1 2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES

"ARAGON"

APUNTES PARA LA MATERIA DE ESTATICA

TESIS

Que para obtener el Título de:

INGENIERO CIVIL

Presenta:

EVERARDO ALMANZA LOPEZ

México, D.F. 1990

INDICE

		Página
I.	Introducción	6
II.	Fundamentos de la Mecánica Clásica	9
II.1	Definiciones de Mecánica, Estática, Cinemática y Dinámica	9
II.2	Modelos de Cuerpos	12
II.3	Leyes de Newton	15
3.1	Primera Ley de Newton	15
3.2	Segunda Ley de Newton	16
3.3	Tercera Ley de Newton	16
3.4	Ley de la Gravitación Universal	17
III.	Sistemas de Unidades	23
III.1	Definiciones de Unidades	23
1.1	Sistemas de Unidades	24
III.2	Sistemas de Unidades Absolutos y Gravitacionales	24
2.1	Sistema Internacional de Unidades	27
III.3	Cantidades Escalares y Vectoriales en la Mecánica	32
3.1	Sus Unidades Fundamentales en los Sistemas Gravitacionales	36
III.4	Cantidades Dimensionales	40
4.1	Ecuaciones Dimensionales	45
4.2	Transformaciones de Expresiones	49
4.3	Traducción de Fórmulas	54
IV.	Conceptos Básicos de la Estática	60
IV.1	Postulado de Stevinus	61
1.1	Concepto de Resultante de un Sistema de Fuerzas Concurrentes	69
IV.2	Principio de la Acción y la Reacción	71
IV.3	Principio de Transmisibilidad	72
IV.4	Principio de la Superposición de Causas y Efectos	73

IV.5 Algebra de Vectores 73
5.1 Representación de Vectores 74
5.2 Vector de Posición 74
5.3 Multiplicación de un Vector por un Escalar 75
5.4 Cosenos Directores 75
5.5 Vectores Unitarios 76
5.6 Producto Vectorial 80
5.7 Producto Punto 82
IV.6 Composición y Descomposición de Fuerzas 84
6.1 Composición de Fuerzas 84
6.2 Descomposición de Fuerzas 92
6.3 Vector Equipolente de una Fuerza 102
IV.7 Momento de una Fuerza con Respecto a un Punto. Su Definición Matemática 102
7.1 Momento de una Fuerza Respecto a un Punto 102
7.2 Definición Matemática 103
7.3 Interpretación Física 103
7.4 Condición Necesaria y Suficiente para que el Momento sea Nulo 108
IV.8 Coordenadas Vectoriales de una Fuerza 109
IV.9 Momento de una Fuerza con Respecto a un Eje 113
9.1 Condición Necesaria y Suficiente para que el Momento de una Fuerza Respecto a un Eje sea Nulo 117

V. Estudio de los Sistemas de Fuerzas 119
V.1 Coordenadas Vectoriales del Sistema de Fuerzas. Equivalencia entre Sistemas de Fuerzas y sus Condiciones Determinantes 119
1.1 Coordenadas Vectoriales del Sistema de Fuerzas 119
1.2 Equivalencia entre Sistemas de Fuerzas y sus Condiciones Determinantes 122
V.2 Los Sistemas Irreductibles 124

2.1 Una Fuerza 124
2.2 Un Par 125
2.3 Una Fuerza y un Par no Coplanos 125
2.4 Equilibrio 125
V.3 Reducción de un Sistema de Fuerzas a una Sola Fuerza 125
3.1 Teorema de los Momentos 127
3.2 Eje Central como Soporte de la Fuerza Resultante 127
3.3 Configuraciones de los Sistemas que Admiten Reducción a una Sola Fuerza 131
V.4 Par de Fuerzas 134
4.1 Momento de un Par 134
4.2 Propiedades de los Pares 135
4.3 Características de los Pares 136
4.4 El Vector Par 138
4.5 Composición de Pares de Fuerzas 139
4.6 Translación de una Fuerza Paralelamente a ella Misma 142
4.7 Par de Transporte 144
4.8 Sistema de Pares y Fuerzas que se Reduce a un Par 145
V.5 Par y Fuerza no Coplanos 145

VI. Equilibrio de los Sistemas de Fuerzas 147
VI.1 Fricción 148
1.1 Fricción Estática 148
1.2 Fricción Dinámica o Cinética 150
1.3 Leyes de Fricción en Seco 151
1.4 Angulo de Reposo 152
1.5 Desventajas y Ventajas de la Fricción 153
VI.2 Tipos de Apoyo. Diagrama de Cuerpo Libre 154
2.1 Apoyo Mecánico 154
2.2 Isostaticidad e Hiperestaticidad 157
2.3 Diagrama de Cuerpo Libre 157
VI.3 El Equilibrio de los Sistemas de Fuerzas 164

3.1 Equilibrio de una Partícula 164
3.2 Equilibrio de un Sistema de Partículas 164
3.3 Equilibrio de un Cuerpo Rígido 165
3.4 Ecuaciones Vectoriales para el Caso General del Equilibrio 165
3.5 Ecuaciones Escalares Cartesianas para el Caso General del Equilibrio 165
VI.4 Equilibrio de Sistemas Planos: Sus Ecuaciones Escalares Determinantes 166
4.1 Sistemas de Fuerzas Colineales en el Plano ... 166
4.2 Sistemas de Fuerzas Concurrentes en el Plano . 166
4.3 Sistemas de Fuerzas Paralelas en el Plano 167
4.4 Sistemas de Fuerzas Generales en el Plano 167
VI.5 Equilibrio de Sistemas Espaciales: Sus Ecuaciones Escalares Determinantes 167
5.1 Sistemas Colineales de Fuerzas en el Espacio . 167
5.2 Sistemas Concurrentes de Fuerzas en el Espacio 168
5.3 Sistemas de Fuerzas Paralelas en el Espacio .. 168
5.4 Sistema General de Fuerzas en el Espacio 168

VII. Momentos Estáticos. Centros de Gravedad y de Masa, Centroides de Volumenes y Areas Planas . 178
VII.1 Centro de un Sistema de Fuerzas Paralelas 178
VII.2 Centros de Gravedad y de Masa de Cuerpos 182
2.1 Centro de Gravedad 182
2.2 Ley de Simetría 183
2.3 Centro de Masa de un Cuerpo 183
VII.3 Momentos Estáticos de Volumen y Centro de Volumen de un Cuerpo 184
3.1 Momento Estático de un Volumen 184
3.2 Centro de Volumen de un Cuerpo 185
3.3 Volumenes Compuestos 196
VII.4 Momentos Estáticos y Centroides de Areas Planas 203
4.1 Centroides de Areas Planas 203
4.2 Momento Estático de un Area 204

4.3 Ejes de Simetría 204
4.4 Ejes Centroidales 205
4.5 Areas Compuestas 210
VII.5 Momentos Estáticos de Líneas y Centros de Líneas .. 216
5.1 Centroide de una Línea 216
5.2 Momentos Estáticos de Líneas 217
5.3 Centroide de Líneas Compuestas 219

VIII. Momentos de Inercia de Areas Planas 223
VIII.1 Concepto Dinámico y Concepto Matemático de un Momento de Inercia 223
1.1 Concepto Dinámico 223
1.2 Concepto Matemático 224
VIII.2 Momento de Inercia o de Segundo Orden de Areas Planas 224
2.1 Momento Polar de Inercia 227
2.2 Teorema de los Ejes Paralelos o de Steiner ... 227
2.3 Radio de Giro 229
2.4 Productos de Inercia 229
VIII.3 Momentos de Inercia Principales 236
3.1 Ejes Principales 236
3.2 Momentos Principales de Inercia 237
VIII.4 Aplicaciones a Figuras Compuestas 237

IX. Conclusiones 244

Referencias Bibliográficas 246

CAPITULO I
INTRODUCCION.

En los presentes apuntes se ha pretendido cubrir en su totalidad el temario del curso de Estática de la Carrera de Ingeniero Civil dentro de la Escuela Nacional de Estudios Profesionales Aragón, para llegar así a cubrir el objetivo del curso, que está enunciado de la siguiente forma:

"Propiciar en el estudiante el dominio de los principios fundamentales de la Mecánica Clásica, haciendo enfásis en el tratamiento vectorial de los sistemas de fuerzas y la solución de problemas isostáticos de equilibrio, así como dotarlo de los conocimientos que le permiten resolver problemas de primeros momentos, centroides y momentos de inercia de cuerpos geométricos y áreas planas".

Siendo el temario de la materia tan extenso, los temas se encuentran en varios libros, por lo que en este trabajo se ha intentado hacer una recopilación, de casi todos los libros que la bibliografía recomienda en el temario, para así hacer más fácil que el estudiante lleve a cabo una investigación o simplemente la consulta de cualquiera de los temas incluidos aquí, para ha--

cería más sencilla y completa aún se han consultado libros que - no aparecen en la bibliografía.

Se ha procurado combinar la teoría con las aplicaciones de la misma en problemas prácticos, teniendo así un total de 92 problemas, todos resueltos en términos fáciles de comprender para - un estudiante que se inicia en el nivel de Licenciatura, se ha - intentdao dar la solución explicandola de la manera más simple - posible, dicha solución se ha hecho en un principio en la forma más desarrollada posible para evitar confusiones sobre los pasos seguidos, y conforme va avanzando el curso se van omitiendo algunos pasos, principalmente algebráicos.

El material teórico se ha reducido al mínimo posible, sin - dejar por eso de dar la información exacta y completa de cada tema tratado.

Estos apuntes se encuentran divididos en 9 capítulos, en -- los cuales se ha tratado el contenido en la forma más sencilla - posible para la fácil comprensión de los mismos.

El capítulo I nos presenta la introducción de estos apun--- tes. En el capítulo II se introducen los conceptos básicos de - la Mecánica Clásica, como son definiciones de Mecánica, Estáti-- ca, Cinemática y Dinámica; así como los Modelos de Cuerpos y las Leyes representativas de la Mecánica.

En el capítulo III, se hace una discusión de los sistemas - de unidades usados en la Mecánica, así como de las dimensiones - de cantidades y expresiones matemáticas y la traducción de fórmulas de un sistema a otro.

En el capítulo IV, se introducen ya los conceptos básicos - de la Estática como son: la suma de fuerzas, el concepto de fuerza resultante, los principios en los que se basa la Estática y - una breve introducción al álgebra de vectores, ya que nos servirá de base para la solución de muchos problemas, principalmente de los problemas en tres dimensiones; se enuncian los conceptos de momento de una fuerza respecto a un punto y a un eje y el de coordenadas vectoriales de una fuerza.

En el capítulo V, se proporcionan los elementos indispensables para la solución de problemas de equivalencia y de reducción de sistemas de fuerzas.

En el capítulo VI, se tratan los elementos que actúan en un cuerpo aparte de las fuerzas aplicadas, y la forma de representarlas por medio de un diagrama, haciendose además un análisis de las condiciones de equilibrio en los diversos sistemas de fuerzas.

En el capítulo VII, se tratan los temas de Momentos Estáticos y Centros de Gravedad. En el capítulo VIII, se da el concepto de Momento de Inercia de áreas planas y la forma de determinar su valor en casos prácticos y el capítulo IX, nos presenta las conclusiones de este trabajo.

Para la fácil solución de los problemas de mecánica, se pueden seguir los siguientes pasos:

1) Leer el problema cuidadosamente y enlistar los datos y los resultados requeridos.

2) Trazar los diagramas necesarios para la solución.

3) Enlistar los principios que nos serán útiles (en forma matemática).

4) Relacionar la situación física del problema con cada una de las expresiones matemáticas de los principios.

5) Resolver las ecuaciones necesarias para determinar la solución del problema.

6) Revisar todo el problema, asegurandose que las ecuaciones son de dimensiones homógeneas y que las unidades de los datos son compatibles.

7) Estudiar la respuesta y comprobarla si es posible, para asegurarse que es la correcta.

CAPITULO II
"FUNDAMENTOS DE LA MECANICA CLASICA"

II.1 Definiciones de Mecánica, Estática, Cinemática y Dinámica.

Física.- Es la ciencia que tiene por objeto el estudio de - los cuerpos y sus leyes y propiedades, mientras no cambia su composición, así como también el de los agentes naturales con los - fenómenos que en los cuerpos produce su influencia.

Para estudiar la física ésta se ha dividido en varias ramas las cuales al irse desarrollando se han transformado en nuevas - ciencias como son:

- Mecánica
- Optica
- Acústica
- Termología
- Electricidad

Cada una de ellas con distintas subdivisiones ya que su campo de estudios es muy amplio y para su estudio se ha hecho indispensable que se hagan subdivisiones que permitan la simplicidad- de su estudio.

Dentro de la física, la rama que vamos a estudiar es la mecánica; la cual comenzaremos por definir.

Mecánica.- La mecánica se define como la ciencia que describe y predice las condiciones de reposo o movimiento de los cuerpos bajo la acción de fuerzas, considerando el reposo de los mismos como un estado especial de dichos cuerpos.

Aunque el estudio de la mecánica se remonta a los tiempos de Aristoteles (384-322 A.C.) y Arquímedes (287-212 A.C.); fué Newton (1642-1727) quién formuló las leyes fundamentales de la mecánica y las leyes del movimiento de las partículas, basando sus apreciaciones en numerosos experimentos realizados por él mismo. Estas leyes fueron más tarde expresadas en forma modificada por D'Alembert, Lagrange y Hamilton para despúes ser generalizadas para la dinámica de los cuerpos rígidos por Euler.

La ciencia de la mecánica se divide en tres partes:

- Mecánica de los cuerpos rígidos,
- Mecánica de los cuerpos deformables y
- Mecánica de los fluidos.

las que a su vez presentan algunas subdivisiones que podemos detallar de la siguiente manera:

- Mecánica
  - Sólidos
    - Cuerpos Rígidos
      - Estática
      - Dinámica
        - Cinemática
        - Cinética
    - Cuerpos Deformables
      - Resistencia de Materiales
      - Teoría de la Elasticidad
      - Teoría de la Plasticidad
  - Fluidos
    - Fluidos Ideales
    - Fluidos Viscosos
    - Fluidos Compresibles

La división de la mecánica que nos interesa estudiar es la de los cuerpos rígidos, misma que se subdivide en:

-Estática

-Dinámica

que se definen a continuación:

Estática.- Es la encargada del estudio de los cuerpos que están sujetos a fuerzas en equilibrio, las cuales ocasionan que dichos cuerpos permanezcan en reposo o que se muevan con movimientos uniformes, es decir, con una velocidad constante. Se dice que un cuerpo esta en reposo cuando este se encuentra en equilibrio que se determina cuando el mismo no tiene aceleración lineal ni angular.

Dinámica.- Es el estudio del movimiento de los cuerpos considerado, tanto cinemática como cenéticamente.

a) Cinemática.- es la encargada de estudiar la geometría del movimiento de un punto material en el espacio sin determinar las causas que lo provocan. Se ocupa de la posición, del desplazamiento, de la velocidad, de la aceleración y del tiempo.

b) Cinética.- también conocida como dinámica debido a que esta ampliamente relacionada con la cinemática; estudia también el movimiento no solo del punto material sino de los cuerpos y su relación con las fuerzas que lo provocan.

Debido a que la cinética también se conoce como dinámica algunos autores emplean la siguiente división para la mecánica del cuerpo rígido:

$$\text{Mecánica del Cuerpo Rígido} \begin{cases} \text{Estática} \\ \text{Cinemática} \\ \text{Dinámica} \end{cases}$$

II.2 Modelos de Cuerpos: Punto, Partícula, Cuerpo Rígido y Cuerpo Deformable.

Al comenzar a estudiar un cuerpo, a menudo nos damos cuenta de que por sus dimensiones, por su masa o por su deformabilidad, no es posible estudiarlo fácilmente, por lo que en la mayoría de los casos es necesario idealizarlo de acuerdo a un modelo de cuerpo que no resulte tan difícil de analizar.

En la mayoría de los casos se pueden representar matemáticamente los fénomenos físicos, utilizando para ello idealizaciones con el fin de crear modelos básicos simplificados. Esta técnica permite tratar con problemas que de otra manera sería extremadamente difícil o imposible resolver. La idealización y el uso de dichos modelos se consideran válidos, cuando la solución analítica verifica los resultados de la experimentación o de la observación.

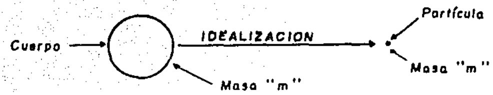
Para esto se han idealizado cuatro modelos de cuerpos:

a) Punto,
b) Partícula,
c) Cuerpo Rígido y
e) Cuerpo Deformable.

a) Punto.- A este modelo matemático se le considera como un punto en el espacio, el cual "no tiene dimensiones ni masa".

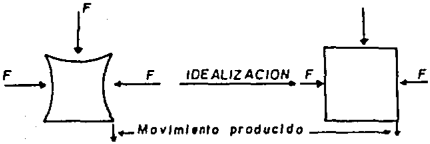
b) Partícula.- Se le considera como un modelo matemático de un punto de masa. Este punto "no tiene dimensiones pero si tiene masa", la cual se supone que ocupa un solo punto en el espacio. Este modelo de cuerpo es muy usado para la solución de problemas de Estática.

Supongamos que tenemos un cuerpo de masa "m" y de dimensiones desconocidas; al idealizarlo como una partícula la masa "m" seguirá igual, pero las dimensiones del mismo ya no; puesto que solo ocupará un punto en el espacio.



c) Cuerpo Rígido.- Es aquel modelo matemático que conserva su forma y dimensiones al aplicarle un sistema de fuerzas, por intensas que estas sean. Un cuerpo rígido esta formado por un gran número de partículas que ocupan posiciones fijas entre sí. En otras palabras, un cuerpo rígido es un sistema tal que el cambio de distancia entre dos cualesquiera de sus partículas (entendido como: "deformación debida a la acción de alguna fuerza")no tiene lugar.

Supongamos un bloque de cualquier material, el cual esta sometido a la acción de tres fuerzas de la misma magnitud, el cual presenta deformaciones debido a la acción de las fuerzas, si necesitamos idealizarlo para estudiar el movimiento que presente el cuerpo en conjunto, entonces usamos para ello el modelo de cuerpo rígido, con el cual las deformaciones existentes producto de las fuerzas que actúan sobre él, no existirán; solo existirá el movimiento que le produzcan esas fuerzas (en caso de que lo haya, es decir la resultante diferente de cero).

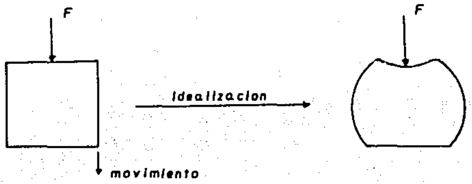


Cuerpo sin Idealizar Cuerpo Rígido

Este modelo es satisfactorio para el estudio de los efectos exteriores de las fuerzas al obrar sobre un cuerpo, es decir, -- del movimiento de este.

d) Cuerpo Deformable.- es aquel en el cual la aplicación de un sistema cualesquiera de fuerzas, por pequeñas que estas sean_ provoca cambios en la forma y dimensiones del cuerpo de acuerdo_ con cierta ley.

Supongamos un bloque de un material cualquiera al cual se - le aplica una fuerza F de una magnitud muy pequeña, que es capaz de producir movimiento en el mismo, pero sin una deformación apa rente (por lo pequeño) al idealizarlo como un cuerpo deformable_ tendremos que el movimiento producido por la fuerza aplicada no_ se toma en cuento, pero si se tomará la deformación por pequeña_ que esta sea.



Cuerpo sin idealizar

Cuerpo Deformable

Este modelo de cuerpo es el que se acepta para estudiar los efectos internos de las fuerzas al obrar sobre un cuerpo, es de- cir, de los reacomodos de las partículas que lo constituyen y fe nómenos consiguientes.

Cuanto más cercana a la realidad sea la ley mencionada en la definición, más satisfactorio será este modelo. Así, en la actualidad, se establecen tres tipos de cuerpos deformables idealmente:

- cuerpo elástico,
- cuerpo plástico y
- cuerpo elasto-plástico.

El modelo de cuerpo deformable es comunmente usado dentro de la mecánica de materiales.

La utilización de un modelo de cuerpo permite simplificar el análisis de cualquier problema; en la estática los modelos de cuerpos más comunmente usados son: la partícula y el cuerpo rígido.

II.3 Leyes de Newton.

Isaac Newton (1642-1727) es uno de los físicos más importantes de todos los tiempos, cuando aún tenía veintitantos años, inventó la rama de las matemáticas que se conoce como cálculo, descubrió la ley de la gravitación y encontró que la luz del Sol es una combinación de colores.

El movimiento general de un cuerpo sujeto a la acción de fuerzas no fue conocido hasta 1687, cuando Isaac Newton estableció por primera vez tres leyes básicas que rigen el movimiento de una partícula, publicó por primera vez estas leyes en un compendio clásico titulado Principia Mathematica Philosophiae Naturalis. Dichas leyes se enuncian de la siguiente manera:

3.1 Primera Ley de Newton o Ley de Inercia.

"Todo cuerpo conserva su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, a menos que este obligado a cambiar su estado como consecuencia de la acción de fuerzas que se le impongan, siempre y cuando la fuerza resultante que actúa sobre él sea diferente de cero".

La resistencia al cambio de estado de movimiento o de reposo, es una propiedad de la materia que se denomina "inercia", -- que no es otra cosa que la dificultad que se presenta para cambiar el estado de movimiento de un objeto.

Esta ley se conoce también como Ley de la Inercia.

3.2 Segunda Ley de Newton o Ley del Movimiento.

"Si la fuerza resultante que actúe sobre una partícula es diferente de cero, la partícula adquirirá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en dirección de esta -- fuerza resultante".

Esta ley se escribe de la siguiente manera:

$$F = ma$$

donde:

F.- Es la fuerza resultante que actúa sobre la partícula.

m.- Es la masa de la partícula.

a.- Es la aceleración de la partícula.

Esta relación primeramente propuesta por Newton, se llamó Segunda Ley de Newton y se puede explicar de la siguiente forma:

"Para comunicar a una masa "m" una aceleración "a", se requiere de una fuerza "F" que esta dada por $F = ma$".

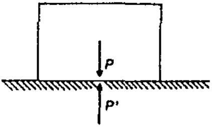
3.3 Tercera Ley de Newton o de la Acción y la Reacción.

"A toda acción corresponde una reacción igual y opuesta"; es decir que las acciones mutuas de dos cuerpos son siempre iguales y en direcciones opuestas.

Esta ley se puede restablecer en términos de dos objetos y de las fuerzas que ejerce uno en el otro. En esos términos podemos decir:

"cuando un objeto A ejerce una fuerza sobre un (otro) objeto B, el objeto B ejercerá una fuerza contraria sobre el objeto A; las dos fuerzas son iguales en magnitud y sentido pero de direcciones opuestas".

Por ejemplo, supongamos un bloque (objeto A) que esta colocado sobre el suelo (objeto B), el bloque tiene un peso "P" ejercido sobre el suelo (acción), el suelo ejercerá una fuerza P' de la misma magnitud, pero hacia arriba sobre el bloque (reacción) logrando con esto un equilibrio entre el bloque y el suelo; si tuvieramos un marco de referencia con P hacia abajo positivo y P' hacia arriba como negativa entonces tendríamos que $P' = -P$, con lo cual se cumpliría la Tercera Ley de Newton.

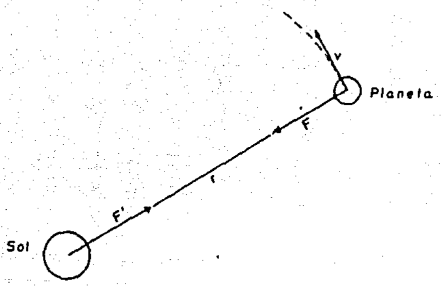


donde: $-P = P'$

3.4 Ley de la Gravitación Universal.

Con frecuencia la masa se confunde con un concepto totalmente diferente; que es el concepto de peso, obviamente, los dos conceptos estan relacionados, pero no significan lo mismo.

El significado básico de peso se esclareció gracias al descubrimiento de Newton de que cada objeto ejerce una fuerza de atracción sobre cada uno de los otros objetos. Newton hizo este descubrimiento durante sus intentos por entender el movimiento de los planetas en sus orbitas alrededor del sol. Esta ley de la inercia parecía ser violada por el movimiento de los planetas ya que éstos siguen trayectorias circulares en vez de rectilíneas. Newton podía explicar tales movimientos si suponía que el sol ejercía fuerza de atracción en cada uno de los planetas, como se muestra en la figura.



La fuerza F atrae al planeta fuera de su trayectoria rectilínea, según se muestra. Newton pudo demostrar que el movimiento orbital de los planetas alrededor del sol se debe a la fuerza F de éste sobre el planeta, con F dada por:

$$F = \frac{m_s m_p}{r^2} \; G$$

donde "m_s" y "m_p" son la masa del sol y del planeta, respectivamente, y "r" es la distancia entre sus centros, "G" es una constante.

Pero si el sol atrae al planeta, según la ley de acción y - reacción el planeta debe atraer al sol. Esta fuerza se muestra - como F'. Dado que las fuerzas de acción y reacción son iguales - y opuestas, F' = -F .

Newton establecio la ley de La Gravitación Universal como:

"Dos partículas con masas "m_1" y " m_2" y situadas a una distancia "r", se atraen una a la otra con una fuerza cuya magnitud es directamente proporcional al producto de sus masas, e inversamente al cuadrado de la distancia que medie entre ellas".

$$F \approx \frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \text{----------} \quad (1)$$

Que para convertir en una igualdad es necesario introducir una constante a la cual denotaremos por G, que conoceremos como la constante de atracción universal cuyo valor númérico es:

$G = 6.675 \times 10^{-11}$ $N \cdot m^2 / kg^2$. Con lo cual la ecuación nos quedará:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ ---------- } (2)$$

Un caso particular de gran importancia es la atracción de la tierra sobre una partícula localizada sobre su superficie. La fuerza "F" ejercida por la tierra sobre la partícula es entonces definida como el peso "W" de la partícula (F=W).

Si además introducimos la constante "g" dada por:

$$g = \frac{GM}{R^2} \text{ ---------- } (3)$$

donde:

G.- es la constante de atracción;

M.- es la masa de la tierra y

R.- es el radio de la tierra.

sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (2) tendremos:

$$W = mg \text{ ---------- } (4)$$

donde:

W.- es el peso de la partícula;

m.- es la masa de la partícula y

g.- es la aceleración de la gravedad.

El valor de R en la fórmula (3) depende de la altura del punto considerado y de la latitud (debido a que la tierra no es totalmente esférica. El valor de "g", por consiguiente, varía con la posición del punto considerado. Si el punto considerado permanece sobre la superficie terrestre, es suficientemente exacto, en la mayoría de los calculos de ingeniería, suponer el valor de "g" igual a 32.2 ft/s^2 o 9.81 m/s^2.

Ejemplos:

1.- Calcular el módulo de la aceleración de la gravedad terrestre al nivel del mar, considerando que el valor de la constante de la gravitación universal es de $6.675 \times 10^{-8} cm^3 g^{-1} s^{-2}$, el del radio terrestre de 6370 km y el de la masa de la tierra de 5.974×10^{27} g.

Solución: Primero obtenemos los datos y la incognita sacandolos del enunciado del problema.

Datos

$G = 6.675 \times 10^{-8} cm^3 g^{-1} s^{-2}$

$R = 6370$ km

$M = 5.974 \times 10^{27} g$

$g = ?$

Una vez obtenidos los datos y la incognita escribamos la --fórmula que nos permite calcular g

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

como vemos tenemos todos los datos necesarios, solamente que el-valor de R debemos convertirlo a cm (por facilidad) aunque podemos convertir también el valor de G a $m^3 g^{-1} s^{-2}$.

$$R = 6370 \text{ km} \cdot \frac{100000 \text{cm}}{1 \text{km}} = 6370 \times 10^5 \text{cm}$$

sustituyendo valores en la fórmula tendremos:

$$g = \frac{(6.675 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 g^{-1} s^{-2})(5.974 \times 10^{27} g)}{(6370 \times 10^5 \text{cm})^2}$$

haciendo operaciones tendremos:

$$g = 982.74 \frac{cm^3 g}{cm^2 g s^2}$$

eliminando unidades tendremos:

$$\boxed{g = 982.74 \frac{cm}{s^2}}$$

que es el rresultado buscado.

2.- El peso de un astronauta en la superficie terrestre es de --100 kg-f. Calcule su peso suponiendo que se encuentre en la ---superficie lunar y considerando que:

Masa de la luna = 7.38×10^{22} kg

$G = 6.675 \times 10^{-8} cm^3 g^{-1} s^{-2}$

Radio lunar = 1 736 km.

Solución: Primero obtenemos el valor de la masa del astronauta con ayuda de su peso en la tierra, ya que sabemos que:

$$g = 9.81\ m/s^2$$

$W = mg$ despejando a m tenemos

$m = \frac{W}{g}$ sustituyendo valores:

$$m = \frac{100\ kgf}{9.81\ m/s^2} = 10.1937\ \frac{kgf\ s^2}{m}$$

ahora obtenemos el valor de la gravedad lunar

$$g = \frac{(6.675 \times 10^{-8} cm^3 g^{-1} s^{-2})(7.38 \times 10^{22} kg)}{(1736\ km)^2}$$

como vemos las unidades no son homogéneas por lo que hay que convertir M a gramos y R a centímetros

$$M = 7.38 \times 10^{22} kg \cdot \frac{10^3 g}{1\ kg} = 7.38 \times 10^{25} g$$

$$R = 1736\ km \cdot \frac{10^5 cm}{1\ km} = 1736 \times 10^5 cm$$

ahora sí sustituimos

$$g = \frac{(6.675 \times 10^{-8}\ cm^3 g^{-1} s^{-2})(7.38 \times 10^{25}\ g)}{(1736 \times 10^5 cm)^2}$$

realizando operaciones tenemos

$$g = 163.4588\ \frac{cm}{s^2}$$

convirtiendo a m/s^2 tenemos

$$g = 1.6346\ \frac{m}{s^2}$$

ahora sustituimos en la fórmula $W = mg$ la masa y la gravedad y obtendremos el peso del astronauta en la luna.

$$W = \left(10.1937\ kgf\ \frac{s^2}{m}\right)\left(1.6346\ \frac{m}{s^2}\right)$$

$$\boxed{W = 16.66\ kgf}$$

Y ese será el peso del astronauta en la superficie lunar.

3.- Considerando que el radio promedio de la luna es de 1736 km, que su masa vale 7.38×10^{22} kg y que el valor de la Constante de la Gravitación Universal es de $6.675 \times 10^{-8}\ cm^3 g^{-1} s^{-2}$, calcular la aceleración con que es atraído hacia el centro de la luna un cuerpo que se encuentra a 1000 km de altura sobre la superficie lunar.

Solución: Sacamos los datos del enunciado del problema.

Datos:

$R_L = 1736$ km

$M_L = 7.38 \times 10^{22}$ Kg.

$G = 6.675 \times 10^{-8}\ cm^3\ g^{-1}\ s^{-2}$

$g = ?$

$H = 1000$ km

Como podemos ver el cuerpo no esta en la superficie lunar, sino que se encuentra a una distancia de 1000 km de ella, por lo cual la R que debemos usar en la fórmula esta dada por:

$$R = R_L + H = 1736 \text{ km} + 1000 \text{ km} = 2736 \text{ km}$$

que convirtiendolos a cm nos queda:

$$R = 2736 \times 10^5 \text{ cm}$$

y convirtiendo la masa lunar a gramos tendremos:

$$M = 7.38 \times 10^{25} g$$

sustituimos valores en la ecuación:

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

y nos queda:

$$g = \frac{(6.675 \times 10^{-8}\ cm^3 g^{-1}\ s^{-2})(7.38 \times 10^{25} g)}{(2736 \times 10^5 cm)^2}$$

haciendo operaciones tendremos que:

$$g = 65.81 \frac{cm}{s^2}$$ lo que resultaría

$$\boxed{g = 0.658 \frac{m}{s^2}}$$

que es la aceleración con que sería atraído a la luna un cuerpo que se encontrara a una altura de 1000 km sobre la superficie lunar.

CAPITULO III
" SISTEMAS DE UNIDADES "

III.1 Definiciones de unidades.

Cuando el hombre tuvo necesidad de medir distancias, superficies, pesos, capacidades, tiempo, etc., (es decir magnitudes)_ comenzo a usar patrones que le permitian medir dichas magnitudes; estas cantidades físicas se median comparandolas con un patrón conocido, a este patrón se le conoció como "unidad", que se puede definir de la siguiente manera:

Unidad .- es una magnitud arbitraria de una dimensión empleada como stándar para propósitos de medición.

Las unidades se dividen en tres tipos:

- Unidades Fundamentales .- son las unidades que son arbitrarias y son las que se toman como base, por lo que también se_ les conoce como unidades básicas.

- Unidades Derivadas .- son las que se forman combinando -- las unidades de base o fundamentales entre sí o combinandolas -- con las suplementarias.

-Unidades Suplementarias .- son las que corresponden a magnitudes de ángulos, el grado, el radian, el gradiente, etc.

I.I Sistemas de Unidades.- Se define como un conjunto de unidades fundamentales o base, los sistemas de unidades que se usan en ingeniería son:

- Sistema Métrico Decimal y { M.K.S. (Georgi) / c.g.s. (cegesimal) }
- Sistema Inglés { F.P.S.

III.2 Sistemas de unidades Absolutos y Gravitacionales:
M.K.S., c.g.s. y el F.P.S. El Sistema Internacional de Unidades.

Los sistemas de unidades Métrico Decimal e Inglés se pueden considerar como:

a) Sistema Absoluto.- Cuando sus unidades básicas son la masa, la longitud y el tiempo, o ;

b) Sistema Gravitacional .- Cuando sus unidades básicas son la fuerza, la longitud y el tiempo.

En los sistemas absolutos las unidades derivadas son las de fuerza, de velocidad, de volumen, etc., y en los gravitatorios lo son las de masa, de velocidad y de volumen entre otras.

El sistema gravitacional (tambien llamado técnico) es el más utilizado en los problemas de ingeniería, a pesar de que el peso de un cuerpo representa una fuerza que varía de un lugar a otro de acuerdo con la aceleración de la gravedad. Por el contrario, la masa del cuerpo es siempre constante y por esta razón el sistema absoluto ha sido elegido como el sistema científico internacional.

Sistema M.K.S. .- Sus unidades básicas son:

- Metro
- Kilogramo
- Segundo

Toma su nombre de la primera letra de sus unidades básicas: M (metro); K (kilogramo) y S (segundo) por lo cual tenemos M.K.S.

El sistema M.K.S. pude ser:

- Absoluto.- Si sus unidades básicas son:
  - Metro (m)
  - Kilogramo-masa (kg)
  - Segundo (s)
- Gravitacional.- Si sus unidades básicas son:
  - Metro (m)
  - Kilogramo-fuerza (kgf)
  - Segundo (s)

Sistema c.g.s. .- Sus unidades básicas son:

- centímetro
- gramo
- segundo

Al igual que el sistema M.K.S. el sistema c.g.s. toma su --- nombre de la primera letra de sus unidades fundamentales: c (centímetro); g (gramo) y s (segundo) con lo que tenemos c.g.s.

El sistema c.g.s. también puede ser:

- Absoluto.- Si sus unidades básicas son:
  - centímetro (cm)
  - gramo-masa (gr)
  - segundo
- Gravitacional.- Cuando sus unidades básicas son:
  - centímetro (cm)
  - gramo-fuerza (grf)
  - segundo (s)

Sistema F.P.S. .- El sistema F.P.S. pertenece al sistema inglés y también obtiene su nombre de sus unidades básicas:

- Pie (Foot)
- Libra (Pound)
- Segundo (Second)

F (Foot), P(Pound) y S (Second) con lo que tenemos F.P.S.

El sistema F.P.S. puede ser:

- Absoluto.- Cuando sus unidades básicas son:
  - pie (ft)
  - libra-masa (lb)
  - segundo (s)

- Gravitacional.- Si sus unidades son:
  - pie (ft)
  - libra-fuerza (lbf)
  - segundo (s)

Podemos hacer un resumen de unidades, el cual nos quedaría de la siguiente manera:

- Sistemas de Unidades
  - Absoluto (masa)
    - Decimal
      - M.K.S. (m, kg, s)
      - c.g.s. (cm, gr, s)
    - Inglés
      - F.P.S. (ft, lb, s)
  - Gravitacional (fuerza)
    - Decimal
      - M.K.S. (m, kgf, s)
      - c.g.s. (cm, grf, s)
    - Inglés
      - F.P.S. (ft, lbf, s)

2.1 Sistema Internacional de Unidades (SI).

Se define como un conjunto coherente que se usa para la medición de magnitudes físicas, en el cual la unidad para cualquier propiedad esta directamente relacionada con un número pequeño de unidades básicas a través de un coeficiente unitario.

En conjunto el sistema internacional de unidades (SI) cuenta con siete unidades básicas, las cuales enlistaremos en la siguiente tabla.

Cantidad	Nombre	Símbolo
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Temperatura	Grado Kelvin	°K
Corriente Eléctrica	Ampere	A
Número de Partículas	Mol	mol
Intensidad Luminosa	Candela	cd

UNIDADES BASICAS DEL SI

Todas las magnitudes de las cantidades físicas mensurables se pueden expresar en función de estas siete unidades básicas -- del SI, las que se definen de la siguiente manera:

Metro.- El metro es la longitud igual a 1,650,763.73 longitudes de onda en el vacío de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles $2pt_0$ y el $5d_5$ del átomo de kripton 86.

Kilogramo-masa.- Es la masa del prototipo del platino iridiado sancionado por la III Conferencia General de Pesas y Medidas en 1901 y depositado en el pabellón de Bretevil, de Sèvres.

Segundo.- Se define como el tiempo que emplean en efectuarse 9,192,631,770 vibraciones exactamente del átomo de cesio. También se define como la 1/86,400 parte del día solar medio.

Grado Kelvin.- Es el grado de la escala termodinámica de -- las temperaturas absolutas, en el cual la temperatura del punto triple del agua es 273.16 grados. Se puede emplear la escala Celcius, cuyo grado es igual al grado Kelvin y su punto cero corresponde a 273.16 grados de la escala termodinámica Kelvin.

Ampere.- Es la intensidad de corriente eléctrica constante que, mantenida en dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable, y colocados en en el vacío a una distancia de un metro uno de otro, produce entre estos dos conductores una fuerza igual a 2×10^{-7} Newton por metro de longitud.

Mol.- Se llama mol de una sustancia a un número de gramos - igual a la masa molecular de ella. Es la masa de 6.022×10^{23} -- moleculas del elemento.

Candela.- Es la intensidad luminosa en una dirección determinada de una abertura perpendicular a esta dirección, que tenga una superficie de 1/60 centímetros cuadrados y radie como un radiador integral (cuerpo negro) a la temperatura de solidificación del platino.

Las unidades suplementarias del sistema internacional de -- unidades son:

Radiante o radian ------------------------ rad

Estereorradiante o estereoradián ---------- sr

Algunas unidades derivadas del Sistema Internacional se indican en la siguiente tabla:

Magnitud	Nombre	Unidad básica
Superficie	metro cuadrado	m^2
Volumen	metro cubico	m^3
Densidad	kilogramo por metro cubico	kg/m^3
Velocidad	metro por segundo	m/s
Velocidad angular	rádian por segundo	rad/s
Aceleración	metro por segundo cuadrado	m/s^2
Aceleración angular	radian por segundo cuadrado	rad/s^2
Fuerza	Newton (N)	$kg \cdot m/s^2$
Presión	Newton por metro cuadrado	N/m^2
Trabajo, energia	Julio (J)	N·m
Potencia	Watt (W)	J/s
Cantidad de Electricidad	Coulomb (C)	A·s
Diferencia de Potencial	Voltio (V)	W/A
Intencidad de campo eléctrico	Voltio por metro	V/m
Resistencia eléctrica	Ohm (Ω)	V/A
Capacidad eléctrica	Faradio (F)	A·s/V
Inductancia	Henrio (H)	V·s/A
Fuerza Magnetomotriz	Amperio (A)	
Flujo luminoso	Lumen (Lm)	cd·sr
Iluminancia	Lux (lx)	lm/m^2

UNIDADES DERIVADAS (S.I.)

Actualmente decimos que las unidades del SI forman un sistema absoluto de unidades, ya que podemos usarlas en cualquier lugar de la tierra o en cualquier otro planeta, y siempre tendrán el mismo significado.

Dentro del mundo científico se maneja el sistema métrico, el cual tiende a volverse universal.

Una ventaja del sistema métrico es el uso de prefijos simples para denotar los multiplos de las unidades básicas.

Por ejemplo, el prefijo kilo significa 1000 como sucede en la palabra kilómetro (1000 m); el kilogramo, (1000 gramos); el kilowatt, (1000 watts), o cualquiera otra. En forma parecida, el prefijo centi significa siempre 1/100, mientras que el prefijo mili denota siempre 1/1000.

Dado que números muy grandes o muy pequeños son comunes en la ciencia, con frecuencia se escribirán números en notación científica. En esta notación se utilizan potencias de 10 para simplificar la escritura y el cálculo.

En esta notación se recurre al hecho de que el simbolismo 3.1×10^5 significa que hay que multiplicar 3.1 por 10 cinco veces es decir 3.1×10^5 significa 310,000.

Ejemplos:

0.0563×10^4	significa	563
43.7×10^6	significa	4370 000
5.24×10^3	significa	5 240

También en esta forma se pueden escribir números muy pequeños, si tomamos en cuenta que 6.15×10^{-2} es lo mismo que dividir 6.15 entre 10 dos veces, es decir 6.15×10^{-2} significa 0.0615.

Ejemplos:

5.20×10^{-6}	significa	0.00000520
5.60×10^{-5}	significa	0.000056
373×10^{-8}	significa	0.00000373

Prefijo	Símbolo	Valor	Notación
tera	T	1 000 000 000 000	10^{12}
giga	G	1 000 000 000	10^{9}
mega	M	1 000 000	10^{6}
kilo	k	1 000	10^{3}
hecto	h	100	10^{2}
deca	da	10	10^{1}
		1.0	10^{0}
deci	d	0.1	10^{-1}
centi	c	0.01	10^{-2}
mili	m	0.001	10^{-3}
micro	μ	0.000001	10^{-6}
nano	n	0.000000001	10^{-9}
pico	p	0.000000000001	10^{-12}
femto	f	0.000000000000001	10^{-15}
ato	a		10^{-18}

PREFIJOS Y NOTACION CIENTIFICA

III.3 Cantidades Escalares y Vectoriales en la Mecánica: Longitud, Masa, Tiempo y Fuerza.

Antes de definir las cantidades básicas en la mecánica: longitud, masa, tiempo y fuerza; definiremos lo que son cantidades escalares y cantidades vectoriales.

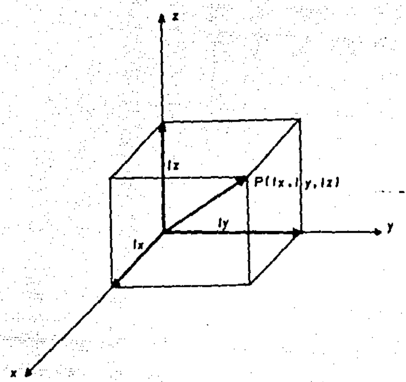
Cantidades Escalares.- Son las que quedan determinadas sola mente por un coeficiente numérico y símbolo de comparación como son las áreas, volumenes, longitudes, por ejemplo: $1m^2$, $2m^3$, 3km etc. Se consideran como cantidades escalares la longitud, la -- masa, y el tiempo.

Cantidades Vectoriales.- Son aquellas en las que además de tener una magnitud y un símbolo, tienen una dirección y un sen-- tido. Se considera a la velocidad como una cantidad vectorial.

Los conceptos básicos de la mecánica no pueden ser verdaderamente definidos ellos deben ser aceptados sobre las bases de - nuestra intuición y experiencia, y utilizados como un marco de - referencia mental para el estudio de la mecánica.

Longitud.- Es el concepto para definir cuantitativamente, - el tamaño de un objeto, comparandolo con otras dimensiones conocidas. El concepto de longitud está asociado también con la no ción del lugar donde ocurre un evento.

La posición de un punto, por ejemplo, P se puede definir - por medio de tres longitudes (l_x, l_y, l_z) medidas desde cierto - punto de referencia. Tal como el origen O, según tres direcciones mutuamente perpendiculares.



POSICION DEL PUNTO "P" DEFINIDA POR TRES LONGITUDES

La longitud se específica mediante comparación con un patrón determinado, contando tanto el número de veces enteras que de este le corresponden, como el de fracciones del mismo que intervengan en ella.

La unidad internacional de longitud (SI) es el metro patrón.

Las unidades de longitud en los sistemas absolutos y gravitacionales son:

M.K.S. Absoluto ---------- metro (m)

c.g.s. Absoluto ---------- centímetro (cm) que se define como la 1/100 parte del metro.

F.P.S. Absoluto ------------ pie (ft) que se define como 1ft = 0.3048 m.

M.K.S. Gravitacional ------- metro (m)
c.g.s. Gravitacional ------- centímetro (cm)
F.P.S. Gravitacional ------- pie (ft)

Masa.- Es la propiedad de la materia definido por los resultados de ciertos experimentos mecánicos fundamentales; se usa para determinar y comparar cuerpos. Por ejemplo, dos cuerpos de igual masa serán atraídos por la tierra de la misma manera y ofreceran también la misma resistencia al cambio en el movimiento de traslación. También se le considera a la masa como la medida de inercia de un objeto, ya que un objeto con una masa muy grande presenta mayor dificultad a ser desplazado, que un objeto que tenga una masa muy pequeña.

A menudo se confunde masa con peso, porque el peso de un objeto es proporcional a su masa.

Las unidades fundamentales de masa en los sistemas absolutos son:

M.K.S. Absoluto ---------- kilogramo-masa (kg)
c.g.s. Absoluto ---------- gramo-masa (gr), el cual se define como la 1/1000 parte del kilogramo-masa.
F.P.S. Absoluto ---------- libra-masa (lb), que equivale a 1 lb = 0.4535 kg.

Tiempo.- Es el concepto que determina la secuencia de los ejemplos, es decir, establece la noción de cuando ocurren, ya que para definir un acontecimiento, no es suficiente indicar su posición en el espacio, debe conocerse también el tiempo en que transcurren.

La unidad internacional para medir el tiempo (SI) es el segundo. El minuto, la hora y el día se definen de la forma usual en función del segundo.

1 día = 86 400 segundos.

1 hora = 3 600 segundos.

1 minuto = 60 segundos.

La unidad de tiempo, tanto en los sistemas absolutos como - en los gravitacionales es el segundo.

Fuerza.- Es la acción de un cuerpo sobre otro y que afecta el estado de movimiento o de reposo del cuerpo sobre el cual actúa, esta puede ser ejercida por contacto directo (como un empuje o jalón) o a distancia (como en el caso de las fuerzas gravitacionales y magneticas).

Las fuerzas pueden ser:

Internas.- Son las que tienen lugar sobre las mismas partículas que componen a un cuerpo, estas estan sometidas entre sí a una serie de fuerzas internas provocadas por la atracción molecular.

Externas.- Son las que actúan sobre un cuerpo o sistema de cuerpos y producen alteración en sus estados de reposo o movimiento.

Una fuerza se caracteriza por:

a) Su punto de aplicación,

b) Su magnitud,

c) Su dirección y

d) Su sentido.

La fuerza es una cantidad vectorial que además cuenta con - un punto de aplicación.

Las fuerzas se clasifican en:

Fuerzas Coplanares.- Son las fuerzas que actúan en un solo plano. Estas fuerzas pueden ser:

a) Concurrentes.- Son aquellas que tienen un punto común de concurso.

b) Paralelas.- Son aquellas en que todos los puntos de la línea de acción de cada una de las fuerzas permanecen equidistantes.

c) Generales.- Son aquellas que no tienen relación entre sí.

Fuerzas No Coplanares.- Son las fuerzas que actúan en el espacio. Pueden ser:

a) Concurrentes
b) Paralelas
c) Generales

Fuerzas Colineales.- Son aquellas que tienen una misma línea de acción.

3.1 Sus Unidades Fundamentales en los Sistemas Gravitacionales.

-M.K.S. Gravitacional --------- kilogramo-fuerza (kgf) definido como el peso de un kilogramo-masa en un punto donde la aceleración de la gravedad tiene un valor de $9.81\ m/s^2$

$$1\ kgf = (1\ kg)(9.81\ m/s^2) = 9.81\ kg\ m/s^2$$

$$1\ kgf = 9.81\ Newton$$

-c.g.s. Gravitacional --------- gramo-fuerza (grf) que se define como la $1/10^3$ parte de un kilogramo-fuerza.

$$1\ grf = 0.0000981\ kgf = 9.81 \times 10^{-3}\ Newton$$

$$1\ grf = 9.81\ dinas$$

-F.P.S. Gravitacional --------- libra-fuerza (lbf) que se define como la fuerza con que la tierra atrae a una masa (de una libra-masa) en un lugar donde la aceleración de la gravedad tiene un valor de $32.174\ ft/s^2$

$$1\ lbf = 32.174\ poundal$$

Las unidades de fuerza dentro de los sistemas absolutos son unidades derivadas, las cuales se pueden obtener por medio de la relación dada por la Segunda Ley de Newton:

$F = m.a$ ------ (1)

Sistema M.K.S. Absoluto

$m = kg$

$a = m/s^2$

sustituyendo en la formula (1) tenemos:

$F = (kg)\ (m/s^2) = kg \cdot m/s^2$

las unidades de Fuerza en el M.K.S absoluto son:

$F = kg \cdot m/s^2$ que no es otra cosa que el Newton (N), es decir la unidad derivada de fuerza en el sistema M.K.S. Absoluto es el Newton (N) (que se define como la fuerza aplicada sobre 1 kg le- produce una aceleración de 1 m/s^2).

Sistema c.g.s. Absoluto:

$m = gr$

$a = cm/s^2$

sustituyendo las unidades en la fórmula tenemos:

$F = (gr)\ (cm/s^2)$

$F = gr \cdot cm/s^2 = dina$

Entonces la unidad derivada de fuerza en el: sistema c.g.s. Absoluto es la dina que es la fuerza que aplicada sobre un gr le imparte una aceleración de 1 cm/s^2.

Sistema F.P.S. Absoluto:

$m = lb$

$a = ft/s^2$

sustituyendo unidades en la fórmula (1) tenemos

$F = (lb)\ (ft/s^2)$

$F = lb \cdot ft/s^2 = Poundal$

Por lo tanto la unidad derivada de fuerza en el sistema --- F.P.S. Absoluto es el Poundal (P), que es la fuerza que aplicada sobre 1 lb le da una aceleración de 1 ft/s^2.

De la misma manera que las unidades de fuerza en los sistemas absolutos son derivadas, las unidades de masa en los sistemas gravitacionales también son derivadas y se obtienen también con la relación dada por la Segunda Ley de Newton, solo que ahora despejando a la masa:

$$m = F/a \text{ ------ } (2)$$

Sistema M.K.S. Gravitacional:

$F = kgf$

$a = m/s^2$

sustituyendo las unidades en la fórmula (2) tenemos

$m = (kgf)/(m/s^2)$

$m = kgf\ s^2/m$

que es la unidad derivada de masa en el sistema M.K.S. Gravitacional.

Sistema c.g.s. Gravitacional:

$F = grf$

$a = cm/s^2$

Aplicando la Segunda Ley de Newton

$F = grf$

$a = cm/s^2$

sustituyendo en la fórmula (2)

$m = (grf)/(cm/s^2)$

$m = grf\ s^2/cm$

con lo que tenemos que $grf\ s^2/cm$ es la unidad derivada de masa en el sistema c.g.s. Gravitacional.

Sistema F.P.S. Gravitacional:

$F = lbf$

$a = ft/s^2$

de la misma manera

$m = (lbf)/(ft/s^2)$

$m = lbf\ s^2/\ ft = slug$

Con lo que la unidad derivada de masa en el sistema F.P.S. Gravitacional es el slug.

Sistema	Longitud	Masa	Tiempo	Fuerza
M.K.S. Absoluto	metro (m)	kilogramo-masa (kg)	segundo (s)	Newton* (N)
M.K.S. Gravitacional	metro (m)	kgf s /m *	segundo (s)	kgf
c.g.s. Absoluto	centímetro (cm)	gramo-masa (gr)	segundo (s)	dina*
c.g.s. Gravitacional	centímetro (cm)	grf s / m *	segundo (s)	grf
F.P.S. Absoluto	pie (ft)	libra-masa (lb)	segundo (s)	poundal* (pdl)
F.P.S. Gravitacional	pie (ft)	slug*	segundo (s)	lbf

*Son unidades derivadas.

TABLA DE SISTEMAS DE UNIDADES.

III.4 Cantidades Dimensionales.

Cualcuier observación directa de la naturaleza, ordinaria-- mente se puede relacionar con la magnitud de la cantidad física_ medidal cuando dicha magnitud depende de la unidad de medida ele gída, se dice que la cantidad tiene dimensiones. Las dimensiones al igual que las unidades pueden ser fundamentales o derivadas.

Las dimensiones fundamentales son aquellas que estan en co- rrespondencia con las unidades fundamentales, es decir, que re-- presentan la dimensión de la unidad fundamental.

Las dimensiones derivadas se definen partiendo de la manera en que la medida de las cantidades de esa magnitud dependen de - la medida de las cantidades de las magnitudes fundamentales. Es_ decir, son una combinación de las dimensiones fundamentales y lo gicamente son las que representan las dimensiones de las unida-- des derivadas.

Las magnitudes físicas se cuantifican en términos de las -- unidades derivadas.

Las magnitudes físicas se cuantifican en términos de las di mensiones fundamentales, y para ello, se utilizan dos sistemas - de unidades de medida: el Absoluto y el Gravitacional.

En el sistema Absoluto las dimensiones fundamentales son:

Cantidad	Símbolo
Masa	$[M]$
Longitud	$[L]$
Tiempo	$[T]$

Los corchetes se utilizan para indicar dimensiones.

En el sistema Gravitacional las dimensiones fundamentales - son:

Cantidad	Símbolo
Fuerza	$[F]$
Longitud	$[L]$
Tiempo	$[T]$

Como ya sabemos las unidades fundamentales del Sistema Internacional (SI) son las mismas del Sistema Absoluto en cuanto a Masa, Longitud y Tiempo, por lo que las dimensiones fundamentales del SI son también $[M]$, $[L]$ y $[T]$. Las demás cantidades que se miden dentro de estos sistemas son combinaciones de estas dimensiones fundamentales. Por ejemplo, la velocidad se mide en metros por segundo, es decir, la velocidad tiene dimensiones de longitud divididas entre dimensiones de tiempo, esto se puede escribir de la siguiente manera:

$$\text{Dimensiones de velocidad} = \frac{\text{dimensión de longitud}}{\text{dimensión de tiempo}}$$

y haciendo uso de símbolos tendremos:

$$[\text{Velocidad}] = \frac{[L]}{[T]} = [LT^{-1}]$$

como podemos ver las dimensiones de la velocidad son dimensiones derivadas.

Ejemplo 1.- Obtenga las dimensiones derivadas de Fuerza y Masa en los sistemas Absoluto y Gravitacional respectivamente.

Solución:

Para obtener las dimensiones derivadas de fuerza debemos de tomar las dimensiones fundamentales del sistema Absoluto y aplicarlas en la Segunda Ley de Newton dada por:

$$F = ma$$

donde las dimensiones son:

$$[m] = [M] \quad \text{y}$$
$$[a] = [LT^{-2}]$$

entonces sustituyendo en la fórmula tendremos:

$$[F] = [M]\,[LT^{-2}]$$
$$[F] = [MLT^{-2}]$$

con lo cual obtenemos las dimensiones derivadas de Fuerza en el Sistema Absoluto.

Para obtener las dimensiones derivadas de Masa en el sistema Gravitacional procedemos de igual forma, solo que ahora tomando las dimensiones fundamentales del Sistema Gravitacional y despejando a la masa de la fórmula de la Segunda Ley de Newton.

$$m = F/a$$

las dimensiones son:

$$[F] = [F] \quad y$$
$$[a] = [LT^{-2}]$$

sustituyendo en la fórmula tenemos:

$$[m] = [F] / [LT^{-2}] \quad \text{esto nos queda}$$
$$[m] = [FL^{-1} T^{2}]$$

que son dimensiones derivadas de masa en el Sistema Gravitacional.

Como podemos ver las dimensiones de cualquier cantidad Q se pueden expresar como:

$$[Q] = [M^{X}L^{Y}T^{Z}] \quad o$$
$$[Q] = [F^{X}L^{Y}T^{Z}]$$

dependiendo de que se usen como cantidades básicas MLT o FLT.

Ejemplo 2.- Indique las dimensiones de los siguientes conceptos físicos considerando los Sistemas Absolutos y los Sistemas Gravitacionales.

a) Aceleración Lineal
b) Trabajo o Energía
c) Potencia
d) Momento de una Fuerza
e) Cantidad de Movimiento (Impulso)
f) Masa Específica
g) Peso Específico
h) Presión
i) Viscosidad Cinemática
j) Viscosidad Dinámica

Solución:

a) Aceleración lineal.

Como sabemos las unidades de la aceleración lineal son metros entre segundos al cuadrado, por lo que las dimensiones en el sistema absoluto son:

$$[a] = [M^0 L T^{-2}]$$

y en el sistema Gravitacional

$$[a] = [F^0 L T^{-2}]$$

b) Trabajo o Energía

Las unidades de Trabajo o Energía son Julios o Joule que están dados por Newton x metro, por lo que sus dimensiones en el sistema Gravitacional son:

$$[\text{Trabajo}] = [F L T^0]$$

y en el sistema Absoluto:

sabemos que las dimensiones de Fuerza en el sistema Absoluto son: $[F] = [M L T^{-2}]$, entonces sustituimos $[F]$ en las dimensiones de trabajo y tenemos:

$$[\text{Trabajo}] = [M L T^{-2} L T^0],$$

simplificando nos queda

$$[\text{Trabajo}] = [M L^2 T^{-2}]$$

que son las dimensiones de trabajo en el sistema absoluto

c) Potencia.

Sus unidades son Watts o Joule/segundo, por lo que sus dimensiones en el sistema Gravitacional son:

$$[\text{Potencia}] = [F L T^{-1}]$$

y en el sistema Absoluto

$$[\text{Potencia}] = [M L^2 T^{-3}]$$

d) Momento de una fuerza.

Sus unidades son kilogramo-fuerza x metro, por lo que sus dimensiones son:

Sistema Gravitacional

$$[\text{Momento}] = [FLT^{0}]$$ y en el

Sistema Absoluto

$$[\text{Momento}] = [ML^{2} T^{-2}]$$

e) Cantidad de Movimiento (Impulso)

Sus unidades son kilogramo-masa x metro/segundo, por lo que sus dimensiones son:

Sistema Absoluto

$$[\text{Impulso}] = [MLT^{-1}]$$ y en el

Sistema Gravitacional

$$[\text{Impulso}] = [FL^{0} T]$$

f) Masa específica.

Sus unidades son Kilogramo-masa / metro cúbico

Sistema Absoluto

$$[\text{Masa Específica}] = [ML^{-3} T^{0}]$$

Sistema Gravitacional

$$[\text{Masa Específica}] = [FL^{-4} T^{2}]$$

g) Peso Específico.

Sus unidades son kilogramo-fuerza / metro cúbico

Sistema Gravitacional

$$[\text{Peso Específico}] = [FL^{-3} T^{0}]$$

Sistema Absoluto.

$$[\text{Peso Específico}] = [ML^{-2} T^{-2}]$$

h) Presión.

Sus unidades son Newton / metro cuadrado

Sistema Gravitacional

$$[\text{Presión}] = [FL^{-2} T^{0}]$$

Sistema Absoluto

$$[\text{Presión}] = [ML^{-1} T^{-2}]$$

i) Viscosidad cinemática

Sus unidades son metro cuadrado/segundo

Sistema Gravitacional

$$[\text{Viscosidad cinemática}] = [F^0 L^2 T^{-1}]$$

Sistema Absoluto

$$[\text{Viscosidad cinemática}] = [M^0 L^2 T^{-1}]$$

j) Viscosidad dinámica

Sus unidades son kilogramo-fuerza x segundo/metro cuadrado

Sistema Gravitacional

$$[\text{Viscosidad dinámica}] = [FLT^{-2}]$$

Sistema Absoluto

$$[\text{Viscosidad dinámica}] = [ML^{-1} T^{-1}]$$

Nota: las unidades que se dan de las magnitudes están en base al Sistema Internacional.

4.1 Ecuaciones Dimensionales.

Son las relaciones simbólicas que caracterizan la homogeneidad de las fórmulas. Expresan la vinculación de una magnitud dada con las magnitudes fundamentales (en base a sus dimensiones) y permiten pasar de un sistema de magnitudes fundamentales a otro.

Una fórmula entre magnitudes físicas es dimensionalmente homogénea, cuando ambos miembros expresan cantidades iguales de la misma magnitud, y por tanto de iguales dimensiones.

Con frecuencia, el examen de las dimensiones de una ecuación (análisis dimensional), puede suministrar información útil, ya que así nos podremos dar cuenta si la ecuación dimensional es homogénea o no.

Por ejemplo, en la ecuación: aceleración = velocidad/tiempo las dimensiones deben ser tales que:

$$[a] = \frac{[v]}{[t]}$$

sabemos que:

$$[a] = [LT^{-2}] \quad ; \quad [v] = [LT^{-1}] \quad y \quad [t] = [T]$$

si sustituimos las dimensiones en la ecuación de aceleración tendremos:

$$[LT^{-2}] = \frac{[LT^{-1}]}{[T]}$$

y realizando las operaciones tendremos:

$$[LT^{-2}] = [LT^{-2}]$$

con lo que el análisis de la ecuación de dimensiones nos demuestra que la ecuación es dimensionalmente homogénea.

Ahora si suponemos que la ecuación correcta fuera:

velocidad = aceleración/tiempo

Entonces el análisis dimensional nos diría:

$$[LT^{-1}] = \frac{[LT^{-2}]}{[T]}$$

por lo que tendríamos:

$$[LT^{-1}] \neq [LT^{-3}]$$

lo que resulta ser incorrecto. El análisis de la ecuación dimensional nos indicaría que la ecuación de la que se partió era incorrecta.

Las ecuaciones dimensionales nos permiten también obtener - las dimensiones de algunos de sus miembros en base a las dimensiones de los demás miembros.

Ejemplo:

3.- La ecuación de esfuerzos, para carga excéntrica en una columna corta esta dada por :

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{Pex}{I}$$

Esta ecuación es dimensionalmente correcta cuando P es una fuerza, A una área y tanto e como x se miden en unidades de longitud. ¿Cuáles son las dimensiones del esfuerzo σ y el momento de inercia del área I?

Solución:

Usando las dimensiones fundamentales del Sistema Absoluto, M,L,T tendremos que las dimensiones de las variables son:

$$[P] = [MLT^{-2}]$$
$$[A] = [M^0L^2T^0] = [L^2]$$
$$[e] = [M^0L\ T^0] = [L]$$
$$[x] = [M^0L\ T^0] = [L]$$

si obtenemos las dimensiones del término P/A tendremos:

$$\frac{[P]}{[A]} = \frac{[MLT^{-2}]}{[L^2]} = [ML^{-1}T^{-2}]$$

como este término, se suma con el término Pex/I entonces deben tener las mismas dimensiones, por lo que podemos igualarlo con las dimensiones $[ML^{-1}T^{-2}]$ y despejar a [I] para así conocer sus dimensiones.

$$[ML^{-1}T^{-2}] = \frac{[MLT^{-2}]\,[L]\,[L]}{[I]}$$

realizamos operaciones y nos queda:

$$[ML^{-1}T^{-2}] = \frac{[ML^3T^{-2}]}{[I]}$$

y despejando a [I]

$$[I] = \frac{[ML^3T^{-2}]}{[ML^{-1}T^{-2}]}$$

entonces:

$$[I] = [M^0L^4T^0]$$

Como las unidades de los dos términos son $[ML^{-1}T^{-2}]$, entonces las dimensiones de $[\sigma]$ son:

$$[\sigma] = [ML^{-1}T^{-2}]$$

Para obtener las dimensiones en el sistema Gravitacional podemos seguir el mismo procedimiento, solo que ahora con dimensiones fundamentales de este, o solamente sustituir las dimensiones derivadas de masa en el Sistema Gravitacional que son:

$$[m] = [FL^{-1}T^{2}]$$

como en $[I] = [L^{4}]$ no aparecen dimensiones de masa, entonces este tiene las mismas dimensiones en el Sistema Gravitacional. No así en las dimensiones del esfuerzo, que si aparece, ahí sustituimos sus dimensiones y realizamos las operaciones.

$$[\sigma] = [FL^{-1}T^{2}L^{-1}T^{-2}]$$

entonces nos queda: $[\sigma] = [FL^{-2}T^{0}]$

que son las dimensiones del esfuerzo en el Sistema Gravitacional.

Podemos resumir los resultados como:

$$[\sigma] = [ML^{-1}T^{-2}] = [FL^{-2}T^{0}] \text{ y}$$
$$[I] = [M^{0}L^{4}T^{0}] = [F^{0}L^{4}T^{0}]$$

Ejemplo:

4.- La expresión relativista para la energía cinética esta dada por:

$$E = mc^{2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-(v^{2}/c^{2})}} - 1\right]$$

En donde m es la masa, v la velocidad de una partícula y c la velocidad de la luz. Si esta expresión es dimensionalmente correcta, determine las dimensiones de E a partir de tal ecuación.

Solución:

Dimensiones de las variables en el Sistema Absoluto y Gravitacional.

$$[m] = [M] = [FL^{-1}T^{2}]$$
$$[c] = [LT^{-1}]$$
$$[v] = [LT^{-1}]$$

en el término $\frac{[V^2]}{[c^2]} = \frac{[L^2 T^{-2}]}{[L^2 T^{-2}]}$ por lo que el término

$\left[\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - 1\right]$ es adimensional (sin dimensiones).

Entonces:

$$[E] = [mc^2]$$

sustituyendo las dimensiones de cada sistema tenemos

Sistema Absoluto

$$[E] = [M][L^2 T^{-2}] = [ML^2 T^{-2}]$$

Sistema Gravitacional

$$[E] = [FL^{-1} T^2][L^2 T^{-2}] = [FL]$$

Por lo tanto las dimensiones pedidas son:

$$[E] = [ML^2 T^{-2}] = [FLT^0]$$

4.2 Transformaciones de Expresiones.

Con frecuencia es necesario hacer transformaciones de las - unidades de una magnitud en un sistema determinado, a las unidades de otro. Esto se puede hacer utilizando factores de conversión que relacionan las diferentes unidades de la misma clase, - para lo cual es necesario cerciorarse de las unidades que intervienen en la modificación de la magnitud física.

Para hacer la transformación de unidades se utilizan factores de conversión. Por ejemplo, sabemos que:

1 Newton = 0.1020 kg-f o 1 kg-f = 9.81 Newton.

para hacer uso de estas equivalencias, se divide cada miembro de la ecuación entre 1 Newton (o 1 kg) para obtener:

$$1 = \frac{0.1020 \text{ Kg-f}}{1 \text{ N}} \quad \text{o} \quad 1 = \frac{9.81 \text{ N}}{1 \text{ kg-f}}$$

A estas cantidades se les llama factores de conversión. Como podemos observar el factor de conversión es igual a la unidad. Cuando se multiplica o se divide cualquier cantidad por dicho —

factor unitario, la cantidad permanece sin cambio; solamente las unidades de la cantidad cambian.

Por ejemplo, transformar 50 N a kilogramo-fuerza.

Solución:

Se tiene que:

$$50\ N = (50\ N)\left(\frac{0.1020\ kgf}{1\ N}\right)$$

esto es cierto porque el factor de multiplicación 0.1020 kgf es igual a la unidad, pero la unidad Newton se puede cancelar para dar:

$$50\ N = (50\ \cancel{N})\left(\frac{0.1020\ kgf}{1\ \cancel{N}}\right) = 5.1\ kgf$$

como podemos observar la unidad, que queremos cambiar o transformar, (en este caso el Newton) debe estar en el denominador del factor de conversión para que al hacer la multiplicación se puedan cancelar, y solamente nos quede la unidad a la que estamos transformando. En el ejemplo tendríamos que las unidades son:

$$\frac{N}{N} \times kgf = kgf$$

Algunas de las equivalencias más usadas en la Mecánica son:

Longitud:

1 kilometro (km) = 1000 m = 0.6214 mi = 3280.84 ft

1 metro (m) = 100 cm = 1000 mm = 39.37 in = 3.2808 ft

1 centímetro (cm) = 0.3937 in

1 pulgada (in) = 2.54 cm = 25.4 mm

1 pie (ft) = 12 in = 30.48 cm = 0.00019 mi

1 milla (mi) = 1000 in = 1.609 km = 1609 m = 5280 ft

Superficie:

1 metro cuadrado (m^2) = 10,000 cm^2 = 10.76 ft^2 = 1550 in^2

1 kilometro cuadrado (km^2) = 1×10^6 m^2 = 0.3861 mi^2

1 pulgada cuadrada (in^2) = 6.4516 cm^2

1 pie cuadrado (ft^2) = 144 in^2 = 929 cm^2 = 0.0929 m^2

Volumen:

1 litro (l) = 1000 cm^3 = 61.02 in^3 = 0.03532 ft^3

1 metro cúbico (m^3) = 1000 l = 35.32 ft^3

1 pie cúbico (ft^3) = 7.481 galones (u.s.a.) = 0.02832 in^3 = 28.32 l

1 galón (U.S.A.) = 231 in^3 = 3.785 l

Masa:

1 tonelada-masa (tn) = 1000 kg

1 kilogramo-masa (kg) = 2.2046 lb = 0.06852 slug = 1000 gr

1 libra-masa (lb) = 453.6 gr = 0.03108 slug

1 slug = 32.174 lb = 14.59 kg

1 onza (oz) = 28.35 gr = 0.02835 kg = 0.06250 lb

Fuerza:

1 Newton (N) = 10^5 dinas = 0.1020 kgf = 0.2248 lbf

1 libra-fuerza (lbf) = 4.448 N = 0.4536 kgf = 32.17 poundal

1 kilogramo-fuerza (kgf) = 2.205 lbf = 9.81 N

1 dina = 10^{-5} N = 2.248 x 10^{-6} lbf = 7.233 x 10^{-5} poundal

Ejemplo:

5.- La rapidez de una partícula es de 23.6 ft/s, transformela a:

a) mi/h

b) km/h

c) m/s

Solución:

a) Como sabemos 1 ft = 0.00019 mi y
1 h = 3600 s

entonces:

$$23.6\ \frac{ft}{s} = 23.6\ \frac{ft}{s} \times \frac{0.00019\ mi}{1\ ft} \times \frac{3600\ s}{1\ h}$$

por lo que:

$$23.6\ \frac{ft}{s} = 16.14\ \frac{mi}{h}$$

b) Sabemos que $1\ km = 3280.84\ ft$ y

$1\ h = 3600\ s$

entonces:

$$23.6\ \frac{ft}{s} = 23.6\ \frac{ft}{s} \times \frac{1\ km}{3280.84\ ft} \times \frac{3600\ s}{1\ h}$$

por lo tanto:

$$23.6\ \frac{ft}{s} = 25.89\ \frac{km}{h}$$

c) Sabemos que: $1\ ft = 0.3048\ m$

entonces:

$$23.6\ \frac{ft}{s} = 23.6\ \frac{ft}{s} \times \frac{0.3048\ m}{1\ ft}$$

por lo tanto:

$$23.6\ \frac{ft}{s} = 7.19\ \frac{m}{s}$$

6.- La energía cinética de una partícula en un instante dado es de 32420 ft·lbf.

¿ Cuál es su valor en kgf·m ?

Solución:

Sabemos que: $1\ ft = 0.3048\ m$ y

$1\ lbf = 0.4536\ kgf$

entonces:

$$32420\ ft\cdot lbf = 32420\ ft\ lbf \times \frac{0.3048\ m}{1\ ft} \times \frac{0.4536\ kgf}{1\ lbf}$$

por lo que:

$$32420\ ft\cdot lbf = 4482\ kgf\cdot m$$

7.- La presión del aire en los neumáticos de un automóvil es de 28 lbf/in^2, indique cuál debe ser la presión en kgf/cm^2 y en N/m^2.

Solución:

Para transformarla a kgf/cm^2 sabemos que:

$$1\ lbf = 0.4536\ kgf \quad y$$
$$1\ in^2 = 6.4516\ cm^2$$

entonces:

$$28\ \frac{lbf}{in^2} = 28\ \frac{lbf}{in^2} \times \frac{0.4536\ kgf}{1\ lbf} \times \frac{1\ in^2}{6.4516\ cm^2}$$

con lo que tenemos que:

$$28\ \frac{lbf}{in^2} = 1.97\ \frac{kgf}{cm^2}$$

Para transformar a N/m^2 sabemos que:

$$1\ lbf = 4.448\ N \quad y$$
$$1\ m^2 = 1550\ in^2$$

entonces:

$$28\ \frac{lbf}{in^2} = 28\ \frac{lbf}{in^2} \times \frac{4.448\ N}{1\ lbf} \times \frac{1550\ in^2}{1\ m^2}$$

con lo que tendremos que:

$$28\ \frac{lbf}{in^2} = 193043\ \frac{N}{m^2}$$

8.- La aguja de un fonógrafo se pone en contacto con la superficie de un disco sobre un área circular, cuyo radio es de 0.2 mm; calcule la presión en lbf/in^2 ejercida sobre el disco por el brazo del fonógrafo, si el peso que transmite a la aguja dicho brazo es de 4 onzas.

Solución:

Datos:

$r = 0.2$ mm

$p = (?)\ lbf/in^2$

$w = 4$ onzas

como sabemos

$$P = \frac{W}{A}$$

Como W debe estar en libras entonces lo transformamos a libras sabiendo que:

$$1 \text{ lbf} = 16 \text{ onzas}$$

$$4 \text{ onzas} = 4 \text{ onzas} \times \frac{1 \text{ lbf}}{16 \text{ onzas}} = 0.25 \text{ lbf}$$

y el área la necesitamos en in^2 entonces transformamos mm a in, sabiendo que: $1 \text{ in} = 25.4 \text{ mm}$

$$0.2 \text{ mm} = 0.2 \text{ mm} \times \frac{1 \text{ in}}{25.4 \text{ mm}} = 0.00787 \text{ in}$$

y calculando el área tenemos:

$$A = \pi r^2$$

$$A = \pi (0.00787 \text{ in})^2 = 0.0001946 \text{ in}^2$$

sustituimos en la fórmula:

$$P = \frac{0.25 \text{ lbf}}{0.0001946 \text{ in}^2} = \underline{\underline{1284.69 \frac{\text{lbf}}{\text{in}^2}}}$$

4.3 Traducción de Fórmulas.

Supongamos que tenemos la siguiente expresión:

$$M = \frac{Wl^2}{8}$$

que establece el momento flexionante máximo medido en kgf·m de una viga simplemente apoyada sujeta a una carga W dada en kgf/m donde l es el claro de la viga medida en metros, nos piden dar el momento flexionante en lbf·in teniendo la carga en lbf/ft y el claro en ft.

Si analizamos las unidades del sistema métrico tendremos:

$$\text{kg}\cdot\text{m} = (\text{kgf/m})(\text{m})^2$$

$kg \cdot m = kgf \cdot m$ entonces tendremos que el factor 1/8 no tiene unidades, por lo que es fáctible utilizar las unidades del sistema inglés.

$$lbf \cdot in = (lbf/ft)\ (ft)^2$$

lo que nos quedaría:

$$lbf \cdot in = (lbf\ ft)$$

para tener el momento flexionante en lbf·in podemos obtener el resultado en lbf·ft y después transformarlo a lbf·in, lo que resultaría lógico si tenemos que obtener un solo resultado, pero si nos piden 100, el estar convirtiendo cada resultado, resultará aparte de tardado, tedioso, pero para evitar esto, podemos traducir la fórmula, de modo que usemos los datos en las unidades que nos dan y obtengamos el resultado en las unidades que nos piden, con lo cual solo haríamos una transformación.

La que haríamos de la siguiente manera:
como el resultado lo tenemos en lbf·ft, entonces hay que convertirlo a lbf·in, sabiendo que 1 ft = 12 in.
que se puede representar como $\frac{12 in}{1\ ft}$

que es el factor de conversión por el cual hemos de multiplicar la ecuación para obtener el resultado en lbf·in, si lo metemos en la fórmula tendremos:

$$M = \left(12\ \frac{in}{ft}\right)\frac{W(lbf/ft)\ l^2\ (ft^2)}{8} = \frac{3}{2}\, Wl^2\ \ (lbf \cdot in)$$

lo que nos queda:

$$M = \frac{3\ Wl^2}{2}$$

que es la fórmula esperada donde:

M .- Momento flexionante, en lbf·in

W .- Carga, en lbf/ft

l .- Claro de la viga, en ft

Como hemos visto resulto más fácil traducir la fórmula una sola vez que el resultado 100 veces o más.

Ahora supongamos que tenemos la fórmula de Manning

$$V = \frac{1.486}{n} Rh^{2/3} S^{1/2}$$

donde:

n.- Coeficiente de rugosidad, sin dimensiones.

V.- Velocidad media, en ft/s

Rh.- Radio hidráulico, en ft

S.- Pendiente, sin dimensiones.

y necesitamos usarla en el sistema métrico MKS

Solución: Primero analizamos las unidades en el sistema inglés.

$$ft/s \neq ft^{2/3}$$

por lo que el coeficiente 1.486 si tiene unidades, las cuales son:

$$ft/s = c\ ft^{2/3} \qquad \text{despejando } c = 1.486$$

$$c = \frac{ft^{1/3}}{s}$$

entonces convirtiendo los pies a metros para poderla usar en el sistema MKS, tendremos que:

$$1.486 \frac{ft^{1/3}}{s} = 1.486 \frac{ft^{1/3}}{s} \times (0.3048)^{1/3} \frac{m^{1/3}}{ft^{1/3}}$$

$$1.486 \frac{ft^{1/3}}{s} = 1.00 \frac{m^{1/3}}{s}$$

por lo tanto la fórmula de Manning en el sistema MKS sería:

$$V = \frac{1}{n} Rh^{2/3} S^{1/2}$$

donde:

n.- Coeficiente de rugosidad sin dimensiones.

V.- Velocidad media, en m/s

Rh.- Radio hidráulico en m.

S.- Pendiente sin dimensiones.

9.- Para obtener la carga que puede soportar un muelle helicoidal se utiliza la expresión:

$$P = 0.196 \frac{d^3}{r} f$$

donde:

P.- Carga en lbf

d.- Diámetro del alambre en in

f.- Esfuerzo medio permisible en lbf/in^2

r.- Radio medio del resorte en in

traduzca la expresión para poder utilizar las longitudes en cm, los esfuerzos en kgf/cm y las fuerzas en toneladas.

Solución: Analizamos las unidades inglesas:

$$lbf = \frac{in^3}{in} \times \frac{lbf}{in^2}$$

$$lbf = lbf$$

por lo que el coeficiente 0.196 no tiene unidades, por lo que podemos usar la fórmula en el sistema métrico sin modificarla.

Ahora analizamos las unidades del sistema métrico:

$$tnf = \frac{cm^3}{cm} \times \frac{kgf}{cm^2}$$

$$tnf \neq kgf$$

por lo que hay que convertir los kilogramos a toneladas, sabemos que 1 tnf = 1000 kgf entonces el factor de conversión a aplicar en la fórmula es:

$$\frac{1 \text{ tnf}}{1000 \text{ kgf}}$$

$$P = 0.196 \frac{d^3 (cm^3)}{r \ (cm} f \frac{kgf}{cm^2} \times \frac{1 \text{ tnf}}{1000 \text{ kgf}}$$

entonces:

$$P = 0.000196 \frac{d^3}{r} f \qquad (tnf)$$

por lo tanto nuestra fórmula traducida nos queda:

$$\underline{\underline{P = 0.000196 \frac{d^3}{r} f}}$$

donde:

P.- Carga, en tnf

d.- Diámetro del alambre, en cm

f.- Esfuerzo permisible, en kgf/cm^2

r.- Radio medio del resorte, en cm

10.- La pérdida de carga de velocidad en la conducción de agua por una tubería, ocasionada por la fricción entre el líquido y las paredes de ésta, se puede estimar en ft empleando la fórmula:

$$H = \frac{fl}{d} \frac{v^2}{2g}$$

En la cual:

f.- Coeficiente de fricción (adimensional)

v.- Rapidez media, en ft/s

l.- Longitud de la conducción, en ft

d.- Diámetro interno del tubo en in

g.- $32.2\ ft/s^2$

Halle la forma de la ecuación cuando H, l, v, d y g se midan en: m, m, m/s, cm, m/s^2 respectivamente.

Solución: Analizamos las unidades inglesas en la fórmula:

$$ft = \frac{ft}{in} \times \frac{ft^2/s^2}{ft/s^2}$$

$$ft = \frac{ft^2}{in}$$

por lo que hay un factor de conversión de in a ft con unidades in/ft, que hay que convertir a cm/m para obtener H en metros -- con l en m, v en m/s, d en m y $g = 9.81\ m/s^2$

como $\quad 1\ in = 2.54\ cm \quad y \quad 1\ ft = 0.3048\ m$

$$1 \frac{in}{ft} = 1 \frac{in}{ft} \times \frac{2.54\ cm}{1\ in} \times \frac{1\ ft}{0.3048\ m} = 8.333 \frac{cm}{m}$$

entonces multiplicando a la fórmula por el factor de conversión obtenido tendremos:

$$H = \frac{f\ l(m)}{d\ (cm)} \frac{v^2(m^2/s^2)}{2g\ (m/s^2)} \times 8.333 \frac{cm}{m}$$

entonces:

$$H = 4.166 \frac{fl}{d} \frac{v^2}{g} \quad (m)$$

por lo tanto la fórmula buscada es:

$$\underline{\underline{H = 4.166 \frac{fl}{d} \frac{v^2}{g}}}$$

donde:

H.- Pérdida de carga, en m

f.- Coeficiente de fricción (adimensional)

l.- Longitud de la conducción, en m

d.- Diámetro interno del tubo, en cm

g.- 9.81 m/s^2

CAPITULO IV

" CONCEPTOS BASICOS DE LA ESTATICA "

Una fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro; - está caracterizada por: su punto de aplicación, su magnitud, su dirección y su sentido; por lo que puede representarse por me-- dio de un vector. Un vector se define como una cantidad que -- tiene magnitud, dirección y sentido y puede ser representado - por medio de un segmento de recta dibujado a escala (con lo que se indica su magnitud) en un espacio coordenado, con una incli- nación específica (que representa su dirección) y una flecha - (que establece su sentido). La notación de vector se hará de - la siguiente manera: " $\overline{V}$ ".

Un vector que representa una fuerza que actúa sobre una -- partícula dada, tiene un punto de aplicación bien definido, a - este vector se le conoce como "vector fijo" y no puede moverse_ sin modificar las condiciones del problema.

Otras cantidades físicas, como por ejemplo los pares de -- fuerzas se representan por vectores que pueden desplazarse li-- bremente en el espacio, a estos se les llama "vectores libres", algunas otras se representan por un vector que se puede mover a lo largo de una recta dada (línea de acción), colineal con el vector mismo, a este se le conoce como "vector deslizante", un ejemplo de él es una fuerza que actúa sobre un cuerpo rígido animado de movimientos de rotación.

Dos vectores son iguales solo sí tienen la misma dirección igual sentido y la misma magnitud, tengan o no el mismo punto de aplicación.

Dos vectores son equivalentes según determinada aptitud si cada uno de ellos produce el mismo efecto en tal disposición . Los vectores iguales pueden ser o no equivalentes y los vectores equivalentes pueden ser o no iguales.

El vector negativo de un vector $\overline{V}$ se define como el vector que tiene la misma magnitud de $\overline{V}$ y dirección opuesta a la de $\overline{V}$, $(-\overline{V})$. Esto es que los vectores $\overline{V}$ y $-\overline{V}$ son iguales y opuestos . Logicamente tendremos:

$$\overline{V} + (-\overline{V}) = 0$$

IV.1 Postulado de Stevinus o Regla Generalizada (Ley) del Paralelogramo.

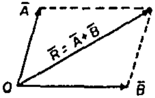
Ley del Paralelogramo.

Esta ley establece que:

"Dos fuerzas que actúan sobre una partícula son equivalentes a una sola llamada resultante, la cual esta dada por la diagonal del paralelogramo que tiene lados iguales a las fuerzas dadas".

La ley del paralelogramo se fundamenta en la evidencia experimental y no puede ser demostrada ni deducida matemáticamente.- Esta ley se puede explicar de la siguiente manera:

Si desde un punto, cualquiera, se trazan dos vectores que - representan en magnitud, dirección y sentido a dos fuerzas concurrentes $\overline{A}$ y $\overline{B}$ y se construye un paralelogramo cuyos lados son -- esos vectores, la diagonal de este paralelogramo que une el origen con el vertice opuesto, es un vector que representa una magnitud, con dirección y sentido la cual será la fuerza resultante $\overline{R}$, ($\overline{R} = \overline{A} + \overline{B}$)que tendrá por origen el origen de las dos fuerzas actuantes, es decir, el punto en el cual están aplicadas las --- fuerzas concurrentes.

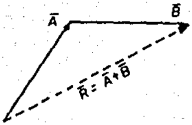


Como el paralelogramo construido con los vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$ no depende del orden en que se tomen $\overline{A}$ y $\overline{B}$, se concluye que la suma de dos vectores es conmutativa, por lo que podemos escribir:

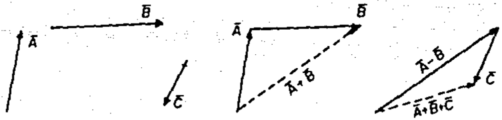
$$\overline{A} + \overline{B} = \overline{B} + \overline{A}$$

De la ley del paralelogramo se puede obtener un segundo método para determinar la suma de dos vectores, este método se conoce como "La Regla del Triángulo", y consiste en lo siguiente:

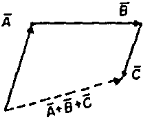
Se trazan dos vectores que representan en magnitud, dirección y sentido a dos fuerzas concurrentes de manera que el extremo de una $\overline{A}$ sea el origen de la otra $\overline{B}$ y se construye un triángulo (dos de sus lados serán los vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$) y el tercer lado del triángulo, es el vector que tiene por origen el del vector $\overline{A}$ y - como extremo el extremo del vector $\overline{B}$, este tercer lado representa la magnitud, dirección y el sentido de la resultante de las - dos fuerzas.



La suma de tres vectores $\overline{A}, \overline{B}$ y $\overline{C}$ se obtendrá por definición sumando primero los vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$ y luego sumando el vector $\overline{C}$ al vector $\overline{A} + \overline{B}$.



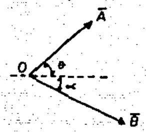
De igual manera se puede obtener la suma de 4 vectores, sumando el 4º vector a la suma de los otros 3. Con esto podemos deducir que la suma de cualquier número de vectores se puede obtener aplicando reiteradamente la ley del paralelogramo o la regla del triángulo a pares sucesivos de vectores. Ahora bien sino es necesario obtener la suma de $\overline{A} + \overline{B}$, podemos sumar los vectores directamente, es decir, $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$ y no $(\overline{A} + \overline{B}) + \overline{C}$, para esto colocamos sucesivamente el origen de uno de los vectores en el extremo del otro y por último unir el origen del primero con el extremo del último. Este método se conoce como: "Regla del Polígono".



Si los vectores dados son coplanarios (contenidos en un mismo plano) su suma puede obtenerse gráficamente con facilidad. En este caso se prefiere la suma repetida de la regla del triángulo a la aplicación de la ley del paralelogramo, debido a que es más sencilla y rápida.

-Suma Trigonométrica y Analítica de Fuerzas en el Plano.

Sean las fuerzas $\overline{A}$ y $\overline{B}$ aplicadas en el punto O.

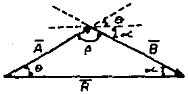


podemos encontrar su resultante, usando métodos trigonométricos

- Ley de los Senos
- Ley de los Cosenos

o el método analítico.

Para los métodos trigonométricos, primeramente construimos un triángulo, siguiendo para ello la ley del triángulo para la suma de fuerzas.



donde: $\beta = 180 - (\theta + \alpha)$

usando la ley de los senos tendríamos:

$$\frac{\overline{A}}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{\overline{B}}{\text{sen}\,\theta} = \frac{\overline{R}}{\text{sen}\,\beta}$$

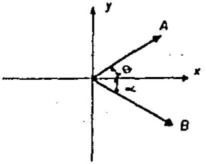
de donde el valor de R sería:

$$\overline{R} = \frac{\overline{A}\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{\overline{B}\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\theta}$$

y usando la ley de los Cosenos tendríamos:

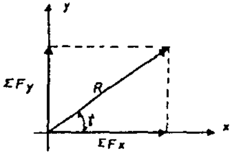
$$\overline{A}^2 = \overline{B}^2 + \overline{R}^2 - 2\overline{BR}\cos\alpha$$
$$\overline{B}^2 = \overline{A}^2 + \overline{R}^2 - 2\overline{AR}\cos\theta$$
$$\overline{R}^2 = \overline{A}^2 + \overline{B}^2 - 2\overline{AB}\cos\beta$$

Para usar el método análitico principiamos por poner las -- fuerzas en el sistema de ejes coordenados x,y.



y proyectamos las fuerzas $\overline{A}$ y $\overline{B}$ en los ejes x,y y después hacemos la suma de fuerzas en cada eje (tomamos los signos según el cuadrante).

$$\Sigma Fx = \overline{A}\cos\theta + \overline{B}\cos\alpha$$
$$\Sigma Fy = \overline{A}\operatorname{sen}\theta + \overline{B}\operatorname{sen}\alpha$$



usamos el teorema de Pitagoras y obtenemos el valor de $\overline{R}$

$$\overline{R}^2 = (Fx)^2 + (Fy)^2$$

es decir:

$$\overline{R} = \sqrt{(\overline{A}\cos\theta + \overline{B}\cos\alpha)^2 + (\overline{A}\operatorname{sen}\theta - \overline{B}\operatorname{sen}\alpha)^2}$$

la dirección de $\overline{R}$ será:

$$\gamma = tg^{-1}\frac{Fy}{Fx} = tg^{-1}\frac{(\overline{A}\operatorname{sen}\theta - \overline{B}\operatorname{sen}\alpha)}{(\overline{A}\cos\theta - \overline{B}\cos\alpha)}$$

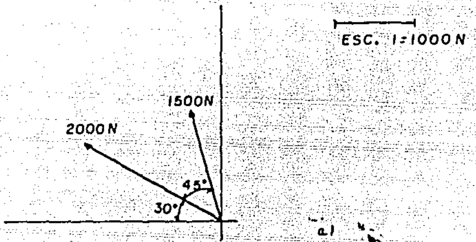
Los métodos más exactos entre gráficos y trigonométricos resultan ser los trigonométricos.

Ejemplos:

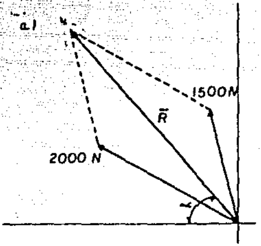
1.- Determinar gráficamente la magnitud y dirección de la resultante de las dos fuerzas dadas, empleando:

a) La ley del paralelogramo,

b) La regla del triángulo.

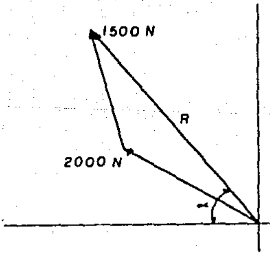


a)



R = 3240 N
α = 49.1°

b)



R = 3240 N
α = 49.1°

2.- Dos remolcadores A y C, arrastran un barco B. La tensión en el cable AB es de 4000lb, y la resultante de las dos fuerzas -- aplicadas en B está dirigida a lo largo del eje del barco. De-- terminar por trigonometría;

a) La tensión en el cable BC.

b) La magnitud de la resultante de las dos fuerzas aplicadas en B.

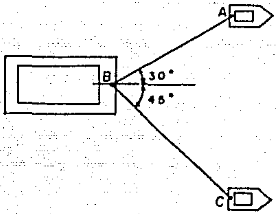
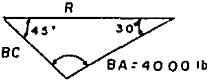


Fig. problema 2 y 3

Solución:

Usando la ley del triángulo tenemos:



a) aplicando la ley de los senos tendremos:

$$\frac{BC}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{4000 \text{ lb}}{\text{sen } 45^\circ}$$

y despejando BC:

$$BC = \frac{(4000 \text{ lb})(\text{sen } 30^\circ)}{\text{sen } 45^\circ} = 2828.43 \text{ lb}$$

que es el valor pedido para el cable <u>BC = 2828.43 lb.</u>

b) aplicando nuevamente la ley de los senos tenemos:

$$\frac{\overline{R}}{\text{sen}\,\Theta} = \frac{4000\ \text{lb}}{\text{sen}\ 45^\circ}$$

donde $\Theta = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$

despejando $\overline{R}$ nos queda

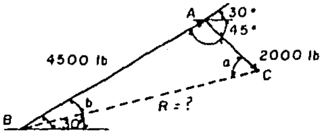
$$\overline{R} = \frac{(4000\text{lb})(\text{sen}\ 105^\circ)}{\text{sen}\ 45^\circ} = 5464.1\ \text{lb}$$

$$\overline{R} = 5464.1\ \text{lb}$$

3.- Dos remolcadores A y C arrastran un barco B. En un instante dado la tensión en el cable AB es de 4500 lb y la tensión en el cable BC es 2000 lb. Determinar por trigonometría la magnitud y dirección de la resultante de las dos fuerzas aplicadas en B en aquel instante.

Solución:

Aplicando la ley del triángulo tendremos:



calculando $\rho = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$

y usando la ley de los cosenos tenemos:

$$\overline{R}^2 = \overline{A}^2 + \overline{B}^2 - 2\overline{A}\overline{B}\cos\rho$$

sustituyendo valores y despejando $\overline{R}$

$$\overline{R} = \sqrt{(4000\text{lb})^2 + (2000\ \text{lb})^2 - 2(4500\ \text{lb})(2000\ \text{lb})\cos 105^\circ}$$

$$\overline{R} = 5376.69\ \text{lb}$$

para la dirección de $\overline{R}$ tenemos que:

$$\alpha = 30° - b$$

entonces usando la ley de los senos

$$\frac{\overline{R}}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{AC}{\operatorname{sen} b}$$

despejando b tenemos

$$b = \operatorname{sen}^{-1}\frac{AC \operatorname{sen}\theta}{\overline{R}}$$

sustituyendo

$$b = \operatorname{sen}^{-1}\frac{(2000\ \text{lb})(\operatorname{sen} 105°)}{5376.69} = 21.05$$

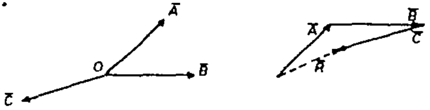
por lo que $\alpha = 30° - 21.05° = 8.95°$

entonces: $\boxed{\begin{array}{l}\overline{R} = 5376.69\ \text{lb} \\ \measuredangle\ 8.95°\end{array}}$

1.1 Concepto de Resultante de un Sistema de Fuerzas Concurrentes

Consideremos una partícula "O" sobre la cual actúan varias fuerzas, como todas las fuerzas consideradas pasan por el punto "O" se dice que son concurrentes. Estas fuerzas pueden sumarse por la regla del polígono y el vector $\overline{R}$ que se obtiene, representa la resultante de las fuerzas concurrentes, es decir,

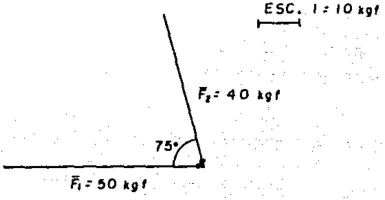
Resultante .- es la fuerza única que produce sobre la partícula "O" el mismo efecto que causan las fuerzas concurrentes dadas.



La resultante de un sistema de fuerzas concurrentes en el plano puede ser una fuerza o puede ser cero, entonces el sistema de fuerzas concurrentes esta en equilibrio.

Ejemplo:

4.- Considere un punto masa sobre el cual actúan dos fuerzas, F y F , cuyas magnitudes son 50 y 40 kgf. respectivamente. Si el ángulo que forman entre sí es de 75 , tal como se muestra en la figura.

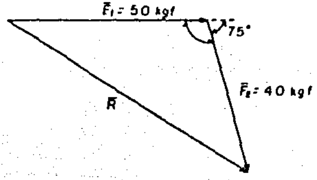


a) obtenga gráficamente la magnitud de la resultante.

b) mediante la ley de los cosenos obtenga la expresión matemática para calcular la magnitud de la resultante y aplíquela al problema.

Solución:

a) Usamos la regla del triángulo para sumar las fuerzas $\bar{F}_1$ y $\bar{F}_2$ y obtener la resultante $\bar{R}$.



Midiendo $\bar{R}$ tenemos que es igual a $\bar{R}$ = 71.7 kgf

b) Como sabemos la ley de los cosenos nos dice que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

donde sustituyendo por las variables que tenemos nos queda:

$$\bar{R}^2 = \bar{F}_1^2 + \bar{F}_2^2 - 2\bar{F}_1\bar{F}_2 \cos \theta$$

con lo que $\overline{R}$ nos queda

$$\overline{R} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \theta}$$

que es la expresión matemática para obtener la resultante, hay - que tomar en cuenta que el ángulo θ es el opuesto al lado $\overline{R}$.

Aplicando nuestra expresión al problema tenemos:

$$\overline{R} = \sqrt{(50\ kgf)^2 + (40\ kgf)^2 - 2(50kgf)(40kgf)\cos 105^\circ}$$

por lo que:

$$\underline{\underline{\overline{R} = 71.66\ kgf}}$$

IV.2 Principio de la Acción y la Reacción.

Como ya hemos visto este principio también es conocido como la Tercera Ley de Newton, la cual establece que:

"A toda acción corresponde una reacción igual y de sentido contrario".

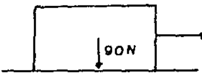
Esta ley o principio se utiliza generalmente para indicar - la magnitud y dirección de la fuerza aplicada a un cuerpo, cuando se conoce la fuerza sobre otro cuerpo.

Ejemplo:

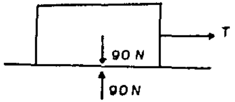
5.- Supongamos que tenemos un bloque que esta sobre el suelo si se le quiere imprimir una aceleración de 0.60 m/s² . ¿Cuál debe ser la tensión de la cuerda si el bloque pesa 90 N. Considérese despreciable la fuerza de rozamiento.

Solución:

Como podemos apreciar el bloque ejerce una fuerza (hacia abajo) de 90 N debida a el peso del mismo.



ahora tomando en cuenta el "Principio de la Acción y la Reacción" (tercera Ley de Newton) podemos deducir que el suelo tendrá una -reacción de sentido contrario y con una magnitud de 90 N sobre el bloque, para lograr un estado de equilibrio. Con lo que tendríamos:



como podemos ver las fuerzas verticales se contrarrestan entre sí ahora como el bloque se acelerará debido a la tensión T de la ---cuerda entonces se hace necesario el uso de la Segunda Ley de Newton.

$$F = ma$$

donde $F = T$

$$a = 0.6 \text{ m/s}^2$$

y m estará dada por

$$m = \frac{W}{g} \qquad \text{con } g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

entonces:

$$m = \frac{90 \text{ N}}{9.81 \text{ m/s}^2} = 9.17 \text{ kg}$$

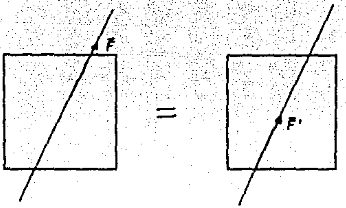
calculando T tendremos:

$$T = (9.17 \text{ kg})(0.6 \text{ m/s}^2) = 5.5 \text{ N}$$

que es la tensión necesaria para imprimir al bloque una aceleración de 0.6 m/s^2.

IV.3 Principio de Transmisibilidad.

Este principio establece que: "las condiciones de equilibrio o de movimiento de un cuerpo rígido permanecerán inmodificables - si una fuerza que actúa en un punto dado del cuerpo rígido es ---reemplazada por otra de la misma magnitud e igual dirección, pero que actúa en un punto diferente con la condición que las dos fuer zas tengan la misma línea de acción.



Las dos fuerzas $\overline{F}$ y $\overline{F}'$ tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido, el punto de aplicación no es de importancia, siempre y cuando la línea de acción de la fuerza no cambie. Estas fuerzas pueden ser representadas por vectores deslizantes (llamados así porque se pueden deslizar a lo largo de su línea de acción).

IV.4 Principio de la Superposición de Causas y Efectos.

"El efecto que una fuerza ejerce sobre una partícula, es independiente de los efectos de las demás fuerzas aplicadas a la misma partícula. Así, para encontrar el efecto final que un sistema de fuerzas ejerce sobre una partícula, es suficiente sumar o superponer los efectos de todas y cada una de las fuerzas que actúan sobre dicha partícula".

IV.5 Algebra de Vectores.

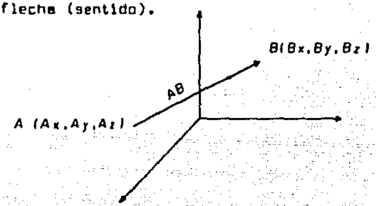
Como la fuerza es una cantidad vectorial que se puede representar como:

$$\overline{F} = Fxi + Fyj + Fzk$$

es necesario hacer enfásis en el Algebra de Vectores antes de ver la composición y descomposición de fuerzas.

5.1 Representación de Vectores.

Un vector se puede representar por medio de un segmento de recta dibujado a escala (con lo cual indicamos su magnitud) en un espacio coordenado, con una inclinación específica (dirección) y una flecha (sentido).



Donde la magnitud del vector $\overline{AB}$ estará dada por la ecuación:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(Bx - Ax)^2 + (By - Ay)^2 + (Bz - Az)^2}$$

y las componentes escalares del vector $\overline{AB}$ son:

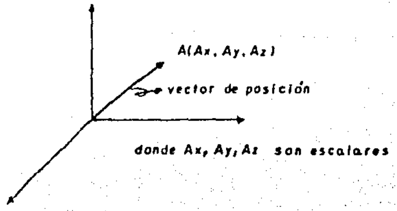
$Bx - Ax$

$By - Ay$

$Bz - Az$

5.2 Vector de Posición.

Sea $A(Ax,Ay,Az)$ un punto en el espacio de tres dimensiones, entonces el vector de posición del punto A, esta dado por el segmento dirigido que parte del origen del sistema al punto A.

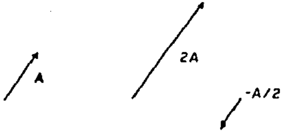


5.3 Multiplicación de un Vector por un Escalar.

La multiplicación de un vector $\overline{A}$ por un escalar (entiendase como un número simple) n, se denota como $n\overline{A}$, lo cual no es otra cosa que el vector $\overline{A}$ aumentado, disminuido o inalterado, según sea el valor de n.

Ejemplo:

6.- Sea el vector $\overline{A}$ obtenga la operación $2\overline{A}$ y $-\overline{A}/2$.



Como podemos ver el vector $2\overline{A}$ tiene por magnitud el doble del módulo del vector $\overline{A}$ dado y tiene la misma dirección y sentido que $\overline{A}$. El vector $-\overline{A}/2$ tiene como magnitud la mitad del módulo del vector $\overline{A}$, la misma dirección pero sentido contrario.

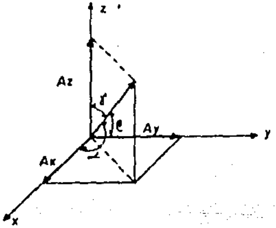
5.4 Cosenos Directores.

Sean α, β, γ los ángulos que definen la dirección de la fuerza $\overline{F}$ respecto a los ejes x,y,z respectivamente, los cosenos de α, β, γ se conocen como cosenos directores de la fuerza $\overline{F}$ y estan dados por:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{A}x}{|\overline{A}|}$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{A}y}{|\overline{A}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\overline{A}z}{|\overline{A}|}$$

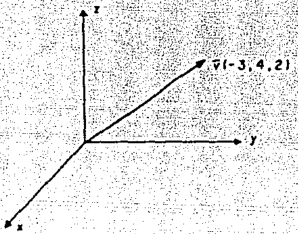


Los cosenos directores cumplen con la ecuación:

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

Ejemplo:

7.- Obtenga los cosenos directores del vector de posición indicado en la figura y compruebe la ecuación: $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$



Solución:

Primero obtenemos la magnitud del vector, la cual esta dada por:

$$|\overline{v}| = \sqrt{vx^2 + vy^2 + vz^2}$$

sustituyendo valores tenemos:

$$|\overline{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (2)^2} = 5.385$$

ahora obtenemos los cosenos directores del vector $\overline{v}$

$$\cos\alpha = \frac{vx}{|\overline{v}|} = \frac{-3}{5.385} = 0.557$$

$$\cos\beta = \frac{vy}{|\overline{v}|} = \frac{4}{5.385} = 0.743$$

$$\cos\gamma = \frac{vz}{|\overline{v}|} = \frac{2}{5.385} = 0.371$$

y comprobando en la ecuación tendremos:

$$(0.557)^2 + (0.743)^2 + (0.371)^2 = 1$$

$$0.310 + 0.552 + 0.138 = 1$$

$$1 = 1$$

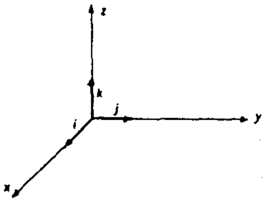
con lo cual queda comprobada la veracidad de la ecuación.

5.5 Vectores Unitarios.

La multiplicación de un vector por un escalar se expresa en función del producto de un escalar y un vector. Se define al vec tor de magnitud unitario como un vector con cierta dirección y - sentido determinados. El vector unitario $\overline{e}$ se puede expresar en la dirección del vector $\overline{A}$ como:

$$\overline{e}_A = \frac{\overline{A}}{\overline{A}}$$

Los vectores unitarios se pueden definir en cualquier dirección. Sin embargo los vectores unitarios más usados son aquellos que tienen las direcciones x,y,z, de las coordenadas cartesianas rectangulares, a las cuales se les da el nombre de vectores coordenados unitarios y se indican por medio de las letras i,j,k; según las direcciones x,y,z respectivamente.



Así podemos escribir los vectores unitarios en las direcciones x,y,z de la siguiente manera:

$$i = \frac{\overline{x}}{|\overline{x}|} \quad ; \quad j = \frac{\overline{y}}{|\overline{y}|} \quad ; \quad k = \frac{\overline{z}}{|\overline{z}|}$$

Haciendo uso de los vectores coordenados unitarios podemos expresar el vector $\overline{A}$ en la siguiente forma:

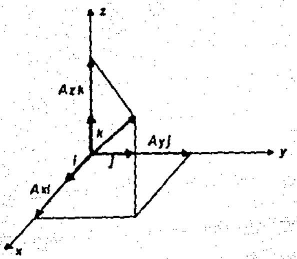
$$\overline{A} = \overline{A}x + \overline{A}y + \overline{A}z$$

a la cual se le conoce como expresión de un vector en función de sus componentes, ya que $\overline{A}x$, $\overline{A}y$, $\overline{A}z$ don los vectores componentes, que se pueden resolver en un escalar correspondiente y en un vector coordenado unitario:

$$\overline{A}x = \overline{A}xi \quad ; \quad \overline{A}y = \overline{A}yj \quad ; \; ; \quad \overline{A}z = \overline{A}zk$$

por lo que tenemos:

$$\overline{A} = Axi + Ayj + Azk$$



Por definición tendremos que el vector unitario en la di--rección del vector $\overline{A}$ será:

$$e_A = \frac{\overline{A}}{|\overline{A}|} = \frac{(Axi + Ayj + Azk)}{|\overline{A}|}$$

Ejemplo:

8.- Tres vectores $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, tienen magnitudes de 20, 50, y 75 unidades, y vectores unitarios $\overline{e}_A$, $\overline{e}_B$, $\overline{e}_C$, respectivamente. Expresar estos vectores en función de sus vectores unitarios.

Solución:

Tenemos por definición que:

$$e_A = \frac{\overline{A}}{|\overline{A}|}$$

entonces despejando $\overline{A}$ tendremos:

$$\overline{A} = |\overline{A}|\,\overline{e}_A$$

y sustituyendo valores tenemos:

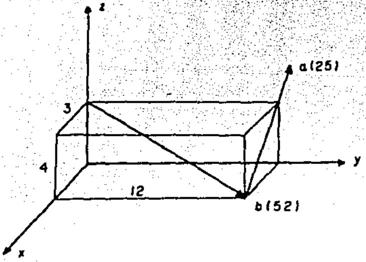
$$\overline{A} = 20\,\overline{e}_A$$

de igual manera para los otros dos vectores:

$$\overline{B} = 50\,\overline{e}_B$$

$$\overline{C} = 75\,\overline{e}_C$$

9.- Con referencia en la figura escribir las expresiones vectoriales para a y b.



Solución:

Primero obtenemos las coordenadas de los puntos conocidos del vector $\overline{b}$ que son:

$$B_1(0,0,4) \quad y \quad B_2(3,12,0)$$

después obtenemos el vector que pasa por esos dos puntos, que se pueden representar de la siguiente manera como vector de posición del origen al punto.

$$\overline{OB}_1 = 4k \quad ; \quad \overline{OB}_2 = 3i + 12j$$

$$\overline{B} = \overline{OB}_2 - \overline{OB}_1 = (3i + 12j) - (4k)$$

$$\overline{B} = 3i + 12j - 4k$$

luego obtenemos su magnitud

$$\overline{B} = \sqrt{(3)^2 + (12)^2 + (-4)^2} = 13$$

ahora calculamos su vector unitario

$$\overline{e}_b = \frac{3i + 12j - 4k}{13} = 0.231i + 0.923j - 0.308k$$

multiplicamos el vector unitario $\overline{e}_b$ por el módulo de la fuerza $\overline{b} = 52$ y tendremos:

$$\overline{b} = (52)(0.231i + 0.923j - 0.308k)$$

$$\underline{\underline{\overline{b} = 12.01i + 48.0j - 16.02k}}$$

que es la expresión vectorial pedida para $\overline{b}$.

Para la siguiente fuerza procedemos de la misma manera:
coordenadas de los puntos

$$A_1\ (3,\ 12,\ 0) \quad ; \quad A_2\ (0,\ 12,\ 4)$$

vectores de posición del origen a cada punto

$$\overline{OA_1} = 3i + 12j + 0k \quad ; \quad \overline{OA_2} = 0i + 12j + 0k$$

vector que pasa por esos puntos:

$$\overline{A} = (0i + 12j + 4k) - (3i + 12j + 0k)$$

$$\overline{A} = -3i + 0j + 4k$$

módulo de $\overline{A}$

$$\overline{A} = \sqrt{(-3)^2 + (0)^2 + (4)^2} = 5$$

vector unitario de $\overline{A}$

$$\overline{e}_A = \frac{-3i + 0j + 4k}{5} = -0.6i + 0j + 0.8k$$

multiplicación del vector unitario $\overline{e}$ por el módulo de la fuerza $\overline{a} = 25$

$$\overline{a} = (25)(-0.6i + 0j + 0.8k)$$

$$\underline{\underline{\overline{a} = -15i + 0j + 20k}}$$

que es la expresión vectorial de $\overline{a}$.

5.6 Producto Vectorial o Producto Cruz de dos Vectores.

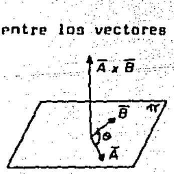
Se le denomina producto vectorial porque el resultado de la operación es un vector.

Por definición el producto vectorial de los vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$ estará dado por:

$$\overline{A} \times \overline{B} = \overline{A}\ \overline{B}\ \text{sen}\,\theta$$

donde: $A \times B$ = vector perpendicular al plano sobre el cual se encuentran $\overline{A}$ y $\overline{B}$

y θ es el ángulo entre los vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$



El producto vectorial tiene las siguientes características

1) No es conmutativo, ya que

$$\overline{a} \times \overline{b} = -(\overline{b} \times \overline{a})$$

2) Es distributivo

$$\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}$$

3) El producto vectorial de un vector por sí mismo es cero

$$\overline{a} \times \overline{a} = 0$$

4) Para los vectores unitarios coordenados

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

y también:

$$i \times j = k \quad ; \quad j \times k = i \quad ; \quad k \times i = j$$

$$j \times i = -k \quad ; \quad k \times j = -i \quad ; \quad i \times k = -j$$

5) Para que dos vectores sean paralelos se cumple

$$\overline{a} \times \overline{b} = 0$$

El producto vectorial de los vectores $\overline{A} = (Axi + Ayj + Azk)$ y $\overline{B} = (Bxi + Byj + Bzk)$ estará dado por:

$$\overline{A} \times \overline{B} = (AyBz - AzBy)i + (AzBx - AxBz)j + (AxBy - AyBx)k$$

también se puede expresar en forma de determinante:

$$\overline{A} \times \overline{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

10.- Dados dos vectores

$$\overline{A} = 8i - 5j + 6k$$

$$\overline{B} = 2i + 7j - 4k$$

$$\overline{C} = i + 2j - k$$

calcular:

a) $3\overline{A} \times 2\overline{B}$

b) $(2\overline{A} - 3\overline{B}) \times 5\overline{C}$

Solución:

a) Primero obtenemos $3\overline{A}$

$$3\overline{A} = 3(8i - 5j + 6k) = 24i - 15j + 18k$$

y $$2\overline{B} = 2(2i + 7j - 4k) = 4i + 14j - 8k$$

entonces:

$$3\overline{A} \times 2\overline{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 24 & -15 & 18 \\ 4 & 14 & -8 \end{vmatrix} = (120-252)i - (-192-72)j + (336+60)k$$

$$\underline{\underline{3\overline{A} \times 2\overline{B} = -132i + 264j + 396k}}$$

b) $$2\overline{A} = 2(8i - 5j + 6k) = 16i - 10j + 12k$$

$$3\overline{B} = 3(2i + 7j - 4k) = 6i + 21j - 12k$$

$$5\overline{C} = 5(\ i + 2j - k) = 5i + 10j - 5k$$

y haciendo:

$$2\overline{A} - 3\overline{B} = (16i-10j+12k) - (6i+21j-12k) = 10i - 31j + 24k$$

$$(2\overline{A} - 3\overline{B}) \times 5\overline{C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 10 & -31 & 24 \\ 5 & 10 & -5 \end{vmatrix} = (155-240)i-(-50-120)j+(100+155)k$$

$$\underline{\underline{(2\overline{A} - 3\overline{B}) \times 5\overline{C} = -85i + 170j + 255k}}$$

5.7 Producto Punto o Producto Escalar.

El producto escalar se denomina así porque el resultado de la multiplicación es una cantidad escalar.

Por definición el producto escalar o producto punto de dos vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$ se denota como:

$$\overline{A}\cdot\overline{B} = |\overline{A}||\overline{B}| \cos \theta$$

donde:

$|\overline{A}|$, $|\overline{B}|$.- Son las magnitudes de los vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$

θ .- Es el ángulo comprendido entre los dos vectores.

El producto escalar cumple las siguientes características:

1) Es conmutativo

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{a}$$

2) Es distributivo

$$\overline{a}\cdot(\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a}\cdot\overline{b} + \overline{a}\cdot\overline{c}$$

3) Es asociativo

$$r\overline{a}\cdot s\overline{b} = rs(\overline{a}\cdot\overline{b})$$

4) Para los vectores coordenados unitarios

$$i\cdot i = j\cdot j = k\cdot k = 1$$

$$i\cdot j = j\cdot k = k\cdot i = 0$$

5) El producto punto de un vector por sí mismo es igual al cuadrado de la magnitud del vector.

$$\overline{a}\cdot\overline{a} = |\overline{a}|^2$$

6) Si $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0$ y $\overline{a}$ y $\overline{b}$ son vectores no nulos, el vector $\overline{a}$ es perpendicular a $\overline{b}$.

El producto puntual tiene dos importantes aplicaciones en mecánica.

1.- Calcular el ángulo formado entre dos vectores o rectas que se intersecan.

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\overline{A}\,\overline{B}}{|\overline{A}\overline{B}|} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

2.- Calcular la proyección de un vector a lo largo de un eje.

$$\text{Proy } \overline{A}/\overline{B} = \frac{\overline{A}\,\overline{B}}{|\overline{B}|}\, e_B \qquad \text{vectorial}$$

$$\text{Proy } \overline{A}/\overline{B} = \frac{\overline{A}\,\overline{B}}{|\overline{B}|} \qquad \text{escalar}$$

Ejemplo:

11.- Si el vector $\overline{A}$ esta dado por el punto $P_1(3,2,1)$ al punto $P_2(-4,7,3)$ y el vector $\overline{B} = 3i+4j-7k$. Obtenga el ángulo entre ambos vectores.

Solución:

Primero obtenemos el vector $\overline{A}$ que pasa por los puntos P y P

$\overline{A} = (-4i + 7j + 3k) - (3i + 2j + k) = -7i + 5j + 2k$

como:

$\overline{A} \cdot \overline{B} = |\overline{A}||\overline{B}| \cos \theta$

por lo tanto

$$\theta = \text{áng cos} \frac{A\ B}{|A||B|}$$

obtenemos las magnitudes de los vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$

$$|\overline{A}| = \sqrt{(-7)^2 + (5)^2 + (2)^2} = 8.83$$

$$|\overline{B}| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (-7)^2} = 8.60$$

y

$\overline{A} \cdot \overline{B} = (-7i+5j+2k)\ (3i+4j-7k) = (-7i \cdot 3i) + (5j \cdot 4j) + (2k \cdot -7k)$

$\overline{A} \cdot \overline{B} = -21 + 20 - 14 = -15$

sustituimos en la fórmula y obtenemos el valor de θ

$$\theta = \text{áng cos} \frac{-15}{(8.83)(8.60)} = 101.39°$$

por lo que:

$$\underline{\underline{\theta = 101.39°}}$$

Existen tres tipos de operaciones de multiplicación que involu-- cran tres vectores los cuales son:

1) $(a \cdot b) \cdot c$ doble producto escalar.
2) $a \cdot b \times c$ doble producto mixto.
3) $a \times (b \times c)$ doble producto vectorial.

IV.6 Composición y Descomposición de Fuerzas.

6.1 Composición de Fuerzas.

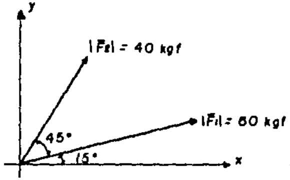
La composición de fuerzas esta dada por la suma de fuerzas, ya que el sumar varias fuerzas nos va a dar como resultado una - sola fuerza, a esto se le conoce como composición de una fuerza.

Cuando se suman tres o más fuerzas, resulta muy práctico recurrir a una solución analítica del problema descomponiendo cada fuerza en dos o tres componentes rectangulares (dos y tres dimensiones respectivamente).

Como la fuerza es considerada como una cantidad vectorial representada como : $\overline{F} = Fxi + Fyj + Fzk$
entonces todo el algebra vectorial es válido para las operaciones entre fuerzas.

Ejemplos:

12.- Considere una partícula en la que actúan dos fuerzas, una de 60 kgf y la otra de 40 kgf cuyas líneas de acción forman entre sí un ángulo de 45 . Introduciendo un sistema de ejes como se indica en la figura.



Obtenga las expresiones vectoriales de las fuerzas así como la de su resultante.

Solución:

Componentes de $\overline{F}$

$Fx_1 = \overline{F}_1 \cos 15° = (60\ kgf)(\cos 15°) = 57.96\ kgf$

$Fy_1 = \overline{F}_1\ sen\ 15° = (60\ kgf)(sen\ 15°) = 15.53\ kgf$

por lo que su expresión vectorial es:

$\underline{\underline{\overline{F}_1 = 57.96i + 15.53j \quad (kgf)}}$

componentes de $\overline{F}$

$Fx_2 = \overline{F}_2 \cos 60° = (40\ kgf)(\cos 60°) = 20\ kgf$

$Fy_2 = \overline{F}_2\ sen\ 60° = (40\ kgf)(sen\ 60°) = 34.64\ kgf$

por lo tanto la expresión vectorial de $|\overline{F}_2|$ es:

$$\overline{F}_2 = 20i + 34.64j \quad (kgf)$$

Ahora para obtener la resultante de las dos fuerzas solamente sumamos las expresiones vectoriales y obtendremos la expresión vectorial de la resultante

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 = (57.96i+15.53j) + (20i+34.64j) \quad (kgf)$$

$$\overline{R} = (57.96+20)i + (15.53+34.64)j \quad (kgf)$$

$$\overline{R} = 77.96i + 50.17j \quad (kgf)$$

el módulo de la resultante será:

$$|\overline{R}| = \sqrt{(77.96)^2 + (50.17)^2} = 92.17 \ kgf$$

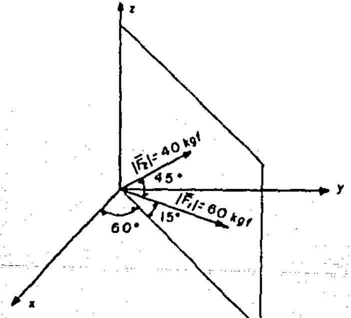
y su dirección:

$$\theta = \text{ang tg} \frac{50.17}{77.96} = 32.76°$$

13.- Considera el sistema de fuerzas $\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$ que actúa sobre la partícula del problema anterior. Si ahora introduce un sistema tridimensional de ejes, tal como se indica en la figura.

a) Obtenga la expresión vectorial de cada una de las fuerzas y la de la resultante del sistema.

b) Obtenga la magnitud de la resultante y los ángulos directores de esta.



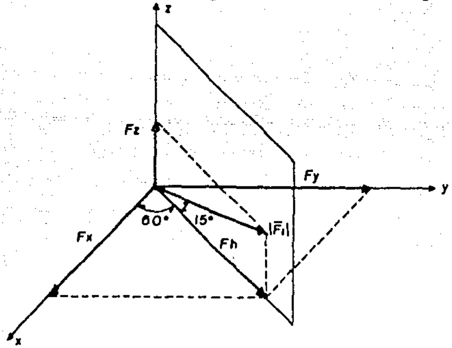
Solución:

a) Tomemos primero la fuerza $\overline{F}_1$ y obtengamos sus compo-nentes, podemos calcular el ángulo de la fuerza con respecto al eje z.

$$\gamma = 90° - 15° = 75°$$

y con este su componente en z

$$F_z = |\overline{F}_1| \cos 75° = (60 \text{ kgf})(\cos 75°) = 15.529 \text{ kgf}$$



ahora obtengamos la componente horizontal Fh

$$F_h = |\overline{F}_1| \cos 15° = (60 \text{ kgf})(\cos 15°) = 57.956 \text{ kgf}$$

después de esto obtenemos los componentes Fx y Fy de la fuerza Fh.

$$F_x = F_h \cos 60° = (57.956 \text{ kgf})(\cos 60°) = 28.978 \text{ kgf}$$

$$F_y = F_h \operatorname{sen} 60° = (57.956 \text{ kgf})(\operatorname{sen} 60°) = 50.191 \text{ kgf}$$

Entonces la expresión vectorial de $|\overline{F}_1|$ nos queda:

$$\underline{\underline{\overline{F}_1 = 28.978i + 50.191j + 15.529k \quad (\text{kgf})}}$$

sus ángulos directores son:

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{28.978}{60} = \underline{\underline{61.12°}}$$

$$\beta = \cos^{-1} \frac{50.191}{60} = \underline{\underline{33.23^\circ}}$$

$$\gamma = \cos^{-1} \frac{15.529}{60} = \underline{\underline{75.0^\circ}}$$

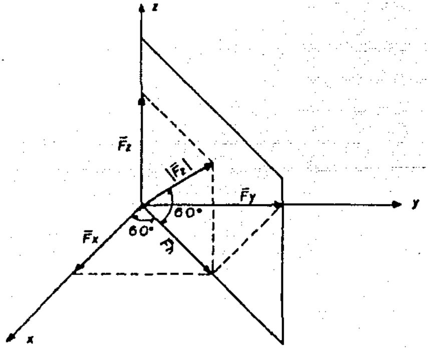
Ahora tomamos la fuerza $|\bar{F}_2|$ y hacemos lo mismo que con la fuerza $|\bar{F}_1|$

ángulo de la $|\bar{F}_2|$ con respecto al eje z

$\gamma = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

componente de $|\bar{F}_2|$ en z

$\bar{F}z = |\bar{F}_2| \cos 30^\circ = (40 \text{ kg-f}) (\cos 30^\circ) = 34.641$ kg-f.



obtenemos la componente horizontal $\bar{F}h$

$\bar{F}h = (40 \text{ kg-f}) (\cos 60^\circ) = 20$ kg-f.

y obteniendo los componentes $\bar{F}x$ y $\bar{F}y$ de la fuerza $\bar{F}h$

$\bar{F}x = (20 \text{ kg-f}) (\cos 60^\circ) = 10$ kg-f.

$\bar{F}y = (20 \text{ kg-f}) (\text{sen } 60^\circ) = 17.321$ kg-f.

por lo tanto la expresión vectorial de $|\overline{F}_2|$ nos queda:

$$\underline{\underline{\overline{F}_2 = 10i + 17.321j + 34.641 \quad (kgf)}}$$

y los ángulos directores son:

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{10}{40} = \underline{\underline{75.52°}}$$

$$\beta = \cos^{-1}\frac{17.321}{40} = \underline{\underline{64.34°}}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\frac{34.641}{40} = \underline{\underline{30°}}$$

b) La resultante $\overline{R}$ de las fuerzas $|\overline{F}_1|$ y $|\overline{F}_2|$ esta dada por la expresión vectorial.

$$\overline{R} = (28.978i+50.191j+15.529k) + (10i+17.321j+34.641k) \quad (kgf)$$

$$\underline{\underline{\overline{R} = 38.978i + 67.512j + 50.170k \quad (kgf)}}$$

la magnitud de $\overline{R}$ es

$$|\overline{R}| = \sqrt{(38.978)^2 + (67.512)^2 + (50.170)^2}$$

$$\underline{\underline{|\overline{R}| = 92.705 \ \ kgf}}$$

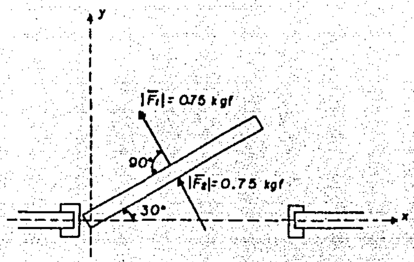
y sus ángulos directores serán:

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{38.978}{92.705} = \underline{\underline{65.14°}}$$

$$\beta = \cos^{-1}\frac{67.512}{92.705} = \underline{\underline{43.26°}}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\frac{50.17}{92.705} = \underline{\underline{57.24°}}$$

14.- Considere que una puerta puede abrirse de las siguientes formas: empujandola o jalándola por el centro. Si en ambos casos la intensidad de la fuerza que se aplica a la puerta es de 0.75 kgf tal como se muestra en la figura:



a) Empleando un sistema de ejes como el indicado obtenga la expresión vectorial de la fuerza que actúa en uno y otro caso, cuando su posición es la que se muestra.

b) ¿Se puede considerar que en ambos casos los efectos producidos a la puerta son los mismos? En caso afirmativo enuncie el principio en que apoya su consideración.

Solución:

a) Como vemos la fuerza $|\overline{F}_1|$ se ubica según su dirección y sentido en el segundo cuadrante, y el ángulo que forma con el eje x es de $\theta = 90° - 30° = 60°$

sus componentes rectangulares son:

$F_x = -(0.75 \text{ kgf})(\cos 60°) = -0.375 \text{ kgf}$

$F_y = (0.75 \text{ kgf})(\text{sen } 60°) = 0.650 \text{ kgf}$

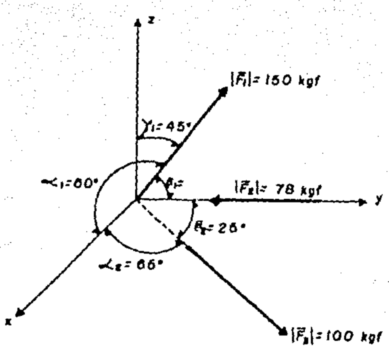
por lo cual su expresión vectorial esta dada por:

$$\overline{F}_1 = -0.375\mathrm{i} + 0.650\mathrm{j} \quad (\text{kgf})$$

la fuerza $|\overline{F}_2|$ tendrá la misma expresión, debido a que presenta las mismas características (magnitud, dirección y sentido).

b) Si, de hecho se debe considerar así, ya que el principio de transmisibilidad (en el cual nos apoyamos) nos dice: dos fuerzas tendrán el mismo efecto sobre un cuerpo siempre y cuando tengan la misma magnitud, dirección y sentido aunque no tengan el mismo punto de aplicación pero si la misma línea de acción, lo cual se da en el problema.

15.- Encuentre la resultante en el siguiente caso:



Solución:

Primero obtenemos las componentes rectangulares de cada -- una de las fuerzas.

Para $|\bar{F}_1|$

$Fx_1 = (150 \text{ kgf}) \cos 60° = 75 \text{ kgf}$

$Fz_1 = (150 \text{ kgf}) \cos 45° = 106.066 \text{ kgf}$

para obtener Fy_1 hacemos uso de la ecuación de la magnitud de - una fuerza.

$|\bar{F}_1| = Fx_1^2 + Fy_1^2 + Fz_1^2$

despejamos Fy

$Fy_1 = \sqrt{|\bar{F}_1|^2 - Fx_1^2 - Fz_1^2} = \sqrt{(150)^2 - (75)^2 - (106.066)^2}$

$Fy_1 = 75 \text{ kgf}$

por lo que:

$$\theta_1 = \cos^{-1} \frac{75}{150} = 60°$$

y la expresión vectorial

$\bar{F}_1 = 75i + 75j + 106.066k \quad (\text{kgf})$

Para $|\overline{F}_2|$

$$Fx_2 = (100\ kgf)\cos 65^\circ = 42.262\ \ kgf$$

$$Fy_2 = (100\ kgf)\cos 25^\circ = 90.631\ \ kgf$$

$$Fz_2 = 0$$

la expresión vectorial de $|\overline{F}_2|$ nos queda:

$$\underline{\underline{\overline{F}_2 = 42.262i + 90.631j \quad (kgf)}}$$

Para $|\overline{F}_3|$

$$Fy_3 = -78\ kgf$$

su expresión vectorial es:

$$\underline{\underline{\overline{F}_3 = -78j \quad kgf}}$$

la resultante estará dada por:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 = (75i+75j+106.066k)+(42.262i+90.631j)+(-78j)$$

$$\underline{\underline{\overline{R} = 117.262i + 87.631j + 106.066k \quad (kgf)}}$$

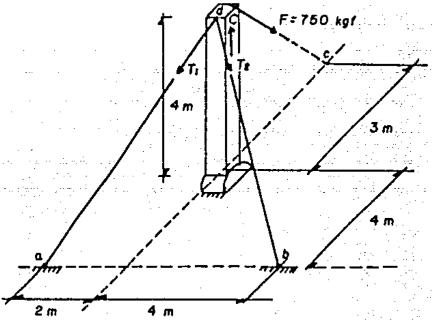
6.2 Descomposición de Fuerzas.

Como ya hemos visto dos o más fuerzas que actúan sobre una partícula pueden ser reemplazadas por una fuerza única (composición de fuerzas) que produce el mismo efecto sobre la partícula, inversamente una fuerza única puede reemplazarse por dos o más fuerzas que en conjunto produzcan el mismo efecto sobre la partícula. Estas fuerzas se conocen como componentes de las fuerzas y el proceso de reemplazar la fuerza por ellas se llama "descomposición de las fuerzas".

Resulta evidente que para cada fuerza habrá un número infinito de conjuntos posibles de componentes. Los conjuntos de componentes que más interés revisten son los constituidos por dos y tres componentes, pero aún así, el número de formas en que una fuerza puede descomponerse es ilimitado.

Ejemplos:

16.- En la figura se muestran dos cables y una barra en los que actúa la fuerza $\overline{F}$. Para encontrar los efectos en los cables y en la barra es necesario descomponer la fuerza $\overline{F}$ en las fuerzas T_1, T_2 y $\overline{C}$ que aquí se indican.



Solución:

Primero obtenemos las expresiones vectoriales de cada fuerza.

Para el cable T_1

la línea de acción de esta fuerza pasa a través de los puntos a y d, y la fuerza esta dirigida de d hacia a, los componentes -- del vector $\overline{da}$, que tienen la misma dirección de la fuerza, son:

$$dx = 4m \quad ; \quad dy = -2m \quad ; \quad dz = -4m$$

la distancia total de d a a es:

$$\overline{da} = \sqrt{(4)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 6m$$

introducimos los vectores unitarios i,j,k y nos queda $\overline{da}$

$$\overline{da} = 4i - 2j - 4k \quad (m)$$

obtenemos su vector unitario

$$\overline{e}_{ds} = \frac{4i-2j-4k}{6} = 0.667i - 0.333j - 0.667k$$

por lo que la expresión vectorial de T nos queda

$$T_1 = |T_1|\,\overline{e}_{ds} = 0.667|T_1|i - 0.333|T_1|j - 0.667|T_1|k \quad (kgf)$$

Cable T_2

esta dirigido del punto d al punto b, las componentes del vector $\overline{db}$, con la misma dirección de la fuerza son:

$$dx = 4m \quad ; \quad dy = 4m \quad ; \quad dz = -4m$$

la distancia total de d a b es

$$|\overline{db}| = \sqrt{(4m)^2 + (4m)^2 + (-4m)^2} = 6.928m$$

introducimos los vectores unitarios i,j,k a $\overline{db}$

$$\overline{db} = (4m)i + (4m)j - (4m)k$$

y su vector unitario será:

$$\overline{e}_{db} = \frac{(4m)i+(4m)j-(4m)k}{6.928m} = 0.577i + 0.577j - 0.577$$

entonces la expresión vectorial de T_2 nos queda

$$T_2 = 0.577|T_2|i + 0.577|T_2|j - 0.577|T_2|k \quad (kgf)$$

Para la barra $\overline{C}$

la expresión de la barra $\overline{C}$ queda

$$\overline{C} = |\overline{C}|k \quad (kgf)$$

Para la fuerza $\overline{F}$

por su línea de acción va del punto d al c, por lo que las componentes del vector $\overline{dc}$ son:

$$dx = -3m \quad ; \quad dy = 0m \quad ; \quad dz = -4m$$

y su distancia total

$$|\overline{dc}| = \sqrt{(-3)^2 + (0m)^2 + (-4)^2} = 5m$$

metiendo los vectores unitarios tenemos:

$$\overline{dc} = -3i + 0j - 4k \quad (m)$$

el vector unitario será:

$$\vec{e}_{dc} = \frac{-3i + 0j - 4k}{5} = -0.6i + 0j - 0.8k$$

y la expresión vectorial de $|\overline{F}|$ nos quedará:

$$\overline{F} = -0.6|\overline{F}|i + 0j - 0.8|\overline{F}|k$$

sustituyendo el valor de $|\overline{F}| = 750$ kgf

$$\overline{F} = -0.6(750)i - 0.8(750)k \quad (kgf)$$

$$\overline{F} = -450i - 600k \quad (kgf)$$

Ahora hacemos la sumatoria de fuerzas en cada eje suponiendo el punto d en equilibrio y tendremos:

$$\Sigma Fx = 0 = 0.667|\overline{T}_1| + 0.577|\overline{T}_2| - 450 \quad (kgf)$$

$$\Sigma Fy = 0 = -0.333|\overline{T}_1| + 0.577|\overline{T}_2| \quad (kgf)$$

$$\Sigma Fz = 0 = -0.667|\overline{T}_1| - 0.577|\overline{T}_2| + |\overline{C}| - 600 \quad (kgf)$$

con esto tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas.

$$0.667\,|\overline{T}_1| + 0.577\,|\overline{T}_2| = 450 \text{ --------- } (1)$$

$$-0.333\,|\overline{T}_1| + 0.577\,|\overline{T}_2| = 0 \text{ --------- } (2)$$

$$-0.667\,|\overline{T}_1| - 0.577\,|\overline{T}_2| + |\overline{C}| = 600 \text{ --------- } (3)$$

para resolver el sistema procedemos de la siguiente manera:

despejamos $|\overline{T}_1|$ en la ecuación (1)

$$|\overline{T}_1| = \frac{450 - 0.577\,|\overline{T}_2|}{0.667} = 674.663 - 0.865\,|\overline{T}_2| \text{ ---- } (4)$$

sustituimos $|\overline{T}_1|$ en la ecuación (2)

$$-0.333(674.663 - 0.865\,|\overline{T}_2|\,) + 0.577\,|\overline{T}_2| = 0$$

$$-224.663 + 0.288\,|\overline{T}_2| + 0.577\,|\overline{T}_2| = 0$$

despejando a $|\overline{T}_2|$

$$|\overline{T}_2| = \frac{224.663}{(0.288 + 0.577)} = 259.73 \quad kgf$$

sustituimos $|\overline{T}_2|$ en la ecuación (4) y tenemos:

$$|\overline{T}_1| = 674.663 - 0.865(259.73) = 450 \quad kgf$$

sustituimos $|\overline{T}_1|$ y $|\overline{T}_2|$ en la ecuación (3)

$$-0.667(450) - 0.577(259.73) + |\overline{C}| = 600$$

despejando a $|\overline{C}|$

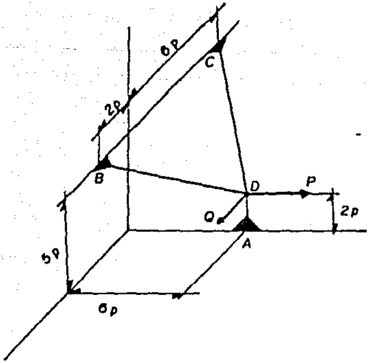
$$|\overline{C}| = 600 + 300.15 + 149.86$$

$$|\overline{C}| = 1050.01 \text{ kgf}$$

entonces la solución buscada es:

$$\boxed{\begin{aligned} |\overline{T}_1| &= 450 \text{ kgf} \\ |\overline{T}_2| &= 260 \text{ kgf} \\ |\overline{C}| &= 1050 \text{ kgf} \end{aligned}}$$

17.- Tres cables se unen en D donde se aplican dos fuerzas -- $P = 700j$ (lb) y $Q = 300i$ (lb). Encontrar la tensión en cada cable.



Solución:

Tomaremos el punto O como el origen del sistema de coordenadas y obtengamos los componentes de cada cable.

Cable DA

su líneas de acción, la suponemos del punto D al punto A, por lo que los componentes del vector $\overline{DA}$ son:

$$dx = 0 \quad ; \quad dy = 0 \quad y \quad dz = -2p$$

como la distancia total es $|\overline{OA}| = 2p$ e introduciendo los vectores unitarios i, j, k tenemos:

$$\overline{OA} = -(2p)k$$

y el vector unitario

$$\overline{e}_{OA} = -1k$$

entonces

$$\overline{T}_{OA} = -|\overline{T}_{OA}|\,k \qquad (1b)$$

Cable OB

la línea de acción de este cable la suponemos de O a A entonces las componentes del vector $\overline{OB}$ son:

$$dx = 2p \quad ; \quad dy = -6p \quad y \quad dz = 3p$$

la distancia total de O a B es:

$$|\overline{OB}| = \sqrt{(2p)^2 + (-6p)^2 + (3p)^2} = 7p$$

introducimos los vectores i, j, k al vector $\overline{OB}$

$$\overline{OB} = (2p)i - (6p)j + (3p)k$$

entonces el vector unitario de $\overline{OB}$ es

$$\overline{e}_{OB} = \frac{(2p)i-(6p)j+(3p)k}{7p} = 0.286i - 0.857j + 0.429k$$

por lo tanto

$$\overline{T}_{OB} = 0.286|\overline{T}_{OB}|i - 0.857|\overline{T}_{OB}|j + 0.429|\overline{T}_{OB}|k \qquad (1b)$$

Cable OC

suponemos que el cable actúa del punto O al punto C, por lo que los componentes del vector $\overline{OC}$ son:

$$dx = -6p \quad ; \quad dy = -6p \quad ; \quad dz = 3p$$

la distancia total del vector es:

$$|\overline{OC}| = \sqrt{(-6p)^2 + (-6p)^2 + (3p)^2} = 9p$$

introducimos los vectores i,j,k al vector $\overline{OC}$

$$\overline{OC} = -(6p)i - (6p)j + (3p)k$$

y obtenemos su vector unitario

$$\overline{e}_{OC} = \frac{-(6p)i-(6p)j+(3p)k}{9p} = -0.667i - 0.667j + 0.333k$$

por lo que

$$\bar{T}_{DC} = -0.667|\bar{T}_{OC}|i - 0.667|\bar{T}_{OC}|j + 0.333|\bar{T}_{OC}|k \quad (lb)$$

ahora calculamos la suma de fuerzas en cada eje, suponiendo el - punto O en equilibrio, es decir $\Sigma F = 0$

$$\Sigma Fx = 0 = 0.286|\bar{T}_{OB}| - 0.667|\bar{T}_{OC}| + 300 \quad (lb)$$

$$\Sigma Fy = 0 = -0.857|\bar{T}_{OB}| - 0.667|\bar{T}_{OC}| + 700 \quad (lb)$$

$$\Sigma Fz = 0 = 0.429|\bar{T}_{OB}| + 0.333|\bar{T}_{OC}| - |\bar{T}_{OA}| \quad (lb)$$

hemos obtenido un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas y su solución será la solución buscada.

$$0.286|\bar{T}_{OB}| - 0.667|\bar{T}_{OC}| = -300 \text{ ---------- } (1)$$

$$-0.857|\bar{T}_{OB}| - 0.667|\bar{T}_{OC}| = -700 \text{ ---------- } (2)$$

$$0.429|\bar{T}_{OB}| + 0.333|\bar{T}_{OC}| - |\bar{T}_{OA}| = 0 \text{ ---------- } (3)$$

para resolverlo procedemos de la siguiente manera:

despejamos $|\bar{T}_{OB}|$ de la ecuación (1)

$$|\bar{T}_{OB}| = \frac{-300 + 0.667|\bar{T}_{OC}|}{0.286} = -1048.951 + 2.332|\bar{T}_{OC}| \text{ --- } (4)$$

sustituimos $|\bar{T}_{OB}|$ en la ecuación (2)

$$-0.857(-1048,951 + 2.332|\bar{T}_{OC}|) - 0.667|\bar{T}_{OC}| = -700$$

$$898.951 - 1.999|\bar{T}_{OC}| - 0.667|\bar{T}_{OC}| = -700$$

despejamos $|\bar{T}_{OC}|$

$$|\bar{T}_{OC}| = \frac{(-700 - 898.951)}{(-1.999 - 0.667)} = 599.76 \text{ lb}$$

ahora sustitumos $|\bar{T}_{OC}|$ en (4)

$$\bar{T}_{OB} = -1048.951 + 2.332(599.76) = 349.69 \text{ lb}$$

sustituimos $|\bar{T}_{OB}|$ y $|\bar{T}_{OC}|$ en la ecuación (3)

$$-|\bar{T}_{OA}| + 0.429(349.69) + 0.333(599.76) = 0$$

despejamos $|\bar{T}_{OA}|$

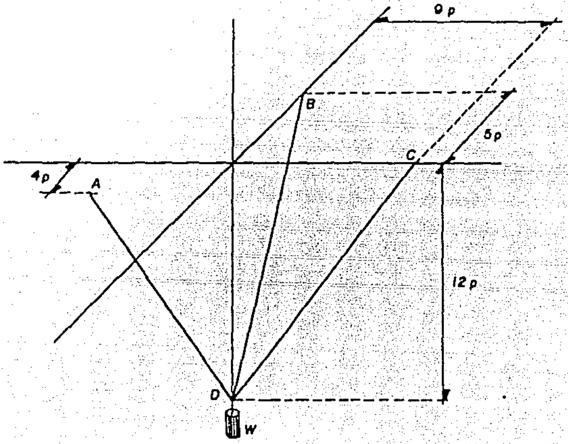
$$|\bar{T}_{OA}| = 150.017 + 199.72$$

$$|\bar{T}_{OA}| = 349.74 \text{ lb}$$

por lo que la solución buscada es:

$$\boxed{\begin{array}{l} |T_{OB}| = 350 \text{ lb} \\ |T_{OC}| = 600 \text{ lb} \\ |T_{OA}| = 350 \text{ lb} \end{array}}$$

18.- Una carga W esta suspendida de tres cables, como se muestra en la figura. Determinar el valor W si la tensión en el cable BD es de 975 lb.



Solución:

Tomaremos el origen de coordenadas al punto D.

Carga W

la carga W tiene solo componente en el eje z y como actúa hacia abajo entonces es negativa

$$\overline{W} = -|\overline{W}|k \quad (\text{lb})$$

Cable $\overline{DB}$

suponemos que actúa de D hacia B entonces las componentes del vector $\overline{DB}$ son:

$$dx = -5p \quad ; \quad dy = 0p \quad ; \quad dz = 12p$$

la distancia del punto B al D es:

$$|\overline{DB}| = \sqrt{(-5p)^2 + (0p)^2 + (12p)^2} = 13p$$

introduciendo los vectores unitarios i, j, k el vector $\overline{BD}$ tenemos:

$$\overline{DB} = -(5p)i + (12p)k$$

y el vector unitario será

$$\vec{e}_{DB} = \frac{-(5p)i + (12p)k}{13\ p} = -0.385i + 0.923k$$

por lo que:

$$\overline{T}_{DB} = (975\ lb)(-0.385)i + (975\ lb)(0.923)k$$

$$\overline{T}_{DB} = -375.375i + 899.925k \quad (lb)$$

Cable DA

suponemos que el cable actúa del punto D al punto A, por lo cual los componentes del vector $\overline{DA}$ serán:

$$dx = 4p \quad ; \quad dy = -6p \quad ; \quad dz = 12p$$

la distancia de A a D es:

$$|\overline{DA}| = \sqrt{(4p)^2 + (-6p)^2 + (12p)^2} = 14p$$

el vector unitario de $\overline{AD}$

$$\vec{e}_{DA} = \frac{(4p)i - (6p)j + (12p)k}{14p} = 0.286i - 0.429j + 0.857k$$

entonces tenemos:

$$\overline{T}_{DA} = 0.286|\overline{T}_{DA}|\,i - 0.429|\overline{T}_{DA}|\,j + 0.857|\overline{T}_{DA}|\,k \quad (lb)$$

Cable DC

suponemos que el cable actúa de D hacia C, entonces sus componentes serán:

$$dx = 0p \quad ; \quad dy = 9p \quad ; \quad dz = 12p$$

la distancia de C hacia D es:

$$|\overline{DC}| = \sqrt{(9p)^2 + (12p)^2} = 15p$$

introduciendo los vectores unitarios tendremos:

$$\overline{DC} = (9p)j + (12p)k$$

y calculando el vector unitario tenemos:

$$\overline{e}_{DC} = \frac{(9p)j+(12p)k}{15\ p} = 0.6j + 0.8k$$

entonces tendremos:

$$T_{DC} = 0.6|T_{DC}|j + 0.8|T_{DC}|k$$

Haciendo la suma de fuerzas en cada eje tenemos:

$$F_x = 0 = -375.375 + 0.286|\overline{T}_{DA}|$$

$$F_y = 0 = -0.429|\overline{T}_{DA}| + 0.6|\overline{T}_{DC}|$$

$$F_z = 0 = -|\overline{w}| + 899.925 + 0.857|\overline{T}_{DA}| + 0.8|\overline{T}_{DC}|$$

así pues tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas.

$$0.286|\overline{T}_{DA}| = 375.375 \quad \text{------------------------} \quad (1)$$

$$-0.429|\overline{T}_{DA}| + 0.6|\overline{T}_{DC}| = 0 \quad \text{----------------------} \quad (2)$$

$$-|\overline{w}| + 0.857|\overline{T}_{DA}| + 0.8|\overline{T}_{DC}| = -899.925 \quad \text{---------} \quad (3)$$

de la ecuación (1) tenemos:

$$|T_{DA}| = \frac{375.375}{0.286} = 1312.5\ \text{lb}$$

sustituyendo $|T_{DA}|$ en la ecuación (2) y despejando $|T_{DC}|$

$$|T_{DC}| = \frac{0.429(1312.5)}{0.6} = 938.44\ \ \text{lb}$$

sustituyendo $|\overline{T}_{DA}|$ y $|\overline{T}_{DC}|$ en la ecuación (3) y despejando $|\overline{w}|$

$$|\overline{w}| = 899.925 + 0.857(1312.5) + 0.8(938.44) = 2775.49\ \ \text{lb}$$

entonces la solución es:

$$\boxed{\begin{array}{lll} |T_{DA}| & = 1312.5 & \text{lb} \\ |T_{DC}| & = \ \ 938.5 & \text{lb} \\ |\overline{w}| & = 2775.5 & \text{lb} \end{array}}$$

6.3 Vector Equipolente de una Fuerza.

Se define al vector equipolente de una fuerza, como el vector que representa a esa fuerza.

Ejemplo:

19.- Obtenga el vector equipolente de la fuerza cuya magnitud es de 100 kgf y se encuentra en el segmento A(4,2,3) y B(6,5,0)

Solución:

Primero obtenemos el vector del segmento AB

$\overline{AB} = (6i + 5j) - (4i + 2j + 3k) = 2i + 3j - 3k$

después calculamos la distancia de A a B

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-3)^2} = 4.69$$

el vector unitario de $\overline{AB}$ es:

$$\overline{e}_{AB} = \frac{2i+3j-3k}{4.69} = 0.4264i + 0.6397j - 0.6397k$$

entonces el vector equipolente de la fuerza estará dado por:

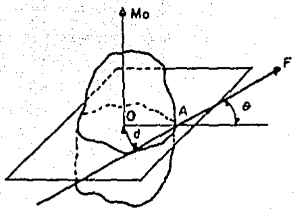
$$\overline{F}_{AB} = |\overline{F}|\overline{e}_{AB} = (100 \text{ kgf})(0.4264i+0.6397j-0.6397k)$$

$$\overline{F}_{AB} = 42.64i + 63.97j - 63.97k \quad (\text{kgf})$$

IV.7 Momento de una Fuerza con Respecto a un Punto. Su Definición Matemática e Interpretación Física. Condición Necesaria y Suficiente para que el Momento sea Nulo.

7.1 Momento de una Fuerza Respecto a un Punto.

Dada una fuerza $\overline{F}$ que actúa sobre un cuerpo rígido, un punto de aplicación A (para la fuerza $\overline{F}$) el cual se define por el vector $\overline{r}$ que une el punto de referencia fijo "O" con el punto "A" (vector de posición de A). El vector de posición $\overline{r}$ y la fuerza $\overline{F}$ definen el plano mostrado en la figura siguiente:



7.2 Definición Matemática.

El momento de una fuerza $\overline{F}$ con respecto a un punto O se define como el producto vectorial de $\overline{r}$ y $\overline{F}$:

$$\overline{M}o = \overline{r} \times \overline{F}$$

El momento $\overline{M}o$ debe ser perpendicular al plano que contiene a O y a $\overline{F}$; el sentido de $\overline{M}o$ se define por el sentido de rotación que podría llevar el vector $\overline{r}$ a ser colineal con el vector $\overline{F}$ (esta rotación es la que $\overline{F}$ tiende a imprimir al cuerpo); la dirección es perpendicular al plano en el punto O.

Si llamamos θ al ángulo comprendido entre las líneas de acción del vector de posición $\overline{r}$ y la fuerza $\overline{F}$ tendremos que el momento de $\overline{F}$ con respecto a O es;

$$\overline{M}o = \overline{r}\ \overline{F} \operatorname{sen}\theta = \overline{F}d$$

donde:

d.- Es la distancia perpendicular desde O a la línea de acción de $\overline{F}$.

7.3 Interpretación Física.

La interpretación física del momento de una fuerza respecto a un punto es: "la tendencia de la fuerza $\overline{F}$ a impartir un movimiento de rotación al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo dirigido según $\overline{M}o$.

Ejemplos:

20.- Una fuerza de 980 kgf de magnitud tiene por números directores (6,2,3) y pasa por el punto Po (-2,4,7) (m).

Calcule:

a) El momento de la fuerza dada con respecto al origen hallando la magnitud y dirección de este vector.

b) El momento de esa fuerza con respecto al punto Q(1,1,1) (m).

Solución:

a) Como los números directores de la fuerza son (6,2,3) entonces el vector de la fuerza es:

$\overline{v} = 6i + 2j + 3k$ de donde su magnitud es:

$$|\overline{v}| = \sqrt{(6)^2 + (2)^2 + (3)^2} = 7$$

por lo que el vector unitario será:

$$\overline{e_v} = \frac{6i+2j+3k}{7} = 0.857i + 0.286j + 0.429k$$

entonces la fuerza $\overline{F}$ en función de sus componentes será: -

$$\overline{F} = |\overline{F}|\,\overline{e_v} = 980 \text{ kgf } (0.857i + 0.286j + 0.429k)$$

$$\overline{F} = 840i + 280j + 420k \quad (\text{kgf})$$

que es el vector equivalente de la fuerza $\overline{F}$

Ahora calculamos el momento $\overline{F}$ con respecto al origen.

$$\overline{M}o = \overline{r} \times \overline{F}$$

donde $\overline{r}$ es:

$$\overline{r} = -2i + 4j + 7k \quad (\text{m})$$

entonces:

$$\overline{M}o = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 4 & 7 \\ 840 & 280 & 420 \end{vmatrix} = (1680-1960)i-(-840-5880)j+(-560-3360)k$$

por lo tanto nos queda el momento:

$$\overline{M}o = -280i + 6720j - 3920k \quad (\text{kgf}\cdot\text{m})$$

de donde la magnitud del momento esta dada por:

$$|\overline{M}o| = \sqrt{(-280)^2 + (6720)^2 + (-3920)^2} = \underline{\underline{7784.81 \text{ kgf}\cdot\text{m}}}$$

su dirección con respecto a los ejes x,y,z es:

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{-280}{7784.81} = \underline{\underline{92.06^\circ}}$$

$$\beta = \cos^{-1}\frac{6720}{7784.81} = \underline{\underline{30.32^\circ}}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\frac{-3920}{7784.81} = \underline{\underline{120.23^\circ}}$$

b) Primero obtenemos el vector de posición que va del punto Q (1,1,1)(m) al punto Po (-2,4,7) (m)

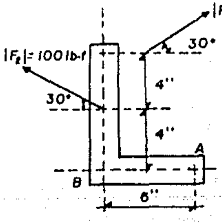
$\bar{V} = (-2i+4j+7k) - (i+j+k) = -3i + 3j + 6k$ (m)

ahora calculamos el momento de $\bar{F}$ con respecto al punto Q

$$\bar{M}_Q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 3 & 6 \\ 840 & 280 & 420 \end{vmatrix} = (1260-1680)i-(-1260-5040)j+(-840-2520)k \text{ (kgf-m)}$$

$$\underline{\underline{\bar{M}_Q = -420i + 6300j - 3360k \text{ (kgf-m)}}}$$

21.- Determine el momento con respecto a los puntos A y B de las dos fuerzas mostradas en la figura:



Solución:

Fuerza $|\overline{F}_1|$

Obtenemos $|\overline{F}_1|$ en función de sus componentes rectangulares.

$\overline{F}_1$ = 100 lbf (cos 30° i + sen 30° j) 86.6i + 50j (lbf)

su vector de posición con respecto al punto A

$\overline{r}_A$ = -6i + 8j (in)

realizando el producto vectorial tenemos:

$$\overline{M}_A^1 = \begin{vmatrix} i & j \\ -6 & 8 \\ 86.6 & 50 \end{vmatrix} = (-300 - 692.8)k \quad (\text{lbf}\cdot\text{in})$$

$$\underline{\underline{\overline{M}_A^1 = -992.8k \quad (\text{lbf}\cdot\text{in})}}$$

vector de posición de $|\overline{F}_1|$ con respecto al punto B será

$\overline{r}_B$ = 8j (in)

haciendo el producto vectorial

$$\overline{M}_B^1 = \begin{vmatrix} i & j \\ 0 & 8 \\ 86.6 & 50 \end{vmatrix} = -692.8k \quad (\text{lbf}\cdot\text{in})$$

$$\underline{\underline{\overline{M}_B^1 = -692.8k \quad (\text{lbf}\cdot\text{in})}}$$

Fuerza $|\overline{F}_2|$

Poniendola en función de sus componentes:

$\overline{F}_2$ = (100 lbf)(-cos 30° i + sen 30° j) = -86.6i + 50j (lbf)

el vector de posición de $|\overline{F}_2|$ con respecto a A es:

$\overline{r}_A$ = -6i + 4j (in)

calculando el $\overline{M}_A$ tenemos

$$\overline{M}_A^2 = \begin{vmatrix} i & j \\ -6 & 4 \\ 86.6 & 50 \end{vmatrix} = (-300 + 346.4)k \quad (\text{lbf}\cdot\text{in})$$

$$\underline{\underline{\overline{M}_A^2 = 46.4k \quad (\text{lbf}\cdot\text{in})}}$$

el vector de posición de $|\overline{F}_2|$ con respecto al punto B es

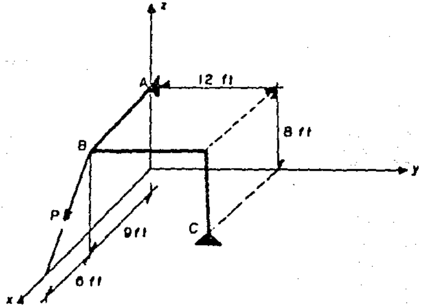
$\overline{r}_B$ = 4j (in)

entonces:

$$\overline{M}_B^E = \begin{vmatrix} i & j \\ 0 & 4 \\ -86.6 & 50 \end{vmatrix} = 346.4 \quad (\text{lbf}\cdot\text{in})$$

$$\underline{\underline{\overline{M}_B^E = 346.4 \quad (\text{lbf}\cdot\text{in})}}$$

22.- Una fuerza $\overline{P}$ de 25 lbf de magnitud actúa sobre una vari-- lla doblada. Determine el momento de $\overline{P}$ con respecto al punto C



Solución:

Primero obtenemos la dirección de $\overline{P}$ con respecto a los -- ejes x e z.

$$\alpha = tg^{-1} \frac{8}{6} = 53.13°$$

$$\gamma = tg^{-1} \frac{6}{8} = 36.87°$$

entonces el vector equipolente de $\overline{P}$ nos queda:

$$\overline{P} = (25 \text{ lbf})(\cos 53.13\, i - \cos 36.87\, k)$$

$$\overline{P} = 15i - 20k \quad (\text{lbf})$$

obtenemos el vector de posición del punto B con respecto al C

$\overline{r} = -12j + 8k$ (ft)

entonces calculamos el momento de $\overline{F}$ con respecto a C nos queda:

$$\overline{M} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -12 & 8 \\ 15 & 0 & -20 \end{vmatrix} = \underline{\underline{240i - 120j + 180k \quad (lbf\cdot ft)}}$$

7.4 Condición Necesaria y Suficiente para que el Momento sea -- Nulo.

De acuerdo a la definición del momento de una fuerza con -- respecto a un punto: $\overline{M} = \overline{r} \times \overline{F}$; si $\overline{F} \neq 0$, entonces el momento - de la fuerza respecto al punto "O" se anulará solamente cuando $\overline{r}$ sea cero o paralelo a $\overline{F}$; en ambos casos $\overline{F}$ pasa por "O". Por lo - tanto:

"El momento de una fuerza con respecto a un punto se anula_ cuando y solamente cuando, su línea de acción pasa por el punto"

Ejemplo:

23.- Dada la fuerza

$\overline{F} = 45i + 20j + 5k$ (lb)

que pasa por el punto P(9,4,1) (ft) determinar el momento de $\overline{F}$ - con respecto al punto O que es el origen de las coordenadas x,y, z e interpretar el resultado.

Solución:

Como sabemos

$\overline{r} = 9i + 4j + k$ (ft)

y

$$\overline{M}o = \overline{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 9 & 4 & 1 \\ 45 & 20 & 5 \end{vmatrix} = (20-20)i-(45-45)j+(180-180)k = 0$$

por lo que se deduce que $\overline{r}$ y $\overline{F}$ tienen como ángulo entre ellos -- $\Theta = 0$; por lo que son paralelos, en este caso tienen la misma - línea de acción.

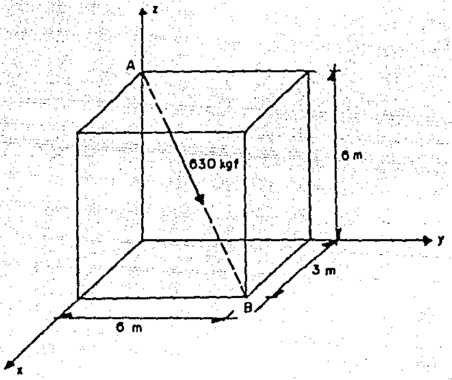
IV.8 Coordenadas Vectoriales de una Fuerza.

Sea la fuerza $\overline{F} = Fxi + Fyj + Fzk$; y $\overline{M}o = Mxi + Myj + Mzk$ el momento de la fuerza $\overline{F}$ con respecto al origen, entonces las coordenadas vectoriales de la fuerza $\overline{F}$ (también conocidas como plÜckerianas) están definidas por:

$$\{(Fxi+Fyj+Fzk),(Mxi+Myj+Mzk)\}$$

Ejemplos:

24.- Determine las coordenadas vectoriales de la fuerza indicada en la figura.



Solución:

Primeramente obtenemos el vector director de la fuerza, el cual va del punto A al punto B.

$$\overline{AB} = (3i+6j) - (6k) = 3i + 6j - 6k \quad (m)$$

obtenemos ahora su magnitud total del punto A al B

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (-6)^2} = 9 \text{ m}$$

entonces el vector unitario será:

$$\overline{e}_{AB} = \frac{3i+6j-6k}{9} = 0.333i + 0.666j - 0.666k$$

por lo que tenemos que el vector equipolente de la fuerza es:

$$\overline{F} = (630 \text{ kg-f})(0.333i+0.666j-0.666k)$$

$$\overline{F} = 210i + 420j - 420k \quad (\text{kg-f})$$

y calculando el momento con respecto al origen de la fuerza $\overline{F}$ - que pasa por el punto B de coordenadas (3,6,0)

$$\overline{Mo} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 6 & 0 \\ 210 & 420 & -420 \end{vmatrix} = (-2520)i - (-1260)j + (1260-1260)k$$

$$\overline{Mo} = -2520i + 1260j \quad (\text{kgf-m})$$

Entonces las coordenadas vectoriales de la fuerza $|\overline{F}| = 630$ (kgf) que pasa por el punto, B(3,6,0) son:

$$\overline{F} = \{(210i+420j-420k)\ ,\ (-2520i+1260j)\}$$

donde la fuerza esta expresado en kgf y el momento en kgf-m.

25.- Dadas las coordenadas vectoriales de las siguientes fuerzas encuentre un punto de sus líneas de acción.

$$\overline{F}_1 = \{(210i+420j-420k)\ ,\ (-2520i+1260j)\ \}$$

$$\overline{F}_2 = \{(-270i+1080j+360k)\ ,\ (-1080j+3240k)\}$$

Las fuerzas se expresan en toneladas y las longitudes en metros.

Solución:

Para la fuerza $\overline{F}_1$

como sabemos el momento esta dado por $\bar{M}o = \overline{r} \times \overline{F}$ entonces:

$$Mo = \begin{vmatrix} i & j & k \\ rx & ry & rz \\ 210 & 420 & -420 \end{vmatrix} = (-420ry-210rz)i-(-420rx-210rz)j+ \\ +(420rx-210ry)k$$

tenemos que :

$$(-420ry-210rz)i+(420rx+210rz)j+(420rx-210ry)k = -2520i+1260j$$

entonces haciendo la suma de componentes en cada eje tenemos:

$$\begin{aligned} \Sigma Fx &= \quad 0 \quad - 420ry - 210rz = -2520 \\ \Sigma Fy &= 420rx + \quad 0 \quad + 210rz = \quad 1260 \\ \Sigma Fz &= 420rx - 210ry + \quad 0 \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

ahóra tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas, el cual procedemos a resolver de la siguiente manera:

$$420rx + \qquad + 210\,rz = 1260 \text{ ---------- } (1)$$

$$0 - 210ry - 210\,rz = -1260 \text{ ---------- } (2)$$

$$0 - 420ry - 210\,rz = -2520 \text{ ---------- } (3)$$

de la ecuación (2) tenemos

$$ry = \frac{1260 - 210rz}{210} = 6 - rz \text{ ---------- } (4)$$

sustituyendo ry en (3) y despejando rz

$$rz = \frac{-2520 + 2520}{210} = 0$$

ahora sustituimos rz = 0 en la ecuación (4)

$$ry = 6 - 0 = 6 \quad (m)$$

sustituimos rz = 0 en la ecuación (1)

$$420rx + 0 = 1260$$

$$rx = \frac{1260}{420} = 3\text{ m}$$

la solución del sistema es: rx = 3 m

ry = 6 m

rz = 0 m

por lo que un punto de la línea de acción es:

<u>P (3,6,0) en metros.</u>

Para $|\bar{F}_2|$

procedemos de la siguiente manera:

$$\bar{M}o = \begin{vmatrix} i & j & k \\ rx & ry & rz \\ -270 & 1080 & 360 \end{vmatrix} = (360ry-1080rz)i-(360rx+270rz)j+(1080rx+270ry)k$$

al hacer la suma de fuerzas en cada eje tenemos:

$$\Sigma Fx = 0 + 360ry + 1080rz = 0$$

$$\Sigma Fy = -360rx + 0 - 270rz = -1080$$

$$\Sigma Fz = 1080rx + 270ry + 0 = 3240$$

para resolver el sistema lo acomodamos de la siguiente manera:

$$-360rx + 0 - 270rz = -1080 \text{ ---------- } (1)$$
$$1080rx + 270ry + 0 = 3240 \text{ ---------- } (2)$$
$$0 + 360ry + 1080rz = 0 \text{ ---------- } (3)$$

multiplicando por 3 la ecuación (1) y sumandole a la ecuación (2)

$$-360rx + 0 - 270rz = -1080 \text{ ---------- } (1)$$
$$0 + 270ry - 810rz = 0 \text{ ---------- } (4)$$
$$0 + 360ry + 1080rz = 0 \text{ ---------- } (3)$$

de la ecuación (4) tenemos:

$$ry = \frac{810rz}{270} = 3rz \text{ --------- } (5)$$

sustituyendo ry en (3) y despejando rz

$$360(3rz) + 1080rz = 0$$
$$(1080+1080)rz = 0$$
$$rz = 0$$

sustituyendo $rz = 0$ en la ecuación (5) tenemos:

$$ry = 3(0) = 0$$

y sustituyendo $rz = 0$ en (1)

$$-360rx - 270(0) = -1080$$

$$rx = \frac{-1080}{-360} = 3 \text{ m}$$

por lo tanto la solución del sistema es: $rx = 3$ m

$ry = 0$ m

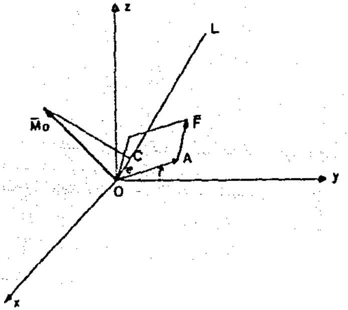
$rz = 0$ m

.entonces un punto de la línea de acción de $|\bar{F}_2|$ es:

P (3,0,0) en metros.

IV.9 Momento de una Fuerza con Respecto a un Eje. Condición Necesaria y Suficiente para que el Momento Sea Nulo.

Consideremos: Una fuerza $\overline{F}$ que actúa sobre un cuerpo rígido; y el momento Mo de esa fuerza con respecto a O, representados en la siguiente figura.



Sea OL un eje que pasa por O; definimos el momento M de $\overline{F}$ con respecto a OL como la proyección OC del momento $\overline{M}o$ sobre el eje OL. Representando por $\overline{e}$ al vector unitario en la dirección OL, podemos escribir:

$$M_{OL} = \vec{e} \cdot \vec{M}o = \vec{e} \cdot (\vec{r} \times \overline{F})$$

que nos demuestra que el momento M_{OL} de $\overline{F}$ con respecto al eje OL es el escalar obtenido al ejecutar el triple producto escalar de $\overline{e}$, $\overline{r}$ y $\overline{F}$.

Podemos expresar M_{OL} en forma de determinante:

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} ex & ey & ez \\ x & y & z \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix}$$

donde:

ex, ey, ez = cosenos directores del eje OL

x, y, z = coordenadas del punto de aplicación de $\overline{F}$

Fx, Fy, Fz = componentes de la fuerza $\overline{F}$

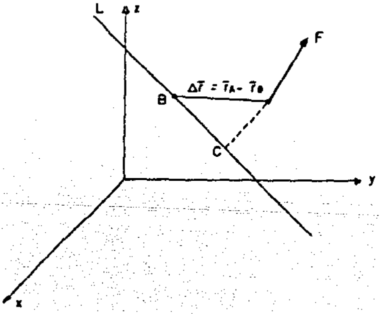
Definimos: Que el momento M_{OL} de $\overline{F}$ con respecto a OL mide la tendencia de la fuerza $\overline{F}$ a impartir al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrdedor del eje fijo OL.

De esta definición concluimos que: "El momento de $\overline{F}$ con respecto a un eje coordenado es igual a la componente de $\overline{M}o$ con respecto a dicho eje".

Sustituyendo sucesivamente cada uno de los vectores unitarios i, j, k por $\overline{e}$ tenemos:

$$Mx = yFz - zFy$$
$$My = zFx - xFz$$
$$Mz = xFy - yFx$$

Generalizando tenemos, el momento de una fuerza $\overline{F}$ aplicada en A con respecto a un eje que no pasa por el origen, se obtiene un punto arbitrario B y determinamos la proyección sobre el eje BL del momento M_B de $\overline{F}$ con respecto a B.



Esto es:

$$M_{BL} = \overline{e}\cdot\overline{M}_B = \overline{e}\cdot(\ \overline{r}\times\overline{F})$$

donde $\Delta\overline{r} = \overline{r}_A - \overline{r}_B$ representa el vector que une a B con A. Si expresamos M en forma de determinante:

$$M_{BL} = \begin{vmatrix} ex & ey & ez \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix}$$

donde:

ex, ey, ez .- cosenos directores del eje BL

$\Delta x = x_A - x_B$; $\Delta y = y_A - y_B$; $\Delta z = z_A - z_B$

Fx, Fy, Fz .- componentes de la fuerza $\overline{F}$

Ejemplo:

26.- Una fuerza tiene por vector equipolente el

$$\overline{F} = 2i - 2j + k \quad (tf)$$

y su línea de acción pasa por el punto Po(2,3,5) (m). Encuentre sus momentos con respecto a tres ejes respectivamente paralelos a los coordenados que pasen por el punto Q(1,7,-2) (m).

Solución:

Primeramente obtendremos el vector de posición del punto Po al origen Q de los ejes coordenados

$$\overline{r} = (2i+3j+5k) - (i+7j-2k) = i - 4j + 7k \quad (m)$$

ahora calculamos el momento de la fuerza respecto al punto Q

$$\overline{M}_Q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & 7 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-4+14)i - (1-14)j + (-2+8)k \quad (tf\cdot m)$$

$$\overline{M}_Q = 10i + 13j + 6k \quad (tf\cdot m)$$

y como ya sabemos el momento de una fuerza respecto a un eje es

$$M = \overline{e}\cdot\overline{M}_O$$

entonces para el eje x tenemos $\overline{e} = i$

$$M_{x'-x} = i\cdot(10i+13j+6k) = 10i\cdot i + 13i\cdot j + 6k\cdot i = \underline{\underline{10}} \quad (tf\cdot m)$$

ya que una regla del producto escalar es:

$$i\cdot i = j\cdot j = k\cdot k = 1 \quad ; \quad i\cdot j = j\cdot k = k\cdot i = 0$$

De igual manera para los ejes y y z tenemos:

$$M_{y'-y} = j(10i+13j+6k) = \underline{\underline{13 \quad (tf\cdot m)}}$$

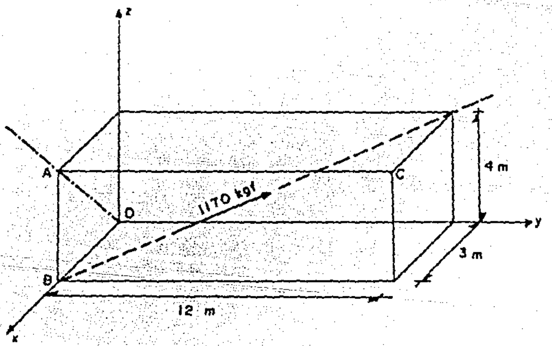
$$M_{z'-z} = k(10i+13j+6k) = \underline{\underline{6 \quad (tf\cdot m)}}$$

Resultados:

$M_{x'-x}$ =	10	(tf·m)
$M_{y'-y}$ =	13	(tf·m)
$M_{z'-z}$ =	6	(tf·m)

Con esto comprobamos que el momento de una fuerza respecto a un eje coordenado (en este caso paralelo) es igual a la componente de Mo con respecto a ese eje.

27.- Encuentre el momento de la fuerza indicada en la figura, con respecto a los ejes coordenados y al propio OA.



Solución:

Primeramente procedemos a obtener las componentes de la fuerza $|\vec{F}|$ = 1170 kgf.

sacamos el vector director de la fuerza $|F|$ (va del punto B al - C).

$$\bar{v} = (12j + 4k) - (3i) = -3i + 12j + 4k \quad (m)$$

la longitud de ese vector del punto B al C es

$$|\bar{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (12)^2 + (4)^2} = 13 \text{ m}$$

entonces su vector unitario esta dado por:

$$\bar{e}_v = \frac{-3i+12j+4k}{13} = -0.2308i + 0.9231j + 0.3077k$$

por lo tanto:

$$\bar{F} = (1170 \text{ kgf})(-0.2308i + 0.9231j + 0.3077k)$$

$$\bar{F} = -270i + 1080j + 360k \quad (kgf)$$

ahora calculamos el momento de la fuerza $\bar{F}$ con respecto al origen O.

$$\bar{M}o = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 0 \\ -270 & 1080 & 360 \end{vmatrix} = -1080j + 3240k \quad (kgf\ m)$$

enseguida obtenemos el vector director de la línea OA.

$$\overline{OA} = 3i + 4k \quad (m)$$

la magnitud es:

$$|\overline{OA}| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5 \text{ m}$$

y su vector unitario será:

$$\bar{e}_{OA} = \frac{3i + 4k}{5} = 0.6i + 0.8k$$

y como el momento de una fuerza respecto a un eje OA es:

$M_{OA} = \bar{e}_{OA} \cdot \bar{M}o$ entonces tenemos que:

$$M_{OA} = (0.6i+0.8k)(-1080j+3240k) = \underline{\underline{2592 \quad (kgf\ m)}}$$

9.1 Condición Necesaria y Suficiente para que el Momento de una Fuerza Respecto a un Eje sea Nulo.

Según la definición de Momento de una Fuerza Respecto a un eje tenemos que: $M_{OL} = \bar{e}\cdot(\bar{r} \times \bar{F})$ de donde si $\bar{F} \neq 0$, entonces el -

momento de $\overline{F}$ con respecto al eje OL se anula solamente cuando su proyección $\overline{F}'$ sobre un plano normal al eje OL es cero, o cuando la distancia perpendicular $\overline{d}$ de $\overline{F}'$ a OL es cero. En el primer caso $\overline{F}$ es paralela a OL y en el segundo, su línea de acción corta a OL. En ambos casos $\overline{F}$ y OL se encuentran en el mismo plano; por lo tanto:

"El momento de una fuerza con relación a un eje se anula -- cuando y solamente cuando, la fuerza y el eje son coplanares".

CAPITULO V

"ESTUDIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS"

V.1 Coordenadas Vectoriales del Sistema de Fuerzas. Equivalencia Entre Sistemas de Fuerzas y sus Condiciones Determinantes.

1.1 Coordenadas Vectoriales del Sistema de Fuerzas.

Sea el sistema de fuerzas constituido por $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, ...$\overline{F}_n$ y $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$, ..., $\overline{M}_n$ los momentos de cada unu de las fuerzas con respecto a "O"; se dice que sus coordenadas vectoriales o PlÜckerianas están definidas por:

$$\overline{F}_R = \Sigma\overline{F} \quad y \quad \overline{M}_R = \Sigma\overline{M}$$

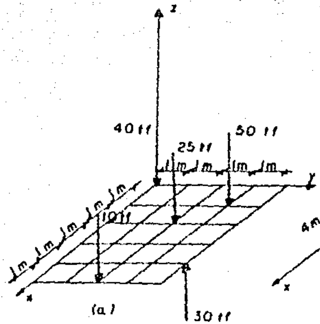
donde:

$\overline{F}_R$.- Es la fuerza resultante del sistema,

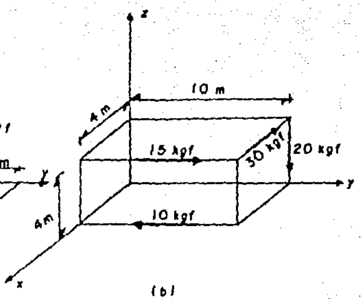
$\overline{M}_R$.- Es el momento general del sistema de fuerzas con respecto al origen de coordenadas.

Ejemplos:

1.- Dados los sistemas de fuerzas que se muestran en las figuras determine las coordenadas vectoriales o PlÜckerianas de cada una de ellas.



(a)



(b)

Soluciones:

a) Calculamos primero la fuerza resultante del sistema

$$\overline{F}_R = \Sigma\overline{F} = -40k - 25k - 10k - 50k + 30k \quad (tf)$$

$$\overline{F}_R = -95k \quad (tf)$$

ahora calculamos los momentos de cada una de las fuerzas con respecto al origen.

$$\overline{M}_{40} = 0 \quad (tf\ m)$$

$$\overline{M}_{25} = (2i+2j) \times (-25k) = -50i + 50j \quad (tf\cdot m)$$

$$\overline{M}_{10} = (5i+2j) \times (-10k) = -20i + 50j \quad (tf\cdot m)$$

$$\overline{M}_{50} = (i+3j) \times (-50k) = -150i + 50j \quad (tf\cdot m)$$

$$\overline{M}_{10} = (4i+4j) \times (-30k) = 120i - 120j \quad (tf\cdot m)$$

hacemos la suma de los momentos

$$\overline{M}_R = \Sigma\overline{M} = 0-50i+50j-20i+50j-150i+50j+120i-120j$$

$$\overline{M}_R = -100i + 30j \quad (tf\cdot m)$$

entonces las coordenadas vectoriales son:

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{F}_R = -95k \quad (tf) \\ \overline{M}_R = -100i + 30j \quad (tf\cdot m) \end{array}}$$

b) Procedemos de igual forma

$$\overline{F}_R = (-30i+15j-10j-20k) = -30i + 5j - 20k \quad (kgf)$$

y calculando momentos tenemos

$\overline{M}_{10} = (4i) \times (-10j) = -40k$ (kgf·m)

$\overline{M}_{15} = (4i+4k) \times (15j) = -60i + 60k$ (kgf·m)

$\overline{M}_{30} = (10j+4k) \times (-30i) = -120j + 300k$ (kgf·m)

$\overline{M}_{20} = (10j) \times (-20k) = -200i$ (kgf·m)

realizamos la suma de los momentos

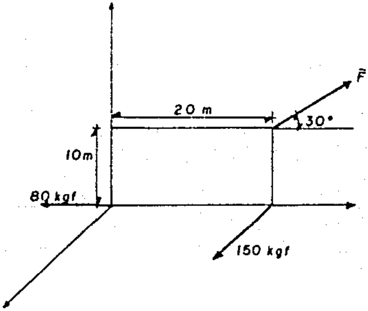
$\overline{M}_R = -40k-60i+60k-120j+300k-200i$ (kgf·m)

$\overline{M}_R = -260i - 120j + 320k$ (kgf·m)

por lo tanto las coordenadas vectoriales de b) son:

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{F}_R &= -30i + 5j - 20k \quad \text{(kgf)} \\ \overline{M}_R &= -260i - 120j + 320k \quad \text{(kgf·m)} \end{aligned}}$$

2.- La magnitud del sistema mostrado en la figura, respecto al origen, es $\overline{M}_O = 3500$ (kgf·m). Determine sus coordenadas vectoriales.



Solución:

Primero calculamos la suma de momentos

$\overline{M}_R = (20j) \times (150i) + (20j+10k) \times (\overline{F} \cos 30j+\overline{F} \operatorname{sen} 30k)$

$\overline{M}_R = 1.34\ Fi + 3000k$ (kgf·m)

como sabemos

$\overline{M}_R^2 = (1.34\ \overline{F}i)^2 + (3000k)^2$

sustituyendo

$\overline{M}_R = 3500$ (kgf·m) y despejando $\overline{F}$ tenemos

$$\overline{F} = \frac{\sqrt{(3500)^2 - (3000)^2}}{1.34} = 1345.35 \text{ kgf}$$

sustituyendo $\overline{F}$ en $\overline{M}_R$ tendremos

$$\overline{M}_R = 1.34(1345.35)i + 3000k$$

$$\overline{M}_R = 1802.77i + 3000k \quad \text{(kgf·m)}$$

ahora hacemos la suma de fuerzas

$$\overline{F}_R = 150i - 80j + 1345.35(\cos 30^\circ j + \operatorname{sen} 30^\circ k)$$

$$\overline{F}_R = 150i + 1085.07j + 672.68k \quad \text{(kgf)}$$

por lo que las coordenadas vectoriales del sistema son:

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{F}_R = 150i + 1085.07j + 672.68k \quad \text{(kgf)} \\ \overline{M}_R = 1802.77i + 3000k \quad \text{(kgf·m)} \end{array}}$$

1.2 Equivalencia Entre Sistemas de Fuerzas y sus Condiciones Determinantes.

Dos sistemas de fuerzas $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, etc., y $\overline{F}_1'$, $\overline{F}_2'$, $\overline{F}_3'$, etc. son equivalentes entre sí, si y solamente si las sumas de las fuerzas y las sumas de los momentos de las fuerzas con respecto a un punto dado "O" de dos sistemas son, respectivamente iguales.

En consecuencia las condiciones necesarias y suficientes para que dos sistemas de fuerzas sean equivalentes son:

1) Que ejerzan la misma fuerza sobre el cuerpo en cualquier dirección para empujarlo o jalarlo.

$$\Sigma\overline{F} = \Sigma\overline{F}'$$

2) Que tengan iguales momentos respecto a cualquier punto para girar o torcer el cuerpo con respecto a dicho punto.

$$\Sigma\overline{M}_O = \Sigma\overline{M}_O'$$

Ejemplos:

3.- Dados los sistemas de fuerzas:

(I) $\overline{F}_1 = 8i + 5j - 7k$ (kgf); A(0,2,1) (m)

$\overline{F}_2 = -2i - 9j + 15k$ (kgf); B(0,1,1) (m)

$\overline{m}_1 = 9i + 10j + 12k$ (kgf·m)

(II) $\overline{F}_3 = 6i - 4j + 8k$ (kgf) ; C(1,4,4) (m)

$\overline{m}_2 = 14i - 3j - 4k$ (kgf·m)

investigar si son equivalentes entre sí.

Solución:

Efectuamos la suma de fuerzas para probar si se cumple:

$\Sigma \overline{F}_I = \Sigma \overline{F}_{II}$

$\Sigma \overline{F}_I = 8i + 5j - 7k - 2i - 9j + 15k = 6i - 4j + 8k$ (kgf)

$\Sigma \overline{F}_{II} = 6i - 4j + 8k$ (kgf)

como vemos se cumple

$\Sigma \overline{F}_I = \Sigma \overline{F}_{II}$

ahora probaremos la ecuación

$\Sigma \overline{M}_I = \Sigma \overline{M}_{II}$

$\Sigma \overline{M}_I = (2j+k) \times (8i+5j-7k) + (j+k) \times (-2i-9j+15k) + 9i + 10j + 12k$

$\Sigma \overline{M}_I = 14i + 16j - 2k$ (kgf·m) y

$\Sigma \overline{M}_{II} = (i+4j+4k) \times (6i+4j+8k) + 14i - 3j - 4k$

$\Sigma \overline{M}_{II} = 62i + 13j - 32k$ (kgf·m)

como podemos ver $\Sigma \overline{M}_I \neq \Sigma \overline{M}_{II}$ por lo tanto los sistemas I y II no -- son equivalentes entre sí.

4.- Los dos siguientes sistemas de fuerzas son equivalentes. Determínense $\overline{F}_3$ y $\overline{m}_4$.

(I) $\overline{F}_1 = 6i + 7j + 12k$ (kgf) ; A(0,1,2) (m)

$\overline{F}_2 = 4i + 3j - 8k$ (kgf) ; B(1,0,-1) (m)

$\overline{m}_1 = -7i - 6j - 7k$ (kgf·m)

$\overline{m}_2 = 15i + 2j + 12k$ (kgf·m)

(II) $\overline{F}_3 = ?$; C(0,0,0) (m)

$\overline{m}_3 = 2j - 8k$ (kgf·m)

$\overline{m}_4 = ?$

Solución:

obtenemos la suma de fuerzas en el sistema I

$\Sigma \overline{F}_I = 6i+7j+12k+4i+3j-8k = 10i + 10j + 4k$ (kgf)

y como:

$\Sigma \overline{F}_I = \Sigma \overline{F}_{II} = \overline{F}_3$

$\overline{F}_3 = 10i + 10j + 4k \quad (kgf)$

para obtener $\overline{m}$, primero hacemos suma de momentos en el sistema I.

$\Sigma \overline{M}_I = (i+2k)\times(6i+7j+12k) + (i-k)\times(4i+3j-8k)-7i-6j-7k+15i+2j+12k$

$\Sigma \overline{M}_I = 9i + 12j + 2k \quad (kgf \cdot m)$

ahora hacemos suma de momentos en II

$\Sigma \overline{M}_{II} = 2j - 8k + \overline{m}_4 \quad (kgf \cdot m)$

igualamos

$\Sigma \overline{M}_I = \Sigma \overline{M}_{II}$

$9i + 12j + 2k = 2j - 8k + \overline{m}_4$

despejamos $\overline{m}_4$

$\overline{m}_4 = 9i + 10j + 10k \quad (kgf \cdot m)$

V.2 Los Sistemas Irreductibles.

Cuando un sistema de fuerzas se aplica a algún cuerpo y este no presenta ningún efecto exterior sobre el cuerpo, se dice que el cuerpo y el sistema de fuerzas se encuentran en equilibrio, si por el contrario, el sistema de fuerzas produce ub efecto exterior sobre el cuerpo (movimiento) entonces se dice que el cuerpo y el sistema de fuerzas no se encuentran en equilibrio, por lo tanto se tiene una fuerza resultante, que es el sistema más sencillo a que se puede transformar o convertir un sistema de fuerzas, a estos sistemas se len conoce como "sistemas irreductibles", los cuales son: una fuerza, un par, una fuerza y un par no coplanos y el equilibrio.

2.1 Una Fuerza.

El sistema más sencillo de los sistemas irreductibles es el de una fuerza, en el cual se obtiene solamente la fuerza resultante del sistema, teniendo de esta manera una fuerza única, capaz de producir los mismos efectos que todas las fuerzas que actúan o componen el sistema.

2.2 Un Par.

Este es otro de los sistemas irreductibles, el cual consta de dos fuerzas paralelas, no colineales, las cuales tienen la misma magnitud pero sentido contrario, que producen un momento.

2.3 Una Fuerza y un Par no Coplanos.

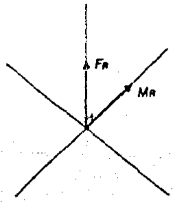
Otro de los sistemas irreductibles es el formado por una fuerza y un par actuando en el espacio.

2.4 Equlibrio.

Es el último de los sistemas irreductibles, en el que su resultante es cero, se le define como el estado de un cuerpo cuando encontradas fuerzas que obran en él se compensan y destruyen mutuamente anulandose.

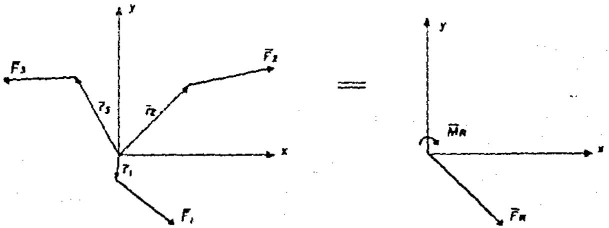
V.3 Reducción de un Sistema de Fuerzas a una Sola Fuerza.

Si un sistema es, de fuerzas concurrentes, coplanares o paralelas, siempre puede simplificarse a una sola fuerza resultante F_R que actúa a través de un punto único P. Esto se debe a que en cada uno de estos casos, F_R y M_R siempre serán perpendiculares, es decir, $F_R \cdot M_R = 0$; esto sucede solo cuando el sistema de fuerzas se puede reducir a una fuerza.

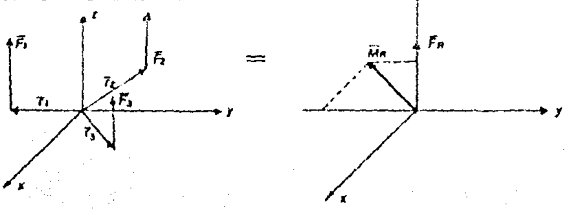


- En los sistemas de fuerzas concurrentes todas las fuerzas actúan en un punto, por lo que no hay par resultante, así que el punto P queda automáticamente especificado.

- Los sistemas de fuerzas coplanares, pueden simplificarse a una sola fuerza resultante, debido a que cuando cada fuerza del sistema se transporta a cualquier punto O del plano xy, se genera un vector par que es perpendicular al plano; es decir, en la dirección $\pm k$. Así pues, el momento resultante $\bar{M}_R = \Sigma \bar{r} \times \bar{F}$ es perpendicular a la fuerza resultante $\bar{F}_R$.



- Los sistemas de fuerzas paralelas pueden simplificarse a una sola fuerza resultante, debido a que cuando cada fuerza se transporta a cualquier punto O del plano xy, se genera un par con componentes de momentos solamente con respecto a los ejes x, y. Así el momento resultante $\bar{M}_R = \Sigma \bar{r} \times \bar{F}$ es perpendicular a la fuerza resultante $\bar{F}_R$.



La reducción requiere la ejecución de los pasos siguientes:

a) La fuerza resultante $\overline{F}_R$ es igual a la suma de todas las fuerzas del sistema.

$$\overline{F}_R = \Sigma \overline{F}$$

b) La línea de acción de $\overline{F}_R$ se determina por el principio de momentos, que establece que el momento de $\overline{F}$ con respecto al punto O es igual a la suma de los momentos con respecto al punto O de todas las fuerzas.

$$\overline{M}_R = \Sigma \overline{M}$$

3.1 Teorema de los Momentos o de Varignon.

Un concepto muy usado en mecánica, es el teorema de Varignon, que algunas veces se menciona como el principio de Momentos. Este teorema establece que:

"La suma de los momentos de todas las fuerzas de un sistema de fuerzas concurrentes con respecto a un punto dado es igual al momento producido por la fuerza resultante del sistema, con respecto al punto".

$$\overline{M}_R = \Sigma \overline{M} = \Sigma \overline{r} \times \overline{F}$$

Esta propiedad se aplica tanto al momento de una fuerza respecto a un punto como a un eje y se puede generalizar como:

"El momento de una fuerza es igual a la suma de los momentos de sus componentes".

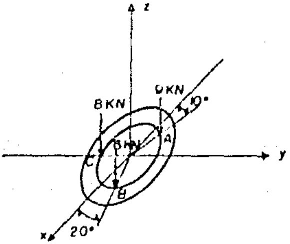
3.2 Eje Central como Soporte de la Fuerza Resultante.

Es el eje donde se aplica la fuerza resultante del sistema, a este eje se le conoce también con el nombre de "eje central", este eje se obtiene de la fórmula:

$$\overline{M}_R = \overline{r} \times \overline{F}_R$$

en la cual se desconoce el vector $\overline{r}$, que esta dado por rx, ry, rz; de la fórmula de momentos se obtiene un sistema de ecuaciones cuya solución nos indica la posición del eje central que va a soportar a la fuerza resultante.

5.- Tres fuerzas paralelas provenientes de columnas actúan sobre la losa circular. Determine la fuerza resultante, y especifique su localización (x,y) sobre la losa.



Solución:

Calculamos primero la fuerza resultante

$$\overline{F}_R = -8k - 6k - 9k = -23k \quad (kN)$$

ahora calculamos los momentos de cada fuerza respecto al origen

$$\overline{M}_A = (-2.46i + 0.43j)x(-9k) = -22.14j \quad (kN \cdot m)$$

$$\overline{M}_B = (2.35i + 0.86j)x(-6k) = -5.16i + 14.1j \quad (kN \cdot m)$$

$$\overline{M}_C = (-2.5j)x(-8k) = 20i \quad (kN \cdot m)$$

hacemos suma de momentos respecto al origen

$$\Sigma\overline{M} = -22.14j - 5.16i + 14.1j + 20i$$

$$\Sigma\overline{M} = 14.84i - 8.04j \quad (kN \cdot m)$$

calculamos ahora el momento de la fuerza resultante con respecto al origen

$$\overline{M}_R = (xi + yj)x(-23k) = -23yi + 23xj$$

y como $\quad \overline{M} = \overline{M}_R \quad$ entonces

$$14.84i - 8.04j = -23yi + 23xj$$

hacemos suma de momentos en cada eje

$$\Sigma M_x i = 14.84 = -23y \quad \text{-----} \quad (1)$$

$$\Sigma M_y j = -8.04 = 23x \quad \text{-----} \quad (2)$$

así pues tenemos

de (1) $\quad y = \dfrac{14.84}{-23} = -0.645 \text{ m}$

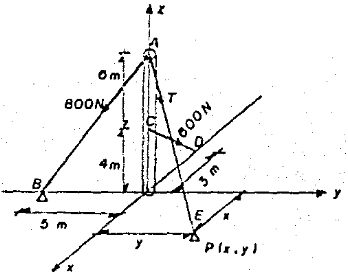
de (2) $\qquad x = \dfrac{-8.04}{23} = -0.35\ m$

de esta forma obtuvimos las coordenadas pedidas.

$$\underline{(-0.645,\ -0.35)\quad (m)}$$

como vemos $\bar{F}_R \cdot \bar{M}_R = 0$ el sistema se puede reducir a una sola fuerza resultante.

6.- El poste se estabiliza en la posición vertical mediante fuerzas de tensión desarrolladas en tres cables de retenida. Si los cables AB y CD sustentan una fuerza de 800 N y 600 N, respectivamente, determine la localización requerida P(x,y) del cable AP y la magnitud de la fuerza T desarrollada en él, de tal manera que la tensión en todos los cables produzca una sola fuerza resultante de $\bar{F}_R = \{-216i - 1800k\}$ N, actuando en O.



Solución:

Obtenemos primero las expresiones vectoriales de los cables AB y CD.

Cable AB

$$e_{AB} = \frac{-5j - 10k}{11.18} = -0.4472j - 0.8944k$$

$$\bar{T}_{AB} = (800)(-0.4472i-0.8944k) = -357.76i - 715.52k \quad (N)$$

de igual forma para el cable CD

$$\bar{T}_{CD} = (600)\,\frac{-3i-4k}{5} = -360i - 480k \quad (N)$$

y el cable AE

$$\bar{T}_{AE} = Txi + Tyj - Tzk$$

hacemos la suma de fuerzas en cada eje

$$\Sigma \bar{F}x = -360 + Tx = -216 \quad \text{------} \ (1)$$

$$\Sigma \bar{F}y = -357.76 + Ty = 0 \quad \text{------} \ (2)$$

$$\Sigma \bar{F}z = -715.52 - 480 - Tz = -1800 \quad (3)$$

de (1) $\quad Tx = 144$ N

de (2) $\quad Ty = 357.76$ N

de (3) $\quad Tz = 604.48$ N

así pues

$$\bar{T}_{AE} = 144i + 357.76j - 604.48k \ (N)$$

y la magnitud

$$T_{AE} = 717.02 \quad (N)$$

Ahora calculamos el momento de cada tensión respecto al origen.

$$\bar{M}_{AB} = (-5j)\times(-357.76j-715.52k) = 3577.6i \quad (N\ m)$$

$$\bar{M}_{CD} = (-3i)\times(-360i-480k) = -1440j \quad (N\ m)$$

$$\bar{M}_{AE} = (xi+yj)\times(144i+357.76j+604.48k) =$$

$$\bar{M}_{AE} = -604.48yi + 604.48xj + (357.76x - 144y)k$$

como $\bar{F}_R$ esta aplicada en O entonces $\bar{M}_R = 0$

y haciendo suma de moemntos en cada eje

$$\Sigma \bar{M}x = 3577.6 - 604.48y = 0 \quad \text{-----} \ (1)$$

$$\Sigma \bar{M}y = -1440 + 604.48x = 0 \quad \text{-----} \ (2)$$

$$\Sigma \bar{M}z = 357.76x - 144y = 0 \quad \text{-----} \ (3)$$

de (1) tenemos que

$$y = \frac{3577.6}{604.48} = 5.918 \text{ m}$$

de (2)

$$x = \frac{1440}{604.48} = 2.382 \text{ m}$$

comprobamos en la ecuación (3)

$$357.78(2.382) - 144(5.918) = 0$$

$$852.23 - 852.19 = 0$$

$$0.04 \doteq 0$$

por lo que las coordenadas del punto P son:

$$\underline{P(2.38, 5.92) \quad (m)}$$

así pues tenemos

$$\overline{M}_P = -3578.28i + 1438.57j - 0.96k \quad (N\cdot m)$$

y haciendo

$$\overline{F}\cdot\overline{M}_P = 772908.48 + 1728 = 774636 \quad (N^2\cdot m)$$

por lo tanto el sistema no admite reducción a una sola fuerza.

3.3 Configuraciones de los Sistemas que Admiten Reducción a una Sola Fuerza.

Los sistemas de fuerzas que pueden ser reducidos a una fuerza única o resultante, son, aquellas en los cuales la fuerza $\overline{R}$ y el vector del par $\overline{M}_O$ son perpendiculares entre sí. Esta condición generalmente no se satisface por sistemas de fuerzas en el espacio, si se satisface por sistemas formados:

1.- Por fuerzas concurrentes,

2.- Por fuerzas coplanares y

3.- Por fuerzas paralelas.

1.- Las fuerzas concurrentes, están aplicadas al mismo punto, -- por lo tanto, pueden sumarse directamente para obtener su resultante $\overline{R}$. En esta forma siempre se reducen a una sola fuerza.

2.- Las fuerzas coplanares, actúan en el mismo plano, por lo que la suma $\overline{R}$ de las fuerzas del sistema también estará contenida en el mismo plano, pero el momento de cada una de las fuerzas con respecto a O y, por lo tanto, el momento resultante $\overline{M}_O$, serán -- perpendiculares al plano, es decir, $\overline{R}$ y $\overline{M}_O$ son perpendiculares - entre sí. Ellas pueden reducirse a una fuerza única $\overline{R}$ desplazando a $\overline{R}$ sobre el plano hasta que su momento con respecto a O sea igual a $\overline{M}_O$. La distancia de O a la línea de acción de $\overline{R}$ es:

$$d = \frac{\overline{M}_O}{\overline{R}}$$

3.- Las fuerzas paralelas, suponiendo que las fuerzas son paralelas al eje z, tendremos que su suma $\overline{R}$ también será paralela al eje z. Por otra parte debido a que el momento de una fuerza es perpendicular a la fuerza, el momento con respecto a O de cada una de las fuerzas del sistema, así como el momento resultante $\overline{M}o$ estarán sobre el plano xy. El sistema fuerza-par en O está formado de una fuerza única $\overline{R}$. La reducción del sistema a una fuerza única puede efectuarse trasladando $\overline{R}$ a un nuevo punto de aplicación de coordenadas.

$$-xRz = Mz \qquad ; \qquad yRz = Mx$$

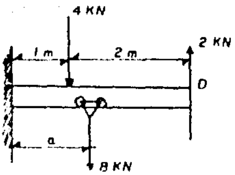
Ejemplos:

7.- Determinar la distancia del punto A a la línea de acción de la resultante de las tres fuerzas indicadas cuando:

a) a = 1 m;

b) a = 1.5 m;

c) a = 2.5 m.



Solución:

a) Reducimos el sistema a una fuerza resultante

$$F_R = -4j-8j+2j = -10j \text{ kN}$$

ahora obtenemos los momentos de las fuerzas, sabiendo que a = 1m

$$M_1 = (4)(1) = 4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_2 = -(2)(3) = -6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_3 = (8)(1) = 8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\Sigma M = 4 - 6 + 8 = 6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

como

$$M_R = \Sigma M$$

entonces

$$10x = 6 \text{ kN·m}$$

$$x = \frac{6}{10} = \underline{\underline{0.6 \text{ m}}}$$

b) Para $a = 1.5$ m

$$M_3 = (8)(1.5) = 12 \text{ kN·m}$$

$$\Sigma M = -2 + 12 = 10 \text{ kN·m}$$

$$10x = 10$$

por lo tanto

$$\underline{\underline{x = 1 \text{ m}}}$$

c) Para $a = 2.5$ m

$$M_3 = (8)(2.5) = 20 \text{ kN·m}$$

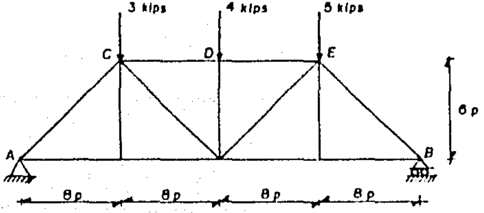
$$\Sigma M = -2 + 20 = 18 \text{ kN·m}$$

$$10x = 18$$

entonces

$$\underline{\underline{x = 1.8 \text{ m}}}$$

8.- Para la armadura y carga mostradas, determinar la resultante de las cargas y la distancia desde el punto A a su línea de acción.



Solución:

Reducimos el sistema a una fuerza resultante

$$F_R = -3 - 4 - 5 = -12 \text{ kips}$$

y como

$$M_R = \Sigma M$$

entonces:

$$-12x = (8)(-3) + (16)(-4) + (24)(-5)$$

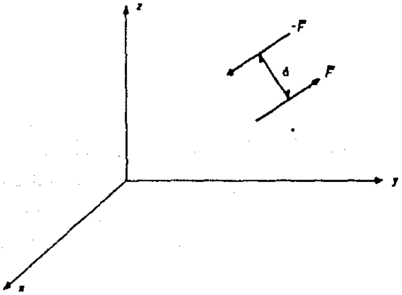
$$-12x = -208$$

por lo que

$$\underline{\underline{x = 17.33\ p}}$$

V.4 Par de Fuerzas.

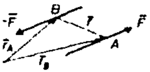
Se le llama par al sistema de dos fuerzas iguales, parale-- las y de sentido contrario. Una de las fuerzas se designa por $\bar{F}$ y la otra por $-\bar{F}$, la distancia perpendicular entre ellas se de-- signa por "d", cuya magnitud es diferente de cero.



4.1 Momento de un Par.

El efecto de un par es el de producir un momento puro, es - decir, una tendencia a la rotación en una dirección específica-- da.

El momento producido por un par es equivalente al momento - de cada una de sus fuerzas, calculado con respecto a cualquier - punto arbitrario O del espacio.



El momento del par con respecto a O es:

$$\overline{M}_O = \overline{r}_A \times (-\overline{F}) + \overline{r}_B \times \overline{F}$$

$$\overline{M}_O = (\overline{r}_B - \overline{r}_A) \times \overline{F}$$

por la ley del triángulo de la suma vectorial, $\overline{r}_A + \overline{r} = \overline{r}_B$ o $\overline{r} = \overline{r}_B - \overline{r}_A$, tenemos:

$$\overline{M}_O = \overline{r} \times \overline{F}$$

El resultado indica que el par es un vector libre ya que $\overline{M}_O$ depende solamente del vector de posición $\overline{r}_A$ o $\overline{r}_B$, dirigido del punto O a la fuerza.

En conclusión tenemos que:

" El momento de un par permanece constante con respecto a cualquier punto "O" del espacio, y a cualquier eje perpendicular a su plano; teniendo por magnitud el producto de una de sus fuerzas por el brazo del par".

$$M = Fd$$

donde:

F.- Es la magnitud de una de las fuerzas.

d.- Es la distancia perpendicular o brazo de palanca entre las fuerzas.

El sentido del momento se encuentra mediante la regla de la mano derecha, en todos los casos M actúa perpendicularmente al plano que contiene las dos fuerzas.

4.2 Propiedades de los Pares.

1º "El estado de un cuerpo rígido no cambia, si cualquier par que obre sobre él en un plano dado, se substituye por otro par de igual momento aplicado en el mismo plano".

2º "Se puede, sin variar el estado de un cuerpo rígido, trasladar paralelamente a él mismo en su plano, un par de fuerzas que le es aplicado".

3º "El estado de un cuerpo rígido no cambia, si cualquier par que le es aplicado gira alrededor de cualquier eje perpendicular al plano del par".

4º "El estado de un cuerpo rígido no se altera, si cualqui el par que le es aplicado en un plano dado se traslada a otro -- plano paralelo".

Estas cuatro propiedades dan como resultado una propiedad - general:

"Dos pares de igual momento, situados en planos paralelos y guardando cualquier posición en ellos, son equivalentes".

$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$

4.3 Características de los Pares.

Las características de los pares se obtienen de sus propiedades por lo tanto un par queda determinado con los tres elementos siguientes:

1.- Magnitud y Sentido.- Es el producto de una de las fuerzas del par por su brazo de palanca.

2.- Signo .- Se conviene determinarlo según el sentido del momento del par referido a cierto eje orientado.

3.- Plano del Par.- Analíticamente queda determinado por -- los cosenos directores de su normal.

Ejemplos:

9.- Dado un par de fuerzas iguales y opuestas $\overline{F}$ y $-\overline{F}$, donde: $\overline{F} = -6i + 8j + 5k$ (kgf), tal que $\overline{F}$ pasa por el punto A(6,8,10) (m) y $-\overline{F}$ pasa por el punto B(-8,6,10) (m), encontrar el momento de este par.

Solución:

Primeramente obtenemos el vector $\overline{r} = \overline{r}_B - \overline{r}_A$

$$\overline{r} = (6i+8j+10k)-(-8i+6j+10k) = 14i + 2j \quad (m)$$

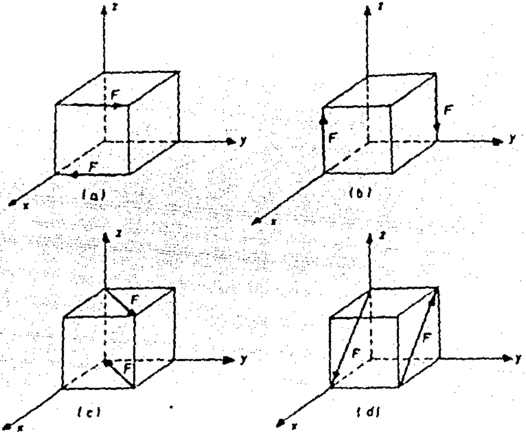
ahora calculamos el momento del par

$$\overline{M} = (14i+2j) \times (-6i+8j+5k) = \underline{\underline{10i - 70j + 124k \quad (kgf\cdot m)}}$$

y la magnitud del momento es:

$$\overline{M} = \sqrt{(10)^2 + (-70)^2 + (124)^2} = \underline{\underline{142.74 \quad (kgf\cdot m)}}$$

10.- Se tienen pares que actúan sobre los cubos cuyos lados tienen longitud de 3 m, como se muestran en las figuras. Si cada fuerza es de 100 kgf, determinar los momentos de los pares en (a), (b), (c) y (d).



Soluciones:

(a) Como $\overline{F}$ es perpendicular al eje y entonces tenemos que : $\overline{F} = 100j$ (kgf) y la distancia entre las dos fuerzas es $\overline{r}=3k$ m entonces

$$\overline{M} = (3k)\times(100j) = \underline{-300i} \quad (kgf \cdot m)$$

(b) De igual manera tenemos que $\overline{F} = 100k$ (kgf) y $\overline{r} = 3i - 3j$ (m) por lo que

$$\overline{M} = (3i-3j)\times(100k) = \underline{-300i - 300j} \quad (kgf \cdot m)$$

(c) Tenemos que el vector de posición de $\overline{F}$ es $\overline{v} = 3i + 3j$ (m), si obtenemos su magnitud

$$|\overline{v}| = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = 4.24 \text{ m}$$

entonces

$$\overline{F} = (100\ \text{kgf})\left(\frac{3i+3j}{4.24}\right) = 70.75i + 70.75j \quad (\text{kgf})$$

y $\overline{r} = 3k$ (m)

por lo que nos queda:

$$\overline{M} = (3k)\times(70.75i+70.75j) = \underline{\underline{-212.25i + 212.25j \quad (\text{kgf}\cdot\text{m})}}$$

(d) De igual manera para $\overline{F}$ tenemos $\overline{v} = 3i - 3k$ (m)

y $\overline{v} = 4.24$ m con lo que

$$\overline{F} = (100)\left(\frac{3i - 3k}{4.24}\right) = 70.75i - 70.75k \quad (\text{kgf})$$

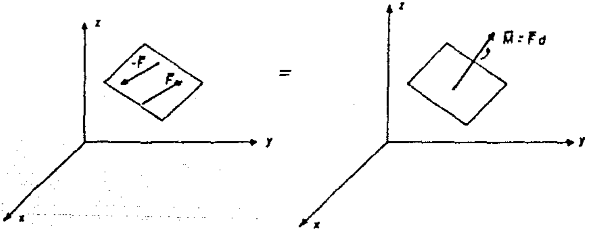
y $\overline{r} = 3j$ (m)

entonces:

$$\overline{M} = (3j)\times(70.75i-70.75k) = \underline{\underline{-212.25i - 212.25k \quad (\text{kgf}\cdot\text{m})}}$$

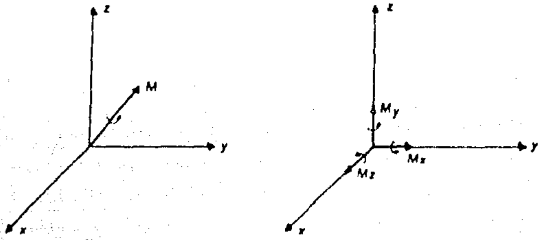
4.4 El Vector Par.

Se considera que no es necesario dibujar las fuerzas reales que forman un par de fuerzas para definir el efecto que producen sobre un cuerpo rígido. Basta con dibujar una flecha igual en -- magnitud y dirección al momento producido por el par.



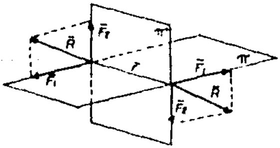
El símbolo ↺ se usa para indicar que es un vector del par.

Al vector que representa un par de fuerzas se le conoce como vector par o vector del par, el vector del par, así como, el_ momento del par, es un vector libre, por lo tanto su punto de aplicación se puede tomar en cualquier punto por ejemplo en el origen de las coordenadas, además puede descomponerse en sus vectores componentes $\overline{M}x$, $\overline{M}y$, $\overline{M}z$, que representan los pares de fuerzas que actúan en los planos yz, zx, xy respectivamente.



4.5 Composición de Pares de Fuerzas.

Sean dos planos π y π' que se intersectan y dos pares que actúan respectivamente en π y π' con el par en π compuesto por $\overline{F}_1$ y $-\overline{F}_1$ perpendiculares a la línea donde se intersectan los dos planos y que actúan en A y en B respectivamente; de igual manera el par en π' compuesto por $\overline{F}_2$ y $-\overline{F}_2$ perpendiculares a AB y que actúan en A y B respectivamente.



Resulta obvio que la resultante $\overline{R}$ de $\overline{F}_1$ y de $\overline{F}_2$ y la resultante $-\overline{R}$ de $-\overline{F}_1$ y de $-\overline{F}_2$ forman un par.

Si llamamos $\overline{r}$ al vector que une el punto A con el B y usando la definición de momento de un par, expresamos el momento del par resultante de la siguiente manera:

$$\overline{M} = \overline{r} \times \overline{R} = \overline{r} \times (\overline{F}_1 + \overline{F}_2)$$

y por el teorema de Varignon tenemos:

$$\overline{M} = \overline{r} \times \overline{F}_1 + \overline{r} \times \overline{F}_2$$

como el primer término representa el momento del par en π y el - segundo término el momento del par en π' entonces:

$$\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2$$

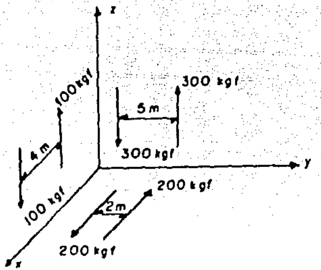
con lo que se concluye que la suma de dos pares de momentos M_1 y M_2 es un par de momento $\overline{M}$ igual a la suma vectorial de $\overline{M}_1$ y $\overline{M}_2$.

Generalizando, podemos decir que: los vectores momentos de los pares son vectores libres, que se pueden sumar o restar vectorialmente, independientemente de sus posiciones en el espacio.

$$\overline{M} = \overline{M}_1 \pm \overline{M}_2 \pm \overline{M}_3 \pm \ldots$$

Ejemplos:

11.- Obtener la suma de los tres pares mostrados en la figura, - considerando que se ubican en los planos coordenados.



Solución:

Calculamos los momentos de cada uno de los pares

para $\overline{F}_1 = 100$ kgf y $\overline{r} = 4i$ m

$\overline{M}_1 = (4i) \times (100k) = 400j$ kgf·m

para $\overline{F}_2 = 300$ kgf y $\overline{r} = 5j$ m

$\overline{M}_2 = (5j) \times (300k) = 1500i$ kgf·m

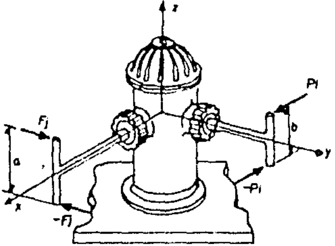
para $\overline{F}_3 = 200i$ kgf y $\overline{r} = -2j$ m

$\overline{M}_3 = (-2j) \times (200i) = 400k$ kgf·m

haciendo la suma de momentos obtenemos:

$$\overline{M} = 1500i + 400j + 400k \quad (\text{kgf}\cdot\text{m})$$

12.- Si el par resultante de los dos pares que actúan sobre el - hidrante contra incendios es M = (-15i + 30j) N m, determine la magnitud de la fuerza, P considere F = 75 N, a = 200 mm y b = 150 mm.



Solución:

Primero calculamos el momento de $\overline{F}$

$$\overline{M}_F = (0.2k) \times (75j) = -15i \quad N\,m$$

ahora el momento de $\overline{P}$

$$\overline{M}_P = (0.15) \times (Pi) = 0.15Pj \quad N\,m$$

como $\quad \overline{M}_A = \Sigma\overline{M} \quad$ entonces

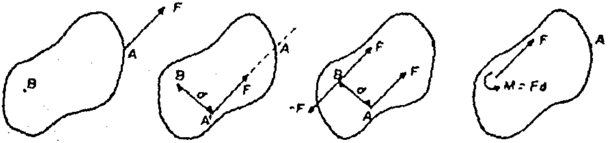
$$(-15i+30j) = -15i + 0.15Pj$$

$$P = \frac{30}{0.15} = \underline{\underline{200\ N}}$$

4.6 Translación de una Fuerza Paralelamente a ella Misma.

Se puede, sin cambiar el estado de un cuerpo rígido, transladar paralelamente a ella misma una fuerza aplicada en uno de sus puntos, a otro cualquiera, mediante la aplicación de un par desequilibrado de fuerzas, cuya magnitud es el producto de la fuerza por su distancia al punto al cual se le ha transladado.

Supongamos la fuerza F aplicada en el punto A de un cuerpo rígido (a). Se trata de transladar dicha fuerza al punto B del mismo cuerpo y con una dirección paralela a la fuerza original.



(a) (b) (c) (d)

Primero usando el principio de transmisibilidad puede aplicarse F en el punto A, que se localiza a una distancia perpendicular d desde B hasta la línea de acción de la fuerza (b).

Después aplicamos fuerzas iguales y opuestas F y -F en el punto B, (c), de esta manera las dos fuerzas indicadas mediante flechas cortadas por pequeñas rayas, forman un par de magnitud -

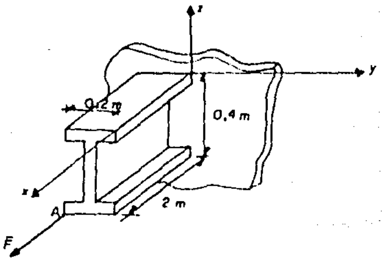
$M_c = Fd$ y tiende a hacer girar, el cuerpo en sentido contrario - al de las manecillas del reloj. Ya que el par es un vector libre y puede aplicarse en cualquier punto del cuerpo (d).

Usando este procedimiento, se ha mantenido un sistema equivalente en cada una de las figuras, en otras palabras, cuando F actúa en A producirá las mismas reacciones que cuando se aplica en O y también se aplica al cuerpo un vector par Mc, notese que la magnitud y dirección del vector par también pueda determinarse tomando el momento de F con respecto a O cuando la fuerza se localiza en su punto original A.

En tres dimensiones se obtiene usando vectores $\overline{M}c = \overline{r} \times \overline{F}$. El vector de posición $\overline{r}$ se traza desde O a cualquier punto A localizado a lo largo de la línea de acción de la fuerza.

Ejemplos:

13.- Sustituye la fuerza $\overline{F} = (60i - 70j - 30k)$ N actuando en el extremo de la viga por un sistema fuerza-par equivalente, en el punto O.



Solución:

Obtenemos primero el vector $\overline{r} = -2i-0.2j-0.4k$ (m), ahora calculamos el par $\overline{M}c$

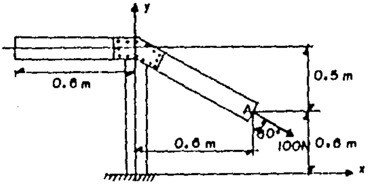
$$\overline{M}c = (-2i+0.2j-0.4k)\times(60i-70j-30k)$$

$$\overline{M}c = -22i + 36j - 128k \quad (N\cdot m)$$

así nuestro sistema fuerza-par equivalente en el punto O es:

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{F} &= 60i - 70j - 30k \quad (N) \\ \overline{M}c &= -22i + 36j - 128k \quad (N\cdot m) \end{aligned}}$$

14.- Sustituya la fuerza que actúa sobre el marco rígido por un sistema fuerza-par equivalente (a) en el punto O; (b) en el punto B.



(a) Obtenemos primero $\bar{F}$ en función de sus componentes

$$\bar{F} = (100)(\text{sen } 60i - \cos 60j) = 86.6i - 50j \quad (N)$$

ahora obtenemos el vector

$$\bar{r} = 0.6i + 0.6j \quad (m)$$

calculamos el par $\bar{M}_c$

$$\bar{M}_c = (0.6i+0.6j)\times(86.6i-50j) = -81.96k \quad (N\cdot m)$$

por lo que el sistema fuerza-par en el punto O es:

$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{F} = 86.6i - 50j \quad (N) \\ \bar{M}_c = -81.96 \quad (N\cdot m) \end{array}}$$

(b) Obtenemos el vector $\bar{r} = 1.2i - 0.5j \quad (m)$

calculamos el par $\bar{M}_o$

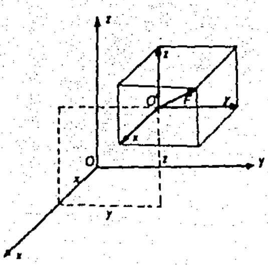
$$\bar{M}_o = (1.2i-0.5j)\times(86.6i-50j) = -16.7k \quad (N\cdot m)$$

el sistema fuerza-par equivalente en B es:

$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{F} = 86.6i - 50j \quad (N) \\ \bar{M}_o = -16.7k \quad (N\cdot m) \end{array}}$$

4.7 Par de Transporte.

Sea una fuerza $\bar{F}$ cualquiera y un sistema de ejes coordenados de referencia.



El vector $\overline{C}$ es el par de transporte necesario para llevar la fuerza $\overline{F}$ de O' a O, siendo perpendicular al plano formado por la fuerza y el punto, y teniendo por magnitud el producto de la fuerza por su distancia al punto, es decir:

$\boxed{\overline{C} = \overline{r} \times \overline{F}}$ ---------- Par de Transporte

4.8 Sistema de Pares y Fuerzas que se Reduce a un Par.

Para que un sistema de pares y de fuerzas cualquiera, aplicado a un cuerpo rígido sea equivalente a un par es necesario y suficiente que la suma geométrica de todas las fuerzas del sistema sea nula, y que la suma geométrica de todas las fuerzas del sistema (pares de transporte), y la de los pares, sea diferente de cero:

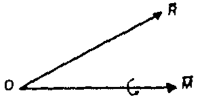
$$\overline{F} = \Sigma\overline{F} = 0$$
$$\overline{M} = \Sigma\overline{M} = \Sigma(\overline{r} \times \overline{F}) + \Sigma\overline{C} \neq 0$$

Es necesario, para que la fuerza de traslación no exista, y es suficiente ya que las dos fuerzas que forman un par tienen suma geométrica nula.

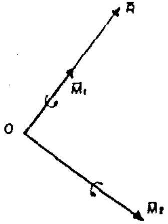
V.5 Par y Fuerza No Coplanos.

El sistema fuerza-par en O consiste en una fuerza $\overline{R}$ y un --

vector del par $\overline{M}_R$ que no son perpendiculares, y ninguno de ellos es cero.



Por lo cual el sistema de fuerzas no puede reducirse a una sola fuerza o a un simple par. Sin embargo, el vector del par -- puede reemplazarse por otros dos vectores del par que se obtie-- nen al descomponer $\overline{M}_R$ en una componente $\overline{M}_1$ a lo largo de $\overline{R}$ y o-- tra $\overline{M}_2$ en un plano perpendicular a $\overline{R}$.



El vector del par $\overline{M}_2$ y la fuerza $\overline{R}$ pueden ser reemplazadas por una sola fuerza $\overline{R}$ que actúa a lo largo de una nueva línea de acción. De esta forma el sistema original de fuerzas se reduce a $\overline{R}$ y a un vector del par $\overline{M}_1$, es decir a $\overline{R}$ y a un vector del par - que actúa en un plano perpendicular a $\overline{R}$. Esta combinación parti-lar fuerza-par es llamado torsor. La proyección de $\overline{M}$ sobre la - línea de acción de $\overline{R}$ es:

$$M_1 = \frac{\overline{R}\cdot\overline{M}_R}{\overline{R}}$$

Así pues,

$$\text{Paso del torsor} = \frac{\overline{M}_1}{\overline{R}} = \frac{\overline{R}\cdot\overline{M}_R}{\overline{R}^2}$$

CAPITULO VI
"EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS"

El equilibrio se define como el estado de un cuerpo cuando encontradas fuerzas que obran en él se compensan destruyendose mutuamente.

Así pues decimos que un sistema de fuerzas está en equilibrio cuando su sistema resultante es nulo.

El equilibrio de sistemas de fuerzas se ha dividido en dos partes para su fácil estudio: Equilibrio de Sistemas Planos y Equilibrio de Sistemas Espaciales; en los cuales se estudiará el equilibrio de los sistemas de fuerzas: Generales, Paralelas, Concurrentes y Colineales.

Por otra parte, para hacer más fácil el estudio del equilibrio de los sistemas de fuerzas se hace necesario, el uso de los Diagramas de Cuerpo Libre (DCL), así mismo los elementos de unión y de apoyo de los cuerpos sobre los que se aplican los sistemas de fuerzas; sin dejar de mencionar la fuerza de fricción que se produce entre las superficies en contacto, cuyo valor también influye en el equilibrio de los sistemas de fuerzas.

V.1 Fricción.

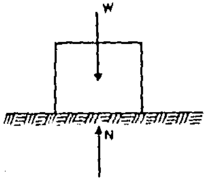
Cuando dos cuerpos se deslizan o tienden a deslizarse uno sobre otro, la fuerza tangente a la superficie de contacto, que se opone al movimiento relativo o lo impide, se denomina fuerza de fricción o de rozamiento.

En general pueden ocurrir dos tipos de fricción entre las superficies: Fricción Húmeda (Fluida) y Fricción en Seco (también llamada de Coulomb). La fricción húmeda existe cuando las superficies en contacto están separadas por una película de líquido, tal como aceite. Cuando ocurre el movimiento relativo entre los cuerpos se desarrollan fuerzas de fricción entre capas del líquido. Estas fuerzas dependen de la velocidad relativa de las capas del líquido y de la viscosidad o resistencia del líquido a la fuerza cortante. Por esta razón, los problemas que involucran fricción fluida son estudiados en mecánica de fluidos.

La fricción en seco se presenta en situaciones en que intervienen cuerpos rígidos en contacto con superficies no lubricadas. La fricción en seco puede ser por deslizamiento o por rodadura. La fricción por deslizamiento se produce cuando un cuerpo se desliza sobre otro. La fricción por rodadura se presenta entre cuerpos redondos o esféricos que hacen contacto con una superficie plana; esta fricción es menor que la de deslizamiento.

1.1 Fricción Estática.

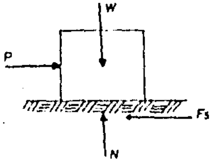
Sea un bloque de peso W colocado sobre una superficie plana horizontal. Las fuerzas que actúan sobre él son: su peso W y la reacción de la superficie.



Como W no tiene componente horizontal entonces, la reacción de la superficie tampoco la tiene, por lo tanto la reacción es normal a la superficie y se representa por N.

Ahora apliquemos una fuerza horizontal P, si P es pequeña, el bloque no se moverá, por lo que debe haber otra fuerza horizontal que equilibre a P, esta fuerza se conoce con el nombre de "Fricción Estática" que es la fuerza, que impide que se produzca el movimiento relativo entre las dos superficies en contacto.

La fuerza de fricción estática es en realidad la resultante de una gran número de fuerzas que actúan sobre la superficie de contacto entre el plano y el bloque.



Conforme la magnitud de P se incrementa, la magnitud correspondiente de F se incrementa hasta que adquiere un cierto valor mínimo Fs, llamado "fuerza de fricción estática limite", cuando se alcanza este valor, el bloque está en equilibrio inestable, ya que cualquier incremento adicional en P producirá el movimiento (Movimiento Inminente). Experimentalmente se ha determinado que la magnitud de la fuerza de fricción estática limite Fs es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza resultante normal N. Esto puede expresarse matemáticamente como:

$$F_s = \mu_s N$$

donde: μ_s= coeficiente de fricción estática.

Materiales en Contacto	Coeficiente de fricción estática μs
Metal sobre metal	0.03 - 0.05
Metal sobre madera	0.15 - 0.60
Metal sobre piedra	0.30 - 0.60
Metal sobre cuero	0.30 - 0.60
Madera sobre madera	0.25 - 0.50
Madera sobre cuero	0.25 - 0.50
Piedra sobre piedra	0.40 - 0.70
Tierra sobre tierra	0.20 - 1.00
Caucho sobre concreto	0.60 - 0.90
Aluminio sobre aluminio	1.10 - 1.70

Tabla VI.I Valores aproximados de lo coeficientes de fricción - estática para superficies secas.

1.2 Fricción Dinámica o Cinética.

Si la magnitud de P se incrementa, de modo que llega a -- ser mayor que Fs, la fuerza de fricción en las superficies en - contacto disminuye ligeramente hasta un valor más pequeño Fk, - llamado "fuerza de fricción dinámica". El bloque no se mantendrá en equilibrio ($P > Fk$); en vez de ello, empieza a deslizar - con velocidad creciente (Movimiento). La disminución producida en la magnitud de la fuerza de fricción, desde Fs (estática) hasta Fk (cinética), se debe a que cuando $P > Fs$, entonces P "levanta" esencialmente al bloque fuera de su posición de reposo y lo hace "flotar" sobre la cima de las crestas en la superficie de contacto. Consecuentemente las fuerzas resultantes de contacto se alinean ligeramente más que antes a la dirección -- vertical, por lo tanto contribuyen con componentes de fricción más pequeñas, que cuando las irregularidades se ponen en contacto.

Los experimentos con bloques deslizantes indican que la magnitud de la fuerza de fricción resultante (Fk) es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza resultante N.

Matemáticamente se expresa como:

$$Fk = \mu k N$$

donde: μk.- Coeficiente de fricción dinámica.

Los valores típicos de μk son, aproximadamente, 25 % más pequeños que los de fricción estática μs.

1.3 Leyes de la Fricción en Seco.

Después de un gran número de experimentos suficientes para inferir algunos principios aplicables al fenómeno de la fricción en seco Carlos Coulomb enunció en 1781, las leyes de la fricción las cuales fuerón comprobadas por A.J. Mourin's en sus experimentos realizados en 1831.

Sus enunciados son:

1ª Ley .- La fricción máxima que puede generarse es proporcional a la fuerza Normal.

$$Fr \approx N$$

que puede escribirse en la siguiente forma:

$$Fr = \mu N$$

donde μ.- Coeficiente de fricción.

2ª Ley .- La fricción máxima que puede generarse es independiente del tamaño del área de contacto entre las superficies consideradas.

3ª Ley .- La fricción límite (máxima) es mayor que la fuerza de fricción cinética.

4ª Ley .- La fricción cinética es independiente de la velocidad relativa de los cuerpos que se encuentran en contacto.

Estas cuatro leyes han sido modificadas y corregidas como - resultado de los experimentos más recientes pudiendo enunciarse- de la siguiente manera:

1ª Ley.- Para presiones muy altas o muy bajas que pruduzcan una deformación excesiva, el coeficiente de fricción estática se- incrementa sensiblemente.

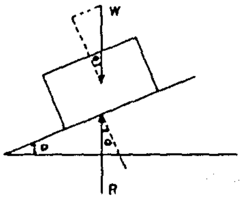
2ª Ley.- Para velocidades relativamente muy bajas el coeficiente de fricción cinética aumenta sensiblemente y tiende a -- igualarse con el valor del coeficiente de fricción estática.

3ª Ley.- Para altas velocidades, el coeficiente de fricción cinética disminuye apreciablemente.

4ª Ley.- Los cambios ordinarios de temperatura no producen- efectos materiales en el coeficiente de fricción.

1.4 Angulo de Reposo.

Consideremos un bloque sobre una superficie inclinada en la cual el ángulo de inclinación de la superficie hace que el movimiento del bloque sea inminente, se dice que el valor del ángulo θ_r correspondiente al movimiento inminente, se llama ángulo de - reposo.



1.5 Desventajas y Ventajas de la Fricción.

Desventajas .- Como ya sabemos, la fricción produce calor, que no es aprovechable, ocasiona desgaste y desperfectos en las piezas de las máquinas y constituye un obstáculo para el movimiento, ya que disminuye el rendimiento en el trabajo.

Para contrarrestar la fricción se hacen lisas las superficies de contacto de los cuerpos, y se emplean cojinetes de bolas y aceites lubricantes.

La fricción de una capsula espacial en la atmósfera, cuando retorna a la tierra, podría incendiarla, si no estuviera protegida y aislada con una coraza refractaria.

Las máquinas gastan más energía en su funcionamiento para vencer la fricción.

Las fricciones o rozamientos gastan las suelas de los zapatos, la ropa, los pisos, las llantas, etc.

Ventajas .- La existencia de la fricción impide que se efectúen muchos fenómenos que nos serían perjudiciales; en cambio, la aprovechamos para nuestro beneficio.

Sin la fricción, al caminar estaríamos expuestos a resbalarnos; lápices, plumas y gises no nos servirían para escribir; un automóvil no tendría medios para frenar, al igual que una bicicleta, al ser nula la fricción de sus gomas; una gota de lluvia alcanzaría la velocidad de una bala sin la fricción del aire, -- los meteoritos que bombardean a cada instante nuestro planeta no nos causan estragos, porque la fricción del aire se encarga de desintegrarlos.

VI.2 Tipos de Apoyo, Diagrama de Cuerpo Libre.

2.1 Apoyo Mecánico.- Se define al apoyo mecánico como el elemento que se utiliza para ligar, fijar o simplemente evitar desplazamientos.

Tipos de Apoyo.- En un cuerpo se distinguen dos clases de fuerzas: "las fuerzas activas" y "las fuerzas reactivas"; a las primeras se les conoce con el nombre de cargas y a las segundas con el nombre de reacciones. Resulta obvio que las fuerzas reactivas dependen de la clase de apoyo del cuerpo, por lo cual a estas fuerzas también se les llama: fuerzas de sustentación.

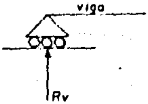
Apoyo Móvil o Apoyo Libre.

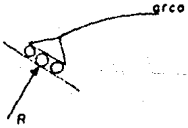
La sustentación se hace sobre el eje de una rueda, y la rueda se encuentra sobre un plano. El cuerpo puede girar alrededor de la rueda y esto deslizarse a lo largo del plano.

Se considera que no existe fricción entre el eje y la rueda ni entre ésta y el plano, además se supone que tanto la rueda como el plano son absolutamente rígidos, es decir, no admiten deformación.

Hay un solo punto de contacto entre la rueda y el plano, por lo tanto por dicho punto pasará la reacción, que deberá ser perpendicular al plano del deslizamiento.

El apoyo móvil se representa de la siguiente forma:

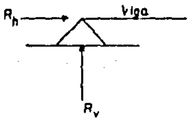


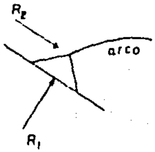


Apoyo Fijo.

El apoyo fijo se encuentra sobre un plano al cual se encuentra fijado, por lo que el cuerpo no tiene movimiento.

Este tipo de apoyo presenta dos reacciones, una reacción vertical, aplicada en su eje, y otra reacción horizontal, aplicada en el punto en cual se apoya el cuerpo. Se representa de la siguiente manera:



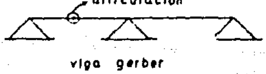


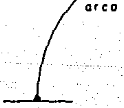
Apoyo de Articulación

La barra pude girar alrededor de un eje que se encuentra fija, estando por lo tanto impidiendo el deslizamiento.

A semejanza con el apoyo móvil, teoricamente este apoyo puede considerarse como un punto por el cual deberá pasar la reacción, y al no haber brazo de palanca de esta fuerza se tiene momento nulo en el apoyo.

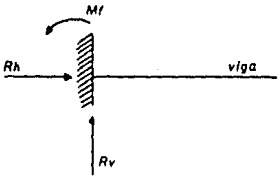
Este tipo de apoyo se representa así:





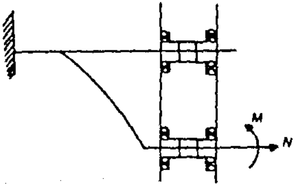
Empotramiento Perfecto.

Hay un número infinito de contactos entre el cuerpo y el --apoyo. A el cuerpo no se le permite ninguna clase de movimiento. Este apoyo presenta tres reacciones, una vertical, una horizon--tal y un momento flexionante. Generalmente se le representa de la siguiente manera.



Apoyo Guiado.

Esta clase de apoyo es poco común en la práctica, debiendo tener en el extremo contrario de la barra un apoyo de articula--ción o un apoyo perfectamente empotrado.

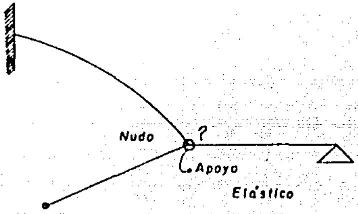


El cuerpo esta impedido de movimientos angulares pero puede deslizarse a lo largo del apoyo.

Apoyo Elástico.

Queda determinado por la unión rígida de varias piezas para formar una estructura reticular.

Este apoyo puede tener toda clase de movimientos, por lo -- cual se desconocen sus características mecánicas.



2.2 Isostaticidad e Hiperestaticidad.

Las estructuras pueden dividirse en "Isostáticas" e "Hipe-- restáticas". Las primeras son aquellas en las cuales puede esta blecerse su equilibrio externo con conocimientos de la Estática. Estructuras Hiperestáticas, son aquellas en las que para estable cer su equilibrio externo necesitamos de conocimientos que que-- dan fuera de la Estática.

2.3 Diagramas de Cuerpo Libre.

El primer paso en la resolución de un problema de mecánica, debe consistir, en hacer un diagrama de cuerpo libre, en el cual se identifican todas las fuerzas que en él actúan.

Diagrama de Cuerpo Libre.

Es el diagrama de un cuerpo o de un grupo de cuerpos que se representa aislado de un entorno, y en donde se muestran todas las fuerzas externas que actúan, tales como el peso, las fuerzas aplicadas, las reacciones y la fricción.

Así pues quedan concluidos los momentos externos aplicados como los momentos producidos por reacciones y por las fuerzas de fricción.

Los pasos a seguir para hacer un diagrama de cuerpo libre se pueden enlistar de la siguiente manera:

1.- Se decide cual es el cuerpo libre que se va a usar;

2.- Se separa el cuerpo de su base de sustentación, así como de cualquier otro cuerpo y se dibuja el contorno de este cuerpo así aislado;

3.- Se representan todas las fuerzas externas. Estas fuerzas corresponderán a la acción ejercida sobre el cuerpo libre por la base de sustentación y por los cuerpos que se han separado; las fuerzas se deben aplicar en los diferentes puntos donde el cuerpo libre estuvo apoyado o conectado a otros cuerpos. Entre las fuerzas externas también se debe incluir el peso del cuerpo libre (se aplica en el centro de gravedad). Cuando el cuerpo libre está formado de varias partes, no se deben incluir entre las fuerzas externas; las fuerzas que las partes ejercen entre sí (estas fuerzas se consideran internas en lo que se refiere al cuerpo libre en conjunto).

La magnitud y dirección de las fuerzas externas conocidas se deben destacar claramente en el diagrama de cuerpo libre. Las fuerzas externas conocidas generalmente son el peso del cuerpo libre y las fuerzas aplicadas con un propósito específico.

Las fuerzas externas desconocidas son generalmente las reacciones por medio de las cuales la base de sustentación y otros cuerpos se oponen a un posible movimiento del cuerpo libre obligandolo a permanecer en la misma posición.

Las reacciones se ejercen en los puntos donde el cuerpo libre se apoya o conecta a otros cuerpos.

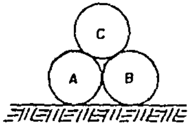
El sentido de una fuerza desconocida en un diagrama de cuerpo libre, se puede suponer arbitrariamente, y corregir posteriormente, si la magnitud de la fuerza en la solución del problema es positiva, entonces el sentido supuesto es correcto, si la solución es negativa, entonces el sentido correcto es el contrario al supuesto. De la misma manera se procede para los momentos en un diagrama de cuerpo libre.

En el diagrama de cuerpo libre también deben aparecer las dimensiones, debido a que se pueden necesitar en el cálculo de los momentos de una fuerza.

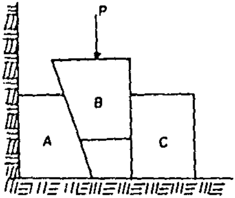
Ejemplos:

1.- Dibuje los diagramas de cuerpo libre de los cuerpos A, B y C que se indican.

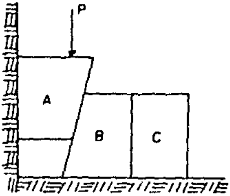
A)



B)

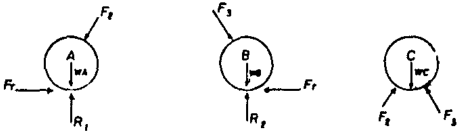


C)

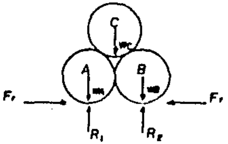


Soluciones:

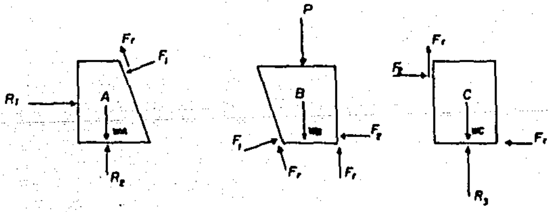
A) Sean W_A, W_B, W_C los pesos de los cuerpos A,B,C respectivamente. Hacemos primero los DCL de cada componente del cuerpo.



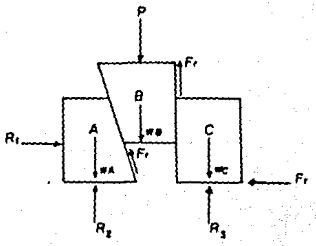
El diagrama del cuerpo en conjunto es:



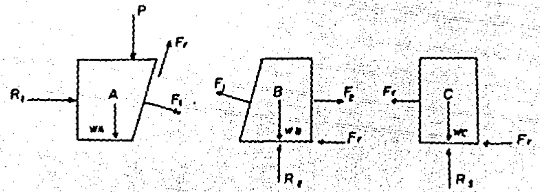
B) Procediendo de igual forma tenemos:



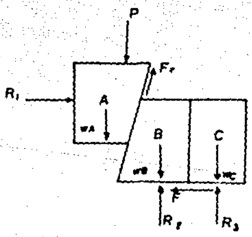
Entonces el DCL del cuerpo en conjunto es:



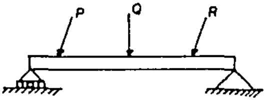
C) En igual manera:

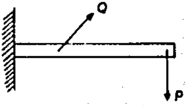


D.C.L. Total.



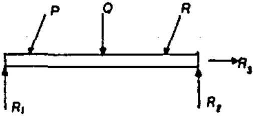
2.- Si el peso de las estructuras siguientes es despreciable, dibuje sus correspondientes diagramas de cuerpo libre.



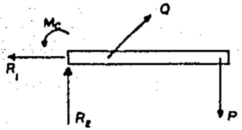


Soluciones:

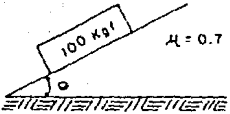
A) El diagrama de cuerpo libre es el siguiente:



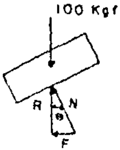
B) D.C.L.



3.- Determine el ángulo de reposo del cuerpo que se muestra en - la figura y cuyo peso es de 100kgf , considerando que el coeficiente de fricción limite vale 0.7.



Solución: Trazamos el diagrama de cuerpo libre.



Del DCL tenemos que $R = 100kgf$ por lo que:

$N = (100kgf)(\cos\theta)$ y

$F = (100kgf)(\operatorname{sen}\theta)$

por ser ángulo de reposo, entonces el movimiento es inminente por lo que:

$F = \mu N$

sustituyendo valores tenemos

$(100kgf)(\operatorname{sen}\theta) = (0.7)(100kgf)(\cos\theta)$

la ecuación nos queda entonces:

$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = 0.7$ pero $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta$

$\operatorname{tg}\theta = 0.7$ por lo tanto:

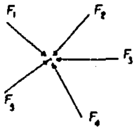
$\theta = \operatorname{tg}^{-1} 0.7$

$\theta = 35$ que es el ángulo de reposo del cuerpo.

VI.3 El Equilibrio de los Sistemas de Fuerzas.

3.1 Equilibrio de una Partícula.

Sea una partícula de masa "m" sujeta a un sistema de fuerzas concurrentes, de tal forma que la resultante del sistema es F.



Se dice que una partícula está en equilibrio, si se encuentra en un estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, - es decir, la fuerza resultante F debe ser nula o cero (1^a Ley de Newton).

$$F = 0$$

En otras palabras la condición necesaria y suficiente para - que una partícula este en equilibrio es que se anule la fuerza -- resultante que actúa sobre la partícula.

3.2 Equilibrio de un Sistema de Partículas.

Sea un sistema de n partículas; las condiciones necesarias - (aunque no suficientes) para que el sistema de partículas esté en equilibrio, son que la fuerza resultante de las fuerzas que ac--túan sobre las partículas y el momento resultante de estas fuer--zas con respecto a cualquier punto sean cero.

$$\bar{F} = \Sigma \bar{F}i = 0$$
$$\bar{M} = \Sigma(\bar{r}i \times \bar{F}i) = 0$$

3.3 Equilibrio de un Cuerpo Rígido.

Consideremos ahora un cuerpo rígido sometido a la acción de un sistema de fuerzas constituido por fuerzas y pares, entonces, las condiciones necesarias y suficientes para que un cuerpo rígido esté en equilibrio son que la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo y el momento resultante de las fuerzas y pares con respecto a cualquier punto se anulen.

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}i = 0$$

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}i \times \bar{F}i) + \sum_{i=1}^{m} \bar{C}i = 0$$

donde n es el número de fuerzas $\bar{F}i$ y m el número de pares $\bar{C}i$

3.4 Ecuaciones Vectoriales para el Caso General del Equilibrio.

Las dos condiciones de equilibrio para un cuerpo rígido pueden expresarse matemáticamente en forma vectorial como:

$$\Sigma \bar{F} = 0$$

$$\Sigma \bar{M}_o = 0$$

donde $\Sigma\bar{F}$ es la suma vectorial de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el cuerpo y $\Sigma\bar{M}o$ es la suma de los momentos de todas estas fuerzas con respecto a cualquier punto "O" localizado dentro o fuera del cuerpo.

3.5 Ecuaciones Escalares Cartesianas para el Caso General del Equilibrio.

Si cada una de las fuerzas aplicadas o de los momentos se expresa en forma vectorial cartesiana y se sustituye en las ecuaciones vectoriales de equilibrio, se tiene:

$$\Sigma \bar{F} = \Sigma Fxi + \Sigma Fyj + \Sigma Fzk = 0$$

$$\Sigma \bar{M}o = \Sigma Mxi + \Sigma Myj + \Sigma Mzk = 0$$

Como las componentes según i,j,k son entre sí independientes, las ecuaciones anteriores se satisfacen con tal de que:

$$\Sigma Fx = 0 \qquad \Sigma Mx = 0$$
$$\Sigma Fy = 0 \qquad y \qquad \Sigma My = 0$$
$$\Sigma Fz = 0 \qquad \Sigma Mz = 0$$

Estas seis ecuaciones escalares de equilibrio pueden usarse para resolver cuando más seis incognitas indicadas en el diagrama de cuerpo libre.

VI.4 Equilibrio de Sistemas Planos: Sus Ecuaciones Escalares Determinantes.

Mediante una selección adecuada de coordenadas y de un punto base, se puede obtener un número minímo de ecuaciones que aseguren el equilibrio de un sistema de fuerzas (que puede estar aplicado en el plano o en el espacio). El número minímo de ecuaciones de equilibrio es también el máximo número de ecuaciones escalares independientes de equilibrio. De hecho, "el número de ecuaciones de equilibrio" se emplea generalmente para indicar "el número de ecuaciones escalares independientes de equilibrio".

4.1 Sistemas de Fuerzas Colineales en el Plano.

Eligiendo el eje x sobre la línea de acción de las fuerzas y un punto cualquiera de dicha línea como punto base para el momento, resulta una sola ecuación de fuerzas para determinar el equilibrio.

$$\Sigma Fx = 0$$

4.2 Sistemas de Fuerzas Concurrentes en el Plano.

Considerando el origen en el punto de concurrencia y tomandolo también como punto base para los momentos, y suponiendo que el plano xy coincide con el plano del sistema de fuerzas.

El sistema plano de fuerzas concurrentes estará en equilibrio si se satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\Sigma Fx = 0$$

$$\Sigma Fy = 0$$

4.3 Sistema de Fuerzas Paralelas en el Plano.

Sean el eje y paralelo a la fuerza y el plano xy coincidente con el plano de las mismas. Al tomar cualquier punto, por ejemplo el origen, como punto base para los momentos, se obtienen dos ecuaciones, una de fuerzas y otra de momentos para que el sistema de fuerzas paralelas en el plano este en equilibrio:

$$\Sigma Fy = 0$$

$$\Sigma Mz = 0$$

4.4 Sistema de Fuerzas Generales en el Plano.

Hacemos que el plano xy coincida con el plano de las fuerzas, el origen se puede colocar arbitrariamente en cualquier punto conveniente y se puede considerar como punto base para tomar momentos. En esta forma se obtienen dos ecuaciones de fuerzas y una ecuación de momentos para el equilibrio:

$$\Sigma Fx = 0$$

$$\Sigma Fy = 0$$

$$\Sigma Mo = \Sigma Mz = 0$$

VI.5 Equilibrio de Sistemas Espaciales: Sus Ecuaciones Escalares Cartesianas Determinantes.

5.1 Sistemas Colineales de Fuerzas en el Espacio.

De igual manera que para un sistema colineal de fuerzas en el plano, la ecuación determinante del equilibrio es:

$$\Sigma Fx = 0$$

5.2 Sistemas Concurrentes de Fuerzas en el Espacio.

Seleccionando el punto de concurrencia como origen del sistema de coordenadas y también como punto base de momentos, resultan tres ecuaciones de fuerzas para asegurar las condiciones de equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$\Sigma F_z = 0$$

5.3 Sistemas de Fuerzas Paralelas en el Espacio.

Considerando un sistema de referencia elegido arbitrariamente, con la condición de que uno de los ejes, por ejemplo el eje y sea paralelo a las fuerzas, se obtienen una ecuación de fuerzas y dos ecuaciones de momentos al tomar un punto base cualquiera, por ejemplo, el origen:

$$\Sigma F_y = 0$$
$$\Sigma M_x = 0$$
$$\Sigma M_z = 0$$

5.4 Sistema General de Fuerzas en el Espacio.

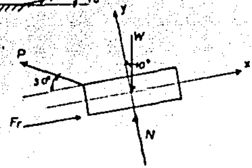
Para el sistema general de fuerzas en el espacio se requieren todas las seis ecuaciones, es decir, tres ecuaciones de fuerzas y tres ecuaciones de momentos para asegurar el equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad \Sigma F_y = 0 \quad ; \quad \Sigma F_z = 0$$
$$\Sigma M_x = 0 \quad ; \quad \Sigma M_y = 0 \quad ; \quad \Sigma M_z = 0$$

Ejemplos:

4.- El huacal tiene una masa de 200 kg y esta sujeto a una fuerza remolcadora P que actúa según un ángulo de 20° con respecto a la horizontal. Si $\mu = 0.5$, determine la magnitud de P para estar a punto de mover el huacal hacia abajo del plano inclinado.

Solución: D.C.L.



Calculamos primero el peso del huacal

$$W = mg = (200\text{kg})(9.81\text{m/s}^2) = 1962 \text{ Newton.}$$

hacemos la suma de fuerzas en x y en y

$$\Sigma Fx = 0.5N - P \cos 30^\circ - 1962 \text{ sen } 10^\circ = 0$$

$$\Sigma Fy = -1962 \cos 10^\circ + N + P \text{ sen } 30^\circ = 0$$

realizando operaciones tenemos:

$$0.5N - 0.866P = 340.\ 6977 \text{ ---------- } (1)$$

$$N + 0.5P = 1932.1928 \text{ ---------- } (2)$$

de la ecuación (2) tenemos:

$$N = 1932.1928 - 0.5P \text{ -------------- } (3)$$

sustituyendo N en la ecuación (1)

$$0.5(1932.1928 - 0.5P) - 0.866P = 340.6977$$

realizando operaciones y despejando P tenemos

$$P = 560.39 \text{ Newton.}$$

y sustituyendo P en la ecuación (3)

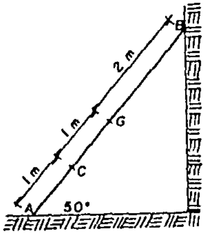
$$N = 1932.1928 - 0.5(560.39)$$

$$N = 1652 \text{ Newton.}$$

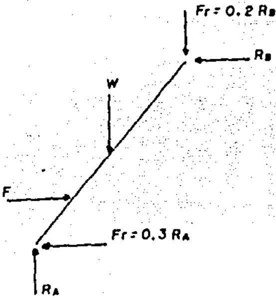
así pues el resultado pedido es:

$$\underline{\underline{P = 560.39 \text{ Newton.}}}$$

5.- Una escalera de 20 kg tiene un centro de masa en G. Si los coeficientes de fricción en A y B son $\mu_A = 0.3$ y $\mu_B = 0.2$ respectivamente, determine la fuerza horizontal más pequeña que se debe ejercer sobre la escalera en el punto C para empujar la escalera hacia adelante.



Solución: D.C.L.



Vemos que se trata de un sistema de fuerzas generales en el plano, por lo que tenemos tres ecuaciones de equilibrio:

$$\Sigma M = 0$$
$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$

obtenemos $W = mg$

$$W = (20kg)(9.81\ m/s^2) = 196.2\ \text{Newton}$$

Hacemos suma de momentos y suma de fuerzas basandonos en el DCL

$$\Sigma M_A = F(1m)(\text{sen } 50°)+(196.2)(2)(\cos 50°)-R_B(4)(\text{sen } 50°)+(0.2R_B)\cdot$$
$$\cdot(4)(\cos 50°) = 0$$

realizando operaciones:

$$0.766F - 2.55R_B = -252.2299\ N\cdot m \text{ ----- } (1)$$

$$\Sigma F_y = R_A - 196.2 - 0.2R_B = 0$$

$$R_A - 0.2\ R_B = 196.2\ N \text{ --------------- } (2)$$

$$\Sigma F_x = -0.3R_A + F - R_B = 0 \text{ ------------ } (3)$$

así tenemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$0.766F + 0 - 2.55R_B = -252.2299$$
$$0 + R_A - 0.2\ R_B = 196.2$$
$$F - 0.3R_A - R_B = 0$$

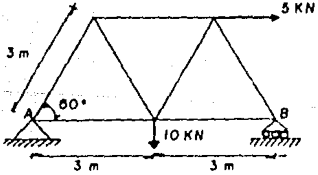
resolviendo el sistema tenemos que:

$$R_B = 171.07\ N$$
$$R_A = 230.42\ N$$
$$F = 240.19\ N$$

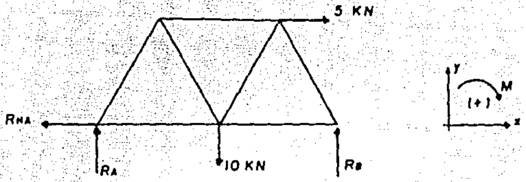
por lo que tenemos que la fuerza necesaria para mover la escalera hacia adelante es:

$$\underline{\underline{F = 240.19\ N}}$$

6.- Calcule las reacciones en los apoyos de la siguiente armadura.



Solución: D.C.L.



Tenemos un sistema de fuerzas generales en el plano por lo tanto tenemos tres ecuaciones de equilibrio.

Tomamos suma de momentos y suma de fuerzas del D.C.L.

$$\Sigma M_A = (10\ KN)(3m) + (5\ KN)(3m)(\text{sen } 60\ ) - R_B(6m) = 0$$

realizando operaciones y despejando R_B

$$\underline{\underline{R_B = 7.165\ KN}}$$

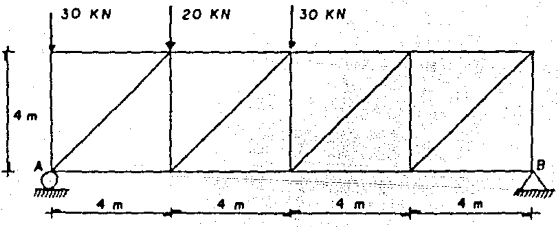
$$\Sigma F_y = R_A - 10\ KN + 7.165\ KN = 0$$

$$\underline{\underline{R_A = 2.835\ KN}}$$

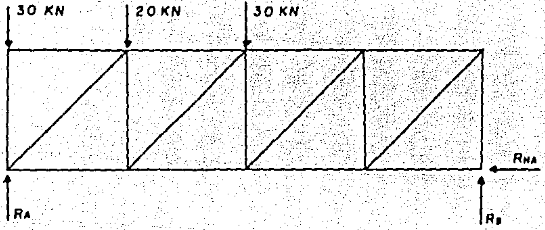
$$\Sigma F_x = -R_{HA} + 5\ KN = 0$$

$$\underline{\underline{R_{HA} = 5\ KN}}$$

7.- La armadura Howe de puente está sujeta a la acción del sistema de cargas indicado. Determine las reacciones en los apoyos.



Solución : D.C.L.



Nos encontramos con un sistema de fuerzas generales en el plano.

Haciendo suma de momentos y suma de fuerzas nos queda:

$$\Sigma M_A = (20\ KN)(4m) + (30\ KN)(8m) - R_B(16m) = 0$$

$$\underline{\underline{R_B = 20\ KN}}$$

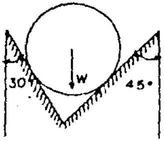
$$\Sigma F_y = R_A - 30\ KN - 20\ KN - 30\ KN + 20\ KN = 0$$

$$\underline{\underline{R_A = 60\ KN}}$$

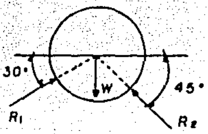
$$\Sigma F_x = 0$$

$$\underline{\underline{R_{HA} = 0}}$$

8.- Una esfera de 200 lb se apoya en dos planos lisos, como se muestra en la figura. Hallar las fuerzas de reacción que actúan sobre la esfera.



Solución: D.CL.



Como vemos se trata de un sistema de fuerzas concurrentes - en el plano, por lo que contamos con dos ecuaciones de equili--- brio.

$$\Sigma F x = 0$$

$$\Sigma F y = 0$$

haciendo la suma de fuerzas tenemos:

$$\Sigma F x = R_1 \cos 30° - R_2 \cos 45° = 0 \quad ---------- \quad (1)$$

$$\Sigma F y = R_1 \text{ sen } 30° + R_2 \text{ sen } 45° - 200 = 0 \quad ---- \quad (2)$$

de la ecuación (1) tenemos:

$$R_1 = 0.8165 \, R_2 \quad ----------(3)$$

sustituimos (3) en la ecuación (1)

$$0.8165 \, R_2(\text{sen } 60°) + R_2 \text{ sen } 45° = 200 \text{ lb}$$

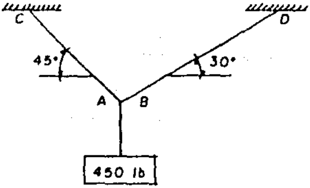
$$\underline{\underline{R_2 = 141.42 \text{ lb}}}$$

y sustituyendo R_2 en la ecuación (3)

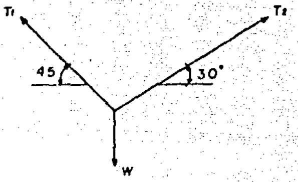
$$\underline{\underline{R_1 = 115.47 \text{ lb}}}$$

que son las reacciones ejercidas sobre la esfera.

9.- Determinar las tensiones T_1 y T_2 en los alambres AC y BD, -- respectivamente.



Solución: D.C.L.



hacemos suma de fuerzas en x y y

$$\Sigma Fx = -T_1 \cos 45^\circ + T_2 \cos 30^\circ = 0 \text{ ------------- } (1)$$

$$\Sigma Fy = T_1 \operatorname{sen} 45^\circ + T_2 \operatorname{sen} 30^\circ - 450 = 0 \text{ -------- } (2)$$

de la ecuación (1) tenemos:

$$T_2 = 0.8165\ T_1 \text{ ----------- } (3)$$

sustituyendo T_2 en la ecuación (2)

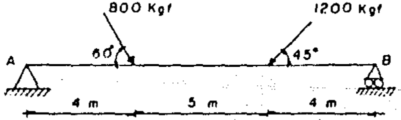
$$\underline{\underline{T_1 = 403.48\ lb}}$$

sustituyendo T_1 en la ecuación (3)

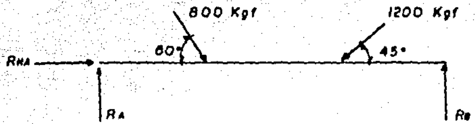
$$\underline{\underline{T_2 = 329.44\ lb}}$$

que son las tensiones pedidas.

10.- Determine las reacciones en los apoyos de la viga en equilibrio mostrada en la figura, despreciando su peso.



Solución: D.C.L.



hacemos suma de momentos y suma de fuerzas.

$\Sigma M_A = (800kgf)(sen\ 60°)(4m)+(1200kgf)(sen\ 45°)(9m)-R_B(13m) = 0$

$$\underline{\underline{R_B = 800.62\ kgf}}$$

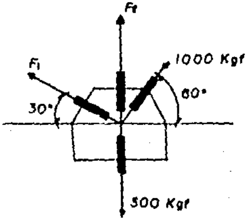
$\Sigma F_y = R_A-(800kgf)(\ sen\ 60°)-(1200kgf)(sen\ 45°)+800.62kgf = 0$

$$\underline{\underline{R_A = 740.73\ kgf}}$$

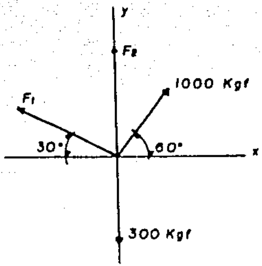
$\Sigma F_x = R_{HA}+(800kgf)(cos\ 60°)-(1200kgf)(cos\ 45°) = 0$

$$\underline{\underline{R_{HA} = 448.53\ kgf}}$$

11.- Una placa de unión está en equilibrio bajo la acción de cuatro fuerzas como se muestra en la figura; hallar los valores de F_1 y F_2 .



Solución: D.C.L.



Hacemos la suma de fuerzas de ambos ejes.

$$\Sigma F_x = -F_1 \cos 30° + (1000\ kgf)(\cos 60°) = 0 \quad \text{----------} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = F_1 \operatorname{sen} 30° + F_2 + (1000\ kgf)(\operatorname{sen} 60°) - 300 kgf - (2)$$

de la ecuación (1) tenemos:

$$\underline{\underline{F_1 = 577.35\ kgf}}$$

sustituyendo en la ecuación (2)

$$(577.35)(\operatorname{sen} 30°) + F_2 + (866.03\ kgf) - 300\ kgf = 0$$

$$\underline{\underline{F_2 = -854.71\ kgf}}$$

con este resultado concluimos que la fuerza F_2 debe ser ejercida en sentido contrario.

CAPITULO VII

MOMENTOS ESTATICOS. CENTROS DE GRAVEDAD Y DE MASA, CENTROIDES DE VOLUMENES Y AREAS PLANAS.

VII.1 Centro de un Sistema de Fuerzas Paralelas.

Como ya sabemos un sistema de fuerzas paralelas tiene una resultante, cuando y solamente cuando, la fuerza suma no sea cero. Ahora, nos proponemos situar la línea de acción de esa resultante.

Si $\overline{e}$ es un vector unitario paralelo a las fuerzas $\overline{Fi}$ podemos escribir que $\overline{Fi} = Fi\,\overline{e}$, en donde los escalares Fi son positivos o negativos de acuerdo con que las $\overline{Fi}$ tengan la misma dirección u opuesta a $\overline{e}$. La resultante del sistema es:

$$\overline{F}_R = (\Sigma Fi)\overline{e}$$

Si $\overline{Fi}$ actúan en los puntos Pi, y $\overline{ri}$ es el vector de posición del punto O al punto Pi, el momento resultante con respecto a O es:

$$\overline{M}o = \Sigma\overline{ri} \times (Fi\,\overline{e}) = (\Sigma Fi\overline{ri}) \times \overline{e}$$

Así pues tenemos para el centroide:

$$\overline{r} = \frac{\Sigma Fi\overline{ri}}{\Sigma Fi}$$

en donde $\overline{r}$, es el vector de posición del punto O al punto P, correspondiente al centroide de los puntos Pi con los números asociados Fi.

Entonces podemos escribir:

$$\overline{M}o = (\Sigma Fi)\overline{r} \times \overline{e} = \overline{r} \times (\Sigma Fi)\overline{e} = \overline{r} \times \overline{F}_R$$

Este resultado establece que $\overline{M}o$ es igual al momento respecto a O de la sola fuerza $\overline{F}$ actuando en P. En otras palabras, la fuerza $\overline{F}$ en P tiene la misma fuerza y el mismo momento con respecto a O que el sistema dado de fuerzas paralelas.

Como podemos notar la posición de P depende solamente de -- los puntos Pi y de los números Fi y no de la dirección del vector $\overline{e}$. Por lo tanto la resultante de las fuerzas paralelas Fi$\overline{e}$ - que actúan en los puntos Pi pasa por P independientemente de la dirección que $\overline{e}$ pueda tener. Tomando en cuenta esta propiedad, - P se llama el centro de todos los referidos sistemas de fuerzas paralelas.

Siendo las coordenadas de P:

$$x = \frac{\Sigma Fixi}{\Sigma Fi} \quad ; \quad y = \frac{\Sigma Fiyi}{\Sigma Fi} \quad ; \quad z = \frac{\Sigma Fizi}{\Sigma Fi}$$

que son las ecuaciones que nos determinan analíticamente las --- coordenadas del punto de aplicación de la fuerza resultante de - un sistema de fuerzas paralelas, es decir, definen el centro de fuerzas paralelas.

Del análisis de las tres ecuaciones anteriores se concluye, que se obtiene el mismo resultado:

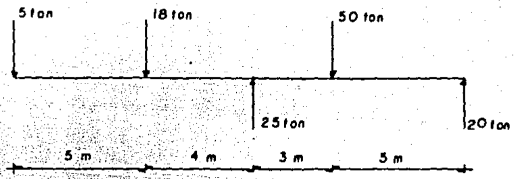
1.- Si todas las fuerzas del sistema hubierán girado un ángulo cualquiera, permaneciendo invariable la posición del punto de aplicación de su resultante.

2.- Si todas las fuerzas del sistema $\overline{F}i$, hubierán aumentado o disminuido su magnitud según una misma razón.

3.- Si se hubierán tomado momentos de todas las fuerzas del sistema con respecto a los ejes coordenados.

Ejemplos:

1.- Encuentre la fuerza resultante y el punto de aplicación de la misma en el siguiente sistema de fuerzas paralelas.



Solución:

Calculamos la fuerza resultante haciendo suma de fuerzas en y.

$f_R = \Sigma Fy = 5 + 18 + 50 - 25 - 32 = 28$ Ton.

el punto de aplicación lo calculamos con la fórmula:

$$x = \frac{\Sigma Fixi}{\Sigma Fi} = \frac{(5)(0)+(18)(5)+(-25)(9)+(50)(12)+(-20)(17)}{28} =$$

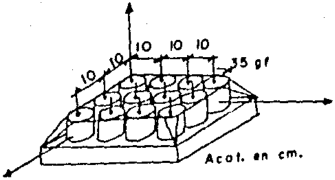
$\underline{x = 4.46 \text{ m}}$

tenemos así que el centro del sistema de fuerzas paralelas se encuentra en x = 4.46m y la fuerza aplicada en el mismo es F = 28 T.

2.- Un paquete que contiene 12 latas se encuentra sostenido como se muestra en la figura. Si el peso de la envoltura es despreciable y el de cada una de las latas es de 35 gf.

a) Encuentre las coordenadas vectoriales del sistema de fuerzas, para el sistema de referencia indicado.

b) Determine la ubicación de la resultante de dicho sistema de fuerzas.



Solución:

a) Calculamos primero la fuerza resultante

$$\overline{F}_R = (-35k)(12) = -420k \quad (gf)$$

enseguida obtenemos la suma de momentos respecto al origen.

$$\overline{M}_R = (10i)\times(-35k)+(20i)\times(-35k)+(10j)\times(-35k)+(10i+10j)\times(-35k)+$$
$$(20i+10j)\times(-35k)+(20j)\times(-35k)+(10i+20j)\times(-35k)+$$
$$(20i+20j)\times(-35k)+(30j)\times(-35k)+(10i+30j)\times(-35k)+$$
$$(20i+30j)\times(-35k)=$$

$$\overline{M}_R = -6300i + 4200j \quad (gf\cdot cm)$$

las coordenadas vectoriales son:

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{F}_R = -420k \quad (gf) \\ \overline{M}_R = -6300i + 4200j \quad (gf\cdot cm) \end{array}}$$

b) Para la ubicación de la resultante en el centro de fuerzas hacemos:

$$x = \frac{(-35)(10+20+10+20+10+20+10+20)}{-420} = 10 \text{ cm}$$

$$y = \frac{(-35)(10+10+10+20+20+20+30+30+30)}{-420} = 15 \text{ cm}$$

$$z = \frac{(-35)(0)}{-420} = 0$$

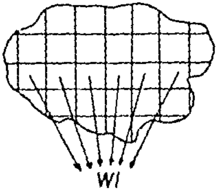
así obtenemos la fuerza resultante ubicada en el punto

$$\underline{\underline{P(10,15,0) \quad (cm)}}$$

VII.2 Centros de Gravedad y de Masa de Cuerpos.

2.1 Centro de Gravedad.

Se llama centro de gravedad de un cuerpo, el centro de las atracciones (fuerzas) consideradas paralelas, que la gravedad ejerce sobre cada una de las partículas que forman el cuerpo.



+ C.A. (centro de atracción)

Cada una de las partes que forman el cuerpo tienen un peso Wi cuya magnitud es el producto de su masa por su aceleración

$$W_i = m_i\, g$$

Para los cuerpos de la práctica se considera al centro de atracción en el infinito, con lo cual logramos dos cosas:

1.- Si representamos a la atracción por fuerzas, dichas fuerzas son paralelas.

2.- Si se tiene un cuerpo homogéneo todas las partículas de dicho cuerpo sufren la misma atracción, es decir: g = constante.

Cuando en un sistema g es constante y las fuerzas de atracción son paralelas, se dice que es un sistema gravitatorio uniforme.

Para encontrar el centro de gravedad recurrimos a el centro de fuerzas paralelas, que para x es :

$$\Sigma x\, F_i = \Sigma F_i x_i$$

sabemos además que:

$$M_R = \Sigma M_O$$

entonces para el eje x tendríamos que, sustituyendo F_i por W_i y como $W = W_i$, tendremos entonces:

$$\bar{x}W = \Sigma W_i x_i$$

despejando a $\bar{x}$ nos queda

$$\bar{x} = \frac{\Sigma W_i x_i}{W} \qquad \text{----------} \ (1)$$

ecuación que nos da la localización en el eje x del centro de gravedad.

Ahora si tomamos partículas, entonces tendremos que el peso de cada partícula sería dw, de tal manera que sustituyendo en la ecuación (1) el signo de "sigma" (Σ) por el de "integral" ($\int$) nos queda:

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dw}{W}$$

que nos da la coordenada en x del centro de gravedad, siempre y cuando $W = dw$.

Procediendo de igual manera para los ejes y y z, tendremos las ecuaciones que nos dan la localización del centro de gravedad.

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dw}{W} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\int y\,dw}{W} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{\int z\,dw}{W}$$

2.2 Ley de Simetría.

Si un sistema homogéneo (volumen, superficie o línea) admite un plano de simetría, eje de simetría, o un centro de simetría o figura, su centro de gravedad estará sobre dicho plano, eje ocentro de simetría o figura.

2.3 Centro de Masa de un Cuerpo.

Para estudiar problemas relativos al movimiento de materia bajo el influjo de fuerzas; es decir, problemas de dinámica, es necesario localizar un punto llamado el "centro de masa". Sabemos que dw = dmg, sustituyendo este valor en las ecuaciones de -

centro de gravedad tenemos:

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dmg}{\int dmg} = \frac{g\int x\,dm}{g\int dm} = \frac{\int x\,dm}{\int dm}$$

y como dm = M, procediendo de igual manera para $\bar{y}$ y $\bar{z}$ obtenemos

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dm}{M} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\int y\,dm}{M} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{\int z\,dm}{M}$$

Estas ecuaciones nos dan las coordenadas del centro de masa de un cuerpo.

Cuando el cuerpo es homogéneo y esta considerado en un sistema gravitatorio uniforme, sus centros de gravedad y de masa -- coinciden.

VII.3 Momentos Estáticos de Volumen y Centro de Volumen de un -- Cuerpo.

3.1 Momento Estático de un Volumen.

Por analogía con las fuerzas, el momento estático de un volumen con respecto a un plano se define como:

"La suma de los productos de los volumenes elementales, por sus distancias al plano".

Esto es:

$Qx = \int x\,dv = \bar{x}\cdot V$ respecto al plano yz.

$Qy = \int y\,dv = \bar{y}\cdot V$ respecto al plano xz.

$Qz = \int z\,dv = \bar{z}\cdot V$ respecto al plano xy.

Por lo anterior, el momento estático de un volumen con respecto a un plano, es el producto de dicho volumen por la distancia de su centro de gravedad al plano. "El centro de gravedad es un punto en el cual puede considerarse concentrado todo el volumen, por lo tanto el momento estático de un volumen con respecto a un plano que pasa por su centro de gravedad, es nulo".

Las unidades de los momentos estáticos de un volumen son -- unidades de longitud elevadas a la cuarta potencia: m^4, ft^4, m^4, etc.

3.2 Centro de Volumen de un Cuerpo.

El centro de volumen de un cuerpo esta definido por las coordenadas:

$$\bar{x} = \frac{\int x dV}{V} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\int y dV}{V} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{\int z dV}{V}$$

como podemos ver $\int x dV$; $\int y dV$; $\int z dV$, son los momentos estáticos del volumen con respecto a los planos yz, xz, xy, respectivamente.

Cuando un volumen V posee un plano de simetría, el centroide del volumen está localizado en este plano. Cuando un volumen posee dos planos de simetría, el centroide del volumen está localizado en este plano. Cuando un volumen posee tres planos de simetría que se intersectan en un punto bien definido, el punto de intersección de los tres planos debe de coincidir con el centroide del volumen.

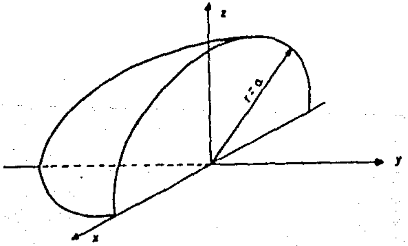
Esta propiedad nos permite determinar inmediatamente el centroide del volumen de esfera, elipsoides, cubos, paralelepípedos rectangulares, etc.

Los centroides de volumenes asimétricos o de volumenes que poseen solo uno o dos planos de simetría deben ser determinados por integración. De lo anterior concluimos que:

"Cuando el cuerpo es homogéneo y está considerado en un sistema gravitatorio uniforme, sus centros de gravedad, masa y volumen coinciden".

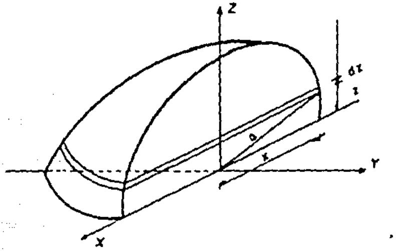
Ejemplos:

3.- Determine la posición del centro de gravedad del sólido homogéneo mostrado.



Solución:

Por simetría observamos que el centro de gravedad se encuentra en el plano yz, esto es la coordenada $\bar{x} = 0$;



como el cuerpo es homogéneo entonces podemos encontrar el centro de volumen, ya que coincide con el centro de gravedad.

Primero tomemos un elemento tan delgado como una lámina, paralelo al eje y de espesor dz, entonces el volumen de esa lámina es:

$$dV = \frac{\pi x^2}{2} dz$$

y como $x^2 = a^2 - z^2$

nos queda:

$$dV = \frac{\pi (a^2 - z^2)\, dz}{2}$$

integrando nos queda:

$$V = \frac{\pi}{2} \int_0^a (a^2 - z^2) dz = \frac{\pi}{2} \left(a^2 z - \frac{z^3}{3} \right)_0^a$$

sustituyendo limites

$$V = \frac{\pi}{2} \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{\pi a^3}{3}$$

calculando la coordenada del centro de volumen en el eje z

$$V\bar{z} = \int z\,dV = \int_0^a z\left(\frac{\pi(a^2 - z^2)}{2}\right)dz \quad = \frac{\pi}{2}\int_0^a (a^2 z - z^3)\ dz$$

$$V\bar{z} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{2}\right)$$

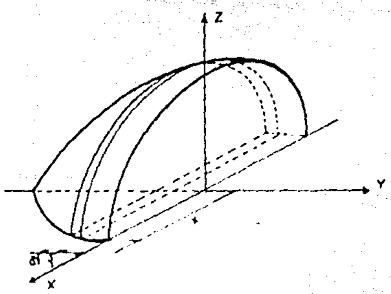
sustituimos limites y tenemos

$$\bar{V}z = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}\right)_0^a = \frac{\pi a^4}{8}$$

despejando $\bar{z}$ y sustituyendo V

$$\bar{z} = \frac{\dfrac{\pi a^4}{8}}{\dfrac{\pi a^3}{3}} = \boxed{\frac{3}{8}a}$$

Para obtener $\bar{y}$ procedemos de igual manera, solo que ahora - tomando un elemento dy en vez de dz.



$$dV = \frac{\pi x^2}{2}\,dy \quad ; \qquad \text{donde} \quad x^2 = a^2 - y^2$$

sustituimos y nos queda:

$$dV = \frac{\pi}{2}(a^2 - y^2)\ dy$$

usando la fórmula del centro de volumen

$$V\bar{y} = \frac{\pi}{2}\int_0^a y(a^2 - y^2)dy = \frac{\pi}{2}\int_0^a (a^2 y - y^3)dy$$

$$V\bar{y} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a^2y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right)_0^a = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}\right) = \frac{a^4}{8}$$

despejando $\bar{y}$

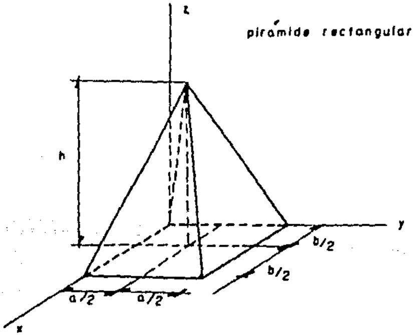
$$\boxed{\bar{y} = \frac{\pi a^4/8}{\pi a^4/3} = \frac{3}{8}a}$$

El centro de gravedad de la figura se localiza en:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x} &= 0 \\ \bar{y} &= \frac{3}{8}a \\ \bar{z} &= \frac{3}{8}a \end{aligned}}$$

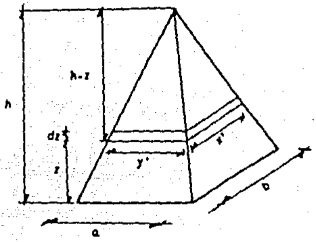
$\bar{Y}$ y $\bar{Z}$ son iguales, debido a que los ejes de simetría en ambas direcciones cortan en formas iguales al cuerpo.

4.- Determine el centro de gravedad y el momento estático de la pirámide mostrada en la figura, suponiendo que sea homogénea.



Solución:

Por simetría el centro de gravedad se encuentra en el eje $\overline{z}$, ya que los planos de simetría pasan por $\overline{x} = b/2$ y $\overline{y} = a/2$.



Por ser homogéneo el centro de volumen y el de gravedad --- coinciden. Tomemos una delgada lámina, paralela a la base como - elemento diferencial de volumen.

$$dV = x'y'dz$$

pero por triángulos semejantes tenemos:

$$\frac{x'}{h-z} = \frac{a}{h} \longrightarrow x' = a - \frac{za}{h}$$

de igual manera

$$\frac{y'}{h-z} = \frac{b}{h} \longrightarrow y' = b - \frac{bz}{h}$$

sustituyendo

$$dV = \left(a - \frac{za}{h}\right)\left(b - \frac{bz}{h}\right) dz = \left(ab - \frac{2abz}{h} + \frac{z^2ab}{h^2}\right) dz$$

integrando

$$V = \int_0^h \left(ab - \frac{2abz}{h} + \frac{z^2ab}{h^2}\right) dz = \left(abz - \frac{abz^2}{h} + \frac{z^3ab}{3h}\right)_0^h$$

sustituyendo limites

$$V = abh - abh + \frac{abh}{3} = \frac{abh}{3}$$

ahora calculamos $\bar{z}$

$$V\bar{z} = \int_0^h z\left(ab - \frac{2abz}{h} + \frac{abz^2}{h^2}\right)dz = \left(\frac{abz^2}{2} - \frac{2abz^3}{3h} + \frac{abz^4}{4h}\right)_0^h$$

sustituyendo limites

$$V\bar{z} = \frac{abh^2}{2} - \frac{2abh^2}{3} + \frac{abh^2}{4} = \frac{1}{12}abh^2$$

como vemos hemos obtenido el momento estático Qz

ahora despejamos $\bar{z}$

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{12}abh^2}{\frac{1}{3}abh} = \frac{1}{4}h$$

por lo tanto las coordenadas del centro de gravedad son:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{b}{2} \\ \bar{y} &= \frac{a}{2} \\ \bar{z} &= \frac{h}{4} \end{aligned}}$$

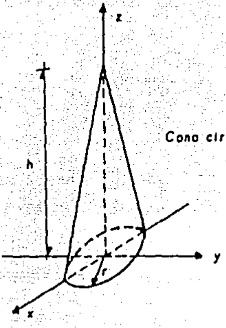
Los momentos estáticos estan dados por:

$$Qx = \bar{x}V = \left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{abh}{3}\right) = \boxed{\frac{ab^2h}{6}}$$

$$Qy = \bar{y}V = \left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{abh}{3}\right) = \boxed{\frac{a^2bh}{6}}$$

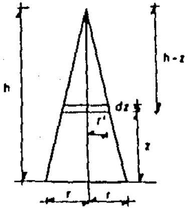
$$Qz = \bar{z}V = \boxed{\frac{abh^2}{12}}$$

5.- Determinar el centro de gravedad y el momento estático del - cono circular recto mostrado en la siguiente figura, suponiendo_ que sea homogéneo.



Solución:

Por simetría el centro de gravedad se encuentra en el eje $\bar{z}$, ya que los planos de simetría que cortan al eje x y y respectivamente, se cortan en el origen, dando por resultado $\bar{x} = 0$ y $\bar{y} = 0$



Supongamos que el cono es generado por el triángulo de la figura girando alrededor del eje z. Si tomamos una lámina delgada, paralela a la base como elemento de volumen; tenemos entonces que:

$dV = \pi (r')^2 dz$

y por triángulos semejantes

$$\frac{r'}{h-z} = \frac{r}{h} \longrightarrow r' = \frac{rh - rz}{h}$$

por lo tanto

$$(r')^2 = r^2 - \frac{2r^2z}{h} + \frac{r^2z^2}{h}$$

así pues

$$dV = \pi\left(r^2 - \frac{2r^2z}{h} + \frac{r^2z^2}{h^2}\right) dz$$

integrando

$$V = \pi\int_o^h\left(r^2 - \frac{2r^2z}{h} + \frac{r^2z^2}{h^2}\right) dz = \pi\left(r^2z - \frac{r^2z^2}{h} + \frac{r^2z^3}{3h^2}\right)_o^h$$

sustituyendo limites

$$V = \pi\left(r^2h - \frac{r^2h^2}{h} + \frac{r^2h^3}{3h^2}\right) = \boxed{\frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

ahora calculamos $\bar{z}$

$$V\bar{z} = \pi\int_o^h z\left(r^2 - \frac{2r^2z}{h} + \frac{r^2z^2}{h^2}\right) dz = \pi\left(\frac{r^2z^2}{2} - \frac{2r^2z^3}{3h} + \frac{r^2z^4}{4h^2}\right)_o^h$$

$$V\bar{z} = \pi\left(\frac{r^2h^2}{2} - \frac{2r^2h^2}{3} + \frac{r^2h^2}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{12}\pi r^2 h^2}$$

que es el momento estático Qz.

despejamos a $\bar{z}$ y nos queda:

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{12}\pi r^2 h^2}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \boxed{\frac{1}{4} h}$$

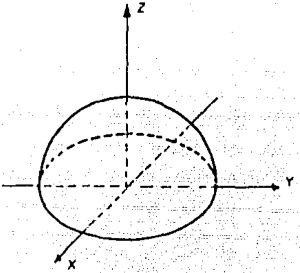
Así pues las coordenadas del centro de gravedad del cono - son:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x} &= 0 \\ \bar{y} &= 0 \\ \bar{z} &= \frac{1}{4} h \end{aligned}}$$

y los primeros momentos:

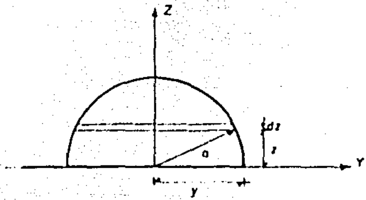
$$\boxed{\begin{aligned} Qx &= \overline{x}V = 0 \\ Qy &= \overline{y}V = 0 \\ Qz &= \overline{z}V = \frac{1}{12}\pi r^2 h^2 \end{aligned}}$$

6.- Localice el centro de gravedad de una semiesfera de radio a - y calcule los primeros momentos.



Solución:

Como los planos de simetría se cortan en el origen entonces $\overline{x} = 0$ $\overline{y} = 0$



Supongamos que la semiesfera es engendrada por la revolución del semicírculo siguiente en el eje z.

Si tomamos una delgada lámina paralela a la base como elemento diferencial de volumen tendremos:

$$dV = \pi y^2 dz$$

pero como

$$y^2 = a^2 - z^2; \text{ entonces}$$

$$dV = \pi(a^2 - z^2)dz$$

integrando

$$V = \pi\int_0^a (a^2 - z^2)dz = \pi\left(a^2 z - \frac{z^3}{3}\right)_0^a = \frac{2}{3}\pi a^3$$

calculamos $\bar{z}$

$$V\bar{z} = \pi\int_0^a z(a^2 - z^2)dz = \pi\left(\frac{a^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right)_0^a = \frac{\pi a^4}{4}$$

ahora despejando $\bar{z}$

$$\bar{z} = \frac{\frac{\pi a^4}{4}}{\frac{2}{3}\pi a^3} = \frac{3}{8}a$$

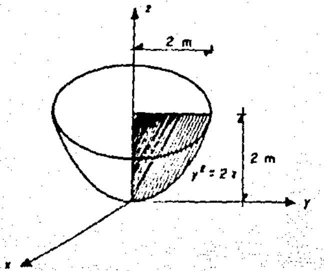
de donde las coordenadas de G son:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x} &= 0 \\ \bar{y} &= 0 \\ \bar{z} &= \frac{3}{8}a \end{aligned}}$$

y los momentos estáticos nos quedan:

$$\boxed{\begin{aligned} Qx &= \bar{x}V = 0 \\ Qy &= \bar{y}V = 0 \\ Qz &= \bar{z}V = \frac{\pi a^4}{4} \end{aligned}}$$

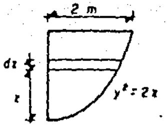
7.- Localice el centro de gravedad del volumen generado al hacer girar el área sombreada alrededor del eje z. El material es homogéneo.



Solución:

Al girar el área sombreada alrededor del eje z, se forma un volúmen con dos planos de simetría que se cortan en el origen, haciendo:

$$\bar{x} = 0 \quad y \quad \bar{y} = 0$$



Tomemos el área de revolución y de ella una lámina delgada, paralela al eje y, como elemento diferencial dz. Su volúmen será:

$$dV = \pi y^2 dz$$

y como $y^2 = 2z$ entonces

$$dV = 2\pi z dz$$

integrando tenemos:

$$V = 2\pi \int_0^2 z dz = \pi z^2 \Big|_0^2 = \underline{\underline{12.57 \ m^3}}$$

calculamos ahora $\overline{z}$

$$V\overline{z} = 2\pi\int_0^2 (z)(z)dz = \frac{2}{3}\pi z^3\Big|_0^2 = 16.76 \ m^4$$

despejando $\overline{z}$

$$\overline{z} = \frac{16.76 \ m^4}{12.57 \ m^3} = 1.33 \ m$$

Así las coordenadas de G son:

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{x} &= 0 \\ \overline{y} &= 0 \\ \overline{z} &= 1.33 \ m \end{aligned}}$$

3.3 Volúmenes Compuestos.

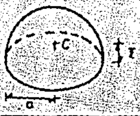
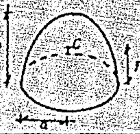
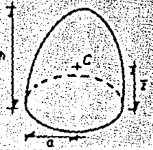
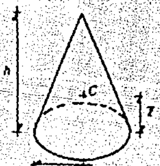
En muchos casos, un cuerpo, puede seccionarse o dividirse en varias partes que tienen formas más simples. Siempre y cuando no se desconozca el peso y la localización del centro de gravedad del cuerpo completo. La aplicación del principio de momentos a cada una de las partes constitutivas da por resultado las siguientes fórmulas:

$$\overline{X} = \frac{\Sigma\tilde{x}W}{\Sigma W} \quad ; \quad \overline{Y} = \frac{\Sigma\tilde{y}W}{\Sigma W} \quad ; \quad \overline{Z} = \frac{\Sigma\tilde{z}W}{\Sigma W}$$

donde: $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ representan las distancias algebraicas desde el centro de gravedad de cada parte constitutiva hasta el origen de las coordenadas, y ΣW representa la suma de los pesos de cada una de las partes constitutivas.

Cuando el cuerpo tiene una densidad constante, el centro de gravedad coincide con el centro geométrico o centroide de su volúmen y pueden usarse las siguientes ecuaciones:

$$\overline{X}\,\Sigma V = \Sigma\tilde{x}V \quad ; \quad \overline{Y}\,\Sigma V = \Sigma\tilde{y}V \quad ; \quad \overline{Z}\,\Sigma V = \Sigma\tilde{z}V$$

FORMA		$\bar{z}$	VOLUMEN
Semiesfera		$\frac{3}{8}a$	$\frac{2}{3}a^3$
Semielipsoide de Revolución		$\frac{3}{8}h$	$\frac{2}{3}a^2h$
Paraboloide de Revolución		$\frac{h}{3}$	$\frac{1}{2}a^2h$
Cono		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}a^2h$

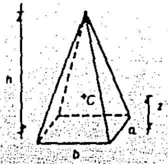
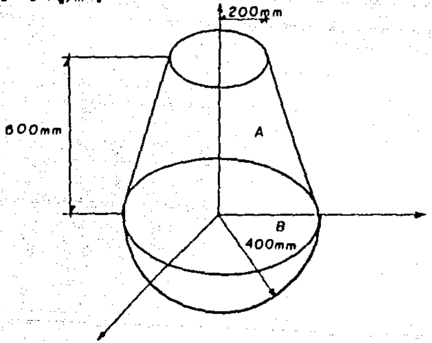
FORMA		z	VOLUMEN
Piramide		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}\,abh$

Tabla de Centroides de Formas Comunes de Volúmenes

Ejemplos:

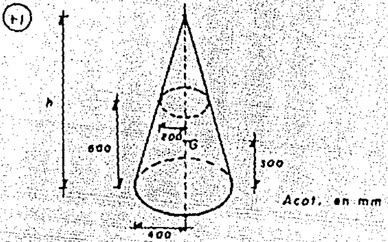
8.- Localice el centro de gravedad del sólido. El cono truncado A tiene una densidad $\rho_A = 5\ Mg/m^3$ y el hemisferio tiene una densidad $\rho_B = 3\ Mg/m^3$.



Solución:

Por simetría tenemos que $\bar{x} = 0$; $\bar{y} = 0$

El cuerpo se puede dividir en los siguientes volúmenes.

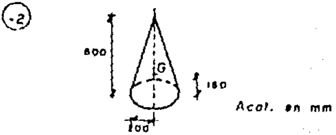


de triángulos semejantes tenemos:

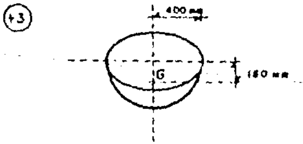
$$\frac{h}{400\ mm} = \frac{600\ mm}{200\ mm} \longrightarrow h = 1200\ mm$$

sabemos por la tabla que G se localiza en $\frac{h}{4}$

Como es un cono truncado le restamos la parte de arriba al cono completo.



Sumamos la parte del hemisferio.



Como $W = mg$ y g es constante, la masa de cada segmento se puede calcular como $m = \rho V$, además $1\ Mg/m^3 = 10^{6}\ kg/mm^3$, entonces $\rho_A = 5 \times 10^{-6}\ kg/mm^3$ y $\rho_B = 3 \times 10^{-6}\ kg/mm^3$.

Haciendo una tabla tenemos:

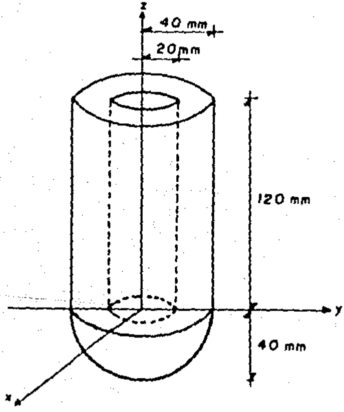
Segmento	Volúmen (mm^3)	$m = \rho r$ (kg)	$\bar{z}$ (mm)	$m\bar{z}$ (kg·mm)
+1	$1/3\ \pi r^2 h = 1.0106 \times 10$	1005.31	300	301592.89
-2	$-1/3\ \pi r^2 h = -2.51327 \times 10$	-125.66	750	-94247.78
+3	$2/3\ \pi r^3 = 1.34041 \times 10$	402.12	-150	-160318.45
		1281.12		147026.66

así pues: $\bar{z} = \dfrac{mz}{m} = \dfrac{147026.66}{1281.77} = 114.7\ mm$

por lo tanto el centro de gravedad se localiza en el punto:

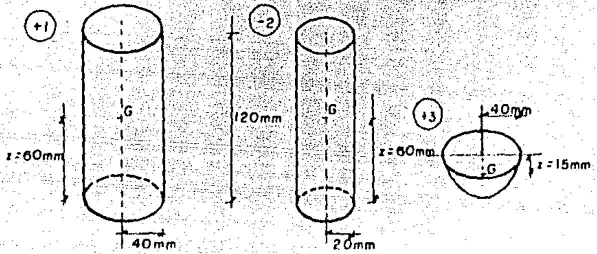
$P(0, 0, 114.7)$ (mm)

9.- Localice el centro de gravedad de la pieza fundida que está formada de un cilindro hueco que tiene una densidad de $\rho = 9\ Mg/m^3$ y un hemisferio que tiene una densidad de $3\ Mg/m^3$.



Solución:

Por simetría sabemos que $\overline{x} = \overline{y} = 0$. Dividimos el cuerpo en tres partes, un cilindro con $r = 40$ mm, otro con $r = 20$ mm, el cual se restará y una semiesfera.



haciendo una tabla y sabiendo que $\rho_A = 9\times10^{-6}$ kg/mm³ y $\rho_B = 3\times10^{-6}$ kg/mm³

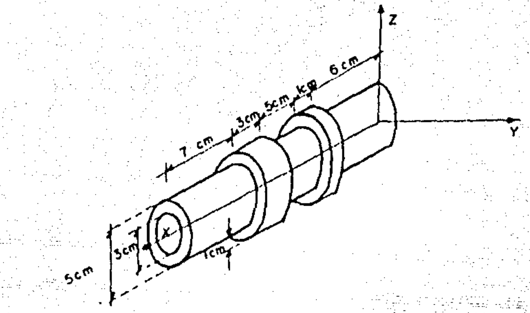
Segmento	Volumen (mm³)	$m = \rho V$ (kg)	$\overline{z}$ (mm)	$\overline{z}m$ (kg·mm)
+1	603185.79	5.46	60	325.8
-2	-150796.45	-1.36	60	-81.6
+3	134041.29	0.40	-15	- 6.0
		4.47		238.2

entonces: $\overline{z} = \dfrac{238.2}{4.47} = 53.29$ mm

así pues el centro de gravedad se localiza en:

$G(0,0,53.29)$ (mm)

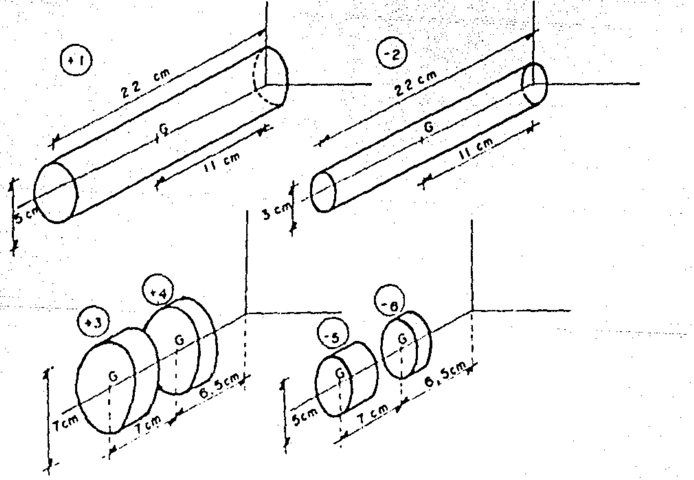
10.- Determine el centro de gravedad y los primeros momentos de la siguiente figura, suponiendo que es de material homogéneo.



Solución:

Por simetría tenemos que $y = z = 0$, por lo tanto $Q_y = Q_z = 0$.

Dividimos la figura en secciones.



hacemos la tabla:

Segmento	Volumen (cm^3)	$\bar{x}$(cm)	$V\bar{x}$(cm^4)
1	431.97	11	4751.67
-2	-155.51	11	-1710.61
3	115.45	13.5	1558.57
4	38.48	6.5	250.12
-5	-58.90	13.5	-795.15
-6	-19.63	6.5	-127.59
	351.86		3927.01

Así tenemos que: $\underline{\underline{Qx = 3927.01\ cm^4}}$

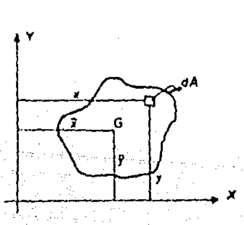
y $\bar{x} = \dfrac{3927.01}{351.86} = \underline{\underline{11.16\ cm}}$

VII.4 Momentos Estáticos y Centroides de Areas Planas.

4.1 Centroides de Areas Planas.

Por analogía con los volumenes, el centro de gravedad de un área es el punto que esta dado por las siguientes expresiones:

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\int y dA}{A}$$



Estas ecuaciones definen las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centro de gravedad de una placa homogénea. El punto de coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ se conoce también como el centroide "C" del área A de la placa. Si la placa no es homogénea no pueden emplearse estas ecuaciones para determinar su centro de gravedad. Sin embargo, siguen definiendo el centroide del área.

4.2 Momento Estático de un Area.

El momento estático de un área con respecto a un eje contenido en su plano, es la suma de los productos de las áreas elementales por sus distancias respectivas al eje.

Así pues, la integral xdA se conoce como el momento estático Q del área A con respecto al eje y.

$$Qy = \quad \bar{x}dA = \bar{x}A$$

de igual manera para el eje x

$$Qx = \quad \bar{y}dA = \bar{y}A$$

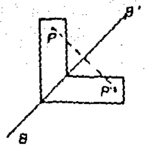
Es decir, el momento estático de un área con respecto a un eje contenido en su plano, es igual al producto del área por la distancia de su centro de gravedad al eje.

El centro de gravedad es un punto en el cual puede considerarse concentrada toda el área, por lo tanto el momento estático de un área con respecto a un eje que pasa por su centro de gravedad, es nulo.

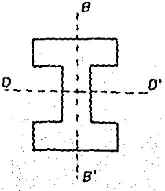
Las unidades del momento estático de un área son unidades de longitud al cubo: m^3, ft^3, cm^3, etc.

4.3 Ejes de simetría.

Se dice que un área es simétrica con respecto a un eje BB' si a cada punto P del área corresponde otro punto P' de la misma área, de tal forma que la línea PP' sea perpendicular a BB' y el eje la divida en dos partes iguales, a este eje se le llama "Eje de Simetría".



Cuando un área posee un eje de simetría, el centroide del área debe estar localizado sobre dicho eje, si el área posee dos ejes de simetría, el centroide del área estará localizado en la intersección de estos dos ejes de simetría. Esta propiedad permite encontrar de inmediato el centroide de áreas tales como círculos, elipses, cuadrados, y en general cualquier figura simétrica.



Los centroides de áreas asimétricas, y de áreas con un solo eje de simetría se deben calcular por integración.

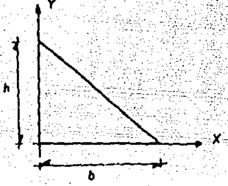
4.4 Ejes Centroidales.

Sea O el centro de los ejes cartesianos si se hace coincidir el punto O con el centroide del área, cualquier eje que pase por O es un eje centroidal; los dos ejes principales del área con respecto al centroide se conocen como los ejes principales centroidales del área.

"el momento estático del área con respecto a los ejes centroidales es nulo".

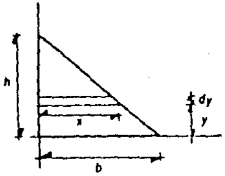
Ejemplos:

11.- Encuentre los primeros momentos y el centroide de la siguiente figura.



Solución:

Escojemos un elemento de área, paralelo a la base y calculamos su área.



$$dA = x\,dy$$

por triángulos semejantes tenemos que:

$$\frac{b}{h} = \frac{x}{h-y}$$

entonces

$$x = b - \frac{by}{h}$$

sustituimos

$$dA = \left(b - \frac{by}{h}\right) dy$$

integrando nos queda:

$$A = \int_o^h \left(b - \frac{by}{h}\right) dy = \left(by - \frac{by^2}{2h}\right)_o^h = \frac{bh}{2}$$

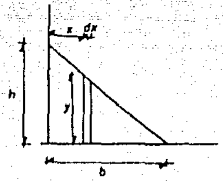
caculemos $\overline{y}$

$$A\overline{y} = \int_o^h (y) \left(b - \frac{by}{h}\right) dy = \left(\frac{by^2}{2} - \frac{by^3}{3h}\right)_o^h = \frac{bh}{6}$$

despejamos $\overline{y}$

$$\overline{y} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{bh}{2}} = \frac{h}{3}$$

para $\overline{x}$ procedemos de igual forma, solo que tomando un dA paralelo al eje y



$$dA = y dx$$

pero: $\frac{b}{h} = \frac{b-x}{y}$ $\qquad$ $y = h - \frac{xh}{h}$

sustituyendo tenemos:

$$dA = \left(h - \frac{xh}{b}\right) dx$$

calculamos $\overline{x}$

$$A\overline{x} = \int_o^b (x) \left(h - \frac{xb}{b}\right) dx = \left(\frac{hx^2}{2} - \frac{hx^3}{3b}\right)_o^b = \frac{hb^2}{6}$$

despejamos $\overline{x}$

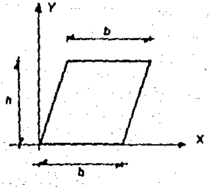
$$\overline{x} = \frac{\dfrac{hb^2}{6}}{\dfrac{hb}{2}} = \underline{\underline{\frac{b}{3}}}$$

Así el centroide se localiza en el punto $C\left(\frac{b}{3}, \frac{h}{3}\right)$

Los momentos estáticos son:

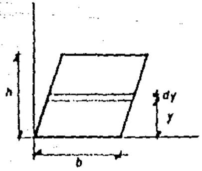
$$\boxed{\begin{aligned} Qx &= \overline{y}A = \frac{bh^2}{6} \\ Qy &= \overline{x}A = \frac{bh^2}{6} \end{aligned}}$$

12.- Encuentre los primeros momentos y el centroide de la figura



Solución:

Tomamos un elemento diferencial de área paralelo al eje y.



$dA = bdy$ integramos

$$A = \int_0^h bdy = bh$$

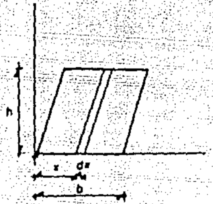
calculamos $\overline{y}$

$$A\overline{y} = \int_0^h ybdy = \frac{bh^2}{2}$$

despejamos

$$\overline{y} = \frac{\frac{bh^2}{2}}{bh} = \frac{h}{2}$$

de igual manera para $\overline{x}$

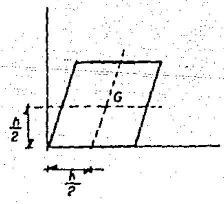


$$dA = hdx$$

$$A\overline{x} = \int_0^b xdx = \frac{hb^2}{2}$$

$$\overline{x} = \frac{b}{2}$$

como podemos ver hubiera sido más rápido obtener el centro de gravedad por simetría de la figura.



Los momentos estáticos de la figura son:

$$\boxed{\begin{aligned} Qx &= \bar{y}A = bh \\ Qy &= \bar{x}A = bh \end{aligned}}$$

4.5 Areas Compuestas.

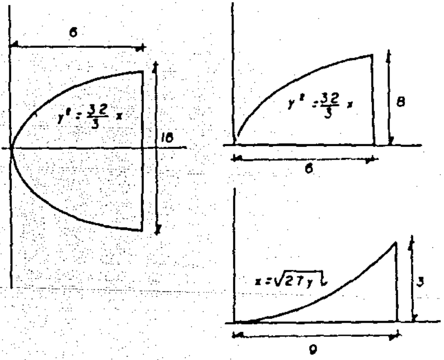
En algunos casos, el área se podrá dividir en rectángulos, triángulos, círculos, etc. Entonces la abscisa $\bar{X}$ del centro de gravedad G se puede determinar por medio de las abscisas $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, ... de los centros de gravedad de las diferentes partes.

Si la placa es homogénea y de espesor uniforme, elcentro de gravedad coincide con el centroide C del área. Entonces las abscisas $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ del centroide del área se calculan con las fórmulas:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma \bar{x} A}{\Sigma A} \qquad ; \qquad \bar{Y} = \frac{\Sigma \bar{y} A}{\Sigma A}$$

Ejemplos:

13.- Encuentre los primeros momentos y los centroides de las siguientes figuras, en las que las distancias se miden en centímetros.



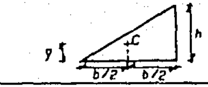
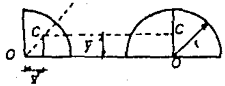
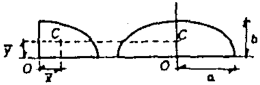
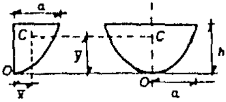
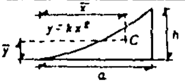
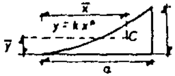
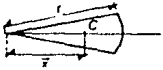
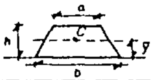
FORMA		$\bar{x}$	$\bar{y}$	AREA
Area Triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Cuadrante de Area Circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Area Semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Cuadrante de Area Elíptica		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Area Semielíptica		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Area Semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Area Parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Acartelamiento Parabólico		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Acartelamiento General		$\frac{n+1}{n+2}\,a$	$\frac{n+1}{4n+2}\,h$	$\frac{ah}{n+1}$
Sector Circular		$\frac{2r\,\mathrm{sen}\,\alpha}{3\alpha}$	0	αr^2
Area Trapecial			$\frac{1}{3}\left(\frac{2a+b}{a+b}\right)h$	$\frac{1}{2}\,h(a+b)$

Tabla de Centroides de Areas más Usuales

Solución:

a) Aplicamos la fórmula de la tabla para área parabólica.

$$\bar{x} = \frac{3}{5} h = \frac{3}{5} (6) = \underline{\underline{3.6 \text{ cm}}}$$

y por simetría tenemos que

$$\underline{\underline{\bar{y} = 0}}$$

calculamos el área

$$A = \frac{4}{3} (8 \text{ cm})(6 \text{ cm}) = 64 \text{ cm}^2$$

así pues los primeros momentos resultan ser:

$$Qx = \bar{y}A = \underline{\underline{0}}$$

$$Qy = \bar{x}A = (3.6 \text{ cm})(64 \text{ cm}^2) = \underline{\underline{230.4 \text{ cm}^3}}$$

b) Usamos las fórmulas para área semiparabólica.

$$\bar{x} = \frac{3}{5} h = \frac{3}{5} (6) = \underline{\underline{3.6 \text{ cm}}}$$

$$\bar{y} = \frac{3}{8} a = \frac{3}{8} (8) = \underline{\underline{3.0 \text{ cm}}}$$

calculamos el área

$$A = \frac{2ab}{3} = \frac{2(8 \text{ cm})(6 \text{ cm})}{3} = 32 \text{ cm}^2$$

los primeros momentos son:

$$Qx = \bar{y}A = (3.0)(32) = \underline{\underline{96 \text{ cm}^3}}$$

$$Qy = \bar{x}A = (3.6)(32) = \underline{\underline{115.2 \text{ cm}^3}}$$

c) Tenemos que la ecuación de la figura es $x = \sqrt{27y}$; despejando a y tenemos

$$y = \frac{1}{27} x^2$$

que es la fórmula de un acartelamiento parabólico.

$$\bar{x} = \frac{3}{4} a = \frac{3}{4} (9) = \underline{\underline{6.75 \text{ cm}}}$$

$$\bar{y} = \frac{3}{10} h = \frac{3}{10} (3) = \underline{\underline{0.90 \text{ cm}}}$$

obtenemos el área

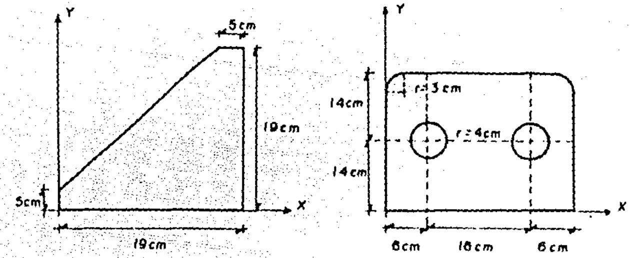
$$A = \frac{ah}{3} = \frac{(9\ \text{cm})(3\ \text{cm})}{3} = 9\ \text{cm}^2$$

y calculamos los primeros momentos:

$$Q_x = \bar{y}A = (0.9\ \text{cm})(9\ \text{cm}^2) = \underline{\underline{8.1\ \text{cm}^3}}$$

$$Q_y = \bar{x}A = (6.75\ \text{cm})(9\ \text{cm}^2) = \underline{\underline{60.75\ \text{cm}^3}}$$

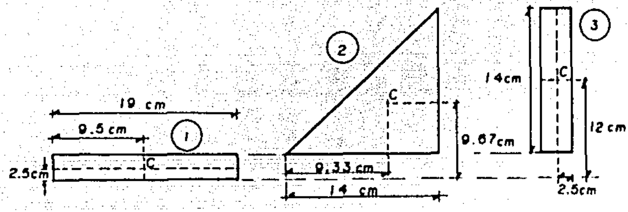
14.- Encuentre el centro de gravedad de las placas que se indican en las siguientes figuras; suponga material homogéneo y espesor constante.



(a) (b)

Solución:

La placa es homogénea por lo tanto coinciden el centro de gravedad y el centroide. Dividimos la figura en dos rectángulos y en un triángulo.



hacemos una tabla:

Componente	Area(cm^2)	$\bar{x}$(cm)	$\bar{y}$(cm)	$\bar{x}A$(cm^3)	$\bar{y}A$(cm^3)
1(rectángulo)	95	9.5	2.5	902.5	237.5
2(triángulo)	98	9.33	9.67	914.34	947.66
3(rectángulo)	70	16.5	12.0	1155.0	840.0
	263			2971.84	2025.16

calculamos las coordenadas

$$\bar{x} = \frac{2971.84}{263} = \underline{\underline{11.30 \text{ cm}}}$$

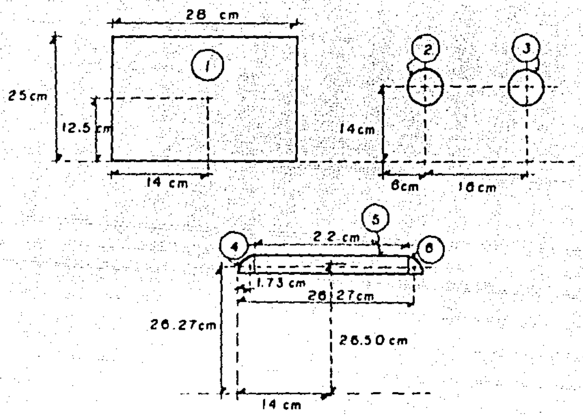
$$\bar{y} = \frac{2025.16}{263} = \underline{\underline{7.70 \text{ cm}}}$$

Los primeros momentos son:

$$Q_x = \bar{y}A = \underline{\underline{2025.16 \text{ cm}^3}}$$

$$Q_y = \bar{x}A = \underline{\underline{2971.84 \text{ cm}^3}}$$

b) Procedemos de igual manera para la figura b)



hacemos la tabla.

Componente	Area(cm²)	$\overline{x}$(cm)	$\overline{y}$(cm)	$\overline{x}$A(cm³)	$\overline{y}$A(cm³)
1	700	14	12.5	9800	8750
-2	-50.27	6	14.0	-301.62	-703.78
-3	-50.27	22	14.0	-1105.94	-703.78
4	7.07	1.73	26.27	12.23	185.73
5	66.0	14	26.5	924.0	1749.0
6	7.07	26.27	26.27	185.73	185.73
	Σ=679.60			9514.40	9462.90

calculamos las coordenadas

$$\bar{x} = \frac{9514.4}{679.6} = \underline{\underline{14\ cm}}$$

$$\bar{y} = \frac{9462.29}{679.6} = \underline{\underline{13.92\ cm}}$$

los primeros momentos son:

$$Qx = \bar{y}A = \underline{\underline{9462.29\ cm}}$$

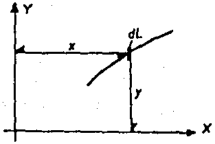
$$Qy = \bar{x}A = \underline{\underline{9514.40\ cm}}$$

VII.5Momentos Estáticos de Líneas y Centro de Líneas.

5.1 Centroide de una Línea.

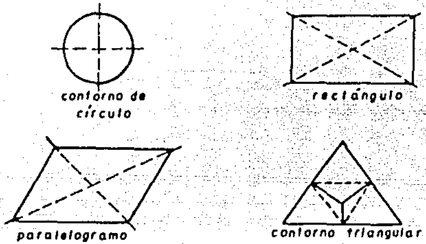
Analogamente a los conceptos de centro de gravedad de un volumen y de un área, el centroide de una línea viene dado por las siguientes expresiones:

$$\bar{x} = \frac{\int x dL}{L} \qquad ; \qquad \bar{y} = \frac{\int y dL}{L}$$



Se dice que una línea es simétrica respecto a un eje dado, si a cada punto P de la línea corresponde otro punto P′ de la misma línea, de tal forma que la línea PP′ sea perpendicular al eje.

Si la línea tiene dos ejes de simetría, el centroide estará localizado en la intersección en la intersección de estos dos ejes de simetría, con está propiedad nos resulta sencillo encontrar el centroide de líneas tales como la circunferencia, el perímetro de un cuadrado, etc.



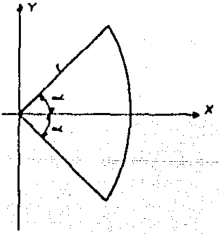
5.2 Momentos Estáticos de Líneas.

Los momentos estáticos de una línea están dados por las ecuaciones: $M_x = \overline{y}L$; $M_y = \overline{x}L$

Las unidades de los momentos estáticos de una línea son unidades de longitud al cuadrado: m , cm , ft , etc.

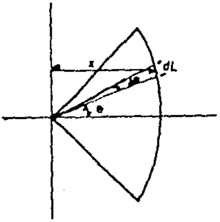
Ejemplos:

15.- Obtenga por integración el centroide de el arco de circunferencia que se muestra en la figura.



Solución:

Por simetría tenemos que el centroide se encuentra sobre el eje_ x, por lo tanto $\overline{y} = 0$. Tomemos un elemento diferencial de longitud y por integración obtengamos la longitud del arco.



De la figura obtenemos

$$\operatorname{sen} d\theta = \frac{dL}{r}$$

$$\therefore \quad dL = r \operatorname{sen} d\theta$$

esto es

$dL = r d\theta$, debido a que $d\theta$ es tan pequeño que:

$$\operatorname{sen} d\theta \doteq d\theta$$

integrando tenemos

$$dL = r\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta = r(\theta)_{-\alpha}^{\alpha} = r(\alpha - (-\alpha)) = 2r\alpha$$

de la figura tenemos también

$$\overline{x} = r \cos\theta$$

entonces

$$\overline{x}dL = (r\cos\theta)(r d\theta) = r^2 \cos\theta\, d\theta$$

al integrar nos queda:

$$\overline{x}L = \int_{-\alpha}^{\alpha} x dL = r^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta\, d\theta = r^2 (\operatorname{sen}\theta)_{-\alpha}^{\alpha} = r^2(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}(-\alpha))$$

$$\overline{x}L = r^2(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\alpha) = 2r^2 \operatorname{sen}\alpha$$

despejamos $\overline{x}$

$$\overline{x} = \frac{2r^2 \operatorname{sen}\alpha}{2r\alpha} = \underline{\underline{\frac{r \operatorname{sen}\alpha}{\alpha}}}$$

que nos indica la localización de C en el eje x.

Como la semicircunferencia es un caso particular en el cual.

$$\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

entonces: $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen} 90^\circ = 1$

sustituimos: $\bar{x} = r\,\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = \dfrac{r}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2r}{\pi}$

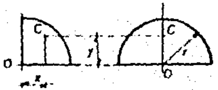
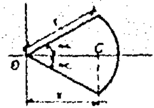
Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Longitud
Cuarto de arco circular		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de círculo		$\frac{r\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Tabla de Centroide de Líneas Comunes.

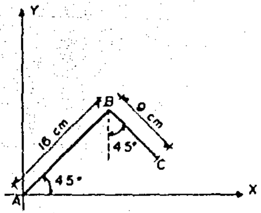
5.3 Centroide de Líneas Compuestas.

De igual forma que para los volumenes y las áreas compuestas se pueden determinar el centroide de una línea compuesta dividiendo a la línea en elementos más simples y usando las fórmulas.

$$\bar{X} = \frac{\Sigma \bar{x}L}{\Sigma L} \quad ; \quad \bar{Y} = \frac{\Sigma \bar{y}L}{\Sigma L}$$

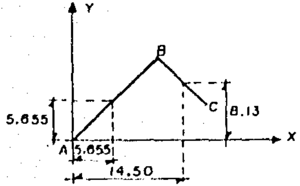
Ejemplos:

16.- Encuentre el primer momento y el centroide de la línea mostrada en la figura, para el sistema de referencia indicado.



Solución:

Por ser una línea compuesta, obtenemos los centroides de cada una de las líneas que lo componen. Y hacemos una tabla.



Acots. en cms.

Línea	Long(cm)	$\overline{X}$(cm)	$\overline{Y}$(cm)	$\overline{X}$L(cm²)	$\overline{Y}$L(cm²)
AB	16	5.655	5.655	90.48	90.48
BC	9	14.5	8.13	130.50	73.17
	25			220.98	163.65

entonces:

$$\overline{X} = \frac{220.98}{25} = \underline{\underline{8.839 \text{ cm}}}$$

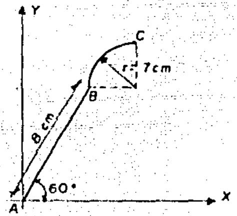
$$\overline{Y} = \frac{163.65}{25} = \underline{\underline{6.546 \text{ cm}}}$$

Los momentos estáticos son:

$$Qx = \overline{y}L = \underline{\underline{163.65 \text{ cm}^2}}$$

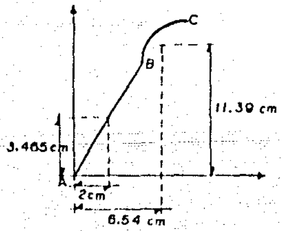
$$Qy = \overline{x}L = \underline{\underline{220.98 \text{ cm}^2}}$$

17.- Obtenga el centroide de la siguiente línea y obtenga los primeros momentos.



Solución:

Obtenemos los centroides de cada una de las líneas.



Líneas	Long(cm)	$\bar{X}$(cm)	$\bar{Y}$(cm)	$\bar{X}L$(cm^2)	$\bar{Y}L$(cm^2)
AB	8	2	3.465	16	27.72
BC	21.99	6.54	11.39	143.81	250.47
	29.99			159.81	278.19

calculamos las coordenadas:

$$\bar{X} = \frac{159.81}{29.99} = \underline{\underline{5.329\ cm}}$$

$$\bar{Y} = \frac{278.19}{29.99} = \underline{\underline{9.276\ cm}}$$

y los primeros momentos:

$$Q_x = \bar{y}L = \underline{\underline{278.19\ cm^2}}$$

$$Q_y = \bar{x}L = \underline{\underline{159.81\ cm^2}}$$

CAPITULO VIII

"MOMENTOS DE INERCIA DE AREAS PLANAS"

El momento de inercia de un área se origina, siempre que uno calcula el momento de una carga distribuida que varía linealmente a partir del eje de momentos. El momento de inercia de un área - también aparece cuando uno relaciona el esfuerzo normal, o fuerza por unidad de área, que actúa sobre una sección transversal de -- una viga elástica con el momento exterior aplicado, que produce - la flexión de la viga.

VIII.1 Concepto Dinámico y Concepto Matemático de un Momento de - Inercia.

1.1 Concepto Dinámico.

Se define al momento de inercia de un área, como la medida - de la resistencia que opone toda área a ponerse en movimiento de- rotación o a cambiar de velocidad angular.

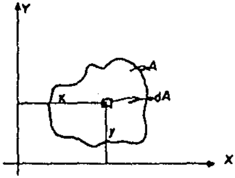
1.2 Concepto Matemático.

El momento de inercia o segundo momento de un área con respecto a un eje es una integral de la forma $\int_A x^2 dA$, donde x es el "brazo de palanca" medido a partir del elemento hasta un eje que es, ya sea perpendicular al área, o está situado en el mismo plano que ella.

VIII.2 Momentos de Inercia o de Segundo Orden de Areas Planas.

El momento de inercia de una área con respecto a un eje contenido en su plano, es igual a la suma de los productos de las áreas elementales por el cuadrado de sus distancias al eje.

$$I_x = \int y^2 dA \quad ; \quad I_y = \int x^2 dA$$



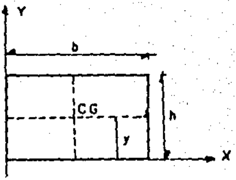
Las unidades del momento de inercia de un área con respecto a un eje de su plano, es una longitud elevada a la cuarta potencia: cm^4, pg^4, m^4, etc.

Ejemplos:

1.- Mediante integración, calcule el momento de inercia de un rectángulo, en función de su base "b" y de su altura "h" con respecto a:

a) Un eje que coincida con la base.

b) Un eje centroidal paralelo a la base.



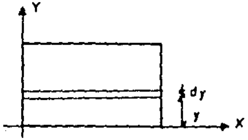
Solución:

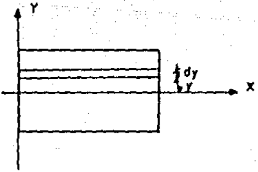
a) Tomamos un elemento diferencial de área paralelo a la base, así tenemos que:

$$dA = b\,dy$$

usamos la fórmula para el momento de inercia:

$$I_x = \int_A y^2\,dA = b\int_0^h y^2\,dy = \left.\frac{by^3}{3}\right|_0^h = \underline{\underline{\frac{bh^3}{3}}}$$

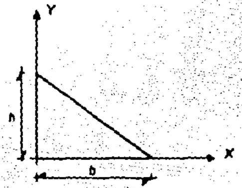




b) Tomamos el mismo elemento diferencial de área, solo que ahora al cambiar de posición el eje x, cambian también los límites de integración desde $-h/2$ hasta $h/2$

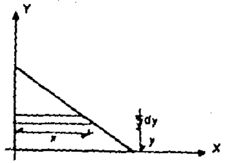
$$I_x = b\int_{-h/2}^{h/2} y^2\,dy = \left.\frac{by^3}{3}\right|_{-h/2}^{h/2} = \frac{b}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3\right] = \underline{\underline{\frac{bh^3}{12}}}$$

7.- Calcule por integración, el momento de inercia de un triángulo de base "b" y altura "h" con respecto a un eje que coincida con la base.



Solución:

Tomamos un elemento diferencial de área paralelo a la base.



el área del elemento es:

$$dA = x\,dy$$

por triángulos semejantes obtenemos:

$$\frac{h}{b} = \frac{h-y}{x} \longrightarrow x = \frac{b}{h}(h-y)$$

sustituyendo:

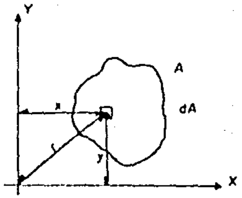
$$dA = \frac{b}{h}(h-y)dy$$

usando la fórmula de momento de inercia tenemos:

$$Ix = \frac{b}{h}\int_0^h y^2(h-y)dy = \frac{b}{h}\left(\frac{hy^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)_0^h = \frac{bh^3}{12}$$

2.1 Momento Polar de Inercia.

El momento polar de inercia de un área con respecto a un polo de su plano, es la suma de los productos de las áreas elementales por el cuadrado de sus distancias a dicho punto.



$$Jo = \int r^2 dA$$

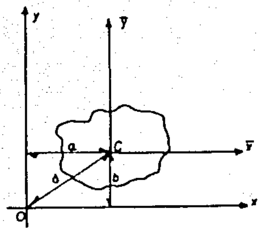
donde r es la distancia perpendicular a partir del polo (eje z) al elemento dA. Para toda el área el momento polar de inercia es

$$Jo = \int_A r^2 dA = Ix + Iy$$

La relación entre Jo e Ix, Iy es posible ya que $r^2 = x^2 + y^2$

2.2 Teorema de los Ejes Paralelos o de Steiner.

"Si se conoce el momento de inercia para un área con respecto a un eje que pasa a través de su centroide, es posible determinar el momento de inercia del área con respecto a un eje paralelo correspondiente usando el teorema de los ejes paralelos".



$$I_x = I_{\bar{x}} + a^2 A$$
$$I_y = I_{\bar{y}} + b^2 A$$

Estas ecuaciones son las expresiones del teorema de los ejes paralelos, donde:

I_x, I_y .- Son los momentos de inercia del área con respecto a los ejes x,y.

$I_{\bar{x}}, I_{\bar{y}}$.- Son los momentos de inercia del área con respecto a los ejes centroidales $\bar{x}$ y $\bar{y}$.

b, a .- Son las distancias de los ejes x, y a los ejes $\bar{x}$, $\bar{y}$ respectivamente.

El teorema de los ejes paralelos se puede usar también para determinar el momento polar de inercia Jo con respecto a un eje perpendicular al plano xy y que pasa a través del polo O.

$$J_o = J_{\bar{c}} + Ad^2$$

donde:

$J_{\bar{c}}$.- Es el momento polar de inercia del área A con respecto al eje $\bar{z}$ que pasa a través del centroide C y es perpendicular al plano xy.

d .- Es la distancia entre los puntos O y C.

2.3 Radio de Giro.

En mecánica estructural con frecuencia se hace referencia al radio de giro de un área plana y se usa en las fórmulas para encontrar la resistencia de una columna. Si se conocen el área A y los momentos de inercia Ix, Iy, Jo, los radios de giro ρ_x, ρ_y y ρ_o se determinan a partir de las siguientes fórmulas:

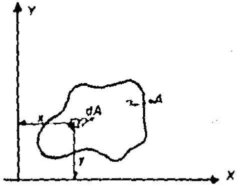
$$\rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad ; \quad \rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad ; \quad \rho_o = \sqrt{\frac{J_o}{A}}$$

Como I está expresado en unidades de longitud a la cuarta potencia y A en unidades de longitud al cuadrado, el radio de giro tiene unidades de longitud (cm, m, etc). Es útil muchas veces para comparaciones, pero no tiene significado físico.

2.4 Producto de Inercia.

Los productos de inercia de un área con respecto a los ejes x, y se definen como:

"La suma de los productos de las áreas elementales por sus distancias respectivas a los ejes".



$$I_{xy} = \int xy\,dA$$

Las unidades del producto de inercia son unidades de longitud elevadas a la cuarta potencia, y dicho producto puede ser: positivo, negativo o nulo; a diferencia del momento de inercia que no puede ser negativo.

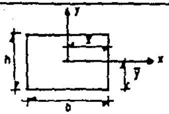
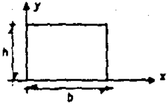
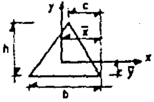
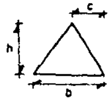
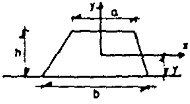
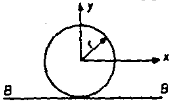
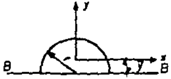
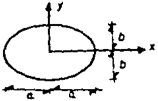
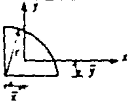
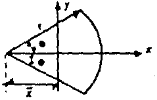
Forma		Momento de Inercia	Producto de I.	M. Polar de I.
RECTANGULO (origen de ejes en el centroide)		$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{hb^3}{12}$	$I_{xy} = 0$	$J = \frac{bh}{12}\ (h^2 + b^2)$
RECTANGULO (origen de ejes en una esquina)		$I_x = \frac{bh^3}{3}$ $I_y = \frac{hb^3}{3}$	$I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$	$J = \frac{bh}{3}\ (h^2 + b^2)$
TRIANGULO (origen de ejes en el centroide)		$I_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_y = \frac{bh}{36}(b^2 - bc + c^2)$	$I_{xy} = \frac{bh^2}{72}(b - 2c)$	$J = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2 - bc + c^2)$
TRIANGULO (origen de ejes en un vertice)		$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{bh}{12}(3b^2 - 3bc + c^2)$	$I_{xy} = \frac{bh^2}{24}(3b - 2c)$	$J = \frac{bh}{12}(h^2 + 3b^2 - 3bc + c^2)$
TRAPECIO (origen de ejes en el centroide)		$I_x = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a+b)}$ $I_y = \frac{h^3(3a+b)}{12}$		

TABLA DE MOMENTOS DE INERCIA DE FIGURAS COMUNES

Forma		Momento de Inercia	Producto de I.	M. Polar de I.
CIRCULO (origen de ejes en el centroide)		$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$ $I_{BB} = \frac{5\pi r^4}{4}$	$I_{xy} = 0$	$J = \frac{\pi r^4}{2}$
SEMICIRCULO (origen de ejes en el centroide)		$I_x = \frac{(9\pi^2 - 64) r^4}{72\pi}$ $I_y = \frac{\pi r^4}{8}$ $I_{BB} = \frac{\pi r^4}{8}$	$I_{xy} = 0$	
ELIPSE (origen de ejes en el centroide)		$I_x = \frac{\pi a b^3}{4}$ $I_y = \frac{\pi b a^3}{4}$	$I_{xy} = 0$	$J = \frac{\pi a b}{4}(b^2 + a^2)$
CUADRANTE DE CIRCULO (origen de ejes en el centroide)		$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16}$		$J = \frac{\pi r^4}{8}$
SECTOR CIRCULAR (origen de ejes en el centroide)		$I_x = \frac{1}{4} r^4 (\theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta)$ $I_y = \frac{1}{4} r^4 (\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta)$		$J = \frac{1}{2} r^4 \theta$

CONTINUACION

Si el área tiene un eje de simetría, el producto de inercia es nulo, así pues:

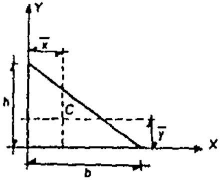
"Para que el producto de inercia de un área con respecto a dos ejes ortogonales contenidos en su plano, sea nulo, es necesario que cuando menos uno de estos ejes sea eje de simetría del área".

Si aplicamos el teorema de los ejes paralelos al producto de inercia obtenemos:

$$Ixy = \overline{Ixy} + abA$$

Ejemplos:

3.- Aplicando el teorema de los ejes paralelos calcule el momento de inercia de un triángulo, respecto a un eje paralelo a la base y que pase por el centroide del triángulo.



Solución:

El teorema de los ejes paralelos nos dice que:

$$Ix = \overline{Ix} + a^2A$$

despejamos: $$\overline{Ix} = Ix - a^2A$$

de la tabla tenemos que:

$$Ix = \frac{bh^3}{12}$$ para los ejes en un vertice.

sabemos que:

$$a = \overline{y} = \frac{h}{3}$$

y que: $$A = \frac{bh}{2}$$

sustituimos:

$$I\bar{x} = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2\left(\frac{bh}{2}\right) = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \underline{\underline{\frac{bh^3}{36}}}$$

así pues

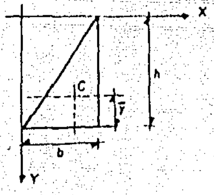
$$\underline{\underline{I\bar{x} = \frac{bh^3}{36}}}$$

lo que se comprueba con la table de momentos de inercia para los ejes en el centroide.

El radio de giro es:

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\left(\frac{bh^3}{36}\right) \div \left(\frac{bh}{2}\right)} = \underline{\underline{0.236h}}$$

4.- Aplicando el teorema de los ejes paralelos calcule el momento de inercia de un triángulo, respecto a un eje paralelo a la base y que pase por el vertice.



Solución:

De la tabla de momentos de inercia tenemos que:

$$I\bar{x} = \frac{bh^3}{36}$$

como el centroide del triángulo se encuentra en $a = \frac{2}{3}h$; entonces:

$$Ix = \frac{bh^3}{36} - \left(\frac{2}{3}h\right)^2\left(\frac{bh}{2}\right) = \frac{bh^3}{36} - \frac{2}{9}bh^3$$

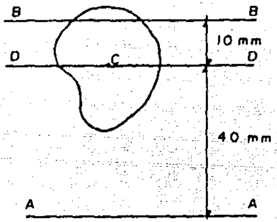
así pues:

$$\underline{\underline{Ix = \frac{bh^3}{4}}}$$

El radio de giro es:

$$\rho_x = \sqrt{\left(\frac{bh^3}{4}\right) \div \left(\frac{bh}{2}\right)} = \underline{\underline{0.7071h}}$$

5.- El área irregular tiene un momento de inercia de $20 \times 10^6 mm^4$ con respecto al eje AA. Si el área total es de $1.2 \times 10^4 mm^2$, determine el momento de inercia del área con respecto al eje BB. - El eje DD pasa a través del centroide del área.



Solución :

Usamos el teorema de los ejes paralelos para obtener primero el momento de inercia respecto al eje centroidal DD.

$$I_{AA} = I_{DD} + a^2 A$$

despejamos y nos queda

$$I_{DD} = I_{AA} - a^2 A = 20 \times 10^6 mm^4 - (40\ mm)^2 (1.2 \times 10^4 mm^2)$$

$$I_{DD} = 8.0 \times 10^5 mm^4$$

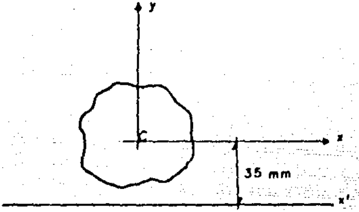
Aplicamos nuevamente el teorema de los ejes paralelos para obtener I_{BB}

$$I_{BB} = 8.0 \times 10^5 mm^4 + (10\ mm)^2 (1.2 \times 10^4 mm^2) =$$

$$\underline{\underline{I_{BB} = 2.0 \times 10^6 mm^4}}$$

que es el resultado pedido.

6.- El momento polar de inercia del área es $J_C = 15 \times 10^6\,mm^4$, -- calculado con respecto al centroide C. Si el momento de inercia con respecto al eje y es $5 \times 10^6\,mm^4$ y el momento de inercia con respecto al eje x' es $I_{x'} = 12 \times 10^6\,mm^4$, determinar el área.



Solución:

Como sabemos:

$$I_C = I_{\bar{x}} + I_{\bar{y}}$$

despejamos $I_{\bar{x}}$ y tenemos:

$$I_{\bar{x}} = I_C - I_{\bar{y}} = (15 \times 10^6\,mm^4) - (5 \times 10^6\,mm^4)$$

$$I_{\bar{x}} = 10 \times 10^6\,mm^4$$

y del teorema de los ejes paralelos tenemos:

$$I_x = I_{\bar{x}} + a^2 A$$

despejamos el área

$$A = \left| \frac{I_{\bar{x}} - I_{x'}}{a^2} \right| = \left| \frac{(10 \times 10^6\,mm^4) - (12 \times 10^6\,mm^4)}{(35\,mm)^2} \right| =$$

Así obtenemos:

$$\underline{\underline{A = 1632.65\,mm^2}}$$

VIII.3 Momentos de Inercia Principales.

3.1 Ejes Principales.

Para una superficie plana con un punto definido como origen se puede establecer un número infinito de coordenadas x,y. Los momentos de inercia de esta superficie con respecto a los ejes x e y, Ix e Iy, varíanconforme cambian las coordenadas de los ejes x e y. Por otra parte, el momento polar de inercia Jo, permanece constante. De lo anterior se concluye que existe un sistema de ejes que produce un momento de inercia máximo y el otro mínimo. Este conjunto particular de ejes coordenados define los ejes principales.

Para un conjunto dado de Ix, Iy, Ixy los ejes principales se pueden encontrar con la fórmula:

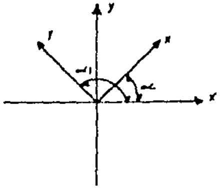
$$\alpha = \frac{1}{2} tg^{-1} \frac{2Ixy}{Iy-Ix}$$

o también:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} tg^{-1} \frac{2Ixy}{Iy-Ix}$$

donde:

α.- es el ángulo comprendido entre los ejes x,y y los ejes principales x', y'.



Además tenemos que Ix'y'= 0, es decir, el producto de inercia con respecto a los ejes principales es nulo. Por lo que se concluye que cualquier eje de simetría representa un eje principal de inercia para el área.

3.2 Momentos Principales de Inercia.

La ecuación que define los momentos principales de inercia máximo o mínimo es:

$$I_{\substack{máx \\ mín}} = \frac{Ix+Iy}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{Ix-Iy}{2}\right)^2 - I_{xy}^2}$$

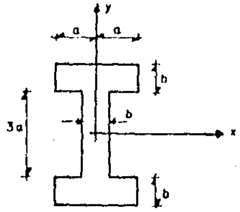
Dependiendo del signo escogido este resultado da el momento de inercia máximo o mínimo para el área.

VIII.4 Aplicaciones a Figuras Compuestas.

Un área compuesta consiste de una serie de áreas "más simples" unidas, como pueden ser: semicírculos, rectángulos, triángulos, elipses, etc. Siempre y cuando se conozca el momento de inercia de cada una de esas áreas o pueda calcularse con respecto a un eje común, entonces el momento de inercia del área compuesta es igual a la suma algebraica de los momentos de inercia de las áreas componentes, se debe usar el teorema de los ejes paralelos para referir cada momento de inercia al eje deseado.

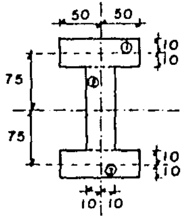
Ejemplos:

7.- Determine los momentos de inercia Ix e Iy, los radios de giro ρ_x, ρ_y y el momento polar de inercia Jo de la figura. El origen de las coordenadas está en el centroide C. Considere a = 50 mm y b = 20 mm.



Solución:

Dividimos la figura en tres rectángulos e indicamos sus centroides.



Acots. en mm.

Auxiliandonos del teorema de los ejes paralelos y en la tabla de momentos de inercia, calculamos el momento de inercia de cad rectángulo respecto a los ejes centroidales x e y.

Rectángulo (1) $\quad I_x = I_{\bar{x}} + Ad^2$

$$I_{x_1} = \frac{(100)(20)^3}{12} + (100)(20)(85)^2 = 14.51 \times 10^6 \text{mm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{(20)(100)^3}{12} = 1.67 \times 10^6 \text{mm}^4$$

Rectángulo (2)

$$I_{x_2} = \frac{(20)(150)^3}{12} + (20)(150)(0)^2 = 5.63 \times 10^6 \text{mm}^4$$

$$I_{y_2} = \frac{(150)(20)^3}{12} = 0.1 \times 10^6 \text{mm}^4$$

Rectángulo (3)

Como es igual al rectángulo (1) y tiene las mismas distancias a los ejes centroidales entonces:

$$I_{x_3} = I_{x_1} = 14.51 \times 10^6 \text{mm}^4$$

$$I_{y_3} = I_{y_1} = 1.67 \times 10^6 \text{mm}^4$$

Así pues el momento de inercia del área total es:

$Ix = 2(14.51 \times 10^6) + 5.63 \times 10^6 = \underline{\underline{34.65 \times 10^6 \, mm^4}}$

$Iy = 2(1.67 \times 10^6) + 0.1 \times 10^6 = \underline{\underline{3.44 \times 10^6 \, mm^4}}$

El área total es:

$A = 2(2000) + 3000 = 7000 \; mm^2$

entonces los radios de giro son:

$$e_x = \sqrt{\frac{34.65 \times 10^6}{7000}} = \underline{\underline{70.36 \; mm}}$$

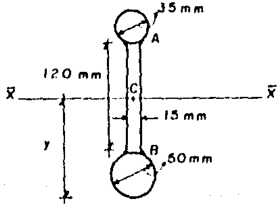
$$e_y = \sqrt{\frac{3.44 \times 10^6}{7000}} = \underline{\underline{22.17 \; mm}}$$

y el momento polar de inercia

$$Jo = Ix + Iy = 34.65 \times 10^6 + 3.44 \times 10^6 = \underline{\underline{38.09 \times 10^6 \, mm^4}}$$

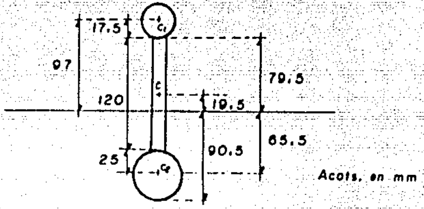
$$e_o = \sqrt{\frac{38.09 \times 10}{7000}} = \underline{\underline{73.77 \; mm}}$$

8.- Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje $\overline{XX}$ que pasa a través del centroide C de la sección transversal. Desprecie el tamaño de las soldaduras en las esquinas A y B para el cálculo, $\overline{y} = 90.5$mm.



Solución:

Dividimos la sección en dos círculos y un rectángulo.



Obtenemos los momentos de inercia para cada componente del área total con respecto al eje $\overline{XX}$.

Círculo (1)

$$Ix_1 = \frac{\pi r^4}{4} + Ad^2 = \frac{\pi (17.5)^4}{4} + \pi (17.5)^2 (97)^2$$

$$Ix_1 = 9.13 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Rectángulo

$$Ix_R = \frac{(15)(120)^3}{12} = 2.84 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

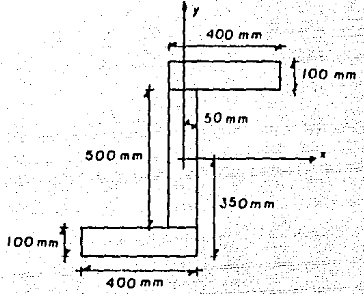
Círculo (2)

$$Ix_2 = \frac{\pi (25)^4}{4} + \pi (25)^2 (65.5)^2 = 8.73 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Por lo que el momento de inercia total respecto al eje $\overline{XX}$ es:

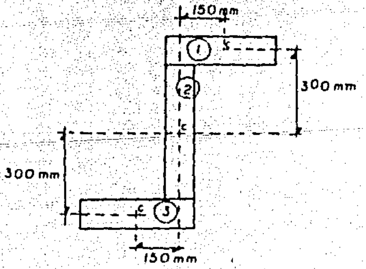
$$Ix_T = (9.13 + 2.84 + 8.73) \times 10^6 = 20.70 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

9.- Determine el producto de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto a los ejes x e y que tienen su origen localizado en el centroide C.



solución:

Dividimos la sección en tres rectángulos, obtenemos primero sus productos de inercia centroidales y luego usando el teorema de los ejes paralelos los obtenemos respecto a los ejes x,y.



$$I_{xy} = \overline{I_{xy}} + abA$$

Rectángulo (1)

$$I_{xy} = 0 + (150)(300)(400)(100) = 1.8 \times 10^{9}\,mm^4$$

Rectángulo (2)

$$I_{xy} = 0 + 0 = 0$$

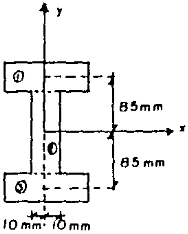
Rectángulo (3)

$$I_{xy} = 0 + (-150)(-300)(40000) = 1.8 \times 10^{9}\,mm^4$$

Así el producto de inercia total es:

$$I_{xy} = 2(1.8 \times 10^{9}) = \underline{\underline{3.6 \times 10^{9}\,mm^4}}$$

10.- Para el problema 7 obtenga la posición de los ejes principales y el momento de inercia máximo y mínimo.



Solución:

Ya tenemos $I_x = 34.65 \times 10^{6}\,mm^4$ y $I_y = 3.44 \times 10^{6}\,mm^4$, solo nos falta calcular I_{xy}.

Rectángulo (1)

$$I_{xy} = 0$$

Rectángulo (2)

$$I_{xy} = 0$$

Rectángulo (3)

$$I_{xy} = 0$$

Por lo tanto:

$$Ixy = 0$$

así pues

$$\alpha = \frac{1}{2}\, tg^{-1} \frac{2Ixy}{Iy - Ix} = \underline{\underline{0}}$$

por lo tanto los ejes centroideles $\bar{x}$ e $\bar{y}$ son los ejes principa-- les de la sección.

$$I_{\substack{máx \\ mín}} = \frac{Ix + Iy}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{Ix - Iy}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

sustituyendo

$$I = \frac{(34.65 + 3.44) \times 10^6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(34.65 - 3.44) \times 10^6}{2}\right)^2}$$

$$I = 19.045 \times 10^6 \pm 15.605 \times 10^6$$

$$Imáx = 19.045 \times 10^6 + 15.605 \times 10^6 = \underline{\underline{34.65 \times 10^6\ mm^4}}$$

$$Imín = 19.045 \times 10^6 - 15.605 \times 10^6 = \underline{\underline{33.44 \times 10^6\ mm^4}}$$

Como vemos para los ejes principales coincidentes con los - ejes centroidales, los momentos de inercia máximo y mínimo son - son los correspondientes a los momentos Ix e Iy.

CAPITULO IX
CONCLUSIONES

Al finalizar el presente trabajo, se han proporcionado los elementos necesarios para cubrir el curso de Estática, es decir, se expusieron los conceptos básicos de la Mecánica Clásica, así como los medios necesarios para manejar los diferentes sistemas de unidades usados en la Mecánica, junto con sus dimensiones y se mostró además la forma de traducir fórmulas de un sistema de unidades a otro, se dotó de los conceptos básicos de la Estática y se dierón las bases para hacer un tratamiento vectorial de los sistemas de fuerzas, se proporcionaron los elementos necesarios para la solución de problemas de equivalencia y para la reducción de los sistemas de fuerzas.

Llevamos a cabo el análisis de las condiciones de equilibrio de los diversos sistemas de fuerzas. Se enunciaron los conceptos de primeros momentos y de centros de gravedad y se presentaron las herramientas necesarias para determinar su valor en los diversos casos en que se apliquen.

Enunciamos el concepto de momento de inercia de áreas planas y la determinación de su valor en diversos casos, en otras palabras se ha cumplido con el objetivo del curso mencionado en la introducción de este trabajo, quedando solo la responsabili-- dad del lector para el estudio de este texto.

Se propuso un método de solución de problemas de Mecánica - que se considera es el más adecuado, debido a su sencillez.

Este trabajo fué enfocado principalmente para la carrera de Ingeniero Civil, pero no por eso deja de ser una importante fuen te de consulta para las otras ingenierías (Mecánica, Eléctrica,- Industrial y Computación).

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1.- Beer, F. P. y Johnston, E. R.
Mecánica Vectorial para Ingenieros Tomo I.
Tercera Edición.
Editorial Mc Graw-Hill.
México 1984.

2.- Brand, Louis.
Mecánica Vectorial.
Decimosegunda Impresión.
Editorial CECSA.
México 1980.

3.- Bueche, S.
Fundamentos de Física.
Segunda Edición en Español.
Editorial Mc Graw-Hill.
México 1983.

4.- Facultad de Ingeniería UNAM.
Ejercicios de Estática.
México 1983.

5.- Hibbeler, R. C.
Mecánica para Ingenieros Tomo I.
Segunda Impresión.
Editorial CECSA.
México 1984.

6.- Huang, T. C.
Mecánica para Ingenieros Volúmen I.
Primera Edición en Español.
Representaciones y Servicios de Ingeniería S. A.
México 1979.

7.- Shaum, B. S.
Teoría y Problemas de Física General.
Editorial Mc Graw-Hill.
México 1983.

8.- Torres, H. Jaime.
Mecánica Aplicada.
Tercera Edición.
Representaciones y Servicios de Ingeniería S. A.
México 1985.