

27
29



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

IMPLEMENTACION DE
ELEMENTO FINITO
PARA LA ECUACION DE
STOKES

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
F I S I C O
P R E S E N T A
DAVID MONDRAGON VARGAS

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

PREFACIO.....	4
INTRODUCCION.....	5
LISTA DE SIMBOLOS.....	7
1).- FLUJO NEWTONIANO.....	9
1.1).- INTRODUCCION.....	10
1.2).- ECUACION DE BALANCE.....	10
1.3).- ECUACION CONSTITUTIVA.....	14
2).- DESCRIPCION DEL PROBLEMA FISICO.....	20
2.1).- INTRODUCCION.....	21
2.2).- FLUJO EN UNA CAVIDAD RECTANGULAR.....	22
3).- PLANTEAMIENTO MATEMATICO DEL PROBLEMA.....	25
3.1).- INTRODUCCION.....	26
3.2).- EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCION CONTINUA.....	26
3.3).- FORMULACION VARIACIONAL DEL PROBLEMA DE STOKES CON MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.....	28
3.4).- FORMULACION VARIACIONAL DEL PROBLEMA DE STOKES EN TERMINOS DE PENALTY.....	30
3.5).- EXISTENCIA DE LA SOLUCION DISCRETA.....	32
3.6).- ESTIMACION DE ERROR.....	32
4).- FORMULACION EN TERMINOS DE ELEMENTO FINITO.....	33
4.1).- INTRODUCCION.....	34
4.2).- ESPACIOS DISCRETOS.....	34
4.3).- TRIANGULACION.....	35
4.4).- DEFINICION DE ELEMETO FINITO.....	35
4.5).- MATRIZ DE STOKES.....	37
5).- ANALISIS DE RESULTADOS.....	40
5.1).- INTRODUCCION.....	41
5.2).- FLUJO EN UNA CAVIDAD CUADRADA.....	44
5.3).- FLUJO EN UNA CAVIDAD CUADRADA CON DOS PLACAS Y DIFE- RENTES VALORES A LA FRONTERA.....	60
5.5).- FLUJO EN UN HUECO BIDIMENSIONAL CUADRADO.....	66
5.6).- FLUJO EN UNA CAVIDAD CUADRADA, CASO NO HOMOGENEO.....	70
5.7).- FLUJO EN UNA CAVIDAD CUADRADA, CON DIFERENTES NUMEROS DE REYNOLDS.....	82

6).- CONCLUSION.....	89
7).- APENDICE I.....	91
6.1).- DIAGRAMAS DE FLUJO.....	92
6.2).- LISTADO DEL PROGRAMA.....	100
8).- APENDICE II.....	113
7).- BIBLIOGRAFIA.....	114

PREFACIO

El método del elemento finito fue originalmente desarrollado por ingenieros en los años 50 de este siglo, analizando sistemas estructurales. Turner [35] presenta el 1er. artículo; éstos autores fueron seguidos por Clough [5] y Argyris [3], entre otros. Aplicaciones del método de elemento finito para problemas no estructurales, en mecánica de fluidos y electromagnetismo, fueron primeramente analizadas por Zienkiewicz y Chung [38]. Aplicaciones a problemas no lineales fueron hechas por Oden [24]. Las bases teóricas de éstas formulaciones fueron desarrolladas en el cálculo variacional, ésto se encuentra en los trabajos de Rayleigh y Ritz. La extensión directa de éstos conceptos para la construcción de algoritmos para mecánica de fluidos no es directa (y en muchos casos imposible). La dificultad principal se manifiesta directamente en la no linealidad de la ecuación de conservación del momento. Muchas de las aproximaciones son realizadas directamente en términos de diferencias finitas (Richtmger y Morton, [30], Roache, [31]). Oden [25] fué el primero en derivar la teoría básica para la ecuación de Navier-Stokes, Temam [33] realiza un estudio extenso de los aspectos matemáticos involucrados para la ecuación de Stokes en estado estable, y en estado inestable, para fluidos incompresibles y compresibles. Thomasset [34] describe las técnicas variacional y de elemento finito para la ecuación de Stokes y de Navier-Stokes. Glowinski y Pironneau [12-16], transforman el problema de Stokes en una ecuación diferencial integral, atacando directamente la restricción de incompresibilidad. Finalmente Baker [4] analiza el flujo tridimensional en general.

INTRODUCCION

Este trabajo está enfocado básicamente a la solución numérica de la ecuación lineal y homogénea de Navier-Stokes, para fluidos viscosos y flujos laminares y rotacionales. Está compuesto por cinco capítulos y un apéndice. En el primer capítulo se presentan las ecuaciones constitutivas para un fluido incompresible y las hipótesis fundamentales para su deducción. En esta sección se deduce la ecuación de Navier-Stokes. En el segundo capítulo se muestra el problema de flujo en una cavidad cuadrada, con las hipótesis siguientes: el flujo es laminar, estacionario y rotacional de un fluido incompresible. Se describe el modelo matemático correspondiente que está formado por dos ecuaciones diferenciales parciales en el plano (x,y) , acopladas con una tercera ecuación diferencial parcial, que corresponde físicamente a la condición de incompresibilidad del fluido, se dan los valores a la frontera. El tercer capítulo explica brevemente los diferentes principios variacionales que pueden ser asignados al problema de Stokes, se da la formulación variacional en términos de multiplicadores de Lagrange, y se estudia en forma extensa la formulación variacional "Penalizada", así como la existencia y unicidad de la solución discreta. Se calcula una estimación del error de la aproximación. El capítulo cuatro establece la técnica para aproximar o construir los espacios discretos encontrados en el capítulo tres, que garanticen la convergencia de la solución discreta. De tal forma que el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que describen el modelo físico, son transformadas en un sistema algebraico. Se deduce la matriz de Stokes en términos de Elemento Finito. En el capítulo cinco se presentan los resultados numéricos encontrados con el algoritmo de "Penalty". Se presenta la matriz de Stokes para diferentes numeraciones de malla, se muestran las gráficas del campo de velocidades y la presión para el problema físico planteado inicialmente, se cambia la velocidad de la placa y se analiza la simetría del campo de velocidades para este caso. Posteriormente se analizan tres problemas físicos con diferentes condiciones a la frontera y diferentes valores de viscosidad del fluido. Después se analiza los campos de velocidad y de presión contenidos en la cavidad cuando se aplica una fuerza al fluido. En el apéndice se

describen los diagramas de flujo del programa principal y de las rutinas, se explica la entrada y salida de cada una, finalmente se anexa un listado completo del programa. Los resultados mostrados aquí son la base para un proyecto más ambicioso, que incluye la descripción de fluidos en forma tridimensional, y el tratamiento del término no lineal de la ecuación de Navier-Stokes con técnicas "Upwind".

LISTA DE SIMBOLOS

$\mathbb{R}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$	Cuerpos reales
\vec{v}, \vec{w}	Vectores
T, I, S	Tensores
R^3	Espacio euclidiano tridimensional
\vec{F}^t	Fuerza total sobre el fluido
\vec{F}^c	Fuerza de cuerpo sobre el fluido
\vec{F}^s	Fuerza de superficie en el fluido
\bar{X}	Fuerza por unidad de masa
ρ	Densidad del fluido
π	Presión del fluido
\vec{x}	Vector de posición
Ω	Región geométrica del cuerpo
$\partial\Omega$	Frontera del cuerpo
\hat{n}	Vector unitario
e_i	Vector unitario en la dirección i
T	Tensor de esfuerzos
\vec{v}	Velocidad del fluido
μ	Coefficiente de viscosidad cinemático
$\nabla \cdot$	Operador divergencia
∇	Operador gradiente
∇^2	Operador laplaciano
$\frac{D}{Dt}$	Derivada Material
$L^2(\Omega)$	Espacio de Lebesgue
$H^1(\Omega), H_0^1(\Omega), H_0^2(\Omega)$	Espacios de Sobolev
C^α	Conjunto de funciones con derivada α
$D(\Omega)$	Conjunto de funciones con soporte compacto que estan en C^α .
V_0	Conjunto de funciones cinemáticamente admisible.
$ \vec{v} $	Norma de \vec{v}
V	Espacio vectorial
V_h	Espacio discreto
T_h	Triangulación
P_h	Vértice de un triángulo
w_h	Funciones base de elemento finito

\hat{K}_k

Elemento finito geométrico de referencia

 P_k

Espacio local de elemento finito

 Σ_E

Conjunto de grados de libertad

 $\vec{v} \cdot \vec{w}$

Producto vectorial

 $\vec{v} \otimes \vec{w}$

Producto tensorial

FLUIDO NEWTONIANO

INTRODUCCION

El objetivo de éste capítulo es presentar el conjunto básico y necesario de ecuaciones para describir completamente a un fluido incompresible newtoniano, solamente se dará una discusión breve de la derivación de tales ecuaciones, véanse referencias [9], [10], [17], [21] para una descripción completa. En la primera parte se expresa la 2da. ley de Newton para medios continuos; en la segunda parte se presenta el esfuerzo y su relación lineal con los gradientes de la velocidad (fundamental para la descripción de un fluido). Esta relación es entonces substituida en la 2da. ley de Newton, de donde se obtiene la ecuación de Navier-Stokes. Finalmente se establece la ecuación de estado para un fluido incompresible.

ECUACION DE BALANCE

Las relaciones generales que gobiernan el medio continuo son clasificadas en cuatro categorías: (1) Cinemática, (2) Leyes Mecánicas, (3) Principios Termodinámicos, (4) Ecuaciones Constitutivas. La Cinemática estudia la geometría del movimiento sin considerar las fuerzas que lo originan. La dinámica estudia las leyes de balance mecánicas, tal como la conservación del momento. La Termodinámica establece las relaciones entre el calor, el trabajo, y las propiedades del sistema en equilibrio. Las ecuaciones constitutivas describen propiedades del cuerpo en estudio y caracterizan a diferentes tipos de materiales, estableciendo el comportamiento del material. Todas las ecuaciones son descritas en un Sistema Inercial de Referencia.

El adjetivo continuo implica que todas las funciones matemáticas usadas para la descripción del cuerpo, son "continuas", en otras palabras la estructura molecular de la materia es ignorada; ésta hipótesis permite describir el movimiento macroscópico así como la deformación de los cuerpos continuos y definir variables físicamente puntuales, como es el caso de la siguiente hipótesis:

un cuerpo ésta formado por un conjunto de puntos
estos puntos serán llamados "Puntos Materiales (X,Y,Z)". La posición simultánea de todos los puntos materiales del cuerpo es llamado

Configuración del sistema. El conjunto de todas las configuraciones que el sistema puede asumir, bajo la acción de alguna fuerza externa, es llamado *Espacio de Configuración* del sistema y cada configuración es llamada un punto o un elemento en el espacio de configuración. Se establece la siguiente función entre cuerpos reales (designados por $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$) y el espacio \mathbb{R}^3 como sigue: cada punto material del cuerpo estará representado por un punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, es decir:

Sea \mathcal{B} el cuerpo real y ψ la función tal que

$$\psi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi(X) = \vec{x} \quad (1.1)$$

Esta relación también se cumple instante por instante, por lo tanto, también debe ser función del tiempo: $\psi(X,t) = \vec{x}(t)$, esta función es biyectiva continua y posee una inversa, (Gurtin [16]).

Los movimientos mecánicos que sufre cualquier cuerpo son debidos a la interacción de alguna fuerza. Las fuerzas que serán consideradas, son de dos tipos, fuerzas de cuerpo (debido a la estructura interna del cuerpo), y fuerzas de corte (fuerzas que solamente se aplican en la superficie del cuerpo).

DEFINICION

Un fluido es considerado como un cuerpo continuo que se pone en movimiento al aplicarle una fuerza de superficie o de corte.

La hipótesis fundamental en la que se basa gran parte de la mecánica del medio continuo es la hipótesis realizada por Cauchy, la cual establece la existencia de una fuerza de superficie "S", definida para cada vector normal \hat{n} en (\vec{x}, t) en la trayectoria \mathcal{T} fig.(1.1)



fig.(1.1) fuerza "S" aplicada en el punto \vec{x}

Esta fuerza se expresa como:

$$\vec{F}_s = \int_{\partial\Omega} \vec{s}(\hat{n}) d\partial\Omega \quad (1.2)$$

Y la fuerza de cuerpo ésta dada como:

$$\vec{F}_c = \int_{\Omega} \vec{b}(\vec{x}, t) dv \quad (1.3)$$

donde $\vec{b}(\vec{x}, t)$ es la fuerza por unidad de volumen aplicada en el punto \vec{x} al tiempo t . La fuerza total sobre el cuerpo \mathcal{B} es expresada como:

$$\vec{F}_s = \int_{\partial\Omega} \vec{s}(\hat{n}) d\partial\Omega + \int_{\Omega} \vec{b}(\vec{x}, t) dv \quad (1.4)$$

DEFINICION

Un sistema de fuerzas sobre un cuerpo \mathcal{B} durante un movimiento (con trayectoria \mathcal{T}), significa el par (\vec{s}, \vec{b}) de funciones vectoriales tal que:

$$\begin{aligned} \vec{s}: N \times \mathcal{T} &\longrightarrow V \\ \vec{b}: \mathcal{T} &\longrightarrow V \end{aligned} \quad (1.5)$$

con

- i).- $\vec{s}(\hat{n}, \vec{x}, t)$ para cada $\hat{n} \in N$ y t es una función continua en \vec{x} sobre \mathcal{B} , N el conjunto de todos los vectores unitarios.
- ii).- $\vec{b}(\vec{x}, t)$ para cada t , es una función continua de \vec{x} sobre \mathcal{B} .

La conexión entre el movimiento y la fuerza es establecida a través de la ley de balance de momento como sigue:

$$\vec{l}(\vec{x}, t) = \ell(\vec{x}, t) \quad (1.6)$$

donde

$$\ell(\vec{x}, t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho \vec{v}(\vec{x}, t) dv \quad (1.7)$$

" ρ " es la densidad del fluido y $\vec{v}(\vec{x}, t)$ es la velocidad del punto \vec{x} en el tiempo t , y ésta queda definida como:

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \quad (1.8)$$

La relación (1.6) es una ley y establece que la fuerza total aplicada a un fluido es igual a la razón de cambio del momento lineal.

Uno de los resultados fundamentales de la mecánica del medio continuo está dado a través del siguiente teorema.

TEOREMA DE CAUCHY

Sea (\vec{f}, \vec{b}) un sistema de fuerzas para un cuerpo \mathcal{B} entonces una condición necesaria y suficiente para que la ley de balance sea satisfecha es la existencia de un tensor \mathbb{T} (llamado tensor de esfuerzos de Cauchy) tal que

(i).- Para cada vector unitario \hat{n} , $s(\hat{n}) = \mathbb{T} \cdot \hat{n}$.

(ii).- \mathbb{T} es simétrico.

(iii).- \mathbb{T} satisface la ecuación de movimiento

$$\text{div } \mathbb{T} + \vec{b} = \rho \dot{\vec{v}}(\vec{x}, t) \quad (1.9)$$

Para su demostración rigurosa véase Gurtin [17], p.p. 101-105, respecto a la proposición (i) esta se explica físicamente con la hipótesis de Cauchy, la cual establece que:

"Se asocia un vector tensión a cada vector unitario"

La totalidad de todos los pares posibles de tales vectores $\vec{t}(\hat{n}_1)$ y \hat{n}_1 en el punto "P" definen el "Estado de tensión de ese punto". Pero no es necesario describir todos los estados basta con especificar tres planos mutuamente perpendiculares a "P", de esta forma cualquier vector tensión que pase por "P" puede ser expresado como la suma de los anteriores tensiones. Luego cada uno de estos tres vectores tensión pueden ser expresados como una combinación lineal de los vectores unitarios, de donde surgen tres componentes para cada vector y por lo tanto nueve componentes del esfuerzo $(\mathbb{T})_{ij}$ son necesarios y suficientes para definir el vector de esfuerzos.

La proposición (ii) se demuestra fácilmente de la conservación del momento angular. Para la proposición (iii) tenemos: de acuerdo a la ley de momento lineal (1.5) y sustituyendo ésta en (1.6) :

$$\int_{\partial\Omega} \vec{t}(\hat{n}) \, d\partial\Omega + \int_{\Omega} \vec{b}(\vec{x}, t) \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \dot{\vec{v}}(\vec{x}, t) \, d\Omega \quad (1.10)$$

$$\int_{\partial\Omega} \mathbb{T} \hat{n} \, d\partial\Omega + \int_{\Omega} \vec{b}(\vec{x}, t) \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \dot{\vec{v}}(\vec{x}, t) \, d\Omega \quad (1.11)$$

Haciendo uso del teorema de la divergencia para tensores tenemos:

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbb{T} + \vec{b}(\vec{x}, t) - \rho \vec{v}(\vec{x}, t)) \, d\Omega = 0 \quad (1.12)$$

Por el teorema de localización¹ la relación (1.12) establece que el integrando debe de ser cero, por lo tanto la relación (1.9) queda demostrada.

ECUACION CONSTITUTIVA

La siguiente discusión hace uso del teorema espectral, resultado fundamental del algebra lineal.

Sea $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\vec{x}, t)$ el esfuerzo en algun punto. Si $\mathbb{T} \cdot \hat{n} = \sigma \hat{n}$ con $|\hat{n}| = 1$, entonces σ es el esfuerzo principal y \hat{n} la dirección principal (de acuerdo al teorema espectral); el esfuerzo principal y la dirección principal son eigenvalores y eigenvectores de \mathbb{T} respectivamente. Luego puesto que \mathbb{T} es simétrico, éste tiene 3 direcciones mutuamente ortogonales y tres correspondientes esfuerzos principales fig (1.2).

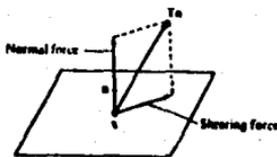


fig.(1.2) Descomposición de la fuerza

Así las fuerzas de superficie son sumadas para producir una sola fuerza de corte, de este modo $\mathbb{T} \cdot \hat{n}$ puede ser descompuesto en dos componentes:²

1

Sea ϕ un campo escalar continuo definido en \mathbb{R}^n , entonces dado $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$\phi(\vec{x}_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(\Omega_\delta)} \int_{\Omega_\delta} \phi \, dv$$

donde Ω_δ ($\delta > 0$), es una vecindad de radio δ centrado en \vec{x}_0 . Si

$$\int_{\Omega} \phi \, dv = 0 \quad \forall \Omega_\delta \subset \mathbb{R}^n \quad \text{entonces} \quad \phi = 0$$

fuerza normal
$$F_n = (\hat{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{n}) \hat{n} = (\hat{n} \hat{n}) \mathbf{T} \cdot \hat{n} \quad (1.13)$$

fuerza de corte
$$F_c = \mathbf{T} \cdot \hat{n} - (\hat{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{n}) \hat{n} = (\mathbf{I} - \hat{n} \hat{n}) \mathbf{T} \cdot \hat{n} \quad (1.14)$$

Luego \hat{n} es dirección principal si y solo si las fuerzas de superficie son cero.

Cuando un fluido se encuentra en reposo total es imposible que presente fuerzas de corte, en éste caso $\mathbf{T} \cdot \hat{n}$ es paralelo a \hat{n} . De acuerdo al teorema espectral \mathbf{T} tiene solamente un espacio característico " ν " y por tanto solamente un eigenvalor

$$\mathbf{T} = c \mathbf{I} \quad (1.15)$$

Por conveniencia llamaremos a " $c = -\pi$ ", como una cantidad escalar que llamaremos presión

$$\mathbf{T} = -\pi \mathbf{I} \quad (1.16)$$

La relación (1.15) o (1.16) físicamente significa que en cada punto material "P" que se encuentra dentro del fluido sólo se manifiestan esfuerzos puramente normales iguales entre sí para todos los elementos de superficie trazados idealmente por el puntos "P" figura (1.3).

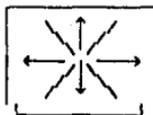


fig.(1.3) Fuerzas presentes en un fluido en reposo

Esfuerzos de este tipo sólo pueden producir contracciones o dilataciones uniformes, pero nunca distorsión del fluido.

La idea de que el esfuerzo que sufre un cuerpo se encuentra directamente relacionado con la deformación fué inicialmente enunciada por Robert Hooke (1676).

La relación (1.16) establece la forma funcional del tensor de esfuerzos, cuando el fluido se encuentra en reposo; cuando el fluido se encuentra en movimiento algunos términos deben de ser sumados a

2

El producto tensorial $\vec{a} \otimes \vec{b}$ de dos vectores es el tensor que asigna a \vec{v} el vector $(\vec{b} \cdot \vec{v}) \vec{a}$:

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \vec{v} = (\vec{b} \cdot \vec{v}) \vec{a}$$

la relación (1.15). La siguiente discusión establece que término debe de ser sumando ha ésta relación.

Considere dos puntos " \vec{x} " y " \vec{y} ", al tiempo t y $t + \Delta t$, estos son expresados en su serie de "Taylor" como sigue:

$$\vec{x}(t+\Delta t) = \vec{x}(t) + \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \Delta t + \dots \quad (1.17)$$

$$\vec{y}(t+\Delta t) = \vec{y}(t) + \frac{d\vec{y}(t)}{dt} \Delta t + \dots \quad (1.18)$$

para intervalos pequeños de tiempo estas expresiones quedan establecidas como:

$$\vec{x}(t+dt) = \vec{x}(t) + \vec{v}(x,t)dt \quad (1.19)$$

$$\vec{y}(t+dt) = \vec{y}(t) + \vec{v}(y,t)dt \quad (1.20)$$

al tiempo t la posición de \vec{x} respecto de \vec{y} ésta dada por:

$$\vec{z}(\vec{y}, \vec{x}, t) = \vec{y}(t) - \vec{x}(t) \quad (1.21)$$

al tiempo $t + \Delta t$ ésta dado por:

$$\vec{z}(y, X, t+dt) = \vec{y}(t+dt) - \vec{x}(t+dt) \quad (1.22)$$

asi la diferencia entre las posiciones de estos puntos en el intervalo dt , dará información de la deformación del cuerpo cuando éste se encuentra en movimiento:

$$\vec{z}(\vec{y}, \vec{x}, t+dt) - \vec{z}(\vec{y}, \vec{x}, t) = dt(\vec{v}(\vec{y}, t) - \vec{v}(\vec{x}, t)) \quad (1.23)$$

obsérvese que $\vec{y}(t) = \vec{x}(t) + \vec{z}(\vec{y}, \vec{x}, t)$ y sea $\vec{z}' = \vec{z}(\vec{y}, \vec{x}, t+dt)$ por lo tanto tenemos:

$$\vec{z}' = \vec{z} + dt (\vec{v}(\vec{y}, t) - \vec{v}(\vec{x}, t)) \quad (1.24)$$

pero:

$$\vec{v}(\vec{x} + \vec{z}, t) = \vec{v}(\vec{x}, t) + \vec{z} \cdot \nabla \vec{v}(\vec{x}, t) + \dots \quad (1.25)$$

Sustituyendo (1.25) en (1.24) se encuentra la siguiente relación:

$$\vec{z}' = \vec{z} + \vec{z} \cdot \nabla \vec{v}(\vec{x}, t) \quad (1.26)$$

La expresión (1.26) está multiplicada por el *gradiente* del campo de velocidades, por lo tanto una de las características que se

manifiestan cuando un fluido se encuentra en movimiento es a través del *gradiente* del campo de velocidades. Robert Hooke (1676) establece que el esfuerzo que sufre un cuerpo se encuentra directamente relacionado con la deformación; para un fluido esta deformación es establecida a través del *gradiente* del campo de velocidades. Así el término que debe de ser sumado a la relación (1.15) debe de ser de la forma $\nabla v(\vec{x}, t)$, se define:

$$L = \nabla v(\vec{x}, t) \quad (1.27)$$

Ahora bien la relación entre el tensor de esfuerzos \mathbb{T} y el gradiente de deformación L puede ser bastante compleja e involucrar algún tensor "R" en ésta relación, este tensor "R" depende de las propiedades del material o fluido en estudio y puede ser simplificado para fluidos isotrópicos.

DEFINICION

Un fluido es isotrópico cuando sus propiedades físicas no dependen de la dirección en que se observan.

Para un fluido Newtoniano se establece que la forma funcional entre el tensor de esfuerzos y el $\nabla v(\vec{x}, t)$ sea lineal

$$\mathbb{T} = -\pi \mathbb{I} + c [L] \quad (1.28)$$

esta hipótesis supone que el fluido es isotrópico y por lo tanto el tensor "R" también debe de ser isotrópico.³ De esta hipótesis y del hecho de que el fluido es incompresible tenemos que:

el tensor "R" puede ser expresado en términos de una sola constante. El siguiente teorema establece cual es la forma funcional de la transformación lineal $c [L]$ y la constante involucrada.

TEOREMA

Una condición necesaria y suficiente para que un fluido Newtoniano sea independiente del observador es que "c [L]" tome la forma:

$$c [L] = 2 \mu D \quad (1.29)$$

$$\forall L \in \{ L \text{ es tensor} \mid \text{tr } L = 0 \} \quad (1.30)$$

$$\text{donde } D = \frac{1}{2} (L + L^t) \quad (1.31)$$

donde μ es llamado el coeficiente de viscosidad dinámico y este

³ Un tensor es isotrópico cuando sus componentes en cualquier sistema de coordenadas son las mismas, como cuando se aplica una transformación ortogonal de coordenadas.

representa la proporcionalidad lineal entre el gradiente de velocidad y el esfuerzo tangencial.

Para su demostración véase Gurtin [17] (p.p. 149-151), la cual está basada principalmente en dos hechos: primero la ley de transformación del gradiente de velocidades para dos observadores diferentes, y segundo de la hipótesis física de que el fluido es isotrópico.

Por lo tanto tenemos las siguientes relaciones:

$$\nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbb{b}(\vec{x}, t) = \rho \dot{\vec{v}}(\vec{x}, t) \quad (1.32)$$

con $\mathbb{T} = -\pi \mathbb{I} + 2\mu \mathbb{D}$, substituyendo en (1.32) tenemos:

$$= -\{\pi \nabla \cdot \mathbb{I} + \mathbb{I} \cdot \nabla \pi\} + \mu \nabla \cdot \{\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^t\} \quad (1.33)$$

$$= -\nabla \pi + \mu \nabla \cdot \nabla \vec{v} + \mu \nabla \cdot (\nabla \vec{v})^t \quad (1.34)$$

$$= -\nabla \pi + \mu \nabla^2 \vec{v} + \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) = -\nabla \pi + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (1.35)$$

por lo tanto la ecuación (1.32) esta dada como:

$$\mu \nabla^2 \vec{v}(\vec{x}, t) - \nabla \pi + \mathbb{b}(\vec{x}, t) = \rho \dot{\vec{v}}(\vec{x}, t) \quad (1.36)$$

además $\dot{\vec{v}}(\vec{x}, t)$ está expresado como:

$$\dot{\vec{v}}(\vec{x}, t) = \frac{d\vec{v}(\vec{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial t} + (\vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \nabla) \vec{v}(\vec{x}, t) \quad (1.37)$$

Por lo tanto la ecuación para un fluido incompresible es:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \mu \nabla^2 \vec{v} - \nabla \pi + \mathbb{b} \quad (1.38)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$$

Ahora se define el vector de posición adimensional como:

$$\vec{x}' = \frac{\vec{x}}{L} \quad (1.39)$$

El tiempo adimensional como:

$$t' = \frac{t\nu}{L} \quad (1.40)$$

La velocidad adimensional como:

$$\vec{v}'(\vec{x}, t) = \frac{1}{v} \vec{v}(\vec{x}, t) \quad (1.41)$$

La presión sin dimensiones como:

$$\pi'(\vec{x}, t) = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho} \pi(\vec{x}, t) \quad (1.42)$$

entonces tenemos:

$$\vec{\nabla} \vec{v}' = \frac{1}{\nu} \nabla \vec{v}', \quad \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t}, \quad \nabla \pi' = \frac{1}{\nu} \frac{\nabla \pi}{\rho} \quad (1.43)$$

Así (1.39) se transforma en :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (\vec{v}' \cdot \nabla) \vec{v}' &= \frac{1}{R} \nabla^2 \vec{v}' - \nabla \pi' + \vec{b} \\ \vec{v}' \cdot \vec{v}' &= 0 \\ R &= \frac{\ell v}{\nu} \end{aligned}} \quad (1.44)$$

Donde ν es la viscosidad cinemática definida como " $\nu = \mu/\rho$ ", el parámetro R recibe el nombre de número de Reynolds y este expresa o manifiesta el comportamiento del fluido. Si R es pequeño entonces el fluido se mueve con baja velocidad, y esto caracteriza al flujo laminar. Si R es grande entonces el fluido tiene una velocidad grande y se manifiesta como un flujo turbulento.⁴

El lado izquierdo de la ecuación (1.45) representa la aceleración del fluido

$$\frac{D\vec{v}'}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (\vec{v}' \cdot \nabla) \vec{v}' \quad (1.45)$$

El primer miembro de esta relación establece el cambio con el tiempo en un punto en el espacio; al otro término se le denomina aceleración convectiva, y su interpretación física esta dada como sigue:

$$(\vec{v}' \cdot \nabla) \vec{v}' \quad (1.46)$$

En este término tenemos el producto del *gradiente* de la velocidad por la velocidad; luego *gradiente* \vec{v}' es distinto de cero si y solo si la región en donde se mueve el fluido cambia fig (1.4).

4

Para un flujo turbulento el esfuerzo y velocidad en punto son funciones del tiempo



Fig. (1.4) Aceleración convectiva

Respecto al lado derecho de la ecuación tenemos:

$$\mu \nabla^2 \vec{v} - \nabla \pi + \vec{b} \quad (1.47)$$

" \vec{b} " representa las fuerzas por unidad de volumen que son aplicadas sobre el fluido; el término " $\mu \nabla^2 \vec{v}$ " representa las fuerzas viscosas, por último " $-\nabla \pi$ " es la fuerza gradiente presión por unidad de volumen y " ρ " representa un campo escalar que manifiesta la distribución de la tensión que existe en un fluido.

Respecto a la ecuación de continuidad tenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot \vec{v}) = 0 \quad (1.48)$$

suponiendo que el fluido tiene una densidad constante ($\rho = cte$), la ecuación (1.49) toma la forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.49)$$

El flujo de un fluido incompresible newtoniano está caracterizado por dos ecuaciones suficientes y necesarias:

Continuidad

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.50)$$

Movimiento

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{\rho} \nabla^2 \vec{v} - \nabla \pi + \vec{b} \quad (1.51)$$

De la relación (1.27) tenemos que el gradiente del campo de velocidades puede ser expresado como la suma de dos tensores como sigue:

$$L = E + W \quad (1.52)$$

con

$$(E)_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad , \quad (W)_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.54) \quad (1.52)$$

Ahora E es un tensor simétrico y W es un tensor antisimétrico, un tensor antisimétrico siempre se puede expresar como una rotación véase Gurtin [17] o Frederick [9].

DEFINICION

Un fluido es rotacional si el tensor W es distinto de cero.

Además el tensor W está relacionado con el campo de velocidades a través del rotacional como: (véase Fung [10])

$$W = \nabla \times \vec{v} \quad (1.53)$$

Si $\nabla \times \vec{v}$ es cero entonces existe una función ϕ tal que $\vec{v} = \nabla \phi$.

DEFINICION

Un flujo es potencial si el campo de velocidades \vec{v} puede ser definido como el gradiente de una función escalar $\phi(x,y,z,t)$ denominada función potencial

$$\vec{v} = \nabla \times \phi \quad (1.54)$$

Cuando el fluido es incompresible solo las ecuaciones de movimiento y de continuidad son necesarias para describir el flujo, pues existen 4 incógnitas y se tienen 4 ecuaciones.

En este primer capítulo se ha presentado las ecuaciones básicas que describen a un fluido incompresible con flujo rotacional, estas son básicamente:

- a).- Conservación del momento lineal
- b).- Ecuación constitutiva para fluidos newtonianos

La deducción de las ecuaciones parte por lo tanto de principios básicos de conservación y de ecuaciones constitutivas, la forma operacional de las ecuaciones viene dado a partir del esquema matemático asignado para representar las cantidades físicas. El próximo capítulo describe que problema físico es estudiado utilizando básicamente las ecuaciones de continuidad y de movimiento.

DESCRIPCION DEL PROBLEMA FISICO

INTRODUCCION

El problema de un flujo de un fluido incompresible y viscoso que se mueve dentro de un tubo y dentro de este tubo se encuentra un cuerpo es de interés en varios campos tales como, la Hidráulica, la Biomecánica, la Agricultura, etc; la determinación del comportamiento hidrodinámico de éste sistema es extremadamente complejo, a causa del carácter no lineal de la ecuación que lo describe, así como de la geometría del cuerpo. La formulación exacta del problema involucra la forma completa de la ecuación de Navier-Stokes. Oden [25] estudia el comportamiento de un cilindro que se mueve dentro de un fluido. También en la misma referencia se describe el problema de un flujo con fronteras reactivas⁵; el modelo matemático asignado a este fenómeno físico es otra vez la ecuación completa de Navier-Stokes. Problemas con superficie libre son resueltos por Nichols [23]. Los problemas con solución exacta son pocos, por ejemplo flujos estacionarios y laminares en tubos también llamados flujos de Hagen-Poiseuille. Como una alternativa, se recurre al uso de ecuaciones numéricas, obtenidas a través de aproximaciones en diferencias finitas, o elementos finitos. Los resultados son alentadores pues se atacan problemas de flujo que dependen del tiempo, con número de Reynolds hasta de 10^2 y 10^3 . Otros métodos atacan directamente flujos potenciales, los cuales hacen uso de transformaciones conformes; algunos de los problemas abordados por éste método son para flujo subsónico en estado estable y en el caso plano, se utiliza la transformación hodográfica (Woods [36]). Una gran variedad de problemas estan descritos por Davies [6], donde trata el flujo de agua subterránea en condiciones estacionarias y no estacionarias, así como el estudio de sistemas de flujo laminar con transferencia de calor. El objetivo de éste capítulo es básicamente la descripción del problema físico, las hipótesis necesarias para considerar flujo plano y rotacional de un fluido incompresible, la linealización de la ecuación de

5

La frontera reactiva es definida como aquella superficie la cual puede moverse en respuesta a la fuerza ejercida y obedece a una ecuación de movimiento específica.

Navier-Stokes y finalmente plantear el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que describen el problema.

FLUJO EN UNA CAVIDAD RECTANGULAR

Considere un fluido viscoso confinado en una caja, en la parte superior de la caja se encuentra una placa que se mueve con una velocidad constante como es mostrado en la figura (2.1):

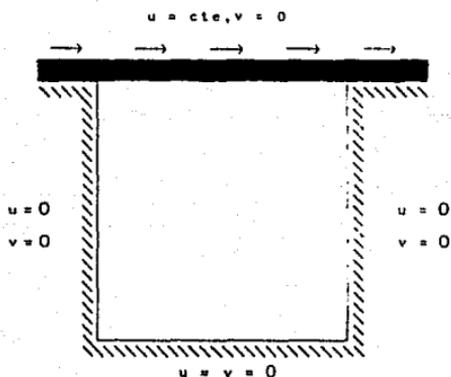


fig. (2.1) flujo en una cavidad rectangular

Como una primera aproximación al problema real, se considerará que el flujo es plano y rotacional (Hughes [18], Baker [4], Reddy [29]). La descripción del campo de velocidades y la presión está dada en términos de la ecuación de Navier-Stokes para un fluido incompresible. Como fue mencionado en el capítulo uno es suficiente con las ecuaciones de continuidad y de movimiento para describir el comportamiento del flujo; de éste modo el flujo está caracterizado por el siguiente conjunto de ecuaciones (adimensionales), con sus respectivos valores a la frontera:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= \frac{1}{R} \nabla \vec{v} - \nabla \pi + \vec{b} \\ \vec{v} \cdot \nabla &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ en } \Omega, \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}(x, y) &= \vec{v}_0 \\ t_x &= \mu \frac{\partial u}{\partial x} n_x - \pi n_x = t_{ox} \\ t_y &= \mu \frac{\partial u}{\partial y} n_y - \pi n_y = t_{oy} \end{aligned} \right\} \text{ en } \partial \Omega. \quad (2.2)$$

Suponiendo que el flujo se encuentra en estado estable tenemos:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad \forall t \quad (2.3)$$

Así la ecuación (2.1) se transforma en :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{R} \nabla^2 \vec{v} + \nabla \pi + \vec{b} &= \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \\ \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ en } \Omega, \quad (2.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_0 \\ \vec{\tau} &= \vec{\tau} \end{aligned} \right\} \text{ en } \partial \Omega, \quad (2.5)$$

El término no lineal es ignorado si se supone que R es pequeño, basta con observar lo siguiente: si se pasa el número de Reynolds a la parte derecha, si R es pequeño entonces el producto de la aceleración convectiva por el número de Reynolds puede ser ignorada respecto a los otros términos, con ésta suposición la ecuación (2.4) se transforman en :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \pi}{\partial x} &= b_x \\ -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \pi}{\partial y} &= b_y \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ en } \Omega. \quad (2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0, \quad v = v_0 \\ t_x &= t_{ox}, \quad t_y = t_{oy} \end{aligned} \right\} \text{ en } \partial \Omega. \quad (2.7)$$

Como no se ha supuesto que el flujo es potencial entonces el flujo es rotacional.

Lo que se ha hecho en este capítulo, es mostrar el problema físico, la forma en que éste es modelado matemáticamente y las suposiciones físicas que deben de ser hechas para simplificar la ecuación de

Navier-Stokes, las cuales son: flujo plano lento y rotacional, de un fluido incompresible. El siguiente paso es resolver este sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas con restricción. La ecuación (2.14) muestra dos dificultades, primero la restricción del campo de velocidades, y segundo la solución del sistema, en el siguiente capítulo se discute cual es la forma para eliminar la restricción de incompresibilidad.

PLANTEAMIENTO MATEMATICO DEL PROBLEMA

INTRODUCCION

La forma de atacar muchos de los problemas físicos en los que intervienen ecuaciones diferenciales parciales con restricción, es transformar estos a problemas de "Optimización" (Euler-Lagrange), o comúnmente llamados multiplicadores de Lagrange. En el presente trabajo se utilizó esta metodología por dos razones, primero es la forma más natural de atacar la condición de incompresibilidad, y segundo existe todo un marco teórico matemático de solución al problema continuo y discreto así como teoremas de convergencia. En este capítulo se enuncia el teorema de existencia y unicidad del problema de Stokes, la optimización del problema a través de multiplicadores de Lagrange, se discute brevemente la dificultad que existe con esta metodología, inmediatamente se pasa a la formulación de "Penalty" donde el esquema de ecuaciones resultante es más simple que el que se encuentra con multiplicadores de Lagrange, finalmente se da el teorema de existencia de la solución discreta.

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCION CONTINUA

Serán usados diferentes espacios de Sobolev; para su definición y propiedades véase Adams [1]. En esta formulación, los siguientes espacios son fundamentales. Suponga que Ω es un conjunto acotado de \mathbb{R}^2 , con frontera continua $\partial\Omega$. Se definen los espacios siguientes:

$$H^1(\Omega) = \left\{ \phi \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (3.1)$$

$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = \left\{ \phi \in H^1(\Omega), \phi = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\} \quad (3.2)$$

La siguiente discusión es solo válida para la versión lineal de la ecuación de Navier-Stokes conocida también como ecuación de "Stokes" deducida en el capítulo dos:

$$-\frac{1}{R} \nabla^2 \vec{u} + \nabla \pi = \vec{b} \quad \text{en } \Omega \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (S) \quad (3.4)$$

$$\vec{u} = \vec{u}_0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (3.5)$$

donde \vec{u} es la velocidad de las partículas materiales del fluido,

π es la presión interna del fluido,

$R(>0)$ es el número de Reynolds.

\vec{b} es la fuerza externa aplicada al fluido.

La existencia y unicidad de la solución está dada por el siguiente teorema.

TEOREMA

Si Ω es acotado y si $\vec{b} \in (H^1(\Omega))^4$ entonces (S) tiene una única solución en $(H_0^1(\Omega))^4 \times (L^2(\Omega)/\mathbb{R})$.

Para su demostración véase Temam [33] (p.p. 21-38) o Gurtin [17] (p.p. 160-162). El primero hace uso del teorema de proyección y supone que $R=1$, mientras que el segundo hace uso de un simple lema y supone $R \neq 1$.

FORMULACION VARIACIONAL DEL PROBLEMA DE STOKES EN TERMINOS DE MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Se sigue de Temam [33] que si \vec{u} es la solución de (S) entonces \vec{u} es también la solución del problema variacional lineal:

$$\text{Encontrar } \vec{u} \text{ tal que} \\ (\nabla \vec{u}, \nabla \vec{v}) = \langle \vec{b}, \vec{v} \rangle \quad \forall \vec{v} \in V_0 \quad (3.6)$$

$$\text{Donde } V_0 = \left\{ \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^4, \nabla \cdot \vec{v} = 0 \right\} \quad (3.7)$$

$$(\nabla \vec{u}, \nabla \vec{v}) = \frac{1}{R} \int_{\Omega} \nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{v} \, d\Omega = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, d\Omega \quad (3.8)$$

El conjunto V_0 tiene una restricción $\nabla \cdot \vec{v} = 0$; ésta será incorporada a la formulación variacional en términos de multiplicadores de Lagrange. Para condiciones de frontera de Dirichlet sobre el campo de velocidades, el espacio de velocidades admisible está dado por:

$$H = H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \quad (3.9)$$

la ecuación de restricción es:

$$G: H \rightarrow Q \quad \text{tal que} \quad G(\vec{u}) = \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.10)$$

$$\text{donde } Q = \left\{ \pi \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} \pi \, d\Omega = 0 \right\} \quad (3.11)$$

La formulación variacional mezclada queda expresada como:

encontrar $(\vec{u}, \pi) \in H \times Q$ tal que

$$B(\vec{v}, \vec{u}) - \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{v} \pi \, d\Omega = \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{b} \, d\Omega \quad \forall \vec{v} \in H, \quad (3.12)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \vec{u} \, d\Omega = 0 \quad \forall q \in Q, \quad (3.13)$$

donde $B(\dots)$ está definido como:

$$B(\vec{v}, \vec{u}) = \frac{1}{R} \int_{\Omega} \nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{v} \, d\Omega \quad (3.14)$$

Ahora sea λ el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción $\nabla \cdot \vec{v}$, la funcional (3.11) es escrita como:

$$J(u, \lambda) = B(u) + \langle \lambda, G(u) \rangle \quad (3.15)$$

La primera variación de ésta funcional da el problema de Euler-Lagrange (ver apéndice 2):

$$\delta J(\vec{u}, \vec{v}) + \langle \lambda, G(\vec{v}) \rangle = 0 \quad (3.16)$$

$$\langle \mu, G(\vec{u}) \rangle = 0 \quad (3.17)$$

realizando estos cálculos se encuentra:

$$-\frac{1}{R} \nabla^2 u - \frac{\partial \lambda}{\partial x} = b_x \quad (3.18)$$

$$-\frac{1}{R} \nabla^2 v - \frac{\partial \lambda}{\partial y} = b_y \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.20)$$

de las relaciones (3.18 - 3.19) se deduce que el multiplicador de Lagrange es asociado directamente con el negativo de la presión:

$$\lambda = -\pi \quad (3.21)$$

Desarrollando la relación (3.12) se encuentra lo siguiente:

$$\frac{1}{R} \int_{\Omega} \nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{v} \lambda \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{b} \, d\Omega \quad (3.22)$$

De la relación (3.22) se observa:

ninguna derivada aparece en el multiplicador de Lagrange " λ ", por lo que es suficiente para la aproximación el uso de funciones que sean cuadráticamente integrables es decir que pertenece al espacio de Lebesgue $L^2(\Omega)$; el campo de velocidades no tiene tanta suerte, éste siempre aparece afectado por una derivada, para aproximar a la

velocidad es necesario usar funciones que tengan primera derivada y que sean cuadráticamente integrables es decir que pertenecen al espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$, un conjunto grande de funciones pueden ser utilizadas para aproximar el campo de velocidades así como la presión, algunas de éstas funciones estan dadas por Huges [19] pag. 201, también en el libro de Tomasset se muestra otro conjunto⁶. Existe un método alternativo para resolver esta dificultad en base a la formulación de "Penalty" descrita en la siguiente sección.

FORMULACION VARIACIONAL DEL PROBLEMA DE STOKES EN TERMINOS DE PENALTY

Para una descripción completa del método de "Penalty" véase Reddy [29] (p.p 181-190), y Zienkiewicz [35] (p.p. 181-190); El siguiente teorema para el caso de dimensión finita establece las condiciones de convergencia:

TEOREMA

Considere el problema de minimizar una función $J(\vec{x})$ sobre un conjunto compacto \mathcal{D} sujeto a la restricción de la forma $G(\vec{x})=0$. Sean J y G^2 continuas sobre \mathcal{D} , y suponga que existe el conjunto S de puntos \vec{x} en \mathcal{D} que tienen $G(\vec{x})=0$, y no vacío, y que existe un punto \vec{x}_0 en \mathcal{D} el cual minimiza J en S . También suponga que \vec{x}_0 es el único. Si $\vec{x}(K)$ es un punto mínimo de la función aumentada

$$P(\vec{x}, K) = J(\vec{x}) + \frac{K}{2} |G(\vec{x})|^2 \quad (3.23)$$

sobre \mathcal{D} , entonces

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \vec{x}(K) = \vec{x}_0 \quad \text{y} \quad \lim_{K \rightarrow \infty} K|G(\vec{x})|^2 = 0 \quad (3.24)$$

6

- 1).- Formulación de la velocidad presión: aproximación discontinua de la presión.
- 2).- Formulación de la Presión Velocidad: aproximación continua de la presión y velocidad.
- 3).- Formulación de la Velocidad Presión Vorticidad: aproximación discontinua de la presión y velocidad.
- 4).- Formulación de la Función de Corriente Vorticidad: descomposición del problema Biharmonico.

Para su demostración véase Reddy [29] (p.p. 184) y Polyak [28].

Aquí consideraremos el mínimo de la funcional aumentada:

$$P_n(u, K) = J(u) + \frac{K_n}{2} \|G(u)\|^2 \quad (3.25)$$

La formulación de la función de "Penalty" para el problema de Stokes está dada por la siguiente funcional aumentada:

$$P_n(\vec{u}, K_n) = J(\vec{u}) + \frac{K_n}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{u})^2 d\Omega \quad (3.26)$$

Donde $J(\vec{u})$ está definido como:

$$J(\vec{u}) = \frac{1}{2} B(\vec{u}, \vec{u}) - \ell(\vec{u}) = \quad (3.27)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{R} (\nabla u)^2 - \int_{\Omega} \vec{c} \cdot \vec{u} \quad (3.28)$$

El problema variacional lineal correspondiente a (3.31) involucra encontrar $\vec{u} \in H_k^1(\Omega)$ tal que:

$$B_k(\vec{v}, \vec{u}) = (b, v) \quad \forall v \in H_k^1(\Omega) \quad (3.29)$$

donde

$$H_k^1(\Omega) = \left\{ \vec{u} \in H_0^1(\Omega) : \|\vec{u}\|_k^2 = \|\vec{u}\|_1^2 + K_n \|G(\vec{u})\|_0^2 \right\} \quad (3.30)$$

y $B_k(\vec{v}, \vec{u})$ está dado como:

$$B_k(\vec{v}, \vec{u}) = B(\vec{v}, \vec{u}) + K_n (G(\vec{v}), G(\vec{u})) \quad (3.31)$$

De igual forma como se hizo en la ecuación (3.13), se calcula la primera variación (problema de Euler-Lagrange), realizando estos calculos se encuentra:

$$-\frac{1}{R} \nabla^2 u - K_n \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \vec{u}) = b_x \quad (3.32)$$

$$-\frac{1}{R} \nabla^2 v - K_n \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \vec{u}) = b_y \quad (3.33)$$

de estas relaciones se observa inmediatamente que la presión esta dada como el negativo de la divergencia del campo de velocidades modulada por el parámetro de "Penalty"

$$p = -K_n \nabla \cdot \vec{u} \quad (3.34)$$

las relaciones (3.32) (3.33) (3.34), muestran que solamente el campo de velocidades debe de ser aproximado y estas funciones deben de pertenecer al espacio de sobolev $H^1(\Omega)$.

EXISTENCIA DE LA SOLUCION DISCRETA

El siguiente teorema da las condiciones de existencia del punto único local mínimo de P_n y la convergencia de la solución de "Penalty" a la solución verdadera, para el caso general.

TEOREMA

Si las siguientes suposiciones son válidas

1.- Existe un punto local mínimo u_0 del problema original

$$J(u_0) \leq J(u) \quad \forall u \in H_1 \quad (3.35)$$

$$G(u_0) = 0 \quad (3.36)$$

2.- La primera y segunda derivada de Gateaux de J y G existen.

3.- El operador adjunto de G esta acotado por abajo.

4.- El operador adjunto $L(u_0, \lambda_0)$ es definido positivo, definido

como:

$$L(u_0, \lambda_0) = J''(u_0) + G''\lambda_0 \quad (3.37)$$

Con estas 4 suposiciones y para un K_n suficientemente grande, existe un u_n , el cual es un punto único del mínimo local de $P_n(u, K_n)$ en una vecindad de u_0 y la siguiente estimación es válida (la cual demuestra la convergencia de la solución u_n y el multiplicador de λ_n a u_0 y λ_0 , respectivamente):

$$\|u_n - u_0\|_1 \leq \frac{c_3}{2K_n} \|\lambda\|_2 \quad (3.38)$$

$$\|K_n G(u_n) - \lambda_0\|_2 \leq \frac{c_4}{2K_n} \|\lambda\|_2 \quad (3.39)$$

Para su demostración véase Reddy [29], donde también se cita el trabajo de Polyak [28].

Basta con demostrar que los operadores tienen las características mencionadas, esto se demuestra en el trabajo de Polyak [28], pero a priori puede ser calculado el error. Considere la versión mezclada de la funcional de "Penalty":

Encuentre $(\vec{u}, p_k) \in H_k^1 \times H_0$ tal que

$$B(\vec{v}, \vec{u}_k) - (p_k, \nabla \cdot \vec{v}) = (b, \vec{v}) - (\nabla \cdot \vec{u}_k, q) = \frac{1}{k} (p, q) \quad (3.40)$$

restando a (3.40) la versión mezclada dada en (3.12) se encuentra:

$$B(\vec{v}, \vec{u} - \vec{u}_k) - (p - p_k, \nabla \cdot \vec{v}) = 0 \quad (3.41)$$

$$-(\nabla \cdot (u^{\rightarrow} - u_k^{\rightarrow}), q) = -\frac{1}{k}(p - p_k, q) - \frac{1}{k}(p, q) \quad (3.42)$$

Sea $\vec{v} = \vec{u} - \vec{u}_k$ y $q = p - p_k$ y substituyendo (3.42) en (3.41) obtenemos:

$$\|\vec{u} - \vec{u}_k\|^2 + \frac{1}{k} \|p - p_k\|^2 = \frac{1}{k} (p, p - p_k) \leq \frac{1}{k} \|p\| \|p - p_k\| \quad (3.43)$$

usando la desigualdad de polarización tenemos:

$$\|\vec{u} - \vec{u}_k\|^2 + \frac{1}{2k} \|p - p_k\|^2 \leq \frac{1}{2k} \|p\|^2 \quad (3.44)$$

De la relación (3.44) se observa que $\vec{u} - \vec{u}_k$ conforme $k \rightarrow \infty$. En este capítulo se ha dado la existencia y unicidad de la ecuación de Stokes transformándolo a un problema de optimización, primero con multiplicadores de Lagrange, enseguida con la formulación de "Penalty", en donde solamente el campo de velocidades es aproximado y la presión se calcula posteriormente con ayuda de la ecuación (3.39), con la certeza que la solución discreta converge al problema continuo, establecida por el teorema anterior; el siguiente paso ahora es aproximar el campo de velocidades por funciones polinómicas que satisfagan los teoremas de convergencia y además que sean funciones que tengan derivada y que sean cuadráticamente integrables, estas funciones son construidas en el siguiente capítulo.

FORMULACION EN TERMINOS DE
ELEMENTO FINITO

INTRODUCCION

Ahora se procede a construir los espacios de Elemento Finito para la solución de la ecuación de Stokes, así como el desarrollo de los algoritmos numéricos para posteriormente ser codificados en computadora. El método de elemento finito es una técnica para aproximar la solución a una ecuación diferencial con valores iniciales y/o de frontera. El procedimiento es dividir el dominio de solución, en pequeñas regiones de forma conveniente, como triángulos o polígonos. Sobre cada elemento se especifican coordenadas de los puntos nodales, y la ecuación diferencial es entonces aproximada. En estos puntos la ecuación diferencial original es entonces transformada en una nueva ecuación discreta de elemento finito, la cual gobierna sobre cada elemento de la partición del dominio; esta ecuación local es entonces acoplada al sistema global, produciendo un sistema algebraico. Los valores nodales de la variable dependiente son determinados por la solución de este sistema.

ESPACIO DISCRETO

La aproximación de los espacios será interna, esta aproximación se define como sigue:

DEFINICION

Sea V_h una familia de espacios vectoriales de dimensión finita con parámetro $h \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$1).- V_h \subset V \quad (4.1)$$

$$2).- \text{Sea } v_h \in V_h, v_h \rightarrow v \text{ en } V \text{ cuando } h \rightarrow 0 \quad (4.2)$$

Entre las aproximaciones internas se encuentran los siguientes métodos: Rayleigh-Ritz (Zienkiewicz [37] p.p.244-248), Bubnov-Galerkin (Reddy [29] p.p 289-296), Petrov-Galerkin (Reddy [29] p.p. 297-302), Kantorovitch (Reddy [29] p.p. 306-314), Trefftz (Reddy [29] p.p. 315-319) y por supuesto la de Elemento Finito (Baker [4] p.p 21-82). Además el método del Elemento Finito difiere de los métodos tradicionales en dos aspectos. Primero, las funciones de aproximación son polinomios algebraicos que son desarrollados usando las ideas en la teoría de Interpolación. Segundo, las

funciones de aproximación son desarrolladas en cada sub-dominio del dominio dado. Estos sub-dominios son llamados Elementos Finitos, son geoméricamente simples, y permiten una construcción sistemática de las funciones de aproximación.

— TRIANGULACION

Sea Ω un polígono acotado y abierto en \mathbb{R}^2 , y considere sobre esta región el siguiente conjunto \mathcal{T}_h que consiste de una familia finita de triángulos, llamados elementos finitos geoméricos, con las siguientes propiedades:

$$1). - \mathcal{T}_h \text{ finito } k \subset \bar{\Omega} \quad \forall k \in \mathcal{T}_h \text{ tal que. } \bigcup_{k \in \mathcal{T}_h} k = \bar{\Omega} \quad (4.3)$$

$$2). - k \text{ y } k' \in \mathcal{T}_h \quad k \neq k' \text{ entonces } k \cap k' = \emptyset \text{ y } k \cap k' = \phi \quad (4.4)$$

$$3). - h(x) = \text{la longitud del lado mayor de } k \in \mathcal{T}_h \quad (4.5)$$

$$4). - h = \max_{k \in \mathcal{T}_h} h(k) \quad (4.6)$$

$$5). - \frac{h}{\min_{k \in \mathcal{T}_h} h(k)} \leq \beta \quad \forall \mathcal{T}_h \quad (4.7)$$

En este caso $\beta = h / (\min_{k \in \mathcal{T}_h} h(k))$. Gráficamente Ω está particionada como se muestra en la fig. (4.1):

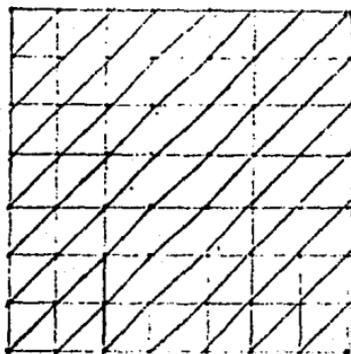


fig. (4.1) partición de la región Ω

DEFINICION DE ELEMENTO FINITO

A \mathcal{T}_h asociaremos el espacio V_h de la forma siguiente (véase Alducin y Carrera [2] y Glowinski [10]): Considere el conjunto de todos los vértices de la partición o triangulación \mathcal{T} definido como:

$$N_h = \{P_2, \dots, P_m\} \quad (4.8)$$

será llamado el conjunto de punto nodales de la triangulación.

Se define el elemento finito geométrico \hat{K} como:

$$\hat{K} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\} \quad (4.9)$$

Su correspondiente espacio local de elemento finito (P_K) como:

$$P_K = \{P: \hat{K} \rightarrow \mathbb{R} \mid P(x,y) = \alpha + \beta x + \gamma y\} \quad (4.10)$$

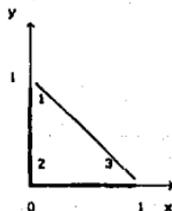
y el conjunto de grados de libertad local (Σ_E), como:

$$\Sigma_E = \{\phi_1 \in \mathcal{L}(P_E, \mathbb{R}) \mid \phi_1(w_k^e) = w_1^e(\phi_1) = \delta_{1k}, 1 \leq k \leq 3\} \quad (4.11)$$

$$\text{con } \{w_1^e\}_{i=1}^3 \text{ tal que } w_1^e \in P_K \quad (4.12)$$

El conjunto \hat{K} expresa la forma geometrica del "elemento finito" figura (4.2); el conjunto P_K expresa el polinomio que esta definido en el conjunto \hat{K} en este caso corresponde a un polinomio lineal en "x" y "y"; el conjunto Σ_E expresa cuantas funciones polinómicas pueden ser definidas en K en este caso tres polinómios solamente

pueden ser definidos en V_h y P_h .



fig(4.2) Elemento finito geométrico de referencia
con 3 grados de libertad

Estas funciones se construyen siguiendo los pasos dados en (4.9); las funciones de interpolación quedan establecidas como:

$$\phi_1^e = \frac{1}{2A} (\alpha_1^e x + \beta_1^e y) \quad ; \quad i=1,2,3 \quad (4.13)$$

$$\alpha_i^e = x_j^e - x_k^e \quad ; \quad \beta_i^e = y_j^e - y_k^e \quad ; \quad \alpha_1^e = x_2^e - x_3^e \quad (4.14)$$

$$i, j, k = 1, 2, 3 \quad y \quad i \neq j \neq k$$

con:

$$P_1(x, y) = \sum_{i=1}^3 u_i^e \phi_1^e(x, y) \quad (4.15) \quad (4.15)$$

estas funciones son derivables e integrables sobre cada triángulo por lo tanto tenemos:

$$V_n = \{ P_e \}_{e=1}^E \in H^1(\Omega) = V \quad (4.16)$$

Por lo tanto esta es una aproximación interna.

MATRIZ DE STOKES

Ahora se aproximará el campo de velocidades por cada elemento "e" como fue encontrado en (4.1) para cada componente:

$$u_e = \sum_{i=1}^3 u_i^e \phi_1^e \quad ; \quad v_e = \sum_{i=1}^3 v_i^e \phi_1^e \quad (4.17)$$

Substituyendo (4.11) en (3.26) se encuentra:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^e \\ v^e \end{bmatrix} = f^e \quad (4.18)$$

Donde

$$K^e = \begin{bmatrix} \left[K_{11}^e \right] & \left[K_{12}^e \right] \\ \left[K_{21}^e \right] & \left[K_{22}^e \right] \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$u^e = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} U^e \\ V^e \end{bmatrix} \end{bmatrix}; \quad f^e = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} F^{1e} \\ F^{2e} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Y estos están definidos como:

$$\begin{bmatrix} K^{11e} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{R} + \gamma \right) \begin{bmatrix} S^{11e} \end{bmatrix} + \frac{1}{R} \begin{bmatrix} S^{22e} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\begin{bmatrix} K^{22e} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{R} + \gamma \right) \begin{bmatrix} S^{22e} \end{bmatrix} + \frac{1}{P} \begin{bmatrix} S^{11e} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\begin{bmatrix} K^{12e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{12e} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\begin{bmatrix} K^{21e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^{12e} \end{bmatrix}^t \quad (4.24)$$

y cada término está dado por:

$$S_{1j}^{11e} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial x} d\Omega^e; \quad S_{1j}^{12e} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial y} d\Omega^e \quad (4.25)$$

$$S_{1j}^{22e} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial y} d\Omega^e \quad (4.26)$$

$$F_1^{1e} = \int_{\Omega^e} b_x^e \phi_1^e d\Omega^e + \oint_{\partial\Omega^e} t_x \phi_1^e d\partial\Omega^e - \sum_{l=n+1}^N K_{1j}^{11} u_j^x - \sum_{l=n+1}^N K_{1j}^{12} u_j^y \quad (4.27)$$

$$F_1^{2e} = \int_{\Omega^e} b_y^e \phi_1^e d\Omega^e + \oint_{\partial\Omega^e} t_y \phi_1^e d\partial\Omega^e - \sum_{l=n+1}^N K_{1j}^{21} u_j^x - \sum_{l=n+1}^N K_{1j}^{22} u_j^y \quad (4.28)$$

Esta matriz es simétrica y definida positiva, (Reddy [29]).

O también, en términos de la formulación variacional para un elemento finito geométrico Ω^e , tenemos:

$$B_e(v_e, u_e) = \ell_e(v_e) \quad (4.29)$$

donde cada término está dado como:

$$B_e(\phi_i^e, \phi_j^e) = K_{ij}^e \quad \text{y} \quad \ell_e(v_e) = F_1^e, \quad (4.30)$$

Luego la formulación variacional global es la suma de las formulaciones variacionales locales:

$$B(u_h, v_h) - \ell(v_h) = \sum_{e=1}^E \left[B_e(u_e, v_e) - \ell(v_e) \right] = 0, \quad (4.31)$$

Por lo tanto la ecuación (4.12) toma la forma:

$$\sum_{e=1}^E \left[K_e^{u^e} \right] = \sum_{e=1}^E F_e^e, \quad (4.32)$$

Y la matriz global total queda expresada como:

$$\begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} \\ K^{21} & K^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{F}^u \\ \vec{F}^v \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

las sub-matrices K^{11} , K^{12} , K^{21} , K^{22} , son de dimensión $N \times N$, por lo tanto la matriz global es de dimensión $2N \times 2N$, donde N es el número de puntos nodales para el campo de velocidades.

La evaluación de los términos del (4.25-4.28), con ayuda de las relaciones (4.13) y (4.14), las matrices quedan expresadas como:

$$K_{ij}^{11e} = \frac{1}{4A} \left[\left(\frac{1}{R} + \gamma \right) \beta_i^e \beta_j^e + \mu \gamma_i^e \gamma_j^e \right], \quad (4.34)$$

$$K_{ij}^{22e} = \frac{1}{4A} \left[\left(\frac{1}{R} + \gamma \right) \gamma_i^e \gamma_j^e + \mu \beta_i^e \beta_j^e \right], \quad (4.35)$$

$$K_{ij}^{12e} = \frac{1}{4A} \left[\beta_i^e \gamma_j^e \right], \quad (4.36)$$

Donde " R " es el número de Reynolds y " γ " es el parámetro de "penalty". En este capítulo se ha dado la metodología o técnica de construcción de las funciones de interpolación para aproximar el campo de velocidades, metodología conocida con el nombre de "Elemento Finito". Se ha transformado la ecuación diferencial parcial a un problema simplemente algebraico, el objetivo central ahora es construir un programa de cómputo que realice la construcción de la matriz automáticamente; conforme la dimensión de esta matriz sea mayor, mejor será la aproximación al caso continuo.

el programa está explicado en el apéndice 1, el siguiente capítulo muestra los resultados encontrados con este programa.

ANALISIS DE RESULTADOS

INTRODUCCION

El modelo computacional fue desarrollado inicialmente para resolver la ecuación de Poisson con diferentes valores a la frontera y diferentes funciones de prueba. Se procedió a buscar diferentes algoritmos, que intenta resolver el problema de Stokes, siempre basados éstos en el algoritmo de Dirichlet de donde se analizaban los resultados numéricos encontrados y se comparaban con el modelo físico. Se usó el algoritmo de "Penalty", éste último no utiliza el algoritmo de Dirichlet pero conservaba una estructura similar al anterior. Inicialmente se presentan algunos resultados matemáticos como: numeración de los nodos de la malla así como de sus elementos, se presenta la estructura de la matriz de Stokes para diferentes numeraciones de malla; enseguida se discute y explican las gráficas del campo de velocidades así como la presión para los problemas físicos estudiados en este trabajo. Enseguida se discute el comportamiento del flujo en una cavidad cuadrada con diferentes fuerzas de cuerpo aplicadas a la cavidad en diferentes direcciones y con diferentes valores. Finalmente se estudia el comportamiento del flujo en la cavidad cuadrada con diferentes números de Reynolds.

MODELO FISICO I

FLUJO EN UN POZO CUADRADO BIDIMENSIONAL

El primer problema analizado corresponde físicamente al flujo laminar de un fluido en una cavidad cuadrada, con coeficiente de viscosidad $\mu = 0.001$; la descripción fue dada en el capítulo 2. El modelo matemático y lineal correspondiente está dado por las ecuaciones (2.14), con condiciones a la frontera (2.15). La fig.(5.1) muestra la partición por elemento finito de la región en donde se mueve el fluido así como la numeración de los elementos:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67
68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111
112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133
134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155
156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177
178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199
200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221
222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243
244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265

fig.(5.1) partición de la región de interes

Antes de pasar a los resultados físicos se analizan algunos aspectos matemáticos, como son la numeración de la malla, en la fig.(5.2) se muestra la numeración siguiendo un algoritmo de espiral, la matriz resultante se muestra en la fig. (5.3) de banda de la matriz crece conforme la partición de la malla es más grande; ahora utilizando otra numeración diferente fig. (5.4) para ésta numeración se encuentra la siguiente matriz fig. (5.5): Como es mostrado en esta última matriz el ancho de banda disminuye, y es un echo que la numeración de los nodos de la partición esten relacionados directamente con el ancho de banda de la matriz, el ancho de banda de la matriz es entonces definido como la mínima diferencia que existe entre dos nodos contiguos.

Los datos necesarios para arrancar el programa son básicamente dos: primero la partición de la malla y segundo los valores a la frontera estos son mostrados en la fig. (5.6):

133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144
134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145
135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146
136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147
137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148
138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149
139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152
142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153
143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154
144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155
145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156
146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157
147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158
148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159
149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162
152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163
153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164
154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165
155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166
156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167
157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168
158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169
159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172

Fig. (5.4) Numeración de la malla

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672	673	674	675	676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768	769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800	801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928	929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

Fig. (5.5) Matriz de Stokes

En lo referente a las variables físicas tenemos los siguientes resultados para una velocidad de la placa de 0.1 y una viscosidad del fluido de 0.01. La solución discreta para el campo de velocidades está descrita en las figuras [5.1-5.4]. Se ha supuesto inicialmente que las fuerzas de cuerpo son cero, posteriormente se analizará el caso en que estas fuerzas son distintas de cero. Esta primera solución muestra que el algoritmo numérico es estable en lo referente a la partición de la malla. En la parte superior de la cavidad solo hay velocidad horizontal del flujo, y aumenta conforme se aproxima a la placa, en la parte inferior y lateral (izquierda y derecha de la cavidad) la velocidad del flujo disminuye conforme se aproxima a la frontera de la cavidad, este evento esta de acuerdo con el hecho experimental establecido de que un fluido se adhiere y alcanza la velocidad del contorno. el hecho de que la velocidad del flujo disminuya conforme se aproxima a la parte central superior está explicado con la conservación del momento angular y también de los efectos de la viscosidad del fluido. Otra de las características de los resultados numéricos para el campo de velocidades es: la total simetría del flujo respecto a una línea vertical que pasa por el centro de la cavidad (para bajas velocidades). Respecto a las líneas de flujo estas son solución de la ecuación diferencial

$$\dot{\vec{s}}(t) = V(\vec{s}(t), t) \quad (5.1)$$

con

$$\vec{s}(t) = \vec{x}(t) \quad (5.2)$$

basta con resolver esta ecuación diferencial para encontrar las líneas de flujo, aquí solamente mostramos los resultados encontrados por Hughes [18] fig [5.6], en las cuales se muestra un campo vectorial simétrico y unas líneas de flujo simétricas.

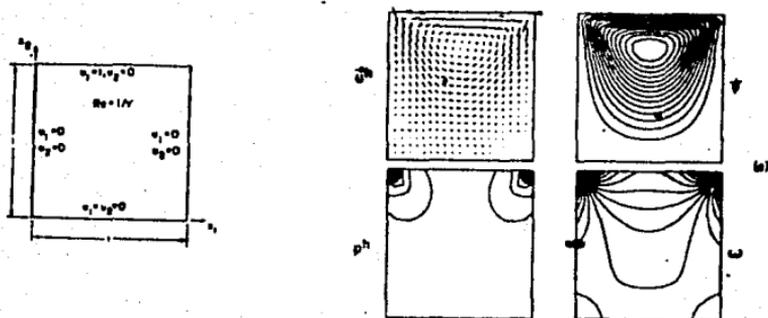
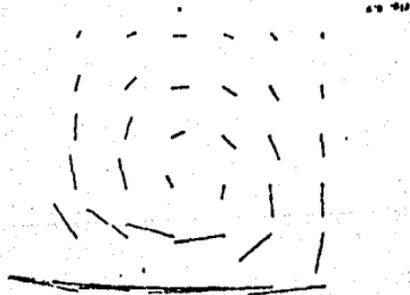


Figure 5.6: Driven cavity flow steady-state solutions, finite element penalty algorithm using P_1^* , Hughes et al. (1979).

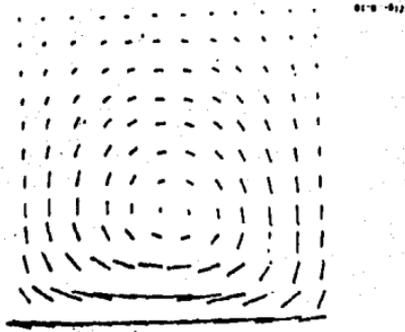
Distribución del campo de velocidades para el flujo en una cavidad cuadrada, con $\beta = 0.001$, $N = 64$, $ReE = 102$



Distribución del campo de velocidades para el flujo en una cavidad cuadrada, con $\beta = 0.001$, $N = 32$, $ReE = 98$



Distribución del campo de velocidades para el flujo en una cavidad cuadrada, con $\beta = 0.001$, $N = 164$, $ReE = 328$



Distribución del campo de velocidades para el flujo en una cavidad cuadrada, con $\beta = 0.001$, $N = 100$, $ReE = 322$

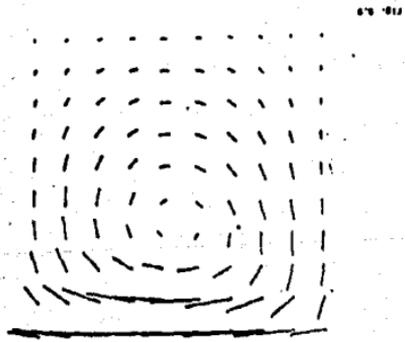




Fig. 4.7

Distribución del campo de velocidades para el flujo en una cavidad cuadrada, con $\mu = 0.001$, $N = 36$, MLE = 92.

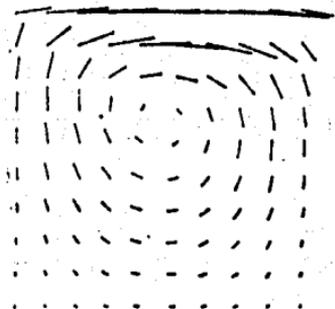


Fig. 4.9

Distribución del campo de velocidades para el flujo en una cavidad cuadrada, con $\mu = 0.001$, $N = 100$, MLE = 242.

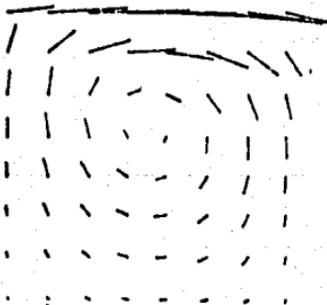


Fig. 4.8

Distribución del campo de velocidades para el flujo en una cavidad cuadrada, con $\mu = 0.001$, $N = 66$, MLE = 162.

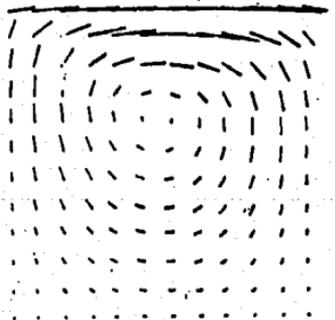


Fig. 4.10

Distribución del campo de velocidades para el flujo en una cavidad cuadrada, con $\mu = 0.001$, $N = 166$, MLE = 320.

Para realizar el cálculo de la presión hay que recordar que está dada como:

$$\pi = -\lambda \nabla \cdot \vec{u} \quad (5.11)$$

lo que implica que donde exista un mayor cambio en la velocidad existirá una menor presión que en principio es negativa, resultado que está de acuerdo con el teorema de "Bernoulli". En este punto cabe mencionar que el método produce presiones negativas pero las gráficas de la presión pueden ser interpretadas fácilmente.

Para realizar el cálculo de la divergencia del campo de velocidades, se usó una rutina de la biblioteca del "IMSL", que calcula derivadas parciales de funciones escalares, también hay que hacer notar que para éste cálculo es necesario incluir las condiciones a la frontera del campo de velocidades. En las figuras (5.12-5.18) se muestran las curvas de nivel y las superficies generadas por el campo de velocidades calculadas, la fig (5.12) muestra una aproximación muy mala del campo de presiones, la figuras (5.14, 5.16) la aproximación es mejor pero en estas gráficas se muestra dos puntos en donde la presión aumenta bruscamente, región que corresponde a las dos esquinas superiores de la cavidad. Sin embargo en la figura (5.18) la aproximación es mejor que las anteriores interpolaciones, los dos puntos disminuyen significativamente de tamaño. En la parte superior la presión disminuye, y luego esta disminuye con mayor velocidad, zona en donde el fluido alcanza la velocidad del contorno, también existen dos zonas en donde la presión disminuye, y estas corresponde a las zonas laterales. Como se observa de la anterior discusión para el cálculo de la presión esta se aproxima mejor cuando la partición de la malla es más fina, es decir cuando se tiene mayor información del campo de velocidades.

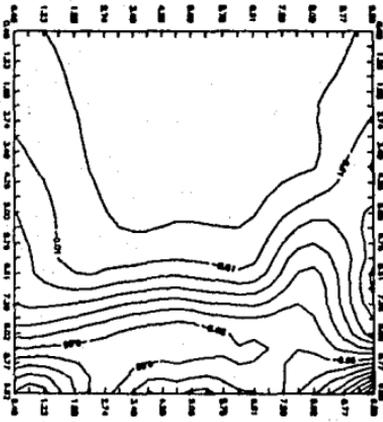


fig. 5.11

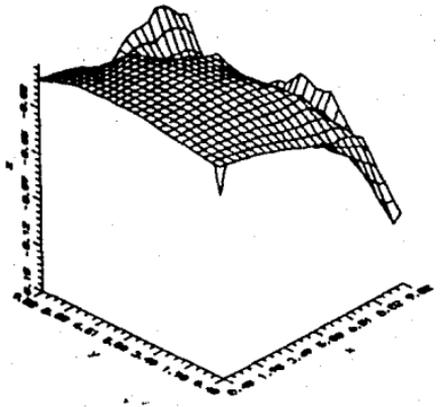


fig. 5.12 ,

Distribución del campo de presiones para el flujo en una cavidad cuadrada, con $\mu = 0.001$, $N = 36$, $NELE = 98$.

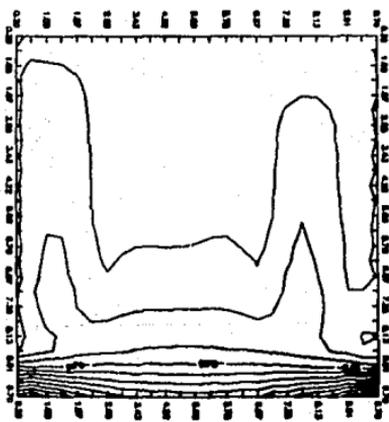


fig. 5.13

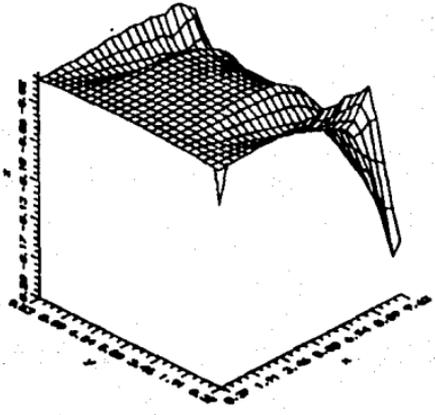


fig. 5.14

Distribución del campo de presiones para el flujo en una cavidad cuadrada, con $\mu = 0.001$, $N = 64$, $NELE = 162$

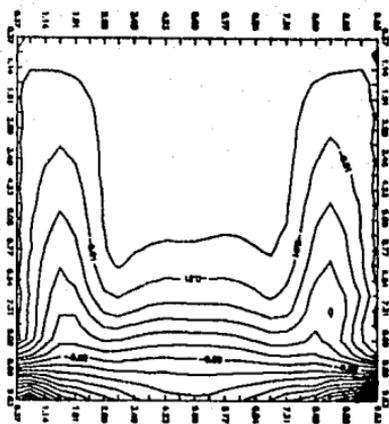


fig. 5.15

Distribución del campo de presiones para el flujo en una cavidad cuadrada, con $\mu = 0.001$, $N = 100$, $NELE = 242$.

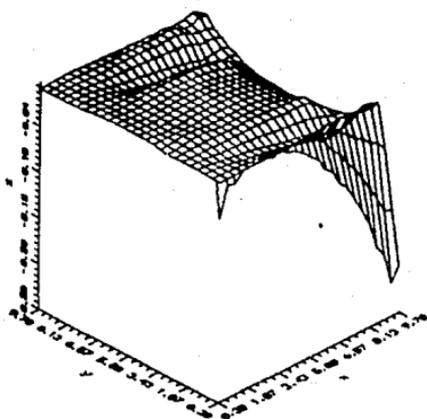


fig. 5.16

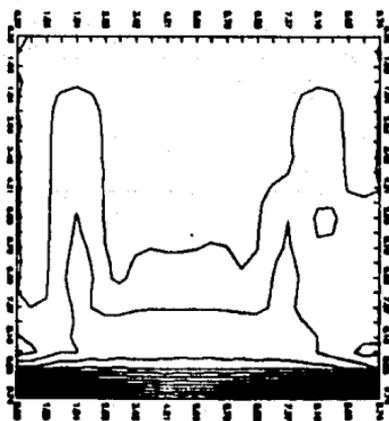


fig. 5.17

Distribución del campo de presiones para el flujo en una cavidad cuadrada, con $\mu = 0.001$, $N = 144$, $NELE = 338$.

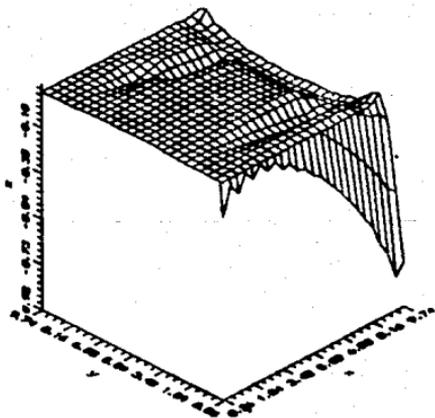


fig. 5.18

En seguida se estudió el comportamiento numérico del modelo cuando se aumenta la velocidad de la placa, las figuras (5.19), (5.20) muestran el campo de velocidades para los casos de una velocidad de 0.9 y de 1.1, para un fluido viscoso de 0.001, se usó una partición de malla de 10×10 , estos resultados muestran que el flujo deja de ser simétrico, la velocidad es mayor en la parte derecha respecto a la izquierda, esto se debe claramente a que la placa se mueve con mayor velocidad. Las gráficas de la presión figuras (5.22), (5.24) muestran que se corren hacia la parte derecha, el corrimiento es mayor conforme la velocidad es mayor. Ahora la velocidad de la placa no puede ser muy alta porque el fenómeno deja de ser lineal y la ecuación que se resolvió es lineal.

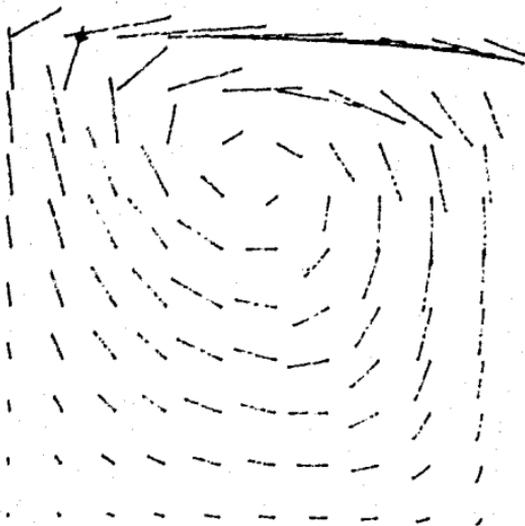


fig. 5.19

Distribución del campo de velocidades para el flujo en una cavidad cuadrada, con $\mu = 0.001$, $N = 100$, $NELE = 242$, $v = 0.9$.

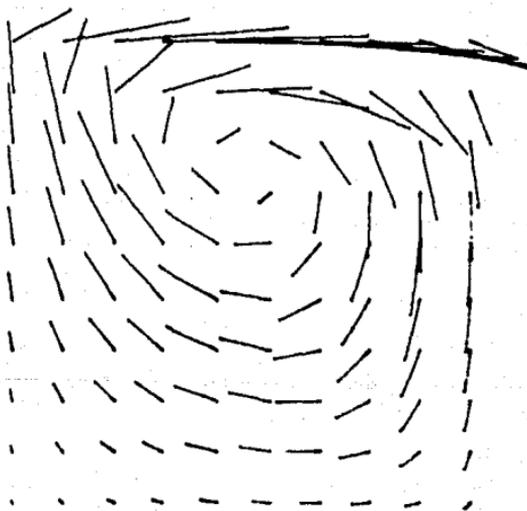


fig. 5.20

Distribución del campo de velocidades para el flujo en una cavidad cuadrada, con $\mu = 0.001$, $N = 100$, $NELE = 242$, $v = 1.1$.

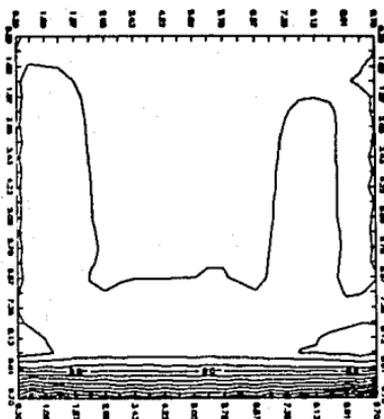


fig. 5.21 Distribución del campo de presiones para el flujo en una cavidad cuadrada, con $\mu = 0.001$, $N = 100$, $NELE = 242$, $v = 1.1$.

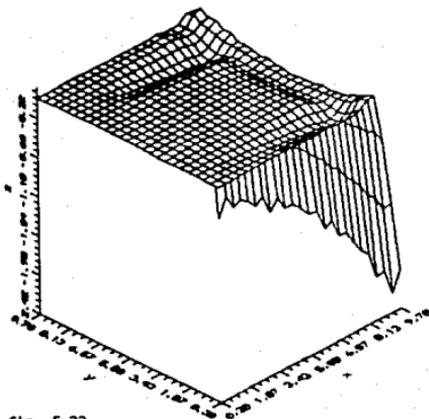


fig. 5.22

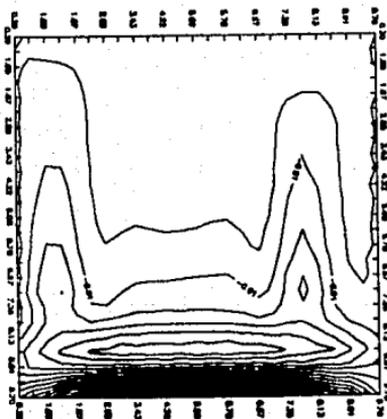


fig. 5.23 Distribución del campo de presiones para el flujo en una cavidad cuadrada, con $\mu = 0.001$, $N = 100$, $NELE = 242$, $v = 0.9$.

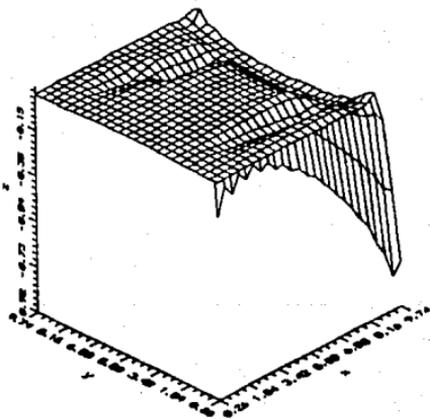


fig. 5.24

En seguida se estudió el comportamiento numérico del algoritmo computacional para diferentes fluidos viscoso, las figuras (5.25-5.27) muestran el campo de velocidades para fluidos con viscosidad de 0.001, 1.0, 10.0, conforme el fluido es más viscoso este se adhiere a la pared superior, en tanto que la parte inferior se mueve con menor velocidad, éste evento como ya fue mencionado anteriormente está de acuerdo con el hecho experimental de que el fluido se adhiere y alcanza la velocidad del contorno. Las gráficas de la presión se aprecian en las figuras (5.29), (5.31), (5.33), muestran el comportamiento de la presión, cuando el fluido es más viscoso las zonas laterales de la cavidad en donde la presión disminuye prácticamente desaparecen o estas están atenuadas. Comparando estas tres gráficas se observa que la presión en el contorno que corresponde al movimiento de la placa, el fluido que tiene mayor viscosidad tiene menor presión comparado con el fluido que tiene menor viscosidad.

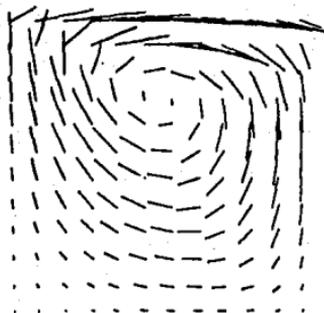


fig. 5.25 Descripción del campo de velocidades para el flujo en una cavidad cuadrada, con $\mu=0.01$, $N=144$, $NELLE=338$



fig. 5.26 Descripción del campo de velocidades para el flujo en una cavidad cuadrada, con $\mu=1.0$, $N=144$, $NELLE=338$



fig. 5.27 Descripción del campo de velocidades para el flujo en una cavidad cuadrada, con $\mu=10.0$, $N=144$, $NELLE=338$

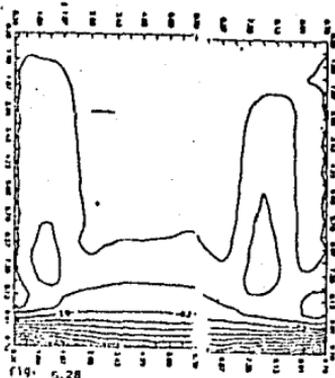


fig. 5.28

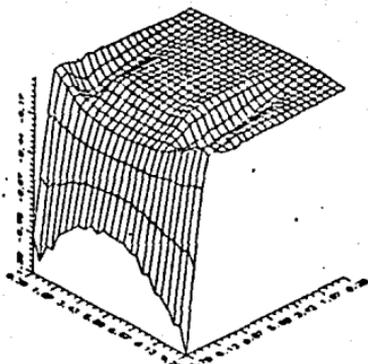


fig. 5.29

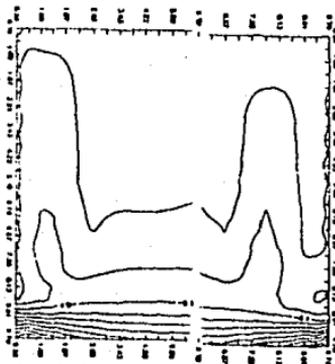


fig. 5.30

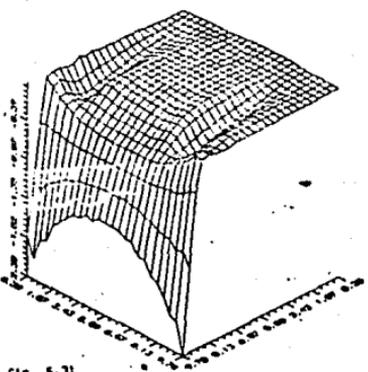


fig. 5.31



fig. 5.32

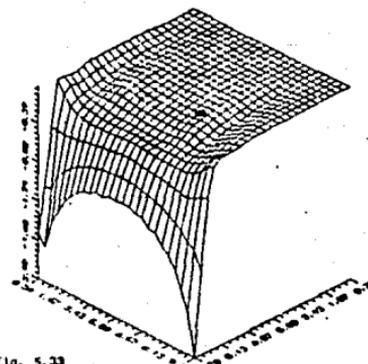


fig. 5.33

Distribución del campo de presiones para el flujo en una cavidad cuadrada, con $\mu = 0.001, 0.01, 10.0$ respectivamente, $N = 100$, $NELE = 338$.

MODELO FISICO II
FLUJO EN UNA CAVIDAD CUADRADA CON DOS PLACAS Y
DIFERENTES VALORES A LA FRONTERA

El algoritmo funcionó y fue probado inicialmente para el problema de flujo en una cavidad cuadrada. Ahora se trata de describir el campo de velocidades, así como la presión que se formará en una sección cuadrada, con dos placas tanto en la parte superior como en la parte inferior, como es mostrado en la siguiente figura [5.34]

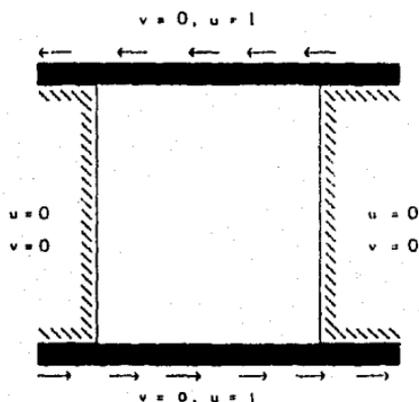


fig. (5.34) flujo en una cavidad rectangular

Este fenómeno físico, nuevamente, está modelado matemáticamente por la ecuación (2.14) suponiendo que la velocidad de las placas es pequeña, el fluido es incompresible con flujo plano lento y rotacional con geometría constante, con las siguientes condiciones a la frontera:

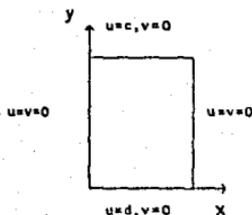


fig (5.35) Valores a la frontera del problema de Stokes

En términos de u y v quedan descritas por:

$$\begin{aligned}u(x,y) &= c \quad \text{en } y = 0, 0 \leq x \leq 1 \\u(x,y) &= 0 \quad \text{en } x = 0, 0 \leq y \leq 1 \\u(x,y) &= 0 \quad \text{en } x = 1, 0 \leq y \leq 1 \\u(x,y) &= d \quad \text{en } y = 1, 0 \leq x \leq 1 \\v(x,y) &= 0 \quad \text{en } y = 0, 0 \leq x \leq 1 \\v(x,y) &= 0 \quad \text{en } x = 0, 0 \leq y \leq 1 \\v(x,y) &= 0 \quad \text{en } x = 1, 0 \leq y \leq 1 \\v(x,y) &= 0 \quad \text{en } y = 1, 0 \leq x \leq 1\end{aligned} \tag{5.1}$$

También en este caso las fuerzas de cuerpo han sido ignoradas, nuevamente, los resultados numéricos, mostrados en las fig. (5.36-5.39), la velocidad de ambas placas es de 0.1, en estas cuatro gráficas se muestra que el flujo es totalmente simétrico, cuando la velocidad de una de las placas aumenta (0.2) como es mostrado en las figuras (5.40-5.43) el flujo deja de ser simétrico y se mueve con mayor velocidad en la región en donde la placa tiene mayor velocidad, las figuras (5.44-5.47) muestran el comportamiento del flujo cuando la velocidad de una de las placas es mayor (0.5), las figuras (5.39), (5.43), (5.47) describen con mayor precisión el comportamiento del flujo. Las gráficas del campo de presiones figuras (5.49) (5.51) (5.53) muestran claramente que las regiones en donde existe una mayor velocidad existe una menor presión, estas zonas corresponde a las regiones en donde se mueven las placas y a las regiones laterales (derecha e izquierda). En la figura (5.49) la gráfica de la presión es totalmente simétrica, esta simetría deja de existir en las figuras (5.51) y (5.53) pues corresponde a campos de velocidades no simétricos.

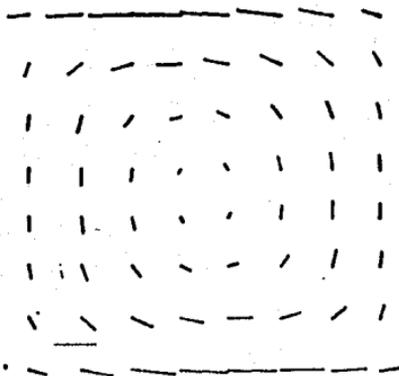
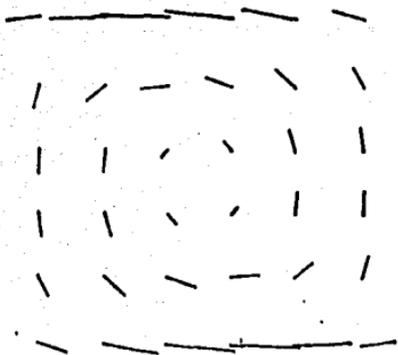


fig. 5.36 Descripción del campo de velocidades para el problema II con $\mu=0.001$, $N=64$, $NELS=162$

fig. 5.37 Descripción del campo de velocidades para el problema II con $\mu=0.001$, $N=100$, $NELS=242$

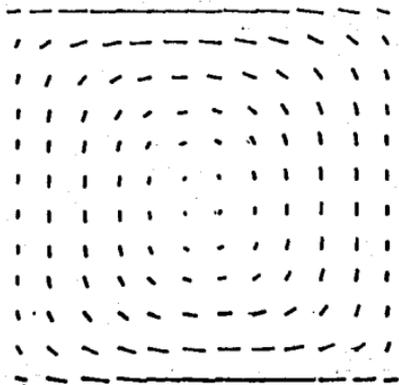
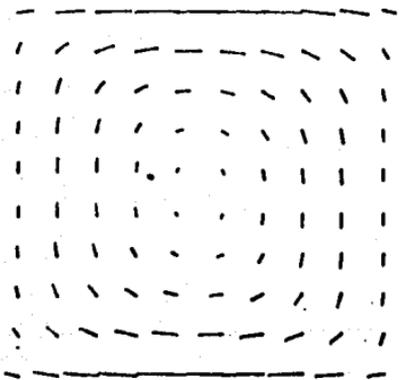


fig. 5.38 Descripción del campo de velocidades para el problema II con $\mu=0.001$, $N=144$, $NELS=328$

fig. 5.39 Descripción del campo de velocidades para el problema II con $\mu=0.001$, $N=196$, $NELS=498$

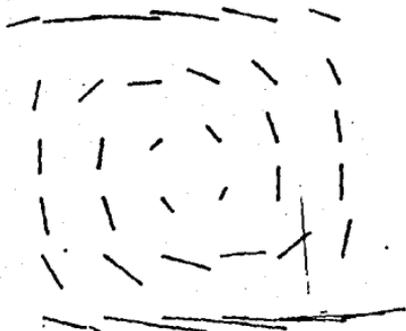


fig. 5.40 Descripción del campo de velocidades para el problema II con $u_x = 2.0$, en $y=1$, $u_x = 1.0$ en $y=0$, $\mu=0.001$, $N=24$, NLE=98

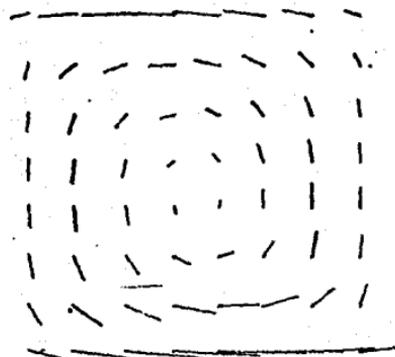


fig. 5.41 Descripción del campo de velocidades para el problema II, con $u_x = 2.0$, en $y=1$, $u_x = 1.0$ en $y=0$, $\mu=0$, $N=64$, NLE=162

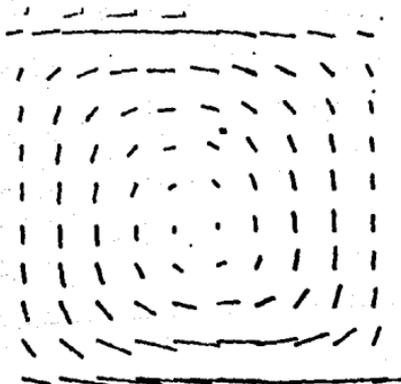


fig. 5.42 Descripción del campo de velocidades para el problema II con $u_x = 2.0$, en $y=1$, $u_x = 1.0$ en $y=0$, $\mu=0.001$, $N=100$, NLE=342

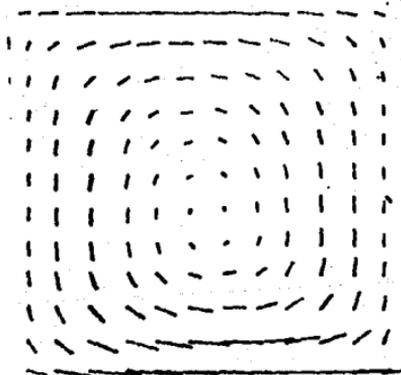


fig. 5.43 Descripción del campo de velocidades para el problema II con $u_x = 2.0$, en $y=1$, $u_x = 1.0$ en $y=0$, $\mu=0$, $N=144$, NLE=338



fig. 5.44 Descripción del campo de velocidades para el problema II; con $u_x = 5.0$, en $y=1$, $u_x = 1.0$ en $y=0$, $\mu=0.001$, $N=30$, $NELD=88$

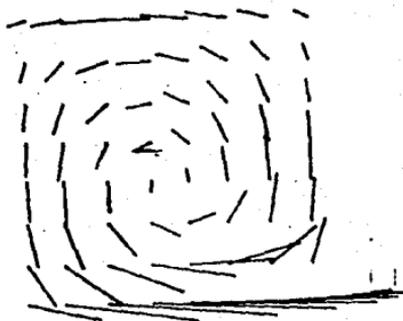


fig. 5.45 Descripción del campo de velocidades para el problema II con $u_x = 5.0$, en $y=1$, $u_x = 1.0$ en $y=0$, $\mu=0.001$, $N=84$, $NELD=182$

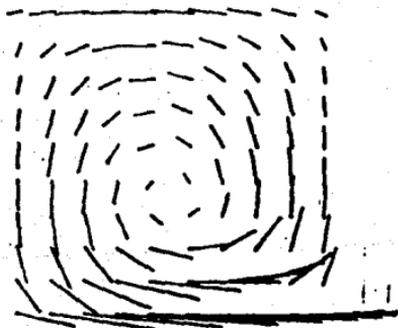


fig. 5.46 Descripción del campo de velocidades para el problema II con $u_x = 5.0$, en $y=1$, $u_x = 1.0$ en $y=0$, $\mu=0.001$, $N=100$, $NELD=348$

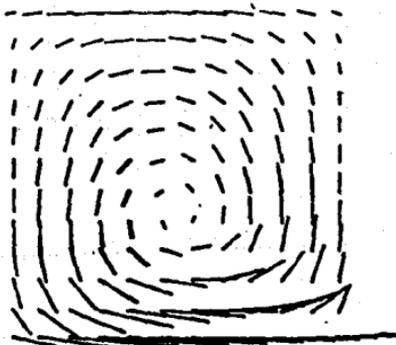


fig. 5.47 Descripción del campo de velocidades para el problema II con $u_x = 5.0$, en $y=1$, $u_x = 1.0$ en $y=0$, $\mu=0.001$, $N=144$, $NELD=328$

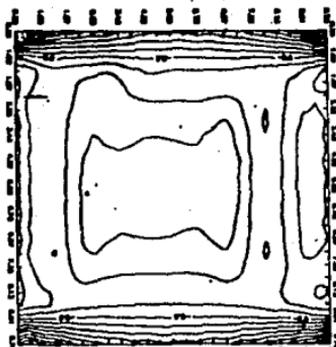


Fig. 5.48

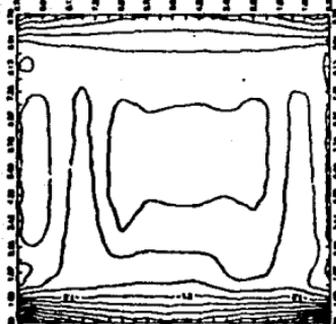


Fig. 5.50

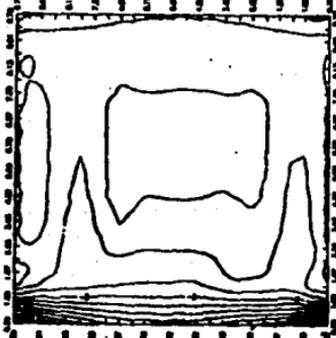


Fig. 5.52

Distribución de la presión para el problema II con $\mu = 0.001$, $N=100$, $NELE=338$, para los siguientes casos:

- a). - $u_x = 1.0$ en $y=1$; $u_x = 1.0$ en $y=1$
- a). - $u_x = 5.0$ en $y=1$; $u_x = 1.0$ en $y=1$
- a). - $u_x = 2.0$ en $y=1$; $u_x = 1.0$ en $y=1$

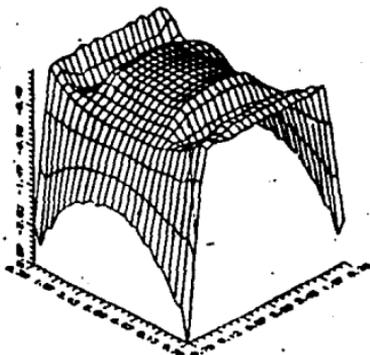


Fig. 5.49

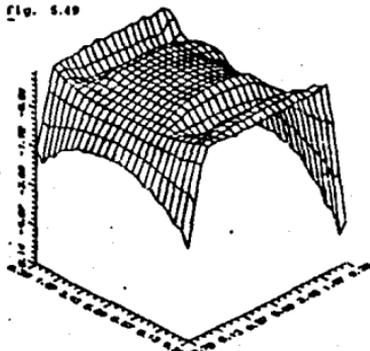


Fig. 5.51

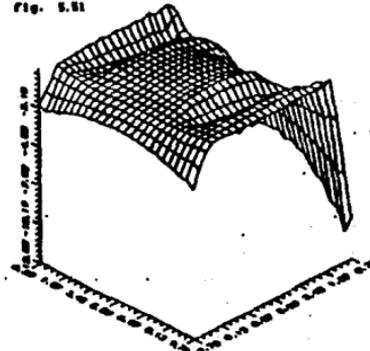


Fig. 5.53

MODELO FISICO III

FLUJO EN UN HUECO BIDIMENSIONAL CUADRADO

Los anteriores problemas tienen solamente condiciones a la frontera, para el campo de velocidades en la dirección horizontal. Ahora se procede a introducir condiciones a la frontera, para el campo de velocidades en la dirección vertical. El fenómeno físico en estudio es el correspondiente al flujo en una cavidad cuadrada, con dos placas que se mueven en la dirección vertical y horizontal, como se muestra en la figura (5.54), se supondrá que el fluido es incompresible con flujo plano, rotacional y lento con geometría constante:

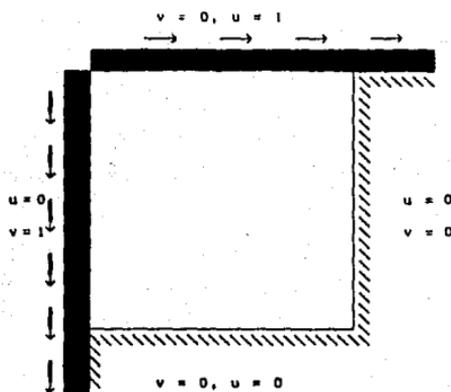


fig. (5.54) flujo en una cavidad rectangular

El problema matemático está descrito por la ecuación (2.14), con la siguiente condición a la frontera:

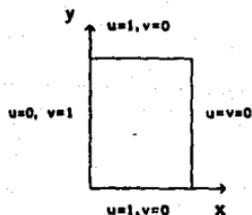


fig (5.55) Valores a la frontera del problema de Stokes

En términos de u y v queda establecido como:

$$\begin{aligned}u(x,y) &= 0 \text{ en } y = 0, 0 \leq x \leq 1 \\u(x,y) &= 0 \text{ en } x = 0, 0 \leq y \leq 1 \\u(x,y) &= 0 \text{ en } x = 1, 0 \leq y \leq 1 \\u(x,y) &= 1 \text{ en } y = 1, 0 \leq x \leq 1 \\v(x,y) &= 0 \text{ en } y = 0, 0 \leq x \leq 1 \\v(x,y) &= 1 \text{ en } x = 0, 0 \leq y \leq 1 \\v(x,y) &= 0 \text{ en } x = 1, 0 \leq y \leq 1 \\v(x,y) &= 0 \text{ en } y = 1, 0 \leq x \leq 1\end{aligned} \tag{5.4}$$

Los resultados numéricos para el campo de velocidades están dados en las fig. [5.56-5.58], para fluidos con viscosidad de 0.001, 0.5, 1.0, en la primer figura se observa que el flujo es rotacional en las siguientes dos figuras, el flujo deja de ser rotacional, y nuevamente los resultados numéricos para el campo de velocidades establece la característica que el fluido alcanza la velocidad del contorno. La gráfica de la presión no es muy buena para el caso en que el fluido tiene baja viscosidad, pues en la región diagonal de la cavidad no muestra una disminución de la presión, sin embargo cuando el fluido es más viscoso la descripción del campo de velocidades es mejor, esta disminuye en las regiones en donde el flujo tiene mayor velocidad.

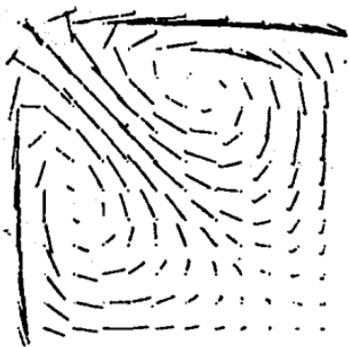


fig. 5.56 Descripción del campo de velocidades para el problema IV con $\mu=0.01$, $N=144$, $NEL=338$

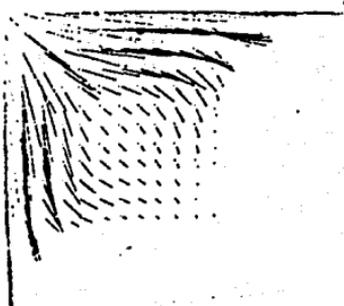


fig. 5.57 Descripción del campo de velocidades para el problema IV con $\mu=0.5$, $N=144$, $NEL=338$

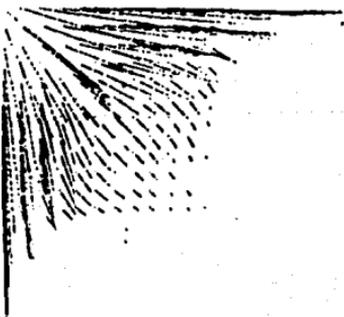


fig. 5.58 Descripción del campo de velocidades para el problema III con $\mu=1.0$, $N=144$, $NEL=338$

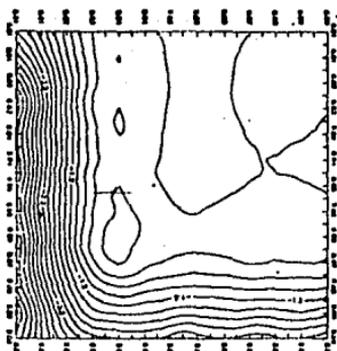


fig. 5.59

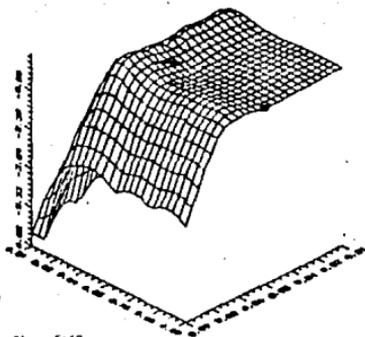


fig. 5.60

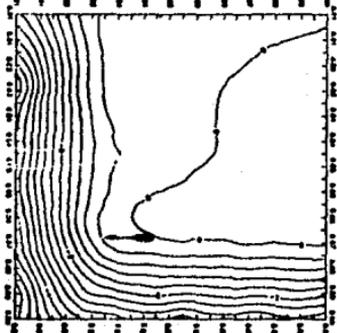


fig. 5.61

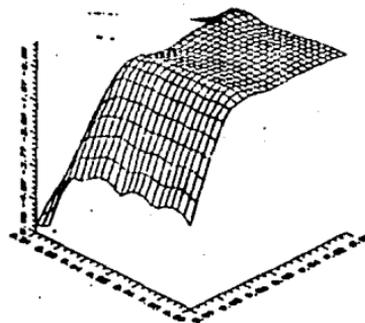


fig. 5.62

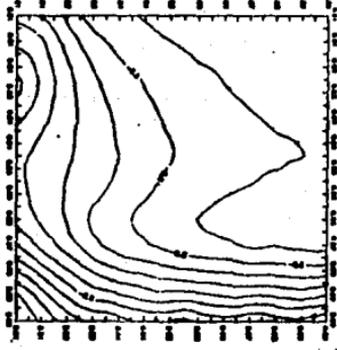


fig. 5.63

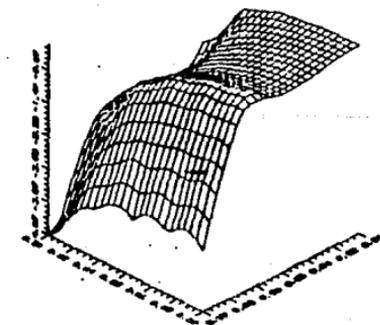


fig. 5.64

Distribución de la presión para el problema III con $\mu = 0.01, 0.5, 1.0, N=100, NELE=338$.

CASO NO-HOMOGENEO

Ahora se analizará el caso en que se aplica una fuerza externa al fluido. Primeramente se estudió el caso cuando la fuerza está en la dirección "x" constante en ambas direcciones:

$$\vec{f}(x,y) = cte \hat{i} \quad (5.5)$$

con viscosidad del fluido de $\mu = 0.001$ y velocidad de la placa de 0.1. Como en el primer modelo físico se supone que el fluido es viscoso e incompresible con flujo plano rotacional y lento este modelo esta descrito en la fig. (5.65)

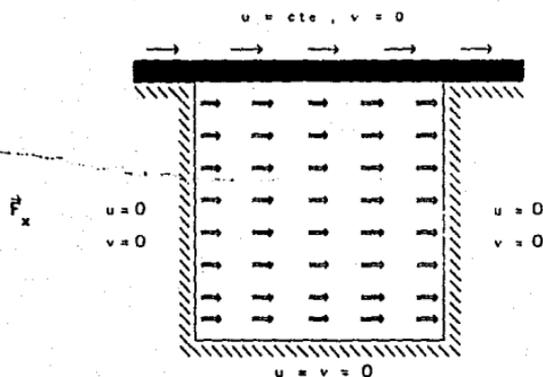
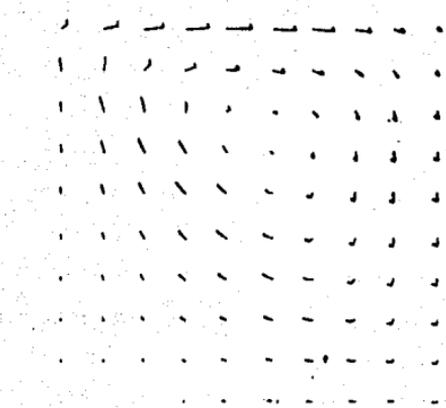


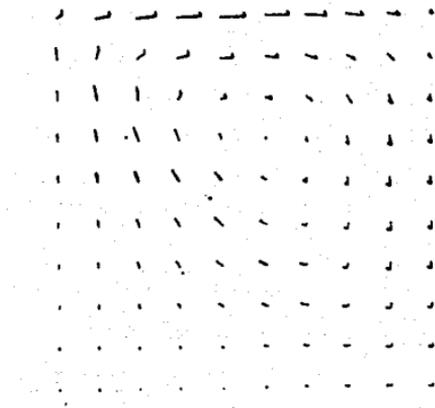
fig. (5.65) flujo en una cavidad rectangular

En las figuras (5.66-5.67) se presenta el campo de velocidades cuando la fuerza es pequeña, este campo vectorial se ha deformado respecto al campo de velocidades del caso homogéneo, estas gráficas muestran que el flujo deja de ser totalmente simétrico, esta deformación se debe a que las partículas que se encuentran en la parte inferior, cuando estas se mueven de derecha a izquierda, su velocidad disminuye por la fuerza que es aplicada de izquierda a derecha; en la fig. (5.68) este comportamiento se observa con mayor claridad, las partículas que se encuentran en la parte izquierda inferior tienen una pequeña componente horizontal y vertical. Las figuras (5.70) y (5.71) se muestran las curvas de nivel y la

superficie de la presión para el caso no-homogéneo, en la fig. (5.71) muestran claramente que existe tres zonas en donde la presión es menor relativa a los demás puntos, la primer zona corresponde a la parte en donde se mueve la placa y las otras dos a las zonas laterales derecha e izquierda zonas en donde la velocidad del flujo es mayor. La figura (5.69) muestra la descripción del campo de velocidades cuando la fuerza es mayor, en este caso el flujo tiende a ser horizontal siguiendo la dirección en que es aplicada la fuerza.

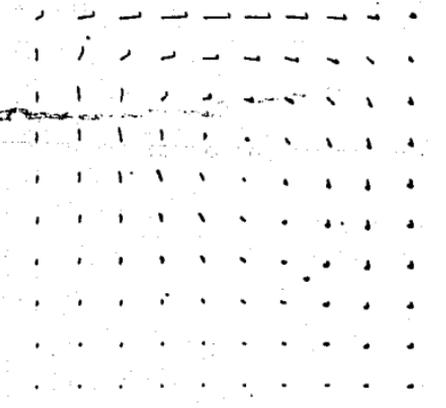


sol27
fig. 5.66 $f_x = 0.00001$

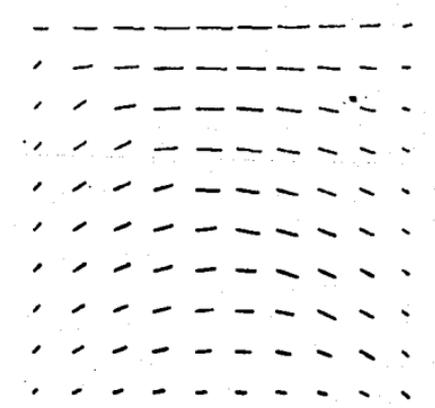


sol28
fig. 5.67 $f_x = 0.00005$

Distribución del campo de velocidades cuando se aplica una fuerza horizontal en la cavidad cuadrada de izquierda a derecha, $\mu=0.001$, $N=100$, $NELE=242$.



sol29
fig. 5.68 $f_x = 0.00010$



sol30
fig. 5.69 $f_x = 0.00020$

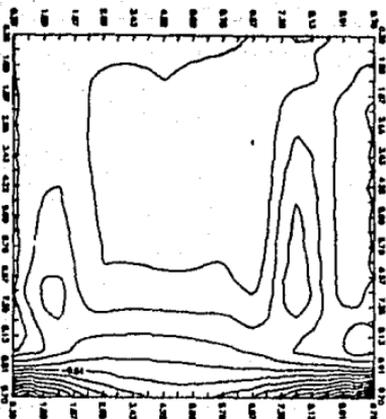


fig. 5.70

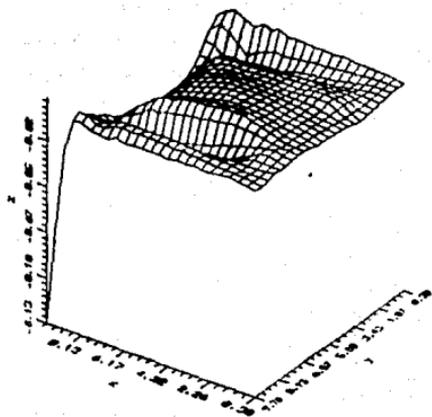


fig. 5.71

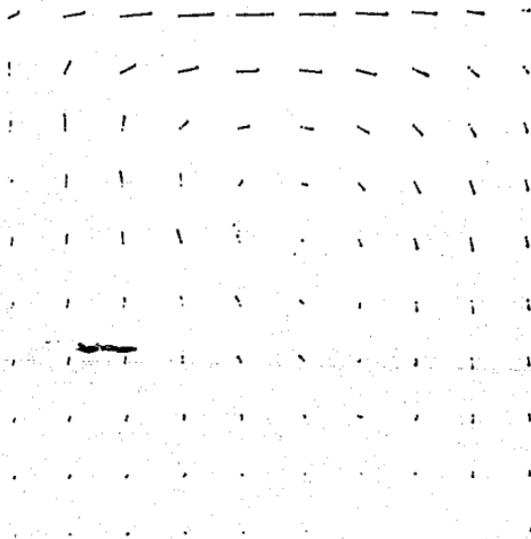


fig. 5.72

Curvas de nivel y distribución de la presión, así como la descripción del campo de velocidades cuando la fuerza horizontal es de la forma $f_x = 0.0011x$

Enseguida se analiza el caso en que la fuerza es contraria al movimiento de la placa, con las mismas hipótesis que en anterior problema, la descripción gráfica del problema está dada en la fig. (5.73)

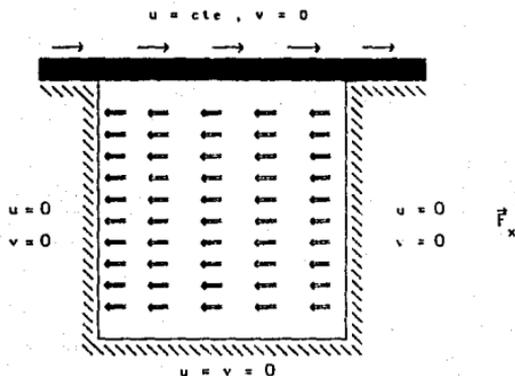


fig. (5.73) Flujo en una cavidad rectangular

Las fig. (5.74-5.77) muestra el comportamiento numérico del programa de computación para el campo de velocidades; en las figuras (5.74-5.76) se observa que las partículas del fluido que se encuentran en la parte derecha de la cavidad tienen una componente horizontal diferente de cero, esto se debe claramente a la fuerza que es aplicada en esta dirección; la región próxima a la placa las partículas del fluido tiene menor velocidad, pues la fuerza aplicada está en sentido contrario al movimiento de estas. La fig. (5.77) es el caso extremo en que el flujo se mueve en dirección contraria al movimiento de la placa. Las figuras (5.79) y (5.81) muestran la gráfica de la presión para diferentes fuerzas, en la primera gráfica la zona en donde la placa se mueve la presión aumenta, luego decrece bruscamente hasta llegar a la parte opuesta de la cavidad en donde la presión aumenta, la fig. (5.81) muestra la gráfica de la presión para el caso extremo, como se observa de esta gráfica la aproximación es muy mala.

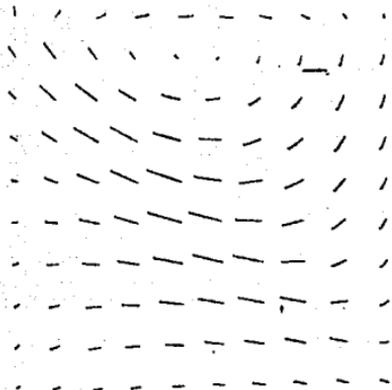


fig. 5.74 $f_x = -0.00040$

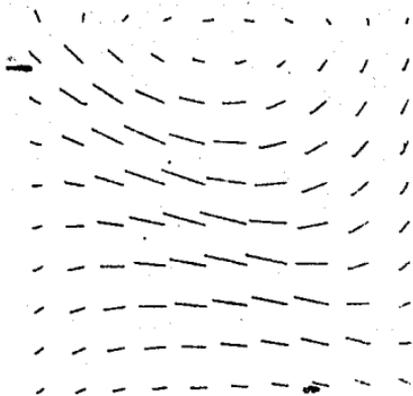


fig. 5.75 $f_x = -0.00080$

• Distribución del campo de velocidades cuando se aplica una fuerza horizontal en la cavidad cuadrada de derecha a izquierda, $\mu=0.001$, $N=100$, $NFE=242$.

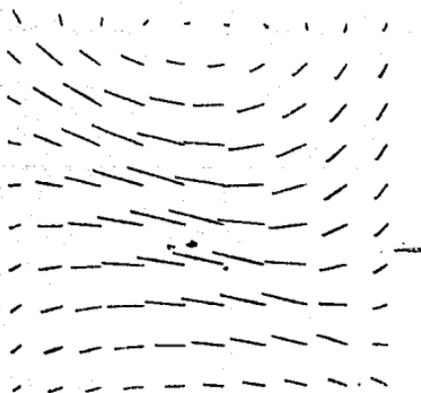


fig. 5.76 $f_x = -0.00080$

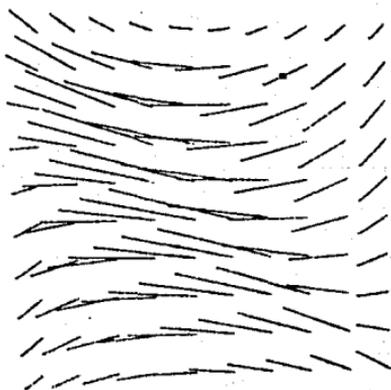


fig. 5.77 $f_x = -0.002$

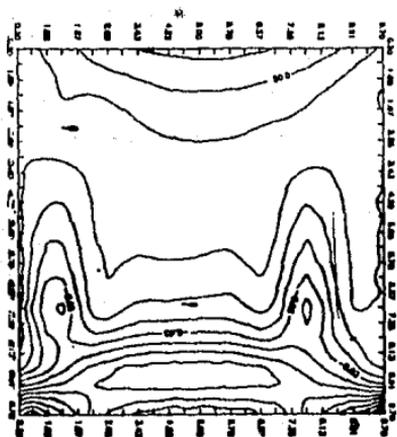


fig. 5.79

fig. 5.79 Curvas de nivel y distribución del campo de presiones cuando se aplica una fuerza horizontal de derecha a izquierda con $\mu = 0.001$, $N = 100$, $NELE = 242$, $F_x = -0.0006$.

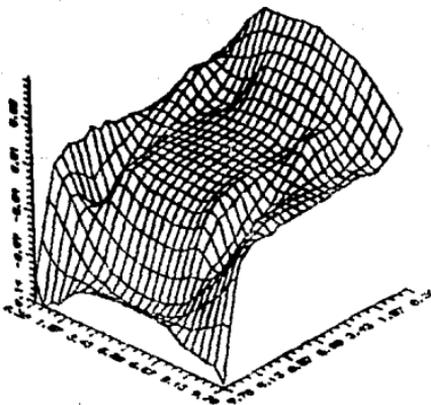
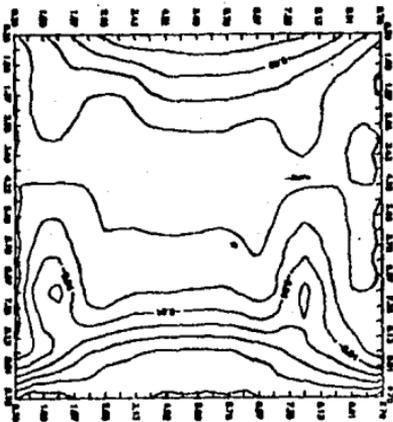
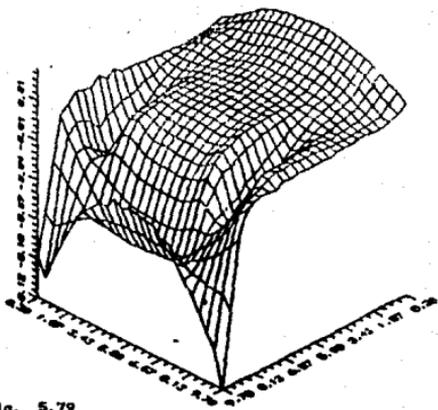


fig. 5.81

fig. 5.80 Curvas de nivel y distribución del campo de presiones cuando se aplica una fuerza horizontal de derecha a izquierda con $\mu = 0.001$, $N = 100$, $NELE = 242$, $F_x = -0.002$.

Ahora se estudia el comportamiento del flujo cuando se aplica una fuerza constante en la dirección "Y":

$$f(x,y) = cte \, j \quad (5.6)$$

nuevamente utilizamos las hipótesis dadas en el problema I, la descripción gráfica del problema físico esta dada en la figura (5.82)

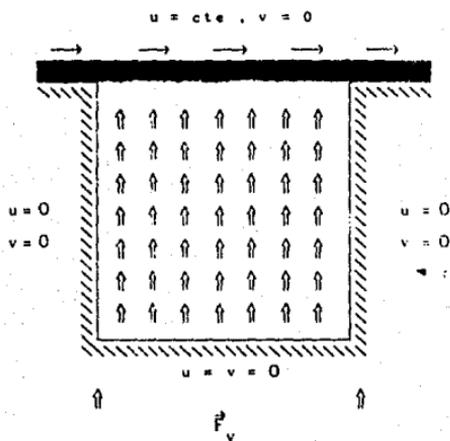


fig. (5.82) Flujo en una cavidad rectangular

Las figuras (5.83) y (5.85) muestran los resultados numéricos encontrados para este caso, el campo de velocidades deja de ser simétrico, en las figuras (5.84) y (5.85) las partículas del fluido que desciende tienen una menor velocidad, esto se debe a la fuerza constante sobre toda la cavidad que es aplicada en la dirección "Y"; en la figura (5.85) el campo de velocidades sigue básicamente la dirección de la fuerza. En las figuras (5.87) y (5.88) se muestra las curvas de nivel y la gráfica de la presión, si se empalman las curvas de nivel con el campo de velocidades se observa inmediatamente que donde existe una mayor velocidad existe una menor presión.

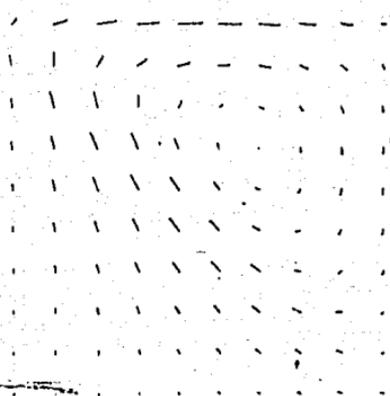


fig. 5.83 $f_y = 0.00010$

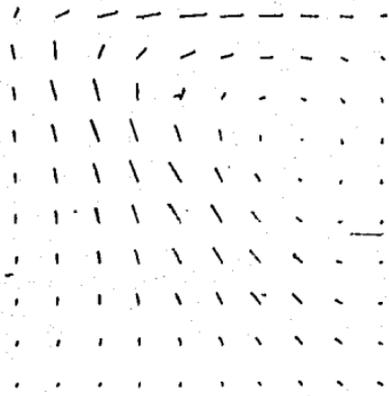


fig. 5.84 $f_y = 0.00020$

Distribución del campo de velocidades cuando se aplica una fuerza vertical en la cavidad cuadrada de abajo hacia arriba, $\mu=0.001$, $N=100$, $NELE=242$.

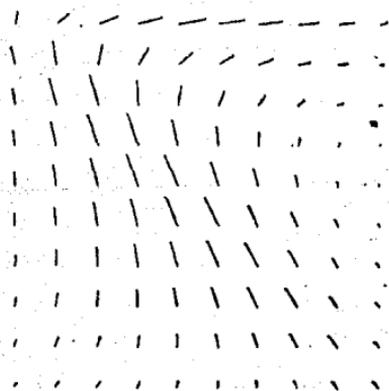


fig. 5.85 $f_y = 0.00040$

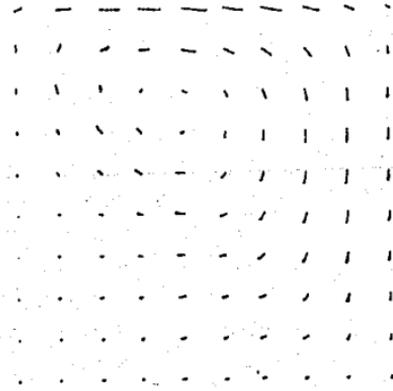


fig. 5.86 $f_y = -0.00010$

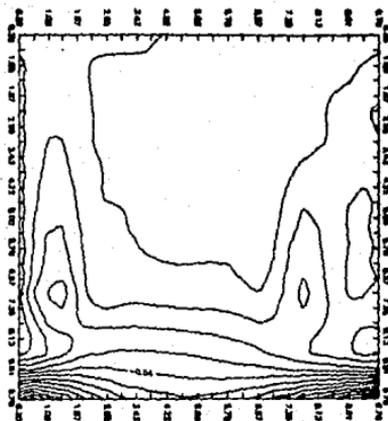


fig. 5.87

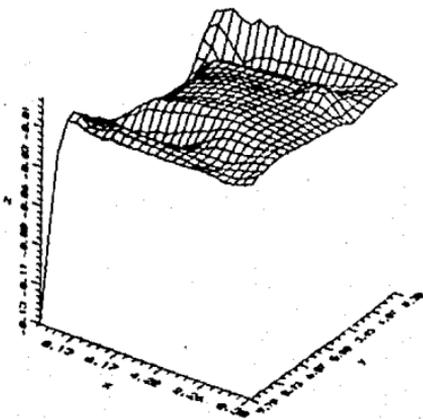


fig. 5.88

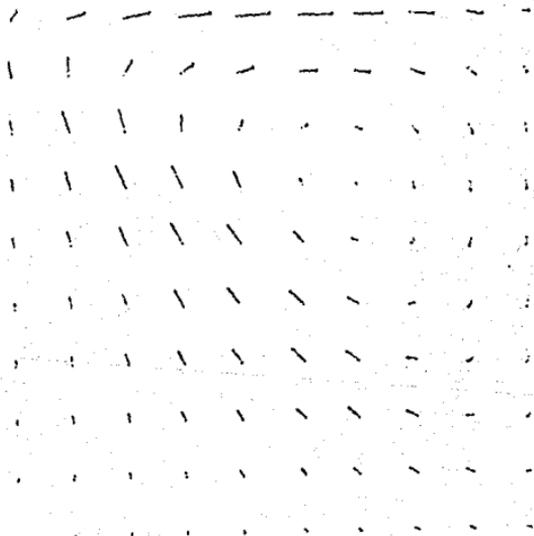


fig. 5.89

Curvas de nivel y distribución de la presión, así como la descripción del campo de velocidades cuando la fuerza vertical es aplicada de abajo hacia arriba $f = 0.00012$.

En seguida se estudia el caso en que la fuerza es aplicada en la dirección "y" pero descendente. Como en los anteriores caso la fuerza es constante en toda la cavidad fig(5.93)

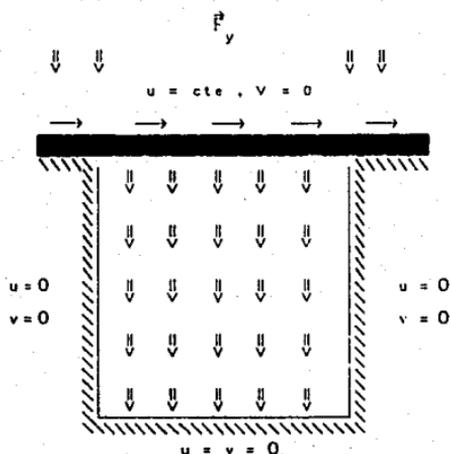


fig. (5.93) flujo en una cavidad rectangular

La distribución del campo de velocidades es mostrado en las figuras (5.86), (5.94) y (5.95) en este caso las partículas que se encuentran en la parte derecha de la cavidad tienen una componente vertical diferente de cero y las partículas que se encuentran en la parte izquierda como estas tienen que ascender se observa una disminución de la velocidad de las mismas. En la figura (5.95) las partículas del fluido descienden y cerca de la parte final de la cavidad la velocidad disminuye.

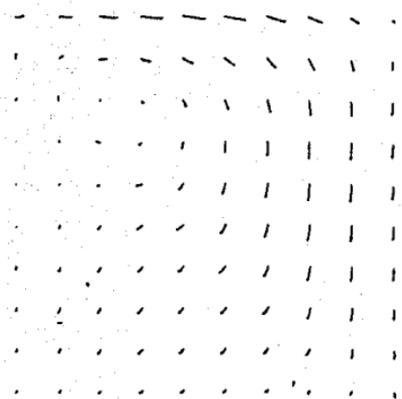


fig. 5.94 $f_y = -0.00020$

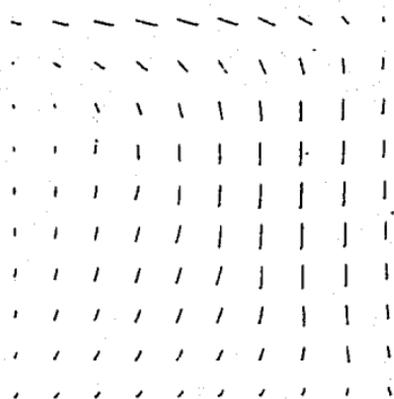


fig. 5.95 $f_y = -0.00040$

Distribución del campo de velocidades cuando se aplica una fuerza vertical en la cavidad cuadrada de arriba hacia abajo, $\mu=0.001$, $N=100$, $NELE=242$.

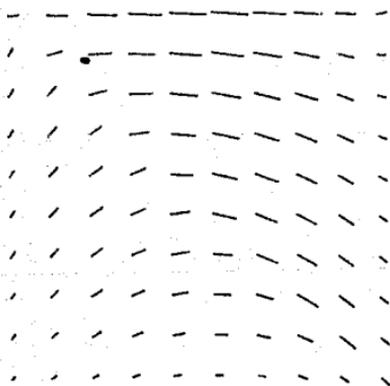


fig. 5.96 $f_x = 0.0001x$

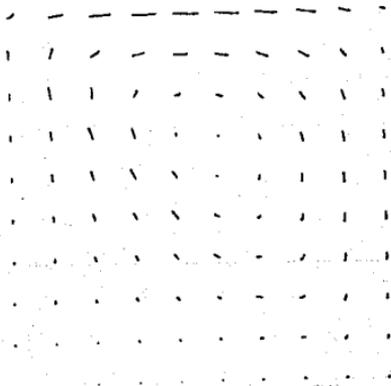


fig. 5.97 $f_x = 0.00001x$

Ahora se estudia el comportamiento del modelo numérico para diferentes números de Reynolds, fig. (5.118- 5.132). Los resultados muestran que el flujo es prácticamente laminar para cuando R están entre los números 0.0001 - 0.1, el flujo comienza a ser rotacional cuando $R \geq 1$. Analizando las gráficas para el campo de velocidades se observa inmediatamente la analogía directa con las gráficas del campo de velocidades para diferentes flujos viscosos, el flujo es simétrico. Se manifiesta el fenómeno numérico de inestabilidad numérica cuando R crece demasiado, esto se debe a dos factores importantes, primero si R crece entonces la viscosidad del fluido disminuye y en el caso extremo se comportaría como un fluido sin viscosidad (fluido ideal), el cual no existe en la realidad y lo que se esperaría es que no existiera movimiento de las partículas, segundo la ecuación que se está utilizando es lineal y por lo tanto no se manifiesta ningún efecto turbulento en la medida que R crece. Cabe señalar que las gráficas de la presión son bastante buenas para este caso.

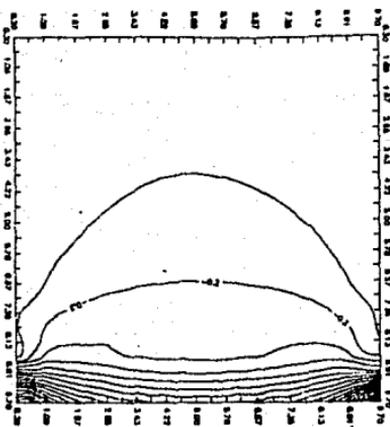


fig. 5.118

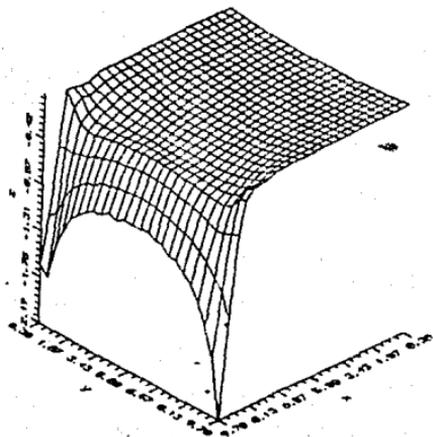


fig. 5.119

Curvas de nivel y distribución de la presión así como la descripción del campo de velocidades para $R = 0.0001$.

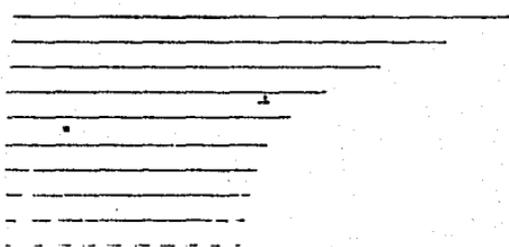


fig. 5.120

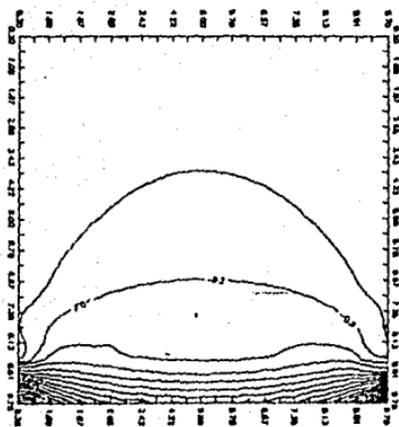


fig. 5.121

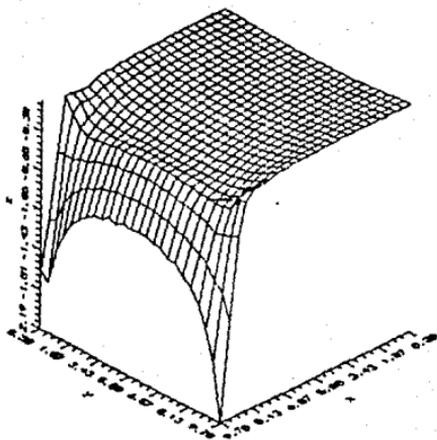


fig. 5.122

Curvas de nivel y distribución de la presión así como la descripción del campo de velocidades para $R = 0.001$.

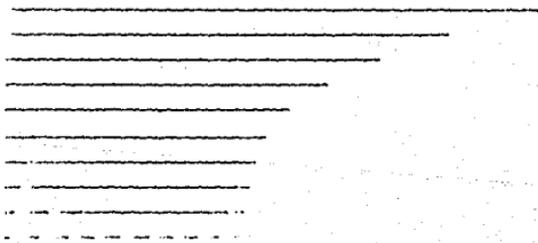


fig. 5.123

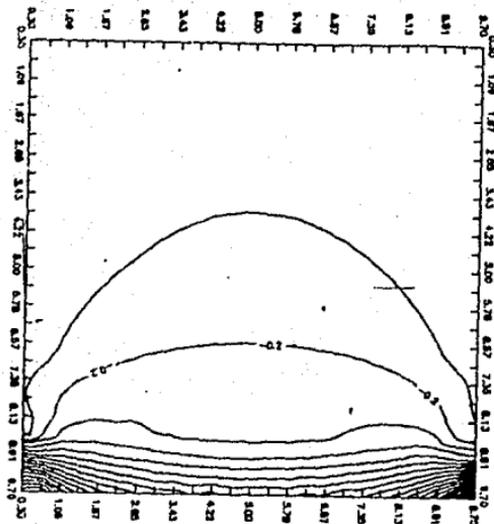


fig. 5.124

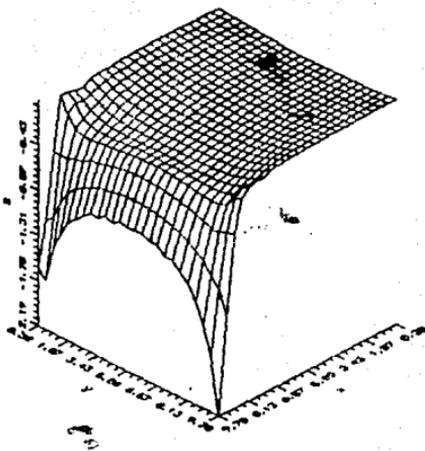


fig. 5.125

Curvas de nivel y distribución de la presión así como la descripción del campo de velocidades para $R = 0.01$.

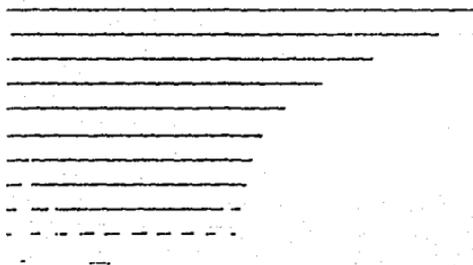


fig. 5.126

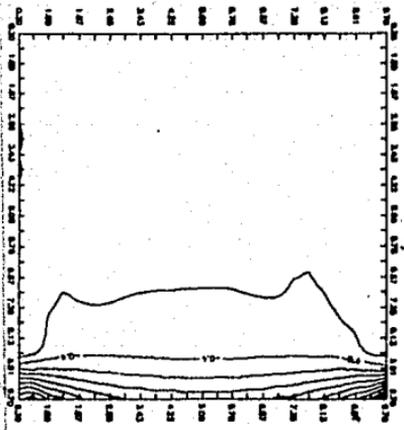


fig. 5.127

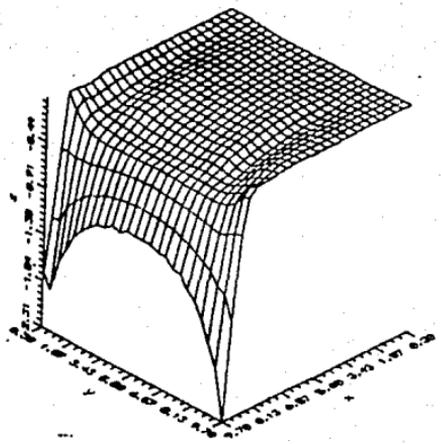


fig. 5.128

Curvas de nivel y distribución de la presión así como la descripción del campo de velocidades para $R = 0.1$.

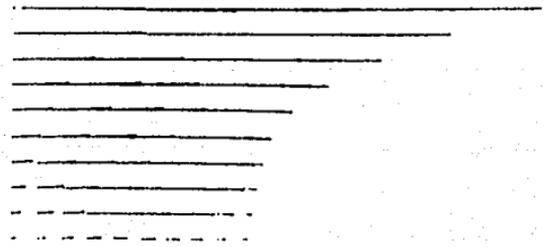


fig. 5.129

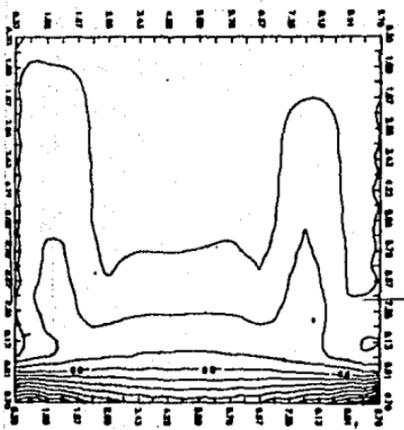


fig. 5.130

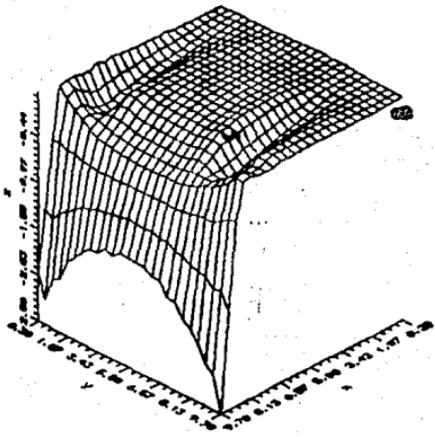


fig. 5.131

Curvas de nivel y distribución de la presión así como la descripción del campo de velocidades para $R = 10$.

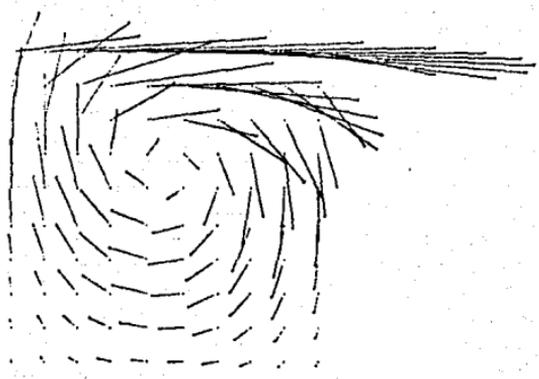


fig. 5.132

Resumiendo tenemos los siguientes resultados: se comprobó la disminución del ancho de banda de la matriz de Stokes para diferentes numeraciones de la malla, también se comprobó la estabilidad numérica del modelo computacional en lo referente a la partición de la malla. La no-simetría del campo de velocidades se debió a que la velocidad de la placa es mayor de uno (en este caso el problema deja de ser lineal), también se manifiesta cuando la viscosidad del fluido disminuye (fluido ideal) y cuando se aplica una fuerza constante a todo el fluido. Las gráficas de la presión solo son buenas cuando se utiliza una buena partición de malla, esto se debe básicamente a que con pocos puntos para el campo de velocidades se produce una mala interpolación de la presión, para tener una malla más fina es necesario disminuir el ancho de banda de la matriz de Stokes y para disminuir este ancho de banda es necesario renumerar la malla. La partición más grande que se utilizó fue de 14 x 14 produciendo 196 nodos, 450 elementos y un total de 392 incógnitas, el tiempo de CPU que se utilizó en una computadora HP-9000 serie 500 fue de 5 min., de ahí que la reducción del ancho de banda de la matriz sea fundamental para tener mejores aproximaciones ya sea para el campo de velocidades o para la presión.

CONCLUSION

La ecuación de Navier-Stokes para un fluido incompresible newtoniano, está basada en la ley de balance para medio continuo y de la ecuación constitutiva para un fluido newtoniano. Para describir completamente un fluido newtoniano incompresible es necesario tres ecuaciones básicas, ecuación de continuidad, ecuación de movimiento y ecuación de estado. La versión lineal de la ecuación de Navier-Stokes para fluidos incompresibles y viscoso es válida si y solo si la velocidad del flujo es pequeña y la geometría en donde el flujo se mueve no cambia bruscamente. La forma de resolver la ecuación de Navier-Stokes para el caso anteriormente señalado con la condición de incompresibilidad, es transformar el problema inicial a un problema de optimización a través de multiplicadores de Lagrange, este esquema matemático produce dos esquemas de aproximación uno para la presión y otro para la velocidad, la forma más fácil de resolver esta dificultad es reformular el problema de optimización en un esquema "Penalizado" en donde solo la velocidad es aproximada, el cálculo de la presión se realizó posteriormente. Para aproximar el campo de velocidades con aproximación interna, se usan los polinomios de elemento finito de donde se construye la matriz de Stokes. Para construir esta matriz e invertirla se construye un programa de cómputo de donde se simulan numéricamente los fenómenos físicos estudiados. El ancho de banda de la matriz de Stokes disminuye de acuerdo a una numeración adecuada de la malla. La no-simetría del campo de velocidades se debe a tres eventos físicos, primero cuando la viscosidad del fluido se aproxima a cero, segundo la velocidad de la placa es mayor que uno y tercero cuando se aplica una fuerza constante en todo el fluido contenido en la cavidad cuadrada. Las gráficas de la presión son mejores si y solo si la partición de la malla es fina. Para números de Reynolds entre 10 y 100 el flujo es rotacional y simétrico, para valores entre 1 y 10 es un flujo de transición de laminar a rotacional, para valores menores a uno el flujo es laminar, para números por arriba de 1000 existe inestabilidad numérica para este modelo computacional. La metodología seguida en este trabajo es fácil una vez que se conocen los pasos a seguir, el punto más difícil está en la construcción del programa de cómputo. Este programa debe simular los

problemas físicos planteados y es en esta parte en donde se invierte el mayor tiempo posible pues los resultados que se produzcan de este programa depende la validez del esquema de optimización asignado.

APENDICE I

DIAGRAMAS DE FLUJO

A continuación se presentan los diagramas de flujo que corresponde a los algoritmos numéricos de la construcción de la matriz de Stokes de la numeración de malla así como del cálculo de la presión para su codificación en computadora. Se compone basicamente de 6 modulos y está hecho en **FORTRAN**.

En la lámina (1) se muestra el diagrama de flujo para el programa principal, el objetivo de éste bloque es el de almacenar información de cada rutina , para ser procesada por la siguiente y obtener resultados de los datos iniciales.

La primer rutina tiene por nombre "XY" su objetivo es leer los datos iniciales de la región de interés como son: la longitud de la malla, partición de la misma así como los valores a la frontera del campo de velocidades, con estos datos se asigna la coordenada (x_i, y_i) al Nodo " N_i ". Hay que hacer notar que éste algoritmo solamente funciona para regiones cuadradas o rectangulares, y la asignación es en forma de espiral.

La siguiente rutina es "Malla", la cual a su vez posee la rutina "Nodos", y se presentan en las láminas (3 y 4), en cuanto a la rutina "Malla", basicamente genera la malla en la matriz "JA", en seguida la rutina "Nodos" asigna el número "i" correspondiente al nodo N_i , ésta rutina es alimentada por la rutina que le precedió "XY", y no requiere de ningún otro dato.

La tercer rutina es "Matriz", su objetivo es construir la matriz global de elemento finito (matriz de Stokes) ésta rutina se presenta en la lámina (5) y es alimentada por las coordenadas generadas (x_i, y_i) , $i=1, n$, donde "n" es el número de nodos, por los nodos "nodo(ie, i)", $ie=1, neie$, donde "neie" es el número de elementos finitos, "i", en éste caso toma los valores 1,2,3, correspondiente al grado de libertad de la función a interpolar.

La siguiente rutina es "Sistema" su objetivos es resolver la matriz global obtenida con la rutina "Matriz", esta rutina es dividida en dos parte, la primera parte reacomoda las entradas de la matriz para reducir el espacio de memoria y utilizar sólo la matriz de banda, segundo esta ultima matriz es entregada a una rutina del "IMSL" para rectificar que sea de banda y definida positiva, por

último da como resultado el campo de velocidades.

El objetivo de las rutinas "SOLX" y "SOLY" es formar las matrices "SUPX" y "SUPY" para que sea realizado el cálculo de la presión. Finalmente la rutina "Presión" realiza el cálculo de la presión con ayuda de varias rutinas del "IMSL", es alimentada por las dos anteriores rutinas "SOLX" y "SOLY".

DIAGRAMA DE FLUJO PARA EL PROGRAMA PRINCIPAL

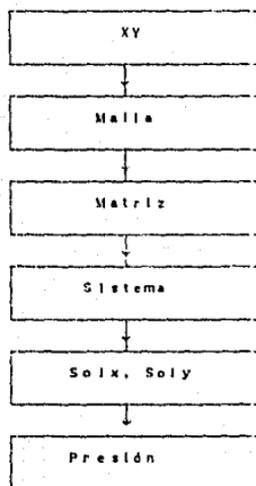


lámina (1)

DIAGRAMA DE FLUJO PARA LA RUTINA COORDENADAS

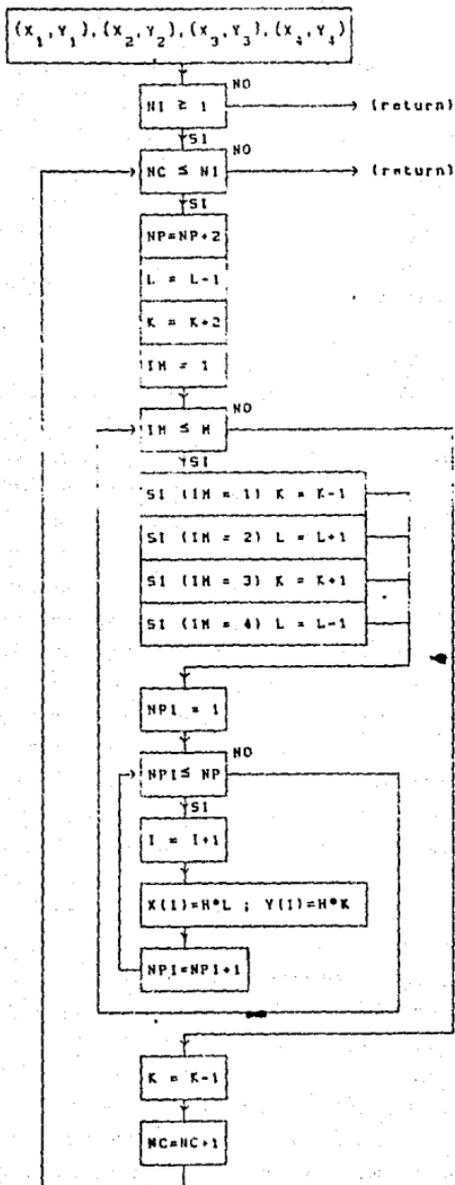
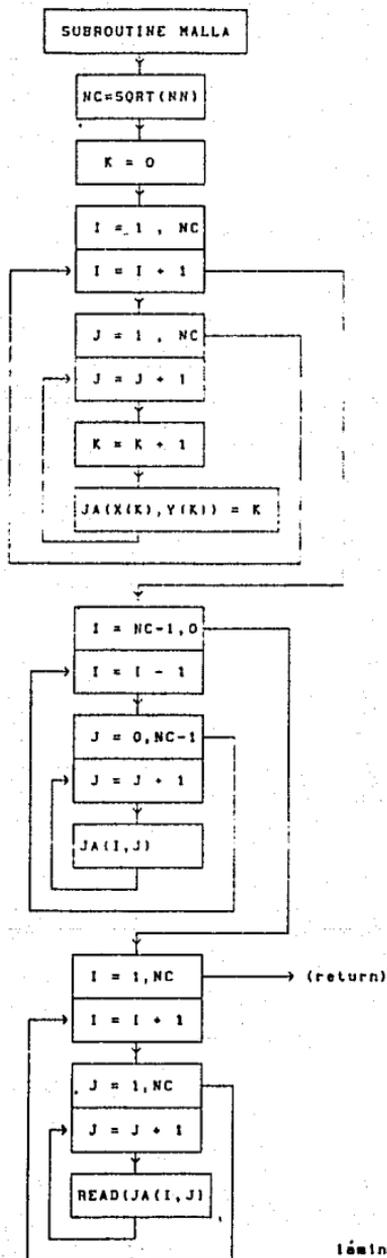
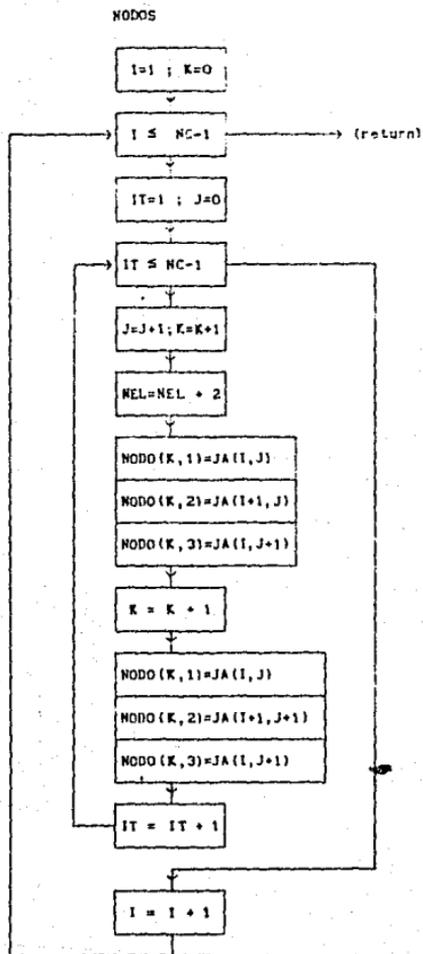


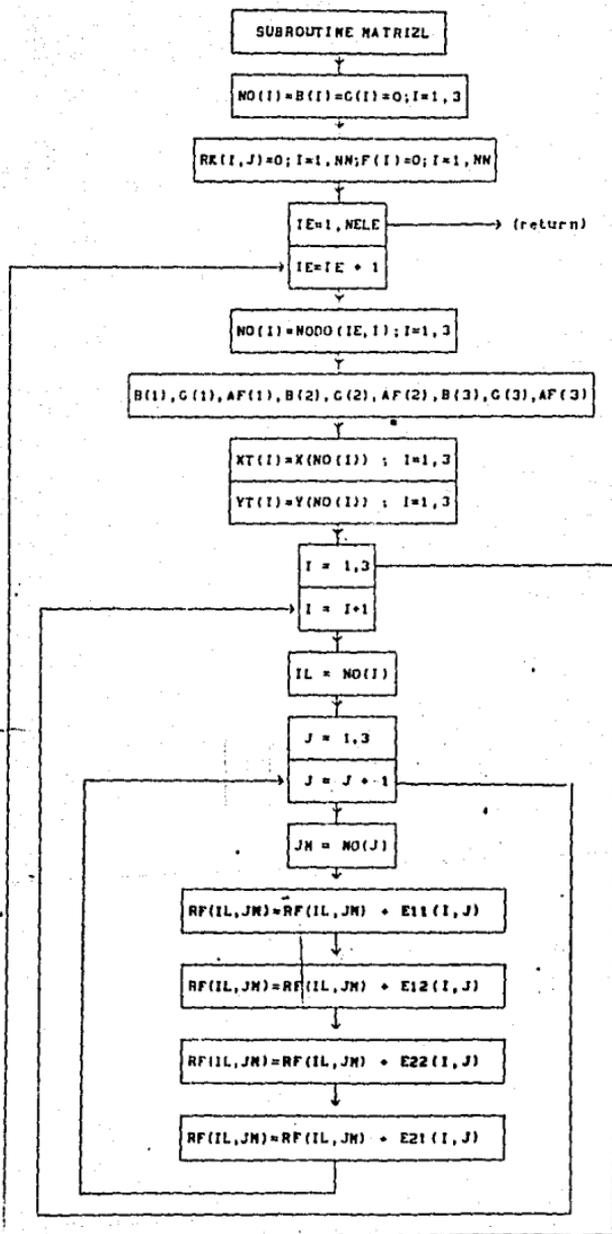
DIAGRAMA DE FLUJO PARA LA RUTINA MALLA

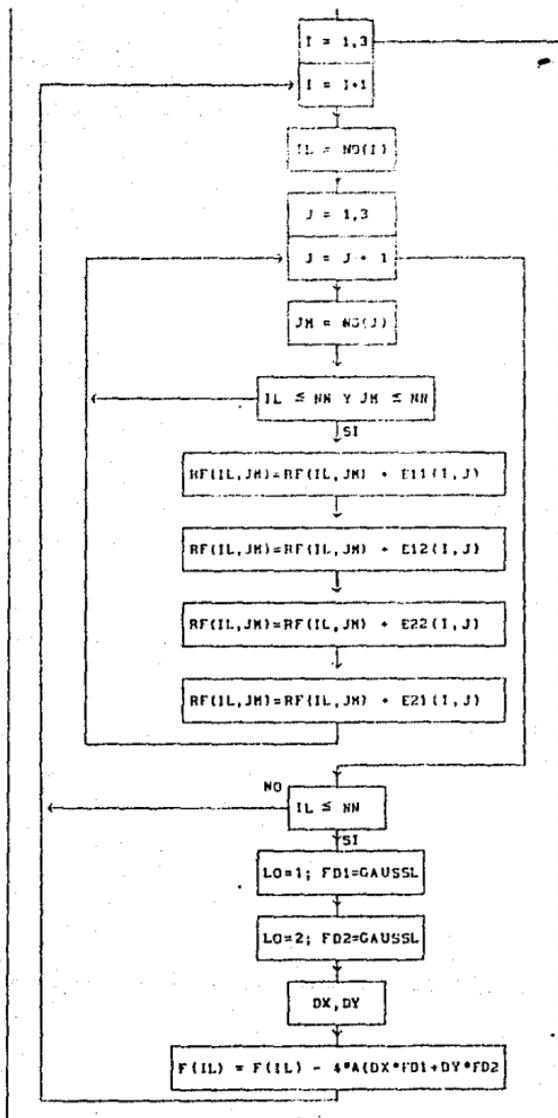


DRIAGRAMA DE FLUJO PARA LA GENERACION DE LOS NODOS



línea (4)





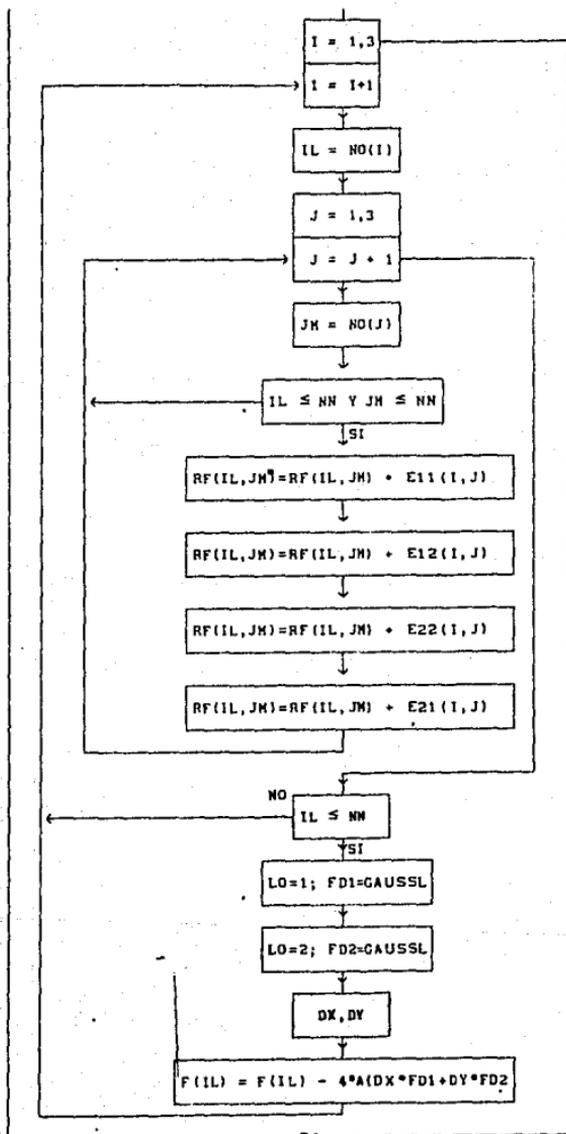


DIAGRAMA DE FLUJO DE LA Rutina SISTEMAL

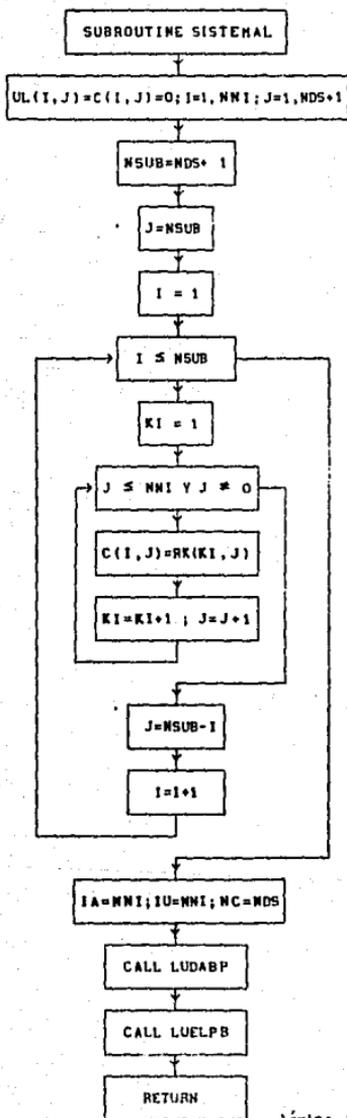


lámina (6)

```

! PROGRAMA PARA ENCONTRAR EL CAMPO DE VELOCIDADES EN UNA CAVIDAD
! RECTANGULAR
! CON DIFERENTES CONDICIONES A LA FRONTERA DEL TIPO DIRICHLET USANDO LA
! TECNICA
! DE ELEMENTO FINITO BASADA EN LA FORMULACION DE PENALTY. EN ESTE PROGRAMA LAS
! FUNCIONES A SER UTILIZADAS SON TRIANGULARES LINEALES.
! PROGRAMADOR: DAVID MONDRAGON VARGAS
! INSTITUTO DE GEOFISICA DE LA UNAM
! JUN 22 DE 1989

```

```

=====
PROGRAM PENALTY
=====

```

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```

```

PARAMETER ( ND=400 , NF=1500 , NT=3 , NS=20 , NJ=50)
DIMENSION X(ND), Y(ND), F(NF), RK(ND,ND), XS(ND), C(ND,ND), Z(ND),
          RF(ND,ND), JA(O:ND,O:ND), U(ND,ND), NODO(NF,NT), IX(ND),
          IY(ND), FRX(NF), FRY(NF), SUX(O:NS,O:NS), SUY(O:NS,O:NS),
          CC(2,NJ,2*NJ), WK(2*NJ*NJ+2*NJ), FX(ND), FY(ND)

```

```

CHARACTER*50 FT
LOGICAL FLAG

```

```

CALL XY (X,Y,IX,IY,NN,H,NNI,CE,NDS,NELE,RLONG,FRX,FRY,FLAG)
CALL MALLA (NN,NC,NELE,IX,IY,JA,NODO,FLAG)
CALL MATRIZ (CE,X,Y,RK,RF,NNI,NN,NELE,H,AR,NODO,PG,FX,FY,FLAG)
CALL SI(NDS,RK,RF,FRX,FRY,F,NNI,NN,U,XS,C,IER,AR,FX,FY,FLAG)
CALL SOLX (NC,NNI,IX,IY,XS,SUX,RLONG,FRX,XM,YM,FLAG)
CALL SOLY (NC,NNI,IX,IY,XS,SUY,RLONG,FRY,FLAG)
CALL PR(NC,NNI,NN,PG,X,Y,AR,XS,NELE,FRX,FRY,SUX,SUY,XM,YM,NODO,
        CC,WK)

```

```

STOP
END

```

```

=====
SUBROUTINE XY(X,Y,IX,IY,NRAN,H,NNI,C,NDS,NELE,RLONG,FRX,FRY,FLAG)
=====

```

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```

```

! RUTINA PARA GENERAR LAS COORDENADAS DE LOS NODOS
! DA COMO SALIDA:

```

```

! X(NN), Y(NN) QUE CONTIENE LAS COORDENADAS DE LOS NODOS
! NRAN = NN NUMERO DE NODOS
! H : LONGITUD DEL TRIANGULO

```

```

! ND : NO. DE DIVISIONES DE LA MALLA
! NI : NO DE SUB-MALLAS
! NC : CONTADOR DE LAS SUBMALLAS
! L : CONTADOR SOBRE LAS "X'S"
! K : CONTADOR SOBRE LAS "Y'S"
! I : CONTADOR SOBRE LA DIMENSION A USAR
! NP : CONTADOR PARA MOVERSE EN UNA SUB-MALLA
! NPI : CONTADOR PARA MOVERSE POR LA LINEA DE LA SUB-MALLA
! H : LONGITUD DE LOS TRIANGULOS
! NOM : NOMBRE DEL ARCHIVO EN DONDE SE ENCUENTRAN LAS COORDENADAS
! NDS : BANDA DE LA SUBMATRIZ RESULTANTE
! FLAG : VARIABLE LOGICA DE ESCRITURA DE ARCHIVOS
! NELE : NUMERO DE ELEMENTOS

```

```

DIMENSION X(1), Y(1), IX(1), IY(1), FRX(1), FRY(1)
CHARACTER*50 NOM

```

LOGICAL FLAG

```

WRITE (*,('NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS ',S))
READ ('A50'), NOM
OPEN (UNIT=10, FILE=NOM)
  READ (10,*) ND, RLONG, C
  WRITE (*,('ND=',I4,'RLONG=',G10.5,'C=',G10.5)) ND,RLONG,C
  READ (10,('LI')) FLAG
CLOSE (UNIT=10)
H = RLONG/DFLOAT(ND)
WRITE (*,('H=',G10.5)) H
WRITE (*,*) H
NI = ( ND - 1 ) / 2
NELE = ND**2*2
NC = 1
L = NI
K = NI
I = 4
NP = 1
WRITE (*,('SUB-MALLAS',I3,I3,'LONGITUD DEL TRI',G10.5)) NI,H
! CALCULO DE LAS COORDENADAS DE LOS NODOS
! VALORES INICIALES DE LA MALLA MAS PEQUEÑA

```

```

X(1) = DFLOAT(NI) * H
Y(1) = DFLOAT(NI) * H
X(2) = DFLOAT(NI+1) * H
Y(2) = DFLOAT(NI) * H
X(3) = DFLOAT(NI+1) * H
Y(3) = DFLOAT(NI+1) * H
X(4) = DFLOAT(NI) * H
Y(4) = DFLOAT(NI+1) * H

```

```

IX(1) = NI
IY(1) = NI
IX(2) = NI+1
IY(2) = NI
IX(3) = NI+1
IY(3) = NI+1
IX(4) = NI
IY(4) = NI+1

```

! CICLO PARA MOVERSE SOBRE CADA SUB-MALLA

```

IF ( NI .GE. 1 ) THEN
DO WHILE ( NC .LE. NI )
NP = NP + 2
L = L - 1
K = K + 2

```

```

NPI = 1
DO WHILE ( NPI .LE. NP )
  I = I + 1
  K = K - 1
  X ( I ) = H * DFLOAT(L)
  Y ( I ) = H * DFLOAT(K)
  IX ( I ) = L
  IY ( I ) = K
  NPI = NPI + 1
END DO

```

```

NPI = 1
DO WHILE ( NPI .LE. NP )
  I = I + 1
  L = L + 1
  X ( I ) = H * DFLOAT(L)
  Y ( I ) = H * DFLOAT(K)
  IX ( I ) = L
  IY ( I ) = K
  NPI = NPI + 1
END DO

```

```

NPI = 1
DO WHILE ( NPI .LE. NP )
  I = I + 1
  K = K + 1
  X ( I ) = H * DFLOAT(L)
  Y ( I ) = H * DFLOAT(K)
  IX ( I ) = L
  IY ( I ) = K
  NPI = NPI + 1
END DO

```

```

NPI = 1
DO WHILE ( NPI .LE. NP )
  I = I + 1
  L = L - 1
  X ( I ) = H * DFLOAT(L)
  Y ( I ) = H * DFLOAT(K)
  IX ( I ) = L
  IY ( I ) = K
  NPI = NPI + 1
END DO

```

```

K = K - 1
NC = NC + 1
END DO
END IF
NRAN = 1

```

! VALORES DEL CODIGO DE LOS NODOS

```

NNI = (ND-1)**2
NNE = (ND+1)**2
NDS = 2*NNI - 1
IF (FLAG) THEN
  OPEN (UNIT=11,FILE='COR.DAT')
  DO I = 1,NRAN
    WRITE (11,'(F5.2,2X,F5.2)') X ( I ) , Y ( I )
  END DO
  CLOSE ( UNIT = 11 )
END IF

```

```

CALL FRO(NRAN,NNI,FRX,FRY)

```

```

RETURN
END

```

```

NPI = 1
DO WHILE ( NPI .LE. NP )
  I = I + 1
  L = L + 1
  X ( I ) = H * DFLOAT(L)
  Y ( I ) = H * DFLOAT(K)
  IX ( I ) = L
  IY ( I ) = K
  NPI = NPI + 1
END DO

```

```

NPI = 1
DO WHILE ( NPI .LE. NP )
  I = I + 1
  K = K + 1
  X ( I ) = H * DFLOAT(L)
  Y ( I ) = H * DFLOAT(K)
  IX ( I ) = L
  IY ( I ) = K
  NPI = NPI + 1
END DO

```

```

NPI = 1
DO WHILE ( NPI .LE. NP )
  I = I + 1
  L = L - 1
  X ( I ) = H * DFLOAT(L)
  Y ( I ) = H * DFLOAT(K)
  IX ( I ) = L
  IY ( I ) = K
  NPI = NPI + 1
END DO

```

```

K = K - 1
NC = NC + 1
END DO
END IF
NRAN = 1

```

I VALORES DEL CODIGO DE LOS NODOS

```

NNI = (ND-1)**2
NNE = (ND+1)**2
NDS = 2*NNI - 1
IF (FLAG) THEN
  OPEN (UNIT=11,FILE='COR.DAT')
  DO I = 1,NRAN
    WRITE (11, '(F5.2,2X,F5.2)') X ( I ) , Y ( I )
  END DO
  CLOSE ( UNIT = 11 )
END IF

```

```
CALL FRO(NRAN,NNI,FRX,FRY)
```

```
RETURN
END
```

```
=====
SUBROUTINE FRO(NN,NNI,FRX,FRY)
=====
```

```
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
```

```
PARAMETER ( CERO = 0.DO )
```

```
DIMENSION FRX(1), FRY(1)
```

```
CHARACTER*50 F
```

```
DO I = 1, NNI
  FRX(I) = CERO
END DO
```

```
WRITE (*,('ARCHIVO DE FRONTERA {FX} ',S))
READ ('A50'), F
```

```
OPEN (UNIT=21, FILE=F)
DO I = NNI+1, NN
  READ (21,*) FRX(I)
  WRITE (*,*) I, FRX(I)
END DO
CLOSE (UNIT=21)
```

```
DO I = 1, NN + NNI
  FRY(I) = CERO
END DO
```

```
WRITE (*,('ARCHIVO DE FRONTERA {FY} ',S))
READ ('A50'), F
```

```
OPEN (UNIT=22, FILE=F)
DO I = NN + NNI + 1, 2 * NN
  READ (22,*) FRY(I)
  WRITE (*,*) I, FRY(I)
END DO
CLOSE (UNIT=22)
```

```
RETURN
END
```

```
=====
SUBROUTINE MALLA(NN,NC,NELE,IX,IY,JA,NODO,FLAG)
=====
```

```
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
```

```
! RUTINA PARA GENERAR LOS NODOS CORRESPONDIENTES AL ELEMENTO E
```

```
PARAMETER ( ND=100, NT=3 )
```

```
DIMENSION IX(1), IY(1), JA(0:ND,0:ND), NODO(NELE,NT)
```

```
CHARACTER*50 FF,FORMA,FORTRI
```

```
LOGICAL FLAG
```

```
NC = INT(SQRT(FLOAT(NN)))
```

```
! ALGORITMO PARA LA CONSTRUCCION DE LAS MALLAS
```

```
K = 0
DO I = 1, NC
DO J = 1, NC
  K = K + 1
  JA (IY(K),IX(K)) = K
END DO
END DO
```

```

OPEN (UNIT=12,FILE='MALLA.DAT')
DO I =NC-1,0,-1
  WRITE (*,'(20014)') (JA(I,J),J=0,NC-1)
  WRITE (12,'(20014)') (JA(I,J),J=0,NC-1)
END DO

REWIND (UNIT=12)
DO I = 1, NC
  READ (12,'(20014)') (JA(I,J),J=1,NC)
END DO
CLOSE (UNIT=12)
I = 1
K = 0
DO WHILE ( I .LE. (NC-1) )
  IT = 1
  J = 0
  DO WHILE ( IT .LE. (NC-1) )
    J = J + 1
    K = K + 1
    NEL = NEL + 2
    NODO (K,1) = JA (I,J)
    NODO (K,2) = JA (I+1,J)
    NODO (K,3) = JA (I+1,J+1)
    K = K + 1
    NODO (K,1) = JA (I,J)
    NODO (K,2) = JA (I+1,J+1)
    NODO (K,3) = JA (I,J+1)
    IT = IT + 1
  END DO
  I = I + 1
END DO
IF (FLAG) THEN
  OPEN (UNIT=13,FILE='FORTRI.DAT')
  DO K = 1, NELE
    WRITE (13,'(315)') (NODO(K,L),L=1,3)
  END DO
  CLOSE (UNIT=13)
END IF

```

```

WRITE (*,'(NEL=',14)') NEL
RETURN
END

```

```

=====
SUBROUTINE MATRIZ(C,X,Y,RK,RF,NN,NG,NELE,H,A,NODO,PG,FX,FY,FLAG)
=====

```

```

! NELE      : NUMERO DE ELEMETOS
! NN       : NUMERO DE NODOS
! A        : AREA DEL TRIANGULO
! X(NN), Y(NN): COORDENADAS ASIGNADAS A LOS NODOS
! K(NN,NN) : MATRIZ A SER INVERTIDA
! B(3), G(3) : DERIVAS DE LAS FUNCIONES DE PESO
! CODO(NN) : CODIGO DE LOS NODOS
! NODO(3)  : NODOS DEL ELEMETO "E"

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

PARAMETER (NT=3,CERO=0.DO,CIN=5.DO,CINP=0.5DO,DOS=2.DO,UNO=1.DO)
 DIMENSION X(1), Y(1), RK(2*NN,2*NN), B(NT), G(NT), NO(NT),

```

      NODO(NELE,NT), RF(2*NG,2*NG), FX(1), FY(1), AF(NT),
      XT(NT), YT(NT)
CHARACTER*50 FF
LOGICAL FLAG

```

```

IF ( H.NE. CERO ) THEN
A=CINP*H*H                                H AREA DEL TRIANGULO
WRITE (0,('AREA DEL TRIANGULO ',G20.10)) A
WRITE (0,('TERMINO CONSTANTE ',G20.10)) C
WRITE (0,('NUMERO DE ELEMENTOS ',I4)) NELE
WRITE (0,('DIMENSION DE LA MATRIZ ',I4)) NN
WRITE (0,('VISCOCIDAD , PENALTY, REYGNOLS '))
READ 0, RM, PG, RE

```

```

DO I = 1,3
  NO (I) = 0
  B (I) = CERO
  G (I) = CERO
END DO

```

```

DO I = 1,2*NG
  DO J = 1,2*NG
    RF (I,J) = CERO
  END DO
END DO

```

```

DO I = 1,2*NN
  DO J = 1,2*NN
    RK (I,J) = CERO
  END DO
END DO

```

```

WRITE (0,(' V J'))
WRITE (0,(' TIPO DE FUNCION '))
WRITE (0,(' F = CTE1 (0)'))
WRITE (0,(' F = CTE1*X (1)'))
WRITE (0,(' F = CTE1*X^2 (2)'))
WRITE (0,(' F = CTE1*(X-CTE2)^2 (3)'))
WRITE (0,(' F = CTE1*(Y-CTE2)^2 (4)'))
WRITE (0,(' F = CTE1*(X-CTE2)^2+CTE1*(Y-CTE3)^2 (5)'))
READ 0, LO
WRITE (0,('DAME LAS CONSTANTES CTE1, CTE2, CTE3 '))
READ 0, CTE1, CTE2, CTE3
WRITE (0,('FUERZA EN X (1) '))
WRITE (0,('FUERZA EN Y (2) '))
WRITE (0,('FUERZA EN X y Y (3) '))
READ 0, ILO

```

```

DO IE = 1,NELE
  DO I = 1,3
    NO (I) = NODO (IE,I)
  END DO

```

```

B (1) = Y ( NO (2) ) - Y ( NO (3) )
G (1) = X ( NO (3) ) - X ( NO (2) )
B (2) = Y ( NO (3) ) - Y ( NO (1) )
G (2) = X ( NO (1) ) - X ( NO (3) )
B (3) = Y ( NO (1) ) - Y ( NO (2) )
G (3) = X ( NO (2) ) - X ( NO (1) )

```

```

AF(1) = X(NO(2))*Y(NO(3)) - X(NO(3))*Y(NO(2))
AF(2) = X(NO(3))*Y(NO(1)) - X(NO(1))*Y(NO(3))
AF(3) = X(NO(1))*Y(NO(2)) - X(NO(2))*Y(NO(1))
DO I=1,3
  XT(I)=X(NO(I))
  YT(I)=Y(NO(I))
END DO

```

MATRIZ DE FRONTERA

```

DO I = 1,3
  IL = NO (I)
  DO J = 1,3
    JM = NO (J)
    RF(IL,JM)=RF(IL,JM)+(UNO/RE+PG)*B(I)*B(J)+UNO/RE*G(I)*G(J)
    RF(IL+NG,JM)=RF(IL+NG,JM) + PG*B(J)*G(I)
    RF(IL,JM+NG)=RF(IL,JM+NG) + PG*B(I)*G(J)
    RF(IL+NG,JM+NG)=RF(IL+NG,JM+NG)+UNO/RE*B(I)*B(J)+(UNO/RE+PG)*
                                                                G(I)*G(J)
  END DO
END DO

```

```

DO I = 1,3
  IL = NO (I)
  DO J = 1,3
    JM = NO (J)
    IF ( (IL .LE. NN) .AND. (JM .LE. NN) ) THEN
      RK(IL,JM)=RK(IL,JM)+(UNO/RE+PG)*B(I)*B(J)+UNO/RE*G(I)*G(J)
      RK(IL+NN,JM)=RK(IL+NN,JM) + PG*B(J)*G(I)
      RK(IL,JM+NN)=RK(IL,JM+NN) + PG*B(I)*G(J)
      RK(IL+NN,JM+NN)=RK(IL+NN,JM+NN)+UNO/RE*B(I)*B(J)+(UNO/RE+PG)*
                                                                G(I)*G(J)
    END IF

```

```

    IF ( (IL .LE. NN) .AND. (ILO .EQ. 1) ) THEN
      FD = GAUSS(XT,YT,AF(I),B(I),G(I),A,LO,CTE1,CTE2,CTE3)
      FX(IL) = FX(IL) + 4.DO*FD
    ELSE IF ( (IL .LE. NN) .AND. (ILO .EQ. 2) ) THEN
      FD = GAUSS(XT,YT,AF(I),B(I),G(I),A,LO,CTE1,CTE2,CTE3)
      FY(IL+NN) = FY(IL+NN) + 4.DO*FD
    ELSE IF ( (IL .LE. NN) .AND. (ILO .EQ. 3) ) THEN
      FD = GAUSS(XT,YT,AF(I),B(I),G(I),A,LO,CTE1,CTE2,CTE3)
      FX(IL) = FX(IL) + 4.DO*FD
      FY(IL+NN) = FY(IL+NN) + 4.DO*FD
    END IF

```

```

  END DO

```

```

END DO

```

```

END DO

```

```

IF (FLAG) THEN

```

```

  OPEN (UNIT=14,FILE='MAT.DAT')

```

```

    DO I = 1, 2*NN

```

```

      WRITE (14,'(200F6.2)') (RK(I,J),J=1,2*NN)

```

```

    END DO

```

```

  CLOSE (UNIT=14)

```

```

END IF

```

```

END IF

```

```

RETURN

```

```

END

```

```
-----  
SUBROUTINE SI(NDS,RK,RF,FRX,FRY,S,NNI,NN,UL,X,C,IER,AR,FX,FY,FLA)  
-----
```

```
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)  
NDS TAMANO DE LA DIAGONAL
```

```
PARAMETER ( DOS=2.DO, CU=4.DO )  
DIMENSION RK(2*NNI,2*NNI), FRX(1), FRY(1), UL(2*NNI,NDS+1), X(1),  
C(2*NNI,NDS+1), RF(2*NN,2*NN), S(1), FX(1), FY(1)  
CHARACTER*50 F1  
LOGICAL FLA
```

```
WRITE (*,('NNI=',I3)) NNI  
WRITE (*,('BANDA=',I3)) NDS  
WRITE (*,('VECTOR FRONTERA FX'))  
WRITE (*,('200F6.2')) (FRX(I),I=1,NN)  
WRITE (*,('VECTOR FRONTERA FRY'))  
WRITE (*,('200F6.2')) (FRY(I),I=1,2*NNI)
```

```
DO I=1,NNI  
SUM = CERO  
DO J=NNI+1,NN  
SUM = SUM + RF(I,J)*FRX(J)  
END DO  
S(I) = FX(I) - CU*AR*SUM  
END DO
```

```
DO I=1,NNI  
SUM=CERO  
DO J = NN + NNI + 1 , 2*NN  
SUM = SUM + RF(I,J)*FRY(J)  
END DO  
S(I) = S(I) - CU*AR*SUM  
END DO
```

```
JIM = NNI  
DO I = NN + 1, NN + NNI  
SUM = CERO  
JIM = JIM + 1  
DO J=NNI+1,NN  
SUM = SUM + RF(I,J)*FRX(J)  
END DO  
S(JIM) = FY(JIM) - CU*AR*SUM  
END DO
```

```
JIM = NNI  
DO I = NN + 1, NN + NNI  
SUM=CERO  
JIM = JIM + 1  
DO J = NN + NNI + 1 , 2*NN  
SUM = SUM + RF(I,J)*FRY(J)  
END DO  
S(JIM) = S(JIM) - SUM  
END DO  
WRITE (*,('JIM=',I4)) JIM  
WRITE (*,('VECTOR B(I) '))  
DO I=1,JIM  
WRITE (*,*) I, S(I)  
END DO
```

EXTRACCION DE LA SUBMATRIZ

WRITE (*,*)

ALGORITMO PARA SACAR LA PARTE SIMETRICA DE LA MATRIZ

NSUB = NDS + 1

J = NSUB

I = 1

DO WHILE (I .LE. NSUB)

KI = 1

DO WHILE ((J .LE. 2*NNI) .AND. (J .NE. 0))

C (J,I) = RK (KI,J)

KI = KI + 1

J = J + 1

END DO

J = NSUB - 1

I = I + 1

END DO

IF(FLA) THEN

OPEN (UNIT=30,FILE='TRI.DAT')

WRITE (30,('MATRIZ TRIANGULAR'))

DO I=1,2*NNI

WRITE (30,'(200F6.2)') (C(I,J),J=1,NSUB)

END DO

CLOSE (UNIT=30)

END IF

C = L*L(TRAN)

IA = 2*NNI

IU = 2*NNI

NC = NDS

WRITE (*,('NDS=',I3)) NDS

WRITE (*,('NNI=',I3)) NNI

WRITE (*,('NC=',I3)) NC

WRITE (*,('IA=',I3)) IA

WRITE (*,('IU=',I3)) IU

CALL LUDAPB (C,2*NNI,NC,IA,UL,IU,DI,D2,IER)

RESOLUCION DEL SISTEMA

CALL LUELPB(UL,S,2*NNI,NC,IA,X)

WRITE (*,('ARCHIVO SOLUCION '))

READ ('A50'), F1

OPEN (UNIT=63,FILE=F1)

WRITE (*,('SOLUCION'))

DO I=1,NNI

WRITE (*,*) X(I) , X(I+NNI)

WRITE (63,*) X(I) , X(I+NNI)

END DO

CLOSE (UNIT=63)

RETURN

END

```
=====
SUBROUTINE PR (NC,NN,NG,PG,X,Y,A,S,NELE,FX,FY,SUX,SUY,XM,YM,NODO,
C,WK)
=====
```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

PARAMETER (N=3, CERO=0.DO, CINP=0.SDO)

DIMENSION X(1),Y(1), R(N), W(N), T(N), NO(N), NODO(NELE,N), B(N),

G(N), S(1), FX(1), FY(1), SUX(NC,NC), SUY(NC,NC), XM(NC),

YM(NC), C(2,NC,2*NC), WK(2*NC*NC+2*NC), PDS1(N), PDS2(N)

CHARACTER*50 F

```

IF(A .NE. CERO) THEN
WRITE (*,('ARCHIVO PARA LA PRESION '))
READ '(ASO)', F
OPEN (UNIT=69,FILE=F)
CALL PESOS(R,T,W)

DO IE = 1,NELE

DO I = 1,N
NO (I) = NODO (IE,I)
END DO

XX = X(NO(1))*R(1) + X(NO(2))*T(2) + X(NO(3))*W(3)
YY = Y(NO(1))*R(1) + Y(NO(2))*T(2) + Y(NO(3))*W(3)
CALL DXY(SUX,XM,NC,YM,C,WK,PDS1,XX,YY)
CALL DXY(SUY,XM,NC,YM,C,WK,PDS2,XX,YY)
WRITE (69,*) XX, YY, -PG*( PDS1(2) + PDS2(3) )

END DO
CLOSE (UNIT=69)
END IF

```

```

RETURN
END

```

```

=====
SUBROUTINE PESOS(R,S,T)
=====

```

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
PARAMETER ( N = 3 , UNO=1.DO, TRES=3.DO )
DIMENSION R(N), S(N), T(N)

```

```

R(1) = UNO/TRES
R(2) = UNO/TRES
R(3) = UNO/TRES

```

```

S(1) = UNO/TRES
S(2) = UNO/TRES
S(3) = UNO/TRES

```

```

T(1) = UNO/TRES
T(2) = UNO/TRES
T(3) = UNO/TRES

```

```

RETURN
END

```

```

=====
SUBROUTINE SOLX(NC,NNI,IX,IY,XS,A,RH,FX,XM,YM,FLAG)
=====

```

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
PARAMETER (NT=100,CERO=0.DO,UNO=1.DO)
DIMENSION IX(1),IY(1),XS(1),A(0:NC-1,0:NC-1),FX(1),XM(1),YM(1)
CHARACTER*50 FORMA, F
LOGICAL FLAG

```

```

WRITE (*,('FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO '))
READ *, AM
DO I=1,NC
XM(I)=CERO

```

```

      YM(1)=CERO
    END DO
    IF(NC .NE. 0) RES=RH/(DFLOAT(NC-1))
    I=1
    R=CERO
    WRITE (*,('RES=',F10.5)) RES
    DO WHILE(R .LE. RH)
      XM(1) = R
      YM(1) = R
      I = I + 1
      R = R + RES
    END DO
    XM(NC)=RH
    YM(NC)=RH
    DO I=1,NC
      DO J=1,NC
        A(I,J)=CERO
      END DO
    END DO
    K=0
    DO I=1,NC
      DO J=1,NC
        K=K+1
        IF(K .LE. NNI) THEN
          A(IY(K),IX(K)) = XS(K)
        ELSE
          A(IY(K),IX(K)) = FX(K)/AM
        END IF
      END DO
    END DO
  END DO
  RETURN
END

```

```

=====
SUBROUTINE SOLY(NC,NNI,IX,IY,XS,A,RH,FY,FLAG)
=====

```

```

  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
  PARAMETER (NT=100,CERO=0.00,UNO=1.00)
  DIMENSION IX(1), IY(1), XS(1), A(0:NC-1,0:NC-1), FY(1)
  CHARACTER*50 F
  LOGICAL FLAG

  DO I=1,NC
    DO J=1,NC
      A(I,J)=CERO
    END DO
  END DO
  K=0
  DO I=1,NC
    DO J=1,NC
      K=K+1
      IF((K .GT. NNI) .AND. (K .LE. 2*NNI)) THEN
        A(IY(K-NNI),IX(K-NNI)) = XS(K)
      ELSEIF ( K .GT. 2*NNI) THEN
        A(IY(K-NNI),IX(K-NNI)) = FY(K)
      END IF
    END DO
  END DO
  END DO
  RETURN
END

```

```
-----  
SUBROUTINE DXY(F,X,N,Y,C,WK,PDS,XSUM,YSUM)
```

```
-----  
!   Rutina para calcular la derivada del campo de velocidades  
!   F(N,N) : ARREGLO QUE CONTIENE LA SUPERFICIE A SER INTERPOLADA  
!   X(N),Y(N) : COORDENADAS DE LA SUPERFICIE  
!   C(2,N,2*N): COEFICIENTES DEL SPLINE DE INTERPOLACION  
!   W(2*NN+2N): ARREGLO DE TRABAJO  
!   PDS(3) : DERIVADAS PARCIALES  
!   (XSUM,YSUM): PUNTO EN DONDE SERAN CALCULADAS LAS DERIVADAS
```

```
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)  
PARAMETER(UNO=1.DO,CERO=0.DO)  
DIMENSION F(N,N), X(N), Y(N), C(2,N,2*N), WK(2*N*N+2*N),PDS(3)
```

```
DO I=1,2*N*N+2*N  
  WK(I)=CERO
```

```
END DO
```

```
DO I=1,3
```

```
  PDS(I)=CERO
```

```
END DO
```

```
DO I=1,N
```

```
  DO J=1,2*NN
```

```
    C(1,I,J)=CERO
```

```
    C(2,I,J)=CERO
```

```
  END DO
```

```
END DO
```

```
IC=N
```

```
NX=N
```

```
NY=N
```

```
CALL JBCCCU (F,X,NX,Y,NY,C,IC,WK,IER)
```

```
CALL DBCEVL (X,NX,Y,NY,C,IC,XSUM,YSUM,PDS,IER)
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
-----  
DOUBLE PRECISION FUNCTION GAUSS (X,Y,A,B,G,AR,L,CTE1,CTE2,CTE3)
```

```
-----  
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)  
PARAMETER(M=3,UNO=1.DO,CERO=0.DO,DOS=2.DO, TRES=3.DO)  
DIMENSION X(M), Y(M), R(M), S(M), T(M), W(M)
```

```
R(1) = UNO/DOS
```

```
R(2) = UNO/DOS
```

```
R(3) = CERO
```

```
S(1) = CERO
```

```
S(2) = UNO/DOS
```

```
S(3) = UNO/DOS
```

```
T(1) = UNO/DOS
```

```
T(2) = CERO
```

```
T(3) = UNO/DOS
```

```
W(1) = UNO/TRES
```

```
W(2) = UNO/TRES
```

W(3) = UNO/TRES

SUM = CERO

DETJ = (X(1)-X(3))*(Y(2)-Y(3)) - (X(2)-X(3))*(Y(1)-Y(3))

DO I=1,M

XX=X(1)*R(I)+X(2)*S(I)+X(3)*T(I)

YY=Y(1)*R(I)+Y(2)*S(I)+Y(3)*T(I)

FN=(A+B*XX+C*YY)/(DOS*AR)

IF(L .EQ. 0) FC=CTE1

IF(L .EQ. 1) FC=CTE1*XX

IF(L .EQ. 2) FC=CTE1*XX**2

IF(L .EQ. 3) FC=CTE1*(XX-CTE2)**2

IF(L .EQ. 4) FC=CTE1*(YY-CTE2)**2

IF(L .EQ. 5) FC=CTE1*(XX-CTE2)**2 +CTE1*(YY-CTE3)**2

F = FN*FC

SUM=SUM+F*DETJ*W(I)

END DO

GAUSS = UNO/DOS*SUM

END

=====

APENDICE II

DEFINICION

Sea $F: V \rightarrow \mathbb{R}$, se llama derivable direccional en el punto $u \in V$ en la dirección v al límite:

$$F'(u, v) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(u + \lambda v) - F(u)}{\lambda} \quad (\text{AII.1})$$

siempre que exista.

DEFINICION

Si existe $u \in V$ tal que $F'(u, v) = \langle v, u \rangle \forall v \in V$ se dice que F es Gateaux-diferenciable en u . Es decir derivable en todas las direcciones.

TEOREMA (Multiplicadores de Euler-Lagrange)

Consideré el problema de minimización con restricción siguiente:

$$\text{minimize } J(u)$$

$$\text{sueto a } u \in D \text{ tal que } G(u) = 0 \quad (\text{AII.2})$$

suponga que J y G son Gateaux-diferenciable, J tiene un mínimo local bajo la restricción $G(u) = 0$ en el punto regular u_0 , entonces existe un elemento $\lambda \in V^*$, donde V^* es el dual de V tal que la funcional lagrangiana:

$$L(u, \lambda) = J(u) + \langle \lambda, G(u) \rangle \quad (\text{AII.3})$$

es estacionaria en u_0 , es decir:

$$\delta J(u_0) + \lambda \delta G(u_0) = 0 \quad (\text{AII.4})$$

donde (AII.4) esta definido como:

$$\delta J(u_0; v) = \alpha \left[\frac{d}{d\alpha} J(u_0 + \alpha v) \right]_{\alpha=0} \quad (\text{AII.5})$$

REFERENCIAS

- [1].- Adams R.A., *Yakobov Space*, New York, Academic Press, 1975.
- [2].- Alduncin G., Carrera J., *Upsind Approximation of the Transport Equation*, México D.F., IGF, 1988, p.p. 15-23.
- [3].- Argyris J. H., *Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis*, Pergamon, Elmsford, N.Y., 1963.
- [4].- Baker J.A., *Finite Element Computational Fluid Mechanics*, Singapore, McGraw-Hill Book Company, 1985.
- [5].- Clough, R.W., *The Finite Element Method in Plane Stress Analysis*, Proc 2da. Conf. Electronic Computation, American Society of Civil Engineers, Pittsburg, Pennsylvania, 1960.
- [6].- Davies A.J., *The Finite Element, A First Approach*, U.S.A., Oxford University Press, 1977.
- [7].- Davies, O., *Mathematical Methods in Engineering*, New York, John Wiley, 1984.
- [8].- Fortin, M. *Analysis of the convergence of Mixed Finite Element Methods*, R.A.I.R.O, Série Analyse Numérique, Vol 11, 1977, p.p. 344-354.
- [9].- Frederick, Daniel, et.al. *Continuum Mechanics*, Boston, Prentice-Hall, Inc. 1977, p.p. 34-38.
- [10].- Fung, Y.C., *A First Course in Continuum Mechanics*, U.S.A., Prentice-Hall, Inc., 1977, p.p. 241-252.
- [11].- Glowinski R., Lions L.J., Trémolières R., *Analyse Numerique des Inequations Variationnelles*, Paris, Dunod, 1976.
- [12].- Glowinski R., Pironneau O., *Numerical Methods for the First Biharmonic Equation and for the Two-dimensional Stokes Problem*, SIAM Review., Vol. 21, 1979, p.p. 167-212.
- [13].- Glowinski R., Pironneau O., *On Mixed Finite Element Approximation of the Stokes Problem (I)*, Numerische Mathematik Vol. 33, 1979, p.p. 397-424.
- [14].- Glowinski R, Pironneau O., *Approximation par Elements Finis Mixtes du Probleme de Stokes en Formulation Vitesse-pression, Convergence des Solutions Approchees.*, Paris, C.R. Acad. Sc., Serie A, T 286, 1978, p.p. 181-183.
- [15].- Glowinski R, Pironneau O., *Approximation par Elements Finis Mixtes du Probleme de Stokes en Formulation Vitesse-pression, Resoluition des Problemes Approches*, Paris, C.R. Acad. Sc., Serie A, T 286, 1978, p.p.225-228.

- [16].- Glowinski R., Rodin E. Y., et. al., *Energy Methods in Finite Element Analysis*, New York, Wiley, 1979, p.p.243-264.
- [17].- Gurtin, M.E., *An Introduction to Continuum Mechanics*, Nueva York Academic Press, 1981.
- [18].- Hughes, J.R.T., Liu, K.W., Brooks, A., *Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation*, J. Comp. Phys., Vol 30, 1979, p.p. 1-60.
- [19].- Hughes, J.R.T., *The Finite Element Method: Linear, Static and Dynamic*, New York, Prentice-Hall, 1988.
- [20].- Landau, L. D., y Lifshitz, E. M., *Fluid Mechanics*, Adison Wesley, 1959, p.p. 47-50.
- [21].- Long, R. Robert, *Mechanics of Solids and Fluids*, U.S.A., Prentice-Hall, Inc., 1969, p.p. 112-122.
- [22].- Mase, George E., *Mecanica del Medio Continuo*, México, McGraw-Hill, 1977, p.p. 57-60.
- [23].- Nichols, B.D., y Hirt, C.W., *Calculating Three Dimensional Free Surface Flows in the Vicinity of Submerged and Exposed Structures*, Journal of Computational Physics, Vol. 12 No 2, 1973, p.p. 234.
- [24].- Oden, J.T., *Finite Element of Nonlinear Continua*, McGraw-Hill, New-York, 1972.
- [25].- Oden, J.T, Becker, E.B., et.al., *Computational Methods in Nonlinear Mechanics*, U.S.A., The Texas Institute for Computational Mechanics, 1974, p.p. 261-270.
- [26].- Oden, J.T., Carey, G.F., *Finite Elements Mathematical Aspects*, Vol IV, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1983.
- [27].- Oden J.T. and Reddy, *Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*, Wiley, New York, 1976.
- [28].- Polyak B.T., *The Convergence Rate of the Penalty Function Method*, USSR Comput. Math. Mathematical Phys., Vol 11, 1971, p.p 1-12.
- [29].- Reddy, J.N., *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*, Singapore, McGraw-Hill Book Company, 1986, p.p.165-180.,p.p.455-470.
- [30].- Richtmyer, R. D., *Difference Methods of Initial Value Problems*, 2da. Ed., Interscience, New York, 1967.

- [31].- Roache, P.J., *Computational Fluid Mechanics*, Hermosa, Albuquerque, New Mexico, 1972.
- [32].- Rosenhead, L., *Laminar Boundary Layers*, U.S.A., Clarendon, 1963.
- [33].- Temam, R., *Navier-Stokes Equations*, Amsterdam, North-Holland, 1977.
- [34].- Thomasset F., *Implementation of Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, U.S.A., Springer-Verlag, 1981.
- [35].- Tuner, M., Clough, R., Martin, H., and Toppp, L., *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*, J.Aero. Sci. Vol 23 no. 9, 1956 p.p. 805-823.
- [36].- Woods, L.C., *Theory of Subsonic Plane Flow*, Cambridge University Press, 1961.
- [37].- Zienkiewicz O.C., *Finite Elements and Approximation*, Singapore, Wiley, 1983.
- [38].- Zienkiewicz, O.C. and Chung, Y.K., *Finite Element in the Solution of Field Problems*, The Engineer, 1965, p.p. 507-510.