

2 ej 87



# Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ingeniería

## MODELO PARA LA ASIGNACION DE FLUJOS DE CARROS DE FERROCARRIL

# T E S I S

Que para obtener el Título de  
INGENIERO CIVIL  
p r e s e n t a  
Francisco Javier Jauffred Gorostiza



Director de Tesis:  
Ing. Francisco Gorostiza Pérez

México, D. F.

1989

FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# I N D I C E

	<u>Página</u>
INTRODUCCION .....	1
<b>CAPITULO I GENERALIDADES SOBRE EL TRANSPORTE FERROCARRILERO</b> .....	4
1.0 OBJETIVO DEL TRANSPORTE .....	4
1.1 CARACTERISTICAS DEL TRANSPORTE .....	4
1.2 EL EQUIPO DE TRANSPORTE FERROVIARIO .....	5
1.3 MANEJO DE CARROS VACIOS .....	6
1.4 CARACTERISTICAS DE LA RED NACIONAL .....	6
<b>CAPITULO II ALGUNOS CONCEPTOS DE LA TEORIA DE GRAFOS</b> .....	8
2.0 INTRODUCCION AL CAPITULO II .....	8
2.1 DEFINICION DE GRAFO .....	9
2.2 DEFINICION DE CORTE DE UN GRAFO Y DE COCICLOS ELEMENTALES .....	10
2.3 DEFINICION DE TRAYECTORIA .....	11
2.4 DEFINICION DE CIRCUITO ELEMENTAL .....	12
2.5 ORTOGONALIDAD DE CIRCUITOS Y COCICLOS .....	13
2.6 DEFINICION Y PROPIEDADES DE LOS FLUJOS .....	14
2.7 GENERACION COMBINATORIA DE TRAYECTORIAS Y CIRCUITOS DE UN GRAFO ALGORITMO LATINO DE KAUFMANN .....	17
<b>CAPITULO III PLANTEAMIENTO DEL MODELO</b> .....	24
3.0 CONCEPTOS GENERALES DEL MODELO .....	24
3.1 CONCEPTO DE FLUJO DE UNA RED DE TRANSPORTE .....	26
3.2 VECTOR DE DISTANCIAS .....	27
3.3 LONGITUD DE UN CIRCUITO .....	27
3.4 VECTOR TRAYECTORIA Y LONGITUD DE UNA TRAYECTORIA .....	27
3.5 CONCEPTO DE NODO PRODUCTOR .....	29
3.6 REPRESENTACION DE UN FLUJO DE CARROS EN LA RED .....	30
3.7 ECUACION DE CONSERVACION EN LOS ARCOS .....	30
3.8 FUNCION OBJETIVO DEL MODELO .....	31
3.9 PLANTEAMIENTO DEL MODELO COMO UN PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL .....	32
3.10 PROBLEMA CON TRAYECTORIAS OPTIMAS Y UN SOLO TIPO DE CARRO .....	35
<b>CAPITULO IV ANALISIS Y METODOS DE SOLUCION</b> .....	37
4.0 INTRODUCCION .....	37

I N D I C E  
Continuación

	<u>Página</u>
PARTE I PROBLEMAS CON UN SOLO TIPO DE EQUIPO DE TRANSPORTE	38
4.1 ECUACION DE CONSERVACION DEL FLUJO DE CARROS VACIOS .....	38
4.2 ANALISIS DE LA SOLUCION DE PROBLEMAS CON UN SOLO EQUIPO DE TRANSPORTE .....	39
4.3 ANALISIS CON TRAFICO OPTIMO TOTAL .....	43
4.4 METODO DE SOLUCION PARA PROBLEMAS CON UN SOLO TIPO DE EQUIPO DE TRANSPORTE .....	49
4.5 EJEMPLO .....	51
PARTE II VARIOS TIPOS DE EQUIPO DE TRANSPORTE .....	57
4.6 ANALISIS DEL PROBLEMA MULTICARRO .....	57
4.7 ANALISIS DEL PROBLEMA MULTICARRO CON TRAFICO TOTAL .....	62
4.8 METODO DE SOLUCION DEL PROBLEMA MULTICARRO ...	65
4.9 EJEMPLO .....	69
CAPITULO V UN EJEMPLO EN EL AMBITO NACIONAL .....	80
5.0 PLANTEAMIENTO GENERAL .....	80
5.1 MODELO DE LA RED .....	80
5.2 CARGAS A TRANSPORTAR .....	83
5.3 ENRUTAMIENTOS DE CARROS VACIOS .....	83
5.4 RUTAS DE CARGA DOMINANTES .....	87
5.5 ANALISIS POR CARROS VACIOS CON RUTAS DE CARGA DOMINANTES .....	87
5.6 ANALISIS DE SENSIBILIDAD PARA CARGAS DOMINANTES	88
5.7 EXPRESION DEL TRAFICO EN LA RED COMO CICLOS INDIVIDUALES DE LOS CARROS .....	89
5.8 CONCLUSIONES AL CAPITULO .....	94
CAPITULO VI CONCLUSIONES .....	105
6.0 EXTENSION DEL MODELO PARA TOMAR EN CUENTA LA CAPACIDAD DE FLUJO DE LOS TRAMOS .....	105
6.1 ANALISIS DE LAS ESTACIONES Y PATIOS .....	108
6.2 EXTENSIONES DEL MODELO .....	109
6.3 CONCLUSIONES GLOBALES .....	110
APENDICE .....	112
BIBLIOGRAFIA .....	114

## INTRODUCCION

Si definimos una red transporte como: La infraestructura y el equipo de transporte necesarios para trasladar bienes y personas desde puntos de origen a puntos de destino y definimos como sistema (teleológico) a: Un conjunto de elementos que interactúan de manera coordinada para un fin común. Es inmediato identificar a la red de transporte como un sistema.

La presente Tesis tiene como objetivo aplicar técnicas de la ingeniería de sistemas para buscar el manejo más eficiente del equipo de transporte ferroviario, pues es sin duda alguna, el sistema ferroviario es uno en que el manejo del equipo de transporte es una actividad primordial.

El manejo óptimo del equipo de transporte es una actividad que ha quedado fuera de la ingeniería de transporte tradicional ocupada más bien del correcto diseño de la infraestructura que de la adecuada operación del sistema. Las técnicas sistémicas abren pues un nuevo panorama a la ingeniería tradicional.

El modelo propuesto en esta Tesis es un estudio analítico del manejo del equipo de transporte ferroviario en el que se pretende aplicar todo el rigor matemático posible dentro de las hipótesis aceptadas para obtener políticas de manejo del equipo de transporte.

El resultado mas importante que obtiene este modelo, es que el equilibrio óptimo de una red de transporte depende de manera primordial del manejo del equipo vacío. Por otro lado, el manejo de carros

vacíos ha sido la inspiración y el punto de partida de este trabajo.

Sin embargo, el problema del manejo de carros vacíos es inseparable del manejo de carros cargados, que a su vez es inseparable del estudio de los puntos de origen y destino de la carga, que a su vez son inseparables de la configuración de la red, etc., es evidente una vez más que los sistemas son el marco conceptual dentro del cual se deben planear y operar las redes de transporte.

Pero para que un sistema pueda ser manejado en términos humanos, tiene que tener algún límite. Establecer límites y simplificar relaciones dentro del sistema, es el trabajo que distingue al modelista, y son los ingenieros los profesionistas más destacados en obtener modelos simplificados del problema real al que se enfrentan y en obtener resultados operativos.

Inspirado en los modelos estructurales e hidráulicos que he conocido, he tratado aquí de dar un modelo del movimiento de equipo en las redes de transporte. Confiando en que los resultados que se pudiesen obtener de su aplicación futura serán operativos.

Esta Tesis pretende originalidad en dos temas:

Primero, en plantear el flujo de equipo como un punto del espacio de ciclos de la red.

Segundo, en simplificar el problema total a un problema de manejo de carros vacíos.

Para ilustrar la operación del modelo, en el Capítulo V, se da un ejemplo sobre un modelo simplificado de la red nacional y bajo unas

cargas representativas del tráfico agrícola sobre la red.

Finalmente, si fuese necesario justificar de alguna manera esta formulación del modelo, solo puedo decir que ningún modelo matemático, desde Galileo y la fundación de la ciencia moderna, describe de manera directa la realidad, a lo más que llega un modelo, es a describir el reflejo de la realidad que hay en la mente del modelista.

## CAPITULO I

### GENERALIDADES SOBRE EL TRANSPORTE FERROCARRILERO

#### 1.0 OBJETIVO DEL TRANSPORTE

En la era moderna en que se han creado grandes ciudades y centros industriales, es vital mantener el intercambio de bienes entre éstos, a fin de mantener la economía en marcha.

Así que es necesario tener grandes sistemas de transporte que permitan el flujo de bienes entre dichos centros de producción y consumo.

#### 1.1 CARACTERISTICAS DEL TRANSPORTE FERROVIARIO

El Ferrocarril es uno de los grandes sistemas de transporte terrestre. Se caracteriza por mover grandes cargas a velocidades pequeñas. Según las series estadísticas de Ferrocarriles Nacionales de México, en 1988 se movieron en promedio 38,000 millones de toneladas netas kilómetro, a una velocidad media de 21.4 km/hora.

Esto hace que el Ferrocarril sea apto para mover insumos y productos en cantidades masivas, como por ejemplo, minerales, productos agrícolas, manufacturas, etc.

El transporte ferroviario se hace formando trenes de carros cargados y vacíos, y asignándoles una fuerza tractiva de locomotoras para arrastrarlos.

Un tren estará formado en promedio por cuarenta carros, cada uno de los cuales tendrá una carga neta de entre 60 y 80 ton en promedio.

### 1.2 EL EQUIPO DE TRANSPORTE FERROVIARIO

Actualmente FNM cuenta con 49,000 carros, cada uno con un costo promedio de 60,000 dólares.

Podemos encontrar como más comunes los siguientes carros de carga en la red ferroviaria:

- Furgones
- Tolvas
- Góndolas
- Plataformas
- Carros Tanque

Aunque también puede haber carros para propósitos especiales como el transporte de automóviles, el transporte de productos refrigerados o incluso el transporte de ganado. Las características principales de los equipos más comunes serán:

- Furgones o carros cajas, son carros cerrados en los que se pueden transportar productos agrícolas, forrajes, azúcar, cemento en sacos, fertilizantes, productos químicos, etc.
- Tolvas son carros para el transporte de materiales granulados, se caracterizan por poder cargarlos y descargarlos rápidamente por compuertas en la parte inferior, es utilizable para los siguientes productos: cereales, granos, cemento a granel, arena, piedra bien triturada, sal, etc.
- Góndolas son carros caja abiertos por la parte superior, pueden transportar minerales en general, vidrio, desperdicio de fierro, acero en varillas o en rollo, tubería, coque, carbón mineral, etc.

- Plataformas, carros planos descubiertos utilizables para el transporte de productos forestales, tubería, acero en rollo y otras manufacturas.
- Carros Tanque, se usan para el transporte de líquidos, como diesel, gasolina, petróleo crudo, etc.

### 1.3 MANEJO DE CARROS VACIOS

La carga y descarga de carros, se realizará en estaciones donde los clientes tendrán acceso al sistema de transporte.

En los patios los trenes son recibidos, los carros descargados y allí permanecen vacíos hasta que la demanda exija que sean llenados o se piense en llevarlos vacíos a otro lado, donde vayan a ser necesitados. Como en general, las demandas de transporte no son regulares, es conveniente tener en los diversos patios, carros vacíos que sirvan de inventario de seguridad para cumplir con demandas repentinas sin que sea necesario pedir carros vacíos a otro patio o esperar que lleguen trenes de carros vacíos de otro lado.

Así también es conveniente establecer flujos regulares de carros vacíos sobre la red, de tal manera, que desde los puntos donde se generan más carros vacíos (la Ciudad de México), se mande de manera periódica carros vacíos a donde se van a utilizar.

Cabe señalar en un mejoramiento del 5% en el manejo de carros vacíos implica un ahorro en equipo  $(0.05) \cdot (49,000) \cdot (60,000) = 147$  millones de dólares.

### 1.4 CARACTERISTICAS DE LA RED NACIONAL

Durante su desarrollo, una red de transporte como la ferrocarrilera,

que exige una gran inversión en infraestructura, tendrá características de árbol, es decir, se unirán primero los centros de producción con los de consumo de la manera más simple posible. Así que, en la red entre cualesquiera dos nodos existirá únicamente una ruta, que puede ser incluso demasiado larga, ejemplo: para ir de Veracruz a Tampico, ha sido necesario pasar por la Ciudad de México.

La red en forma de árbol es la manera más simple de comunicar todos los centros de producción y consumo, y se puede considerar que ya es operacional. Como se va haciendo más necesario hacer más eficiente la operación del sistema de transporte, es importante dar redundancia a la red que deja ya de tener forma de árbol y comienza a tener tramos redundantes, de tal manera que, existe ya gran variedad de rutas que conecten un nodo con otro y se puedan hacer combinaciones en el enrutamiento de trenes y empieza a ser necesario el análisis de rutas óptimas.

La red nacional la podemos considerar mixta, puesto que hay regiones del país en que tiene forma de árbol como son el Noroeste en los estados de Sonora y Baja California Norte, el Sureste en la península de Yucatán, Tabasco y Chiapas, en las que red es un árbol con origen en Coatzacoalcos, la zona Sur, en que son también tramos con forma de árbol; por ejemplo: el Puebla-Oaxaca, el Uruapan-Lázaro Cárdenas, el México-Iguala, etc.

Sin embargo, se puede considerar que la red nacional ha atravesado ya la fase de árbol y que la mayor parte de los desarrollos futuros estarán encaminados a darle redundancia a la red.

## CAPITULO II

### ALGUNOS CONCEPTOS DE LA TEORIA DE GRAFOS

#### 2.0 INTRODUCCION AL CAPITULO II

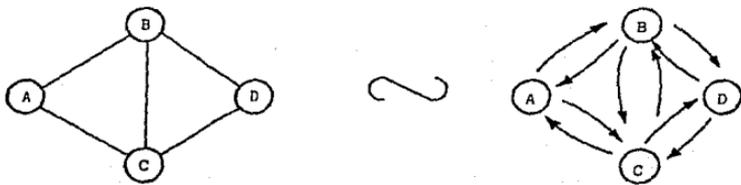
El objetivo de esta tesis es dar un modelo matemático para optimizar el manejo de flujos de carros cargados y vacíos en el transporte ferroviario. Sin embargo, la elección de rutas factibles para los flujos de carga es un problema de tipo combinatorio, que es necesario resolver dentro del marco de los problemas de enumeración combinatoria, lo cual requiere de algoritmos específicos para su obtención.

Por otro lado, el modelo está basado en el equilibrio de flujo en redes, que merece un estudio especial porque contra el enfoque tradicional de buscar equilibrio sobre los nudos en el modelo, se busca equilibrio sobre los arcos. Así pues, en este capítulo se pretenden dos cosas:

- 1º Demostrar la equivalencia que existe entre los planteamientos tradicionales de equilibrio en los nudos y el planteamiento de equilibrio en los arcos con el movimiento de los carros en circuitos.
- 2º Dar un algoritmo de enumeración de trayectorias, así como de circuitos.

Todas las afirmaciones del capítulo estarán basadas en grafos con una sola componente conexa y en los que los arcos no orientados, han sido sustituidos por dos arcos dirigidos en sentido contrario.

Los conceptos que se exponen en el capítulo se ejemplificarán en el siguiente grafo.

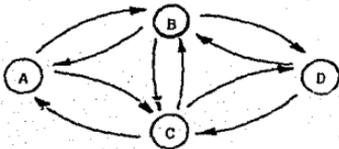


## 2.1 DEFINICION DE GRAFO

Se puede definir un grafo como una colección de nodos unidos por arcos.

Matemáticamente hablando, si  $N$  es un conjunto de nodos y  $Z$  es un subconjunto del producto cartesiano  $N \times N$ , a la pareja  $G = (N, Z)$  se le llama grafo.

Por ejemplo: Defínase además  $m = \text{Card}(Z)$   
 $n = \text{Card}(N)$



$$N = \{A, B, C, D\}$$

$$Z = \{(A, B), (A, C), (B, A), (B, C), (B, D), (C, A), (C, B), (C, D), (D, B), (D, C)\}$$

## 2.2 DEFINICION DE CORTE DE UN GRAFO Y DE COCICLOS ELEMENTALES

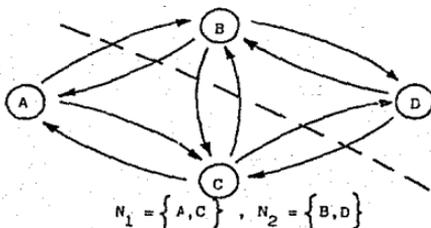
Sepárese el conjunto de nodos en  $Z$ , en los subconjuntos  $N_1$  y  $N_2$  complementarios, es decir:

$$N = N_1 \cup N_2, \quad N_1 \cap N_2 = \emptyset$$

Se dice que se ha hecho un corte en el grafo.

Al subconjunto de arcos que parten del conjunto  $N_1$  ó  $N_2$  y terminan en su conjunto complementario se les llama un cociclo elemental.

Ejemplo:



el cociclo elemental asociado será:

$$\{(A, B), (B, C), (C, D), (D, A), (B, A), (B, C), (D, C)\}$$

A cada cociclo elemental se le puede asociar un vector  $\vec{w}(N_1)$  de dimensión  $m \times 1$ , tal que

$$\vec{w}(N_1) = \begin{bmatrix} w(i, j) \\ \vdots \\ w(p, q) \end{bmatrix}$$

donde

$$w_{(i,j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in N_1 \text{ y } j \in N_2 \\ -1 & \text{si } i \in N_2 \text{ y } j \in N_1 \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

para el ejemplo

$$\bar{w}(N_1) = \begin{bmatrix} 1 & (A,B) \\ 0 & (A,C) \\ -1 & (B,A) \\ -1 & (B,C) \\ 0 & (B,D) \\ 0 & (C,A) \\ 1 & (C,B) \\ 1 & (C,D) \\ 0 & (D,B) \\ -1 & (D,C) \end{bmatrix}$$

Al vector  $\bar{w}(N_1)$  lo llamaremos también vector de corte con respecto a  $N_1$ .

Además, se puede demostrar en teoría de grafos que, para un grafo con una sola componente conexa, el número de cociclos elementales linealmente independientes es:

$$\rho(G) = n-1$$

donde a  $\rho(G)$  se le llama el número cociclomático del grafo.

### 2.3 DEFINICION DE TRAYECTORIA

Se le llama trayectoria a una sucesión de arcos, tales que el nodo fin del arco  $i$  es el nodo inicio del arco  $i+1$  de la sucesión, excepto para el nodo inicio del arco  $i=1$  y el nodo fin de la sucesión,

y además, no pasa dos veces por el mismo nodo. Para el ejemplo:

$\{(A,B),(B,D),(D,C)\}$  es una trayectoria con origen en el nodo A y destino en el nodo C.

#### 2.4 DEFINICION DE CIRCUITO ELEMENTAL

A una trayectoria cuyo origen es igual a su destino y que nopasa más de una vez por un determinado nodo, se le llama un circuito elemental.

En el ejemplo:

$\{(A,B),(B,D),(D,C),(C,A)\}$  es un circuito elemental.

A cada circuito elemental se le asocia un vector  $\bar{A}$  tal que:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}(1,j) \\ \vdots \\ \mathcal{M}(p,q) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \text{ forma parte del circuito} \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

para el ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & (A,B) \\ 0 & (A,C) \\ 0 & (B,A) \\ 0 & (B,C) \\ 1 & (B,D) \\ 1 & (C,A) \\ 0 & (C,B) \\ 0 & (C,D) \\ 0 & (D,B) \\ 1 & (D,C) \end{bmatrix}$$

El número de circuitos elementales linealmente independientes es:

$$\mathcal{V}(G) = m - p(G) = m - n + 1$$

A  $\mathcal{V}(G)$  se le llama número ciclomático del grafo.

## 2.5 ORTOGONALIDAD DE CIRCUITOS Y COCICLOS

Si  $\mathcal{R}$  es un vector de circuito y  $\bar{W}$  un vector de cociclos, entonces el producto matricial:

$$\bar{W}^T \mathcal{R} = 0 \quad (2.5.1)$$

es decir, los vectores de circuitos y los de cociclos son necesariamente ortogonales.

En efecto, si  $\bar{W}$  está asociado al corte  $N_1$  se pueden dar uno de los siguientes casos.

1<sup>o</sup> El circuito está completamente incluido en el conjunto  $N_1$  ó en el  $N_2$ , por lo que los elementos  $\bar{W}(N_1)$  asociados a los arcos del circuito valdrán todos 0 por lo que el producto  $\bar{W}^T \mathcal{R}$  será igual a cero.

2<sup>o</sup> El circuito pasa del conjunto  $N_1$  al conjunto  $N_2$  y regresa, luego el arco que va del conjunto  $N_1$  al  $N_2$  tendrá asociado el valor 1 en  $\bar{W}(N_1)$  y el arco que regresa de  $N_2$  a  $N_1$  tendrá asociado el valor -1, por lo cual se anularán mutuamente y  $\bar{W}^T \mathcal{R} = 0$ . Del ejemplo:

$$\bar{W}^T = [1, 0, -1, -1, 0, 0, 1, 1, 0, -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Para el nodo B:

$$\begin{array}{cccccc} (A,B) & (C,B) & (D,B) & (B,A) & (B,C) & (B,C) \\ 3 & + & 2 & + & 0 & + & 4 & = & 1 & + & 0 & + & 4 & = & 5 \end{array}$$

Para el nodo C:

$$\begin{array}{cccccc} (A,C) & (B,C) & (D,C) & (C,A) & (C,B) & (C,D) \\ 0 & + & 0 & + & 4 & = & 2 & + & 2 & + & 0 & = & 4 \end{array}$$

Para el nodo D:

$$\begin{array}{cccc} (B,D) & (C,D) & (D,B) & (D,C) \\ 4 & + & 0 & = & 0 & + & 4 & = & 4 \end{array}$$

Se trata pues de un problema de equilibrio en los nodos, tal como se encuentra en hidráulica en la continuidad de gastos, en estructuras en el equilibrio de los nudos y en redes eléctricas con las leyes de Kinkchoff.

Cabe observar, que la ecuación 2.6.1 se puede interpretar como el producto vectorial del vector de corte asociado al nodo  $j$  por el vector de flujo.

$$\bar{w}_{(i)}^T \bar{f} = 0$$

Recordando que hay  $n-1$  vectores  $\bar{w}$  linealmente independientes podemos formar la matriz  $\bar{N}$

$$\bar{N} = [\bar{w}(1) \ ; \ \bar{w}(2) \ ; \ \dots \ ; \ \bar{w}(n-1)]$$

que será la base del espacio del espacio de cociclos del grafo.

Aún más, el sistema de ecuaciones de equilibrio en los nodos se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\bar{\mathcal{L}}^T \bar{\varphi} = \bar{0} \quad (2.6.2)$$

Ahora bien, si recordamos la ecuación 2.5.1 veremos que un vector de circuito necesariamente cumple con las ecuaciones 2.6.2 y se puede demostrar que cualquier solución de las mismas se puede desarrollar como una combinación lineal de los vectores de circuito.

Definimos la matriz ciclomática de tamaño  $m \times \mathcal{V}(G)$  como la formada por los vectores de circuito:

$$\bar{\mathcal{M}} = [\bar{\mathcal{M}}_1 \ ; \ \bar{\mathcal{M}}_2 \ ; \ \dots \ ; \ \bar{\mathcal{M}}_{\mathcal{V}(G)}]$$

Así que:

$$\bar{\mathcal{L}}^T \bar{\mathcal{M}} = \bar{0}$$

y un flujo lo expresaremos:

$$\bar{\varphi} = \bar{\mathcal{M}} \bar{g}$$

donde  $\bar{g}$  es un vector  $(m-n+1) \times 1$

$$\bar{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{\mathcal{V}(G)} \end{bmatrix}$$

Para el ejemplo:

$$\begin{array}{l}
 (A,B) \\
 (A,C) \\
 (B,A) \\
 (B,C) \\
 (B,D) \\
 (C,A) \\
 (C,B) \\
 (C,D) \\
 (D,B) \\
 (D,C)
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 3 \\
 0 \\
 1 \\
 0 \\
 4 \\
 2 \\
 2 \\
 0 \\
 0 \\
 4
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 1 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 2 \\
 2 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

## 2.7 GENERACION COMBINATORIA DE TRAYECTORIAS Y CIRCUITOS DE UN GRAFO

### ALGORITMO LATINO DE KAUFMANN

Buscar trayectorias (caminos) entre dos nodos cualesquiera de una red, es esencialmente un proceso combinatorio en el cual se desea enumerar dichas trayectorias.

El algoritmo latino de Kaufmann representa cada trayectoria como una cadena de caracteres que indican los nodos por los que pasa la trayectoria. Por ejemplo: La trayectoria  $\{(A,B),(B,D),(D,C)\}$  se representa por ABDC.

En el algoritmo se concatenan estas cadenas de una manera muy similar a como se hace en la multiplicación matricial.

Es decir:

$$c_{ij}^{(p)} = \bigcup_{k=1}^n c_{ik}^{(p-1)} * S_{ki}$$

donde:

$C_{ij}^{(p)}$  = es el conjunto de trayectorias entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$  formadas por  $p$  arcos.

$C_{ik}^{(p-1)}$  = es el conjunto de caminos entre  $i$  y  $k$ , consistiendo de  $p-1$  arcos y cumpliendo con la condición:

$$C_{ii}^{(p-1)} = \emptyset$$

$S_{kj}$  = cadena de caracteres que representa un arco entre  $K$  y  $J$  sin el primer caracter.

$*$  = operación de concatenación.

$$C_{ik}^{(p)} * S_{kj} = \begin{cases} \text{--- a una cadena si } S_{kj} \neq \emptyset \text{ y } C_{ik}^{(p-1)} \neq \emptyset \\ \emptyset \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Para el ejemplo, se tendría:

$C_{ik}^{(1)}$

	A	B	C	D
A		AB	AC	
B	BA		BC	BD
C	CA	CB		CD
D		DB	DC	

$S_{kj}$

	A	B	C	D
A		B	C	
B	A		C	D
C	A	B		D
D		B	C	

y para  $C_{ik}^{(2)}$  se tendría como resultado de la concatenación latina:

$C_{ij}^{(2)}$ 

	A	B	C	D
A	ABA ACA	ACB	ABC	ABD ACD
B	BCA	BAB BCB BDB	BAC BDC	BCD
C	CBA	CAB CDB	CAC CBC CDC	CBD
D	DBA DCA	DCB	DBC	DBD DCD

Si se obtienen ahora los circuitos elementales diferentes, serán:

$$\left\{ (A,B), (B,A) \right\}$$

$$\left\{ (A,C), (C,A) \right\}$$

$$\left\{ (B,C), (C,B) \right\}$$

$$\left\{ (B,D), (D,B) \right\}$$

$$\left\{ (C,D), (D,C) \right\}$$

Se han obtenido cinco, pero por el número ciclomático  $v(G)=7$  se sabe que deben obtenerse dos más para completar el espacio de ciclos.

Hágase la siguiente operación latina:

 $C_{ik}^{(2)}$ 

	A	B	C	D
A		ACB	ABC	ABD ACD
B	BCA		BAC BDC	BCD
C	CBA	CAB CDB		CBD
D	DBA DCA	DCB	DBC	

	A	B	C	D
A		B	C	
B	A		C	D
C	A	B		D
D		B	C	

Obteniéndose:

 $C_{ij}^{(3)}$ 

	A	B	C	D
A	ACBA ABCA	ACDB	ABDC	ACBD ABCD
B	BDCA	BCAB BACB BDCB BCDB		BACD
C	CDBA		CBAC CABC CDBC CBDC	CABD
D	DBCA DCBA	DCAB	DBAC	DCBD DBCD

Se obtienen los siguientes circuitos elementales:

$$\begin{aligned} & \{ (A,C), (C,B), (B,A) \} \\ & \{ (A,B), (B,C), (C,A) \} \\ & \{ (B,D), (D,C), (C,B) \} \\ & \{ (B,C), (C,D), (D,B) \} \end{aligned}$$

Finalmente:

 $C_{IK}^{(3)}$ 

	A	B	C	D
A		ACDB	ABDC	ACBD ABCD
B	BDCA			BACD
C	CDBA			CABD
D	DBCA DCBA	DCAB	DBAC	

 $S_{KJ}$ 

	A	B	C	D
A		B	C	
B	A		C	D
C	A	B		D
D		B	C	

con lo que:

$$C_{ij}^{(4)}$$

	A	B	C	D
A	ACDBA ABDCA			
B		BBCAB BACDB		
C			CDBAC CABDC	
D				DCABD DBACD

Con lo que se obtienen dos nuevos circuitos:

$$\begin{aligned} & \{(A,C), (C,D), (D,B), (B,A)\} \\ & \{(A,B), (B,D), (D,C), (C,A)\} \end{aligned}$$

En resumen, el análisis combinatorio del grafo nos da:

11 circuitos elementales:

$$\begin{aligned} & \{(A,B), (B,A)\} & \{(A,B), (B,C), (C,A)\} \\ & \{(A,C), (C,A)\} & \{(B,D), (D,C), (C,B)\} \\ & \{(B,C), (C,B)\} & \{(B,C), (C,D), (D,B)\} \\ & \{(B,D), (D,B)\} & \{(A,C), (C,D), (D,B), (B,A)\} \\ & \{(C,D), (D,C)\} & \{(A,B), (B,D), (D,C), (C,A)\} \\ & \{(A,C), (C,B), (B,A)\} \end{aligned}$$

De los cuales siete sólo son necesarios para conformar la base del espacio de ciclos.

Trayectorias entre A y B

1 con un sólo arco

$$\{(A,B)\}$$

- 1 con dos arcos  
 $\{(A,C), (C,B)\}$
- 1 con tres arcos  
 $\{(A,C), (C,D), (D,B)\}$

es decir, tres trayectorias entre A y B.

Trayectorias entre A y C

- 1 con un arco  
 $\{(A,C)\}$
- 1 con dos arcos  
 $\{(A,B), (B,C)\}$
- 1 con tres arcos  
 $\{(A,B), (B,D), (D,C)\}$

es decir, tres trayectorias entre A y C.

Trayectorias entre A y D

- 0 con un arco
- 2 con dos arcos  
 $\{(A,B), (B,D)\}, \{(A,C), (C,D)\}$
- 2 con tres arcos  
 $\{(A,C), (C,B), (B,D)\}, \{(A,B), (B,C), (C,D)\}$

cuatro trayectorias en total entre A y D.

Trayectorias entre B y C

- 1 con un arco  
 $\{(B,C)\}$
- 2 con dos arcos  
 $\{(B,A), (A,C)\}, \{(B,D), (D,C)\}$

tres trayectorias entre B y C.

## Trayectorias entre B y D

- 1 con un arco  
 $\{(B,D)\}$
- 1 con dos arcos  
 $\{(B,C),(A,C),(C,D)\}$
- 1 con tres arcos  
 $\{(B,A),(A,C),(C,D)\}$

tres trayectorias entre B y D.

## Trayectorias entre C y D

- 1 con un arco  
 $\{(C,D)\}$
- 1 con dos arcos  
 $\{(C,B),(B,D)\}$
- 1 con tres arcos  
 $\{(C,A),(A,B),(B,D)\}$

tres trayectorias entre C y D.

## CAPITULO III

### PLANTEAMIENTO DEL MODELO

#### 3.0 CONCEPTOS GENERALES DEL MODELO

La finalidad del transporte es el movimiento de bienes desde los centros productores a los centros consumidores, para ello se dispone de un número limitado de vehículos.

Así pues, el objetivo del modelo es contestar las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo poner a dar vueltas el equipo de transporte de manera óptima?
2. ¿Cómo manejar los carros vacíos?
3. ¿Cuáles deben ser las rutas de los carros cargados?
4. Cuando la carga es compatible con diversos tipos de carros, ¿qué tipo de carro usar?

A cada una de estas preguntas está asociado un juego de variables de decisión, que la responden:

$\bar{g}$  variables de flujo cíclico asociadas con la pregunta uno.

$\bar{v}$  variables de flujo vacío asociadas a la pregunta dos.

$\bar{h}$  variables de flujo cargado asociadas a las preguntas tres y cuatro.

El postulado fundamental del modelo es pensar que el flujo total sobre la red de transporte, es la suma de flujos cíclicos individuales de los carros.

Así que en el modelo el producto

$$\bar{M} \bar{g}$$

que es la ecuación de un vector cualesquiera del espacio de ciclos del grafo de la red, se le debe ver heurísticamente como la suma de los ciclos que cada carro recorre dentro de la red.

Obtener explícitamente los ciclos individuales de los carros, es un problema de tipo combinatorio que sale fuera del alcance de esta Tesis; sin embargo, en el ejemplo en el ámbito nacional planteado en el Capítulo V, se obtienen explícitamente estos ciclos.

Por otro lado, podemos decir que el modelo planteado aquí es del tipo estático-determinístico.

Estático. Por que hace las siguientes hipótesis:

- a) Régimen establecido en la red de transporte. Esto significa que el comportamiento de la red no se considera función del tiempo, ni en la demanda externa de transporte de carga generada en los nodos productores, ni en el movimiento de equipo en la red.
- b) Equilibrio del equipo de transporte. Se considera que cuando un carro llega a un nodo, otro de las mismas características, sale del nodo.
- c) Equilibrio en la carga generada. Se considera que la carga se va transportando al mismo tiempo que se genera.

Determinista. Considera conocidas de antemano y constantes las demandas de transporte.

Por otro lado, el objetivo del modelo será dar una reutilización máxima al equipo de transporte, que es equivalente a minimizar el manejo de carros vacíos en la red, en los tramos más largos y/o costosos.

### 3.1 CONCEPTO DE FLUJO EN UNA RED DE TRANSPORTE

Llamamos flujo en un arco de una red de transporte al número de vehículos que pasan por ese arco en una unidad de tiempo.

Así por ejemplo, si en tres meses han circulado entre Tula y México 600 tolvas cargadas de cemento, se dirá que en el arco Tula-México hay un flujo de 200 tolvas cargadas de cemento al mes.

Para definir el concepto de flujo cíclico en la red de transporte, consideremos un tren de carros que se mueve en un ciclo a velocidad constante y en algún punto del ciclo una estación de aforo.

Entonces, el flujo cíclico quedará expresado por la siguiente ecuación:

$$g = \frac{N}{T} \quad (3.1.1)$$

donde:  $N$  = número de carros en el tren  
 $T$  = tiempo medio del ciclo.

O bien, se deduce directamente la siguiente expresión:

$$g L = N V \quad (3.1.2)$$

donde:  $L$  = longitud del ciclo  
 $V$  = velocidad media en el ciclo.

es importante notar en esta ecuación que para satisfacer un flujo constante, el número de unidades de transporte necesarias es inversamente proporcional a la velocidad media del ciclo.

### 3.2 VECTOR DE DISTANCIAS

Definimos el vector:

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} D_{(i,j)} \\ \vdots \\ D_{(p,q)} \end{bmatrix}$$

donde:  $D_{(i,j)}$  es la distancia de vía entre el nodo  $i$  y el  $j$  desde luego existe la relación:

$$D_{(i,j)} = D_{(j,i)}$$

### 3.3 LONGITUD DE UN CIRCUITO

Sea  $\bar{\mu}$  un vector de circuito y  $\bar{D}$  el vector de distancias, luego la distancia de un circuito cualquier, será:

$$\bar{D}^T \bar{\mu} = \sum_{(i,j) \in Z} D_{(i,j)} \mu_{(i,j)}$$

### 3.4 VECTOR TRAYECTORIA Y LONGITUD DE UNA TRAYECTORIA

Se ha visto ya en el párrafo 2.7 que existen entre dos nodos cualquiera de la red, una o más trayectorias.

A cada una de ellas se le puede asociar el vector binario:

$$\bar{T}_{(\alpha, \beta; n)} = \begin{bmatrix} T_{(\alpha, \beta; n; i, j)} \\ \vdots \\ T_{(\alpha, \beta; n; i, j)} \end{bmatrix}$$

donde:

$\bar{T}_{(\alpha, \beta; n)}$  = es el vector de la  $n$ -sima trayectoria que une el nudo  $\alpha$  con el nudo  $\beta$ .

$$T(\alpha, \beta; n; i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } (i, j) \text{ pertenece a la } n\text{-sima trayectoria} \\ & \text{entre } \alpha \text{ y } \beta. \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Se observa que si existe una trayectoria entre  $\alpha$  y  $\beta$  necesariamente existirá la contraria entre  $\beta$  y  $\alpha$ .

$$\bar{T}(\alpha, \beta; n) \iff \bar{T}(\beta, \alpha; n)$$

relación que se debe cumplir en una red de transporte.

La distancia asociada a una trayectoria será:

$$D(\alpha, \beta; n) = \bar{D}^T \bar{T}(\alpha, \beta; n) = \sum_{(i, j) \in Z} D(i, j) T(\alpha, \beta; n, i, j)$$

Continuando con el ejemplo del capítulo anterior:

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} (A, B) \\ (A, C) \\ (B, A) \\ (B, C) \\ (B, D) \\ (C, A) \\ (C, B) \\ (C, D) \\ (D, B) \\ (D, C) \end{matrix}$$

Se tenían entre A y D cuatro trayectorias:

$$\{(A, B), (B, D)\}, \{(A, C), (C, D)\}, \{(A, C), (C, B), (B, D)\}, \{(A, B), (B, C), (C, D)\}$$

Se tendrán entonces, los siguientes vectores:

$$T(A, D; 1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (A, B) \\ (A, C) \\ (B, A) \\ (B, C) \\ (B, D) \\ (C, A) \\ (C, B) \\ (C, D) \\ (D, B) \\ (D, C) \end{matrix} \quad T(A, D; 2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{T}(A,D;3) = \begin{bmatrix} 0 & (A,B) \\ 1 & (A,C) \\ 0 & (B,A) \\ 0 & (B,C) \\ 1 & (B,D) \\ 0 & (C,A) \\ 1 & (C,B) \\ 0 & (C,D) \\ 0 & (D,B) \\ 0 & (D,C) \end{bmatrix} \quad T(A,D;4) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 3.5 CONCEPTO DE NODO PRODUCTOR

Llamamos nodo productor a un nodo donde se originan carros cargados con destino a cualquier otro nodo de la red de transporte.

En el nodo productor pueden existir varios tipos de carga, que pueden ser, compatibles o no, con cierto tipo de carro disponible en el nodo.

Sea:

$$h_{\ell}^k(\alpha, \beta; n) \geq 0$$

el flujo de la carga tipo  $\ell$  generada en el nodo  $\alpha$  y transportada al nodo  $\beta$  por la trayectoria  $n$  en el carro tipo  $K$ .

Esta variable estará definida solo si la carga  $\ell$  es compatible con el carro  $K$  y es transportada al destino  $\beta$ . Y sea:

$$R_{\ell}(\alpha, \beta) \geq 0$$

La carga tipo  $\ell$  producida por unidad de tiempo en el nodo  $\alpha$ , con destino al nodo  $\beta$ .

Se podrá entonces plantear la siguiente ecuación de conservación de la carga:

$$R_{\ell}(\alpha, \beta) = \sum_n \sum_k h^k(\alpha, \beta; n) \quad (3.5.1)$$

que se puede interpretar como que el flujo total de la carga  $\ell$  entre  $\alpha$  y  $\beta$  es igual a la suma de todos los tipos de carros que transportan la carga en todas las rutas disponibles, factibles entre  $\alpha$  y  $\beta$ .

### 3.6 REPRESENTACION DE UN FLUJO DE CARROS EN LA RED

Los carros de tipo K que circulan en la red, forman un flujo como los - explicados en el apartado 2.6, es decir, cumplen con las condiciones de conservación.

$$\bar{A}^T \bar{\varphi}^K = 0, \quad \bar{\varphi}^K \geq 0$$

donde  $\bar{\varphi}^K$  es el flujo de carros tipo K sobre la red.

También hemos visto que este flujo se puede expresar como una combinación lineal de vectores de ciclos:

$$\bar{\varphi}^K = g_1^K \bar{\mu}_1 + g_2^K \bar{\mu}_2 + \dots + g_{V(G)}^K \bar{\mu}_{V(G)} \quad (3.6.1)$$

o bien

$$\bar{\varphi}^K = \bar{N} \bar{g}^K$$

### 3.7 ECUACION DE CONSERVACION EN LOS ARCOS

Para todo flujo K en un arco se cumple:

$$\varphi^K(i,j) = \sum \begin{pmatrix} \text{flujos de carros tipo} \\ K \text{ cargados sobre el} \\ \text{arco } (i,j) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{flujo de carros tipo} \\ K \text{ vacíos sobre } (i,j) \end{pmatrix}$$

es decir, un flujo es la suma del flujo de carros vacíos en el arco, más el flujo total de carros cargados sobre ese arco. O bien, se puede escribir el flujo total en la red de transporte de los carros tipo K como:

$$\bar{\varphi}^K = \sum_{(\alpha,\beta)} \left( \sum_{\ell} \sum_n h_{\ell}^K(\alpha,\beta;n) \bar{T}(\alpha,\beta;n) + \bar{V}^K \right) \quad (3.7.1)$$

donde  $\bar{V}$  es el vector de carros vacíos:

$$\bar{V}^K = \begin{bmatrix} Y^K(1,j) \\ \vdots \\ \bar{V}^K(p,q) \end{bmatrix}; \quad \bar{\varphi}^K \geq 0$$

$\bar{\varphi}^K(1, j)$  = flujo de carros vacíos tipo K en el arco  $(1, j)$

o podemos escribir:

$$\bar{\varphi}^K = \sum_{\ell} \bar{N}_{\ell}^K \bar{h}_{\ell}^K + \bar{Y}^K \quad (3.7.2)$$

donde:

$$\bar{h}_{\ell}^K = \begin{bmatrix} h_{\ell}^K(\alpha, \beta; 1) \\ h_{\ell}^K(\alpha, \beta; 2) \\ \vdots \\ h_{\ell}^K(\xi, \sigma; k-1) \\ h_{\ell}^K(\xi, \sigma; k) \end{bmatrix}$$

Es decir, este vector representa las variables de los flujos asociados entre todos los pares origen-destino  $(\alpha, \beta)$  que tienen productos susceptibles de ser transportados en los carros de tipo K y todas las trayectorias factibles entre esos dos puntos, luego se tendrá:

$$\bar{N}_{\ell}^K = \left[ \bar{T}(\alpha, \beta; 1); \bar{T}(\alpha, \beta; 2); \dots; \bar{T}(\xi, \sigma; k-1); \bar{T}(\xi, \sigma; k) \right]$$

que es la matriz que resulta de unir las trayectorias asociadas con las variables de flujo de carga en los carros de tipo K.

### 3.8 FUNCION OBJETIVO DEL MODELO

La función objetivo es minimizar el número de carros kilómetro vacíos - por unidad de tiempo en la red, es decir:

$$\min z = \sum_K \bar{D}^T \bar{Y}^K = \sum_K \sum_{(i, j) \in Z} D(i, j) \bar{Y}^K(i, j)$$

Recuérdese la ecuación 3.7.2

$$\bar{\varphi}^K = \sum_{\ell} \bar{N}_{\ell}^K \bar{h}_{\ell}^K + \bar{Y}^K$$

o bien:

$$\bar{Y}^K = \bar{\varphi}^K - \sum_{\ell} \bar{N}_{\ell}^K \bar{h}_{\ell}^K$$

premultiplicando por  $\bar{D}^T$

$$\bar{D}^T \bar{Y}^K = \bar{D}^T \bar{g}^K - \sum_{\ell} \bar{D}^T \bar{N}_{\ell}^K \bar{h}_{\ell}^K$$

y sustituyendo en 3.8.1

(3.8.2)

$$\min z = \sum_K \bar{D}^T \bar{g}^K - \sum_K \sum_{\ell} \bar{D}^T \bar{N}_{\ell}^K \bar{h}_{\ell}^K$$

es decir, minimizar la diferencia entre el flujo X kilómetro total y el flujo X kilómetro cargado.

### 3.9 PLANTEAMIENTO DEL MODELO COMO UN PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL

El problema se puede reducir a:

**\*MINIMIZAR LOS CARROS KILOMETRO VACIOS\***

sujeto a:

1. \*Conservación del flujo de carros en los nodos y en los arcos\*
2. \*El total de productos generados en un nodo es transportado\*

La restricción 1. está dada por las ecuaciones; 3.7.2

$$\bar{y}^K = \sum_{\ell} \bar{N}_{\ell}^K \bar{h}_{\ell}^K + \bar{Y}$$

y recordando 3.6.1

(3.9.1)

$$\bar{g}^K = \bar{N} \bar{g}^K = \sum_{\ell} \bar{N}_{\ell}^K \bar{h}_{\ell}^K + \bar{Y}^K \geq 0$$

los vectores  $\bar{Y}^K$  se pueden interpretar como las variables de holgura de un problema de programación lineal, es decir, no son variables de decisión.

Ahora las restricciones dos, están dadas por las ecuaciones 3.5.1

(3.9.2)

$$\sum_K \sum_n h_{\ell}^K (\alpha, \beta; n) = R_{\ell} (\alpha, \beta)$$

o bien, se puede expresar como un producto

$$\bar{P} \bar{h} = \bar{R} \quad (3.9.3)$$

donde  $\bar{h}$  es:

$$\bar{h} = \begin{bmatrix} \bar{h}_1^1 \\ \bar{h}_2^1 \\ \vdots \\ \bar{h}_\ell^K \\ \vdots \\ \bar{h}_s^r \end{bmatrix}$$

$\bar{R}$  es un ensamble.

$$R = \begin{bmatrix} R_1(1,2) \\ R_1(1,3) \\ \vdots \\ R(\alpha,\beta) \\ \vdots \\ R_n(\xi,\eta) \end{bmatrix}$$

y  $\bar{P}$  una matriz formada por uno y ceros, tal que sustituya a las sumatorias del 3.9.2.

Finalmente, se pueden hacer los ensambles:

$$\bar{g} = \begin{bmatrix} -1 \\ \bar{g}_1 \\ -1 \\ \bar{g}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ -1 \\ \bar{g}_r \end{bmatrix}$$

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \bar{M}^1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \bar{M}^1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \bar{M}^r \end{bmatrix}$$

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} \bar{N}_1^1 & \bar{N}_2^1 & \dots & \bar{N}_\ell^1 & \dots & \bar{N}_s^1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \bar{N}_1^K & \dots & \bar{N}_s^K & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{N}_1^m & \dots & \bar{N}_s^m \end{bmatrix}$$

Las restricciones 3.0.1 se reducen a:

(3.9.4)

$$\bar{M} \bar{g} - \bar{N} \bar{h} \geq 0$$

Ahora para la función objetivo, recordemos 3.8.2

$$\min z = \sum_K \bar{D}^T \bar{q}^K - \sum_K \sum_\ell \bar{D}^T \bar{N}_\ell^K \bar{h}_\ell^K$$

y haciendo la sustitución:

$$\bar{D}_C = \left[ \bar{D}^T \bar{M}^1 ; \dots ; \bar{D}^T \bar{M}^1 ; \dots ; \bar{D}^T \bar{M}^r \right]$$

$$\bar{D}_N = \left[ \bar{D}^T \bar{N}_1^1 ; \dots ; \bar{D}^T \bar{N}_\ell^K ; \dots ; \bar{D}^T \bar{N}_s^K \right]$$

La función objetivo se podrá expresar como:

(3.9.5)

$$\min z = \bar{D}_C \bar{g} - \bar{D}_N \bar{h}$$

Finalmente el problema de programación lineal es:

(3.9.6)

$$\begin{array}{l} \min z = \bar{D}_C \bar{g} - \bar{D}_N \bar{h} \\ \text{sujeto a:} \\ \quad \bar{M} \bar{g} - \bar{N} \bar{h} \geq 0 \\ \quad \bar{P} \bar{h} = \bar{R} \\ \bar{g} \text{ irrestricta} \quad \bar{h} \geq 0 \end{array}$$

### 3.10 PROBLEMA CON TRAYECTORIAS OPTIMAS Y UN SOLO TIPO DE CARRO

Supongamos que se usa solamente un tipo de carro, furgones por ejemplo, y la carga entre un origen  $\alpha$  y un destino  $\beta$  se manda por la ruta más corta entre esos dos puntos.

La primera simplificación en la que se puede pensar, es que en los nudos productores se produce un solo tipo de carga, es decir, puesto que todos los diferentes tipos de artículos producidos en el nodo se transportarán en el mismo tipo de carro, lo único que hace falta manejar es la carga total con origen en  $\alpha$  y destino  $\beta$ .

$$h(\alpha, \beta) = R(\alpha, \beta)$$

y entonces

$$\bar{h} = \bar{R}$$

sustituyendo en las ecuaciones del modelo (3.9.6)

$$\begin{array}{l} \min z = \bar{D}_C \bar{g} - \bar{D}_N \bar{h} \\ \quad \bar{M} \bar{g} - \bar{N} \bar{h} \geq 0 \\ \quad \bar{h} = \bar{R} \\ \bar{g} \text{ irrestricta} \quad \bar{h} \geq 0 \end{array}$$

o bien

$$\begin{aligned} \min z &= \bar{D}_C \bar{g} - \bar{D}_N \bar{R} \\ \bar{M} \bar{g} &\geq \bar{N} \bar{R} \\ \bar{g} &\text{ irrestricto} \end{aligned}$$

Si observamos que  $\bar{D}_N \bar{R}$  es una constante y hacemos

$$z' = z + \bar{D}_N \bar{R}$$

el modelo será:

$$\begin{aligned} \min z' &= \bar{D}_C \bar{g} \\ \bar{M} \bar{g} &\geq \bar{N} \bar{R} \\ \bar{g} &\text{ irrestricto} \end{aligned} \tag{3.10.1}$$

Obsérvese que en este modelo la función objetivo es equivalente a minimizar el flujo total en la red.

## CAPITULO IV

### ANALISIS Y METODOS DE SOLUCION

#### 4.0 INTRODUCCION

El modelo planteado en el Capítulo III puede ser resuelto directamente en una computadora. Sin embargo, para encontrar propiedades generales, es necesario analizar el modelo en el marco del álgebra lineal y la teoría de la Programación Lineal.

El capítulo se divide en dos partes: en la primera, se analizan problemas con un sólo equipo de transporte, y en la segunda, se generaliza a varios tipos de equipo de transporte.

La metodología general es separar el problema en varias partes y resolverlas por separado, cuando ésto es posible.

Cabe destacar que la solución general estará en todos los casos analizados en función de la asignación de carros vacíos.

## PARTE I

### PROBLEMAS CON UN SOLO TIPO DE EQUIPO DE TRANSPORTE (Problema Monocarro)

#### 4.1 ECUACION DE CONSERVACION DEL FLUJO DE CARROS VACIOS

Supóngase un corte en el grafo de transporte que lo divide en las regiones  $N_1$  y  $N_2$  (ver sección 2.2), entonces existirá la siguiente relación entre los flujos asociados al corte:

$$\sum \left( \begin{array}{c} \text{carros vacíos que entran} \\ \text{a } N_1 \end{array} \right) + \sum \left( \begin{array}{c} \text{carros cargados que entran} \\ \text{a } N_1 \end{array} \right)$$

$$\sum \left( \begin{array}{c} \text{carros vacíos que salen} \\ \text{a } N_1 \end{array} \right) + \sum \left( \begin{array}{c} \text{carros cargados que salen} \\ \text{a } N_1 \end{array} \right)$$

o bien

$$\sum \left( \begin{array}{c} \text{carros vacíos que} \\ \text{salen de } N_1 \end{array} \right) - \sum \left( \begin{array}{c} \text{carros vacíos que} \\ \text{entran a } N_1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{flujo total cargado} \\ \text{que entra a } N_1 \end{array} \right)$$

$$- \left( \begin{array}{c} \text{flujo total cargado} \\ \text{que sale de } N_1 \end{array} \right)$$

o bien

$$\sum \left( \begin{array}{c} \text{carros vacíos que} \\ \text{salen de } N_1 \end{array} \right) - \sum \left( \begin{array}{c} \text{carros vacíos que} \\ \text{entran a } N_1 \end{array} \right) = - \left( \begin{array}{c} \text{producción neta} \\ \text{de } N_1 \end{array} \right)$$

o de manera vectorial:

$$\bar{w}(N_1)^T \bar{v} = -q(N_1) \tag{4.1.1}$$

donde  $q(N_1)$  es la producción neta en la región  $N_1$  y se puede expresar:

$$q(N_1) = \sum \left[ \begin{array}{cc} \sum R(\alpha, \beta) & - \sum R_2(\gamma, \delta) \\ \alpha \in N_1 & \gamma \in N_2 \\ \beta \in N_2 & \delta \in N_1 \end{array} \right] \tag{4.1.2}$$

Finalmente si ésto se hace para los  $\mathcal{P}(G)$  cortes linealmente independientes de la red, se obtendrá un sistema de ecuaciones de flujo de carros vacíos:

$$\bar{A}^T \bar{Y} = -\bar{q}$$

donde  $\bar{A}$  está definida como en la sección 2.6 y

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} q(1) \\ q(2) \\ \vdots \\ q(n-1) \end{bmatrix} \quad (4.1.3)$$

$$q(i) = \begin{pmatrix} \text{carga producida} \\ \text{en el nodo } i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{carga recibida} \\ \text{en el nodo } i \end{pmatrix}$$

#### 4.2 ANALISIS DE LA SOLUCION DE PROBLEMAS CON UN SOLO EQUIPO DE TRANSPORTE

Sea la siguiente variación del problema de programación lineal, presentado en la sección 3.9, considerando un solo tipo de carro:

$\min \bar{D}^T \bar{Y}$ $\bar{N} \bar{g} - \bar{N} \bar{h} - \bar{Y} = 0$ $\bar{P} \bar{h} = \bar{R}$ $\bar{g} \text{ irrestricta } \bar{h} \geq 0 \quad \bar{Y} \geq 0$	4.2.1
---	-------

Obsérvese que se ha relajado la condición

$$\bar{g} \neq 0$$

con lo que 4.2.1 es más general

$$\bar{h} = \begin{bmatrix} \bar{h}_1 \\ \vdots \\ \bar{h}_\lambda \\ \vdots \\ \bar{h}_B \end{bmatrix} \quad \bar{h} = \begin{bmatrix} \bar{h}_\lambda(\alpha, \beta; 1) \\ h_\lambda(\alpha, \beta; 2) \\ \vdots \\ h_\lambda(\alpha, \beta; n) \\ \vdots \\ \bar{h}_\lambda(\gamma, \delta; 1) \\ \bar{h}_\lambda(\gamma, \delta; 2) \\ \vdots \\ \bar{h}_\lambda(\gamma, \delta; n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{h}_\lambda(\alpha, \beta) \\ \vdots \\ \bar{h}_\lambda(\gamma, \delta) \end{bmatrix} \quad (4.2.2)$$

$\bar{P}$  es tal que

$$\sum h(\alpha, \beta; n) = e \bar{h}(\alpha, \beta) = R_\lambda(\alpha, \beta) \quad (4.2.3)$$

$$e = [1, 1, \dots, 1]$$

$$\bar{N} = [\bar{N}_1(\alpha, \beta); \dots; \bar{N}_1(\gamma, \delta); \dots; \bar{N}_\lambda(\alpha, \beta); \dots; \bar{N}_B(\alpha, \beta)] \quad (4.2.4)$$

Sea ahora el problema dual del problema 4.2.1

$$\begin{array}{l} \max \bar{V}^T \bar{R} \\ \bar{U}^T \bar{M} = 0 \\ -\bar{U}^T \bar{N} + \bar{V}^T P \leq 0 \\ -\bar{U}^T \leq \bar{D}^T \\ \bar{U}, \bar{V} \text{ irrestrictos} \end{array} \quad (4.2.5)$$

donde  $\bar{U}$  y  $\bar{V}$  son respectivamente los vectores duales de las ecuaciones de equilibrio en los arcos, y de conservación de carga.

Obsérvese la primera restricción

$$\bar{U}^T \bar{M} = 0$$

el vector  $\bar{U}$  es ortogonal al subespacio de ciclos, así que se puede expresar como:

$$\bar{U}^T = \bar{\lambda}^T \bar{\Pi}^T \quad (4.2.6)$$

y el problema dual queda:

$$\begin{aligned} \max \quad & \bar{V}^T R & (4.2.7) \\ - \bar{\lambda}^T \bar{\Pi}^T \bar{N} + \bar{V}^T P & \leq 0 \\ - \bar{\lambda}^T \bar{\Pi}^T & \leq \bar{D}^T \\ \bar{\lambda}, \bar{V} & \text{ irrestrictas} \end{aligned}$$

o retomando el programa primal:

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{D}^T \bar{y} & (4.2.8) \\ - \bar{\Pi}^T \bar{y} - \bar{\Pi}^T \bar{N} \bar{h} & = 0 \\ \bar{P} \bar{h} & = \bar{R} \\ \bar{y} \geq 0 \quad \bar{h} & \geq 0 \end{aligned}$$

Se observa que el cambio de variable 4.2.3 es equivalente a multiplicar la ecuación de conservación en los arcos por  $-\bar{\Pi}^T$  y que eso produce el efecto de eliminar el vector  $\bar{g}$  de las variables de decisión.

Obsérvese el producto

$$-\bar{\Pi}^T \bar{N}_k (\alpha, \beta) \bar{h}_k (\alpha, \beta)$$

pero  $\bar{N}_L(\alpha, \beta)$  está formado por todas las trayectorias factibles que enlazan  $\alpha$  y  $\beta$ , y además, se sabe en teoría de grafos que

$$\bar{\Omega}^T \bar{T}(\alpha, \beta; n) = \bar{e}_{\alpha} - \bar{e}_{\beta} \quad (4.2.7)$$

donde el vector  $\bar{e}_i$  es el vector unitario asociado al nodo  $i$ , es decir

$$\bar{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i\text{-ésimo componente}$$

así que el producto

$$\bar{\Omega}^T \bar{N}_L(\alpha, \beta) \bar{h}_L(\alpha, \beta) = (\bar{e}_{\alpha} - \bar{e}_{\beta}) \sum_n h_L(\alpha, \beta; n)$$

pero por 4.2.3

$$\bar{\Omega}^T \bar{N}_L(\alpha, \beta) \bar{h}_L(\alpha, \beta) = (\bar{e}_{\alpha} - \bar{e}_{\beta}) R_L(\alpha, \beta) \quad (4.2.8)$$

Finalmente el producto  $\bar{\Omega}^T \bar{N}^T \bar{h}$  será igual

$$\bar{\Omega}^T \bar{N}^T \bar{h} = \sum_L \left[ \sum_{(\alpha, \beta) \in Z} (\bar{e}_{\alpha} - \bar{e}_{\beta}) R_L(\alpha, \beta) \right]$$

que comparando con 4.1.2 y 4.1.3 no es otra cosa que el vector de producciones netas

$$\bar{q} = \bar{\Omega}^T \bar{N}^T \bar{h} \quad (4.2.9)$$

y el problema 4.2.8 queda:

$$\begin{aligned} \min \bar{D}^T \bar{Y} & \quad (4.2.10) \\ \bar{\Omega}^T \bar{Y} &= -\bar{q} \\ \bar{F} \bar{h} &= \bar{R} \\ \bar{Y} \geq 0 \quad \bar{h} \geq 0 \end{aligned}$$

pero se observa que el vector  $\bar{h}$  ya no es una variable de decisión, así que la formulación final del problema con un solo tipo de carro es:

$$\begin{array}{l} \min \bar{D}^T \bar{Y} \\ \bar{\Omega}^T \bar{Y} = -\bar{q} \\ \bar{Y} \geq 0 \end{array} \quad (4.2.11)$$

y se enuncia la siguiente proposición

El tráfico óptimo de vagones vacíos depende únicamente de las producciones netas en los Nodos y no depende de la manera en que se enrutan los vagones cargados.

#### 4.3 ANALISIS CON TRAFICO OPTIMO TOTAL

En 3.8 se propuso como función objetivo del modelo la minimización del tráfico vacío sobre el grafo, es decir:

$$\min z = \bar{D}^T \bar{Y}$$

en esta sección se examinará el problema 4.2.1 cuando la función objetivo es el tráfico total sobre la red.

$$\min z = \bar{D}^T \bar{\varphi}$$

pero

$$\bar{\varphi} = \bar{M} \bar{g} = \bar{N} \bar{h} + \bar{V}$$

$$\min z = \bar{D}^T \bar{\varphi} = \bar{D}^T \bar{M} \bar{g} = \bar{D}^T \bar{N} \bar{h} + \bar{D}^T \bar{V}$$

es decir, el problema es ahora:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \bar{D}^T \bar{N} \bar{h} + \bar{D}^T \bar{Y} & (4.3.1) \\
 \bar{M} g - \bar{N} \bar{h} - \bar{Y} &= 0 \\
 \bar{P} \bar{h} &= \bar{R} \\
 g \text{ irrest.} \quad & \bar{h} \geq 0, \bar{Y} \geq 0
 \end{aligned}$$

su dual es:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \bar{V}^T \bar{R} & (4.3.2) \\
 - \bar{U}^T \bar{N} + \bar{V}^T \bar{P} &\leq \bar{D}^T \bar{N} \\
 - \bar{U}^T &\leq \bar{D}^T, \bar{U}^T \bar{M} = 0 \\
 \bar{U}, \bar{V} &\text{ irrestrictas}
 \end{aligned}$$

Igual que en el problema 4.2.5  $\bar{U}$  es ortogonal a  $\bar{M}$  y de nuevo se hace la sustitución 4.2.6

$$\bar{U}^T = \bar{\lambda}^T \bar{\Omega}^T \quad (4.3.3)$$

y el dual queda:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \bar{V}^T \bar{R} & (4.3.4) \\
 - \bar{\lambda}^T \bar{\Omega}^T \bar{N} + \bar{V}^T \bar{P} &\leq \bar{D}^T \bar{N} \\
 - \bar{\lambda}^T \bar{\Omega}^T &\leq \bar{D}^T \\
 \bar{U}, \bar{V} &\text{ irrestrictas}
 \end{aligned}$$

el primal de este último es:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \bar{D}^T \bar{N} \bar{h} + \bar{D}^T \bar{Y} & (4.3.5) \\
 \bar{\Omega}^T \bar{N} \bar{h} + \bar{\Omega}^T \bar{Y} &= 0 \\
 \bar{P} \bar{h} &= \bar{R} \\
 \bar{h} \geq 0, \quad & \bar{Y} \geq 0
 \end{aligned}$$

Pero como se demostró en la sección anterior (4.2.9)

$$\bar{q} = \bar{\Omega}^T \bar{N} \bar{h}$$

y recordando que

$\bar{D}^T \bar{N} = \bar{D}_N$  = vector de longitudes de trayectorias de carga.

4.3.5 queda

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{D}_N \bar{h} + \bar{D}^T \bar{Y} \\ \bar{\Omega}^T \bar{Y} = & -\bar{q} \\ \bar{P} \bar{h} = & \bar{R} \\ \bar{Y} \geq & 0, \quad \bar{h} \geq 0 \end{aligned}$$

que es un problema separable en 2 subproblemas:

$$\boxed{\begin{aligned} \min \quad & \bar{D}_N \bar{h} \\ \bar{P} \bar{h} = & \bar{R} \\ \bar{h} \geq & 0 \end{aligned}} \quad (4.3.6)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \min \quad & \bar{D}^T \bar{Y} \\ \bar{\Omega}^T \bar{Y} = & -\bar{q} \\ \bar{Y} \geq & 0 \end{aligned}} \quad (4.3.7)$$

examinando el subproblema 4.3.6 se plantearía por 4.2.3

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{D}_N \bar{h} \\ \sum_n h_{\ell}(\alpha, \beta; n) = & R_{\ell}(\alpha, \beta) \\ h_{\ell}(\alpha, \beta; n) \geq & 0 \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

para toda carga , y toda trayectoria de carga factible entre cualquier par origen-destino  $(\alpha, \beta)$ .

La solución de este problema es asignar todo el flujo de carga  $R_{\ell}(\alpha, \beta)$  a la trayectoria más corta entre  $\alpha$  y  $\beta$ .

El segundo problema 4.3.7 es el mismo que el examinado en la sección 4.2. Una vez más se encuentra que las variables  $Y, h$  son independientes.

Así pues, podemos enunciar la siguiente proposición:

Para que el tráfico total sobre la red ferroviaria sea óptimo, cuando se tiene un solo tipo de vagón, se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. Los vagones cargados corren por las rutas más cortas.
2. Los flujos de vagones vacíos se asignan tomando en consideración únicamente las producciones netas de los nodos, y minimizando su flujo sobre la red.

Solo falta demostrar que, en efecto, los flujos cíclicos  $\bar{g}$  se pueden obtener de  $\bar{Y}, \bar{h}$  cuando son soluciones de los subproblemas 4.3.6 y 4.3.7. En efecto sea:

$$\bar{M} \bar{g} = \bar{N} \bar{h} + \bar{Y} \quad (4.3.9)$$

como  $\bar{Y}$  es una solución básica factible del problema

$$\bar{\Omega}^T \bar{Y} = -\bar{q}$$

o bien:

$$p(G) \left[ \begin{array}{c|c} \bar{\Omega}_B^T & \bar{\Omega}_R^T \\ \hline p(G) & \nu(G) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \bar{y}_B \\ 0 \end{bmatrix} = -\bar{q}$$

donde  $\bar{\Omega}_B$  es una matriz cuadrada y entonces:

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} -\bar{\Omega}_B^T \bar{q} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.10)$$

divídase  $\bar{M}$  en

$$\bar{M} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{M}_B \\ \bar{M}_R \end{bmatrix}}_{\mathcal{V}(G)} \begin{bmatrix} \mathcal{P}(G) \\ \mathcal{V}(G) \end{bmatrix} \quad (4.3.11)$$

donde  $\bar{M}_R$  es cuadrada y  $\bar{N}$  en

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} \bar{N}_B \\ \bar{N}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}(G) \\ \mathcal{V}(G) \end{bmatrix} \quad (4.3.12)$$

sustituyendo 4.3.10, 4.3.11, 4.3.12 en 4.3.9

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_B \\ \bar{M}_R \end{bmatrix} \bar{g} = \begin{bmatrix} \bar{N}_B \\ \bar{N}_R \end{bmatrix} \bar{h} + \begin{bmatrix} -\bar{\Omega}_B^T \bar{q} \\ 0 \end{bmatrix}$$

o bien

$$\bar{M}_B \bar{g} = \bar{N}_B \bar{h} - (\bar{\Omega}_B^T)^{-1} \bar{q}$$

$$\bar{M}_R \bar{g} = \bar{N}_R \bar{h}$$

despejando  $\bar{g}$  en la segunda

$$\bar{g} = \bar{M}_R^{-1} \bar{N}_R \bar{h} \quad (4.3.13)$$

y debe comprobar la primera:

$$\bar{M}_B \bar{M}_R^{-1} \bar{N}_R \bar{h} = \bar{N}_B \bar{h} - (\bar{\Omega}_B^T)^{-1} q \quad (4.3.14)$$

y recordando 4.2.9

$$\bar{q} = \bar{\Omega}^T \bar{N} \bar{h}$$

o bien

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_B^T & ; & \bar{\Omega}_R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{N}_B \\ \bar{N}_R \end{bmatrix} \bar{h}$$

o bien,  $\bar{q} = (\bar{\Omega}_B^T \bar{N}_B + \bar{\Omega}_R^T \bar{N}_R) \bar{h}$  (4.3.15)

sustituyendo en 4.3.14

$$\bar{M}_B \bar{M}_R^{-1} \bar{N}_R \bar{h} = \bar{N}_B \bar{h} - (\bar{\Omega}_B^T)^{-1} (\bar{\Omega}_B^T \bar{N}_B + \bar{\Omega}_R^T \bar{N}_R) \bar{h}$$

o bien

$$\bar{M}_B \bar{M}_R^{-1} \bar{N}_R \bar{h} = \bar{N}_B \bar{h} - \bar{N}_B \bar{h} - (\bar{\Omega}_B^T)^{-1} \bar{\Omega}_R^T \bar{N}_R \bar{h}$$

o bien

$$\bar{M}_B \bar{M}_R^{-1} \bar{N}_R \bar{h} + (\bar{\Omega}_B^T)^{-1} \bar{\Omega}_R^T \bar{N}_R \bar{h} = 0$$

$$\left[ \bar{M}_B \bar{M}_R^{-1} + (\bar{\Omega}_B^T)^{-1} \bar{\Omega}_R^T \right] \bar{N}_R \bar{h} = 0 \quad (4.3.16)$$

Si se recuerda que

$$\bar{\Omega}^T \bar{M} = 0$$

y

$$\begin{bmatrix} \bar{\Omega}_B^T & ; & \bar{\Omega}_R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}_B \\ \bar{M}_R \end{bmatrix} = 0$$

$$\bar{\Omega}_B^T \bar{M}_B + \bar{\Omega}_R^T \bar{M}_R = 0$$

pero  $\bar{\Omega}_B^T$  y  $\bar{M}_R$  son invertibles, entonces

(4.3.17)

$$\bar{M}_B \bar{M}_R^{-1} + (\bar{\Omega}_B^T)^{-1} \bar{\Omega}_R^T = 0$$

lo que comprueba que 4.3.16 es una identidad y por tanto,  $\bar{g}$  es obtenible dado  $\bar{Y}$ ,  $\bar{h}$  soluciones de los problemas anteriores.

En general  $\bar{g}$  no tiene una interpretación en la práctica, por lo que no vale la pena despejarla. En caso de querer hacerlo, un método práctico es premultiplicar 4.3.9 por  $\bar{M}^T$  y despejar  $\bar{g}$ .

$$\bar{M}^T \bar{M} \bar{g} = \bar{M}^T \bar{N} \bar{h} + \bar{M}^T \bar{Y} \quad (4.3.18)$$

$$\bar{g} = (\bar{M}^T \bar{M})^{-1} \bar{M}^T \bar{N} \bar{h} + (\bar{M}^T \bar{M})^{-1} \bar{M}^T \bar{Y}$$

o bien

$$\bar{M} \bar{g} = \bar{\varphi}$$

$$\bar{g} = (\bar{M}^T \bar{M})^{-1} \bar{\varphi}$$

#### 4.4 METODO DE SOLUCION PARA PROBLEMAS CON UN SOLO TIPO DE EQUIPO DE TRANSPORTE

Nuestro problema fundamental es:

$$\begin{aligned} \min \bar{D}^T \bar{Y} \\ \bar{\Omega}^T \bar{Y} &= -\bar{q} \\ \bar{Y} &\geq 0 \end{aligned}$$

que es conocido como el problema del transbordo de Dantzig que tiene el siguiente algoritmo de solución:

**Paso 1.** Elijase un árbol en el grafo. Un árbol es un subgrafo  $T=(N,H)$  tal que no se forman ciclos y siempre existe un camino y solo uno entre cualesquiera dos nodos del grafo. Un árbol tiene  $n-1$  arcos ( $n=\text{card}(N)$ ).

**Paso 2.** Elijase un nodo como nodo raíz.

**Paso 3.** Resuélvase el flujo sobre el árbol si no es factible  $\gamma(i,j) < 0$  para algún  $(i,j) \in H$ , elegir un nuevo árbol e ir al paso 2.

**Paso 4.** Resuélvase el problema dual

$$\begin{aligned} \max \quad & - \bar{\lambda}^T q \\ & \bar{\lambda}^T \bar{A}^T \leq \bar{D}^T \end{aligned}$$

Sobre el árbol tómesese en cuenta que para un arco con inicio en el nodo y fin en el nodo  $j$ , se cumple:



(4.5.2)

$$\lambda_i - \lambda_j = D(i,j)$$

**Paso 5.** Compruébese para los arcos que no están en el árbol.

$$\lambda_i - \lambda_j \leq D(i,j) \quad (i,j) \notin H \quad (4.5.2)$$

Si cumplen todas las restricciones se tiene la solución óptima y se termina.

**Paso 6.** Si no cumple elijase el arco con

$$\max \left[ (\lambda_i - \lambda_j - D(i,j)) \right] \quad (4.5.3)$$

para entrar a la base.

**Paso 7.** Si el arco  $(i,j)$  va a entrar a la base, obsérvese el ciclo que forma en el árbol al añadirse.

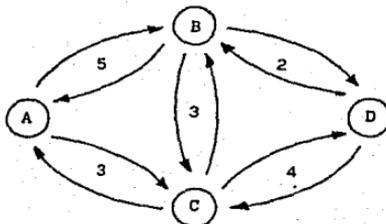
Saldrá de la base el arco con mínimo flujo que tenga sentido contrario al sentido del arco  $(i,j)$ .

Si existe este arco, volver al paso 2.

Si todos los arcos del ciclo tienen el mismo sentido que  $(i,j)$  el problema es no acotado.

#### 4.5 EJEMPLO

Sea la red que se ha desarrollado en los capítulos II y III



Se elige **C** como nodo de raíz.

En A, se producen

- 4 unidades con destino en B
- 3 unidades con destino en C
- 8 unidades con destino en D

En D, se producen

- 6 unidades con destino B
- 3 unidades con destino C
- 1 unidad con destino A

Las producciones netas son:

$$q(A) = 4+3+8-1 = 14$$

$$q(B) = -4-6 = -10$$

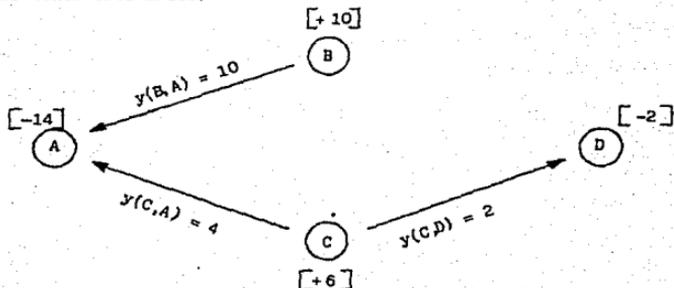
$$q(C) = -3-3 = -6$$

$$q(D) = 6+3+1-8 = 2$$

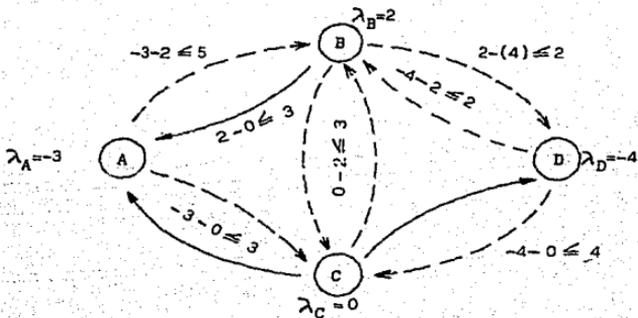
Se asocia al grafo con signo cambiado y se propone un árbol.

$$\rho(G) = \text{Card}(H) = \text{Card}(N)-1 = 4-1$$

debe tener tres arcos.



las variables duales serán:



El único arco que no cumple es el BD, por lo cual entra a la base y forma el ciclo

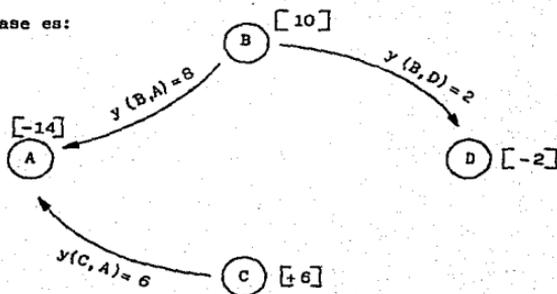
$$(BD), -(D,C), (C,A), -(A,B)$$

saldrá de la base el que tenga menor flujo de (D,C) y (A,B)

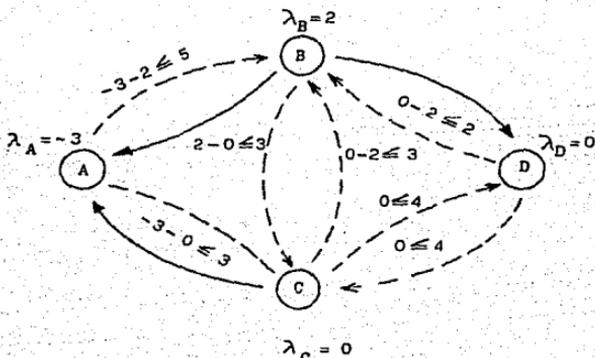
$$\min [\gamma(C,D), \gamma(B,A)] = \min [2, 10]$$

sale de la base el arco (C,D).

La nueva base es:



las variables duales serán:



El árbol es óptimo y

$$z = 5(8) + 2(2) + 3(6) = 62 \quad \frac{\text{carros por kilómetro}}{\text{semana}}$$

$$\bar{Y} = \begin{matrix} (A,B) \\ (A,C) \\ (B,A) \\ (B,C) \\ (B,D) \\ (C,A) \\ (C,B) \\ (C,D) \\ (D,B) \\ (D,C) \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se desea resolver el problema con carros cargados, tenemos:

<u>Origen</u>	<u>Destino</u>	<u>Ruta Optima</u>	<u>Carga</u>	<u>D</u>	<u>Dh</u>
A	B	AB	4	5	20
	C	AC	3	3	9
	D	ABD, o ACD	8	7	56
D	A	ABA, o DCA	1	7	7
	C	DC	3	4	12
	B	DB	6	2	12

Flujo total cargado

$$z' = 20 + 9 + 56 + 7 + 12 + 12 = 116$$

Flujo total en la red

$$z + z' = 62 + 102 = 178$$

Porcentaje de flujo vacío

$$\frac{z}{z+z'} \times 100 = 34.8\%$$

Se ve que hay dos posibilidades de trayectoria para ir de A a D y vice-versa. La elección puede ser tan arbitraria como se quiera.

Supóngase que se usa la ruta ABD para ir de A a D y la DCA para ir de D a A, con ésto, el flujo total cargado sobre la red será:

$$\bar{N} \bar{h} = \begin{matrix} AB \\ AC \\ BA \\ BC \\ BD \\ CA \\ CB \\ CD \\ DB \\ DC \end{matrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{matrix} h(A,C) \\ h(A,C) \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{matrix} h(A,D) \\ h(A,D) \end{matrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{matrix} h(D,A) \\ h(D,A) \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{matrix} h(D,C) \\ h(D,C) \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{matrix} h(D,B) \\ h(D,B) \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

y el flujo total sobre la red será:

$$\bar{Q} = \bar{N} \bar{h} + \bar{Y} = \begin{matrix} AB \\ AC \\ BA \\ BC \\ BD \\ CA \\ CB \\ CD \\ DB \\ DC \end{matrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{matrix} \bar{Y} \\ \bar{Y} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 8 \\ 0 \\ 10 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

y si se desea despejar  $\bar{g}$

$$\bar{M} \bar{g} = \bar{N} \bar{h} + \bar{Y}$$

donde  $\bar{M}$  se obtuvo ya en el ejemplo de la sección 2.6.

$$\bar{M}^T \bar{M} \bar{g} = \bar{M}^T \bar{Q}$$

$$\begin{bmatrix}
 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\
 - & - & - & - & - & - & - & - \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 4
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 s_{E1} \\
 s_{E2} \\
 s_{E3} \\
 s_{E4} \\
 s_{E5} \\
 \text{---} \\
 s_{c1} \\
 s_{c2}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 20 \\
 10 \\
 0 \\
 16 \\
 4 \\
 \text{---} \\
 14 \\
 33
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 s_{E1} \\
 s_{E2} \\
 s_{E3} \\
 s_{E4} \\
 s_{E5} \\
 \text{---} \\
 s_{c1} \\
 s_{c2}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 8 \\
 3 \\
 0 \\
 6 \\
 0 \\
 \text{---} \\
 0 \\
 4
 \end{bmatrix}$$

PARTE II

VARIOS TIPOS DE EQUIPO DE TRANSPORTE  
(Problema Multicarro)

4.6 ANALISIS DEL PROBLEMA MULTICARRO

Sea el modelo generalizado expresado por las ecuaciones 3.9.6, que se puede reescribir de la forma:

$$\begin{aligned}
 \min z &= \sum_{K=1}^r \bar{D}^T \bar{Y}^K \\
 \bar{M} \bar{g}^K - \bar{N}^K \bar{h}^K - \bar{Y}^K &= 0 & K = 1, \dots, r \\
 \sum_{K=1}^r \bar{P}^K \bar{h}^K &= \bar{R} \\
 \bar{g}^K &\text{ irrestricto} \\
 \bar{h}^K \neq 0 \quad \bar{Y}^K \neq 0
 \end{aligned}
 \tag{4.6.1}$$

$K$  = indica el tipo de carro utilizado de los  $r$  distintos posibles.

Donde:  $\bar{h}^K$  se define como en 4.2.2 para toda  $K$ .

$\bar{N}^K$  se define como en 4.2.4.

Planteando el dual de 4.6.1 se tiene:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \bar{V}^T \bar{R} \\
 (\bar{U}^K)^T \bar{M} &= 0 & K = 1, \dots, r \\
 - (\bar{U}^K)^T \bar{N}^K + \bar{V}^T \bar{P}^K &\geq 0 \\
 - (\bar{U}^K)^T &\geq \bar{D}^T \\
 \bar{U}^K, \bar{V} &\text{ irrestrictos}
 \end{aligned}
 \tag{4.6.2}$$

Razonando de manera similar a la sección 4.2, observemos el juego de restricciones:

$$(\bar{U}^K)^T \bar{M} = 0 \quad K = 1, \dots, r$$

una vez más, los vectores  $\bar{U}^K$  son ortogonales al espacio de ciclos y por lo tanto, se les puede expresar de la forma:

$$(\bar{U}^K)^T = (\bar{\lambda}^K)^T \bar{J}^T \quad (4.6.3)$$

con lo que el problema 4.6.2 queda

$$\begin{aligned} & \max \bar{V}^T \bar{R} & (4.6.4) \\ & - (\bar{\lambda}^K)^T \bar{J}^T \bar{N}^K + \bar{V}^T \bar{P}^K \leq 0 \\ & - (\bar{\lambda}^K)^T \bar{J}^T \leq \bar{D}^T \\ & \bar{\lambda}^K, \bar{V} \text{ irrestrictos} \quad K=1, \dots, r \end{aligned}$$

Retomando el primal se tiene:

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{K=1}^r \bar{D}^T \bar{V}^K \\ & \bar{J}^T \bar{V}^K + \bar{J}^T \bar{N}^K \bar{h}^K = 0 \quad K=1, \dots, r \\ & \sum_{K=1}^r \bar{P}^K \bar{h}^K = \bar{R} & (4.6.5) \\ & \bar{V}^K, \bar{h}^K \geq 0 \quad K=1, \dots, r \end{aligned}$$

Se ve que hemos logrado eliminar las variables de flujos cíclicos en la red y el problema ha quedado en función del enrutamiento de la carga ( $\bar{h}$ ) y del enrutamiento de carros vacíos ( $\bar{V}$ ).

Para hacer más claro el problema escribiremos las relaciones del problema primal (4.6.5) y el problema dual (4.6.4) de manera explícita.

Variable primal  $\bar{Y}^K(i,j)$  que es el flujo de carros vacíos de tipo K sobre el arco  $(i,j)$ , la inecuación dual correspondiente es:

$$\bar{\lambda}_i^K - \bar{\lambda}_j^K \leq D(i,j) \quad (4.6.6)$$

Sea ahora la variable primal  $h_{\ell}^K(i, n)$  que es como ya se definió en la sección 3.5 la carga tipo  $\ell$  originada en  $i$  con destino en  $n$  transportada en el carro tipo K por la trayectoria  $n$ .

Su inecuación dual de manera explícita es:

$$-(\bar{\lambda}_{\alpha}^K - \bar{\lambda}_{\beta}^K) + v_{\ell}(\alpha, \beta) \leq 0 \quad (4.6.7)$$

donde  $v_{\ell}(\alpha, \beta)$  es la variable dual relacionada con la conservación de la carga  $R_{\ell}(\alpha, \beta)$ .

Obsérvese que la inecuación 4.6.7 depende del origen  $\alpha$ , del destino  $\beta$  y del tipo de carro K usado, pero NO depende de la trayectoria  $n$  elegida para transportar esa carga, esto en programación lineal, tiene una interpretación muy importante.

La solución óptima del problema multicarro no depende de las trayectorias de los carros cargados.

que es un resultado similar al obtenido al final de la sección 4.2 para el problema monocarro; sin embargo, en el problema multicarro no podemos eliminar completamente las variables  $h$  del problema primal, ni referirlo únicamente a las cargas netas en los nodos.

Para continuar el análisis del problema, será necesario clasificar las cargas producidas en un nodo en dos tipos:

1. Cargas que solamente pueden ser transportadas en un solo tipo carro.
2. Cargas que son compatibles con varios tipos de carros.

Es evidente que si todas las cargas a transportar cayeran en el caso uno, el problema de optimizar la red se reduciría a resolver  $r$  problemas del tipo del planteado en la parte I de este capítulo, un problema para cada tipo de carro.

En todo caso, para las cargas tipo uno, es conveniente definir vectores de producción neta referidos a cada tipo de carro.

$$\bar{q}^K = \begin{bmatrix} q^K (1) \\ q^K (2) \\ \vdots \\ q^K (n-1) \end{bmatrix} \quad (4.6.8)$$

donde:

$$\bar{g}^K (i) = \sum \left( \begin{array}{l} \text{carga Tipo 1 producida} \\ \text{en } i \text{ transportada en} \\ \text{carros Tipo K} \end{array} \right) - \sum \left( \begin{array}{l} \text{carga Tipo 1 con destino} \\ i \text{ transportada en carros} \\ \text{Tipo K} \end{array} \right)$$

Ahora en el caso de la carga Tipo 2 definamos las nuevas variables:

$$H_2^K (\alpha, \beta) = \sum_n h_2^K (\alpha, \beta; n) \quad (4.6.9)$$

donde las variables  $H$  se vuelven independientes de la trayectoria elegida para transportar la carga entre  $y$  en carros Tipo  $K$ .

Obsérvese que la inecuación dual de estas variables es precisamente 4.6.7.

Ahora solo queda interpretar el producto

$$\bar{L}^T \bar{N}^K \bar{h}^K$$

pero de una manera similar a lo hecho en la sección 4.2 tendremos:

$$\bar{L}^T \bar{N}^K \bar{h}^K = \underbrace{\bar{q}^K}_{\substack{\text{carga} \\ \text{Tipo 1}}} + \underbrace{\sum_{\alpha} \sum_{\beta} (e_{\alpha} - e_{\beta}) H_{\ell}^K(\alpha, \beta)}_{\text{carga Tipo 2}} \quad (4.6.10)$$

Si definimos el vector

$$\bar{H}^K = \begin{bmatrix} H_1^K(\alpha, \beta) \\ \vdots \\ H_1^K(\gamma, \delta) \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ H_2^K(\alpha, \beta) \\ \vdots \\ H_2^K(\gamma, \delta) \end{bmatrix} \quad (4.6.11)$$

Y  $\bar{Q}^K$  una matriz tal que:

$$\bar{Q}^K \bar{H}^K = \sum_{\ell} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (e_{\alpha} - e_{\beta}) H_{\ell}^K(\alpha, \beta) \quad (4.6.12)$$

la ecuación 4.6.10 quedará:

$$\bar{L}^T \bar{N}^K \bar{h}^K = \bar{q}^K + \bar{Q}^K \bar{H}^K \quad (4.6.13)$$

La expresión final del problema de programación lineal será:

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{K=1}^r \bar{D}^T \bar{Y}^K \\ \mathcal{L} \bar{Y}^K + \bar{Q}^K \bar{H}^K &= -\bar{q}^K \quad K=1, \dots, r \\ \sum_{K=1}^r \bar{H}^K &= \bar{R}' \\ \bar{Y}^K, \bar{H}^K &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.6.14)$$

donde  $\bar{R}'$  es el flujo total de carga Tipo 2.

#### 4.7 ANALISIS DEL PROBLEMA MULTICARRO CON TRAFICO TOTAL

Esta sección es análoga a la sección 4.3 y se analizará el problema multicarro con la función objetivo.

$$\min z = \sum_{K=1}^r \bar{D}^T \bar{Q}^K = \sum_{K=1}^r \left[ \bar{D}^T \bar{Y}^K + \bar{D}^T \bar{N}^K \bar{H}^K \right] \quad (4.7.1)$$

y el problema multicarro se formularía:

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{K=1}^r \left[ \bar{D}^T \bar{Y}^K + \bar{D}^T \bar{N}^K \bar{H}^K \right] \\ \bar{M}^K \bar{g}^K - \bar{N}^K \bar{h}^K - \bar{Y}^K &= 0 \quad K=1, \dots, r \\ \sum_{K=1}^r \bar{P}^K \bar{h}^K &= \bar{R} \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

Si se eliminan las variables  $\bar{g}^K$  del problema por el procedimiento conocido de multiplicar las ecuaciones de equilibrio sobre los arcos por  $\bar{\mathcal{L}}^T$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{K=1}^r \left[ \bar{D}^T \bar{Y}^K + \bar{D}^T \bar{N}^K \bar{h}^K \right] \quad (4.7.3) \\ \bar{\mathcal{L}}^T \bar{Y}^K + \bar{\mathcal{L}}^T \bar{N}^K \bar{h}^K &= 0 \quad K=1, \dots, r \\ \sum_{K=1}^r \bar{P}^K \bar{h}^K &= \bar{R} \end{aligned}$$

y su dual sería

$$\begin{aligned} \max \bar{w}^T \bar{R} & \quad (4.7.4) \\ (\bar{\lambda}^K)^T \bar{J}^T & \leq \bar{D}^T \quad K=1, \dots, r \\ (\bar{\lambda}^K)^T \bar{J}^T \bar{N}^K + \bar{w}^T \bar{P}^K & \leq \bar{D}^T \bar{N}^K, \quad K=1, \dots, r \\ \bar{\lambda}^K, \bar{w} & \text{ irrestrictos} \end{aligned}$$

escribiendo explícitamente las relaciones primal dual.

Para  $\lambda^K (i, j)$  se tendría la inecuación dual:

$$\lambda_i^K - \lambda_j^K \leq D(i, j) \quad (4.7.5)$$

Y para la variable primal  $h_\alpha^K (\alpha, \beta; n)$  se tendría la inecuación dual:

$$\lambda_\alpha^K - \lambda_\beta^K + w_\alpha (\alpha, \beta) \leq D(\alpha, \beta; n) \quad (4.7.6)$$

Donde  $D(\alpha, \beta; n)$  se ha definido ya en la sección 3.4 como la longitud de la trayectoria  $n$  que un  $\alpha$  y  $\beta$ .

Obsérvese que el lado izquierdo de la ecuación es el mismo para cualquier trayectoria que una  $\alpha$  y  $\beta$ . Es evidente que la trayectoria de mínima longitud producirá una inecuación que reemplazará a todas las demás y una vez más, como es sabido, en programación lineal, solo la variable  $h$  relacionada con la mínima longitud será activa mientras que las otras serán iguales a cero.

Por lo que:

Una condición para que el problema multicarro con tráfico total sea óptimo, es que la carga se mueva por trayectorias óptimas.

Es decir, que solamente tomaremos en cuenta las trayectorias óptimas, y haremos:

$$H_{\ell}^K(\alpha, \beta) = h_{\ell}^K(\alpha, \beta; n_0) \quad (4.7.7)$$

$n_0$  = trayectoria  
óptima

que sería equivalente a la ecuación (4.6.9).

Si como en la sección anterior distinguimos entre la carga Tipo 1 y la carga Tipo 2 y obtenemos producciones netas en los nodos, obtendremos:

$$\sqrt{L}^T \bar{N}^K \bar{h}^K = \bar{q}^K + \bar{\varphi}^K \bar{H}^K \quad (4.7.8)$$

que es 4.6.12 de nuevo.

Por otro lado, si la carga se mueve por trayectorias óptimas únicamente, se tendría para la función objetivo.

$$CTD = \sum_{K=1}^F \bar{D}^T \bar{N}^K \bar{h}^K = \sum_{K=1}^F \left[ \sum_{\ell} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} D(\alpha, \beta; n_0) H_{\ell}^K(\alpha, \beta) \right] \quad (4.7.9)$$

$$= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\ell} D(\alpha, \beta; n_0) \left[ \sum_{K=1}^F H_{\ell}^K(\alpha, \beta) \right] = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\ell} D(\alpha, \beta; n_0) R_{\ell}(\alpha, \beta)$$

Donde CTD es la carga total por longitud en la red y se ve que no depende del tipo de equipo de transporte usado, sino de la elección de trayectorias de carga.

Una vez elejidas las trayectorias óptimas de carga, la función objetivo del modelo queda:

$$\min z = \sum_{K=1}^F \left[ \bar{D}^T \bar{Y}^K + \bar{D}^T \bar{N}^K \bar{h}^K \right] = \sum_{K=1}^F \bar{D}^T \bar{Y}^K + CTD$$

Finalmente el problema de programación lineal es quitando la constante CTD de la función objetivo y haciendo las modificaciones a las restricciones vistas en la sección 4.6, se tendrá:

$$\min z = \sum_{K=1}^r \bar{D}^T \bar{Y}^K$$

$$\bar{L} \bar{Y}^K + \bar{Q}^K \bar{H}^K = -\bar{q}^K, \quad K=1, \dots, r$$

$$\sum_{K=1}^r \bar{H}^K = \bar{H}, \quad (4.7.10)$$

$$\bar{Y}^K \not\parallel 0, \quad \bar{H}^K \not\parallel 0, \quad K=1, \dots, r$$

que es el problema 4.6.14.

Finalmente,

para que el tráfico total en la red sea óptimo, se debe cumplir:

- 1) La carga se mueve por trayectorias óptimas.
- 2) Los carros vacíos y la elección de equipo de transporte para la carga Tipo 2, resuelven el problema 4.6.14.

#### 4.8 METODO DE SOLUCION DEL PROBLEMA MULTICARRO

El modelo representado por las ecuaciones 4.7.10, se puede interpretar de la siguiente manera:

Encontrar que tipo de equipo de transporte  $K$ , que es más conveniente, para transportar la carga  $\ell$  con origen  $\alpha$  y destino  $\beta$ , desde el punto de vista del tráfico óptimo sobre la red.

En efecto, el transporte de la carga  $R(\alpha, \beta)$  estará dada por las variables

$$H_{\ell}^1(\alpha, \beta), \dots, H_{\ell}^K(\alpha, \beta), \dots, H_{\ell}^r(\alpha, \beta) \quad (4.8.1)$$

y se le asociará la ecuación de conservación de carga (Tipo 2).

$$\sum_{K=1}^r H_{\ell}^K(\alpha, \beta) = R_{\ell}(\alpha, \beta) \quad (4.8.2)$$

a las variables de 4.8.1 se les asociará el sistema de inecuaciones duales siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_{\alpha}^1 - \lambda_{\beta}^1 + v_{\ell}(\alpha, \beta) \leq 0 \\ \vdots \\ \lambda_{\alpha}^K - \lambda_{\beta}^K + v_{\ell}(\alpha, \beta) \leq 0 \\ \vdots \\ \lambda_{\alpha}^r - \lambda_{\beta}^r + v_{\ell}(\alpha, \beta) \leq 0 \end{array} \right\} \quad (4.8.3)$$

Para que la solución sea óptima, se debe cumplir por holgura complementaria:

$$H_{\ell}^K(\alpha, \beta) \left[ \lambda_{\alpha}^K - \lambda_{\beta}^K + v_{\ell}(\alpha, \beta) \right] = 0 \quad (4.8.4)$$

para todo  $K=1, \dots, r$

lo que implica que para todo  $K$ .

$$\text{o bien } H_{\ell}^K(\alpha, \beta) = 0 \quad (4.8.5)$$

$$\text{o bien } v_{\ell}(\alpha, \beta) = \lambda_{\beta}^K - \lambda_{\alpha}^K$$

Si el equipo Tipo 1, es el más conveniente para transportar la carga

$R_{\ell}(\alpha, \beta)$ , se tendrá:

$$\boxed{H_{\ell}^1(\alpha, \beta) > 0 \quad v_{\ell}(\alpha, \beta) = \lambda_{\beta}^1 - \lambda_{\alpha}^1} \quad (4.8.6)$$

y además cumplirá:

(4.8.7)

$$\bar{\lambda}_{\beta}^K - \bar{\lambda}_{\alpha}^K \geq \lambda_{\beta}^i - \lambda_{\alpha}^i$$

$$K=1, \dots, r$$

A 4.8.6 y 4.8.7 las llamaremos condiciones de optimalidad para la carga  $R_{\ell}(\alpha, \beta)$ .

La solución de problema es óptima. Si para todas las cargas Tipo 2  $R_{\ell}(\alpha, \beta)$ , si se cumplen sus respectivas condiciones de optimalidad 4.8.7

Se propone el siguiente algoritmo de solución al problema multicarro.

Paso 1. Identificar la carga tipo 1 y tipo 2.

Paso 2. Obtener los vectores de producción neta asociados a cada tipo de carro y la carga tipo 1.

Paso 3. Hacer una distribución arbitraria de la carga tipo 2, considerando que la carga  $R_{\ell}(\alpha, \beta)$ , se manejará toda en un solo tipo de carro.

$$\bar{P}^K = \bar{q}^K + \bar{Q}^K \bar{H}^K$$

$\bar{H}^K$  = distribución arbitraria de la carga.

Paso 4. Resolver r problemas monocarro:

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{D}^T \bar{Y}^K \\ & \bar{J}^T \bar{Y}^K = -\bar{p}^K \\ & \bar{Y}^K \geq 0 \quad K=1, \dots, r \end{aligned}$$

usando el algoritmo de la sección 4.4

Paso 5. Para toda carga Tipo 2  $R_{\ell}(\alpha, \beta)$ .

$$\text{Hacer } V_{\ell}(\alpha, \beta) = \lambda_{\beta}^i - \lambda_{\alpha}^i$$

donde  $i$  es el tipo de carro elegido para transportar la carga

$$R_{\ell}(\alpha, \beta)$$

Paso 6. Para toda carga Tipo 2  $R_{\ell}(\alpha, \beta)$ , verificar

$$V_{\ell}(\alpha, \beta) \leq \lambda_{\beta}^K - \lambda_{\alpha}^K \quad K=1, \dots, r$$

Si se cumple esta condición de optimalidad, se ha llegado ya a la solución óptima.

En caso contrario calcular

$$\Delta_{\ell}^K(\alpha, \beta) = (\lambda_{\beta}^i - \lambda_{\alpha}^i) - (\lambda_{\beta}^K - \lambda_{\alpha}^K)$$

donde  $i$  está referido a la carga  $R_{\ell}(\alpha, \beta)$  y calcular

$$\Delta_{\ell}^S(\alpha, \beta) = \max_K \Delta_{\ell}^K(\alpha, \beta)$$

y hacer la asignación

$$H_{\ell}^S(\alpha, \beta) = R_{\ell}(\alpha, \beta)$$

es decir, se asignará la carga  $R_{\ell}(\alpha, \beta)$  al equipo de transporte que más viole las condiciones de optimalidad.

- Volver al Paso 3.

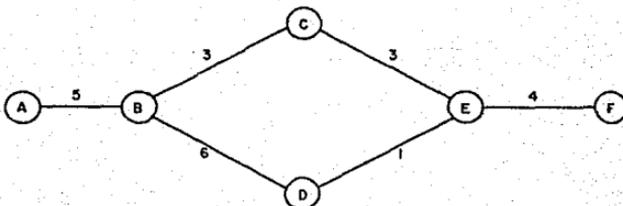
El algoritmo anterior, es una aplicación del método simplex al problema multicarro.

El Paso 6, es equivalente a la elección de la nueva variable básica, debe notarse que el cambio de base se realiza al elegir un nuevo equipo de transporte para la carga  $R_4(\alpha, \beta)$ .

Cabe comentar que el algoritmo actúa como un principio de descomposición en el que el problema total, se divide en varios subproblemas óptimos y luego verifica la optimalidad del sistema como todo; y en caso de que no se cumpla se propone una nueva solución inicial para cada uno de los subsistemas.

#### 4.9 EJEMPLO

Considérese la siguiente red ferroviaria.



con la siguiente tabla de distancias:

<u>Tramo</u>	Longitud (X 100 km)
AB	5
BC	3
BD	6
CE	3
DE	1
EF	4

Se dispone de los siguientes equipos de transporte:

<u>Tipo</u>	<u>Equipo</u>
1	Tolva
2	Góndola
3	Plataforma

Se deben transportar los siguientes flujos de carga sobre la red:

Nodo Productor A

<u>Producto</u>	<u>Destino</u>	<u>Flujo</u> (X 100 carros/semana)	<u>Equipo</u> <u>Compatible</u>
1 Arena Sílica	E	2	1,2
2 Mineral de Hierro	D	3	1
3 Coque	E	1	2
	D	2	2
5 Azufre	D	2	2
6 Mineral de Zinc	F	1	1

Nodo Productor C

<u>Producto</u>	<u>Destino</u>	<u>Flujo</u> (X 100 carros/semana)	<u>Equipo</u> <u>Compatible</u>
1 Piedra Caliza	B	2	1,2
2 Cemento	B	1	1
	E	1	1
	F	3	1

Nodo Productor D

$\ell$	<u>Producto</u>	<u>Destino</u>	(X 100 <u>Flujo</u> carros/semana)	<u>Equipo</u> <u>Compatible</u>
1	Acero	A	4	2
		B	6	2
		C	1	2
		E	1	2
		F	2	2
2	Tubería	B	7	2,3
		C	3	2,3

Nodo Productor F

$\ell$	<u>Producto</u>	<u>Destino</u>	(X 100 <u>Flujo</u> carros/semana)	<u>Equipo</u> <u>Compatible</u>
1	Sal	B	3	1
		C	1	1
		D	1	1

Encontramos que hay cuatro productos que son compatibles con equipos distintos (carga Tipo 2).

$$R_1 (A,E) = 2 \quad \text{compatible con 1,2}$$

$$R_1 (C,B) = 2 \quad \text{compatible con 1,2}$$

$$R_2 (D,B) = 7 \quad \text{compatible con 2,3}$$

$$R_2 (C,E) = 3 \quad \text{compatible con 2,3}$$

Calculemos las producciones netas para la carga Tipo 1:

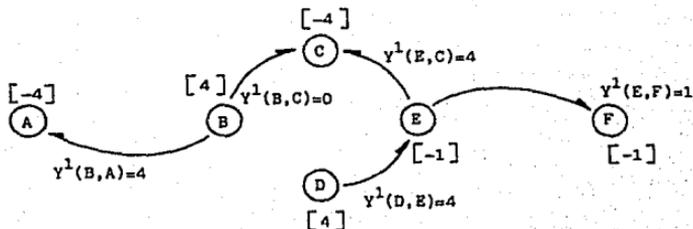
$$\bar{q}^1 = \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & + & 1 & & & \\ & - & 1 & & & \\ & & 1 & + & 1 & + & 3 & & - & 3 & & \\ - & 3 & & & & & & & & & & - & 1 & & & \\ & & & - & 1 & & & & & & & & & & & - & 1 & & \\ & & & & & - & 1 & & & & & & & & & & & + & 1 & + & 1 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$p^{-3} = \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{matrix} 0 \\ -7 \\ 3 \\ 7 \\ -3 \\ 0 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 3 \\ 7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para la primera interacción, resolvemos la red para las producciones netas.

Arbol de equipo Tipo 1, tolvás

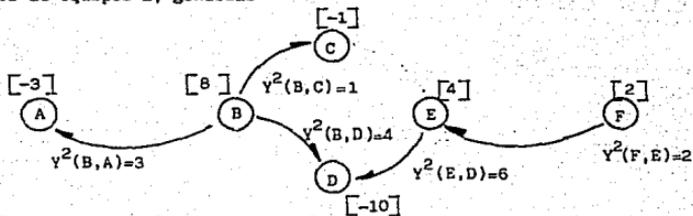


$$\lambda_A^1 = 0 \quad \lambda_C^1 = 2 \quad \lambda_E^1 = 5$$

$$\lambda_B^1 = 5 \quad \lambda_D^1 = 6 \quad \lambda_F^1 = 1$$

Nota: Entre corchetes está  $[-p]$

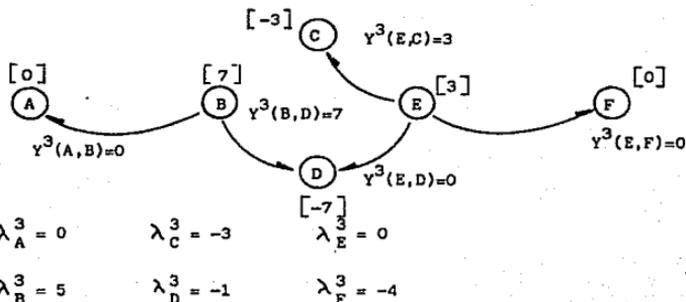
Arbol de equipos 2, góndolas



$$\lambda_A^2 = 0 \quad \lambda_C^2 = 2 \quad \lambda_E^2 = 6$$

$$\lambda_B^2 = 5 \quad \lambda_D^2 = -1 \quad \lambda_F^2 = 4$$

Arbol del equipo 3, plataformas



Se checan ahora las condiciones de optimalidad.

Para  $R_1$  (A,E) = 2 ,  $i = 2$

$$v_1(A,E) = \lambda_E^2 - \lambda_A^2 = 0 - 0 = 0$$

optimalidad  $v_1(A,E) = 0 \leq \lambda_E^1 - \lambda_A^1 = 5 - 0$

Cumple la condición de optimalidad

Para  $R_1$  (C,B) = 2 ,  $i = 2$

$$v_1(C,B) = \lambda_B^2 - \lambda_C^2 = 5 - 2 = 3$$

$$v_1(C,B) = 3 \leq \lambda_B^1 - \lambda_C^1 = 5 - 2 = 3$$

Se cumple con la optimalidad.

Para  $R_2$  (D,B) = 7 ,  $i = 3$

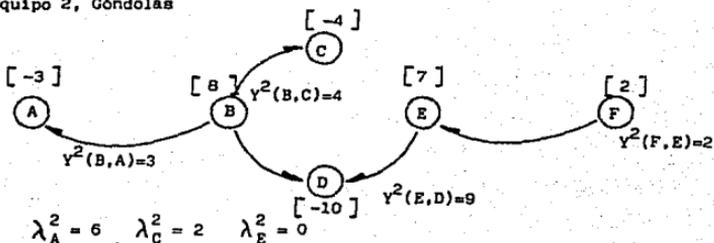
$$v_2(D,B) = \lambda_B^3 - \lambda_D^3 = 5 - (-1) = 6$$

$$v_2(D,B) = 6 \leq \lambda_B^2 - \lambda_D^2 = 5 - (-1) = 6$$

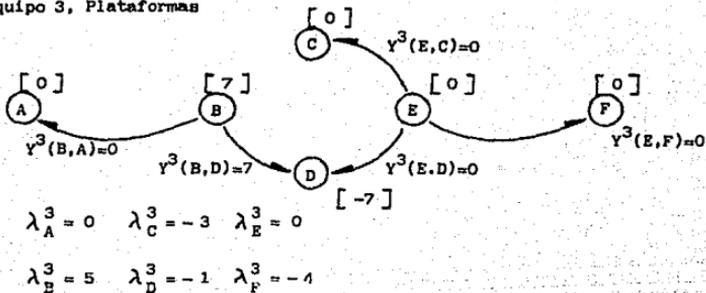
$$\lambda_A^1 = 0 \quad \lambda_C^1 = 2 \quad \lambda_E^1 = 5$$

$$\lambda_B^1 = 5 \quad \lambda_D^1 = 6 \quad \lambda_F^1 = 1$$

Equipo 2, Góndolas



Equipo 3, Plataformas



Condiciones de optimalidad.

Para  $R_1(A,E) = 2, \quad 1 = 2$

$$v_1(A,E) = \lambda_E^2 - \lambda_A^2 = 0 - 0$$

$$v_1(A,E) = 0 \leq \lambda_E^1 - \lambda_A^1 = 5 - 0$$

Para  $R_1 (C,B) = 2$  ,  $i = 2$

$$V_1 (C,B) = \lambda_B^2 - \lambda_C^2 = 5 - 2 = 3$$

$$V_1 (C,B) = 3 \leq \lambda_B^1 - \lambda_C^1 = 5 - 2 = 3$$

Para  $R_2 (D,B) = 7$  ,  $i = 3$

$$V_2 (D,B) = \lambda_B^3 - \lambda_D^3 = 5 - (-1) = 6$$

$$V_2 (D,B) = 6 \leq \lambda_B^2 - \lambda_D^2 = 5 - (-1) = 6$$

Para  $R_2 (C,E) = 3$  ,  $i = 2$

$$V_2 (C,E) = \lambda_E^2 - \lambda_C^2 = 0 - 2 = -2$$

$$V_2 (C,E) = -2 \leq \lambda_E^3 - \lambda_C^3 = -4 - (-3) = -1$$

Se observa que para la carga  $R_1 (C,B)$  y  $R_2 (D,B)$  las condiciones de óptimalidad se cumplen con estricta igualdad, lo que implica que el equilibrio óptimo del sistema es indiferente al equipo de transporte asignado a esas cargas.

En resumen, para la carga Tipo 2.

Arena Sílica, con origen en E y destino A, debe ser transportada en Góndola.

Piedra Caliza, con origen C y destino B, puede ser transportada en Tolva o en Góndola de manera indistinta.

Tubería, con origen en D y destino B, puede ser transportada en plataforma o en Góndola.

Tubería , con origen en D y destino B, debe ser transportada en Góndola.

Para el flujo cargado tenemos:

<u>Carga</u>	<u>Equipo</u>	<u>Ruta</u>	<u>Distancia</u>	(x 100	<u>Flujo</u> carros/sem.)	(x 100	<u>D-R</u> carros km/sem)
R <sub>1</sub> (A,E)	2	ABCE	11		2		22
R <sub>2</sub> (A,D)	1	ABD	11		3		33
R <sub>3</sub> (A,E)	2	ABCE	11		1		11
R <sub>3</sub> (A,D)	2	ABD	11		2		22
R <sub>5</sub> (A,D)	2	ABD	11		2		22
R <sub>6</sub> (A,F)	1	ABCEF	15		1		15
R <sub>1</sub> (C,B)	2	CB	3		2		6
R <sub>2</sub> (C,B)	1	CB	3		1		3
R <sub>2</sub> (C,E)	1	CE	3		1		3
R <sub>2</sub> (C,F)	1	CEF	7		3		21
R <sub>1</sub> (D,A)	2	DBA	11		4		44
R <sub>1</sub> (D,B)	2	DB	6		6		36
R <sub>1</sub> (D,C)	2	DEC	4		1		4
R <sub>1</sub> (D,E)	2	DE	1		1		1
R <sub>1</sub> (D,F)	2	DEF	5		2		10
R <sub>2</sub> (D,B)	3	DB	6		7		42
R <sub>2</sub> (D,C)	2	DEC	4		3		12
R <sub>1</sub> (F,B)	1	FECB	10		3		30
R <sub>1</sub> (F,C)	1	FEC	7		1		7
R <sub>1</sub> (F,D)	1	FED	5		1		5

Tolvas

Flujo - km	cargado	=	117 x 10 <sup>4</sup>	carros km/semana
Flujo - km	vacio	=	52 x 10 <sup>4</sup>	carros km/semana
Flujo - km	total	=	169 x 10 <sup>4</sup>	carros km/semana

% vacio = 30.7%

Relación vacio/carga = 44%

## Góndolas

Flujo - km cargado =  $190 \times 10^4$  carros km/semana

Flujo - km vacío =  $50 \times 10^4$  carros km/semana

Flujo ° km total =  $240 \times 10^4$  carros km/semana

% vacío = 20.8%

Relación vacío/carga = 26%

## Plataformas

Flujo - km cargado =  $42 \times 10^4$  carros km/semana

Flujo - km vacío =  $42 \times 10^4$  carros km/semana

Flujo - km total =  $84 \times 10^4$  carros km/semana

% vacío = 50%

Relación vacío/carga = 100%

## Flujo Total en la Red

Flujo - km cargado =  $349 \times 10^4$  carros km/semana

Flujo - km vacío =  $144 \times 10^4$  carros km/semana

Flujo - km total =  $493 \times 10^4$  carros km/semana

% vacío = 29.21%

Relación vacío/carga = 41.26%

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

## CAPITULO V

### UN EJEMPLO EN EL AMBITO NACIONAL

#### 5.0 PLANTEAMIENTO GENERAL

Uno de los principales tráficos de carga en el Sistema Ferroviario Nacional, es el de productos agrícolas desde las zonas productoras a las zonas de consumo que son principalmente las grandes ciudades de la República.

Aquí presentamos un modelo simplificado de dicho tráfico, aplicando los conceptos para el manejo óptimo de los flujos de equipo de transporte estudiados en los capítulos anteriores.

El problema se plantea como uno en el que hay un sólo equipo de transporte (problema monocarro), que en este caso serán los furgones pues son equipos altamente reutilizables y los más comunes para el transporte de carga agrícola.

#### 5.1 MODELO DE LA RED

El modelo simplificado de la red (ver Figura 5.1), se ha obtenido haciendo las siguientes consideraciones:

1. Se consideran únicamente zonas productoras en las que la carga se -- transporta en carros nacionales. Esto implica que puertos fronterizos como Ciudad Juárez, Nogales, Ojinaga, etc., no sean considerados

pues la carga que se mueve a través de ellos, viene en vagones extranjeros que llegan a su destino, descargan y regresan vacíos.

2. En los nodos se concentran regiones productoras y consumidoras de manera completa, procurando que no haya más de uno o dos nodos por estado. Por ejemplo, el nodo México concentrará a la Ciudad de México y a los estados de México y Morelos. El nodo Hermosillo, concentrará a Guaymas y Ciudad Obregón. El estado de Sinaloa quedará concentrado entre los nodos Guadalajara y Mochis, etc.
3. No se considera el Sureste dentro de la red, puesto que las grandes cargas agrícolas generadas en esa región, se consumen en la misma, habiendo un muy pequeño intercambio de carga agrícola con el resto del país.

Además la red en la zona Sureste del país, tiene la forma de árbol discutida en el Capítulo I, lo que hace que sea de escaso interés para los problemas de enrutamiento de carros. En todo caso, esta zona se puede concentrar en el nodo Coatzacoalcos.

4. Se considera operando ya el tramo Tampico-Veracruz.
5. Se consideran las distancias geográficas entre los nodos (ver Tabla 5.1), aunque se podrían utilizar distancias virtuales proporcionales a la potencia de arrastre en esos tramos, o a los costos del transporte de furgones vacíos en dichos tramos.

El modelo también podría adquirir costos diferentes en el tráfico de carros vacíos, en una dirección o en otra.

TABLA 5.1

## DISTANCIAS ASOCIADAS A LOS TRAMOS DEL MODELO DE LA RED

	Tramo	Distancia (x 100 km)
1	MEXICO-PUEBLA	1.4
2	PUEBLA-CORDOBA	1.1
3	CORDOBA-COATZACOALCOS	2.7
4	CORDOBA-VERACRUZ	0.8
5	VERACRUZ-TAMPICO	4.79
6	MEXICO-SAN LUIS POTOSI	4.19
7	TAMPICO-SAN LUIS POTOSI	4.0
8	TAMPICO-MONTERREY	5.3
9	MONTERREY-SAN LUIS POTOSI	5.37
10	MEXICO-IRAPUATO	3.6
11	IRAPUATO-SAN LUIS POTOSI	2.0
12	SAN LUIS POTOSI-AGUASCALIENTES	1.68
13	AGUASCALIENTES-IRAPUATO	2.0
14	MONTERREY-TORREON	3.62
15	TORREON-AGUASCALIENTES	5.1
16	IRAPUATO-GUADALAJARA	2.4
17	GUADALAJARA-MOCHIS	9.2
18	MOCHIS-TORREON	8.8
19	MOCHIS-HERMOSILLO	5.86
20	HERMOSILLO-MEXICO	6.88
21	MONTERREY-MATAMOROS	3.23

## 5.2 CARGAS A TRANSPORTAR

El análisis de cargas a transportar se hace siguiendo los valores propuestos por el plan a largo plazo de Ferrocarriles Nacionales de México. Dicho documento clasifica la carga agrícola en los siguientes productos:

- Forrajes
- Frijol
- Maíz
- Sorgos
- Oleaginosas
- Trigo
- Productos agrícolas varios

Se han seleccionado las cargas agrícolas que caen dentro del modelo de la red y que en 1986 registraron más de 15,000 toneladas al año. Se toma la predicción que hace FNM para dichas cargas en el año de 1991.

En la Tabla 5.2 se pueden ver estas cargas propuestas expresadas en toneladas al año y en furgones a la semana.

Para proceder al análisis del enrutamiento de vagones vacíos, es necesario tener las producciones netas en los nodos, éstas se encuentran en la Tabla 5.3.

## 5.3 ENRUTAMIENTOS DE CARROS VACIOS

Aplicando el procedimiento de la Sección 4.5, se obtiene para la red y las producciones netas propuestas, un árbol de carros vacíos que se puede ver en la Figura 5.2.

TABLA 5.2

## PRINCIPALES CARGAS AGRICOLAS EN EL AÑO 1991

	Ruta (Origen-Destino)	Carga (x 1000 ton/año)	Carga (furgón/semana)
<b>PORRAJES</b>			
1	HERMOSILLO-GUADALAJARA	34.5	8.29
2	HERMOSILLO-IRAPUATO	18.6	4.47
3	HERMOSILLO-TORREON	14.2	3.41
4	HERMOSILLO-MONTERREY	29.0	6.91
5	HERMOSILLO-MEXICO	19.5	4.69
6	MEXICO-MONTERREY	27.3	6.56
<b>FRIJOL</b>			
7	GUADALAJARA-MEXICO	77.2	18.56
8	VERACRUZ-MEXICO	27.6	6.63
<b>MAIZ</b>			
9	COATZACOALCOS-MEXICO	16.3	3.92
10	COATZACOALCOS-PUEBLA	13.5	3.25
11	TORREON-MEXICO	19.2	4.62
12	GUADALAJARA-MEXICO	21.9	5.26
13	MATAMOROS-MEXICO	198.5	47.72
14	MATAMOROS-GUADALAJARA	21.3	5.12
15	MATAMOROS-MONTERREY	34.5	8.29
16	SAN LUIS POTOSI-MEXICO	68.3	16.42
17	TAMPICO-MEXICO	26.5	6.37
18	VERACRUZ-MEXICO	503.4	121.01
19	VERACRUZ-PUEBLA	61.6	14.81

Tabla 5.2 (continuación)

	Ruta (Origen-Destino)	Carga (x 1000 ton/año)	Carga (furgón/semana)
<b>SORGOS</b>			
20	MATAMOROS-PUEBLA	125.6	30.19
21	MATAMOROS-TORREON	289.5	69.59
22	MATAMOROS-GUADALAJARA	87.4	21.01
23	MATAMOROS-MONTERREY	30.6	7.36
24	MATAMOROS-MEXICO	222.2	53.41
25	COATZACOALCOS-PUEBLA	29.4	7.07
26	MOCHIS-GUADALAJARA	20.7	4.98
27	IRAPUATO-AGUASCALIENTES	16	3.85
28	IRAPUATO-PUEBLA	24.3	5.84
29	IRAPUATO-MEXICO	43.8	10.53
30	MATAMOROS-IRAPUATO	46.4	11.15
31	SAN LUIS POTOSI-IRAPUATO	20.3	4.88
32	TAMPICO-AGUASCALIENTES	18	4.33
33	TAMPICO-IRAPUATO	74.9	7.98
34	TAMPICO-GUADALAJARA	33.2	7.98
35	VERACRUZ-CORDOBA	23.1	5.55
36	VERACRUZ-PUEBLA	285	68.51
37	VERACRUZ-MEXICO	51.2	12.31
<b>OLEAGINOSAS</b>			
38	COATZACOALCOS-CORDOBA	17.4	4.18
39	COATZACOALCOS-MEXICO	71.0	17.07
40	MOCHIS-GUADALAJARA	31.9	7.67
41	GUADALAJARA-MEXICO	32.9	7.91
42	GUADALAJARA-HERMOSILLO	36.7	8.82
43	TAMPICO-GUADALAJARA	38.3	9.21
44	TAMPICO-MONTERREY	56.1	13.49
45	VERACRUZ-MEXICO	95.5	22.96
46	VERACRUZ-PUEBLA	46.5	11.18

Tabla 5.2 (continuación)

	Ruta (Origen-Destino)	Carga (x 1000 ton/año)	Carga (furgón/semana)
<b>TRIGO</b>			
47	HERMOSILLO-TORREON	101.4	24.38
48	HERMOSILLO-MONTERREY	32.8	7.88
49	HERMOSILLO-MEXICO	250.3	60.17
50	MOCHIS-MEXICO	93.7	22.52
51	HERMOSILLO-PUEBLA	31.3	7.52
52	MEXICALI-MONTERREY	17.6	4.23
53	GUADALAJARA-MEXICO	25.1	6.03
54	MEXICALI-MEXICO	25.5	6.13
<b>PRODUCTOS AGRICOLAS VARIOS</b>			
55	PUEBLA-MEXICO	96	23.08
56	PUEBLA-COATZACOALCOS	44.4	10.67
57	MOCHIS-MEXICO	29.4	7.67

Flujo de carga total = 925,08 furgón/semana

Es notable que del nodo México, salen las principales trayectorias de -  
carros vacíos al resto de la República, esto da una idea del peso rela-  
tivo de esta zona como consumidor de productos agrícolas. Cabe  
señalar, que el tramo Veracruz-Tampico será el que alimente de carros  
vacíos al Puerto de Tampico.

También es importante señalar que los más grandes consumidores de  
carros vacíos que son Veracruz y Matamoros, son alimentados en gran  
parte por la zona de México, mientras otra gran zona consumidora  
de carros vacíos que es la de Hermosillo, será alimentada casi exclu-  
sivamente por Torreón. Podemos ver que las otras ciudades contribuyen  
de una manera muy pequeña al árbol general de carros vacíos.

#### 5.4 RUTAS DE CARGA DOMINANTES

Al analizar los datos de la Tabla 5.2, se encuentra que el 70% de  
la carga agrícola total se mueve en solamente once rutas cuando  
se maneja la carga de manera indistinta.

En la Tabla 5.5 se dan las trayectorias óptimas para esas rutas  
propuestas. Estas las llamaremos rutas de carga dominantes y haremos  
el análisis del problema tomándolas únicamente en cuenta pensando  
que son las rutas de carga que son más comunmente transitadas a  
lo largo del tiempo en la red.

En la Figura 5.3 se pueden ver las rutas de carga dominantes.

#### 5.5 ANALISIS POR CARROS VACIOS CON RUTAS DE CARGA DOMINANTES

Al resolver el árbol de carros vacíos asociado a las rutas dominantes  
(Figura 5.4), encontramos que es muy similar al obtenido con el

análisis de rutas de carga general, excepto porque el tramo México-Irapua to es sustituido por el tramo Torreón-Monterrey en el árbol.

El flujo por kilómetro vacío total será:

$$\text{Flujo vacío} = 532,669 \frac{\text{Furgón km}}{\text{x km semana}}$$

mientras que el flujo cargado por kilómetro será:

$$\text{Flujo vacío} = 566,982 \frac{\text{Furgón km}}{\text{x km semana}}$$

Con lo que se observa que el porcentaje óptimo de tiempo vacío de un carro en esta red es de 48%.

#### 5.6 ANALISIS DE SENSIBILIDAD PARA CARGAS DOMINANTES

La estructura lineal del problema permite que a cambios pequeños en las cargas propuestas no haya ningún cambio en el árbol de carros vacíos de la red, de hecho se definen intervalos en la variación de cargas individuales para los cuales no hay un cambio en la base de la solución.

El análisis de sensibilidad es una técnica común en los problemas de programación lineal y es fácil de aplicar conociendo la solución óptima del problema.

En la Tabla 5.6 se dan los resultados del análisis de sensibilidad. Es interesante que las rutas Hermosillo-México y Mochis-México tengan un nivel mínimo de carga a transportar, para justificar la distribución de tráfico vacío en la red.

Por otro lado los límites superiores de carga son en general grandes cuando menos del doble de la carga propuesta, excepto en el caso de la ruta Matamoros-Torreón.

Por lo que podemos esperar que las rutas de carros vacíos de las Figuras 5.2 y 5.4 sean los casos más comunes en el enrutamiento de furgones vacíos.

### 5.7 EXPRESION DEL TRAFICO EN LA RED COMO CICLOS INDIVIDUALES DE LOS CARROS

Podemos pensar ahora, en qué movimientos haría un carro individual circulando sobre la red, es decir, dónde sería cargado, dónde sería vaciado, por dónde sería llevado vacío.

El movimiento total en la red dado por las Figuras 5.3 y 5.4, puede ser descompuesto en once ciclos individuales de carros mostrados en la Figura 5.5 y siguientes.

El número de furgones en movimiento necesarios para atender cada movimiento en ciclos, se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$\left( \begin{array}{l} \text{Número de unidades} \\ \text{en movimiento en} \\ \text{el ciclo} \end{array} \right) = \frac{\left( \begin{array}{l} \text{Flujo en el ciclo} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{l} \text{Longitud del} \\ \text{ciclo} \end{array} \right)}{\left( \begin{array}{l} \text{Velocidad media en la red} \end{array} \right)}$$

Se supone una velocidad media de 2.5km/hora, o bien, 420 km/semana, con lo cual se obtiene que el sistema es satisfecho con 2,600 unidades en movimiento.

El ciclo individual que requiere más unidades en movimiento, es el 5, que empieza con carros cargados en Hermosillo con destino a México,

TABLA 5.3

PRODUCCIONES NETAS EN LOS NUDOS  
(furgones/semana).

Nodo	Forrajes	Frijol	Maíz	Sorgo	Oleaginosas	Trigo	Productos Agrícolas Varios	Producción Neta
1 MEXICO	1.87	-25.10	-205.32	- 76.25	-47.93	-94.85	-125.40	-572.97
2 PUEBLA			- 18.06	-111.61	-11.18	- 7.52	140.40	- 7.97
3 CORDOBA				- 5.55	- 4.18			- 9.73
4 COATZACOALCOS			7.17	7.07	21.25		- 44.40	- 9.07
5 VERACRUZ		6.63	135.82	86.37	34.14			262.96
6 TAMPICO			6.37	30.31	22.70			59.38
7 SAN LUIS POTOSI			16.42	4.88				21.36
8 IRAPUATO	- 4.47			- 13.81				- 18.28
9 AGUASCALIENTES				- 8.18				- 8.18
10 GUADALAJARA	- 8.29	18.56	0.14	- 33.97	- 0.15	6.03		- 17.68
11 MOCHIS				4.98	7.67	22.52	29.46	64.57
12 TORREON	- 3.41		4.62	- 69.59		-24.38		- 92.76
13 MONTERREY	-13.53		- 8.29	- 7.36	-13.49	-12.11		- 54.78
14 MATAMOROS			61.13	192.71				253.84
15 HERMOSILLO	27.83				- 8.83	99.95		118.95
16 MEXICALI						10.36		10.36

TABLA 5.3

PRODUCCIONES NETAS EN LOS MUDOS  
(furgones/semana)

Nodo	Forrajes	Frijol	Maíz	Sorgo	Oleaginosas	Trigo	Productos Agrícolas Varios	Producción Neta
1 MEXICO	1.87	-25.10	-205.32	- 76.25	-47.93	-94.85	-125.40	-572.97
2 PUEBLA			- 18.06	-111.61	-11.18	- 7.52	140.40	- 7.97
3 CORDOBA				- 5.55	- 4.18			- 9.73
4 COATZACOALCOS			7.17	7.07	21.25		- 44.40	- 9.07
5 VERACRUZ		6.63	135.82	86.37	34.14			262.96
6 TAMPICO			6.37	30.31	22.70			59.38
7 SAN LUIS POTOSI			16.42	4.88				21.36
8 IRAPUATO	- 4.47			- 13.81				- 18.28
9 AGUASCALIENTES				- 8.18				- 8.18
10 GUADALAJARA	- 8.29	18.56	0.14	- 33.97	- 0.15	6.03		- 17.68
11 MOCHIS				4.98	7.67	22.52	29.46	64.57
12 TORREON	- 3.41		4.62	- 69.59		-24.38		- 92.76
13 MONTERREY	-13.53		- 8.29	- 7.36	-13.49	-12.11		- 54.78
14 MATAMOROS			61.13	192.71				253.84
15 HERMOSILLO	27.83				- 8.83	99.95		118.95
16 MEXICALI						10.36		10.36

TABLA 5.4

## RUTAS DE CARGA AGRICOLA DOMINANTES EN 1991

(70% de la carga agrícola total)

	Ruta (Origen-Destino)				Carga (Furgones/Semana)
1	Veracruz-México	6.63	+ 121.01	+ 12.31	+ 22.96 = 162.91
		Frijol	Maiz	Sorgo	Oleag.
2	Matamoros-Mexico	$\frac{47.72}{\text{Maiz}}$		+ 53.41	= 101.13
				Sorgo	
3	Veracruz-Puebla	14.81	+ 68.51	+ 11.18	= 94.50
		Maiz	Sorgo	Oleag.	
4	Matamoros-Torreón			69.59	= 69.59
				Sorgo	
5	Hermosillo-México	4.69	+ 66.17		= 64.86
		Forraje	Trigo		
6	Matamoros-Puebla			30.19	= 30.19
				Sórgo	
7	Mochis-México	22.52	+ 7.07		= 29.59
		Trigo	PAV		
8	Hermosillo-Torreón	3.41	+ 24.38		= 27.79
		Forraje	Trigo		
9	Matamoros-Guadalajara	5.12	+ 21.01		= 26.13
		Maiz	Sorgo		
10	Puebla-México			23.08	= 23.08
				PAV	
11	Tampico-Irapuato			18	= 18
				Sorgo	

TABLA 5.5

## TRAYECTORIAS OPTIMAS PARA LAS RUTAS DE CARGA DOMINANTE

1	Ruta Veracruz-México Veracruz-Córdoba-Puebla-México	Longitud 330 km
2	Ruta Matamoros-México Matamoros-Monterrey-San Luis Potosí-México	Longitud 1279 km
3	Ruta Veracruz-Puebla Veracruz-Córdoba-Puebla	Longitud 190 km
4	Ruta Matamoros-Torreón Matamoros-Monterrey-Torreón	Longitud 685 km
5	Ruta Hermosillo-México Hermosillo-Mochis-Guadalajara-México	Longitud 2160 km
6	Ruta Matamoros-Puebla Matamoros-Monterrey-San Luis Potosí-México-Puebla	Longitud 1419 km
7	Ruta Mochis-México Mochis-Guadalajara-Irapuato-México	Longitud 1574 km
8	Ruta Hermosillo-Torreón Hermosillo-Mochis-Torreón	Longitud 1466 km
9	Ruta Matamoros-Guadalajara Matamoros-Monterrey-San Luis Potosí-Irapuato-Guadalajara	Longitud 1300 km
10	Ruta Puebla-México Puebla-México	Longitud 140 km
11	Ruta Tampico-Irapuato Tampico-San Luis Potosí-Irapuato	Longitud 600 km

TABLA 5.6

## ANALISIS DE SENSIBILIDAD PARA LAS RUTAS DOMINANTES

	Carga Propuesta (Purgón/Semana)	Carga Mínima	Carga Máxima
1 Veracruz-México	162.91	0	336.74
2 Veracruz-Puebla	94.50	0	369.91
3 Matamoros-Torreón	69.59	0	88.86
4 Hermosillo-México	64.86	45.59	142.97
5 Matamoros-México	101.13	0	308.90
6 Hermosillo-Torreón	27.79	0	105.90
7 Puebla-México	23.08	0	196.88
8 Matamoros-Puebla	30.19	0	237.96
9 Matamoros-Guadaluajara	26.13	0	45.40
10 Mochis-México	29.59	10.32	107.70
11 Tampico-Irapuato	18.00	0	36.00

donde son descargados y enviados vacíos a Matamoros donde son vueltos a cargar con destino a Torreón, donde son descargados y enviados a Hermosillo.

El modelo no implica que literalmente el carro que llega a México sea descargado y enviado a Matamoros, sino más bien, es similar a una carrera de relevos en que cuando llega de Hermosillo un carro cargado, un carro vacío, es enviado a Matamoros, mientras que el carro que llegó de Hermosillo, es descargado y pasa a una cola de carros vacíos que serán enviados a Matamoros.

#### 5.8 CONCLUSIONES AL CAPITULO

El modelo de la red se ha simplificado lo más posible, así como los datos de carga se han escogido con el criterio arbitrario de más 15,000 ton/año en 1986; sin embargo, estas simplificaciones no impiden que el modelo refleje el comportamiento de la red ferroviaria nacional.

Se ha obtenido un porcentaje de 48% vacío en los flujos en la red, el manejo más ineficiente sobre la red implica un porcentaje vacío de 50%. Este 2% de ahorro implica unos 50 carros menos en el sistema, lo que es un ahorro de aproximadamente tres millones de dólares.

Este ahorro podría ser mejorado; sin embargo, las dificultades en este ejemplo son:

1. La red necesita más redundancia.
2. En el modelo los nodos están muy polarizados, o son exclusivamente productores o exclusivamente consumidores; cabe recordar que la Ciudad de México es el principal consumidor de productos agrícolas y que los carros que llegan a ella saldrán en general vacíos. Habría que superarlas para lograr un manejo más eficiente en la red.

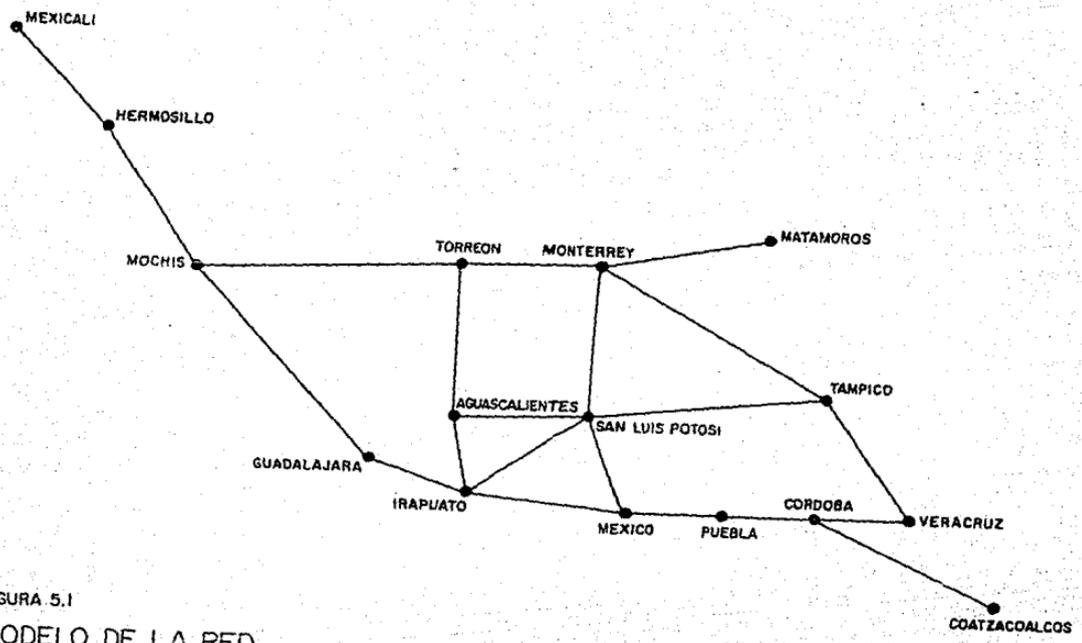


FIGURA 5.1  
 MODELO DE LA RED

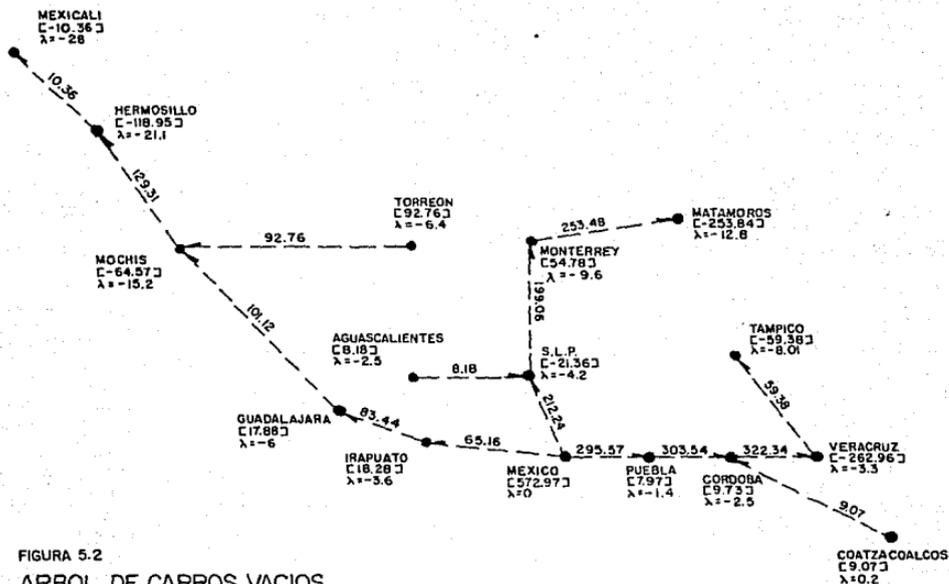


FIGURA 5.2  
 ARBOL DE CARROS VACIOS  
 PARA RUTAS DE CARGA PROPUESTAS (TABLAS 5.2 y 5.3)

Unidades furgon/semana

ENTRE CORCHETES ESTA LA PRODUCCION NETA CON EL SIGNO CAMBIADO  
 VARIABLES DUALES  $\lambda$  EXPRESADAS EN CENTENARES DE KILOMETROS

● MEXICALI

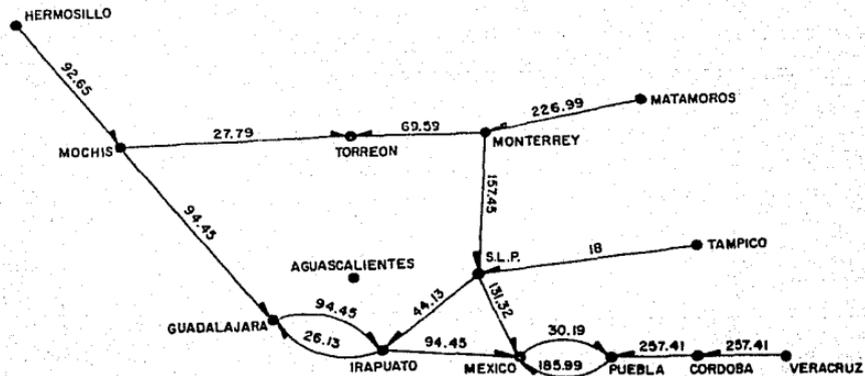


FIGURA 5.3  
RUTAS DE CARGA DOMINANTES

Unidades furgon/semana

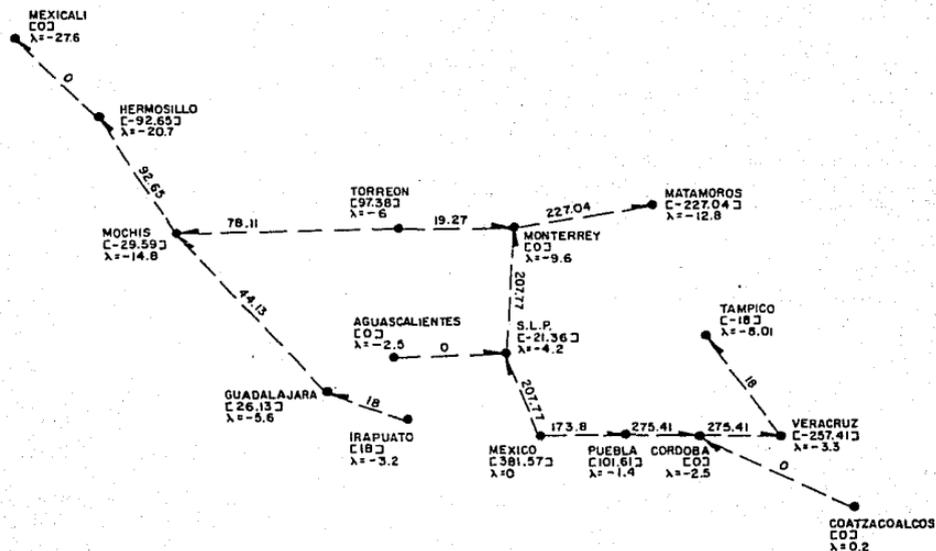


FIGURA 5.4  
 ARBOL DE CARROS VACIOS  
 PARA RUTAS DE CARGA DOMINANTES

Unidades furgon/semana  
 ENTRE CORCHETES SE ENCUENTRA -g  
 λ EXPRESADA EN CENTENARES DE KILOMETROS

—— Cargado  
 ---- Vacío



FIGURA 5.5

CICLO 1

Longitud 660 Km.  
 Flujo 162.91  $\frac{\text{furgón}}{\text{semana}}$   
 U. M. 256 furgones  
 Rutas de carga  
 Veracruz - México

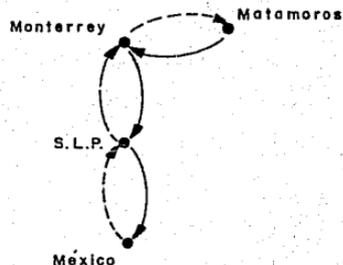


FIGURA 5.6

CICLO 2

Longitud 2560 Km.  
 Flujo 101.13  $\frac{\text{furgón}}{\text{semana}}$   
 U. M. 616.40 furgones  
 Rutas de carga  
 Matamoros - México



FIGURA 5.7

CICLO 3

Longitud 340 Km.  
 Flujo 94.5  $\frac{\text{furgón}}{\text{semana}}$   
 U. M. 85.44 furgones  
 Rutas de carga  
 Veracruz - Puebla

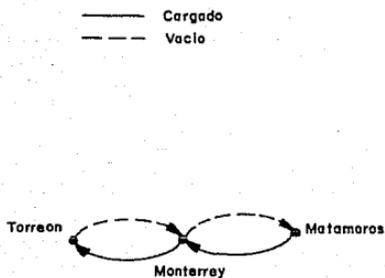


FIGURA 5.8

CICLO 4

Longitud 680 km.

Flujo  $19.27 \frac{\text{furgón}}{\text{semana}}$

U.M. 31.2 furgones

Rutas de carga

Matamoros - Torreón

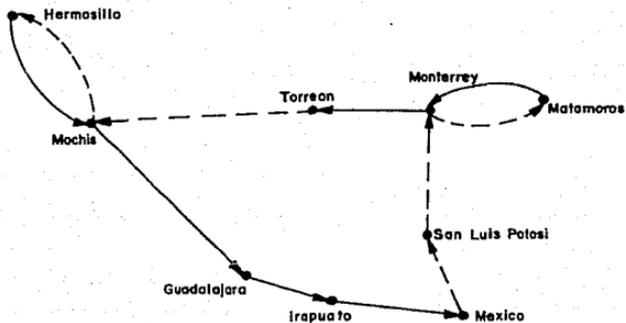


FIGURA 5.9

CICLO 5

Longitud 5536 Km.

Flujo  $50.32 \frac{\text{furgón}}{\text{semana}}$

U.M. 663.28 furgones

Rutas de carga

Matamoros - Torreón

Hermosillo - México

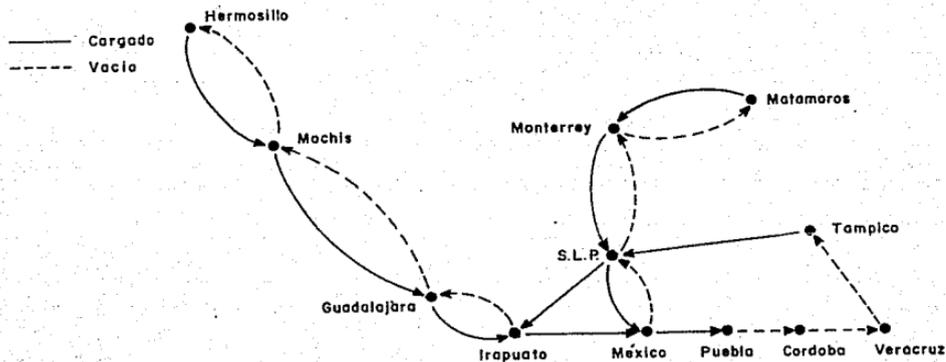


FIGURA 5.10

CICLO 6

Longitud 7 819 Km.  
 Flujo 7.11  $\frac{\text{furgón}}{\text{semana}}$   
 U. M. 132.40 furgones  
 Rutas de carga  
 Hermosillo - Mexico  
 Tampico - Irapuato  
 Matamoros - Puebla

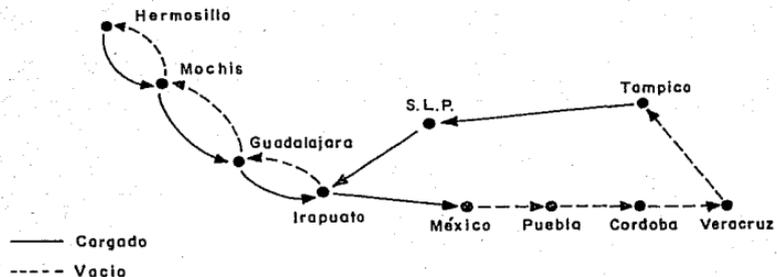


FIGURA 5.11

CICLO 7

Longitud 5 261 Km.

Flujo 7.43  $\frac{\text{furgón}}{\text{semana}}$

U. M. 93.04 furgones

Rutas de carga

Tampico - Irapuato

Hermosillo - México

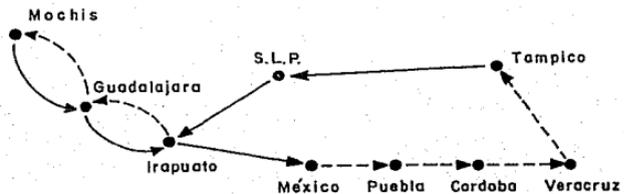


FIGURA 5.12

CICLO 8

Longitud 4 089 Km.

Flujo 3.46  $\frac{\text{furgón}}{\text{semana}}$

U. M. 33.68 furgones

Rutas de carga

Tampico - Irapuato

Mochis - México

—— Cargado  
 - - - - Vacío

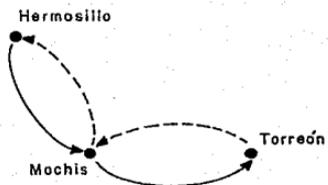


FIGURA 5.13

CICLO 9

Longitud 2932 Km.

Flujo 27.79  $\frac{\text{furgón}}{\text{semana}}$

U. M. 194.00 furgones

Ruta de carga

Hermosillo - Torreón

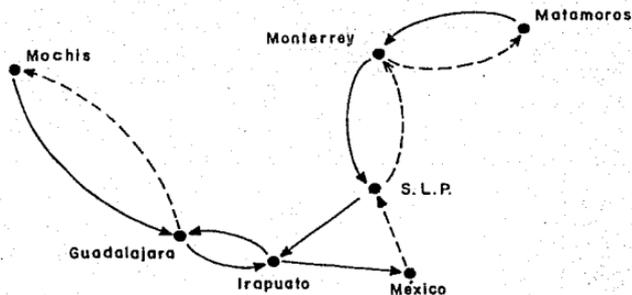


FIGURA 5.14

CICLO 10

Longitud 5019 Km.

Flujo 26.13  $\frac{\text{furgón}}{\text{semana}}$

U. M. 312.24 furgones

Rutas de carga

Matamoros - Guadalajara

Mochis - México

— Cargado  
 - - - Vacío

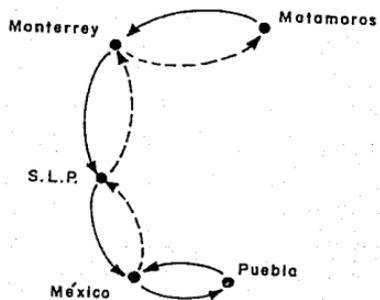


FIGURA 5.15

CICLO 11

Longitud 2 838 Km.  
 Flujo 23.08  $\frac{\text{furgón}}{\text{semana}}$   
 U. M. 155.92 furgones  
 Rutas de carga  
 Matamoras - Puebla  
 Puebla - México

## CAPITULO VI

### CONCLUSIONES

#### 6.0 EXTENSION DEL MODELO PARA TOMAR EN CUENTA LA CAPACIDAD DE FLUJO DE LOS TRAMOS

Evaluar la capacidad de flujo de un tramo de vía, resulta un problema complicado en el transporte ferrocarrilero, pues la capacidad de dicho tramo dependerá de los siguientes factores:

- Número y longitud de los laderos
- Señalización
- Pendiente y curvatura del tramo
- Número de vías (doble o sencilla)

Además, dicha capacidad podría ser función del flujo en una u otra dirección en el tramo, e incluso, ser no lineal.

En el capítulo de transportes del Plan 89-94 de FNM se propone evaluar la capacidad potencial de un tramo de vía sencilla con la siguiente fórmula:

$$C P = \frac{F E \cdot 24 \cdot 60 \cdot 40}{T + t} \quad (6.0.1)$$

donde:

CP = capacidad potencial del tramo en carros por día

FE = factor de eficiencia del tramo (0.8 con control de tráfico centralizado y 0.69 en cualquier otro caso)

24 = horas del día

60 = minutos por hora

40 = número medio de carros por tren de carga

T = tiempo de tránsito (minutos)

t = tiempo adicional por encuentros (minutos)

y se propone como capacidad real del tramo 2/3 de la capacidad potencial.

La modificación al modelo introducirá un nuevo juego de restricciones - del tipo:

$$C(\alpha, \beta) \geq \varphi(\alpha, \beta) + \varphi(\beta, \alpha) \quad (6.0.2)$$

donde:

$C(\alpha, \beta)$  = capacidad del tramo entre  $\alpha$  y  $\beta$ , es decir, que la capacidad - total del tramo entre  $\alpha$  y  $\beta$  debe ser superior al flujo en los dos sentidos.

Si definimos como  $\bar{C}$  al vector de capacidades en la red, las restricciones por capacidad en el modelo se formularán de la siguiente manera:

$$\bar{C} \geq \bar{E} \bar{\varphi} \quad (6.0.3)$$

donde  $\bar{\varphi}$  es el flujo total en la red definido en 3.6 y  $\bar{E}$  es una matriz - tal que hace la relación 6.1.2, es decir, suma los flujos en ambos sentidos.

El modelo 4.2.1 del problema monocarro quedará tomando en cuenta las - restricciones 6.0.3 de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} \min \quad \bar{D}^T \bar{Y} \\ \bar{M} \bar{g} \leq \bar{C} \\ \bar{M} \bar{g} - \bar{N} \bar{h} - \bar{Y} = 0 \\ \bar{P} \bar{h} = \bar{R} \\ \bar{g} \text{ irrestricta, } \bar{h} \geq 0, \bar{Y} \geq 0 \end{array} \quad (6.0.4)$$

un proceso de análisis semejante al de apartado 4.2 dejaría este modelo en la forma:

$$\begin{array}{l}
 \min \bar{D}^T \bar{Y} \\
 \bar{N} \bar{h} + \bar{Y} \leq \bar{C} \\
 \bar{L}^T \bar{Y} = -\bar{q} \\
 \bar{P} \bar{h} = \bar{R} \\
 \bar{h} \geq 0, \bar{Y} \geq 0
 \end{array}
 \quad (6.0.5)$$

En este nuevo modelo se conservaría la estructura árbol para los carros vacíos, aunque no necesariamente coincide con la solución óptima del problema sin restricciones.

Igualmente es difícil determinar qué trayectorias seguirán los carros cargados, pues puede haber necesidad de mandarlos por trayectorias no óptimas, a fin de evitar congestionar tramos.

Desde luego este problema no es separable y hay que usar métodos convencionales para problemas de programación lineal.

En el caso del problema multicarro 4.5.1 las restricciones de capacidad implican que el modelo tome la forma:

$$\begin{array}{l}
 \min \sum_{K=1}^r \bar{D}^T \bar{Y}^K \\
 \sum_{K=1}^r \bar{M}^K \bar{g}^K \leq \bar{C} \\
 \bar{M}^K \bar{g}^K - \bar{N}^K \bar{h}^K - \bar{Y}^K = 0 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad K=1, \dots, r \\
 \sum_{K=1}^r \bar{P}^K \bar{h}^K = \bar{R} \\
 \bar{g}^K \text{ irrestricto} \\
 \bar{h}^K \geq 0 \quad \bar{Y}^K \geq 0 \quad K=1, \dots, r
 \end{array}
 \quad (6.0.6)$$

Este problema no tendría simplificaciones mayores y sería necesario resolverlo directamente en una computadora.

Cabe señalar, que si estos problemas fueran infactibles (es decir, que no tuvieran solución), implicaría que la red es inadecuada para satisfacer las demandas de transporte y debe ser ampliada.

### 6.1 ANALISIS DE LAS ESTACIONES Y PATIOS

El modelo presentado en esta Tesis, está fomulado sobre la hipótesis de régimen establecido en la red de transporte.

Esta hipótesis se funda sobre una posible analogía entre las redes de transporte y las redes hidráulicas, esta analogía junto con la hipótesis de régimen establecido, se puede ampliar al estudio de patios y estaciones, considerando los patios análogos a "tanques de almacenamiento".

Si bien es cierto que esta analogía es un tanto cruda, no por ello deja de ser conceptualmente correcta.

El modelo que se ha presentado en esta Tesis, está basado como ya se ha dicho antes, en pensar que el flujo de equipo de transporte sobre la red, es la suma de flujos cíclicos individuales de las unidades de transporte. Ahora bien, la hipótesis de régimen establecido implica que cuando un carro cargado (o vacío), llega a una estación para ser vaciado (o cargado), otro carro de las mismas características, saldrá de la estación.

El carro recién llegado será vaciado y pasará a una cola de carros vacíos del mismo tipo, en espera de continuar con su ciclo.

El siguiente paso en el desarrollo del modelo deberá dimensionar el volumen de equipo de transporte que debe quedar en los patios, vacío en espera de ser utilizado o como inventario de seguridad.

Este volumen de equipo será una función de:

- Tiempo de carga y descarga
- Dimensiones de los flujos de entrada y salida de los patios
- Costo por tener equipo parado
- Inventarios de seguridad para cubrir demandas imprevistas
- Políticas de control de carros dentro de los patios

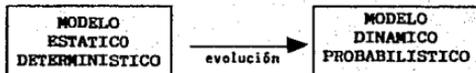
Las técnicas modernas de la teoría de colas de inventarios y en general las teorías del almacenaje, son las herramientas que actualmente permiten manejar estos problemas y encontrarles soluciones óptimas.

Una correcta aplicación de estas técnicas, permitirá dimensionar adecuadamente estaciones y patios, y establecer políticas de operación que podrían significar ahorros sustanciales en la operación de la red.

## 6.2 EXTENSIONES DEL MODELO

El siguiente paso en el desarrollo del modelo, es la inclusión de factores aleatorios y de las condiciones dinámicas de la red de transporte.

Gráficamente:



Se considerarán factores aleatorios en:

- Variaciones en la demanda de transporte
- Variaciones en la velocidad de movimiento
- Variaciones en tiempos de carga y descarga.

Las consideraciones dinámicas se dan al rechazar la hipótesis de régimen establecido y al incluir las variaciones en la demanda.

Esta llevaría a convertir el modelo en uno que interactuará de manera dinámica con la red, en el que cada período de tiempo se le alimentarán datos y proporcionará un programa de movimientos para un nuevo período de tiempo.

Un modelo de este tipo se convertirá en el auxiliar primario para los encargados de la operación de la red y permitirá que ésta opere de manera óptima.

### 6.3 CONCLUSIONES GLOBALES

El desarrollo del país exigirá una mejor estructura del transporte para que sea lo más económico y eficiente posible. Si como ya se dijo antes, el sistema ferroviario es una de los grandes sistemas de transporte en la nación; entonces buscar su desarrollo óptimo debe ser una prioridad.

El uso de técnicas de la ingeniería de sistemas y en especial el empleo de modelos de simulación y optimización, son herramientas que bien utilizadas permitirán a las personas responsables tomar mejores decisiones sobre el desarrollo futuro y la operación del Sistema Ferroviario.

En mi opinión, la ingeniería de sistemas será especialmente útil para proporcionar políticas de operación que sean más económicas y que sean holísticas, (viendo cada parte del sistema en función del todo).

Por otro lado, debe considerarse que la redundancia de la red es un factor muy importante para su operación global, porque proporciona rutas alternativas a tramos congestionados y porque la hace menos sensible a fallas en algunos de sus tramos.

En el futuro la planeación de redes de transporte puede ir asociada a modelos detallados de la operación y su impacto en la vida económica y social del país.

La conclusión final a la que llego, es que la modelación matemática de redes de transporte debe ser una prioridad para los que toman decisiones sobre su desarrollo y operación, puesto que la complejidad de las mismas, es ya en nuestro país, tal que, va más allá de los enfoques tradicionales, y es también muy grande el impacto económico que tendrá el correcto funcionamiento de éstas sobre la vida nacional.

## A P E N D I C E

### LAS PROPIEDADES DE LOS PROGRAMAS LINEALES

Se llama programa lineal a un problema de naturaleza:

$$\begin{aligned} \min z &= \bar{c} \bar{x} \\ \bar{A} \bar{x} &= \bar{b} \\ \bar{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

donde:

- $\bar{x}$  vector columnas de n variables
- $\bar{c}$  vector fila de n componentes
- $\bar{A}$  matriz de mxn
- $\bar{b}$  vector columna de m componentes

Se llama el programa lineal dual asociado al anterior al problema

$$\begin{aligned} \max w &= \bar{\lambda}^t \bar{b} \\ \bar{\lambda}^t \bar{A} &\leq \bar{c} \\ \bar{\lambda} &\text{ irrestricto} \end{aligned}$$

donde:

$\bar{\lambda}$  es un vector de m variables llamadas variables duales.

Como resultados más importantes de la teoría de la programación lineal, tenemos los siguientes:

1. El dual del dual es el primal.
2. Si  $\bar{x}$  y  $\bar{\lambda}$  son soluciones del programa primal y del programa dual, simultáneamente se cumplirá:

$$\bar{c}^t x \leq \bar{\lambda}^t b$$

3. La solución óptima de un programa lineal es siempre una solución básica del sistema

$$\begin{aligned} \bar{A} \bar{x} &= \bar{b} \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

cuando es única, o bien es la coraza convexa generada por las soluciones básicas óptimas.

4. (Existencia de soluciones). El programa primal tiene una solución óptima finita, si y solo si, el programa dual tiene solución óptima finita y además

$$\bar{c}^t x^* = \bar{\lambda}^{*t} b$$

5. (Holgura complementaria). En la solución óptima de los programas primal y dual se cumplirá siempre:

$$\begin{aligned} \lambda_i (\bar{a}_i^t \bar{x}^* - b) &= 0 & i &= 1, \dots, m \\ x_j (\bar{\lambda}^{*t} \bar{a}^j - c) &= 0 & j &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

donde:

$\bar{a}_i$  = i-ésimo vector fila de A.

$\bar{a}^j$  = j-ésimo vector columna de A.

## BIBLIOGRAFIA

- Bazaraa M., Jarvis J., Programación Lineal y Flujo en Redes.  
Limusa, México 1984
- Berge C., Graphs and Hypengraphs. North Holland, Londres 1973
- Dantzig G., Linear Programing and Extension. Princeton University  
Press, Princeton 1963
- Ferrocarriles Nacionales de México. Plan de Largo Plazo y Programa de  
los Ferrocarriles Nacionales de México. FNM, México 1988
- Ferrocarriles Nacionales de México. Series Estadísticas 1930-1986.  
FNM, México 1988
- Jauffred F., Moreno A., Acosta J. Métodos de Optimización. Represen-  
taciones y Servicios de Ingeniería. México 1970
- Kaufmann A., Introducción a la Combinatoria y sus Aplicaciones.  
CECSA, Barcelona 1971
- Potts R., Oliver R., Flows in Transpsortation Networks. Volumen 90,  
Serie "Mathematics in Science and Engineering".  
Academic Press, New York 1972
- Rao M., Zionts S., "Allocation of Transportation Units to Alternative  
Trips", Journal of the Operations Research Society of America.  
Volumen 16, Número 1, 1968
- Togno F., Ferrocarriles. RSI, México 1982