorro interno y atender de mejor manera los requerimientos financieros del gasto público. La primera emisión se efectuo el dia 6 de Julio de 1989. Este instrumento ofrece gran liquidez.

Estos titulos tienen un valor nominal de 1000 dolares de los Estados Unidos de América y sus múltiplos. Los primeros titulos tuvierón una vigencia de seis meses, pero cada emisión tendrá sus propios vencimientos. Los titulos de plazo de 6 meses o menores serán colocados a tasa de descuento y no devengaran intereses.

2.3 INSTRUMENTOS BURSATILES A LARGO PLAZO.

Está sección describe los instrumentos financieros de largo plazo, una caracteristica importante de varios de estos instrumentos es el de tener una tasa de rendimiento flotante, es decir que se van ajustando periodicamente, esto es debido a que las tasas de interés en periodos largos de tiempo tienden a variar ampliamente, y estos ajustes en las tasas tienen por objetivo proteger a los inversionistas.

BONOS DE INDEMNIZACION BANCARIA (BIB'S). Los bónos de indemnización bancaria son instrumentos que se emitierón en 1983 para indemnizar a los accionistas de los bancos que se nacionalizaron el primero de Septiembre de 1982. El mecanismo de su emisión consistió en que se calculó, para cada banco el día de la nacionalización. La tasa de interés del BIB se fija trimestralmente según el promedio de la tasa de interés del depósito a tres meses durante las cuatro semanas anteriores a la fecha del pago de interés. Esta forma de fijar su tasa de interés implica que el BIB ofrece un rendimiento que fluctúa según el nivel de la tasa que se fije y el precio al que se encuentra el instrumento en el mercado.

BONOS DE DESARROLLO (BONDES). Los Bondes son instrumentos emitidos por el Gobierno Federal, como una estrategia que coadyuve a una planeación financiera de financiamiento a largo plazo. El valor nominal de los Bondes es de 100,000 pesos. La emisión de estos instrumentos se realiza por medio de subasta, en donde el precio de compra se subasta por abajo del valor nominal o valor de amortización. Estos instrumentos están diseñados para devengar intereses mensualmente con base en la tasa primaria de rendimiento de Cetes a 28 días. Los plazos a los cuales se han realizado emisiones son 364, 532 y 728 días. El régimen fiscal y la teneduría de los títulos es iqual que para los Cetes.

BONOS BANCARIOS DE DESARROLLO. Los bonos bancarios de desarrollo se emitierón por primera vez en 1985. Son instrumentos de renta fija emitidos por las instituciones de banca de desarrollo (como Banpesca) autorizadas por las autoridades hacendarias. Los bonos tienen un plazo minimo de tres años, el cual tiene que comprender por lo menos un año de gracia, con amortizaciones mediante pagos semestrales, una vez cumplido el periodo de gracia. El valor nominal de cada instrumento es de 10,000 y el monto que puede emitir cada banco está sujeto a la aprobación de las autoridades hacendarias.

BONOS DE RENOVACION URBANA (BORES). Los Bores se emitierón en 1986, en un monto de 25 mil millones de pesos. para indemnizar a los propietarios de los inmuebles del centro de la ciudad de México que se expropiarón en octubre de 1985 como consecuencia de los terremotos del mes de Septiembre del mismo año. Los Bores por ser intrumentos de indemnización tienen las mismas caracteristicas que los Bibs.

OBLIGACIONES CORPORATIVAS. Las obligaciones corporativas son instrumentos de crédito a largo plazo emitidos por empresas cotizadas en Bolsa. Antes de 1977 la empresa que emitió la mayoría de las obligaciones fue Teléfonos de México que emitio en forma periodica obligaciones hipotecarias (estas son obligaciones garantizadas con bienes inmuebles de la misma empresa). En 1977 se autorizó una nueva modalidad de obligación: la obligación quirografaria, denominada así porque no tiene garantía alguna salvo la firma de los signatarios autorizados de la empresa. Existen obligaciones prendarias las cuales estan garantizadas por diversos bienes, como lo son muebles, maquinaria, vehiculos, equipo, materia prima, etc.. El 6 de Febrero de 1987 se emitierón por primera vez las obligaciones subordinadas convertibles conjuntamente con los Certificados de Aportación Patrimonial (CAPS). Estas obligaciones, emitidas por sociedades de crédito, pagan intereses en una forma similar que las otras obligaciones, a una prima arriba de las tasas bancarias y de las de mercado de dinero, si se conserva la obligación hasta el vencimiento se recibe el valor nominal. Estas obligaciones dan al tenedor la opción de convertirlas (de ahí el adjetivo "convertibles") a CAP's, en fechas determinadas, según fórmula que relaciona el precio de conversión con el precio de mercado del CAP.

CERTIFICADOS DE PARTICIPACION INMOBILIARIA. Los certificados de participación inmobiliarios se emitieron por primera vez en 1987. Ofrecen al emisor la posibilidad de financiar proyectos de construcción y al inversionista, la oportunidad de invertir en un instrumento cuyo rendimiento y valor de amortización está ligado con la tasa de inflación.

Para la colocación de los certificados, se crea un fideicomiso para el bien inmueble objeto de la emisión, siendo el fideicomitente la empresa financiada por la emisión. Por lo tanto, el emisor aparente (ver tabla 2-1) es el fideicomisario (Sociedad Nacional de Crédito). Se pagan los intereses en forma trimestral, pero con base en una tasa calculada en forma mensual.

PETROBONOS. Los petrobonos son títulos emitidos por Nacional Financiera como sociedad fiduciaria, mediante el fideicomiso irrevocable constituido entre el Gobierno Federal de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público y Nafinsa. Estos valores representan un derecho derivado de un contrato de compra venta de petróleo crudo con Petróleos Mexicanos.

El primer petrobono hizo su aparición en 1977, primer año del sexenio de José López Portillo. Las características del primer petrobono fueron esencialmente similares a las emisiones vigentes: dando una cantidad fija de barriles de petróleo como respaldo de cada bono, un plazo de tres años , un rendimiento mínimo garantizado pagable trimestralmente y un valor de amortización del petróleo basado en el precio de exportación (denóminado en dólares) del petróleo mexicano (calidad Istmo) en la fecha de amortización, convertido al tipo de cambio peso/dólar vigente en la fecha de amortización.

BONOS AJUSTABLES DEL GOBIERNO FEDERAL (AJUSTABONOS) : Los ajustabonos son títulos de crédito a largo plazo, denominados en moneda nacional, en los cuales se consigna la obligación directa e incondicional del Gobierno Federal de pagar una suma determinada de dinero.

Estos Bonos proporcionan a los inversionistas cobertura contra el riesgo de erosión del valor real de sus ahorros, facilita a las aseguradoras del país la posibilidad de ofrecer seguros o pensiones cuyo valor real no se deteriore con el transcurso del tiempo, propicia el desarrollo de fondos de pensiones y jubilaciones que conserven su valor real en favor de sus beneficiarios.

Tienen un valor nominal de $100,000.00, el cual es ajustado en cada período de interés en la medida en que aumente o disminuya el nivel del "Indice Nacional de Precios al Consumidor" que publica el Banco de México en el Diario Oficial de la Federación. Los rendimientos de estos Bonos estan en función del valor de adquisición y a la tasa de interés que devengen. Los primeros bonos tienen un plazo de 3 años, y cada emisión tendrá su propio plazo.

2.4 INSTRUMENTOS BANCARIOS.

En esta sección se decriben de manera general a los valores de renta fija que se manejan principalmente en el sistema bancario nacional.

Actualmente existen tres tipos de instruentos bancarios: depósitos retirables en días preestablecidos, inversiones a plazo fijo y pagarés con rendimiento liquidables al vencimiento.

DEPOSITOS RETIRABLES EN DIAS PREESTABLECIDOS. Estos instrumentos presentan la conveniencia de ofrecer a sus clientes liquidez en sus ahorros.

PAGARES CON RENDIMIENTO LIQUIDABLES AL VENCIMIENTO. Estos instrumentos, como su nombre lo indica, sólo pagan intereses al vencimiento. Su rendimiento se basa en la tasa de las inversiones a plazo fijo, reinvertida a la misma tasa. Estos instrumentos representan la única opción que existe actualmente en México de fijar una tasa de rendimiento a largo plazo.

INVERSIONES A PLAZO FIJO. Las inversiones a plazo fijo (también llamadas CD's Bancarios) pagan intereses mensuales. Las tasas de interés que pagan (en forma mensual) son normalmente congruentes con las de los pagarés.

2.5 CARACTERISTICAS PRINCIPALES DE LOS VALORES DE RENTA FIJA

En esta sección se describen las características principales que un inversionista considera en la evaluación de un valor de renta fija, y las cuales intervienen en la determinación de su precio. En la tabla 2-1 se da, una breve descripción de las características principales de cada uno de los valores de renta fija que se manejan actualmente en el Sistema Financiero Mexicano.

Las inversiones en valores de renta fija se basan en los siguientes aspectos:

(1) **EL EMISOR** (prestatario o deudor).

Hay sólo dos clases de emisores en instrumentos de renta fija: el gobierno y las empresas privadas. El gobierno pide prestado directamente (en el caso de Cetes, Bondes, Bibs, y Bores) o a través del sistema bancario (por medio de depósitos bancarios, pagarés bancarios, aceptaciones bancarias, bonos bancarios u obligaciones convertibles). Una empresa privada pide prestado por medio de obligaciones corporativas, papel comercial o pagarés empresariales.

(2) **LA GARANTIA.**

En los casos en que el gobierno es el emisor no hay garantía especifica de la inversión. Cuando la empresa privada es el emisor, puede haber garantía (pagaré empresarial, obligaciones hipotecarias y prendarias) o no (papel comercial, obligaciones quirografarias).

(3) **EL MONTO.**

En el caso de deuda contraída por el gobierno, no hay límite para las emisiones de Cetes ni de depósitos bancarios. Las aceptaciones bancarias tienen límites relacionados con el monto de capital y reservas del banco emisor. En el caso de empresas privadas hay un límite (que se incrementa según el ritmo de inflación).

(4) **EL VALOR NOMINAL.**

En el caso de intrumentos bursátiles, el monto total de la emisión se subdivide en instrumentos de menor valor, para facilitar su negociabilidad en Bolsa. El valor nominal de los diferentes instrumentos va desde 100 pesos (en el caso de los Bibs) a 1000 dolares (en el caso de los pagafes). En los instrumentos bancarios como no hay emisión especifica, no hay valor nominal.

(5) **LA TASA DE RENDIMIENTO.**

La tasa de rendimiento de las instrumentos que se manejan en el mercado de dinero se obtiene a partir de la tasa de descuento con que son vendidos. En los instrumentos bancarios y bursátiles a largo plazo se expresan como una tasa de interés.

(6) **LOS PAGOS.**

Los pagos de los rendimientos se hacen al vencimiento en el caso de los intrumentos de mercado de dinero, y periodicamente en el caso de los otros instrumentos.

(7) **EL PLAZO.**

Los plazos de los instrumentos financieros pueden variar desde un día a 20 años.

(8) **LA AMORTIZACION.**

La amortización se puede efectuar al vencimiento (en el caso de mercado de dinero) o periódicamente.

INTRUMENTO	EMISORA	GARANTIA ESPECIFICA	MONTO	VALOR NOMINAL	RENDIMIENTO	PAGOS	PLAZO	AMORTIZACION	TIPO DE VALOR
CETE	Gobierno	Ninguna	Ilimitado	$10,000.00	Tasa de descuento	Venta o vencimiento	28, 91 y 182 días	Vencimiento	Bursátil corto plazo
ACEPTACION BANCARIA	S.N.C. (Banco)	Ninguna	Proporción captal/rsrvas	$100,000.00	Tasa de descuento	Venta o vencimiento	Hasta 183 días	Vencimiento	Bursátil corto plazo
PAPEL COMERCIAL	Empresa cotizada en BMV.	Ninguna	$15,000 millones	$100,000.00	Tasa de descuento	Venta o vencimiento	Hasta 91 días	Vencimineto	Bursátil corto plazo
PAGARE EMPRESARIAL	Empresa Mexicana	Si	sin límite especifico	$100,000.00	Tasa de descuento	Venta o vencimiento	Hasta 91 días	Vencimiento	Bursátil corto plazo
BONDES	Gobierno	Ninguna	Ilimitado	$100,000.00	Interés según CD, pagare y Cete.	Cada 28 días	Mínimo 364 días	Vencimiento	Bursátil largo plazo
BIB's	Gobierno	Ninguna	Monto de la indemnización.	$100.00	Interés según CD a 3 meses.	Trimestral	10 años	14% de 1986 a 1991 y 16% en 1992.	Bursátil largo plazo
BONOS DE RENOVACION URBANA	Gobierno	Ninguna	$25,000 millones	$100.00	Interés según CD a 3 meses.	Trimestral	10 años	14% de 1989 a 1994 y 16% en 1995.	Bursátil largo plazo
BONOS BANCARIOS DE DESARROLLO	Banco de desarrollo	Ninguna	Sin límite especifico	$10,000.00	Interés según pagare y Cete.	Trimestral	Mínimo 3 años	Despues de un año.	Bursátil largo plazo
OBLIGACION CORPORATIVA	Empresa privada	Bienes muebles o inmuebles.	Variable (según tasa d inflación)	Variable	Interés según CD, pagare, Cete y aceptaciones	Mensual, trimestral y semanal.	Hasta 20 años.	Empieza antes del vencimiento	Bursátil largo plazo
OBLIGACION CONVERTIBLE	S.N.C. (Banco)	Ninguna	Variable	Variable	Interés según CD, pagare, Cete y aceptaciones	Mensual, trimestral y semanal.	Variable	Por conversion o antes del vencimiento	Bursátil largo plazo
CERTIFICADO D APORTACION INMOBILIARIO	S.N.C.	Bien inmueble	Variable	Variable	Variable Mínimo del 24%	Trimestral	3 años	80% al vencimiento	Bursátil largo plazo
DEPOSITOS RETIRABLES	S.N.C.	Ninguna	No hay	No hay	Interés fijo al inicio del contrato.	Diario	Variable	Vencimiento	Bancario
CD's BANCARIO	S.N.C.	Ninguna	No hay	No hay	Interés fijo al inicio del contrato.	Mensual	Hasta 725 días	Vencimiento	Bancario
PAGARE	S.N.C.	Ninguna	No hay	No hay	Interés fijo al inicio del contrato.	1,3,6,9 y 12 meses.	Hasta 12 meses	Vencimiento	Bancario
TESOBONOS	Gobierno	Ninguna	Ilimitado	1000 U.S.	Tasa de descuento	Vencimiento	6 meses y cada emisión tendra su plazo	Venta o Vencimiento	Bursátil corto plazo
AJUSTABONOS	Gobierno	Ninguna	Ilimitado	$100,000.00	Tasa de int. y valor ajustado	Vencimiento	3 años y puede variar c/emision	Venta o Vencimiento	Bursátil largo plazo

TABLA 2-1.- EN ESTA TABLA SE MUESTRAN LAS CARACTERISTICAS PRINCIPALES DE LOS VALORES DE RENTA FIJA QUE SE MANEJAN EN EL SISTEMA FINANCIERO MEXICANO.

En los cuadros de 2-1 a 2-4 se presentan, como ejemplo, las caracteristicas con las que se conocen en el mercado a cuatro valores especificos, los Pagafes, los Bores, los petrobonos y las obligaciones quirografarias de una empresa privada (CIOATAM88). Y en la tabla 2-1 se da un resumen de las caracteristicas principales de los valores de renta fija del Sistema Financiero Mexicano, que fueron descritos en las secciones previas.

CLAVE EN PIZARRA	: **BORES *85**
TIPO DE VALOR	: **I**
VALOR NOMINAL	: **$ 100.00**
MONTO	: **$ 25 000 000 000.00**
PLAZO	: SU VIGENCIA SERA DE 10 AÑOS INCLUIDOS TRES DE GRACIA, A PARTIR DEL 12 DE OCTUBRE DE 1985, POR ANUALIDADES VENCIDAS EN SIETE PAGOS.
AMORTIZACION	: SE EFECTUARA DESPUES DE LOS TRES AGNOS DE GRACIA, POR ANUALIDADES VENCIDAS EN SIETE PAGOS, DE TAL FORMA QUE CADA UNA DE LAS SEIS PRIMERAS AMORTIZACIONES SEA DEL 14% DEL VALOR NOMINAL Y LA SEPTIMA POR EL 16% RESTANTE.
TASA DE INTERES	: LA TASA DE INTERES QUE PAGARAN LOS BORES *85, SERA EL PROMEDIO DE LAS TASAS PARA DEPOSITOS BANCARIOS A 90 DIAS, VIGENTES EN LAS CUATRO SEMANAS ANTERIORES AL TRIMESTRE A REGIR.
PAGO DE INTERESES	: LOS INTERESES DEBERAN PAGARSE LOS DIAS 12 DE LOS MESES DE ENERO, ABRIL JULIO Y OCTUBRE DE CADA AÑO. EL PRIMER PAGO SE EFECTUARA EL DIA 12 DE ABRIL DE 1986, COMPRENDIENDO LOS INTERESES DEVENGADOS DURANTE EL PERIODO SEMESTRAL QUE ABARCA DEL 12 DE OCTUBRE DE 1985 AL 11 DE ABRIL DE 1986.
CALCULO	: LOS INTERESES SE DEBERAN CALCULAR DIVIDIENDO LA TASA DE INTERES EXPRESADA EN DECIMALES, PARA EL TRIMESTRE ENTRE 360 Y MULTIPLICANDO EL RESULTADO POR LOS DIAS TRANSCURRIDOS.
EMISION	: LA EMISION SE DOCUMENTARA MEDIANTE UN TITULO MULTIPLE QUE LA TESORERIA DEL DEPARTAMENTO DEL DISTRITO FEDERAL DEPOSITARA EN EL INSTITUTO PARA EL DEPOSITO DE VALORES, AMPARANDO LA EMISION TOTAL DE LOS BONOS DE RENOVACION URBANA DEL DISTRITO FEDERAL.

CUADRO 2-1. EN ESTE CUADRO SE MUESTRAN LAS CARACTERISTICAS DE LOS BORE'S EN LA FORMA COMO SE CONOCEN EN EL MERCADO.

EMISOR	:	BANCO DE MEXICO.
DENOMINACION DEL INSTRUMENTO	:	PAGARE DE LA TESORERIA DE LA FEDERACION.
CLAVE EN PIZARRA	:	PAGAFE 00186 1 MES 10186 3 MESES 20186 +6 MESES
TIPO DE VALOR	:	N
VALOR NOMINAL	:	1,000 DLRS. (MIL DOLARES AMERICANOS SUS MULTIPLOS).
EMISION	:	LAS CARACTERISTICAS DE LAS DIVERSAS EMISIONES SERAN DETERMINADAS POR LA SECRETARIA DE HACIENDA Y CREDITO PUBLICO OYENDO PREVIAMENTE LA OPINION DEL BANCO DE MEXICO.
PLAZO	:	CADA EMISION TEDRA SU PROPIO PLAZO, HABIENDOSE PREVISTO QUE LAS PRIMERAS SEAN A PLAZO DE SEIS MESES Y MAXIMO UN ANO.
COTIZACION	:	LAS EMISIONES A SEIS MESES O MENOS SERAN COTIZADAS EN TERMINOS DE TASA DE DESCUENTO REFERIDA A SU VALOR NOMINAL EN DOLARES (U.S.). LAS EMISIONES MAYORES A SEIS MESES QUE DEVENGEN INTERESES SE COTIZARAN EN TERMINOS DE DOLARES(U.S) SIN EMBARGO TODAS LAS LIQUIDACIONES Y PAGOS SE EFECTUARAN EN MONEDA NACIONAL.
RENDIMIENTOS	:	LOS TITULOS A SEIS MESES O MENOS NO DEVENGARAN INTERESES Y SERAN COLOCADOS A DESCUENTO, AQUELLOS QUE SEAN APLAZO MAYOR PODRAN DEVENGAR UN INTERES FIJO PAGADERO POR PERIODOS VENCIDOS.
LUGAR DE PAGO	:	ESTOS TITULOS SERAN PAGADEROS EN LA REPUBLICA MEXICANA EN UNA SOLA EXHIBICION A SU VENCIMIENTO SIENDO EL BANCO DE MEXICO QUIEN ACTUARA COMO AGENTE EXCLUSIVO DEL GOBIERNO FEDERAL PARA LA REDENCION DE LOS TITULOS Y, EN SU CASO, PARA EL PAGO DE LOS INTERESES QUE DEVENGEN.
AMORTIZACION	:	SE EFECTUARA EN UNA SOLA EXHIBICION AL VENCIMIENTO DE LA EMISION VIA BANCO DE MEXICO.
POSIBLES ADQUIRIENTES	:	LOS PAGAFES PODRAN SER ADQUIRIDOS POR PERSONAR FISICAS O MORALES RESIDENTES EN MEXICO, EXCEPTUANDO A AQUELLAS QUE POR SU REGIMEN JURIDICO SE LO IMPIDAN.
REGIMEN FISCAL	:	LOS INTERESES, LOS INGRESOS DERIVADOS DE LA ENAJENACION, ASI COMO LAS GANANCIAS CAMBIARIAS, INCLUYENDO LA CORRESPONDIENTE AL PRINCIPAL QUE OBTENGAN LAS PERSONAS FISICAS TENEDORAS DE LOS MISMOS, ESTARAN EXENTOS DEL IMPUESTO SOBRE LA RENTA.

CUADRO 2-2. EN ESTE CUADRO SE MUESTRAN LAS CARACTERISTICAS DEL PAGAFE, EN LA FORMA COMO SE CONOCE EN EL MERCADO.

CLAVE EN PIZARRA	: PETROBO *88.
TIPO DE INSTRUMENTO	: CERTIFICADO DE APORTACION.
VALOR NOMINAL	: $10,000.00
FECHA DE EMISION	: 25 DE ABRIL DE 1988.
MONTO DE LA EMISION	: $800 000 000 000.00
PLAZO	: 3 AÑOS A PARTIR DE LA FECHA DE EMISION.
AMORTIZACION	: AL VENCIMIENTO (25 DE ABRIL 1991).
PAGO DE INTERESES	: SE EFECTUARAN EN FORMA MENSUAL.
RENDIMIENTO	: 2% ARRIBA DE LA TASA LIBOR EN DOLARES AMERICANOS A SEIS MESES.
GARANTIA PLAZO	: BARRILES DE PETROLEO QUE AMPARA LA EMISION ES DE 26 892. EL CONTENIDO DE PETROLEO POR CERTIFICADO 0.2923. EL PRECIO DE GARANTIA ES DE 15 DOLARES POR BARRIL.

CUADRO 2-3. EN ESTE CUADRO SE MUESTRAN LAS CARACTERISTICAS DEL PETROBONO EN LA FORMA COMO SE CONOCE EN EL MERCADO.

CLAVE EN PIZARRA	: CIGATAM *88.
TIPO DE INSTRUMENTO	: Q
VALOR NOMINAL	: $100,000.00
FECHA DE EMISION	: 13 DE OCTUBRE DE 1988.
MONTO DE LA EMISION	: $12 000 000 000.00
PLAZO	: 5 AÑOS A PARTIR DE LA FECHA DE EMISION.
AMORTIZACION	: AL VENCIMIENTO (13 DE OCTUBRE 93).
PAGO DE INTERESES	: SE EFECTUARAN EN FORMA TRIMESTRAL. A PARTIR DE LA FECHA DE EMISION.
INTERESES	: MENSUALMENTE SE FIJARA UNA TASA BASE , LA CUAL SERA ELEGIDA DE LA QUE RESULTE MAS ALTA ENTRE; (1) TASA DE RENDIMIENTO DE DEPOSITOS DE 30 A 365 DIAS. (2) TASA DE RENDIMIENTO DE CETES DE 90, 91 O 92 DIAS. (3) TASA DE RENDIMIENTO DE CETES 27, 28 O 29 DIAS CAPITALIZADA A 91 DIAS. (4) TASA DE RENDIMIENTO DE ACEPTACIONES BANCARIAS. A LA TASA ANTERIOR SE LE SUMARA LA SOBRETASA, LA CUAL SERA DEL 15% DE LA TASA BASE , Y ASI SE OBTENDRA LA TASA DEFINITIVA.

CUADRO 2-4. EN ESTE CUADRO SE MUESTRAN LAS CARACTERISTICAS DE LAS OBLIGACIONES DE CIGATAM *88 EN LA FORMA COMO SON CONOCIDAS EN EL MERCADO.

CAPITULO 3.[a]

E L   A N A L I S I S   D E   D U R A C I O N.

El precio de un valor de renta fija es una función no-lineal inversa del rendimiento al vencimiento. El impacto de un cambio en el rendimiento al vencimiento sobre el precio depende de:

(1) El nivel del rendimiento al vencimiento
(2) La tasa de cupón, y
(3) El vencimiento del valor.

El como esas características afectan un cambio correspondiente en el precio no es muy claro, por la no-linealidad en las relaciones. Los inversionistas en valores de renta fija están interesados en conocer como cambiaría el valor de sus inversiones para diferentes cambios en el rendimiento al vencimiento que pudieran darse en el futuro. Por ejemplo, supóngase que un inversionista se encuentra evaluando un bono a la par a 15 años contra un bono a la par a 5 años con rendimiento al vencimiento de 10%. Supóngase que el inversionista cree que el rendimiento al vencimiento será de 8% en un año. Para inversiones iguales en

a. Para mayor información sobre los temas que en este capítulo se presentan, consultar de la bibliografía que se lista al final de este trabajo las citas 1,6 y 9.

esos bonos, quiere saber que bono alcanzará mayor valor. En concreto, el inversionista esta interesado en esas características de los valores que pueden afectar el valor futuro de la inversión. Sólo entonces puede seleccionar acertadamente inversiones apropiadas.

Las próximas tres secciones muestran con ejemplos como cada uno de los tres factores (el rendimiento al vencimiento, la tasa de cupón, y el vencimiento) afectan cambios porcentuales en precio para cambios dados en el rendimiento al vencimiento. Una sección posterior muestra que existe un índice definido como **DURACION** del valor el cual puede ser usado en la creación de una sóla regla para calcular esos cambios en porcentaje de precios sin considerar las características del valor.

3.1 LOS CAMBIOS EN EL PRECIO POR CAMBIOS EN EL RENDIMIENTO AL VENCIMIENTO DE UN VALOR A DIFERENTES NIVELES DE RENDIMIENTO AL VENCIMIENTO.

Para mostrar la relación no-lineal entre rendimiento al vencimiento y precio, la Tabla 3-1 muestra el precio de un bono con vencimiento a 15 años y tasa de cupón de 10% para varios rendimientos al vencimiento. Todos los precios en la tabla han sido calculados para bonos que tienen pagos de cupón semestrales. Los cambios en rendimiento al vencimiento son de 0.25%, desde 8% a 12%. Los precios correspondientes cambian de $86.24 (con 12%) a $117.29 (al 8%). La tercer columna de la tabla indica los cambios correspondientes en precio para cada decremento de 0.25% en el rendimiento al vencimiento. La relación tiene dos características principales. Primero, el precio del bono y el rendimiento al

RENDIMIENTO AL VENCIMIENTO	PRECIO	CAMBIO EN PRECIO	PORCENTAJE DE INCREMENTO EN EL PRECIO
8.00 %	$ 117.29	—	—
8.25	114.90	$ 2.39	2.08 %
8.50	112.58	2.32	2.06
8.75	110.33	2.25	2.04
9.00	108.14	2.19	2.02
9.25	106.02	2.12	2.00
9.50	103.96	2.06	1.99
9.75	101.95	2.01	1.97
10.00	100.00	1.95	1.95
10.25	98.11	1.89	1.93
10.50	96.26	1.85	1.91
10.75	94.47	1.79	1.89
11.00	92.73	1.74	1.88
11.25	91.04	1.69	1.86
11.50	89.39	1.65	1.84
11.75	87.79	1.60	1.82
12.00	86.24	1.55	1.81

TABLA 3-1. PRECIOS, CAMBIOS EN PRECIO Y PORCENTAJE DE CAMBIO DEL PRECIO DE UN BONO CON CUPON DEL 10% Y VENCIMIENTO DE 15 AÑOS, PARA VARIOS CAMBIOS EN RENDIMIENTO.

vencimiento estan inversamente relacionados. Segundo, el cambio en precio es mayor a niveles bajos de rendimiento. Una gráfica de esta relación en la Figura 3-1 describe muy bien esas dos características principales. La pendiente de la curva es decreciente describiendo la relación inversa y se incrementa con el rendimiento indicando cambios mayores en precio cuando los rendimientos son bajos. En la tabla 3-1 se observa que si el rendimiento al vencimiento es de 8.25% y decrece a 8%, el precio se incrementa de $114.90 a 117.29; esto constituye un incremento en el precio de 2.08%. Por otro, lado si el rendimiento al vencimiento es de 11% y decrece a 10.75%, el precio se incrementa de $92.73 a 94.47; esto es un 1.88% de incremento en el precio. Claramente se tienen incrementos menores en porcentaje del precio, para un mismo nivel de decremento en rendimiento al vencimiento, cuando se tienen altos rendimientos al vencimiento. Esta misma tabla muestra los incrementos en porcentaje del precio como una función del rendimiento al vencimiento inicial. Aquí, es muy claro que dado un decremento en rendimiento implica un cambio alto en porcentaje del precio cuando el rendimiento al vencimiento inicial es bajo.

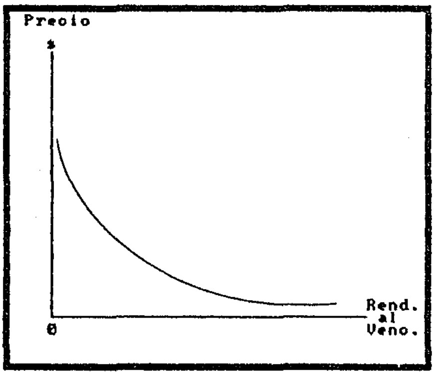

FIGURA 3-1. GRAFICA DE LA RELACION PRECIO VS. REND. AL VENC.

Esta es una relación básica y muy general que se cumple para todos los valores de renta fija. La regla puede ser establecida de la siguiente manera:

DADA UNA CADENA DE INGRESOS FIJA, EL CAMBIO EN PORCENTAJE DE SU VALOR PARA UN CAMBIO DADO EN EL RENDIMIENTO AL VENCIMIENTO ES MAYOR CUANDO EL RENDIMIENTO AL VENCIMIENTO ANTES DEL CAMBIO ES PEQUEÑO.

Para comprender esta regla, es importante hacer notar que los flujos de efectivo asegurados por el valor deben ser fijos. Hay sólo dos cambios en la valuación del valor: cambios en el rendimiento al vencimiento y cambios en los precios. La regla permite al inversionista concluir que los cambios dados en el rendimiento al vencimiento tienen altos porcentajes de impacto en el precio a niveles bajos de rendimiento al vencimiento. Cuando las tasas de interés son altas, dado un incremento en el rendimiento al vencimiento, este tendrá un impacto menor en los cambios en porcentaje del precio que cuando las tasas de interés son bajas.

3.2 LOS CAMBIOS EN PRECIO POR CAMBIOS EN EL RENDIMIENTO AL VENCIMIENTO A DIFERENTES NIVELES DE TASA DE CUPON.

Los precios de los bonos que tienen diferentes tasas de cupón, pero rendimientos al vencimiento idénticos así como sus fechas de vencimiento, responden de manera diferente a un cambio dado en el rendimiento al vencimiento. Para mostrar esto, considerense bonos que tienen un vencimiento de 15 años. La tabla 3-2 muestra los precios correspondientes de un conjunto de bonos con tasas de cupón que van de 0% a 15%. El precio de cada bono se calcula para rendimientos al vencimiento de 10% y de 8%. Conforme el rendimiento decrece, el precio de cada bono se incrementa. La última columna en la tabla muestra el porcentaje de incremento. El porcentaje de incremento en el precio, decrece conforme la tasa de cupón crece. Esta regla puede ser establecida como sigue:

DADA UNA CADENA DE INGRESOS FIJA CON UN VENCIMIENTO Y UN RENDIMIENTO AL VENCIMIENTO EL PORCENTAJE DE CAMBIO EN SU VALOR ES MENOR A UNA TASA DE CUPON ALTA PARA CUALQUIER CAMBIO DADO EN EL RENDIMIENTO AL VENCIMIENTO.

Para las hipotecas la tasa de cupón corresponde a la tasa de interés contratada inicialmente.

TASAS DE CUPON	PRECIO DEL BONO CON REND. 10%	PRECIO DEL BONO CON REND. 8%	PORCENTAJE DE INCREMENTO EN EL PRECIO
0.00 %	$ 23.14	$ 30.83	33.2 %
1.00	30.82	39.48	28.1
2.00	38.51	48.12	25.0
3.00	46.20	56.77	22.9
4.00	53.88	65.42	21.4
5.00	61.57	74.06	20.3
6.00	69.26	82.71	19.4
7.00	76.94	91.35	18.7
8.00	84.63	100.00	18.2
9.00	92.31	108.65	17.7
10.00	100.00	117.29	17.3
11.00	107.69	125.94	16.9
12.00	115.37	134.58	16.7
13.00	123.06	143.23	16.4
14.00	130.74	151.88	16.2
15.00	138.43	160.52	16.0

TABLA 3-2. PRECIOS Y PORCENTAJE DE CAMBIO DEL PRECIO DE UN BONO CON VENCIMIENTO DE 15 AÑOS PARA VARIAS TASAS DE CUPON DADO UN DECREMENTO EN EL RENDIMIENTO DE 10% A 8%.

3.3 LOS CAMBIOS EN EL PRECIO POR CAMBIOS EN EL RENDIMIENTO AL VENCIMIENTO A DIFERENTES NIVELES DE VENCIMIENTO.

Manteniendo las tasas de cupón y los rendimientos al vencimiento fijos, los cambios porcentuales en los precios de los valores de renta fija varian para cada vencimiento dado un cambio en el rendimiento. Con la excepción de bonos descontados, el cambio porcentual en los precios se incrementa con el vencimiento del valor. Esto es, los precios de los valores de renta fija, con la excepción de bonos descontados, tienden a ser más sensitivos a cambios dados en rendimientos cuando los vencimientos son grandes.

Para mostrar esta relación, considérese primero bonos a la par que tienen una tasa de cupón de 9%. La tabla 3-3 muestra para varios vencimientos, el incremento en el porcentaje del precio correspondiente a un decremento en el rendimiento de un 1%. Claramente, conforme el vencimiento se incrementa, el cambio en porcentaje del precio se incrementa. Para un bono a 5 años el cambio en porcentaje es de sólo 3.96%, y conforme el vencimiento tiende a infinito, los cambios en porcentaje tienden al máximo de 11.11% (ya que el precio tiende a 111.11, ver ecuación 1.10).

Ahora, considérese el caso especial de los cambios en porcentaje de precios para un bono descontado con cupón de 4% para el cual el rendimiento baja de 13% a 12%. Como se muestra en la tabla 3-4, el porcentaje de incremento en el precio crece con el vencimiento del bono a 9.58% en 22 años; pero, de ahí en adelante, el porcentaje de incremento en el precio tiende a

VENCIMIENTO (EN AÑOS)	PRECIO DEL BONO AL 9%	PORCENTAJE DE INCREMENTO
5	$ 103.96	3.96 %
10	106.50	6.50
15	108.14	8.14
20	109.20	9.20
25	109.88	9.88
30	110.32	10.32
35	110.60	10.60
40	110.78	10.78
.	.	
.	.	
.	.	
∞	111.11	11.11

TABLA 3-3. PORCENTAJE DE CAMBIO EN EL PRECIO DE UN BONO A LA PAR CON CUPON DEL 10% PARA UN DECREMENTO EN RENDIMIENTO A 9%.

8.333% conforme el vencimiento tiende a infinito. La tabla 3-5 muestra el resultado para bonos de cupón cero, en donde el porcentaje de incremento en el precio crece con el vencimiento. Para todos los demás valores de renta fija el porcentaje de incremento en precio crece con el vencimiento. A continuación se da la regla general:

EL PORCENTAJE DE INCREMENTO EN EL PRECIO DE VALORES DE RENTA FIJA, EXCEPTO PARA BONOS DESCONTADOS, SE INCREMENTARA CON EL VENCIMIENTO DEL VALOR, DADO UN DECREMENTO EN EL RENDIMIENTO.

3.4 LOS CAMBIOS PORCENTUALES EN PRECIO Y LA DURACION.

Las reglas que gobiernan los cambios porcentuales en precio, mostradas en las secciones previas, pueden ser resumidas en una,

VENCIMIENTO (EN AÑOS)	PRECIO DEL BONO CON REND. 13%	PRECIO DEL BONO CON REND. 12%	PORCENTAJE DE INCREMENTO EN EL PRECIO
5	$67.6503	$70.5597	4.401 %
10	50.4167	54.1203	7.346
15	41.2360	44.9407	8.984
20	36.3451	39.8148	9.547
21	35.6853	39.1018	9.574
22	35.1035	38.4673	9.582
23	34.5906	37.9025	9.575
24	34.1384	37.3999	9.554
25	33.7397	36.9526	9.523
30	32.3517	35.3543	9.281
35	31.6122	34.4618	9.014
⋮	⋮	⋮	⋮
∝	30.7692	33.3333	8.333

TABLA 3-4. PRECIOS Y PORCENTAJE DE CAMBIO DEL PRECIO DE UN BONO DESCONTADO CON CUPON DEL 4% Y TASA DE RENDIMIENTO DEL 13% PARA UN CAMBIO EN RENDIMIENTO A 12% A VARIOS NIVELES DE VENCIMIENTO.

VENCIMIENTO (EN AÑOS)	PRECIO DEL BONO CON REND. 13%	PRECIO DEL BONO CON REND. 12%	PORCENTAJE DE INCREMENTO EN EL PRECIO
5	$53.2726	$55.8395	4.818 %
10	28.3797	31.1805	9.869
15	15.1186	17.4110	15.163
20	8.0541	9.7222	20.711
25	4.2906	5.4288	26.528
30	2.2857	3.0314	32.625
35	1.2177	1.6927	39.015
40	0.6487	0.9452	52.734
45	0.3456	0.5278	60.094

TABLA 3-5. PRECIOS Y PORCENTAJE DE CAMBIO DEL PRECIO DE UN BONO CUPON CERO PARA UN CAMBIO EN TASA DE RENDIMIENTO DE 13% A 12% A VARIOS NIVELES DE VENCIMIENTOS.

llamada **DURACION**, que describe el cambio porcentual del precio de una la cadena fija de ingresos. La **DURACION** de un valor es una medida del promedio de vida de un valor. Este es un promedio de fechas sobre las cuales se aseguran los flujos de efectivo, donde las fechas que tienen valores presentes mayores para recibir un flujo de efectivo reciben un mayor peso.

Un ejemplo simple mostrará el método para determinar la **DURACION**. Considérese un bono a un año que asegura el pago de un cupón cada seis meses. El precio de este valor usando la ecuación (1.8) del capítulo 1 es simplemente

$$P = [F(c/2)](1+r')^{-1} + [F(1+c/2)](1+r')^{-2} \qquad (3.1)$$

Donde $r'=r/2$, r es el rendimiento al vencimiento anual, y c es la tasa de cupón anual. El precio del valor es una función de dos flujos de efectivo diferentes. El valor del primer flujo de efectivo como una proporción del precio es:

$$w_1 = [F(c/2)(1+r')^{-1}]/P \qquad (3.2)$$

y el valor del segundo como una proporción del precio es:

$$w_2 = [F(1+c/2)(1+r')^{-2}]/P \qquad (3.3)$$

Tanto w_1 y w_2 son fracciones positivas y $w_1+w_2=1$. Esas cantidades reflejan la importancia relativa de los flujos de efectivo asegurados por el valor, y el valor de ese cambio en peso conforme la tasa de cupón y el rendimiento al vencimiento cambian. La tabla 3-6 muestra como se incrementa el valor de esos pesos para varias tasas de cupón cuando el rendimiento al vencimiento se incrementa. Cada valor representado en la tabla 3-6 es el valor a un año con pagos semestrales, el inversionista podría estar interesado en saber si los flujos de efectivo prometidos estan recibiendose predominantemente pronto o tarde.

TASA DE CUPON	TASA DE INTERES ANUAL					
	8 %		10 %		12 %	
	Wt'S	DURACION	Wt'S	DURACION	Wt'S	DURACION
8 %	W_1=.0385 W_2=.9615	1.9615	W_1=.0388 W_2=.9612	1.9612	W_1=.0392 W_2=.9608	1.9608
10 %	W_1=.0472 W_2=.9528	1.9528	W_1=.0476 W_2=.9524	1.9524	W_1=.0481 W_2=.9519	1.9519
12 %	W_1=.0556 W_2=.9444	1.9444	W_1=.0564 W_2=.9439	1.9442	W_1=.0566 W_2=.9434	1.9434

TABLA 3-6. PESOS w_1, w_2 Y DURACION DE UN BONO CON VENCIMIENTO DE UN AÑO (CON PAGOS DE CUPON SEMESTRAL) PARA VARIAS TASAS DE CUPON Y RENDIMIENTOS AL VENCIMIENTO.

Las cantidades como las de la tabla 3-6, miden el grado en que los flujos son recibidos pronta o tardiamente. Evaluando los flujos a valor presente y comparando la proporción de cada flujo con respecto al precio del valor se puede construir un método para medir el grado de prontitud o tardanza, y diferentes valores pueden ser comparados en esta forma.

El ejemplo, descrito en las ecuaciones (3.1) a (3.3), puede ser generalizado a cualquier vencimiento de bono o a otros valores de ingreso fijo. Si un bono o hipoteca tiene un vencimiento de m periodos, las cantidades correspondientes a los flujos pueden ser representados como $w_1, w_2, \ldots w_t, \ldots, w_m$, donde w_t es la proporción del precio representado por el valor del t-ésimo flujo. Las cantidades para diferentes valores pueden ser descritas entonces en un diagrama como el de la figura 3-2. En ese diagrama las cantidades para el valor 2 son relativamente grandes para las fechas de los primeros flujos y las cantidades para el valor 1 son relativamente grandes en las fechas finales de los flujos de efectivo. Cada una de las distribuciones de las cantidades en la figura 3-2 puede ser representada por el promedio de las fechas de flujo de efectivo. Este promedio es llamado **LA DURACION** y se expresa como:

$$D = \sum_{t=1}^{m} tw_t \qquad (3.4)$$

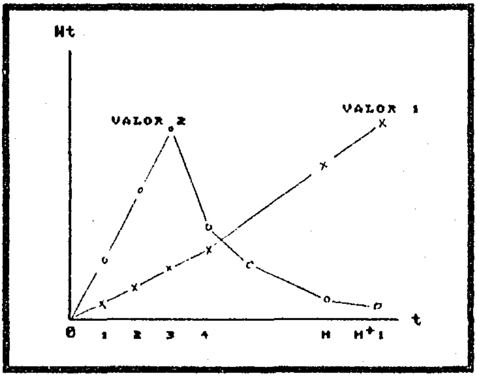

FIGURA 3-2. VALOR PRESENTE DE LOS PESOS Wt PARA DOS VALORES DEFERENTES Y CON DIFERENTES DURACIONES.

Como la mayoría de los promedios, la Duración cae entre las primeras y últimas fechas y es medida en longitudes de intervalo de tiempo en el eje horizontal. Si las fechas de flujo de efectivo son semestrales, un valor D igual a 8 representaría ocho períodos semestrales. El promedio descrito en la ecuación (3.4), es un promedio en donde se da mayor peso a las fechas en donde el

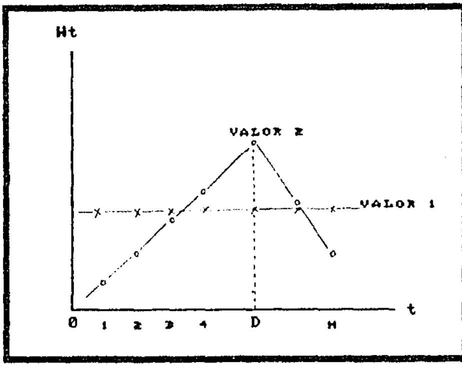

FIGURA 3-3. VALOR PRESENTE DE LOS PESOS Wt PARA DOS VALORES DIFERENTES Y CON DURACIONES IDENTICAS.

valor presente de los flujos son mayores. Como un ejemplo, considérese el bono a la par al 10% de la tabla 3-6. Usando esos pesos, la Duración es:

$$D = 0.476(1) + 0.9524(2) = 1.9524$$

periodos semestrales ó 0.9762 años, ligeramente menor que el vencimiento de 1 año. La Duración es sólo una característica de la distribución de los pesos w_t sobre las fechas de flujo de efectivo. Dos distribuciones diferentes de ellos podrían tener exactamente las mismas duraciones pero tener diferentes formas. En la figura 3-3, los w_t para dos diferentes valores tienen exactamente las mismas duraciones, pero las distribuciones de los pesos son muy diferentes. Los pesos para el valor 1 estan muy dispersos a los alrededores de la Duración, y los pesos para el valor 2 están más centrados en la Duración. En algunas aplicaciones, las características de distribución de los pesos w_t alrededor de la Duración deben ser consideradas para la toma decisiones de inversión. La Duración, fuera de las características de las distribuciones, sin embargo, proporcionan algunas formas muy útiles para describir los porcentajes de cambio en los precios de los valores para cambios dados en el rendimiento.

3.5 OBTENCION DE FORMULAS PARA EL CALCULO DE LA DURACION DE VALORES DE RENTA FIJA.

El uso de la ecuación (3.4) para calcular la Duración de valores renta fija, no es muy apropiada, por la cantidad de términos que deben sumarse, especialmente para los valores con vencimientos grandes. A continuación se obtienen fórmulas sencillas para el calculo de duraciones.

Se tiene por definición, que la Duración de un valor se expresa de la siguiente manera:

$$D = \sum_{t=1}^{m} t w_t$$

donde t es el periodo donde se tiene el flujo F_t

$$w_t = [F_t(1+r)^{-t}]/P \quad \text{con} \quad P = \sum_{t=1}^{m} F_t(1+r)^{-t}$$

y r es el rendimiento por periodo.

Entonces

$$D = \sum_{t=1}^{m} t[F_t(1+r)^{-t}]/P$$

$$= (1/P) \sum_{t=1}^{m} (1+r)/(1+r)tF_t(1+r)^{-t}$$

$$= [(1+r)/P] \sum_{t=1}^{m} tF_t(1+r)^{-t-1}$$

Se sigue claramente que:

$$D = [(1+r)/P]\ [-dP/dr] \qquad (3.5)$$

donde dP/dr es la derivada del precio con respecto al rendimiento.

Esta última ecuación facilitará la obtención de las duraciones de los valores. Por ejemplo, para obtener la Duración de una perpetuidad, la cual es un valor de renta fija que asegura flujos o pagos iguales de efectivo periodicamente por siempre. Sea F el flujo de efectivo por periodo y r su tasa de rendimiento, entonces el valor presente o precio de la perpetuidad es:

$$P = \sum_{t=1}^{\infty} F(1+r)^{-t} \qquad \text{sea} \qquad a = (1+r)^{-1}$$

entonces

$$P = \sum_{t=1}^{\infty} Fa^{t}$$

$$aP = \sum_{t=1}^{\infty} Fa^{t+1}$$

$$P - aP = \sum_{t=1}^{\infty} Fa^{t} - \sum_{t=1}^{\infty} Fa^{t+1}$$

$$P(1-a) = Fa$$

$$P = (Fa)/(1-a) = F/[a^{-1}(1-a)]$$

$$= F/(a^{-1}-1) = F/(1+r-1) = F/r$$

Ahora aplicando la fórmula (3.5) tenemos que la Duración de la perpetuidad es:

$$D = [-(1+r)/P](dP/dr) = [-(1+r)/(F/r)][-F/r^{2}]$$

$$= (1+r)/r$$

Para calcular la Duración de un bono, haciendo uso de la ecuación (1.10) de el precio de un bono, y tomando la tasa de rendimiento por período como r', se tiene que:

$$P = [F(c/n)/r'][1-(1+r')^{-nm}] + F(1+r')^{-nm}$$

Sea $A = [F(c/n)/r'][1-(1+r')^{-nm}]$ y

$$B = F(1+r')^{-nm}$$

entonces

$$P = A + B \qquad (3.6)$$

Al escribir P en esta forma, A representa la cadena de pagos de cupón la cual es equivalente a una hipoteca y B representa un pago único al vencimiento del valor nominal el cual es considerado como un bono de cupón cero. Ahora

$$dA/dr' = [-F(c/n)/r'^{2}]\,[1-(1+r')^{-nm}] + nm[F(c/n)/r'](1+r')^{-nm-1}$$

$$= -A/r' + nm[F(c/n)/r'](1+r')^{-nm-1}$$

$$dB/dr' = -nmF(1+r')^{-nm-1}$$

Aplicando la ecuación 3.5 :

$$D = -(1+r')/P\,[\,dA/dr' + dB/dr'\,]$$

$$= -(1+r')/P\{-A/r' + [nm(c/n)F/r'](1+r')^{-nm-1} - nmF(1+r')^{-nm-1}\}$$

$$= (1+r')A/r'P - [nm(c/n)F/r'P](1+r')^{-nm} + (nmF/P)(1+r')^{-nm}$$

$$= (1+r')A/r'P - [nm(c/n)/r'](B/P) + nmB/P$$

$$= (1+r')A/r'P + nmB/P\,[1-(c/n)/r'] \qquad (3.7)$$

Esta última ecuación indica que para un bono a la par (c=r), su Duración es:

$$D = (1+r')A/r'P\ ,$$

y dependiendo de si el bono es premiado o descontado, el segundo término ajustará la Duración a la del bono a la par. Otra forma de visualizar la ecuación 3.7 es sustituyendo el valor de A a partir de la ecuación 3.6, es decir, $A = P-B$, entonces

$$
\begin{aligned}
D &= (1+r')(P-B)/r'P + (nmB/P)[1-(c/n)/r'] \\
&= [(1+r')/r'][(1-(B/P)] + (nmB/P)[1-(c/n)/r'] \\
&= (1+r')/r' + (B/P)[nm - (1+r')/r' - nm(c/n)/r'] \\
&= (1+r')/r' + (B/P)[nmr' - (1+r') - nm(c/n)]/r' \\
&= (1+r')/r' + (B/P)[nm(r'-(c/n)) - (1+r')]/r'
\end{aligned}
$$

Esta última ecuación puede ser interpretada como la Duración de la perpetuidad ajustada a la Duración del bono por el segundo término. Ahora sustituyendo el valor de B y P se tiene que:

$$D = (1+r')/r' + \{F(1+r')^{-nm}[nm(r'-(c/n))-(1+r')]/r'\}/ \{[(c/n)F/r'][1-(1+r')^{-nm}]+F(1+r')^{-nm}\}$$

$$D = (1+r')/r' + \{F(1+r')^{-nm}[nm(r'-(c/n))-(1+r')]\}/ \{(c/n)F[1-(1+r')^{-nm}]+r'F(1+r')^{-nm}\}$$

$$D = (1+r')/r' + \{nm(r'-(c/n))-(1+r')\}/ \{(c/n)(1+r')^{nm}-(c/n)+ r'\}$$

$$D = (1+r')/r' - \{nm[(c/n)-r']+(1+r')\}/ \{(1+r')^{nm}(c/n)-[(c/n)-r']\} \qquad (3.8)$$

Con esta última ecuación es muy sencillo obtener la Duración de cualquier bono. Se observa que el segundo término para $c=0$ (bonos cupón cero) toma la siguiente forma:

$$[nm(-r')+(1+r')]/r'$$

y este término tiende a menos infinito cuando m tiende a infinito y por tanto la Duración tenderá al infinito. Para el caso en el cual $c>0$, el segundo término de la ecuación (3.8) tiende a cero conforme m tiende a infinito, ya que el denominador crece más rápido que el numerador. Y por tanto la Duración de todos estos bonos tenderá a la Duración de la perpetuidad. En esta misma ecuación se puede observar que cuando el vencimiento crece, y el bono es un bono descontado (es decir $(c/n-r')<0$) entonces existen vencimientos a partir de los cuales la Duración de estos bonos supera a la Duración de la perpetuidad, pero conforme el vencimiento se extiende al infinito la Duración tiende a la perpetuidad (por arriba). Lo anterior fue mostrado en la sección 3.3.

Si se considera la Duración de un bono a la par entonces la ecuación 3.8 se reduce a:

$$D = (1+r')/r' - (1+r')/[(c/n)(1+r')^{nm}]$$

$$D = (1+r')/r' - (1+r')/r'(1+r')^{nm} \quad \text{por ser} \quad r'=r/n=c/n$$

$$= [(1+r')/r'][1-(1+r')^{-nm}] \qquad (3.9)$$

Para una hipoteca, cuyo precio está dado por la ecuación (1.12), haciendo $r'=r/12$ se tiene que

$$P = (F/r')[1-(1+r')^{-12m}]$$

Ahora $dP/dr' = (-F/r'^{2})[1-(1+r')^{-12m}] + (F/r')[12m(1+r')^{-12m-1}]$

entonces $D = -[(1+r')/P][dP/dr']$

$$= [-(1+r')/P]\,[(-P/r') + (12mF/r')(1+r')^{-12m-1}]$$

$$= (1+r')/r' - (12mF/r'P)(1+r')^{-12m}$$

sustituyendo el valor de P se tiene

$$D = (1+r')/r' - \{12mF(1+r')^{-12m}\}/\{r'(F/r')[1-(1+r')^{-12m}]\}$$

$$= (1+r')/r' - [12m(1+r')^{-12m}]/[1-(1+r')^{-12m}]$$

$$= (1+r')/r' - 12m/[(1+r')^{12m} - 1] \qquad (3.10)$$

Por lo tanto la Duración de una hipoteca es sólo función de la tasa de rendimiento y del vencimiento.

3.6 LA DURACION Y LOS CAMBIOS EN LOS PRECIOS.

La utilidad principal de la Duración proviene de la ecuación

$$\Delta P/P \cong -(D\Delta r')/(1+r') \qquad (3.11)$$

Aquí, r' es el rendimiento al vencimiento utilizado para calcular el precio P del valor; $\Delta r'$ es un cambio en el rendimiento al vencimiento y ΔP es el correspondiente cambio en el precio, y D es la Duración. El símbolo $\cong$ significa que la igualdad es aproximada. Si se multiplica $\Delta P/P$ por 100 se tendrá el porcentaje de cambio en el precio de un valor. La ecuación (3.11) es una representación muy aproximada del porcentaje de cambio en el precio correspondiente a un cambio en el rendimiento.

La ecuación (3.11) se demuestra fácilmente con un poco de geometría. Comiencese con un valor específico y considérense los cambios proporcionales en precio correspondientes a varios cambios dados en rendimiento. Manteniendo fijos los flujos de efectivo de

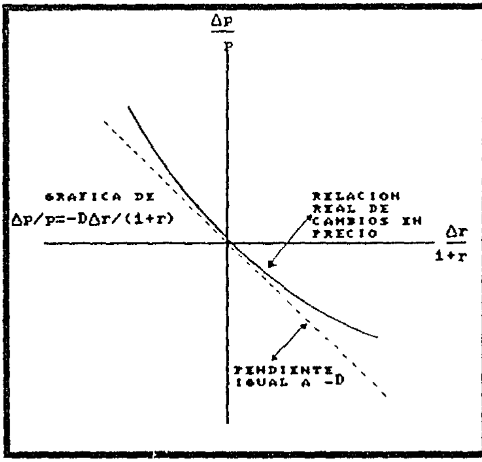

FIGURA 3-4. APROXIMACION DEL PORCENTAJE DE CAMBIO EN EL PRECIO, POR MEDIO DE LA DURACION.

la cadena de ingresos, se puede calcular exactamente cómo ΔP/P debería relacionarse a Δr'/(1+r'). Esta relación se muestra con la curva dibujada en forma continua y etiquetada como la "relación real" en la figura 3-d. La ecuación (3.11) aproxima esta relación real con la línea punteada en esa misma figura. Esta línea es tangente a la línea continua en el origen y la pendiente de esta curva es la Duración. Utilizando la ecuación (3.11) como un estimador del porcentaje de cambio del precio se podrá localizar la dirección de la inexactitud resultante. Cuando Δr' es positivo el porcentaje estimado de cambio en el precio decrece más que el porcentaje real y cuando Δr' es negativo el porcentaje de incremento estimado en el precio es menor que el porcentaje de incremento real. Si los cambios en r' son muy pequeños, el error en la estimación del porcentaje real de cambio en el precio es también pequeño. A pesar de esos errores cuantitativos, la DURACION puede ser utilizada muy efectivamente sobre una base cualitativa para la comparación de porcentajes de cambio en precio de valores que tienen diferentes duraciones. El valor con la mayor Duración tendrá siempre el mayor porcentaje de cambio en el precio, sin considerar los errores en estimación implicados en la ecuación (3.11) usada como una aproximación. El resto de esta sección contiene algunos ejemplos que muestran la magnitud del error en la utilización de la ecuación (3.11) para estimar $\Delta P/P$ para un correspondiente $\Delta r'$. En la siguiente sección se consideran los atributos que pueden causar Duraciones que difieren entre valores pero que permiten tomar comparaciones cualitativas sobre la magnitud de $\Delta P/P$ correspondiente al cambio en el rendimiento.

Las tablas 3-7 y 3-8 muestran los porcentajes reales de los cambios en los precios para bonos a la par a 10 y 20 años con tasa de cupón de 10%. Los porcentajes de cambio en precios que se exhiben corresponden a cambios en rendimiento al vencimiento anual que va de -2% a 2% en incrementos de 0.25%. Los rendimientos sobre esos bonos entonces van de 8% a 12%. La columna 3 en cada una de esas tablas muestra el porcentaje de cambio en el precio como se estimó usando la Duración de la ecuación (3.11). La columna 4 muestra el error en estimación. El error es expresado como la diferencia entre el valor real y el estimado de los porcentajes de cambio en los precios. Como

CAMBIOS ANUALES EN REND.	PORCENTAJE REAL DE CAMBIO EN EL PRECIO	PORCENTAJE ESTIMADO DE CAMBIO EN EL PRECIO	ERROR
+2.00 %	-11.470 %	-12.433 %	0.963 %
+1.75	-10.139	-10.879	0.740
+1.50	- 8.780	- 9.325	0.545
+1.25	- 7.392	- 7.771	0.379
+1.00	- 5.975	- 6.217	0.242
+0.75	- 4.528	- 4.663	0.135
+0.50	- 3.051	- 3.108	0.057
+0.25	- 1.541	- 1.554	0.013
-0.25	+ 1.574	+ 1.554	0.020
-0.50	+ 3.183	+ 3.108	0.075
-0.75	+ 4.826	+ 4.663	0.163
-1.00	+ 6.504	+ 6.217	0.287
-1.25	+ 8.219	+ 7.771	0.448
-1.50	+ 9.971	+ 9.325	0.646
-1.75	+11.761	+10.879	0.882
-2.00	+13.590	+12.433	1.157

TABLA 3-7. PORCENTAJE DE ERROR EN LA ESTIMACION DEL PORCENTAJE DE CAMBIO EN EL PRECIO, USANDO LA DURACION COMO UN ESTIMADOR, PARA UN BONO A LA PAR CON TASA DE CUPON DEL 10% Y VENCIMIENTO DE 20 AÑOS.

sugiere la figura 3-4, los errores son grandes, a cambios grandes en rendimiento al vencimiento. Claramente, la estimación del porcentaje de cambio en los precios basada en la Duración es buena para cambios pequeños en el rendimiento al vencimiento. Para el bono a 10 años (tabla 3-7) el porcentaje de cambio en los precios es estimado exactamente dentro de un tercio de un 1% para incrementos (o decrementos) en el rendimiento de hasta 1%. Esto significa que la ecuación (3.11) en este caso podría significar un error de hasta 33 pesos sobre $10000 pagados para este bono a la par. Para los bonos a 20 años (tabla 3-8), el porcentaje de

CAMBIOS ANUALES EN REND.	PORCENTAJE REAL DE CAMBIO EN EL PRECIO	PORCENTAJE ESTIMADO DE CAMBIO EN EL PRECIO	ERROR
+2.00 %	-15.046 %	-17.159 %	2.113 %
+1.75	-13.376	-15.014	1.638
+1.50	-11.650	-12.869	1.219
+1.25	- 9.866	-10.724	0.858
+1.00	- 8.023	- 8.580	0.557
+0.75	- 6.117	- 6.435	0.318
+0.50	- 4.147	- 4.290	0.143
+0.25	- 2.109	- 2.145	0.036
-0.25	+ 2.182	+ 2.145	0.037
-0.50	+ 4.441	+ 4.290	0.151
-0.75	+ 6.779	+ 6.435	0.344
-1.00	+ 9.201	+ 8.580	0.621
-1.25	+11.709	+10.724	0.985
-1.50	+14.308	+12.869	1.439
-1.75	+17.001	+15.014	1.987
-2.00	+19.793	+17.159	2.634

TABLA 3-8. PORCENTAJE DE ERROR EN LA ESTIMACION DEL PORCENTAJE DE CAMBIO EN EL PRECIO, USANDO LA DURACION COMO UN ESTIMADOR, PARA UN BONO A LA PAR CON TASA DE CUPON DEL 10% Y VENCIMIENTO DE 20 AÑOS.

cambio estimado en el precio se encuentra exactamente dentro de los cinco octavos de un 1% para incrementos (o decrementos) en el rendimiento al vencimiento de hasta 1%. Este error constituye aproximadamente 63 pesos por cada $10000 pagados por el bono. Para cualquier cambio dado en el rendimiento el error en la estimación se incrementa con la Duración del bono. No importa si los cambios considerados son grandes o pequeños, la exactitud de la estimación basada en la Duración es excelente. El uso del procedimiento de Duración requiere primero del calculo de la Duración en si. Para facilitar ese calculo, las fórmulas de

Duración pueden ser programadas en computadora. La importancia de usar la ecuación (3.11) es que nos da un indicador cualitativo y no un estimador cuantitativo. Como se muestra en la siguiente sección, las características de los valores de renta fija permiten conocer instántaneamente si la Duración de un valor es mayor que otro, y por tanto saber si su precio es más sensitivo a cambios en el rendimiento al vencimiento. Esto es, en muchas situaciones las comparaciones cualitativas son posibles, sin necesidad de calculo se puede decir si un valor es más sensitivo que otro.

3.7 LA DURACION Y CARACTERISTICAS DE LOS VALORES DE RENTA FIJA.

La Duración de un valor cambia sistemáticamente por cambios en las propiedades de la cadena de ingresos y en el rendimiento al vencimiento. Cada una de las cantidades w_t, como se definió antes, es una función del modelo de la cadena de ingresos asegurada por el valor y el rendimiento al vencimiento. Cualquier cambio del modelo, en el tiempo, de los valores de w_t afectará el valor de la Duración.

Cualquier cambio en el ingreso de cupón de un bono afecta todos los ingresos de efectivo. Si un bono tiene una tasa de cupón mayor que otro y sin embargo tiene el mismo vencimiento, una mayor parte de la cadena de ingresos se recibirá tempranamente, esto tiene el efecto de incrementar los primeros pesos w_t y el de la disminución de los posteriores. La Duración, debería por lo tanto ser menor, como se muestra en las tablas 3-6 y 3-9. La figura 3-5 y la tabla 3-9 muestran los cambios en Duración para varias tasas de cupón, manteniendo el rendimiento al vencimiento fijo. Algunas comparaciones inmediatas son posibles. Un bono premiado con el mismo rendimiento que un bono a la par, tendrá una sensibilidad menor en precio por cambios en el rendimiento que el bono a la par. Un bono descontado será más sensitivo en precio que un bono a la par con el mismo vencimiento.

TASA DE CUPON	PRECIO	$[(1+r)/r](A/P)$	$n[1-(c/2)/r](B/P)$	DURACION (EN SEMESTRES)
0 %	$ 55.60374	0.00000	12.00000	12.00000
2	64.54699	2.88361	8.28178	11.16539
4	73.41025	5.07091	5.46140	10.53231
6	82.27350	6.78693	3.24870	10.03564
8	91.13675	8.16919	1.46638	9.63557
10	100.00000	9.30641	0.00000	9.30641
12	108.86325	10.25846	-1.22760	9.03086
14	117.72650	11.06716	-2.27036	8.79680
16	126.58976	11.76261	-3.16710	8.59551

TABLA 3-9. DURACION DE UN BONO CON RENDIMIENTO DEL 10% Y VENCIMIENTO DE 6 AÑOS, PARA DIFERENTES TASAS DE CUPON. (SE OBSERVA QUE LA DURACION DECRECE CONFORME LA TASA DE CUPON CRECE, ESTO ES DEBIDO A QUE SE ESTAN RECIBIENDO FLUJOS DE EFECTIVO MAYORES).

Como se mostró en las secciones anteriores, la Duración se incrementa con el vencimiento en bonos premiados y a la par, bonos con cupón cero e hipotecas; para bonos descontados, sin embargo, la Duración se incrementa con el vencimiento sólo por arriba de algunos vencimientos críticos y después los incrementos en vencimiento causan que la Duración baje. Lo anterior está ilustrado en la figura 3-6. La Duración de bonos con tasa de cupón cero es igual a su vencimiento y es graficada, por tanto, como una

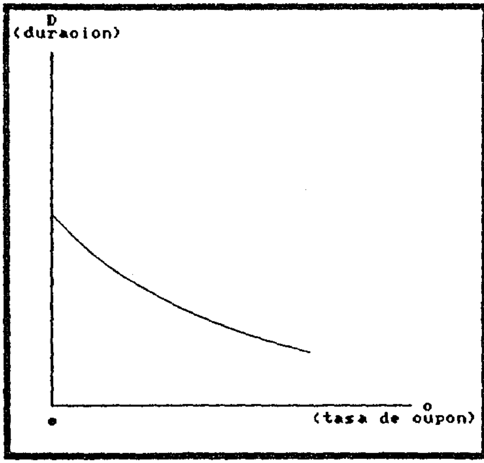

FIGURA 3-5. DURACION DE UN VALOR A DIFERENTES NIVELES DE TASA DE CUPON CON EL RENDIMINETO Y EL VENCIMIENTO FIJOS.

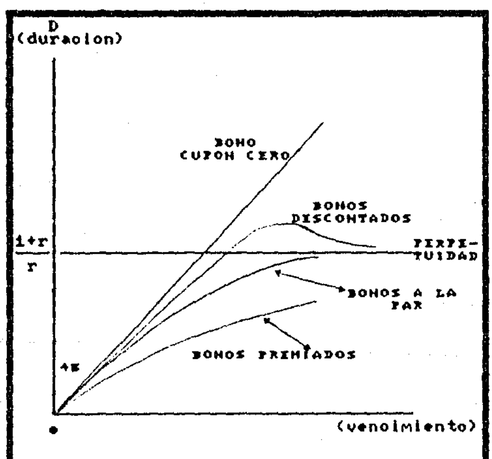

FIGURA 3-6. DURACION DE UN VALOR A DIFERENTES NIVELES DE VENCIMIENTO CON EL RENDIMIENTO Y LA TASA DE CUPON FIJAS.

línea recta formando un ángulo de 45° con el eje vertical en la figura 3-6. La perpetuidad tiene una Duración de $(1+r')/r'$ y es graficada como la función cosntante. Las Duraciones de todos los valores (excepto bonos con tasa de cupón cero) se aproximan asintóticamente a la Duración de la perpetuidad conforme el vencimiento se incrementa. La Duración de bonos a la par o premiados se incrementa monótonamente conforme se incrementa el vencimiento, pero las Duraciones de bonos descontados se incrementan por arriba de la Duración de la perpetuidad dirigiéndose después a la Duración de la perpetuidad. Conforme el vencimiento se incrementa manteniendo tasas de cupón y rendimiento al vencimiento fijos, los flujos de efectivo asegurados por un valor ocurren muy en el futuro. Esto provoca un peso positivo el cual es aplicable a la fecha inicial del vencimiento. Este efecto, por si mismo, tiende a incrementar la Duración del valor, pero hay otros cambios en los pesos generados por la extensión del vencimiento. El peso w_t sobre una fecha de flujo de efectivo está dado por

$$w_t = [(c/n)F(1+r')^{-t}]/P \qquad (3.12)$$

Cuando el vencimiento se extiende, el único efecto sobre este peso es el cambio provocado por el cambio en el precio P. Para bonos premiados, el precio se incrementa conforme el vencimiento se extiende, esto se muestra en la tabla 3-3. Para bonos a la par el precio P no se afecta. Sin embargo, como se muestra en la tabla 3-4, los precios de bonos descontados decrece conforme el vencimiento se extiende. Esto es, si los pesos estan dados como

$w_1, w_2, \ldots w_i, \ldots w_m$, se observa que conforme el vencimiento se extiende, para bonos a la par, sucede que w_m disminuye y w_{m+1} crece (dado que w_{m+1} es cero antes del cambio), esto claramente incrementa la Duración. Para bonos premiados, todos los pesos hasta el w_m, decrecen por los incrementos en precio y w_{m+1} es el único peso incrementado, esto provoca un incremento en Duración. Para bonos descontados, los cambios en peso son más complejos, los pesos w_1 hasta w_{m+1} deben incrementarse porque el precio cae debido a la extensión del vencimiento. El peso w_m esta afectado por dos factores, conforme el precio cae tenderá a incrementarse, pero conforme una porción del flujo de efectivo se extiende al vencimiento, tenderá a bajar. En cualquier caso el peso w_{m+1} se incrementará. Conforme el vencimiento se extiende, el cambio en el modelo de los pesos puede dar incrementos predominantes a los primeros pesos, así que la Duración es forzada a bajar para esos valores; podría referirse a esto como "efecto de precio" sobre la Duración.

Por lo tanto, excepto para bonos descontados, un mayor vencimiento es a una mayor sensibilidad del precio del bono por cambios en rendimientos. Para bonos descontados, se podrían encontrar algunos de ellos con vencimientos grandes no muy sensitivos al precio que un bono con exactamente la misma tasa de cupón pero teniendo un vencimiento más corto. El ejemplo de la tabla 3-4 muestra que la sensibilidad en el precio de un bono a 35 años con cupón del 4% y con un rendimiento del 13% se comporta muy similarmente a un bono a 15 años con tasa de cupón del 4% y con el mismo rendimiento al vencimiento (ya que sus porcentajes de cambio en precio son idénticos). Generalmente, sin embargo, el "efecto de precio" sobre la Duración de esos bonos ocurre al vencimiento cuando el periodo es grande, o cuando las tasas de cupón son bajas respecto al rendimiento otorgado, o bien a ambas.

La Duración de un valor de renta fija decrece conforme el rendimiento al vencimiento crece, manteniendo el vencimiento y la tasa de cupón constantes. Esto ocurre porque el efecto desigual que los cambios en precio tienen sobre cada peso w_t. Conforme r' se incrementa tanto el numerador como el denominador de la fracción $(1+r')^{-t}/P$ decrece; sin embargo, el decremento en el numerador será mayor según se encuentre de lejos la fecha t. Esto tiene el efecto de incrementar los primeros pesos y disminuir los posteriores. Por tanto la Duración debe disminuir conforme el rendimiento al vencimiento se incrementa, esta relación esta bosquejada en la figura 3-7. En efecto, la curva en ese diagrama crece (decrece) para vencimientos pequeños (grandes) excepto para el caso especial en el cual el "el efecto de precio" domina para bonos descontados, en cuyo caso es a la inversa.

Las figuras 3-5 a 3-7 muestran los cambios de Duración para cambios en tasa de cupón, vencimiento y rendimiento al vencimiento. Esas curvas ayudan a explicar los cambios en porcentaje del precio observados en las tablas 3-1 a 3-5. En cada caso, en donde el porcentaje de cambio en el precio para el bono excedió al de cualquier otro para un cambio dado en el rendimiento, la Duración fue mayor. Esas relaciones pueden ser resumidas en la siguiente regla:

A UNA DURACION GRANDE DE UN VALOR, HAY UN MAYOR PORCENTAJE DE CAMBIO EN SU PRECIO PARA UN CAMBIO DADO EN EL RENDIMIENTO AL VENCIMIENTO.

Esta regla de Duración puede ser muy útil en la descripción de eventos diarios. Por ejemplo, es fácil deducir el siguiente resultado sin ningún calculo.

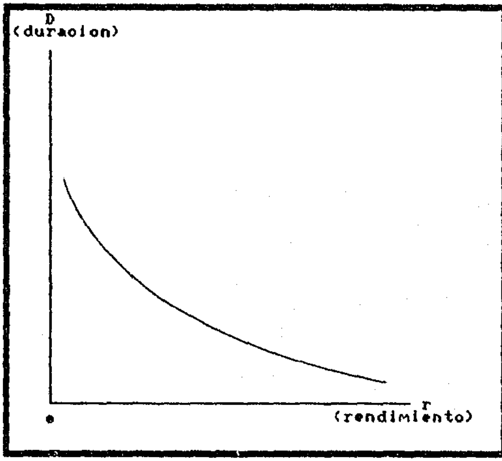

FIGURA 3-7. DURACION DE UN VALOR A DIFERENTES NIVELES DE RENDIMIENTO CON EL VENCIMIENTO Y TASA DE CUPON FIJOS.

Para cualquier cambio en rendimiento, un bono a la par a 10 años y tasa de cupón del 8% tiene un mayor porcentaje de cambio en el precio que un bono a 5 años con cupón del 9% vendido al 8%.

La regla de Duración afirma que esto será así porque la alta tasa de cupón y bajo vencimiento del segundo bono implica que tendrá una Duración menor. Sin embargo, existen situaciones en donde la regla de Duración no puede proporcionar una respuesta precisa sin calculos.

Por ejemplo, al comparar un bono a la par a 15 años con cupón del 12% con un bono a la par a 10 años con cupón del 10%, se observa que la regla de Duración no puede dar una respuesta precisa. El vencimiento mayor del primer bono, por sí mismo, implica una Duración mayor, pero también tiene una tasa de cupón y rendimiento al vencimiento altos, los cuales implican una Duración baja, el efecto neto es ambiguo. Para casos complicados como el mencionado, se podrían obtener por separado los efectos individuales de los diferentes vencimientos, tasas de cupón y rendimientos al vencimiento para deducir qué valores son más sensitivos en precio por cambios en el rendimiento.

CAPITULO 4.[4]

EJEMPLO DE UNA APLICACION DEL ANALISIS DE D U R A C I O N.

En este capítulo se presenta una aplicación del Análisis de Duración, de las secciones 4.1 a 4.6 se da la fundamentación teórica de la estrategia de inversión inmunizada y en la sección 4.7 se muestra esa misma estrategia, numéricamente con dos valores de renta fija que operan en la Bolsa Mexicana de Valores.

4.1 ACUMULACION DE INVERSION.

Los inversionistas en valores de renta fija enfrentan dos tipos de riesgo por tasas de interés. Los cambios en éstas durante un período de inversión pueden afectar:

(1) El valor de los bienes de renta fija mantenidos hasta el final del período; y
(2) El nivel de ganancias sobre cualquier reinversión de flujos de efectivo durante el período.

Llamese a esos riesgos respectivamente, **RIESGO DE PRECIO Y**

4. Para mayor informacion sobre los temas que en este capitulo se presentan, consultar de la bibliografia que se lista al final de este trabajo las citas 1,4,5 y 8.

RIESGO DE REINVERSION. Un valor con un periodo de tiempo al vencimiento mayor que el de inversión esta sujeto al riesgo de precio porque su valor en todo momento antes del vencimiento depende de los rendimientos del mercado. Un bien que se vence exactamente al final del periodo de inversión no produce un riesgo en el precio porque su valor al vencimiento es el valor nominal, el cual es independiente de los rendimientos del mercado. El riesgo de reinversión esta asociado con cualquier valor que genere flujos de efectivo dentro de un periodo de inversión. La existencia y tendencia de cualquiera de los riesgos dependen tanto de la naturaleza del valor como del tamaño relativo del periodo sobre el cual los rendimientos y riesgo son medidos. En un periodo en el cual ambos riesgos estan en función, hay algunas tendencias compensadoras obvias. Si los rendimientos al vencimiento suben en una fecha particular, el valor de un fondo de inversión decrece, aun cuando esas altas tasas de rendimiento implican altos rendimientos en interés provenientes de la reinversión de cualquier flujo de efectivo futuro. Sin embargo un cambio en rendimiento podría generar un efecto mixto, cualquier pérdida de capital podria ser compensada en el tiempo por altos rendimientos provenientes de la reinversión; y cualquier ganancia inicial de capital podría ser compensada en el tiempo por bajos rendimientos de la reinversión. Del capítulo anterior, se sabe que el grado de pérdida de capital o ganancia proveniente de un cambio en el rendimiento depende de la DURACION de los valores que se poseen. En las siguientes secciones, se muestra que el tiempo requerido para compensar esas ganancias o pérdidas de capital, provenientes de la reinversión de los flujos de efectivo, también dependen de la Duración de los valores poseidos. Tanto el riesgo del precio como el de la reinversión están relacionados con la Duración de los valores.

4.2 DURACION DE UNA CARTERA.

Dado que existe una amplia variedad de valores diferentes, los inversionistas podrían elegir invertir en muchos de ellos simultáneamente, para formar una cartera de valores. Tal cartera podría producir un modelo de flujos de efectivo algo complicado. Por ejemplo, si un inversionista compra cinco bonos con cupón del 10% a 5 años y ocho bonos con cupón del 12% a 3 años (teniendo todos un valor nominal de $10,000), el resultado del flujo de efectivo para los periodos semestrales es:

($7300,$7300,$7300,$7300,$7300,$87300,$2500,$2500,$2500,$52500)

En efecto, tales modelos de flujos de efectivo tiene también duraciones que pueden ser calculadas. La Duración de una cadena de ingresos correspondiente a una cartera de valores puede ser calculada simplemente como un promedio ponderado de las duraciones de los valores que componen la cartera. Esta relación permite al inversionista elegir una cartera con una Duración dada. En otras palabras, la Duración de una cartera puede ser una variable de decisión para el inversionista. El análisis de las consecuencias de tales decisiones de Duración con respecto al riesgo en el precio y en la reinversión se presenta en la siguiente sección.

A continuación se hacen los calculos matemáticos para obtener la Duración de una cartera; primero se obtendrá la Duración de una cartera compuesta por dos valores y después se hace una generalización para obtener la Duración de una cartera compuesta por q valores.

(1) **CASO DE UNA CARTERA DE DOS VALORES.**

Sean $(F_{11},F_{21},F_{31},\ldots,F_{m1})$ y $(F_{12},F_{22},F_{32},\ldots,F_{n2})$ los flujos de efectivo de dos valores. Entonces, por definición, el valor presente o precio de cada valor está dado por:

$$V_1 = \sum_{t=1}^{m} F_{t1}(1+r)^{-t}$$

$$V_2 = \sum_{t=1}^{n} F_{t2}(1+r)^{-t}$$

Entonces las duraciones para cada uno de esos valores son:

$$D_1 = [\sum_{t=1}^{m} tF_{t1}(1+r)^{-t}]/V_1$$

$$D_2 = [\sum_{t=1}^{n} tF_{t2}(1+r)^{-t}]/V_2$$

Para encontrar la Duración de la cartera, formada por esos dos valores, se suman las dos cadenas de ingreso para obtener la cadena de ingresos de la cartera:

$$(F_{11}+F_{12},F_{21}+F_{22},F_{31}+F_{32},\ldots,F_{t1}+F_{t2},\ldots)$$

donde, dado que los valores pueden tener vencimientos diferentes, entonces F_{t1} ó F_{t2} serán cero a partir de algún valor de t. El valor presente de la cartera es entonces

$$V = \sum_{t=1}^{u} (F_{t1}+F_{t2})(1+r)^{-t} \qquad \text{donde} \quad u=\max(m,n)$$

$$= \sum_{t=1}^{m} F_{t1}(1+r)^{-t} + \sum_{t=1}^{n} F_{t2}(1+r)^{-t}$$

$$= V_1 + V_2$$

La Duración de cartera será

$$D = [\sum_{t=1}^{u} t(F_{t1}+F_{t2})(1+r)^{-t}]/V \ ,$$

pero

$$\sum_{t=1}^{u} t(F_{t1}+F_{t2})(1+r)^{-t} = \sum_{t=1}^{m} tF_{t1}(1+r)^{-t} + \sum_{t=1}^{n} tF_{t2}(1+r)^{-t}$$

$$= \sum_{t=1}^{m} (V_1/V_1)tF_{t1}(1+r)^{-t} + \sum_{t=1}^{n} (V_2/V_2)tF_{t2}(1+r)^{-t}$$

$$= V_1D_1 + V_2D_2 \ ,$$

y entonces

$$D = (V_1D_1 + V_2D_2)/V$$

$$= (V_1/V)D_1 + (V_2/V)D_2 \ ;$$

ahora sean $B_1 = (V_1/V)$ y $B_2 = (V_2/V)$,

entonces

$$D = B_1D_1 + B_2D_2 \ , \tag{4.1}$$

donde B_1 y B_2 son las proporciones del valor 1 y 2 de que está constituida la cartera.

(2) **GENERALIZANDO EL ANTERIOR RESULTADO A UNA CARTERA COMPUESTA POR q VALORES.**

Se tiene que la cartera de q valores esta dada por la siguiente cadena de ingresos:

$(F_{11}+F_{12}+F_{13}+...+F_{1q}, F_{21}+F_{22}+...+F_{2q},...,F_{t1}+F_{t2}+...+F_{tq},...)$,

y su precio está dado por:

$$V = \sum_{t=1}^{u} (\sum_{s=1}^{q} F_{ts})(1+r)^{-t}$$ donde u=máximo de los vencimientos

$$= \sum_{s=1}^{q} (\sum_{t=1}^{u} F_{ts})(1+r)^{-t}$$

$$= \sum_{s=1}^{q} V_s$$ donde V_s es el valor presente de cada uno de los valores.

Ahora la Duración de la cartera es:

$$D = [\sum_{t=1}^{u} t(\sum_{s=1}^{q} F_{ts})(1+r)^{-t}]/V$$

$$= [\sum_{s=1}^{q} (\sum_{t=1}^{u} tF_{ts})(1+r)^{-t}]/V$$

$$= [\sum_{s=1}^{q} \{(V_s/V_s)(\sum_{t=1}^{u} tF_{ts})(1+r)^{-t})\}]/V$$

$$= (\sum_{s=1}^{q} V_sD_s)/V$$

$$= \sum_{s=1}^{q} B_sD_s \qquad (4.2)$$

donde $B_s = (V_s/V)$, lo cual es la proporción del valor s de que está constituida la cartera.

Ahora si se tiene una cartera de precio P, y P_s son los precios unitarios por valor, entonces

$$P = \sum_{s=1}^{q} n_sP_s$$ donde n_s es el número de títulos comprados del valor s.

En este caso se tiene que

$$B_s = (n_sP_s)/P \quad ,$$

y por tanto

$$n_s = (B_sP)/P_s \quad . \qquad (4.3)$$

Resumiendo, la Duración de la cartera es un promedio ponderado de las duraciones de cada uno de los valores, en donde las ponderaciones son las proporciones invertidas respectivamente en cada valor y donde estas ponderaciones suman la unidad; esto es:

$$\sum_{s=1}^{q} B_s = \sum_{s=1}^{q} (V_s/V) = (V/V) = 1$$

A continuación se presenta un ejemplo de como se puede aplicar el modelo para determinar la Duración de una cartera.

EJEMPLO. Supóngase que se va a invertir un millón de pesos en una cartera de dos valores, uno de esos valores es a la par con una tasa de cupón del 10% anual pagadero semestral y vencimiento a 10 años, y el otro, un bono a la par con cupón del 10% anual pagadero semestralmente por 20 años, cada bono tiene un valor nominal de $10,000 . Usando la ecuación (3.9) del capítulo 3 se tiene que:

$$D = (1+r')/r'[1-(1+r')^{-nm}] \quad \text{donde} \quad r' = r/n, \; n = 2, \; m = 10$$

$$D_1 = [(1+0.05)/0.05]\,[1-(1+0.05)^{-20}]$$

$$= (1.05/0.05)(1-0.0376889)$$

$$= 21(0.623111)$$

$$= 13.085331 \qquad \text{y}$$

$$D_2 = (1.05/0.05)[1-(1.05)^{-40}]$$

$$= 21(1-0.142046)$$

$$= 21(0.857954)$$

$$= 18.017034$$

Ahora, si se invierte el 50% del capital en cada uno de los bonos (i.e. $B_1 = B_2 = 0.5$), se tiene que el número de bonos que se adquiere de cada valor (usando la ecuación (4.3)) es:

$$n_1 = [(0.5)(1000000)/10000] = 50 = n_2$$

Supóngase que el inversionista en vez de lo anterior desea una cartera con una duración de dieciseis semestres, entonces se tiene que las proporciones de B_1 y B_2 son:

$$16 = D = B_1D_1 + B_2D_2 \quad \text{y como} \quad B_1 + B_2 = 1$$

$$= B_1D_1 + (1-B_1)D_2$$

$$= B_1(13.085331) + (1-B_1)(18.017034)$$

$$= B_1(13.085331 - 18.017034) + 18.017034$$

$$B_1(4.931703) = 2.017034 \ ,$$

entonces

$$B_1 = 2.017034/4.931703$$

$$= 0.408993$$

$$B_2 = 1 - B_1$$

$$= 1 - 0.408993$$

$$= 0.592007$$

y por tanto el número de bonos que se adquirirían es:

$$n_1 = (0.408993)(1000000)/10000 = 40.8993$$

$$n_2 = (0.591007)(1000000)/10000 = 59.1007$$

El que n_1 y n_2 no sean enteros podría provocar que no se pudiera formar una cartera con una Duración dada, pero podría tomarse una cartera muy aproximada. Si en lugar de invertir un millón se invierten cien millones se tendría:

$$n_1 = 4089.93 \qquad \text{y} \qquad n_2 = 5910.07$$

Estos ejemplos muestran la utilidad de la ecuación (4.1). La Duración D de la cartera nunca podrá ser mayor que la mayor de las duraciones de los dos valores, ni tampoco podrá ser menor que la menor de las duraciones; por tanto D siempre estará entre D_1 y D_2 . La ecuación (4.1) es particularmente útil siempre que se quiera calcular las proporciones B_1 y B_2 que correponden a cualquier Duración dada entre D_1 y D_2 y dadas B_1 y B_2 se podrá calcular siempre el número de unidades de cada valor que deben ser adquiridos para obtener la Duración de cartera D. Un inversionista puede considerar la Duración de cartera como una varible de decisión. Dado el arreglo de valores de que dispone y sus correspondientes duraciones, puede elegir una Duración particular para invertir cantidades apropiadas en cada conjunto seleccionado de valores. El inversionista puede determinar la Duración para invertir en varias carteras diferentes. Por ejemplo, considérense tres valores que tienen respectivamente las duraciones de 3, 6 y 9 años. Si un 50% de la inversión es asignada para los valores 1 y 2, se obtiene una cartera con duración de 4.5 años. Por otro lado, si el 75% es asignado al primer valor y 25% al tercero, se obtiene también una duración de 4.5 años. Tantas combinaciones como el inversionista pueda elegir de tres valores en adelante, daran como resultado carteras diferentes que pueden construirse con una misma Duración.

Cualquier inversionista que adquiere una cartera de valores de ingreso fijo esta tomando una decisión de Duración, conciente o inconcientemente.

4.3 VENTANA DE DURACION.

En el capítulo 1, fue mostrado que dos valores con el mismo rendimiento al vencimiento son perfectos sustitutos siempre que el rendimiento al vencimiento no cambie en el tiempo. El rendimiento al vencimiento simplemente convierte la tasa de crecimiento del valor de cada bien a través del tiempo conforme los flujos de efectivo son reinvertidos a la misma tasa. Si V unidades monetarias son invertidas en dos valores teniendo el rendimiento al vencimiento anual r, entonces después de k periodos la inversión produce un valor de $(1+r)^k V$ sin considerar como se reinvierten los flujos de efectivo, mientras sean reinvertidos en valores que tienen el mismo rendimiento al vencimiento anual r. En este caso, con un rendimiento al vencimiento invariable a través del tiempo, la Duración y otras características de los valores son irrelevantes porque los valores son sustitutos perfectos. Sin embargo, si las tasas de interés cambian, la sustituibilidad perfecta se rompe, y la tasa de rendimiento de la inversión no será la misma para cada valor.

Para examinar los efectos de los cambios en rendimiento, se adoptará un esquema particular de análisis. Primero, sea una cartera de valores adquirida inicialmente por un valor de V, V=V(r) unidades monetarias, donde r es el rendimiento al vencimiento al cual todos los bienes de la cartera estan valuados y donde r, como antes, es medida como la tasa de interés en el periodo de los flujos de efectivo. Escribiendo V(r) en esta forma, significa que el valor de la cadena de ingresos adquirida inicialmente es una función de r. Segundo, sea r' la nueva tasa de rendimiento al vencimiento, donde r' puede ser mayor o menor que r, y el cambio se da instantáneamente después de que la cartera de valores es adquirida. Por tanto, si r'>r, habrá un decremento en el valor de la inversión a V(r'); y si r'<r, habrá un incremento en el valor de la inversión a V(r'). Tercero, supóngase que r' es, también, la tasa de crecimiento para el valor de la inversión por el resto de vida de la cartera. Esto es, se hará que todos los flujos de efectivo sean reinvertidos a la tasa r' conforme se van recibiendo. Después del cambio de tasa a r' no importa como los flujos de efectivo son reinvertidos, porque si r' permanece invariable de ahí en adelante, todos los bienes se convierten en sustitutos perfectos. Al final de k periodos, el valor del fondo de inversión será:

$$Vk = (1+r')^{k} V(r') \qquad (4.4)$$

Este crecimiento está mostrado en la figura 4-1. En ese diagrama, V(r), el valor inicial de la inversión, esta indicado en el eje vertical en el tiempo t=0. Si el rendimiento al vencimiento permanece invariable a través del tiempo, ésta cantidad producirá $(1+r)^{k} V(r)$ como se indica en la línea vertical a través del punto sobre el eje horizontal donde el tiempo t=k. Si las tasas de interés cambian a r', con r'>r, entonces el valor de la inversión inicial cae instantáneamente a V(r'), también indicado en el eje vertical en t=0. De ahí en adelante, sin embargo, el fondo de inversión gana a la tasa alta r' y se convierte en $(1+r')^{k} V(r')$, una cantidad que excede a $(1+r)^{k} V(r)$; este ejemplo muestra que

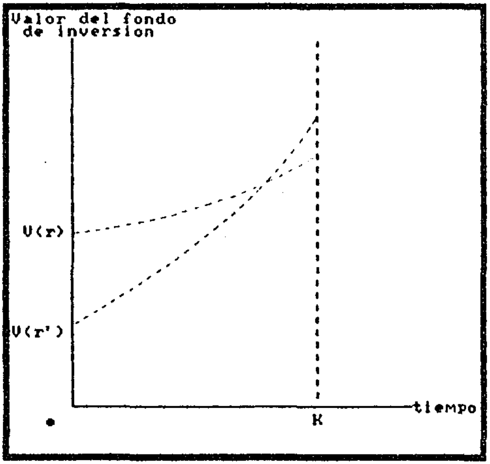

FIGURA 4-1. IMPACTO DE LAS TASAS DE INTERES SOBRE EL CRECIMIENTO DEL FONDO DE INVERSION.

existen, efectos compensadores producidos por el cambio en el rendimiento al vencimiento. Primero, hay pérdida de capital, V(r)-V(r'), producido por el incremento inicial de rendimientos, y después es compensado en el tiempo por reinversión a la tasa alta r'. Esas tendencias compensadoras pueden ser vistas en la ecuación (4.4). Conforme r' crece, V(r') decrece, pero (1+r') crece. Los dos términos en la ecuación (4.4) se mueven en direcciones opuestas a un cambio en el rendimiento al vencimiento.

Un ejemplo numérico, aclarará una de las principales ideas involucradas en la descripción de las tendencias compensadoras en el tiempo de las trayectorias de crecimiento descritas en la figura 4-1.

EJEMPLO. Considérense las mismas características del ejemplo de la sección anterior. La cartera consiste de dos bonos a la par con tasas de cupón del 10%. Uno de los bonos es a 10 años con una duración de 13.085331 semestres, y el otro es un bono a 20 años con duración de 18.07034 semestres. Supóngase que se invierten $100,000,000 en esa cartera cuya duración es de 16 semestres. Como se mostró, se requiere que la cartera contenga 4,089.93 bonos a 10 años y 5,910.07 bonos a 20 años. Al precio de $10,000 por cada bono a la par, $40,899,300 es invertido en bonos a 10 años y $59,100,700 en bonos a 20 años, para tener un fondo total de inversión de cien millones. La tabla 4-1 muestra lo que sucede al valor inicial de la cartera como resultado de un cambio en el rendimiento al vencimiento instantáneamente después de que la inversión de los cien millones es efectuada, y como el fondo de inversión gana valor a la nueva tasa de interés conforme pasa el tiempo. El primer renglón de la tabla (k=0), da el valor del fondo de inversión instántaneamente después de que cambia el rendimiento. Como es de esperar, cuando el rendimiento cae, el valor del fondo se incrementa y cuando el rendimiento crece el valor del fondo baja. Cada columna indica el valor después de k períodos semestrales, donde el fondo crece desde su inicio en k=0 a la tasa que se indica en la columna. Por ejemplo, cuando las tasas de interés caen del 10% al 7%, el valor inicial del fondo se incrementa a $127,700,000 pero la ganancia a la tasa anual de 7% por período va de $127,700,000 a $132,100,000 en un período, a $136,700,000 en dos períodos, a $141,500,000 en tres períodos, y así sucesivamente. Esta tabla proporciona muchos ejemplos de pares de curvas como las que se dierón en la figura 4-1, donde hay un cambio en el valor inicial de la inversión y luego un crecimiento contínuo de ahí en adelante a la nueva tasa.

La característica más importante que se muestra en la tabla 4-1 es el valor del fondo para cada cambio en el rendimiento después de 16 semestres. Si esas tasas de interés no cambian y se mantiene la tasa anual del 10%, el fondo de inversión produce $218,300,000 al final del período semestral número 16. Observando los valores de los fondos de inversión después del período 16, en los casos en donde hubo cambios en los rendimientos, se tiene que no hay un sólo caso en el cual el valor del fondo de inversión se encuentra por debajo de $218,300,000. Efectivamente, en la mayoría de los casos el valor del fondo excede ligeramente a esa cantidad. Al período semestral número 16 se le llama **VENTANA DE DURACION**. No importa el cambio en el rendimiento que pudiera haber, depués del período 16 el valor acumulado del fondo de inversión no caera por debajo de dicho nivel, el cual se obtendría si no hay cambios en rendimiento. La Ventana en el período semestral 16 representa un intervalo con una cota inferior de $218,300,000 a través de la cual todas las trayectorias de inversión deben pasar en este ejemplo. La figura 4-2 muestra la Ventana de Duración y tres de las trayectorias de inversión. El diagrama muestra las dos trayectorias de inversión más extremas para 13% y 7%. Estas pueden ser comparadas con la trayectoria de inversión del 10%. Las trayectorias que no fueron graficadas mostrarían las mismas características si se compararan con la trayectoria del 10%.

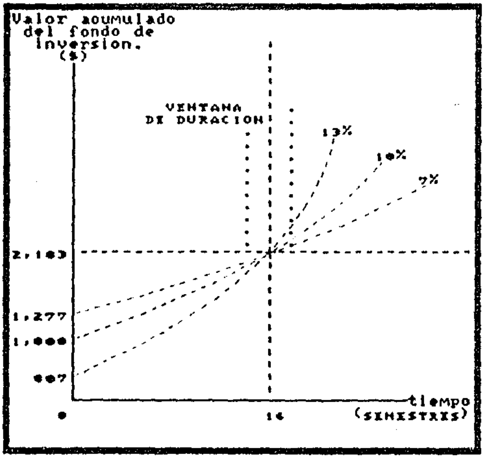

FIGURA 4-2. LA ACUMULACION DE LA INVERSION Y LA DURACION.

Las tendencias compensadoras mostradas en la figura 4-1 y representadas en la ecuación (4.4) pueden ahora ser establecidas con gran precisión de la siguiente forma:

> **EL TIEMPO REQUERIDO PARA QUE UNA ACUMULACION DE CAPITAL COMPENSE CUALQUIER PERDIDA O GANANCIA DE CAPITAL ORIGINADO POR ALGUN CAMBIO EN RENDIMIENTOS ES EXACTAMENTE IGUAL A LA DURACION INICIAL DE LA CARTERA.**

No sólo son el precio y la reinversión los efectos compensadores, sino que también el periodo de crecimiento sobre el cual la inversión se efectua, éste es exactamente el mismo sin considerar la dirección o magnitud del cambio inicial en rendimientos. Este resultado se cumple para todas las carteras así construidas. La Ventana de Duración ocurrirá siempre en la Duración de la cartera; virtualmente cada trayectoria de reinversión debe pasar a través de esta Ventana por algún punto no inferior que el nivel señalado por la trayectoria de inversión correspondiente al caso para el cual no hay cambio en la tasa de interés. A continuación se da la demostración matemática de la validez del resultado que se acaba de expresar.

En el ejemplo con la figura 4-2 y los datos de la tabla 4-1 mostrarón que el valor de un fondo de inversión pasará a través de la Ventana de Duración sin considerar el cambio en rendimiento al vencimiento inicial.

DEMOSTRACION.

El valor inicial del fondo de inversión puede ser expresado como:

$$V(r) = \sum_{t} Ft(1+r)^{-t} \tag{4.6}$$

donde r es el rendimiento al vencimiento para periodos sobre los cuales se obtienen flujos de efectivo, donde Ft es el flujo de efectivo en el periodo t. Inmediatamente después de la adquisición de la cadena de ingresos de una cartera, el rendimiento cambia a r'. Esto provoca que V(r) cambie a V(r'), de ahí en adelante, la inversión gana intereses a una tasa r' por periodo así que después de k periodos, el valor del fondo de inversión es:

$$Vk(r') = (1+r')^{k} V(r') , \tag{4.7}$$

y si no hay cambio en el rendimiento al vencimiento el valor acumulado (se esta suponiendo reinversión) será:

$$Vk(r) = (1+r)^{k} V(r) \tag{4.8}$$

Sea D la Duración inicial del fondo de inversión; esto es, D es calculada a una tasa r. Si el valor del fondo de inversión pasa a través de la Ventana de Duración para cualquier cambio en rendimiento, entonces se debe cumplir que:

$$V_D(r') > V_D(r) \tag{4.9}$$

ya que, si D=k, el valor del fondo de inversión para r' no puede caer por debajo del nivel $V_D(r)$.

El método para demostrar que la Ventana de Duración cumple con la ecuación (4.9) es el siguiente.

PRIMERO.

Se demostrará que $V_k(r')$ es una función estrictamente convexa de r'. Esto significa que la gráfica de la función $V_k(r')$, para cualquier valor de k, tiene la forma de la figura 4-5. Tal curva es estrictamente convexa cuando dados dos puntos diferentes cualesquiera A y B en la gráfica, todos los puntos de la recta que conecta a A con B (excluyendo a A y B) caen por arriba de la curva.

SEGUNDO.

Dado que la curva es estrictamente convexa, tendrá un valor mínimo C, si la pendiente de la curva en ese punto es cero. Esto quiere decir, como puede verse en la gráfica de $V_k(r')$, que para cualquier valor de r', $V_k(r')$ no puede caer por debajo del valor mínimo. Este punto mínimo será la entrada de la Ventana de Duración porque ningún valor de $V_k(r')$ puede caer por debajo.

TERCERO.

Se mostrará que $V_D(r')$ tiene su punto mínimo en r'=r, así que $V_D(r')$ nunca estará por debajo de $V_D(r)$.

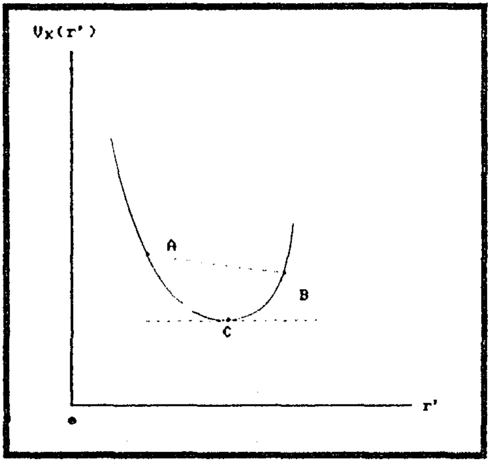

Figura 4-5. LA ACUMULACION DE LA INVERSION COMO UNA FUNCION CONVEXA DEL RENDIMIENTO.

(I) **CONVEXIDAD ESTRICTA.**

Sustituyendo la ecuación (4.6), valuada en r', en la ecuación (4.7) se tiene

$$V_k(r') = (1+r') \sum_{t}^{k} F_t(1+r')^{t}$$

$$= \sum_{t} F_t(1+r')^{k-t} \qquad (4.10)$$

Esta función será estrictamente convexa si la segunda derivada es positiva, porque eso significa que la pendiente de la curva V(r') se incrementa conforme r' crece. La primera derivada de la ecuación (4.10) con respecto a r' es:

$$dV_k(r')/dr' = \sum F_t(k-t)(1+r')^{k-t-1} \qquad (4.11)$$

La derivada de ésta ecuación con respecto a r' da la segunda derivada. Por tanto,

$$d^2 V_k(r')/dr' = \sum_t F_t(k-t)(k-t-1)(1+r')^{k-t-2} \qquad (4.12)$$

Esta expresión es siempre positiva, ya que F_t y $(1+r')^{k-t-2}$ son siempre positivos y:

(1) Cuando $t < k-1$

El producto $(k-t)(k-t-1)$ es el producto de dos números positivos y por tanto es positivo y los demás términos de la función $d^2 V_k(r')/dr'$ también lo son y por tanto toda la función es positiva.

(2) Cuando $t > k+1$

$(k-t)(k-t-1)$ es el producto de dos números negativos y por tanto es positivo, y como todos los demás términos de la función $d^2 V_k(r')/dr'$ son positivos, entonces toda la función es positiva.

(3) Cuando $t = k$ ó $t = k+1$

En este caso se tiene que $(k-t)$ o $(k-t-1)$ son cero y por tanto el término k o el k-1 de $d^2 V_k(r')/dr'$ serían cero, y como se esta suponiendo que se tiene una cartera con flujos de efectivo $F_t > 0$ entonces $d^2 V_k(r')/dr'$ es positiva. Ahora hay que analizar los dos casos siguientes (muy especiales) en donde la función $d^2 V_k(r')/dr'$ se hace cero:

(i) si $t = k$ y todos los flujos F_t son cero excepto $F_k > 0$ entonces:

$$V_k(r') = F_k$$

Esto es se tiene una cartera que asegura un pago único y que no depende de r' (puede ser visto como un bono con cupón cero) y por tanto para cualquier cambio en rendimiento se tendrá siempre la misma Duración.

(ii) si $t = k-1$ y todos los flujos F_t son cero excepto $F_{k-1} > 0$ entonces:

$$V_k(r') = F_{k-1}(1+r') = F_{k-1} + F_{k-1}(r')$$

En este caso tan especial se tiene que la gráfica de la función $V_k(r')$ es una recta y que su mínimo lo alcanza en $r'=0$ y por tanto el valor de la inversión no caera por debajo de $V_k(0)$, esto implica que la Ventana de Duración está dada por $V_k(0)$. En este caso no se es inmune a cambios en rendimientos, si el rendimiento inicial es diferente de cero.

Los casos (i) y (ii) se dan sólo cuando $k=1$ o $k=2$, es decir que el tamaño del período de inversión es de 1 o 2 períodos.

(II) EL PUNTO MINIMO.

Dado que la curva $V_k(r')$ es estrictamente convexa, ésta función tendrá un punto r' para el cual su primera derivada es cero. Reescribiendo la ecuación (4.11) sobre la suposición de que la derivada es cero se tiene que:

$$V_k'(r') = \sum F_t(k-t)(1+r')^{k-t-1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_t F_t(k-t)(1+r')^{-t}(1+r')^{k-1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_t F_t(1+r')^{-t}(k-t) = 0$$

$$\sum_t kF_t(1+r')^{-t} - \sum_t tF_t(1+r')^{-t} = 0$$

$$kV(r') = \sum_t tF_t(1+r')^{-t}$$

$$\therefore \quad k = [\sum_t tF_t(1+r')^{-t}]/V(r')$$

y esto último es la Duración de una cadena de ingresos fijos.

(III) LA VENTANA DE DURACION.

Se tiene que el punto mínimo de $V_k(r')$ se alcanza en

$$k = [\sum tF_k(1+r')^{-t}]/V(r')$$

la cual es la Duración, es decir $k = D$, y por tanto la existencia de la Ventana de Duración queda probada. Así se puede afirmar que:

PARA CUALQUIER PERIODO K PARA EL CUAL $V_k(r')$ ES UNA FUNCION ESTRICTAMENTE CONVEXA, SE PUEDE ESTAR SEGURO QUE LOS INGRESOS DE LA CARTERA PASAN A TRAVES DE LA VENTANA DE DURACION SI LA CARTERA DE VALORES ELEGIDA AL INICIO ES TAL QUE K = D.

4.4 EL PERIODO DE PLANEACION.

Las instituciones financieras (compañías de seguros de vida, compañías de seguros de daños, sociedades de crédito, accionistas individuales y algunas otras) establecen fondos de inversión con diferentes propósitos, los cuales pueden variar ampliamente. Para muchas de esas entidades financieras, los fondos de inversión son destinados a usos futuros particulares. Una entidad financiera podría requerir convertir algunos o todos sus fondos de inversión en efectivo para cumplir con obligaciones planeadas de deuda, pago de impuestos, pago de nómina, objetivos de inversión real, gastos de consumo, compromisos de dividendos, o preveer otras obligaciones con requerimientos de efectivo para crecimiento en fechas futuras, es decir, desea la coversión de la inversión y sus ganancias a efectivo en la fecha de terminación de la inversión. A la longitud de tiempo en la que el fondo de inversión está activo es llamado **PERIODO DE PLANEACION**.

Muchos inversionistas, podrían no tener bien definidos sus períodos de planeación. Sus fondos de inversión consisten de ahorros que son destinados para gastos futuros desconocidos, que podrían presentarse y por tanto requerir una conversión a efectivo. Esos inversionistas tienen períodos de planeación inciertos. Sin embargo, en la formación de sus fondos de inversión, pueden ser vistos por lo general considerando los posibles valores acumulados de sus fondos en varias fechas futuras. Analiticamente podría ser bueno dar probabilidades a las fechas de conversión y hacer que el accionista describa tales probabilidades. Por ejemplo, un accionista puede invertir una porción importante de sus activos en certificados de depósito, conociendo completamente que las conversiones de efectivo requeridas antes de que transcurra el período de inversión implican un recargo y por tanto una tasa de rendimiento menor, pero aun así el accionista puede decidir invertir porque le atribuye una menor probabilidad al evento de requerir una liquidación prontamente. Conociendo o teniendo alguna noción de las probabilidades de cuando se requerirá una conversión, permite al inversionista arreglar muchos fondos de inversión, a cada uno con diferente período de planeación, para permitir las conversiones de efectivo a costo mínimo. En otras palabras, el inversionista es visto como manteniendo una posición de liquidez planeada que le permite encontrar conversiones probables de un fondo a otro en fechas futuras. Aun cuando los períodos de planeación para esos inversionistas sean inciertos, pueden diseñar cada fondo de inversión imaginando que tiene un período de planeación bien definido. Aun así las cantidades anticipadas de conversión de efectivo podrían no ser las actuales, los inversionistas pueden dar una muy buena aproximación para minimizar costos de transacciones inesperadas.

El tamaño del período de planeación depende de muchas consideraciones subjetivas. Un inversionista que esta completamente seguro de que las tasas de interés caerán puede diseñar un fondo que contenga bonos premiados y a la par con vencimientos muy grandes y con tasas de cupón lo más bajas posibles. Del capítulo anterior, se sabe que tales bonos tienen

Duraciones relativamente grandes y que cualquier baja en las tasas de interés implicará un crecimiento máximo en el valor del fondo. Tal inversionista tiene un período de planeación generado por su fuerte creencia de que las tasas de interés bajarán. El período de planeción para el fondo de inversión podría ser tan grande como el período futuro sobre el cual se prevee que las tasas caeran. Sin embargo, hay que hacer notar que si se incrementasen en vez de bajar, el inversionista podría experimentar una pérdida considerable de capital (ver el primer renglón de la tabla 5-1). Este período de planeación del inversionista puede se visto como influenciado por fuertes creencias de lo que sucederá en los mercados financieros, y a su la disposición para aceptar el riesgo en caso de estar en error. El período de planeación esta afectado por la posición especulativa del inversionista.

Como se definió, muchas entidades financieras tienen muchos y diferentes períodos de planeación porque tienen muchas fechas futuras a las cuales son planeadas conversiones de efectivo. Es posible diseñar y manejar una sola cartera de valores financieros que satifaga cada uno de los requerimientos de liquidación al final de cada período de planeación. No es necesario que haya un fondo de inversión por cada período de planeación. Sin embargo, en el resto del capítulo, se supondrá que hay un sólo período de planeación correspondiente a cada fondo de inversión. Esto no sólo simplifica el análisis, sino que da una fundamentación para el estudio de los diseños de cartera para cumplir con los requerimientos de conversión de efectivo de períodos múltiples.

4.5 DURACION Y EL PERIODO DE PLANEACION.

La tabla 4-1 contiene un ejemplo de las relaciones entre el valor acumulado de un fondo de inversión, el período para el cual el fondo esta activo (período de planeación), y la Duración del fondo de inversión. Para ver la relación más claramente, los valores en la Tabla 4-1 son transformados en tasas obtenidas de rendimiento para varios períodos. La tasa obtenida de rendimiento ρ es tal que satiface la siguiente ecuación:

$$100{,}000{,}000\ (1+\rho)^{k} = (1+r')^{k}\ V(r')\ , \qquad (4.1d)$$

donde, como antes r' es el nuevo rendimiento al vencimiento determinado instántaneamente después de que la inversión inicial ha sido efectuada y donde r' es la tasa de interés apropiada para los intervalos entre los flujos de efectivo. Esto es, $r'=r/n$, donde r es el nuevo rendimiento anualizado y n es el número de períodos en que se ha dividido el año para determinar la tasa de interés para las fechas entre los flujos de efectivo. En la tabla 4-1, n es igual a 2 porque ese ejemplo es para bonos con pago de cupón semestral. El lado derecho de la ecuación (4.1d) proporciona el valor acumulado del fondo de inversión para k, el número de períodos, y r', el nuevo rendimiento al vencimiento. El lado izquierdo de la ecuación, en efecto, es el mismo monto pero expresado como producto de la inversión inicial y el término $(1+\rho)^{k}$, el cual da la tasa obtenida de rendimiento para k períodos; esto es, la tasa obtenida anual es $R=n\rho$ donde $n=2$. Cabe destacar que R es también una función de k y r. Es posible reconstruir la tabla 4-1 en términos de la tasa obtenida de rendimiento R. La tabla 4-2 provee las correspondientes tasas obtenidas de rendimiento. En esta tabla no importa el valor del fondo de inversión inicial, y se puede decir con seguridad, como el fondo crece por cada período de tiempo en cada nuevo rendimiento al vencimiento.

La tasa obtenida de rendimiento incorpora la pérdida o ganancia que se obtiene cuando el rendimiento inicial cambia a r, así como la acumulación de intereses provenientes de los flujos de efectivo y sus reinversiones. Esto es particularmente claro cuando se consideran los casos extremos en la tabla 4-1. Considerando la drástica caída en las tasas del 10% al 7%. Esto provoca muy altas ganancias en capital relativas al ingreso por los intereses en 6 meses y esto es porque la tasa obtenida de rendimiento anual es 64.24% en el primer semestre. En el otro extremo, supóngase que los rendimientos se incrementan de 10% a 13%. Esto genera una enorme pérdida de capital, así que la tasa obtenida de rendimiento anual después de seis meses es -28.11%; el ingreso por intereses en 6 meses no es suficiente para producir una tasa de rendimiento neta positiva. Aun así, después de 13 años (26 semestres) la reinversión de los flujos de efectivo a la tasa más alta de 13% produce una tasa obtenida de rendimiento anual de 11.25%, esto suaviza el impacto de la pérdida de capital inicial.

La tasa de rendimiento obtenida para períodos seleccionados de tiempo y rendimientos al vencimiento r está gráficada en la figura 4-3. Cada línea en la gráfica corresponde a períodos particulares sobre los cuales el fondo es invertido.

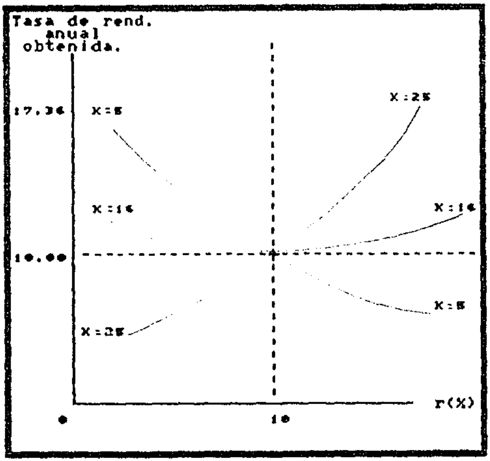

FIGURA 4-3. LA ACUMUALCION DE LA INVERSION PARA DIFERENTES PERIODOS DE INVERSION Y DIFERENTES CAMBIOS EN TASA DE RENDIMIENTO.

La línea para 16 semestres representa la tasa obtenida de rendimieto anual, descrita en el reglón para k=16 de la tabla 4-2. Los efectos de la Ventana de Duración son inmediatamente claros. La tasa obtenida de rendimiento anual nunca es menor que 10% para este período de tiempo sin embargo el ingreso puede ser ligeramente superior que 10% como muestra la tabla 4-2. Si la cartera es liquidada en exactamente 16 meses, la tasa obtenida de rendimiento anual no caera por debajo del 10% sin considerar la dirección o magnitud de cambio en tasas de interés. La cartera de valores es llamada INMUNIZADA, porque el ingreso de la cartera no es afectado por los cambios provenientes en tasas de interés; la tasa obtenida de rendimiento nunca puede caer por debajo del nivel de entrada de la Ventana de Duración. Este resultado se cumple de manera general y la regla puede ser establecida como sigue:

SI UNA CARTERA DE VALORES ES SELECCIONADA DE TAL FORMA QUE SU DURACION ES EXACTAMANTE IGUAL A EL TAMAÑO DEL PERIODO DE PLANEACION, LA CARTERA ES INMUNIZADA ASI QUE LA TASA OBTENIDA DE RENDIMIENTO ANUAL NO PUEDE CAER POR DEBAJO DEL RENDIMIENTO AL VENCIMIENTO INICIAL AL CUAL LOS VALORES FUERON COMPRADOS.

Por otro lado, considérese el renglón para el cual k=5. La tasa obtenida de rendimiento anual baja de 17.36% a 4.06% conforme el rendimiento al vencimiento cambia de 7% a 13%. Aquí el efecto de pérdida o ganancia de capital inicial domina el ingreso durante 5 períodos semestrales. Cinco períodos, con reinversión al 13%, no son suficientes para cubrir las pédidas iniciales cuando el rendimiento al vencimiento cambia de 10% al 13%; ni es la tasa baja de reinversión del 7% suficiente para disipar las grandes ganancias en capital hechas cuando el rendimiento al vencimiento cambia de 10% a 7%. Si el período de planeación fue de 5 períodos semestrales, una cartera que tiene una duración de 16 períodos semestrales resulta con ganancias o pérdidas de capital, dominando así el rendimiento obtenido sobre el período de planeación. Si un inversionista construye una cartera de valores para la cual la Duración excede el período de palneación se dice que esta llendo en largo (going long).

El ejemplo puede ser generalizado para cubrir cualquier período o Duración de cartera. La regla general puede ser establecida como sigue:

SI LA DURACION DE CARTERA EXCEDE AL TAMAÑO DEL PERIODO DE PLANEACION, LAS PERDIDAS O GANANCIAS EN CAPITAL INCORPORADAS EN LA TASA OBTENIDA DE RENDIMIENTO ANUAL Y RESULTANTES DE CAMBIOS EN EL RENDIMIENTO INICIAL, DOMINARA EL INGRESO POR REINVERSION SOBRE EL PERIODO DE PLANEACION.

Esto es, si los rendimientos decrecen, las ganancias resultantes en capital implican que la tasa obtenida de rendimiento anual excede el rendimiento al vencimiento inicial; y si el rendimiento decrece, la pérdida resultante de capital implica que la tasa obtenida de rendimiento anual será menor que el rendimiento al vencimiento inicial.

Ahora considérese el renglón para k=25. En contraste con el caso anterior, la tasa obtenida de rendimiento es ahora dominada por el ingreso de reinversión. Suficiente tiempo ha pasado desde el cambio en el rendimiento inicial para que los efectos en reinversión suavizaran las pérdidas o ganancias en el capital inicial. Para el período de planeación de 25 semestres, la Duración de cartera de 16 períodos semestrales es menor que el período de planeación. Tal inversionista va en corto. La regla general puede ser establecida como:

SI LA DURACION DE UNA CARTERA ES MENOR QUE EL PERIODO DE PLANEACION, EL INGRESO DE REINVERSION INCORPORADO EN LA TASA OBTENIDA DE RENDIMIENTO DOMINARA CUALQUIER PERDIDA O GANANCIA EN EL CAPITAL INICIAL RESULTANTE DE LOS CAMBIOS EN EL RENDIMIENTO.

4.6 CAMBIOS DE RENDIMIENTO EN PERIODOS MULTIPLES Y ESTRATEGIA DE INVERSION BASADA EN DURACIONES DINAMICAS.

El modelo analítico de las dos secciones previas es muy simple. Una cartera de valores es seleccionada. Instantáneamente después de esta selección el rendimiento al vencimiento cambia impredeciblemente y se mantiene constante de ahí en adelante, en la realidad, los rendimientos sobre valores cambian frecuentemente en respuesta a cambios constantes en demanda y condiciones de oferta en los mercados financieros. Sin embargo el modelo anterior debe ciertamente ser visto como irreal en vista de los frecuentes cambios en rendimientos, y por lo tanto puede ser extendido para cubrir situaciones más realistas.

Para modificar el modelo, hay que asumir ahora la siguiente secuencia de eventos durante el período de planeación del inversionista. Al inicio de cada período el inversionista construye una cartera de valores. Instántaneamente después de que esa cartera se construye, el rendimiento al vencimiento sobre los valores adquiridos cambia de manera impredecible. Este proceso se continúa de la misma forma a través del tiempo hasta el final del período de planeación. En otras palabras, este nuevo modelo permite repetición continua, período tras período, de lo que previamente estaba restringido sólo para el inicio del primer período, en el modelo anterior.

Las consecuencias de la estrategia de inmunización pueden ser descritas geométricamente dentro de este modelo. La figura 4-4 muestra los resultados de seguir la estrategía de inmunización en la cual la Duración de la cartera al principio de cada período es igualada a lo que resta del período de planeación. Sea el período de planeación al inicio (t=0) igual a q períodos como se muestra en la abscisa en la figura 4-4. Siguiendo la estrategia de

PERIODO K	RENDIMIENTO ANUAL (REDONDEADO A CIENTOS DE MILLAR) 7.0%	7.5%	8.0%	8.5%	9.0%	9.5%	10.0%	10.5%	11.0%	11.5%	12.0%	12.5%	13.0%
0	1,277	1,223	1,173	1,125	1,101	1,039	1,000	0,963	0,928	0,895	0,864	0,835	0,807
1	1,321	1,269	1,219	1,173	1,130	1,089	1,050	1,014	0,979	0,947	0,916	0,887	0,859
2	1,367	1,316	1,268	1,223	1,180	1,140	1,103	1,068	1,033	1,001	0,971	0,942	0,915
3	1,415	1,366	1,319	1,275	1,234	1,195	1,158	1,123	1,090	1,059	1,029	1,001	0,975
4	1,465	1,417	1,372	1,329	1,289	1,251	1,216	1,182	1,150	1,120	1,091	1,064	1,038
5	1,516	1,470	1,427	1,386	1,347	1,311	1,276	1,244	1,213	1,184	1,156	1,130	1,106
6	1,569	1,525	1,484	1,445	1,408	1,373	1,340	1,309	1,280	1,252	1,226	1,201	1,178
7	1,624	1,582	1,543	1,506	1,471	1,438	1,407	1,378	1,350	1,324	1,299	1,276	1,254
8	1,681	1,642	1,605	1,570	1,537	1,506	1,477	1,450	1,424	1,400	1,377	1,356	1,336
9	1,740	1,703	1,669	1,637	1,606	1,578	1,551	1,526	1,503	1,481	1,460	1,441	1,422
10	1,801	1,767	1,736	1,706	1,679	1,653	1,629	1,606	1,585	1,566	1,548	1,531	1,515
11	1,864	1,833	1,805	1,779	1,754	1,731	1,710	1,691	1,673	1,656	1,640	1,626	1,613
12	1,929	1,902	1,877	1,854	1,833	1,814	1,796	1,780	1,765	1,751	1,739	1,728	1,718
13	1,996	1,973	1,952	1,933	1,916	1,900	1,886	1,873	1,862	1,852	1,843	1,836	1,830
14	2,066	2,047	2,030	2,015	2,002	1,990	1,980	1,971	1,964	1,958	1,954	1,951	1,949
15	2,139	2,124	2,112	2,101	2,092	2,085	2,079	2,075	2,072	2,071	2,071	2,073	2,075
16	2,213	2,203	2,196	2,190	2,186	2,184	2,183	2,184	2,186	2,190	2,195	2,202	2,210
17	2,291	2,286	2,284	2,283	2,285	2,287	2,292	2,298	2,306	2,316	2,327	2,340	2,354
18	2,371	2,372	2,375	2,380	2,387	2,396	2,407	2,419	2,433	2,449	2,467	2,486	2,507
19	2,454	2,461	2,470	2,482	2,495	2,510	2,527	2,546	2,567	2,590	2,615	2,641	2,670
20	2,540	2,554	2,569	2,587	2,607	2,629	2,653	2,680	2,708	2,739	2,771	2,806	2,844
21	2,629	2,649	2,672	2,697	2,724	2,754	2,786	2,820	2,857	2,896	2,938	2,982	3,028
22	2,721	2,749	2,779	2,812	2,847	2,885	2,925	2,968	3,014	3,063	3,114	3,168	3,225
23	2,816	2,852	2,890	2,931	2,975	3,022	3,072	3,124	3,180	3,239	3,301	3,366	3,435
24	2,915	2,959	3,006	3,056	3,109	3,165	3,225	3,288	3,355	3,425	3,499	3,577	3,658
25	3,017	3,070	3,126	3,186	3,249	3,316	3,386	3,461	3,539	3,622	3,709	3,800	3,896
26	3,122	3,185	3,251	3,321	3,395	3,473	3,556	3,643	3,734	3,830	3,931	4,038	4,149

TABLA 4-1. VALOR DE UNA CARTERA CON UNA DURACION DE 15 PERIODOS DE 6 MESES PARA VARIOS CAMBIOS EN EL RENDIMIENTO SEMESTRALMENTE. EL VALOR INICIAL DE LA CARTERA ES MIL MILLONES Y EL RENDIMIENTO INICIAL ES DE 10%.

PERIODO	RENDIMIENTO ANUAL												
K	7.0%	7.5%	8.0%	8.5%	9.0%	9.5%	10.0%	10.5%	11.0%	11.5%	12.0%	12.5%	13.0%
1	64.24	53.74	43.89	34.63	25.92	17.73	10.00	2.71	- 4.16	-10.66	-16.80	-22.61	-28.11
2	33.87	29.46	25.23	21.10	17.30	13.57	10.00	6.57	3.28	0.12	- 2.92	- 5.85	- 8.65
3	24.55	21.89	19.53	16.87	14.50	12.21	10.00	7.87	5.82	3.84	1.93	0.09	- 1.69
4	20.03	18.20	16.44	14.74	13.11	11.53	10.00	8.53	7.10	5.73	4.90	3.12	1.88
5	17.36	16.02	14.73	13.48	12.20	11.12	10.00	8.92	7.88	6.87	5.90	4.96	4.06
6	15.60	14.58	13.59	12.64	11.73	10.85	10.00	9.18	8.39	7.63	6.90	6.20	5.52
7	14.35	13.55	12.78	12.05	11.34	10.66	10.00	9.37	8.76	8.18	7.62	7.09	6.57
8	13.41	12.78	12.18	11.60	11.04	10.51	10.00	9.51	9.04	8.59	8.17	7.76	7.37
9	12.69	12.19	11.71	11.25	10.82	10.40	10.00	9.62	9.26	8.92	8.59	8.28	7.99
10	12.12	11.72	11.34	10.98	10.63	10.31	10.00	9.71	9.43	9.17	8.93	8.70	8.48
11	11.65	11.33	11.03	10.75	10.48	10.23	10.00	9.78	9.57	9.38	9.20	9.04	8.89
12	11.25	11.01	10.78	10.56	10.36	10.17	10.00	9.84	9.69	9.56	9.44	9.33	9.23
13	10.92	10.74	10.56	10.40	10.26	10.12	10.00	9.89	9.79	9.71	9.63	9.57	9.52
14	10.64	10.50	10.38	10.27	10.17	10.00	10.00	9.93	9.88	9.83	9.81	9.78	9.76
15	10.40	10.30	10.22	10.15	10.09	10.04	10.00	9.97	9.95	9.95	9.95	9.96	9.98
16	10.18	10.13	10.08	10.04	10.02	10.00	10.00	10.00	10.02	10.04	10.07	10.12	10.16
17	9.99	9.97	9.96	9.95	9.96	9.98	10.00	10.03	10.08	10.13	10.19	10.25	10.33
18	9.83	9.83	9.85	9.87	9.91	9.95	10.00	10.06	10.13	10.20	10.29	10.38	10.48
19	9.68	9.71	9.75	9.80	9.86	9.93	10.00	10.08	10.17	10.27	10.38	10.49	10.61
20	9.54	9.60	9.66	9.73	9.82	9.90	10.00	10.10	10.21	10.33	10.46	10.59	10.73
21	9.42	9.50	9.58	9.68	9.78	9.88	10.00	10.12	10.25	10.39	10.53	10.68	10.84
22	9.31	9.41	9.51	9.62	9.74	9.87	10.00	10.14	10.29	10.44	10.60	10.76	10.93
23	9.20	9.32	9.44	9.57	9.71	9.85	10.00	10.16	10.32	10.48	10.66	10.84	11.02
24	9.12	9.25	9.38	9.53	9.68	9.84	10.00	10.17	10.35	10.53	10.71	10.91	11.11
25	9.03	9.18	9.33	9.49	9.65	9.82	10.00	10.18	10.37	10.57	10.77	10.97	11.18
26	8.95	9.11	9.28	9.45	9.63	9.81	10.00	10.20	10.40	10.60	10.81	11.03	11.25

TABLA 4-2. RENDIMIENTOS OBTENIDOS ANUALES EN LOS INTERVALOS SEMESTRALES DE UNA CARTERA CON UNA DURACION DE 16 SEMESTRES. LA CARTERA PROPORCIONA UN RENDIMIENTO INICIAL DE 10%.

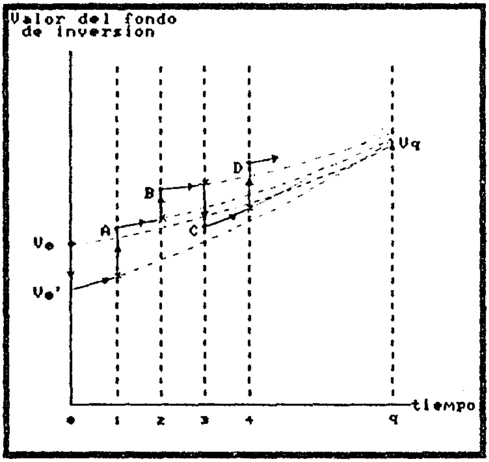

FIGURA 4-4. PLAN DINAMICO DE ACUMULACION DE INVERSION.

inmunización el inversionista asigna recursos o fondos disponibles, Vo, a valores de tal forma que la Duración de la cartera sea de q períodos. El valor Vo esta indicado en el eje vertical de la figura. Si las tasas de interés no cambian durante todo el período de planeación, el fondo de inversión crece a $Vq=(1+r)^{q} V$, esto está indica por la curva punteada que une Vo con Vq en el diagrama. Ahora, supóngase que los rendimientos al vencimiento se incrementan instantáneamente después de que Vo ha sido invertido. Esto decrece instantáneamente el valor de la cartera a algún valor Vo', como se indica en le eje vertical en el diagrama. Si los rendimientos al vencimiento no cambian durante el período de planeación, el valor de la cartera se incrementa a lo largo de la curva hasta un punto ligeramente arriba de Vq, como se muestra en el diagrama. Ya que las tasas de interés no cambian hasta que el período t=1 es alcanzado, el único punto sobre esta curva que es obtenido es el marcado con una X arriba del período t=1. Este valor acumulado en el período 1 es entonces reajustado entre valores de tal forma que su Duración sea igual a (q-1), el tiempo restante y hasta el final del período de planeación. Supóngase que instantáneamente después las tasas de interés decrecen, esto provoca un incremento en el valor acumulado en el período 1 al punto A en la figura. Ya que la cartera esta inmunizada, si no hay cambios subsecuentes en el rendimiento al vencimiento, el valor de la cartera alcanza un punto justamente arriba al punto previo en la línea vertical arriba de q. Esto debe suceder porque el punto anterior por arriba de Vq se convirtió en la entrada de la Ventana de Duración y ya que la cartera esta inmunizada para (q-1) períodos la curva de acumulación debe pasar a través de esa Ventana. El único punto sobre esta curva que puede ser alcanzado, sin embargo, es el punto marcado con una X justamente arriba del período 2. En este punto, la cartera es nuevamente reacomodada en valores de tal forma que la Duración sea igual a (q-2), el tiempo que resta del período de planeación. Nuevamente, supóngase que depués del reacomodo, los rendimientos decrecen. Esto incrementa el valor de la cartera en el período 2 a un punto marcado con B en la figura. Nuevamente, si no hay cambios subsecuentes en rendimientos, la cartera alcanza con este nuevo rendimiento un punto justamente arriba del último en la línea vertical a través de q, como se muestra en la figura con la línea punteada que va de B al final del periodo de planeación. Así continúa el proceso, para un incremento en tasas en el periodo 3, después del ajuste de la Duración y para un decremento en rendimiento para el periodo 4, la curva de ganancia de la inversión obtenida va sucesivamente al punto C y D, pero siempre a lo largo de la curva punteada que es encabezada por algún punto en la Ventana de Duración en el periodo q. Se sigue de esta descripción del proceso de crecimiento dinámico, que el valor final del fondo de inversión nunca será menor que el valor de entrada original Vq. En otras palabras, el análisis simple del modelo previo sigue siendo válido; la Ventana de Duración dada al inicio del proceso continua (hay que notar que el nivel de entrada puede incrementarse ligeramente) y el valor acumulado del fondo de inversión debe pasar a través de ella, sin considerar la dirección o magnitud de cambio en tasas de interés durante el periodo de planeación.

En el proceso dinámico descrito, el ajuste de la Duración de la cartera al inicio de cada periodo podría ser siempre necesario, ya que si la Duración al inicio de un periodo es igual a D, entonces podría no ser (D-1) al final de ese periodo como se requiere para que sea igual al periodo de planeación. Esto fue mostrado en el capitulo anterior.

Hay dos formas en que la Duración de la cartera puede ser ajustada al final de cada periodo. Primera, los flujos de efectivo recibidos pueden ser invertidos totalmente en los valores que provocan una baja en la Duración de la cartera como sea necesario. Segunda, algunos valores de la cartera pueden ser vendidos y otros pueden ser comprados según sea necesario para ajustar la Duración.

Una estrategia de inversión basada en la Duración, diferente a la de inmunización, no puede ser esquematizada de manera sencilla en la figura 4-4. Sin embargo, algunas generalizaciones acerca de lo que se puede esperar de "ir en largo" o "ir en corto" son posibles. Si un inversionista "va en largo" por seleccionar siempre los valores de tal forma que la Duración exceda el tiempo en el periodo de planeación, entonces el inversionista asegura un ingreso mayor o menor que el ingreso inmunizado de acuerdo a la dirección de cambio de las tasas de interés durante el periodo de planeación. Los resultados esperados son a la inversa si el inversionista "va en corto" seleccionando duraciones menores que el tiempo que resta del periodo de planeación.

4.7 ILUSTRACION NUMERICA DE LA ESTRATEGIA DE INVERSION INMUNIZADA CON DURACION DINAMICA.

La figura 4-4 muestra muy bien en un sólo diagrama como la estrategia de inversión inmunizada fuerza a que el valor de liquidación final de la cartera pase a través de la Ventana de Duración. Detrás de esto, sin embargo, hay ajustes continuos de cartera que son necesarios para hacer esto posible. En esta última sección se muestra numéricamente, los ajustes que deben efectuarse en la composición de la cartera para forzar a que el valor final de la cartera pase a través de la Ventana de Duración.

Para simplificar el ejemplo, se considerará una cartera con dos valores del Sistema Financiero, suponiendose que los rendimientos cambian trimestralmente y se harán algunas otras suposiciones que por las caracteristicas de los valores considerados, son necesarias para facilitar los calculos.

Los valores elegidos para ejemplificar la estrategia de inversión inmunizada con Duración dinámica son:

(1) Obligaciones Quirografarias de una empresa privada (CIGATAM *88), cuyas caracteristicas principales se exhiben en el cuadro 2-4.
(2) Certificados de la Tesoreria de la Federación (CETES), cuyas caracteristicas se muestran en la tabla 2-1.

Antes de pasar a efectuar los calculos del precio, Duración y proporciones de inversión en la cartera, para cada periodo, de cada uno de los valores indicados, se efectuan algunas suposiciones que ayudaran a simplificar aun más los calculos.

Por las caracteristicas de amortización, la valuación de los titulos de CIGATAM, matemáticamente puden ser vistos como una cartera de 6 bonos a la par, y como un bono cupón cero en el caso de CETES. Por esta razón, en el ejemplo sólo se consideran los bonos de la serie VI de CIGATAM *88. Estas pagan cupón los dias 13 de Enero, Abril, Julio y Octubre. Se asumirá que los CETES son adquiridos esos mismos dias. Se tiene que las obligaciones pagan cupones a una tasa flotante dependiendo del nivel de las tasa de interés del mercado. Las tasas de rendimiento y de cupón para estos valores seran supuestas, donde por tasa de rendimiento se entendera como la tasa de rendimiento libre de riesgo, siendo en el Sistema Financiero Mexicano considerada como la tasa que proporcionan los CETES a 91 días.

Se supondrá que el período de planeación es de 1.5 años (hay que hacer notar que el período de planeación debe encontrarse entre la Duración mayor y menor de los valores que forman la cartera). En las tablas 4-3 y 4-4 se dan los datos de las trayectorias de crecimiento de cada uno de los valores considerados en este ejemplo, durante el período de planeación.

PERIODOS TRANSCU-RRIDOS (K)	RENDIMIENTO ANUALIZADO POR PERIODO	PERIODOS POR TRANSCU-RRIR AL VENC.	PRECIO DEL INSTRUMENTO ($)	DURACION	TASA DE CUPON
0	0.64	15	$ 95,817.96	6.5126	0.61
1	0.63	14	98,389.47	6.4167	0.62
2	0.62	13	97,270.50	6.3410	0.60
3	0.60	12	94,579.38	6.3090	0.56
4	0.58	11	100,000.00	6.1160	0.58
5	0.59	10	101,257.79	5.7967	0.60
6	0.60	9	102,385.79	5.4548	0.62
7	0.58	8	102,281.03	5.1919	0.60
8	0.56	7	98,927.92	4.8895	0.55
9	0.48	6	102,055.70	4.5759	0.50
10	0.50	5	96,439.43	4.0514	0.46
11	0.54	4	96,387.12	3.3715	0.50
12	0.55	3	100,000.00	2.6520	0.55
13	0.54	2	100,828.65	1.8777	0.56
14	0.53	1	100,217.06	1.0000	0.54
15	0.57	0	100,000.00	0.0000	0.54

TABLA 4-3. PRECIOS Y DURACIONES DE LAS OBLIGACIONES DE CIGATAM 88, PARA LOS DIFERENTES PERIODOS. LAS TASAS DE RENDIMIENTO AQUI CONSIDERADAS SON LAS TASAS DE RENDIMIENTO LIBRE DE RIESGO (LAS CUALES ESTAN DADAS, EN EL SIST. FIN. MEX. POR LOS RENDIMIENTOS DE CETES A 91 DIAS.

PERIODOS TRANSCU-RRIDOS (K)	RENDIMIENTO ANUALIZADO POR PERIODO	PERIODOS POR TRANSCU-RRIR AL VENC.	PRECIO DEL INSTRUMENTO ($)	DURACION
0	0.64	1	$ 8,620.69	1
1	0.63	1	8,639.31	1
2	0.62	1	8,658.01	1
3	0.60	1	8,695.65	1
4	0.58	1	8,733.62	1
5	0.59	1	8,714.60	1
6	0.60	1	8,733.62	1
7	0.58	1	8,733.62	1
8	0.56	1	8,771.93	1

TABLA 4-4. PRECIOS Y DURACION DE CETES A 91 DIAS CON TASAS DE RENDIMIENTO SUPUESTAS.

Para el calculo de los datos presentados en la tabla 4-3 y 4-4 se usaron las fórmulas para obtener el precio (1.10) y la Duración (3.8) definidas en los capítulos anteriores. La primer columna en las tablas 4-3 y 4-4 indica el período de tiempo en trimestres a partir de la fecha de inicio de la inversión. La siguiente columna da el rendimiento anual asumido para cada período.

La tercer columna indica el número de períodos al vencimiento. La columna 4 proporciona el precio del valor por período y la quinta columna provee la Duración del instrumento. En la tabla 4-5 se muestra detalladamente período tras período, el proceso de ajuste de la cartera. Se esta suponiendo un monto de inversión inicial en la cartera de diez millones de pesos. Para el calculo de la proporción de cada bono en la cartera se utilizó la ecuación (4.3).

A continuación se describe el detalle de los calculos que se efectuaron para obtener los resultados de la tabla 4-5 .

PERIODOS TRANSCURRIDOS (K)	0	1	2	3	4
PERIODOS POR TRANSCURRIR	6	5	4	3	2
PROPORCION INVERTIDA EN EL VALOR 1	0.0929869	0.261543	0.4383074	0.6232812	0.8045347
PROPORCION INVERTIDA EN EL VALOR 2	0.9070131	0.738457	0.5616926	0.3767188	0.1954653
NUMERO DE UNIDADES ADQUIRIDAS DE EL VALOR 1	107.0648	358.31116	688.53582	1110.3933	1670.0802
NUMERO DE UNIDADES ADQUIRIDAS DE EL VALOR 2	94.66003	88.832705	78.53849	61.704339	35.45394
MONTO DE LA INVERSION EN EL VALOR 1	929,869	3,095,561	5,961,343	9,655,592	14,592,832
MONTO DE LA INVERSION EN EL VALOR 2	9,070,131	8,740,203	7,639,484	5,835,958	3,545,394
MONTO DE LA INVERSION EN LA CARTERA	10,000,000	11,835,764	13,600,827	15,491,550	18,138,226
INGRESO POR RENDIMIENTO DEL VALOR 1 DE PERIODO A PERIODO	0	140,779	487,551	924,008	1,440,339
INGRESO POR CUPON DEL VALOR 2 DE PERIODO A PERIODO	0	1,443,566	1,376,987	1,178,077	863,861
INGRESO POR GANANCIA DE CAPITAL DEL VALOR 2	0	243,419	- 99,394	- 211,362	334,476

TABLA 4-5. ESTA TABLA MUESTRA LA TRAYECTORIA DE CRECIMIENTO DE LA CARTERA CUANDO SE SIGUE, LA ESTRATEGIA DE INVERSION INMUNIZADA CON AJUSTE COMPLETO DE LA DURACION, PERIODO TRAS PERIODO. LA CARTERA ESTA COMPUESTA POR DOS VALORES EL VALOR 1 CORRESPONDE A LOS CETES A 91 DIAS Y EL VALOR 2 A LAS OBLIGACIONES QUIROGRAFARIAS CIGATAM *88.

En $k = 0$.

En este periodo, la duración de cartera requerido es de 6 trimestres ya que el tamaño del periodo de planeación al inicio de la inversión es de 1.5 años.

(a) Usando la fórmula de Duración de cartera, se tiene que:

$$D = B_1D_1 + B_2D_2 \qquad \text{con} \qquad B_1 + B_2 = 1$$

y por tanto

$$6 = B_1(1) + (1-B_1)(6.5126)$$

$$= B_1(1-6.5126) + 6.5126$$

$$= B_1(-5.5126) + 6.5126$$

entonces las proporciones de inversión en cada valor son:

$$B_1 = (-0.5126)/(-5.5126) = 0.0929869$$

$$B_2 = (1-B_1) = 1-0.0929869 = 0.9070131$$

(b) El valor de la cartera es \$10,000,000 por ser este el monto inicialmente invertido.

(c) Para obtener el número de unidades que se deberan a adquirir de cada valor, se usa la fórmula (4.3):

$$B_m = (n_mP_m)/P \qquad \Rightarrow \qquad n_m = (B_mP)/P_m$$

entonces

$$n_1 = (0.0929869)(10,000,000)/8,620.69$$

$$= 107.8648$$

$$n_2 = (0.9070131)(10,000,000)/95,817.96$$

$$= 94.66003$$

(d) El monto invertido en cada valor es entonces:

$$V_1 = n_1P_1 = (107.8648)(8,620.69) = 929,869$$

$$V_2 = n_2P_2 = (94.66003)(95,817.96) = 9,070,131$$

En $k = 1$.

En este punto restan 5 trimestres del periodo de planeación y entonces:

(a) $5 = B_1(1) + (1-B_1)(6.4167)$

$= B_1(1-6.4167) + (6.4167)$

$B_1 = (-1.4167)/(-5.4167) = 0.261543$

$B_2 = 0.738457$

(b) Ahora el crecimiento de la certera es:

POR RENDIMIENTO DE CETES	(929,869)(0.16)	= 148,779
POR CUPON DE CIGATAM	(9,466,003)(0.1525)	=1,443,566
(mult. # de bonos por valor nominal y tasa de cupón)		
POR CRECIMIENTO EN EL VALOR DE LAS OBLIGACIONES DE CIGATAM (Valor actual menos valor anterior)	(9,313,550 - 9,070,131)	= 243,419
TOTAL		1,835,764

y por tanto la inversión alcanza el valor de:

$ 11,835,764

(c) Ahora el número de unidades de cada valor que se adquieren es:

$n_1 = (0.261543)(11,835,764)/(8,639.31) = 358.31116$

$n_2 = (0.738457)(11,835,764)/(98,389.47) = 88.832705$

(d) $V_1 = (358.31116)(8,639.31) = 3,095,561$

$V_2 = (88.832705)(98,389.47) = 8,740,203$

En k = 2.

La duración de cartera es ahora de 4 trimestres.

(a) $4 = B_1(1) + (1-B_1)(6.3410)$

$= B_1(1-6.3410) + 6.3410$

$B_1 = (-2.3410)/(-5.3410) = 0.4383074$

$B_2 = 0.5616926$

(b) El crecimiento de la inversión es:

POR RENDIMIENTO EN CETES	(3,095,561)(0.1575)	= 487,551
POR CUPON DE CIGATAM	(8,883,270)(0.155)	= 1,376,907
POR CRECIMIENTO EN EL VALOR DE LAS OBLIGACIONES DE CIGATAM	(8,640,809 - 8,740,203)	= - 99,394
TOTAL		1,765,064

y por tanto el valor de la inversión es:

$13,600,827

(c) Ahora

$n_1 = (0.4383074)(13,600,827)/(8,658.01)$

$= 688.53502$

$n_2 = (0.5616926)(13,600,827)/(97,270.58)$

$= 78.53849$

(d) $V_1 = (688.53502)(8,658.01) = 5,961,343$

$V_2 = (78.53849)(97,270.58) = 7,639,484$

En $k = 3$

(a) $3 = B_1(1) + (1-B_1)(6.3090)$

$= B_1(1-6.3090) + 6.3090$

$B_1 = (-3.3090)/(-5.3090) = 0.6232812$

$B_2 = 0.3767188$

(b) El crecimiento de la inversión es :

POR RENDIMIENTO EN CETES	(5,961,343)(0.155)	= 924,008
POR CUPON DE CIGATAM	(7,853,849)(0.15)	=1,178,077
POR CRECIMIENTO EN EL VALOR DE LAS OBLIGACIONES DE CIGATAM	(7,428,122 - 7,639,484)	=- 211,362
	TOTAL	1,890,723

Entonces el valor de la inversión alcanza el valor de:

$ 15,491,550

(c) $n_1 = (0.6232812(15,491,550)/(8,695.65)$

$= 1,110.3933$

$n_2 = (0.3767188)(15,491,550)/(94,579.38)$

$= 61.704339$

(d) $V_1 = (1,110.3933)(8,695.65) = 9,655,592$

$V_2 = (61.704339)(94,579.38) = 5,835,958$

En $k = 4$

(a) $2 = B_1(1) + (1-B_1)(6.1160)$

$= B_1(1-6.1160) + 6.1160$

$B_1 = (-4.1160)/(-5.1160) = 0.8045347$

$B2 = 0.1954653$

(b) El crecimiento de la inversión es :

POR RENDIMIENTO DE CETES	(9,655,592)(0.15)	=	1,448,339
POR CUPON DE CIGATAM	(6,170,434)(0.14)	=	863,861
POR CRECIMIENTO EN VALOR DE LAS OBLIGACIONES DE CIGATAM	(6,170,434 - 5,835,958)	=	334,476
TOTAL			2,646,676

El valor de la inversión llega a:

$ 18,138,226

(c) $n_1 = (0.8045347)(18,138,227)/(8,733.62)$

$= 1670.8802$

$n_2 = (0.1954653)(18,138,227)/(100,000)$

$= 35.45394$

(d) $V_1 = (1670.8802)(8,733.62) = 14,592,832$

$V_2 = (35.45394)(100,000) = 3,545,394$

Como puede observarse, la estrategia fue aplicada hasta el período número 4, debido a que ésta estrategia sólo es válida para intervalos de inversión superiores a dos períodos, como fue demostrado en las páginas anteriores.

CONCLUSIONES.

El desarrollo teórico del Análisis de Duración que se ha presentado, así como el ejemplo aplicativo de la estrategia de inversión inmunizada, tiene un soporte matemático formal y completo lo cual es una garantía para su confiabilidad.

En el capítulo 3 se demostró que para obtener la Duración de un valor de renta fija, unicamente se requiere del calculo de la derivada de la ecuación del precio del valor considerado, y esto simplifica grandemente los calculos para obtener Duraciones.

Se mostró que la Duración es un buen indicador del comportamiento del precio con respecto a la tasa de rendimiento. La aplicación de ese resultado del Análisis de Duración, en la toma de decisiones financieras puede generar excelentes resultados.

El ejemplo aplicativo de la estrategia de inversión inmunizada que fue analizado, puede ser enriquecido aún más. Podría considerarse una estrategia en donde el ajuste de la Duración para cada período, pase antes por una etapa de evaluación de costos, ya que un ajuste de la Duración puede requerir venta y compra de valores y por tanto un costo que podría ser mayor que el costo de no pasar a través de la Ventana de Duración.

Otra aplicación del Análisis de Duración, sería considerar una estrategia de inversión riesgosa, por ejemplo, tomar una cartera de valores con una Duración mayor (o menor) que el período de planeación, asumiendo que el inversionista prevee que los rendimientos bajaran (o subiran). Esta estrategia riesgosa podría volverse más compleja si se introduce una distribución de probabilidades de la tasa de rendimiento para medir el riesgo. Y por tanto, la buena predicción de la dirección de cambio de los rendimientos se convierte de vital importancia para la obtención de buenos resultados. Así el inversionista que posea mayor información será quien obtenga los mayores éxitos. De lo anteriormente mencionado, se concluye que existe amplio campo de trabajo para la aplicación de leyes de la probabilidad y la estadística, y por tanto, el lector con conocimientos de esas materias encontrará en esta estrategia un tema interesante para su análisis.

En el ejemplo que fue presentado sólo se consideró un período de planeación, pero existe la posibilidad de diseñar una estrategia que contemple varios períodos de planeación, aunque esto provoca que el control de la cartera se vuelva más complejo.

Para el calculo de la Duración de los valores de renta fija es esencial conocer la tasa de rendimientos y de cupón que ofrece el valor. Sin embargo para algunos valores de renta fija del Sistema Financiero Mexicano, estas tasas no son muy explicitas. Por ejemplo en el caso de los Petrobonos el ingreso de cupón está en función del desliz cambiario, del precio del petróleo y de una tasa de interés inicialmente ofrecida, y por tanto para estos casos es necesario hacer algunas predicciones para obtener la tasa de cupón que ofrecen, en forma aproximada para cada período.

Durante el desarrollo del Análisis de Duración se observó que para obtener la Duración de algunos valores particulares, tal vez sea necesario efectuar un número considerable de operaciones, y por tanto es recomendable la automatización de las fórmulas de Duración para facilitar su aplicación.

Es bueno aclarar que el Análisis de Duración es sólo, un elemento más que ayudará al inversionista o al decisor financiero a obtener resultados exitosos, en la medida en que se aplique correctamente.

Finalmente, cabe mancionar que existen algunas otras aplicaciones del Análisis de Duración, las cuales hacen que ésta sea una herramienta potencialmente fuerte dentro del ambiente financiero, existiendo campo para nuevas investigaciones.

En el desarrollo de este trabajo se intentaron exponer todos los elementos necesarios para la completa comprensión del tema expuesto. A continuación se da una bibliografía seleccionada, para que sea consultada por aquellas personas que deseen aclarar o profundizar en el conocimiento de los temas aquí presentados.

BIBLIOGRAFIA.

1. Duration Analysis (Managing Interes Rate Risk).
Gerald O. Bierwag (1987).
Cambridge, Massachusetts.
Ballinger Publishing Company.
U.S.A.

2. Inversión Vs. Inflación.
Timothy Heyman (1988).
Editorial Milenio, S.A de C.V.
México D.F.

3. Anuario Bursátil 1988.
Bolsa Mexicana de Valores (1989).
México D.F.

4. Manual de Apoyo Programa/Introducción al Mercado de Valores
IMMEC (Instituto Mexicano del Mercado de Capitales).
México D.F.

5. Rev. La Bolsa de Valores.
Número 3, 1988.
Nacional Financiera S.N.C.
México D.F.

6. The Theory of Financial Decisions.
Charles W. Haley y Lawrence D. Hall (1979).
University of Waschington.
Mc Graw-Hill International Book Company.
International Student Edition.
U.S.A.

7. La Toma de Decisiones Administrativas.
K.J. Radford (1980).
Universidad de Waterloo. Waterloo, Ontario, Canada.
Ediciones contables y administrativas.
México D.F.