

29
96



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

FALLA DE ORIGEN

CORRECCION TOPOGRAFICA DE
SONDEOS ELECTRICOS VERTICALES

T E S I S
PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO GEOFISICO

P R E S E N T A :
MARCO ANTONIO ISLAS CARRION

FALLA DE ORIGEN

MEXICO, D.F.

1989



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

Pág.

	Introducción	i
Cap. 1	Fundamentos Teóricos Del Sondeo Eléctrico Vertical	
	Definición	1
	Ecuaciones Generales	1
	Resistividad Aparente	4
	Dispositivos Electrónicos	6
Cap. 2	El Problema de la Topografía Abrupta en Medidas de Resistividad	
	Antecedentes	8
	Efectos de la Topografía	8
	Corrección del efecto Topográfico	9
Cap. 3	Modelado de la Topografía Rugosa	
	Teoría del Modelado	15
	La Integral de $1/r$	26
	Funciones Spline	28
	Vector Normal a la Superficie topográfica	33
	Fuentes Ficticias	35
	Solución del Sistema de Ecuaciones por Mínimos Cuadrados	37
	Desarrollo del Modelado	42
Cap. 4	Discusión de Resultados	
	Análisis del Método Desarrollado	45
	Conclusiones y Recomendaciones	51
	Bibliografía	55
	Apéndice A	57
	Apéndice B	63

INTRODUCCION

La Geofísica ha constituido una actividad humana desde tiempos muy antiguos para la búsqueda y localización de cuerpos, yacimientos y estructuras geológicas del subsuelo, así como la explicación de fenómenos naturales.

En la actualidad existen varias ramas de la geofísica, entre ellas la Ingeniería Geofísica, la cual se desarrolla con una finalidad económica. A su vez dentro de la Ingeniería Geofísica se presenta la Prospección Geoelectrica cuyos principios se basan en la teoría del potencial desarrollada por James Clerk Maxwell y extendida ampliamente por los hermanos Shlumberger principalmente. Sin embargo la Prospección Geoelectrica así como todas las ramas de la geofísica se ha expandido en el crecimiento de nuevos métodos y recientes algoritmos matemáticos para la solución de problemas a los que se enfrenta.

En los últimos años la aplicación de la Prospección Geoelectrica ha sido enfocada a la ingeniería civil, localización de acuíferos y a otros campos en menor proporción. Sin embargo, a pesar de su alto desarrollo todavía existen obstáculos que dificultan su interpretación, uno de los cuales es trabajado en esta investigación, esperando dar una aportación a la interpretación geoelectrica.

El propósito de este trabajo es el estudio del efecto que ocasiona la topografía en las medidas de resistividad cuando se elabora un Sondeo Eléctrico Vertical. Este problema ha sido trabajado por varios autores, entre ellos, Fox (1980), Benhumea (1984), Opliger (1984), Shi-Zhe-Xu (1988), etc.; más sin embargo, el problema no es sencillo y las soluciones que se han encontrado no son totalmente satisfactorias.

En el desarrollo de este trabajo, se elaboró un programa en Fortran 77 que calcula el efecto que produce la topografía irregular en las medidas de resistividad tomadas con algún dispositivo electrónico. Para ello se simuló fuentes ficticias en las cuales sus coeficientes estuvieran en función de la forma topográfica, para lograrlo la solución fundamental de la ecuación de Laplace ($1/r$) se trabajó en el dominio del número de onda en dos dimensiones, estableciendo un sistema de ecuaciones para encontrar la magnitud de las fuentes ficticias. Finalmente los resultados son discutidos.

CAP. 1. FUNDAMENTOS TEORICOS DEL SONDEO ELECTRICO VERTICAL

11. DEFINICIÓN

Sondeo Eléctrico.- Es el cálculo de resistividades aparentes obtenidas con un mismo dispositivo y con separación creciente de electrodos. Si las mediciones de campo se efectúan en una misma dirección y el centro de los potenciales no varía se le denomina Sondeo Eléctrico Vertical.

12. ECUACIONES GENERALES

Las ecuaciones que rigen el comportamiento de los sondeos Eléctricos Verticales están definidas por la teoría electromagnética, para explicarlas, partimos de las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial.

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad 1.2.1.$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad 1.2.2.$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad 1.2.3.$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad 1.2.4.$$

Para este caso los campos no varían con respecto al tiempo y como solo interesa el campo eléctrico se tiene:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad 1.2.5.$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad 1.2.6.$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad 1.2.7.$$

la divergencia de \vec{E} es:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad 1.2.8.$$

desarrollando la ecuación anterior queda:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad 1.2.9.$$

Por lo tanto, las ecuaciones de campo para una región carente de fuente son:

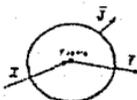
$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad 1.2.10.$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad 1.2.11.$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad 1.2.12.$$

Sin embargo, si consideramos una fuente puntual donde se esta creando la carga, las ecuaciones para la divergencia de E cambian.

Consideremos una superficie gaussiana que encierra a una fuente



sabiendo que:

$$\int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_v \nabla \cdot \vec{J} \, dv = \int_v I \delta(\vec{r}') \, dv \quad 1.2.13.$$

entonces

$$\nabla \cdot \vec{J} = I \delta(\vec{r}') \quad 1.2.14.$$

por lo tanto, las ecuaciones de campo para la región que combina a la fuente serán:

$$\nabla \cdot \vec{E} = I/\epsilon \delta(\vec{r}') \quad 1.2.15.$$

$$\nabla^2 \phi = - I/\epsilon \delta(\vec{r}') \quad 1.2.16.$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad 1.2.17.$$

Para encontrar el potencial ϕ utilizamos el teorema de Helmholtz que enuncia;

Si un vector \vec{W} se comporta como:

$$\nabla \times \vec{W} = 0 \quad 1.2.18.$$

$$\nabla \cdot \vec{W} = s \quad 1.2.19.$$

entonces

$$\vec{W} = -\nabla \phi \quad 1.2.20.$$

donde

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{S(x')}{r(x, x')} dv'$$

Prueba

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{W} &= -\nabla^2 \phi = -\nabla^2 \left(\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{S(x')}{r(x, x')} dv' \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_V \nabla^2 \frac{S(x')}{r(x, x')} dv' = -\frac{1}{4\pi} \int_V S(x') \nabla^2 \frac{1}{r(x, x')} dv' \end{aligned}$$

donde

$$\nabla^2 \frac{1}{r(x, x')} = -4\pi \delta(r)$$

como el operador de campo es función de las coordenadas de campo tenemos

$$\int_V \nabla^2 \frac{S(x')}{r(x, x')} dv' = \int_V \nabla \cdot \left(\frac{1}{r} \right) \cdot ds' = \int \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{r} = -4\pi$$

$$\nabla \cdot \vec{W} = \int_V S(x') \delta(x') dv' = S(x')$$

l.q.q.d.

por lo tanto, el potencial primario esta dado por:

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{I \delta(x')}{\sigma r(x, x')} dv' = \frac{I}{4\pi \sigma r(x)} = \frac{\rho I}{4\pi r(x)} \quad 1.2.21.$$

como en el Sondeo Eléctrico Vertical las fuentes están colocadas en interfaz, el potencial (ϕ) será:

$$\phi = \frac{\rho I}{2\pi r(x)} \quad 1.2.22.$$

debiendose cumplir las condiciones de frontera, siendo que los potenciales (ϕ) y las derivadas con respecto a la normal sean continuos;

$$\phi_1 = \phi_2 \quad 1.2.23.$$

$$\sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \quad 1.2.24.$$

donde

$$\sigma_n = \frac{1}{\rho_n}, \quad \sigma = \text{conductividad}$$

13. RESISTIVIDAD APARENTE

La resistividad aparente (ρ_a) es un concepto que surgió al utilizar la teoría en el medio práctico de campo, para calcular la resistividad de una superficie real, es decir, obtener la resistividad de un medio heterogéneo calculada con la ecuación para un medio homogéneo (Figs. 1.3.1. y 1.3.2.).

La resistividad aparente ρ_a se calcula como $\rho_a = k \Delta V/I$ donde el valor de k se denomina factor geométrico y su valor depende de la localización de los electrodos (Fig. 1.4.1. y 1.4.2.).

Para el caso general de cuatro electrodos ρ_a se calcula como:

$$\rho_a = 2\pi \left(1/AM - 1/BM - 1/AN + 1/BN \right)^{-1} \Delta V/I \quad 1.3.1.$$

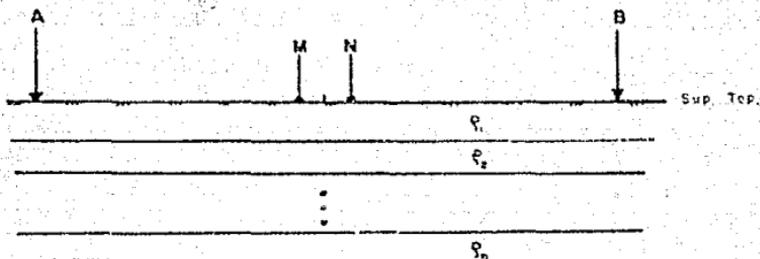


Fig. 1.3.1. Aplicación del dispositivo Schlumberger a un semiespacio teórico.

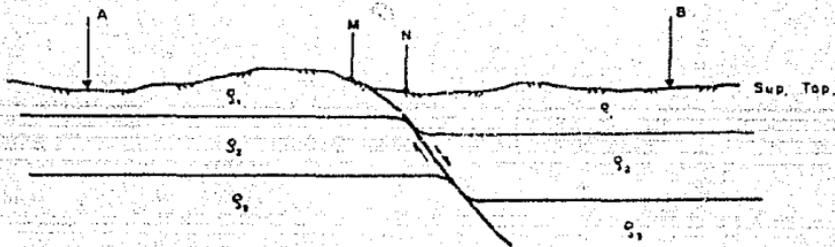


Fig. 1.3.2. Aplicación del dispositivo Schlumberger a un semiespacio real.

1.4. DISPOSITIVOS ELECTRÓDICOS

Los dispositivos electródicos son un conjunto de electrodos de los cuales unos son emisores de corriente y otros receptores. Su clasificación depende de el número de estos y de la distancia relativa que hay entre ellos.

Los dispositivos mas utilizados en la prospección geoelectrica son: el dispositivo Schlumberger y el dispositivo Wenner, figuras 1.4.1. y 1.4.2. respectivamente. Estos pertenecen al grupo tetraelectródico, el cual consiste en dos electrodos de corriente (A y B) y dos de potencial (M y N); para el primero los emisores se desplazan de manera equidistante con respecto al centro del dispositivo, de tal forma que la distancia AO , BO y $AB/2$ sean iguales, siendo que los receptores quedarán fijos con una relación de $MN \leq AB/5$. La resistividad aparente para este dispositivo se calcula como (Orellana, 1981):

$$\rho_{a,s} = \pi r^2 \frac{|\bar{E}|}{I} \quad 1.4.1.$$

Donde $|\bar{E}|$ es el módulo del campo eléctrico y en la práctica se calcula como :

$$|\bar{E}| = \Delta V / MN \quad 1.4.2.$$

El segundo dispositivo Wenner, también consiste en dos electrodos de corriente (A y B) y dos de potencial (M y N) que se abrirán en forma simétrica con respecto al centro del dispositivo conservando la relación $AM = MN = NB$; su resistividad aparente se calcula como (Orellana, 1981):

$$\rho_{a,w} = 2\pi r \Delta V / I \quad 1.4.3.$$

Como se puede observar el cálculo de los valores de resistividad aparente esta en función del dispositivo electródico con que se hayan efectuado las mediciones

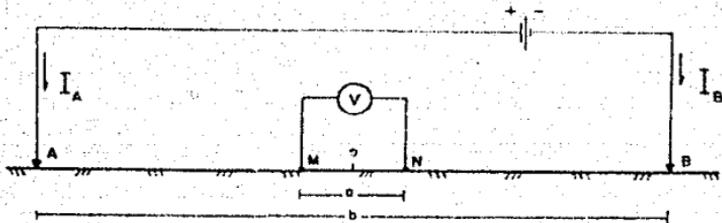


Fig. 1.4.1 Dispositivo Tetraelectrónico Schlumberger.

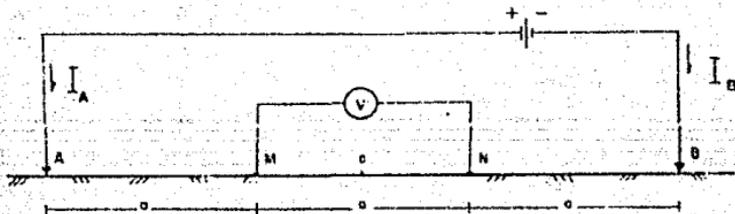


Fig. 1.4.2. Dispositivo Tetraelectrónico Wenner.

CAP. 2 EL PROBLEMA DE LA TOPOGRAFIA ABRUPTA EN MEDIDAS DE RESISTIVIDAD

2.1 ANTECEDENTES

La determinación de medidas de resistividad ha sido elaborada utilizando diferentes métodos y distintos dispositivos que se han aplicado dependiendo de los objetivos buscados y de la capacidad y experiencia del interprete, más sin embargo son pocas las personas que consideran las distorsiones que tienen las superficies equipotenciales y de corriente en las lecturas efectuadas con los métodos de D.C. y que son provocadas por la superficie irregular del terreno.

Las interpretaciones que se manejaban anteriormente eran de tipo cualitativo, se mencionaba que las líneas de isoresistividad aparente tenían la tendencia de la forma topográfica del terreno, en la actualidad este concepto no es utilizado, ya que existen varios trabajos que utilizan diferentes algoritmos matemáticos para el modelado numérico de los efectos que produce la irregularidad del terreno, entre los más importantes destacan: el elemento finito, la solución de un sistema de ecuaciones, las diferencias finitas y una integral usando el teorema de Green. El primero fué introducido por el Dr. Coggon, J.H. (1971), utilizado posteriormente por varios autores entre ellos: Fox, K., Hohmann, G., y Rijo, L. en 1980. El segundo establece las condiciones geométricas conductivas y campos potenciales en una malla, para adaptar un sistema de ecuaciones y resolverlo en función de los potenciales para cada nodo de malla, fué introducido por Dey y Morrison en 1976, después utilizado por Ishard Mufti en 1978. El tercero se debe a Frede Jepsen en 1958, el cual introdujo los principios geoelectrónicos al método de relajación o diferencias finitas, posteriormente fué tratado por Benumea, L.M. en 1984. En 1988 Shi-Zhe Xu utiliza una ecuación integral aplicando el teorema de Green para el cálculo del valor eléctrico de frontera en 3D utilizando una malla triangular de 68 nodos.

2.2 EFECTOS QUE PRODUCE LA TOPOGRAFIA IRREGULAR

Los efectos que produce la topografía irregular en las medidas de resistividad son ocasionados por los cambios que experimentan las líneas equipotenciales y de corriente, como producto de las

variaciones de la superficie topográfica, es decir, estas divergen bajo un alto topográfico y se concentran en un valle (Fig. 2.2.1), por lo que este fenómeno ocasiona diferencias de potencial que afectan a las lecturas obtenidas con algún dispositivo de campo. Esto implica que las medidas de resistividad reales se encuentran alteradas por la topografía del terreno, sus diferencias con respecto a una superficie plana serán positivas o negativas dependiendo del dispositivo utilizado y de la localización de los electrodos en la superficie.

Las consecuencias producidas por un terreno no plano en las medidas de resistividad pueden ser considerables al grado de que se interpreten anomalías que no existen. Los estudios realizados para la corrección topográfica son pocos, y no existe un catálogo general para diferentes formas topográficas en las cuales se observe las alteraciones que producen estas, algunos de los modelos trabajados son calculados con el dispositivo dipolo-dipolo para los modelos topográficos tales como: un valle, una loma y una superficie inclinada, los cuales son suficientes para observar la variación que existe en las lecturas de resistividad aparente como resultado del efecto topográfico (Fig. 2.2.2 a Fig. 2.2.4).

También es importante saber que los valores de resistividad no solo dependen de la forma de terreno, sino además del dispositivo que se utilice en la medición, esto quiere decir que los valores de resistividad en las seudosecciones de las figuras mencionadas serán diferentes, si para la misma topografía, utilizamos otro dispositivo, debiéndose esto a la distribución de las líneas equipotenciales y de corriente que varía de acuerdo al número y posición de los electrodos que se tengan en la superficie topográfica, en otras palabras los valores de las lecturas de resistividad difieren aún con el mismo dispositivo si este se aplica a una misma topografía pero con un desplazamiento de los electrodos (Fig. 2.2.5).

2.3 CORRECCIÓN DEL EFECTO TOPOGRÁFICO

La corrección del efecto topográfico en el Sondeo Eléctrico Vertical consiste en modificar los valores anómalos de resistividad que se generan como producto de las distorsiones que sufren las superficies equipotenciales y líneas de corriente debido a las variaciones de la topografía. Existen diferentes algoritmos para efectuar el modelado de los

efectos que se producen debido a una superficie irregular. Para elaborar la corrección topográfica, se puede utilizar cualesquiera de los algoritmos mencionados en la sección 2.1, así como el desarrollado en este trabajo, pero lo más interesante es que no importan los pasos seguidos para el modelado, ya que es necesario conocer la función de transformación para la corrección topográfica ($F(x)$), que se calcula como la relación de la resistividad aparente para una superficie plana (Fig. 2.3.1. (a)) entre la resistividad aparente medida en un topografía rugosa (Fig. 2.3.1. (b)), es decir:

$$F(x) = \frac{(\rho_a)_{\text{plano}}}{(\rho_a)_{\text{irregular}}} \cdot x \quad 2.3.1.$$

donde x son las aberturas de $AB/2$ para el caso del arreglo Schlumberger

Finalmente, la expresión general para la corrección del efecto topográfico es:

$$(\rho_a)_{\text{corregida}} = F(x) \cdot (\rho_a)_{\text{campo}}$$

donde x son las aberturas del dispositivo utilizado.

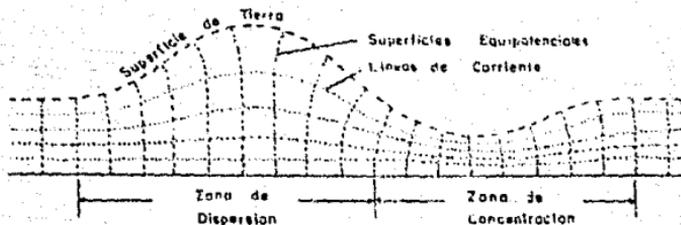


Fig. 2.2.1. Efecto de las superficies equipotenciales y líneas de corriente producto de la topografía irregular.

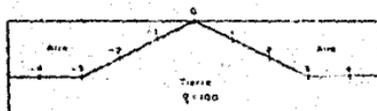


Fig. 2.2.2. Seudosección de una loma utilizando el dispositivo Dipolo-Dipolo (Fox, 1980)

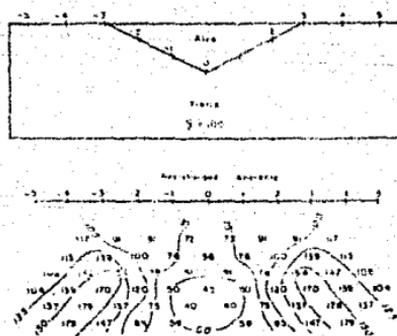


Fig. 2.2.3. Seudosección de un valle utilizando el dispositivo Dipolo-Dipolo (Fox, 1980).

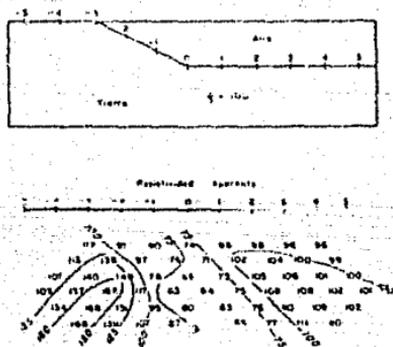
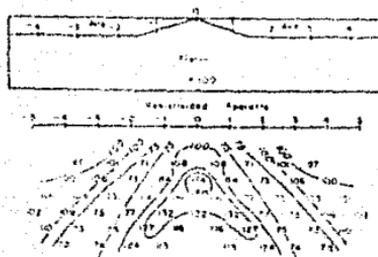


Fig. 2.2.4 Seudosección de una pendiente usando el dispositivo Dipolo-Dipolo (Fox, 1980)

a)



b)

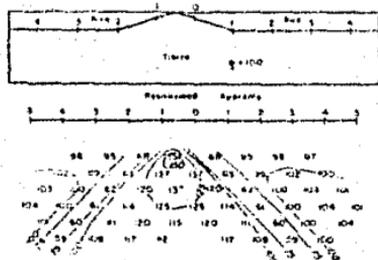


Fig. 2.2.5. Efectos de la topografía para un mismo modelo con un desplazamiento de los electrodos, utilizando el mismo dispositivo Dipolo-Dipolo para la figura a) El valor de la resistividad mayor es de $174 \Omega \cdot m$ y se localiza a una profundidad de tres unidades, para la figura b) El valor mayor es $157 \Omega \cdot m$ y se localiza a una profundidad de 1.5 unidades (Fox, 1980).

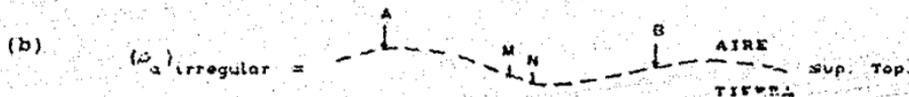
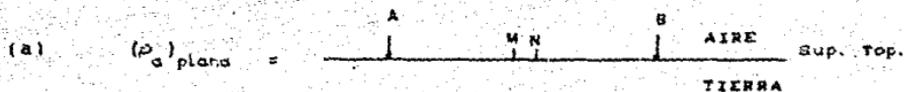


Fig. 2.3.1. Modelos para el cálculo de la resistividad aparente en una superficie. a) Superficie teórica plana. b) Superficie real irregular.

CAP 3 MODELADO DE LA TOPOGRAFIA RUGOSA

3.1 METODOLOGÍA

Partiendo de la teoría del Sondeo Eléctrico Vertical para una superficie plana, se iniciará el estudio para una topografía irregular, la cual representa el terreno real o de campo sobre la que se realizan los Sondeos Eléctricos Verticales (Fig. 3.1.1).

Sabiendo que la ecuación de Laplace se cumple en toda la superficie topográfica para cualquier forma y conociendo su solución fundamental, se hará el análisis para calcular el potencial en un punto topográfico a partir de una fuente puntual. Utilizando este concepto se calculará la diferencia de potencial entre dos puntos (M y N) usando el principio de superposición.

Analíticamente la solución fundamental para calcular el potencial eléctrico es:

$$U = \frac{\rho I}{2\pi} \frac{1}{r} \quad 3.1.1.$$

donde $r = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2}$

por otra parte la función de $1/r$ se puede expresar en el dominio del número de onda (sección 3.2) como:

$$\int_0^{\infty} K_0(2\pi r) \cos(yf) df = \frac{\pi}{2 (y^2 + 4\pi^2 r^2)^{1/2}} \quad 3.1.2.$$

donde

$$r = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2}$$

Haciendo un análisis de los dispositivos más utilizados en la

práctica (Schlumberger y Wenner), se consideró la restricción de que no existen cambios laterales de la topografía, es decir, los cambios topográficos en la dirección Y no existen (Fig. 3.1.2.), y además, si colocamos el dispositivo a lo largo del eje X en el valor Y=0 (Fig.3.1.3.), la constante de integración en Y de la ecuación 3.1.2. tendrá un valor de cero, bajo estas condiciones el problema tridimensional se trabajará en forma bidimensional, quedando la ec. 3.1.2. como:

$$\int 4 K_0(2\pi fr) df = \frac{1}{r} \quad 3.1.3.$$

$$\text{donde } r = [(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2}$$

Habiendo reducido el problema de 3D a 2D bajo las restricciones mencionadas, se utilizará ahora el artificio de fuentes ficticias de la sección 3.5, por medio del cual se reemplazará el efecto de frontera que se produce por efectos de la topografía irregular en las medidas de resistividad.

La magnitud de las fuentes ficticias esta en función de las fuentes reales, y para el modelado, éstas se colocaron por encima de la superficie topográfica, de tal manera que contengan o detallen la forma del terreno (Fig. 3.1.4.).

De la solución fundamental de la ecuación de Laplace se obtienen las expresiones de los potenciales que producen las fuentes reales (U_p) y las fuentes ficticias (U_f) como :

$$U_p = \begin{cases} \rho I / 2\pi \ln(r) & w = 0 \\ \rho I / 2\pi K_0(rw) & w \neq 0 \end{cases} \quad 3.1.4.$$

$$U_f = \begin{cases} C_f \ln(r) & w = 0 \\ C_f K_0(rw) & w \neq 0 \end{cases} \quad 3.1.5.$$

siendo C_f = magnitudes de las fuentes ficticias

Para el cálculo del potencial eléctrico en un punto topográfico se utiliza el principio de superposición, calculando el potencial total U_T como:

$$U_T = \sum_{i=1}^n U_{f_i} + \sum_{p=1}^m U_{f_p} \quad 3.1.6.$$

donde U_{f_i} y U_{f_p} están dados por las ecuaciones 3.1.4 y 3.1.5, respectivamente

Los coeficientes de las fuentes ficticias se calcularán aplicando las condiciones de frontera (ecs. 1.1.23. y 1.1.24.), en las cuales se cumple que la derivada del campo eléctrico con respecto a la normal es igual a cero.

De la misma manera que el potencial, el campo eléctrico en un punto topográfico es la suma de todos los campos eléctricos producidos por las diferentes fuentes (Fig. 3.1.5.), es decir:

$$\vec{E}_T = \sum_{i=1}^n \vec{E}_{f_i} + \sum_{p=1}^m \vec{E}_{f_p} \quad 3.1.7.$$

donde \vec{E}_T = Campo eléctrico normal total en un punto topográfico

$\sum_{p=1}^m \vec{E}_{f_p}$ = suma de todos los campos eléctricos producidos por las fuentes primarias o reales

$\sum_{i=1}^n \vec{E}_{f_i}$ = suma de todos los campos eléctricos producidos por las fuentes ficticias

El campo eléctrico se obtiene a partir del potencial primario y ficticio, aplicando la ecuación 1.2.17. en las ecs. 3.1.4. y 3.1.5 se tendrá:

$$\vec{E}_{n_p} = \begin{cases} -\frac{\rho I}{2\pi} \left[\frac{(x-x_0)}{r^2} \vec{n}_x + \frac{(z-z_0)}{r^2} \vec{n}_z \right] & w = 0 \\ -\frac{\rho I}{2\pi} \left[\frac{w(x-x_0)}{r} (-K_1(rw)) \vec{n}_x + \frac{w(z-z_0)}{r} (-K_1(rw)) \vec{n}_z \right] & w \neq 0 \end{cases} \quad 3.1.8.$$

$$\vec{E}_{n_r} = \begin{cases} -C_i \left[\frac{(x-x_0)}{r^2} \vec{n}_x + \frac{(z-z_0)}{r^2} \vec{n}_z \right] & w = 0 \\ -C_i \left[\frac{w(x-x_0)K_1(rw)}{r} \vec{n}_x + \frac{w(z-z_0)K_1(rw)}{r} \vec{n}_z \right] & w \neq 0 \end{cases} \quad 3.1.9.$$

Para cada punto de la superficie se cumple que:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{n}} = 0 \quad 3.1.10.$$

por lo tanto

$$\vec{E}_{n_r} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_{f_i} + \sum_{j=1}^m \vec{E}_{p_j} = 0 \quad 3.1.11.$$

Utilizando la ec. 3.1.11. se elaborará un sistema de ecuaciones para calcular los coeficientes C_i , quedando como:

$$\left. \begin{aligned}
 1 \bar{E}_{n_1} + 1 \bar{E}_{n_2} + \dots + 1 \bar{E}_{n_m} + 1 \bar{E}_{n_A} + 1 \bar{E}_{n_B} &= 0 \\
 2 \bar{E}_{n_1} + 2 \bar{E}_{n_2} + \dots + 2 \bar{E}_{n_m} + 2 \bar{E}_{n_A} + 2 \bar{E}_{n_B} &= 0 \\
 \vdots \\
 L \bar{E}_{n_1} + L \bar{E}_{n_2} + \dots + L \bar{E}_{n_m} + L \bar{E}_{n_A} + L \bar{E}_{n_B} &= 0
 \end{aligned} \right\} A$$

$f = 1, 2, \dots, L$

donde

m = número de fuentes ficticias

L = número de puntos discretos de la topografía

f = frecuencia a la que se calcula el sistema A

El primer renglón del sistema A se puede representar gráficamente como la figura 3.1.5., en la cual $m=3$, $L=1$ y sus respectivas fuentes reales A y B.

Si sustituimos en el sistema A los campos eléctricos normales por el gradiente del potencial, usando la ecuación 1.2.17., el sistema quedará de la siguiente manera:

$$-1 \nabla U_{f_1} \cdot \bar{n}_{u_1} - 1 \nabla U_{f_2} \cdot \bar{n}_{u_1} - \dots - 1 \nabla U_{f_m} \cdot \bar{n}_{u_1} - 1 \nabla U_A \cdot \bar{n}_{u_1} - 1 \nabla U_B \cdot \bar{n}_{u_1} = 0$$

$$-2 \nabla U_{f_1} \cdot \bar{n}_{u_2} - 2 \nabla U_{f_2} \cdot \bar{n}_{u_2} - \dots - 2 \nabla U_{f_m} \cdot \bar{n}_{u_2} - 2 \nabla U_A \cdot \bar{n}_{u_2} - 2 \nabla U_B \cdot \bar{n}_{u_2} = 0$$

$$-L \nabla U_{f_1} \cdot \bar{n}_{u_m} - L \nabla U_{f_2} \cdot \bar{n}_{u_m} - \dots - L \nabla U_{f_m} \cdot \bar{n}_{u_m} - L \nabla U_A \cdot \bar{n}_{u_m} - L \nabla U_B \cdot \bar{n}_{u_m} = 0$$

Si sustituimos las ecs. 3.1.8. y 3.1.9. en el sistema anterior, para la frecuencia cero el sistema quedará expresado como:

$$-\nabla(C_1 \ln(r_1)) \cdot \bar{n}_{u_1} - \nabla(C_2 \ln(r_2)) \cdot \bar{n}_{u_1} - \dots - \nabla(C_n \ln(r_n)) \cdot \bar{n}_{u_1} \\ - \nabla\left(\frac{\rho I}{4\pi} \ln(r_A)\right) \cdot \bar{n}_{u_1} - \nabla\left(\frac{\rho I}{4\pi} \ln(r_B)\right) \cdot \bar{n}_{u_1} = 0$$

$$-\nabla(C_1 \ln(r_1)) \cdot \bar{n}_{u_2} - \nabla(C_2 \ln(r_2)) \cdot \bar{n}_{u_2} - \dots - \nabla(C_n \ln(r_n)) \cdot \bar{n}_{u_2} \\ - \nabla\left(\frac{\rho I}{4\pi} \ln(r_A)\right) \cdot \bar{n}_{u_2} - \nabla\left(\frac{\rho I}{4\pi} \ln(r_B)\right) \cdot \bar{n}_{u_2} = 0$$

$$-\nabla(C_1 \ln(r_1)) \cdot \bar{n}_{u_m} - \nabla(C_2 \ln(r_2)) \cdot \bar{n}_{u_m} - \dots - \nabla(C_n \ln(r_n)) \cdot \bar{n}_{u_m} \\ - \nabla\left(\frac{\rho I}{4\pi} \ln(r_A)\right) \cdot \bar{n}_{u_m} - \nabla\left(\frac{\rho I}{4\pi} \ln(r_B)\right) \cdot \bar{n}_{u_m} = 0$$

y para una frecuencia diferente de cero, el sistema será:

$$-\nabla(C_1 K_0(r_1 w)) \cdot \bar{n}_{u_1} - \nabla(C_2 K_0(r_2 w)) \cdot \bar{n}_{u_1} - \dots - \nabla(C_n K_0(r_n w)) \cdot \bar{n}_{u_1} \\ - \nabla\left(\frac{\rho I}{4\pi} K_0(r_A w)\right) \cdot \bar{n}_{u_1} - \nabla\left(\frac{\rho I}{4\pi} K_0(r_B w)\right) \cdot \bar{n}_{u_1} = 0$$

$$-\nabla(C_1 K_0(r_1 w)) \cdot \bar{n}_{u_2} - \nabla(C_2 K_0(r_2 w)) \cdot \bar{n}_{u_2} - \dots - \nabla(C_n K_0(r_n w)) \cdot \bar{n}_{u_2} \\ - \nabla\left(\frac{\rho I}{4\pi} K_0(r_A w)\right) \cdot \bar{n}_{u_2} - \nabla\left(\frac{\rho I}{4\pi} K_0(r_B w)\right) \cdot \bar{n}_{u_2} = 0$$

$$-\nabla(C_1 K_0(r_1 w)) \cdot \bar{n}_{u_m} - \nabla(C_2 K_0(r_2 w)) \cdot \bar{n}_{u_m} - \dots - \nabla(C_n K_0(r_n w)) \cdot \bar{n}_{u_m} \\ - \nabla\left(\frac{\rho I}{4\pi} K_0(r_A w)\right) \cdot \bar{n}_{u_m} - \nabla\left(\frac{\rho I}{4\pi} K_0(r_B w)\right) \cdot \bar{n}_{u_m} = 0$$

Agrupando términos, multiplicando por (-1), sumando y restando los valores de las fuentes reales en ambas partes de las ecuaciones el sistema para la frecuencia cero queda como:

$$\begin{aligned} \nabla(C_1 \ln(r_1)) \cdot \bar{n}_{u_1} + \nabla(C_2 \ln(r_2)) \cdot \bar{n}_{u_2} + \dots + \nabla(C_n \ln(r_n)) \cdot \bar{n}_{u_n} = \\ - \frac{\rho I}{2\pi} [\nabla(\ln(r_A)) \cdot \bar{n}_{u_1} + \nabla(\ln(r_B)) \cdot \bar{n}_{u_1}] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla(C_1 \ln(r_2)) \cdot \bar{n}_{u_2} + \nabla(C_2 \ln(r_2)) \cdot \bar{n}_{u_2} + \dots + \nabla(C_n \ln(r_n)) \cdot \bar{n}_{u_2} = \\ - \frac{\rho I}{2\pi} [\nabla(\ln(r_A)) \cdot \bar{n}_{u_2} + \nabla(\ln(r_B)) \cdot \bar{n}_{u_2}] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla(C_1 \ln(r_1)) \cdot \bar{n}_{u_m} + \nabla(C_2 \ln(r_2)) \cdot \bar{n}_{u_m} + \dots + \nabla(C_n \ln(r_n)) \cdot \bar{n}_{u_m} = \\ - \frac{\rho I}{2\pi} [\nabla(\ln(r_A)) \cdot \bar{n}_{u_m} + \nabla(\ln(r_B)) \cdot \bar{n}_{u_m}] = 0 \end{aligned}$$

si denominamos a ${}_{i}E_{n_j} = \nabla(\ln(r_i)) \cdot \bar{n}_{u_j}$ como el campo eléctrico

normal debido a la fuente ficticia, en el punto topográfico L el sistema de ecuaciones se puede expresar en forma de matrices como:

$$\begin{bmatrix} {}_1E_{n_1} & + {}_1E_{n_2} & + \dots & + {}_1E_{n_m} \\ {}_2E_{n_1} & + {}_2E_{n_2} & + \dots & + {}_2E_{n_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {}_mE_{n_1} & + {}_mE_{n_2} & + \dots & + {}_mE_{n_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -{}_1E_{n_A} & -{}_1E_{n_B} \\ -{}_2E_{n_A} & -{}_2E_{n_B} \\ \vdots & \vdots \\ -{}_mE_{n_A} & -{}_mE_{n_B} \end{bmatrix} \quad w = 1, 2, \dots, m$$

donde

- m = N. de fuentes ficticias
- L = N. total de puntos discretos de la topografía
- W = Sistema de ecuaciones a resolver para las frecuencias

Este sistema de ecuaciones es resuelto con el algoritmo desarrollado por Bishop R. y Gladwell G. en 1965 (sección 3.6), con el cual se obtienen las magnitudes de las fuentes ficticias (C').

Resolviendo el sistema de ecuaciones para cada frecuencia del potencial se encontraron los coeficientes de las fuentes ficticias, los cuales están en función de la forma topográfica, y como son calculados en el número de onda de acuerdo a la ec. 3.1.3., es necesario obtener la integral para calcular la magnitud del potencial que produce cada fuente.

Habiendo calculado el potencial de cada una de las fuentes ficticias y reales se utilizó el principio de superposición (ec. 1.9) para calcular el potencial total en un punto de la topografía como:

$$U_T = \sum_{i=1}^m U_i + U_A + U_B \quad 3.1.12.$$

La figura 3.1.6. representa gráficamente la afectación del potencial de cada una de las fuentes a un punto de la topografía.

Los coeficientes de las fuentes ficticias estarán en función del efecto que produce la topografía irregular, por lo que analíticamente se calcularán los potenciales en los puntos receptores M y N, para posteriormente obtener la resistividad aparente utilizando la ecuación respectiva dependiendo del dispositivo manejado.

Finalmente, para hacer el algoritmo más eficiente, fué necesario calcular el potencial solamente para algunas frecuencias, siendo obtenidas las demás con el método de interpolación de spline.

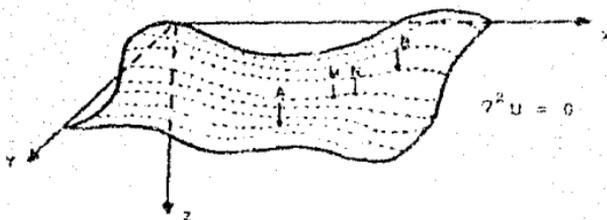


Fig. 3.1.1. Superficie real del terreno con variación en todas direcciones, en la cual se cumple la ecuación de Laplace.

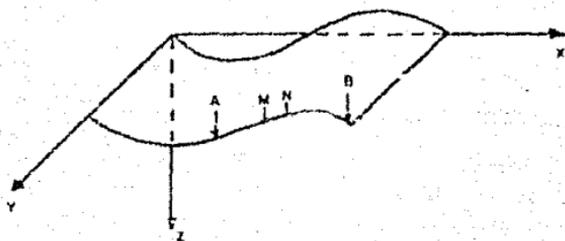


Fig. 3.1.2. Superficie del terreno con variación en los eje X, Z y constante en Y.

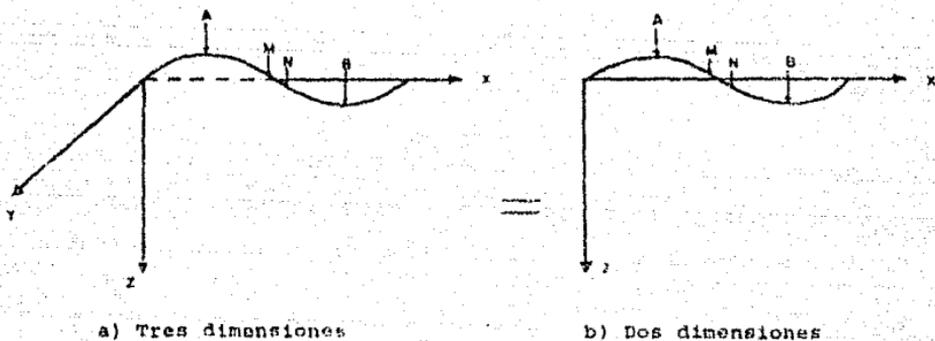


Fig. 3.1.3. Representación final de la superficie topográfica en 3D y 2D.

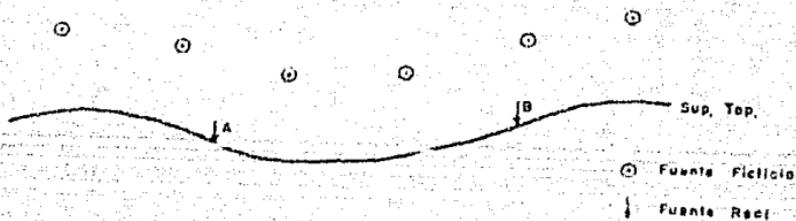


Fig. 3.1.4. Representación de las fuentes reales y ficticias en la topografía.

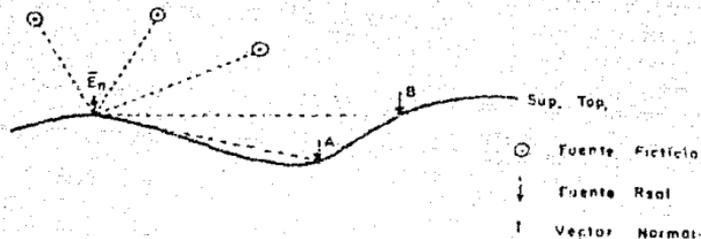


Fig. 3.1.5. Representación gráfica del campo eléctrico normal debido a tres fuentes ficticias y dos reales.

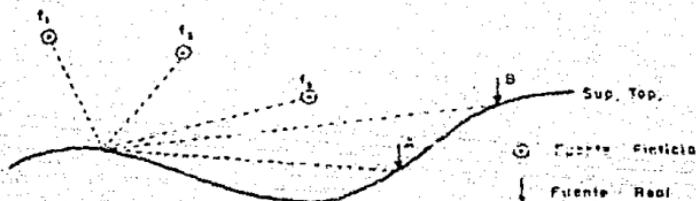


Fig. 3.1.6. Efecto del potencial en un punto de la topografía debido a dos fuentes reales más tres fuentes ficticias.

3.2 LA INTEGRAL DE 1/R

La función de $1/r$ ha sido estudiada por diversos autores: Tejero A. en 1980, Nabighian M. en 1984 y Craig M. en 1986 entre otros, por lo que es muy sabido, que la función $1/r$ se puede expresar en el número de onda como funciones de Bessel de primera clase. La solución fundamental de la ecuación de Laplace para un semiespacio de corriente continua es la función $1/r$ (ec. 1.2.22) y puede expresarse en el número de onda en 2D como:

$$\frac{1}{r} = 4 \int_{-\infty}^{\infty} K_0(2\pi fr) df$$

$$r = [(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2}$$

La integral anterior se obtuvo de tablas matemáticas para ingenieros a partir de la siguiente expresión en 3D.

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_0(2\pi fr) \cos(yf) df = \frac{\pi}{2(y^2 + 4\pi^2 r^2)^{1/2}}$$

donde

$$r = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2}$$

Haciendo la restricción de 2D como se explicó en el sección 3.1 se evaluará la integral anterior para la frecuencia $y=0$ por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_0(2\pi fr) \cos(yf) df \Big|_{y=0} = \frac{\pi}{2(y^2 + 4\pi^2 r^2)^{1/2}} \Big|_{y=0} = \frac{1}{4r}$$

finalmente

$$\frac{1}{r} = 4 \int_{-\omega}^{\omega} K_0(2\pi fr) df$$

donde

$$r = [(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2}$$

Para evaluar la integral anterior se sustituyeron los valores de las funciones Bessel por funciones polinomiales (Abramowitz M., 1980), las cuales se muestran en el apéndice A, así como la representación gráfica de la función $1/r$ en el dominio del número de onda para diferentes valores de r .

3.3 FUNCIONES SPLINE

Las funciones cúbicas spline son un artificio matemático de interpolación. La mecánica de spline es obtenida por el significado de pesos en los puntos de interpolación. Spline asume que la forma que minimiza la energía potencial es proporcional a la integral con respecto a la longitud de arco del cuadrado de la curvatura de spline.

Si spline es una función representada por $P(x)$ y si los saltos son pequeños, la segunda derivada $P''(x)$ es aproximadamente la curvatura y la diferencial de la longitud de arco es dx , la energía bajo una función spline linealizada es proporcional a

$$\int P''(x)^2 dx.$$

Cuando los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ son dados la linealización de spline $P(x)$ es una función tal como:

$P(x) = y_i$ ($i=1,2,\dots,n$) y semejante a $\int_{x_i}^{x_{i+1}} (P''(x))^2 dx$ minimizada.

Asumiendo la mecánica de spline podemos esperar a P y P' continuos en $[x_i, x_{i+1}]$. Adicional a la teoría se sugiere que $P(x)$ sea un polinomio cúbico adyacente entre cada par de puntos, por lo que serán unidos continuamente por la primera y segunda derivada. La construcción de una spline cúbica es un simple proceso numérico. Consideremos el intervalo (x_i, x_{i+1}) entonces:

$$\begin{aligned}h_i &= x_{i+1} - x_i \\w &= (x - x_i)/h_i \\q &= 1 - w\end{aligned}$$

Como el rango de x está arriba del subintervalo, w va de 0 a 1 y q va de 1 a 0.

Usando una pequeña previsión se decidió representar a spline en un subintervalo como:

$$P(x) = wy_{i-1} + qy_i + h_i [(w^3 - w)\sigma_{i-1} + (q^3 - q)\sigma_i]$$

donde σ_{i-1} y σ_i son constantes las cuales serán determinadas. Los primeros dos términos de la ec. anterior representan una interpolación lineal estándar y los que están entre paréntesis es una corrección de términos cúbicos, éstos darán el suavizado adicional.

Esta corrección de términos desaparecerá al final de los puntos, así tenemos que:

$$P(x_i) = y_i$$

$$P(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

Los datos de $P(x)$ son interpolados como las y_i son buscadas. Ahora diferenciando a $P(x)$ en tres tiempos, usando la regla de la cadena y los factores $w = 1/h$ y $q = -1/h$.

$$P'(x) = (y_{i+1} - y_i)h_i + h_i [(3w^2 - 1)\sigma_{i+1} - (3q^2 - 1)\sigma_i]$$

$$P''(x) = 6w\sigma_{i+1} + 6q\sigma_i$$

$$P'''(x) = 6(\sigma_{i+1} - \sigma_i)/h_i$$

Se observa que $P''(x)$ es una función lineal la cual interpola los valores de $6w$ y $6q$ consecuentemente,

$$\sigma_i = P''(x_i)/6$$

y que $P'''(x)$ es una constante para cada subintervalo y la cuarta derivada de $P(x)$ desaparece.

Evaluando $P'(x)$ al final de los puntos los subintervalos,

$$P'_+(x) = \Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i)$$

$$P'_-(x) = \Delta_i + h_i(2\sigma_{i+1} + \sigma_i)$$

$$\text{donde } \Delta_i = (y_{i+1} - y_i) / h_i$$

usaremos temporalmente a $P'_+(x)$ y $P'_-(x)$ porque nuestra fórmula $P(x)$ espera solo valores de $[x_i, x_{i+1}]$.

Para obtener la continuidad en $P(x)$ imponemos la siguiente condición en el interior del intervalo,

$$P'_-(x) = P'_+(x)$$

reemplazando a x por x_{i+1} en $P'_-(x_{i+1})$ quedará,

$$\Delta_{i+1} + h_{i+1}(2\sigma_i + \sigma_{i+1}) = \Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i)$$

por lo tanto

$$h_{i-1} \sigma_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) \sigma_i + h_i \sigma_{i+1} = \Delta_i - \Delta_{i-1} \quad (i=2, \dots, n-1)$$

Este es un sistema de $n-2$ ecuaciones lineales y las σ_i desconocidas donde $i=1, \dots, n$

si nombramos a

$$P''''(x) = C_1''''$$

y

$$P''''(x_n) = C_n''''$$

las constantes C_1'''' y C_n'''' son determinadas directamente de los datos $C_1(x)$ y $C_2(x)$.

$$\Delta_1 = (y_{i+1} - y_i) / (x_{i+1} - x_i)$$

las cuales son aproximadamente la primera derivada

$$\Delta_1^2 = (\Delta_{i+1} - \Delta_i) / (x_{i+1} - x_i)$$

y

$$\Delta_1^3 = (\Delta_{i+1}^2 - \Delta_i^2) / (x_{i+1} - x_i)$$

$2 \Delta_1^2$ y $6 \Delta_1^3$ son aproximadamente la 2^{a} y la 3^{a} derivada,

$$C_1'''' = 6 \Delta_1^3$$

$$C_n'''' = 2 \Delta_{n-1}^3$$

consecuentemente

$$\Delta_1^2 = (\sigma_2 - \sigma_1) / h_1$$

$$\Delta_1^3 = (\sigma_n - \sigma_{n-1}) / h_{n-1}$$

para hacer que el sistema de ecuaciones sea simétrico estas dos ecuaciones deberán ser multiplicadas por h_1^2 y $-h_{n-1}^2$

$$-h_1 \sigma_1 + h_1 \sigma_2 = h_1^2 \Delta_1^s$$

y

$$h_{n-1} \sigma_{n-1} - h_{n-1} \sigma_n = -h_{n-1}^2 \Delta_{n-1}^s$$

para spline con estas últimas ecuaciones de σ se generará un sistema lineal con n eqs. y n incógnitas.

$$\begin{bmatrix} -h_1 & h_1 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & h_{n-1} & -h_{n-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^2 \Delta_1^s \\ \Delta_2 \Delta_1^s \\ \vdots \\ -h_{n-1}^2 \Delta_{n-1}^s \end{bmatrix}$$

Este sistema será resuelto por eliminación con las siguientes propiedades especiales:

La matriz es tridiagonal

La matriz es simétrica

Para alguna selección de $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

la matriz es no singular y dominantemente diagonal.

Aplicando eliminación gaussiana,

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 h_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 h_2 & & \\ & & & \\ & & & \\ 0 & & & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

donde α_i es

$$\alpha_1 = -h_1$$

$$\alpha_i = 2(h_{i-1} + h_i) - (h_i^2 - 1)/(\alpha_{i-1} - 1) \quad i=2,3,\dots,n-1$$

$$\alpha_n = -h_{n-1}^n - (h_2)/\alpha_{n-1}$$

y las β_i son

$$\beta_1 = h_1^2 \Delta_1^2$$

$$\beta_i = (\Delta_i - \Delta_{i-1}) - (h_{i-1} \beta_{i-1}) / \alpha_{i-1} \quad i=2, 3, \dots, n-1$$

$$\beta_n = -h_{n-1}^2 \Delta_{n-1}^2 - (h_{n-1} \beta_{n-1}) / \alpha_{n-1}$$

los valores de σ_i son

$$\sigma_n = \beta_n / \alpha_n$$

$$\sigma_i = (\beta_i - h_i \sigma_{i+1}) / \alpha_i \quad i=n-1, n-2, \dots, 1$$

finalmente es preferible calcular los coeficientes b_i , c_i , y d_i para cada intervalo de $[x_i, x_{i+1}]$

$$P(x) = y_i + b_i (x-x_i) + c_i (x-x_i)^2 + d_i (x-x_i)^3$$

$$x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad i=1, 2, \dots, n-1$$

estos coeficientes son calculados como:

$$b_i = (y_{i+1} - y_i) / h_i - h_i (\sigma_{i+1} + \sigma_i)$$

$$c_i = 3\sigma_i$$

$$d_i = (\sigma_{i+1} - \sigma_i) / h_i$$

donde $i=1, 2, \dots, n-1$

usando este procedimiento las funciones spline serán fácilmente manipuladas tal como sus derivadas e integrales.

3.4 VECTOR NORMAL A LA SUPERFICIE TOPOGRÁFICA

La obtención del vector normal a la superficie del terreno se obtiene por el método convencional del gradiente, el cual al aplicarlo a una función o superficie en un punto, físicamente se obtiene el vector normal a la función en ese punto.

Sea φ la función que representa la topografía, por lo que el gradiente de φ será:

$$\nabla \varphi = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{k} = 0 \quad 3.4.1.$$

Para este caso la función φ está dada por la unión de polinomios cúbicos calculados con el método de funciones spline, siendo para cada intervalo discreto del terreno una función cúbica de la siguiente manera:

$$\varphi(x) = Y(I) + B(I)(x-x_i) + C(I)(x-x_i)^2 + D(I)(x-x_i)^3 \quad 3.4.2.$$

x = Abscisa de la topografía

x_i = Abscisa para la cual deseamos calcular su ordenada

si sustituimos la ec. 3.4.2 en la ec. 3.4.1 se tendría:

$$\nabla (\varphi(x)) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \varphi(x)}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \varphi(x)}{\partial z} \hat{k}$$

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \hat{i} = [B(I) + 2C(I)(x-x_i) + 3D(I)(x-x_i)^2] \hat{i}$$

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial y} \hat{j} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial z} \hat{k} = -\hat{k}$$

Evaluando el gradiente en los puntos topográficos, resulta $(x-x_i)=0$

Por lo tanto el vector normal para cada punto de la topografía es:

$$N \Big|_{x=x_i} = B(J) \hat{i} - \hat{k}$$

$$\vec{n}_u = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{B(J)}{(B(J)^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \hat{i} - \frac{1}{(B(J)^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \hat{k} = \vec{n}_x + \vec{n}_z$$

Gráficamente los vectores normales a la superficie topográfica quedarán como en la fig. 3.4.1.

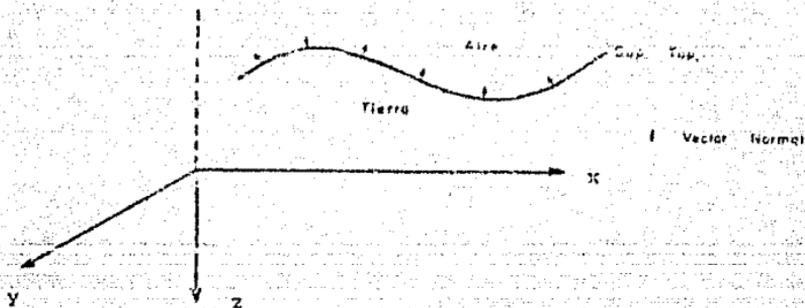


Fig. 3.4.1. Representación de los vectores normales a la superficie topográfica en 3D.

3.5 FUENTES FICTICIAS

Las fuentes ficticias son un artificio matemático para resolver el problema de este trabajo. Lo fundamental del método consiste en reemplazar el efecto de frontera sobre un campo aplicado por una distribución simple de fuentes por arriba de la superficie de frontera o topográfica (simulando fuentes reales).

El potencial en un punto de la topografía se calcula por el campo primario (fuentes reales o emisoras) y el campo producido por las fuentes ficticias. El sistema de potenciales para la superficie en el límite entre los dos semiespacios, es unido por las condiciones de frontera.

La figura 3.5.1. ilustra la posición de las fuentes ficticias localizadas en el semiespacio superior y una fuente real en el semiespacio inferior. El potencial en un punto topográfico está dado por la suma de todos los potenciales reales más ficticios, para el caso de la figura 3.5.1. el potencial en M (U_M) será:

$$U_M = U_{M_A} + U_{M_1} + U_{M_2}$$

donde

$$U_{M_A} = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r_{MA}} \quad \text{potencial en M debido a la fuente real}$$

$$U_{M_1} = C_1 \frac{1}{r_{M_1}} \quad \text{potencial en M debido a la fuente ficticia 1}$$

$$U_{M_2} = C_2 \frac{1}{r_{M_2}} \quad \text{potencial en M debido a la fuente ficticia 2}$$

C_1 y C_2 son coeficientes desconocidos, su valor se obtiene con procedimiento de la sección 3.1.

Las características de las fuentes ficticias son:

- Sus coeficientes son proporcionales a las fuentes reales.
- Su posición puede ser cualquiera siempre que no estén dentro del medio de la solución buscada.
- El número de estas puede ser finito o infinito, su restricción es más bien de tipo computacional.
- Deben satisfacer las condiciones de frontera.
- Su magnitud es obtenida por mínimos cuadrados.
- Estas reemplazan el efecto de frontera.

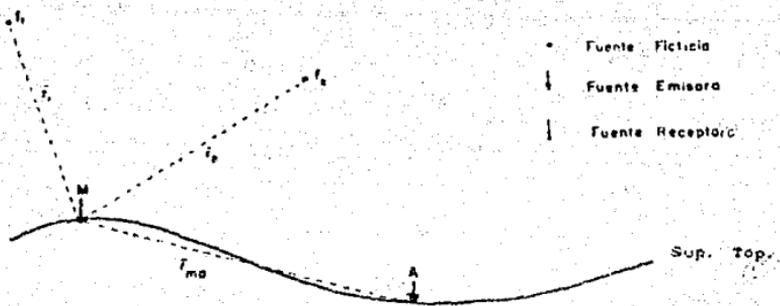


Fig. 3.5.1 Localización del potencial receptor M influenciado por una fuente real (A) y dos fuentes ficticias (f_1 y f_2).

3.6 SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES POR MÍNIMOS CUADRADOS

El método utilizado para la solución del sistema de ecuaciones "A" de la sección 3.1 es mínimos cuadrados con descomposición de matrices conocido como LL' o LDL', el cual se describe a continuación;

Cuando la matriz (A) es simétrica, hay una ventaja tomando o factorizando la matriz como:

$$A = LL' \quad 3.6.1.$$

$$A = LDL' \quad 3.6.2.$$

donde L es baja triangular y D es diagonal.

En el segundo caso varían las condiciones suplementarias, que pueden ser impuestas en L y D.

Los elementos de la diagonal de L en la ecuación 3.6.1. son encontrados por mínimos cuadrados. Para las matrices simétricas definidas positivamente nunca se llega a necesitar hacer la raíz cuadrada de un número negativo, pero en general esto puede ocurrir. Si pasa esto, una o más de las columnas de L podrán ser imaginarias, como los correspondientes renglones de L', por lo que envía números que no son reales o puramente imaginarios. Los elementos imaginarios pueden ser evitados completamente usando la factorización mostrada en la ecuación 3.6.2..

Por ejemplo; la secuencia para la factorización de la ec. 3.6.1. de una matriz simétrica de orden 3 puede ser obtenida considerando la siguiente igualdad:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l'_{11} & l'_{12} & l'_{13} \\ & l'_{22} & l'_{23} \\ & & l'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad 3.6.3.$$

Para encontrar los valores es mejor calcular a L', más que L, y la secuencia de cálculos es :

$$l'_{11} = (\alpha_{11})^{1/2}$$

$$l'_{12} = \alpha_{12} / l'_{11}$$

$$l'_{13} = \alpha_{13} / l'_{11}$$

$$l'_{22} = (\alpha_{22} - l'^2_{12})^{1/2}$$

$$l'_{23} = (\alpha_{23} - l'_{12} l'_{13}) / l'_{22} \quad 3.6.4.$$

$$l'_{33} = (\alpha_{33} - l'^2_{13} - l'^2_{23})^{1/2}$$

y puede ser ejecutado por renglones o por columnas. Esto, no importando el signo para las raíces cuadradas ya que el efecto del signo desaparecerá multiplicando L por L'.

Si consideramos la ecuación siguiente:

$$Ax = y \quad 3.6.5.$$

el problema se puede dividir en dos partes,

$$Lz = y \quad 3.6.6.$$

$$L'z = y \quad 3.6.7.$$

entonces las ecuaciones son:

$$z_1 = y_1 / l'_{11}$$

$$z_2 = (y_2 - l'_{12} z_1) / l'_{22} \quad 3.6.8.$$

⋮

$$z_r = (y_r - l'_{1r} z_1 - l'_{2r} z_2 - \dots - l'_{r-1,r} z_{r-1}) / l'_{rr}$$

$$x_n = z_n / l'_{nn}$$

$$x_{n-1} = (z_{n-1} - l'_{n-1,n} x_n) / l'_{n-1,n-1} \quad 3.6.9.$$

$$x_r = (z_r - l'_{rn} x_n - l'_{r,n-1} x_{n-1} - \dots - l'_{r,r+1} x_{r+1}) / l'_{rr}$$

Las dos ecuaciones anteriores pueden ser comprobadas usando la suma de los renglones, en las cuales las partes de mano derecha pueden ser incluidas como:

$$A\mathbf{l} + \mathbf{y} = L\mathbf{l}' + L\mathbf{z} = L(\mathbf{l}' + \mathbf{z}) \quad 3.6.10.$$

$$L\mathbf{l}' + \mathbf{z} = L'\mathbf{l} + L'\mathbf{x} = L'(\mathbf{l} + \mathbf{z}) \quad 3.6.11.$$

La ecuación 3.6.10. muestra la suma de $(\mathbf{l}', \mathbf{z})$ que es relacionada con la suma de los renglones de (A, \mathbf{y}) , de la misma manera como alguna columna de L' es relacionada a la columna correspondiente de A . Esto es, porque es más conveniente grabar L' que L , así la comprobación de la suma puede ser encontrada sumando solo ambos renglones para (A, \mathbf{y}) y (L', \mathbf{z}) .

La ecuación 3.6.11. muestra que si la revisión para la suma de $(\mathbf{l}', \mathbf{z})$ son tratados como una columna extra de mano derecha y se usa la sustitución hacia atrás, cada número resuelto será uno o más que el elemento correspondiente de \mathbf{x} .

Si los elementos de la diagonal L son uno, hay varios caminos para encontrar los factores:

El primer método consiste en obtener una factorización triangular ordinaria como la ec. 3.6.9. y tomar los elementos de la diagonal de U para crear el factor de la diagonal de D . Por lo que esto puede ser fácilmente verificado por una prueba de la ec. 3.6.15., si A es simétrica y,

$$A = LU \quad 3.6.12.$$

entonces

$$U = DL' \quad 3.6.13.$$

donde

$$D = \begin{bmatrix} U_{11} & 0 & \dots & 0 \\ & U_{22} & & \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & U_{nn} \end{bmatrix} \quad 3.6.14.$$

Esta factorización es particularmente usada cuando A es singular, entonces ocurre que $|A|=0$ y por lo tanto $|L'|=1$ y $|U|=0$, pero

$$|U| = U_{11} U_{22} \dots U_{nn} \quad 3.6.15.$$

y además uno o más elementos de D serán cero, así la matriz

singular A es expresada de la forma:

$$A = LDL' \quad 3.6.16.$$

donde L y L' son no singulares y D es una matriz diagonal con uno o más ceros.

Cuando A es una matriz semi-definida positiva, existe otro método de factorización, el cual es conveniente usarlo algunas veces. El elemento u_r será positivo o cero (sólo será cero cuando A sea singular). La matriz D puede ser factorizada en tres matrices diagonales.

$$D = CD^0C' \quad 3.6.17.$$

donde

$$C_r = \begin{cases} d_r^{1/2} = \frac{u_r^{1/2}}{r_r} & \text{si } d_r \neq 0 \\ 1 & \text{si } d_r = 0 \end{cases} \quad 3.8.18.$$

y

$$d_r^0 = \begin{cases} 1 & \text{si } d_r \neq 0 \\ 0 & \text{si } d_r = 0 \end{cases} \quad 3.6.19.$$

entonces

$$A = (LD)D^0(C'L') = LPD^0LP' \quad 3.6.20.$$

donde D^0 es una matriz diagonal compuesta de unos y ceros, y L^0 y D^0 son no singulares.

Cuando los elementos de la diagonal de L son tomados para ser unos, existe un tercer camino para encontrar los factores haciendo la raíz cuadrada de éstos. Como la ecuación 3.6.1. divide cada renglón de L' por su elemento diagonal, es entonces,

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ & l_{22} & \dots & l_{n2} \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & l_{22} & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21}/l_{11} & \dots & l_{n1}/l_{11} \\ & 1 & \dots & l_{n2}/l_{22} \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

y hacemos que

$$D = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & 0 & \dots & 0 \\ & l_{22}^2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & l_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

Un cuarto método es obtenido de las ecuaciones que son representadas por la ecuación de matriz 3.6.2., siendo,

$$\begin{aligned} a_{11} &= l_{11} d_{11} l'_{11} & a_{22} &= l_{21} d_{11} l'_{12} + l_{22} d_{22} l'_{22} \\ a_{12} &= l_{11} d_{11} l'_{12} & a_{29} &= l_{21} d_{11} l'_{19} + l_{22} d_{22} l'_{29} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{1r} &= l_{11} d_{11} l'_{1r} & a_{2r} &= l_{21} d_{11} l'_{1r} + l_{22} d_{22} l'_{2r} \end{aligned}$$

recordando que $l'_{rr} = l_{rr} = 1$, se pueden resolver estas ecuaciones y encontrar que,

$$\begin{aligned} d_{11} &= a_{11} & d_{22} &= a_{22} - d_{11} l_{21}^2 \\ l'_{12} &= a_{12} / d_{11} & l'_{29} &= (a_{29} - d_{11} l_{21} l'_{19}) / d_{22} \\ & \vdots & & \vdots \\ l'_{1r} &= a_{1r} / d_{11} & l'_{2r} &= (a_{2r} - d_{11} l_{21} l'_{1r}) / d_{22} \end{aligned}$$

$$d_{33} = a_{33} - d_{11} l_{31}^2 - d_{22} l'_{23}^2$$

$$l'_{34} = (a_{34} - d_{11} l_{31} l'_{14} - d_{22} l'_{23} l'_{24}) / d_{33}$$

$$l'_{3r} = (a_{3r} - d_{11} l_{31} l'_{1r} - d_{22} l'_{23} l'_{2r}) / d_{33}$$

3.7 DESARROLLO DEL MODELADO

En este capítulo se explica la forma práctica como se desarrolló la teoría del modelado, para ser procesada en una computadora, así como la utilización de los algoritmos necesarios para elaborar la corrección topográfica en los S.E.V.

Para realizar la corrección topográfica, primeramente se requirió conocer la forma del terreno en el cual se elabora o se elaboró el S.E.V., para ello fue necesario obtener una función o superficie matemática que represente la forma real de la topografía; ésto se logró utilizando el algoritmo de interpolación de funciones spline (Forsythe, 1977). El método de spline requiere que los valores discretos de la topografía sean equidistantes para poder generar polinomios cúbicos entre cada punto topográfico, siendo un total de $n-1$ funciones polinomiales donde n es el total de puntos discretos del terreno en el que se realizó el S.E.V. (Fig. 3.7.1).

Habiendo obtenido una superficie que representa la topografía, se utilizó el algoritmo escrito en la sección 3.4 para la obtención de los vectores normales a la superficie.

Por otra parte, la solución fundamental de la ecuación de Laplace ($1/r$), se puede expresar en el dominio del número de onda como la integral de la función Bessel de primera clase N_0 (ec. 3.1.3.), teóricamente para lograr esta relación la integral se tendrá que calcular de menos infinito a más infinito; para lograr resultados prácticos se requirió encontrar la frecuencia de corte para la cual se obtenga la mayor cantidad de energía y por consecuencia errores mínimos en la integración. Para la realización de la integración se programaron las funciones polinomiales que representan las funciones Bessel de primera clase (apéndice A), elaborándose sus gráficas para conocer su comportamiento en el dominio del número de onda para diferentes valores de r . Como se puede observar no es posible obtener la frecuencia de corte en la escala convencional de m , ya que para valores pequeños de r la frecuencia de corte es muy grande (Fig. 3.3.1. a Fig. 3.3.6.), así también para datos grandes de r la frecuencia de corte es muy pequeña (Fig. 3.3.7. a Fig. 3.3.9.). Por otra parte, se pensó en los valores de r que se manejan en el S.E.V. que son hasta dos kilómetros, se hizo el cambio en la escala de m a Km, además, como las integrales se obtendrán para calcular los valores de los potenciales que producen las fuentes ficticias; hubo la

necesidad de crear una restricción para su localización, siendo esta que las fuentes no deben localizarse a una distancia menor a 50 m de la topografía, logrando con ello obtener que la frecuencia de corte sea igual a 10, para la cual las funciones K_0 tienen la mayor cantidad de energía, como se observa en las figuras 3.3.10. a 3.3.15. (Apendice A).

El siguiente paso realizado fué la integración de las funciones mencionadas, para ello se probaron los métodos convencionales de integración numérica 3/8, 1/3 Simson y trapecio, lograndose el mínimo error con el método trapezoidal, usando un intervalo de frecuencia de 0.1 se obtuvieron errores máximos entre 4 y 6% para valores de r entre 1000 y 1500m respectivamente y menores al 1.0% para los valores de r igual a 50m y menores a 1.7% para la suma de los valores de r .

Una vez obtenida la integración satisfactoriamente con una frecuencia de corte 10 y un intervalo de muestreo de 0.1, hubo la necesidad de utilizar el método de interpolación de spline para no resolver el sistema de ecuaciones "A" (sección 3.1) a cada frecuencia de 0.1 hasta 10, computacionalmente esto no es recomendable por lo que se realizaron pruebas con el método de ensayo y error para calcular solo algunos valores de frecuencia y los demás obtenerlos con el algoritmo de spline. Las frecuencias obtenidas con el método mencionado son dos secciones de 0.1, 0.4, 0.7, 1.0 y de 1.0, 4.0, 7.0, 10.0 para los cuales los valores interpolados con spline son menores a 4% para los extremos y menores a 1.0% para los valores centrales del intervalo (ver tabla 3.7.1).

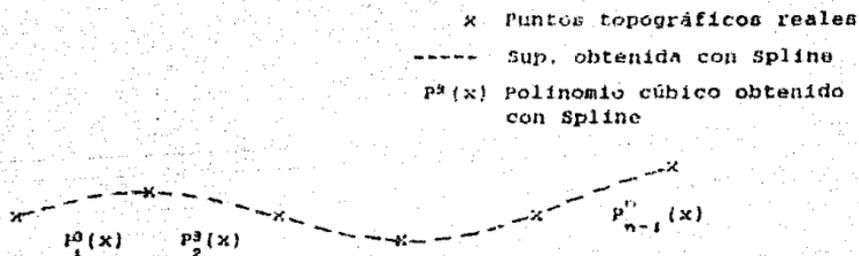


Fig. 3.7.1. Representación de la superficie topográfica continua a partir de valores discretos del terreno utilizando el algoritmo de interpolación de funciones spline.

Frecuencia	Error al interpolar	Frecuencia	Error al interpolar
0.1	menor al 1%	1	de 3.9 a 0.5 %
0.4	menor al 1%	4	de 1.0 a 0.2 %
0.7	menor al 1%	7	de 3.9 a 0.5 %
1.0	menor al 1%	10	de 3.9 a 0.5 %

Tabla 3.7.1. Tabla de valores de frecuencia para resolver el sistema de ecuaciones "A", con sus respectivos % de error al interpolar con el algoritmo

CAP. 4 DISCUSION DE RESULTADOS

4.1 ANÁLISIS DEL MÉTODO DESARROLLADO

El análisis del método se realizó probando su aplicación en modelos topográficos sencillos, para ello se utilizó el principio de reciprocidad, el cual consiste en intercambiar la posición de los electrodos de corriente por las de potencial y viceversa, debiéndose obtener la misma diferencia de potencial para cualquier forma topográfica y dispositivo electrodico.

Se obtuvieron resultados satisfactorios con poco porcentaje de error para algunos casos (Fig. 4.1.1. a 4.1.8.) y valores indeseables con alto porcentaje de error para otros (Fig. 4.1.9. y 4.1.10.).

En los modelos que se presentan (Fig. 4.1.1. a 4.1.10.), se aplicó el dispositivo Schlumberger a un medio con resistividad de $100 \Omega \cdot m$ donde se varían la localización de los electrodos, la forma del terreno, la distancia entre los puntos topográficos discretos y la separación de las fuentes ficticias con respecto a la superficie topográfica, estas se describen a continuación y se resumen en las tablas 4.1.1. y 4.1.2..

En las figuras 4.1.1. y 4.1.2. se elaboraron unas superficies topográficas planas digitizadas cada 50m y con una separación de las fuentes ficticias a la superficie topográfica de 50m; en la primera la abertura de $AB=350m$ y $MN=20m$ obteniéndose un porcentaje de error menor a 0.009%, en la segunda se cambio la abertura de los electrodos quedando $AB=700$ y $MN=40m$, logrando un error menor a 0.13% .

Para las figuras 4.1.3. y 4.1.4. se presentan la topografía de un valle con 10 y 20m de profundidad respectivamente y una distancia de $AB=250m$ y $MN=20m$ para los dos casos, obteniéndose 0.18% y 0.11% de error respectivamente.

En las figuras 4.1.5. y 4.1.6. se muestra la topografía de una loma con la misma relación de distancias que las dos figuras anteriores, obteniéndose un porcentaje de error de 0.387% para la primera y 1.95% para la segunda.

Para las figuras 4.1.7., 4.1.8. y 4.1.9. se cambio la distancia equidistante entre los puntos topográficos de 50m a 10m, para la primera (sup. plana) el porcentaje de error es menor a 0.003%, en

la segunda (loma) el porcentaje de error aumenta hasta 2.86% y en la tercera (loma) el porcentaje de error aumentó considerablemente alcanzando el 14.6% .

En la Fig. 4.1.10. se varió la distancia de las fuentes ficticias quedando una separación de 50m entre las fuentes y la superficie topográfica, y un intervalo 10m entre los puntos topográficos discretos, para este caso la solución del sistema de ecuaciones no converge (Tabla 4.1.2.).

Los modelos topográficos mostrados son algunos de los ejemplos que se han ejecutado con el programa, analizando éstos y otros (que no se mencionan debido a que los anteriores son suficientes para ilustrar los resultados), se llegó a la conclusión que el método de solución del sistema de ecuaciones no es el óptimo, ya que sólo converge para los casos en que el sistema es cuadrado ($n \times n$ ecs.) y que n sea menor a 20, así como la distancia de las fuentes ficticias a la topografía debe ser igual a la equidistancia de los valores discretos de la superficie, también se debe considerar esta distancia cuando se hace la integración de las funciones potenciales ya que es importante para definir la frecuencia de corte como se explicó en la sección 3.7.

Bajo estas restricciones no fué posible hacer una generalización del método para la interpretación, por lo que el trabajo se deja a criterio del interprete y abierto para que se continúe con la investigación del método.

superficie (modelo topográfico)	figura	% de error relativo en reciprocidad
Plana	4.1.1.	0.0086 %
Plana	4.1.2.	0.128 %
Valle	4.1.3.	0.18 %
Valle	4.1.4.	0.11 %
Loma	4.1.5.	0.387 %
Loma	4.1.6.	1.95 %
Loma	4.1.7.	0.0025 %
Plana	4.1.8.	2.78 a 2.86 %
Loma	4.1.9.	12.75 a 14.6 %
Loma	4.1.10.	Error en la solución del sistema de ecuaciones.

Tabla 4.1.1. Porcentajes de error obtenidos para diferentes modelos topográficos.

Frecuencia del Potencial	Solución del sistema de ecuaciones	
	directo	reciprocidad
0.1	543528091.179	793594958.155
0.4	130047156055517.000	312866282480376.000
0.7	0.21345×10^{21}	0.53433×10^{21}
1.0	0.470×10^{20}	0.24533×10^{20}
⋮	⋮	⋮

Tabla 4.1.2. Valores de la función potencial de la fig. 4.1.10, cuando la solución del sistema de ecs. falla.

- S_{p_1} = Resistencia aparente con Electro Topografico
 S_{p_2} = Valor de Resistencia con Electro Topografico
 * = Punto Topografico
 □ = Punto Electrico
 ----- = Superficie limitada con Espina

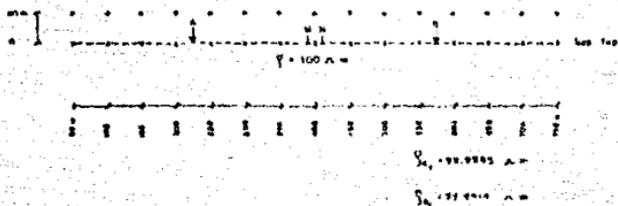


FIG. 4.1.1.

- S_{p_1} = Resistencia aparente con Electro Topografico
 S_{p_2} = Valor de Resistencia con Electro Topografico
 * = Punto Topografico
 □ = Punto Electrico
 ----- = Superficie limitada con Espina

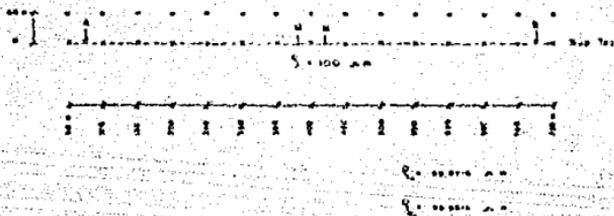
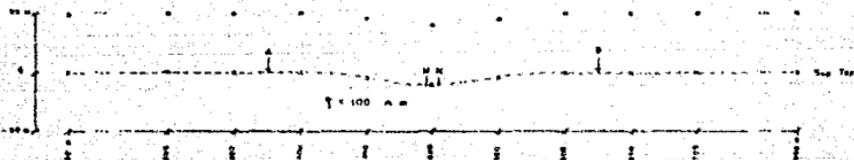


FIG. 4.1.2.

- S_{21} = Resultado Aparato con Electro Topografico
- S_{22} = Valor de Resultado con Electro Topografico
- \bullet = Punto Topografico
- \square = Fuente Fisica
- = Superficie Obtenida con Espina

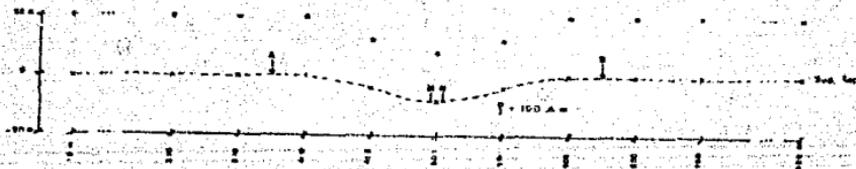


$$S_{21} = 102.06 \text{ m}$$

$$S_{22} = 101.88 \text{ m}$$

Fig. 4.13.

- S_{21} = Resultado Aparato con Electro Topografico
- S_{22} = Valor de Resultado con Electro Topografico
- \bullet = Punto Topografico
- \square = Fuente Fisica
- = Superficie Obtenida con Espina



$$S_{21} = 105.18 \text{ m}$$

$$S_{22} = 105.12 \text{ m}$$

Fig. 4.14.

- \bar{V}_0 = Aceleración Apuntada en Electro Topografica
- \bar{V}_1 = Valor de Aceleraciones con Tercer Topografica
- = Punto Topografico
- = Punto Nivelado
- = Superficie Obtenida con Optica



$$\bar{V}_0 = 66.17 \text{ m/s}^2$$

$$\bar{V}_1 = 99.77 \text{ m/s}^2$$

Fig. 4.15.

- \bar{V}_0 = Aceleración Apuntada en Electro Topografica
- \bar{V}_1 = Valor de Aceleraciones con Electro Topografica
- = Punto Topografico
- = Punto Nivelado
- = Superficie Obtenida con Optica



$$\bar{V}_0 = 67.37 \text{ m/s}^2$$

$$\bar{V}_1 = 99.12 \text{ m/s}^2$$

Fig. 4.16.

- \bar{Q}_0 = Resonancia Aparente con Efecto Topografico
- \bar{Q}_{00} = Valor de Resonancia con Efecto Topografico
- \bullet = Punto Topografico
- \circ = Fuente Ficticia
- = Superficie Obtenida con Solus

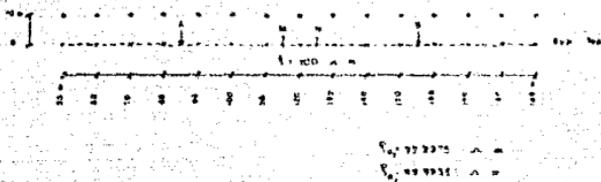


Fig. 4.17.

- \bar{Q}_0 = Resonancia Aparente con Efecto Topografico
- \bar{Q}_{00} = Valor de Resonancia con Efecto Topografico
- \bullet = Punto Topografico
- \circ = Fuente Ficticia
- = Superficie Obtenida con Solus

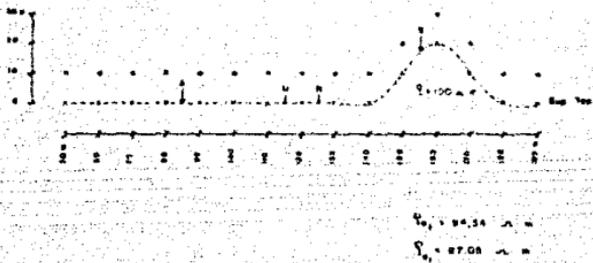


Fig. 4.18.

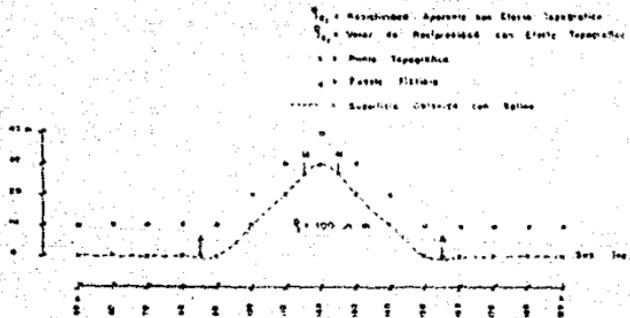


Fig. 4.1.9

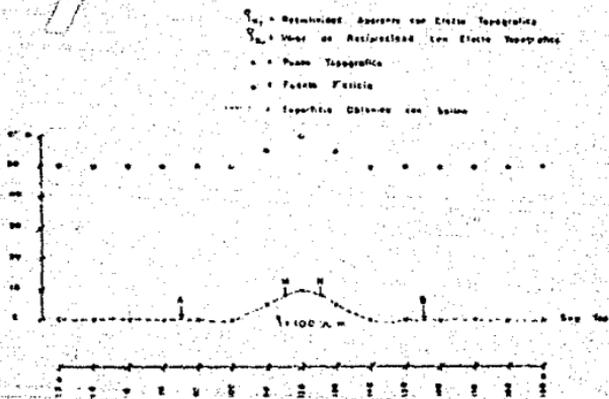


Fig. 4.1.10

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- 1.- Las medidas de resistividad son realmente afectadas por la forma de la topografía cuando se elabora un Sondeo Eléctrico Vertical (S.E.V.).
- 2.- Se debe elaborar siempre la corrección topográfica cuando se elabora un S.E.V. en una topografía abrupta mediante la siguiente fórmula:

$$\rho_a = F(x_i) \cdot \rho_{o \text{ campo}}$$

donde

$$F(x_i) = \frac{\rho_a \text{ plana}}{\rho_a \text{ irregular}}$$

- 3.- Existen límites computacionales que no permiten generalizar la teoría de la corrección topográfica.
- 4.- El programa elaborado se puede utilizar para calcular la ρ_a con topografía abrupta, y como el programa tiene límites, se debe hacer siempre la prueba de reciprocidad y considerar las siguientes restricciones:

- Digitizar la topografía con valores equidistantes y no mayor a 20 puntos.
- Las fuentes ficticias deberán colocarse a una distancia igual al intervalo topográfico y deben ser el mismo número que los puntos topográficos discretos.
- Tener presente la distancia mínima de las fuentes ficticias para definir la frecuencia de corte en la integración de las funciones potenciales.

5.- Si no es posible hacer una interpretación cuantitativa de la corrección para todo el S.E.V., hacerla cualitativamente para algunas aberturas con la finalidad de conocer los valores que se producen por efecto de la topografía.

6.- Es importante realizar la corrección topográfica para sondeos con pequeñas aberturas y más aún cuando se elaboran prospectos de detalle.

7.- Con este método se puede interpretar fácilmente una calicata elaborada en una topografía abrupta.

8.- Cambiar el algoritmo de la solución del sistema de ecuaciones por uno de descomposición singular y hacer los siguientes cambios al programa:

- Utilizar un sistema sobredeterminado donde sea mayor el número de puntos topográficos que las fuentes ficticias.
- Digitizar o detallar más la topografía en las partes abruptas.
- Integrar las funciones potenciales directamente con los polinomios obtenidos con el método de spine.

BIBLIOGRAFIA

- Abramowitz Milton and Stegun Irene A.
Handbook of Mathematical Functions
Dover Publications, Inc., New York, 1980.
- Benhumea León Mario
Efectos de la Topografía en Medidas Geoelectricas
Tesis Profesional, Ingeniería U.N.A.M. 1984.
- Bishop R.E.O. and Gladwell G.M.L.
The Matrix Analysis of Vibration
Cambridge University Press 1965.
- Coggon J.H.
Electromagnetic and electrical modeling by the finite element method.
Geophysics Vol.36, N.1, p.p.132-155, 1971.
- Dey A. y Morrison, H.F.
Resistivity modeling for arbitrary shaped three-dimensional structures
Geophysics, Vol. 44, p.p. 753-789, 1979.
- Forsythe E. George And Malcolm A. Michael
Computer Methods For Mathematical Computations
Prentice-Hall 1977 p.p. 70-79
- Fox C. Richard, Hohmann W. Gerald, Killpack J. Terry y Rijo Luiz
Topographic Effects in Resistivity And Induced Polarization Surveys
Geophysics, Vol. 45, No. 1, p.p. 75-93, 1980.
- Jepsen A. F.
Numerical modeling in resistivity prospecting
Thesis, University of California, U.S., 1969.

- Mufti R. Irshad
A practical approach to finite difference resistivity modeling.
 Geophysics Vol. 43, N.5, p.p. 930-942, 1978.
- Nabighian, M. N.
Toward a three-dimensional automatic interpretation of potential field data via generalized Hilbert
 Geophysics Vol. 49, p.p. 780-786., 1986.
- Oppliger G.L.
Three dimensional terrain corrections for mise-d-la-masse and magnetometric resistivity surveys.
 Geophysics Vol.49, N.10, p.p. 1716-1724, 1984.
- Orellana Ernesto
Prospección Geoelectrónica en Corriente Continua
 Paraninfo 1982
- Shi-Zhe-Xu, Z. Gao, and Sheng-Kai Zhao
An integral formulation of three-dimensional terrain modeling for resistivity surveys.
 Geophysics, Vol 55, No. 4, Abril 1988.
- Tejero Andrade Andrés
On the use of the fundamental solution method in geophysics
 Thesis, University of Toronto 1980.

APENDICE A

Ecuaciones polinomiales que representan a las funciones Bessel de primera clase y sus gráficas para diferentes valores de r .

$$t = x/3.75$$

$$-3.75 \leq x \leq 3.75$$

$$I_0(x) = 1 + 3.5156229 t^2 + 3.0899424 t^4 + 1.2067492 t^6 + .2659732 t^8 + .0360768 t^{10} + .0045813 t^{12} + \epsilon$$

$$|\epsilon| < 1.6 \times 10^{-7}$$

$$3.75 \leq x < \infty$$

$$x^{1/2} e^{-x} I_0(x) = .39894228 + .01328592 t^{-1} + .00225319 t^{-2} - .00157565 t^{-3} + .00916201 t^{-4} - .02057706 t^{-5} + .02635537 t^{-6} - .01647633 t^{-7} + .00392377 t^{-8} + \epsilon$$

$$|\epsilon| < 1.9 \times 10^{-7}$$

$$3.75 \leq x \leq 3.75$$

$$x^{-1} I_1(x) = 1/2 + .87890594 t^2 + .51498869 t^4 + .15084934 t^6 + .02658733 t^8 + .00301532 t^{10} + .00032411 t^{12} + \epsilon$$

$$|\epsilon| < 8 \times 10^{-9}$$

$$3.75 \leq x < \infty$$

$$x^{1/2} e^{-x} I_1(x) = .39894228 - .03988024 t^{-1} - .00362018 t^{-2} + .00163801 t^{-3} - .01031555 t^{-4} + .02282967 t^{-5} - .02895312 t^{-6} + .01787654 t^{-7} - .00420059 t^{-8} + \epsilon$$

$$|\epsilon| < 2.2 \times 10^{-7}$$

$$0 < x \leq 2$$

$$K_0(x) = -\ln(x/2) I_0 - .57721566 + .42278420(x/2)^2 + .23069756(x/2)^4 \\ + .42278420(x/2)^2 + .23069756(x/2)^4 + .03488590(x/2)^6 \\ + .00262698(x/2)^8 + .00010750(x/2)^{10} + .00000740(x/2)^{12} \\ + \epsilon$$

$$|\epsilon| < 1 \times 10^{-8}$$

$$2 \leq x < \infty$$

$$x^{1/2} e^x K_0(x) = 1.25331414 - .07832358(2/x) + .02189568(2/x)^2 \\ - .01062446(2/x)^3 + .00587872(2/x)^4 \\ - .00251540(2/x)^5 + .00053208(2/x)^6 + \epsilon$$

$$|\epsilon| < 1.0 \times 10^{-7}$$

$$0 < x \leq 2$$

$$x K_1(x) = x \ln(x/2) I_1(x) + 1 + .15443144(x/2)^2 - .67278579(x/2)^4 \\ - .18156897(x/2)^6 - .01919402(x/2)^8 - .00110404(x/2)^{10} \\ - .00004686(x/2)^{12} + \epsilon$$

$$|\epsilon| < 8 \times 10^{-9}$$

$$2 \leq x < \infty$$

$$x^{1/2} e^x K_1(x) = 1.25331414 + .23498619(2/x) - .03655620(2/x)^2 \\ + .01504268(2/x)^3 - .00780353(2/x)^4 \\ + .00325614(2/x)^5 - .00068245(2/x)^6 + \epsilon$$

$$|\epsilon| < 2.2 \times 10^{-7}$$

GRAFICA DE $K_0(2 \cdot \pi \cdot F \cdot R)$
 $R = 1 \text{ m}$

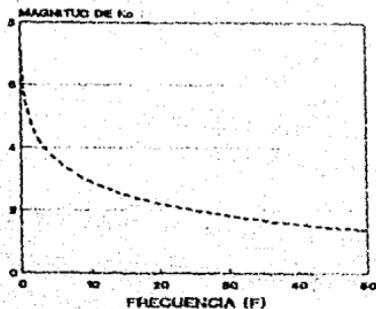


FIG. 5.2.1

GRAFICA DE $K_0(2 \cdot \pi \cdot F \cdot R)$
 $R = 5 \text{ m}$

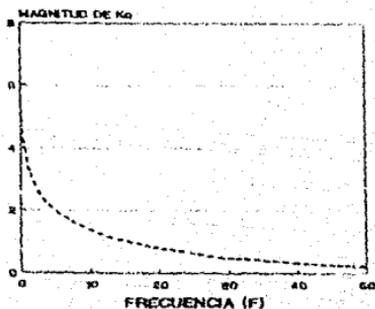


FIG. 5.2.2

GRAFICA DE $K_0(2 \cdot \pi \cdot F \cdot R)$
 $R = 10 \text{ m}$

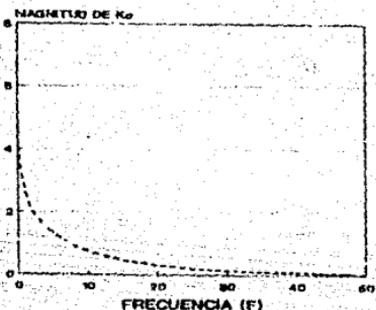


FIG. 5.2.3

GRAFICA DE $K_0(2 \cdot \pi \cdot F \cdot R)$
 $R = 20 \text{ m}$

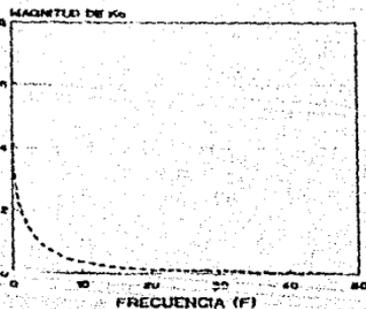


FIG. 5.2.4

GRAFICA DE $K_0(2 \cdot \pi \cdot F \cdot R)$
 $R = 50 \text{ m}$

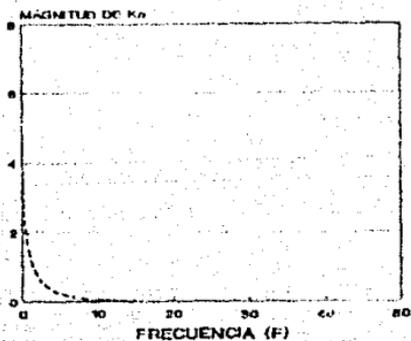


FIG. 3.25

GRAFICA DE $K_0(2 \cdot \pi \cdot F \cdot R)$
 $R = 100 \text{ m}$

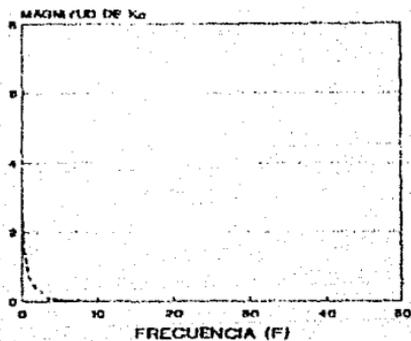


FIG. 3.26

GRAFICA DE $K_0(2 \cdot \pi \cdot F \cdot R)$
 $R = 250 \text{ m}$

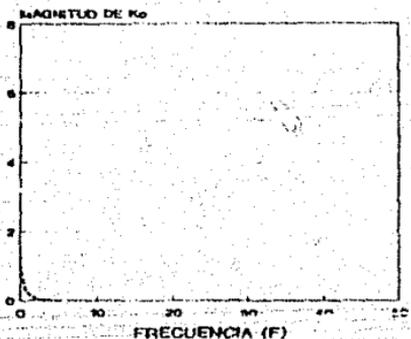


FIG. 3.27

GRAFICA DE $K_0(2 \cdot \pi \cdot F \cdot R)$
 $R = 500 \text{ m}$

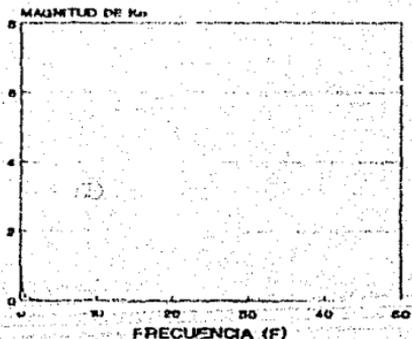


FIG. 3.28

GRAFICA DE $K_0(2 \cdot \pi \cdot F \cdot R)$
 $R = 1000 \text{ m}$

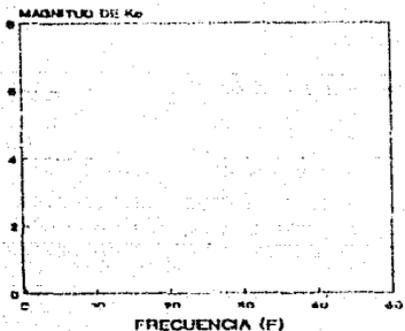


FIG. 8.2.9

GRAFICA DE $K_0(2 \cdot \pi \cdot F \cdot R)$
 $R = 0.05 \text{ Km}$

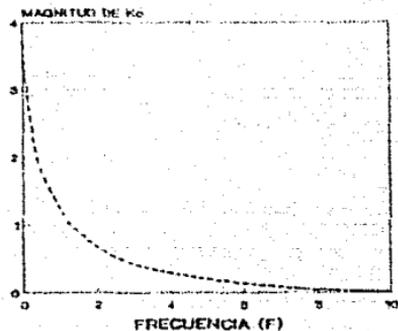


FIG. 8.2.10

GRAFICA DE $K_0(2 \cdot \pi \cdot F \cdot R)$
 $R = 0.1 \text{ Km}$

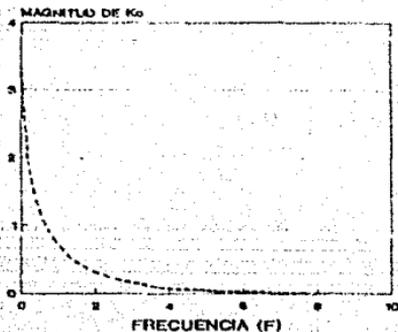


FIG. 8.2.11

GRAFICA DE $K_0(2 \cdot \pi \cdot F \cdot R)$
 $R = 0.25 \text{ Km}$

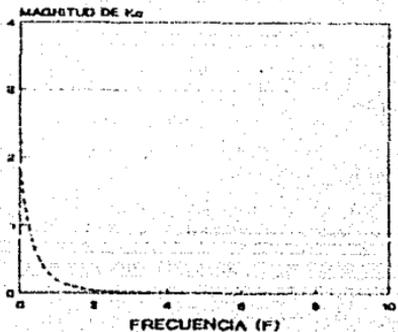


FIG. 8.2.12

GRAFICA DE $K_0(2 \cdot \pi \cdot F \cdot R)$
 $R = 0.5 \text{ Km}$

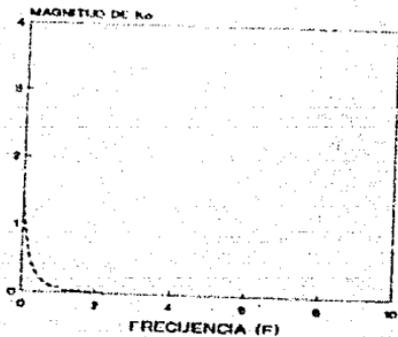


FIG. 3.2.13

GRAFICA DE $K_0(2 \cdot \pi \cdot F \cdot R)$
 $R = 1.0 \text{ Km}$

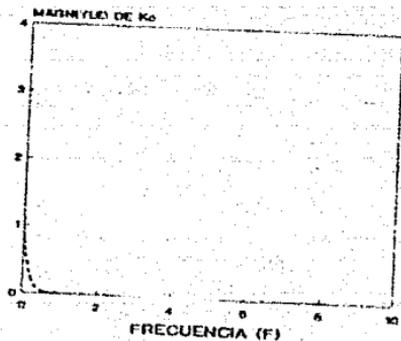


FIG. 3.2.14

GRAFICA DE $K_0(2 \cdot \pi \cdot F \cdot R)$
 SUMA DE $R = 0.05 + 1 + 2.50 + 5 + 1 \text{ Km}$

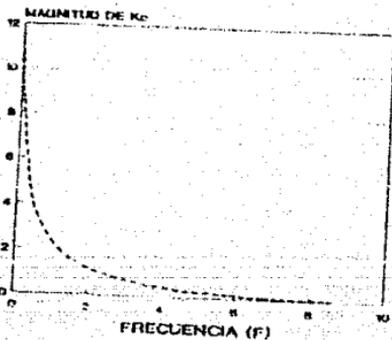


FIG. 3.2.15

APENDICE B

Derivada de la función Bessel de Primera Clase.

Dentro del seguimiento del modelado hay la necesidad de evaluar el campo eléctrico, el cual se obtiene aplicando la función gradiente al potencial eléctrico. Para ello es necesario conocer el valor de la derivada de la función Bessel, ésta se obtiene utilizando una fórmula de recurrencia que genera las derivadas a partir de conocer una.

La fórmula de recurrencia es la siguiente:

$$x K_0'(x) = n K_n(x) - x K_{n-1}(x)$$

para $n = 0$

$$x K_0'(x) = 0 - x K_{-1}(x)$$

$$K_0'(x) = -K_1(x)$$

Utilizando esta fórmula, la aplicamos para encontrar la derivada de la función $K_0(rw)$,

$$\frac{\partial K_0(rw)}{\partial r} = \frac{\partial K_0(rw)}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial K_0(rw)}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial K_0(rw)}{\partial z} \hat{z}$$

$$\text{donde } r = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2}$$

como se considera constante en Y se tiene:

$$\frac{\partial K_0(rw)}{\partial x} \hat{x} = - \frac{w (x-x_0)}{r} K_1(rw) \hat{x}$$

$$\frac{\partial K_0(rw)}{\partial y} \hat{y} = 0$$

$$\frac{\partial K_0(rw)}{\partial z} \hat{z} = - \frac{w (z-z_0)}{r} K_1(rw) \hat{z}$$