30061 2

UNIVERSIDAD LA SALLE

9
29

ESCUELA DE FILOSOFIA
INCORPORADA A LA U.N.A.M.

"ELEMENTOS METODOLOGICOS EN LA LOGICA MATEMATICA Y SU APLICACION EN LOS CIRCUITOS LOGICOS"

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
LICENCIADO EN FILOSOFIA

P R E S E N T A N :

GRICEL VARELA RUBIO
JOSE TIRADO RODRIGUEZ

MEXICO, D.F. 1988

I N D I C E

CAPITULO III

LOGICA DE COMPUTADORAS

I N T R O D U C C I O N

El avance que la Lógica ha tenido en este siglo, ha revolucionado los modelos anteriores y de aquí la necesidad de poseer una información actualizada y lo más amplia posible que nos permita comprender el momento que nos toca vivir. Por tal motivo seleccionamos este tema relacionado con el conocimiento de los elementos metodológicos y de conceptuación, que intervienen en la construcción y fundamentación de la Lógica Matemática.

Deseamos que el trabajo que hoy presentamos describa y reconozca la importancia de la conceptualización filosófica y metodológica que fundamenta el quehacer lógico - matemático.

Tratamos a lo largo de la presente tesis, señalar las causas que originan las operaciones en la Lógica y en las Matemática como una teoría axiomática formalizada a partir de las perspectivas de la metodología moderna.

Consideramos que la mejor forma de presentar este estudio es la siguiente: Primero hacemos una fundamentación metodológica de las ciencias formales, específicamente la que se refiere a la Lógica Matemática para ir ubicando nuestro tema dentro del panorama filosófico. A continuación presentamos algunos rasgos generales de la Lógica para obtener una perspectiva histórica de la aparición de la Lógica simbólica en el amplio escenario científico.

Posteriormente abordamos conceptos determinantes en el campo de la Lógica matemática que nos permite poseer los elementos conceptuales y metodológicos, y con ellos poder operar con la Lógica simbólica. Conceptos tales como la deducibilidad, implicación y la demostración.

La formalización y la formulación de un lenguaje sujeto a reglas establecidas constituye una estructura indispensable para la construcción de la lógica proposicional y cuantificacional.

Otro aspecto importante en nuestro trabajo lo constituye la axiomática, factor necesario para estructurar la teoría de la Lógica simbólica; al mismo tiempo presentamos las características de completicidad, compatibilidad y consistencia que son inherentes a este método.

Además mostramos en nuestro estudio la aplicación metodológica de la lógica matemática que nos permitirá operar con los elementos de concentuación,metodología y demostración de argumentos.

Finalmente fundamentamos que: Los procesos metodológicos que se utilizan en la lógica matemática son semejantes a los que se utilizan en la Lógica de circuitos, es por eso que presentamos un cuadro comparativo de éstas dos teorías y hacemos resaltar la importancia, necesidad y aplicación de los elementos de la Lógica matemática en el funcionamiento y operación de las computadoras.

CAPITULO I

UBICACION Y ELEMENTOS METODOLOGICOS EN LA LOGICA MATEMATICA

Para dar inicio a nuestro trabajo, partiremos de una división de la Ciencia que propone Mario Bunge, con la finalidad -- de ubicar nuestro tema de investigación en el panorama general- de la ciencia y concretamente en el de la Lógica que es una - disciplina eminentemente filosófica.

C I E N C I A

- FORMAL
  - Lógica
  - Matemáticas
  - Comprobación Formal → Demostración
- FACTUAL
  - Natural
    - Física
    - Química
    - Biología
    - etc.
  - Social
    - Historia
    - Sociología
    - Antropología
    - Derecho
    - etc.
  - Comprobación Empírica → Verificación

En el cuadro anterior, se puede ver claramente que los procesos de comprobación de las ciencias formales (demostración), y de - las factuales (Verificación) se distinguen porque:

a) Las Ciencias formales tratan de razonamientos, postulados, enunciados, axiomas, etc., es decir que la demostración -- con caracter formal posee: un caracter más riguroso, conclusiones dificilmente rebatibles, buscando orden y coherencia en sus enunciados.

La comprobación formal se refiere a la forma con abstracción -- del contenido.

La comprobación formal se basa en conocimientos universales y - necesarios de tal forma que la comprobación lógica objeto de -- nuestro estudio, se basa en los principios lógicos supremos:

1) Principio de identidad A=B
2) Principio de No Contradicción A no es no B
3) Principio de tercero excluso A es B o A no es B
4) Principio de razón suficiente A es la razón de B

Por lo tanto la lógica y las matemáticas lo prueban o demues -- tran.

b) Las ciencias factuales tratan de objetar contenidos específicos, que la verificación con caracter factual posee un -- caracter menos riguroso y las conclusiones están sujetas a re--

visión, buscando orden y coherencia en sus enunciados pero con referencia al contenido.

La comprobación empírica se lleva al cabo principalmente con los procesos de observación y experimentación por lo tanto, en las ciencias naturales y sociales las hipótesis se confirman.

Con la explicación anterior vamos delimitando nuestro tema de estudio, el cual está situado en el área de las ciencias formales, concretamente en el de la lógica. Esto nos da pauta para conocer los elementos conceptuales y metodológicos con los que vamos a fundamentar nuestro trabajo.

La metodológia como parte de la lógica es determinante en nuestro estudio porque es la que nos va a permitir conocer el empleo de las leyes y métodos en el campo de la lógica simbólica. Para facilitar la comprensión y ubicación de este trabajo presentamos en el ámbito filosófico, el siguiente cuadro sinóptico, que nos describe a la metodológia como parte de la lógica y a esta como disciplina cien por ciento filosófica.

L 1.- Lógica Formal: Estudia las leyes lógicas
O
G 2.- Metodología: Estudia empleo de las mismas leyes
I
C 3.- Filosofía de la lógica: Estudia sobre4 la misma lógica y la naturaleza de sus leyes (1)
A

Por tanto nuestro estudio sobre el quehacer lógico-matemático - se centra en el ámbito de la lógica formal y la metodología --- porque el formalismo, la axiomática, la deducibilidad y la de-- mostración son elementos escenciales en la construcción de la - lógica-matemática.

Ahora bien, respecto a la lógica y a las matemáticas debemos -- tener en cuenta lo siguiente:

El campo de las Matemáticas y la Lógica corresponde a un nivel- formal, es decir que las leyes de la Matemática y la Lógica son en general independientes con respecto a la experiencia, pues - en principio cabe considerar a ambos dominios como inmunes a -- todarevisión a nivel de experiencia, esto visto desde una pers- pectiva idealista.

La Matemática y la Lógica son fundamentales en los esquemas --- conceptuales de todas las ciencias porque validan las teorias,- dan coherencia conceptual y les proporcionan rigor científico;- es por esto que nos interesa ver algunas cuestiones metodológi- cas en estos campos científicos. Muchas veces, las leyes de la Matemática y la Lógica son verdaderas simplemente en nuestro -- esquema conceptual, porque se fundamentan en principios univer- sales tales como: " el todo es mayor que cualquiera de las par- tes", " dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre- si", etc.

" A menudo se dice también que las leyes de la Matemática y de-la Lógica son verdaderas, en virtud de los significados de las-palabras " + ", " = ", " si ", " y ", etc. Las cuales dichos e-enunciados contienen." (2)
Sin embargo, esto no quiere decir que las leyes de la Matemática y la Lógica sean inmunes a las revisiones, porque entonces - serían ciencias acabadas y cerradas; la misma historia de la -- ciencia nos ha dicho lo contrario, aunque estas leyes sean centrales y cruciales en nuestro esquema conceptual. Por tanto, - las leyes de la Matemática y la Lógica son "necesarias" pero -- pueden abrogarse.

A lo largo de este trabajo, sale a relucir la importancia de la Lógica como instrumento metodológico general en el quehacer Lógico-Matemático, pero sobre todo por su aplicación en la cons-- trucción de una teoría axiomática formalizada como lo es la Lógica simbólica. Además por la importancia lógica de la impli-- cación tanto en la Lógica como en las Matemáticas.

Cabe hacer otras reflexiones sobre algunas consideraciones me-- todologicas de la Matemática y de la Lógica:

- La Lógica y las Matemáticas se asemejan en sus procedimientos demostrativo-deductivo porque ambos son protagonistas de una -- posición central en el sistema del discurso científico.
- La Lógica y la Matemática parecen diferir en: - La primera --

versa sobre enunciados y sus interrelaciones; sobre la implicación en particular, utilizando demostraciones pero en el lenguaje simbólico, en este caso el de la Lógica proposicional y cuantificacional.

- La segunda trata entidades no lingüísticas, es decir, números, funciones, relaciones, igualdades, etc.
- Por otra parte, vemos que las verdades lógicas como "$(p \wedge q) \rightarrow q$" no tratan solamente enunciados. Es decir, pueden tratar sobre cualquier cosa, según sea su contenido específico.
Por tanto, cuando hablamos de verdades lógicas hablamos de enunciados, pero sucede lo mismo con las verdades matemáticas.

Sin embargo, es necesario tener presente la siguiente diferencia entre las verdades matemáticas y las verdades lógicas: "es un hecho que las verdades matemáticas versan explícitamente acerca de cosas no-lingüísticas abstractas, en particular de numeros y funciones, en tanto que las verdades de la lógica...no tiene como objeto entidades de ese estilo." (3).

Por tanto, de estas relaciones y diferencias entre la matemática y la lógica, podemos concluir que metodológicamente la matemática y la lógica-matemática, muestran procedimientos metodológicos (implicaciones - demostraciones, deducciones, etc) en algunos casos iguales y en otros parecidos.

"La Lógica, en sus más altas prolongaciones, nos conduce a la - Matemática a lo largo de una serie de etapas naturales." (7).

También es necesario tener en cuenta que la construcción de la- lógica simbólica o matemática se lleva al cabo gracias a las -- aportaciones de la metodología moderna específicamente el for-- malismo.

Otra de las relaciones que encontramos son: que los problemas - lógicos no se resuelven con lenguaje ordinario, sino que se re- quiere de la precisión de la formulación matemática; del auxi- lio de un lenguaje tan técnico como el de las matemáticas.

B) ANTECEDENTES E IMPORTANCIA DE LA LOGICA-MATEMATICA

La lógica es un descubrimiento de los griegos (Aristóteles). Aristóteles formuló las reglas de la inferencia de clase, en -- donde a la inferencia que se refiere a la pertenencia a una -- clase se le llama silogismo. Además descubrió que la forma de- una inferencia, debe distinguirse de su contenido. Con el es-- tudio de las formas Lógicas, Aristóteles da el paso decisivo en relación a la ciencia de la Lógica.
Esto es porque la Lógica matemática va a trabajar fundamental-- mente con puras formas sin importar el contenido.

Pero la Lógica Aristotélica abarca solamente algunas formas --- particulares de las operaciones mentales y la lógica de clases, faltando una lógica de relaciones. Es decir Aristóteles no extiende su teoría de la inferencia hasta las relaciones.

Históricamente hablando, la lógica permaneció por más de dos -- mil años en la etapa en que su fundador la dejó. Fue hasta el- siglo XVII cuando Leibniz (1646-1716) se interesó por la Lógica, pero su trabajo quedó desconocido en su época, posterior--- mente en el siglo XIX los matemáticos Boole y De Morgan emprenden la tarea de expresar los principios de la Lógica en un lenguaje simbólico semejante al de la notación matemática.

A finales del siglo XIX es donde encontramos un grupo de mate-- máticos y lógicos que se dedican de lleno a la construcción de la lógica matemática; entre los más importantes encontramos a:- G. Frege (1848-1925), G. Peano (1858-1932), E. Schroerder (1841-1902) y B. Russell (1872) que con su obra "Principia Mathematica" introduce la Lógica matemática en el escenario científico.

A partir de este momento, se considera la lógica simbólica como lógica matemática, la cual surge del terreno de las matemáticas, descubriéndose así otro campo que había sido olvidado y actualmente desempeña una importancia determinante en el quehacer --- científico.

La lógica matemática puede ser tomada como ciencia puramente - teórica, es decir conceptualizar sus propios problemas. En este sentido "busca el único y más sencillo axióma, del que todas las leyes lógicas sean deducibles, o buscan un factor único -- merced al cual puedan definirse todos los factores de un determinado campo de la Lógica." (5).

Es decir, representa la formalización de un sistema axiomático. También nos ofrece el fundamento para poder trabajar con las -- reglas de conclusión deductiva, como se mostrará en la demos--- tración de argumentos.

La Lógica matemática es importante en nuestros días, en el campo de las ciencias deductivas es necesaria su construcción me-- todológica porque:

- Fue la primera ciencia para la que fue desarrollando un método axiomático exacto.

- Su estructura actual representa avances metodológicos y al -- mismo tiempo plantea nuevos problemas de palpitante actualidad.

La Lógica matemática en su forma actual, es una parte de la -- Lógica formal que tiene las siguientes características:

a) La Lógica matemática está axiomatizada.
b) La Lógica matemática está formalizada.

c) La Lógica matemática es relativa porque contiene sistemas distintos.
d) Es expuesta en un lenguaje simbólico y artificial.
e) Su contenido es muy rico en comparación con las otras partes de la Lógica formal.

Por tanto, la axiomatización y formalización de la Lógica matemática tiene un papel esencial en lo que se considera como metodología de la matemática o de las ciencias deductivas.

Es necesario puntualizar el relativismo del fundamento Lógico, es decir, que el relativismo de los sistemas lógico-matemático son actualmente en sí problema metodológico. Por eso para toda demostración se necesita un sistema lógico. Pero ¿cual escoger?. Según Bochenski, la respuesta sería:

" Aquel sistema que permita axiomatizar con facilidad y sin contradicción la disciplina en cuestión". (6). Sin embargo, la propuesta más común entre los metodólogos de las ciencias deductivas en relación al problema, es que entre más sencillas sean las demostraciones y menos axiomas se necesiten, tanto mejor.

La Lógica simbólica ha encontrado diversas aplicaciones en algunos dominios del saber. Por ejemplo, una aplicación importante la encontramos en el análisis gramatical del lenguaje; esto se ejemplifica en el apartado de la lógica cuantificacional. Además, la notación simbolica de la Lógica coloca al cilentífico en posibilidad de descubrir y resolver problemas -- que antes no se tomaban en cuenta.

La construcción de la Lógica simbólica presentó a los investi-- gadores un ángulo muy efectivo y práctico para examinar las re-- laciones entre la Lógica y las Matemáticas.

Según Russell y Whitehead, las Matemáticas y la Lógica son en - última instancia idénticas, porque las matemáticas necesitan -- de una lógica desarrollada, con referencia especial para reali- zar aplicaciones cuantitativas. Por eso, la Lógica simbólica-- ocupa un lugar central en el desarrollo de la ciencia.

La Lógica simbólica se utilizó en la elaboración de una nueva-- disciplina matemática: La teoría de los conjuntos.

Uno de los problemas con el que se enfrenta la Lógica simbólica es el siguiente:¿Quien garantiza que la Lógica se encuentra --- exenta de contradicciones? para dar una respuesta fundamentada- recurrimos a uno de los grandes matemáticos de nuestro tiempo,- el alemán D. Hilbert quien después de realizar una serie de in- vestigaciones sobre la construcción de una demostración apoyada en el formalismo, afirma que la Lógica y las Matemáticas están- exentas de contradicciones. Sin embargo han surgido dificultades porque la demostración se ha hecho sólo para sistemas lógicos relativamente simples, y por lo tanto el problema no ha sido resuelto. Pero así es como avanza el conocimiento, porque "La existencia de estos problemas demuestra el hecho de que la Lógica moderna requiere mayor investigación". (7)

En consecuencia el surgimiento de la Lógica moderna además de su uso en las matemáticas tiene significación para otras ciencias. Por ejemplo: en la Física, en la Biología, en la Computación, etc. convirtiéndose en elemento indispensable para escudriñar en otros campos científicos.

C) IMPLICACION Y DEDUCIBILIDAD

A nivel conceptual podemos distinguir dos términos que son importantes en la estructura axiomática de la Lógica, a saber: la implicación y la deducibilidad. Estos son dos conceptos de CONSECUENCIA que se pueden completar (en el caso de la Lógica matemática) o no; porque la implicación es un concepto que puede existir sin relación a un sistema axiomático. La deducibilidad tiene sentido de ser solamente que sea pensada en relación con un sistema axiomático, por su carácter de extención en las teorías deductivas.

La implicación cumple con el propuesto de un esquema veritativo funcional, en donde la implicación sea la validez, del condi---cional. Por ejemplo:

Para explicar mejor el concepto de implicación, diremos que está formada por un antecedente y por un consecuente enlazados -- por la conectiva," ----→ ".

ejemplo:

p	-----→	q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

Por tanto: " Se dice que un esquema veritativo funcional implica a otro, si no hay ninguna forma de interpretar de las letras de ambos de acuerdo con la cual el primer esquema verdadero y el segundo es falso". (8)

Ejemplo 1: $\sim p$ implica $\sim(p \wedge q)$

$\sim p$	$\dashrightarrow$	$\sim(p \wedge q)$
	V	
	V	
	V	
	V	

Ejemplo 2: $(p \vee q)$ no implica $(p \wedge q)$

$(p \vee q)$	$\dashrightarrow$	$(p \wedge q)$
	V	
	F	
	F	
	V	

Nota: Estas demostraciones por tablas de verdad se comprenden en la construcción de la Lógica simbólica.

Como la implicación es esencial en la construcción de la Lógica matemática, es de vital importancia mencionar que para probar la presencia o ausencia de implicación; validez y consistencia se deben cumplir las cuatro leyes generales que propone E. V. Quine.

"1.- Cualquier esquema se implica a sí mismo.

2.-Si un esquema implica un segundo, y éste un tercero, entonces el primero implica el tercero.

3.- Un esquema inconsistente implica todo esquema y, a su vez, sólo lo implican los esquemas que sean inconsistentes.

4.- Cualquier esquema implica un esquema válido, y cualquiera de este tipo implica únicamente esquemas válidos."

Profundizamos un poco en algunos aspectos de la implicación, porque es un instrumento vital en los esquemas veritativos - funcionales en las demostraciones de argumentos.

La deducibilidad es el otro concepto central en la construcción de la Lógica matemática, que consiste en proceder de lo universal a lo particular pero en un encadenamiento sujeto a reglas lógicas.

Se dice que B es deducible de A en el sistema R, siempre y cuando R contenga axiomas y reglas que permitan tener a B también en R, en caso de que A esté en R.

Por tanto, la implicación puede darse fuera de un sistema axiomatizado. Por ejemplo:

$$p \dashrightarrow q$$

Pero también se da como proceso distinto y complementario a la deducibilidad en la construcción axiomática de la Lógica simbólica.

Ejemplo: Si tomamos un silogismo de la Lógica clásica tenemos:

1.- Todos los hombres son mortales.

2.- Russell fue un hombre.

Luego

3.- Russell es mortal.

- La conclusión (3) implica la premisa (2) porque (2) y -- (3) son verdaderas.

-De (2) no se puede deducir (3).

Por tanto (3) solamente se puede deducir de (1) y -- (2), porque (3) está implicado por (2) PERO NO ES DEDUCI-- BLE DE EL.

En el ejemplo anterior mostramos los alcances y límites -- (en forma muy superficial) de la implicación y la deducibilidad, pero la función de estos conceptos podrá verse claramente en el apartado siguiente que nos presenta la construcción axiomatizada de la Lógica matemática.

D) EL FORMALISMO EN LA LOGICA MATEMATICA

Los matemáticos y lógicos opinan que la metodología moderna propone un rasgo importante: operar con el lenguaje en su -- plano sintáctico, lo cual facilita enormemente la labor intelectual; a esto se le llama formalismo.

La formalización, " es la representación de nuestro pensamiento y nuestro lenguaje aislada de su contenido concreto, en determinadas formas o estructuras que se expresan mediante la -

simbología correspondiente (las formulas)" (9).

Se hace abstracción del significado de los signos que se van a emplear y se consideran como signos gráficos sujetos a determinadas reglas o normas.

La concepción de la Lógica simbólica, representa una formalización considerablemente más compleja que la Lógica clásica, ahora gracias al proceso de formalización, podemos hablar de la Lógica de los enunciados y la Lógica de los predicados; del cálculo de enunciados y del cálculo de predicados.

Respecto al lenguaje formalizado de la Lógica se deben cumplir dos condiciones fundamentales:

a) Establecer ciertas reglas que permitan comprobar los signos admisibles que tengan sentido de la notación simbólica.

b) Formular reglas que determinen que enunciados son correctos.

Desde hace mucho tiempo se viene aplicando el formalismo de las Matemáticas y también nos damos cuenta que cada vez es mayor su aplicación a otras ciencias: En Física, Química, Biología, Medicina, Sociología, etc.

En Matemáticas, el formalismo no es más que la extensión de un método conocido: el cálculo.

Ejemplo:

Si tenemos $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$

Para resolver esta igualdad solamente podemos recurrir a - la regla sintáctica que dice:

" El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más- el cuadrado del segundo término".

Por tanto, aquí vemos una aplicación del formalismo al --- lenguaje de los números.

Para resaltar la importancia de la formalización en la --- ciencia, señalaremos las siguientes reflexiones:

1.- El lenguaje formalizado de la ciencia permite una ma-- yor rigurosidad, exactitud y demostrabilidad, haciendo a un la- do la ambigüedad, confusión e impresión del lenguaje ordinario.

2.- La formalización permite condensar el discurso cientí- fico haciéndolo breve y preciso.

Ejemplo: Einstein utilizó el lenguaje formalizado de la -- matemática para exponer la teoría de la relatividad.

3.- La formalización es un instrumento esencial que sirve- para generalizar el conocimiento en estructuras que pueden re-- ferirse a hechos concretos y particulares.

4.- Gracias a la formalización es posible la creación de - computadoras electrónicas programadas.

5.- Los lenguajes formalizados son importantes a nivel --- universal porque se facilita la comunicación científica e in--- tercambio de información.

Por tanto, la formalización del lenguaje en la Lógica ma--

temática es indispensable.

El formalismo es pues, un método que consiste en hacer --- abstracción total del sentido eidético (lo que significa) de - los signos y operar (saber como operar con él) con ellos a base de reglas.

De aquí se desprende lo que algunos dicen en tono de risa: " el que emplea el formalismo no sabe lo que dice, pero lo que- dice es verdad".

Proponemos algunas observaciones que se deben seguir para- construir un sistema formalizado con el de la Lógica simbólica.

a) La finalidad del cálculo y de la formalización, es --- aplicable a un campo del saber, y velar porque sus re-- sultados finales sean interpretable eidéticamente.

b) Las reglas del formalismo deben de estar dotadas de --- sentido eidético: es decir: entenderlas.

c) En la construcción de un sistema formalizado se debe -- proceder: primero estableciendo los signos con sentido- y después hacer abstracción de ellos, construyendo así- el sistema formal y por último, dar una interpretación.

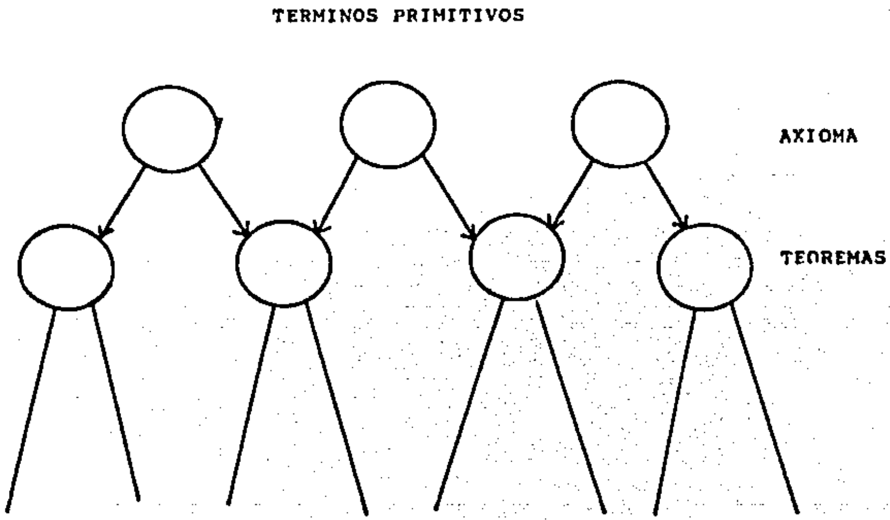
d) Al construirse un sistema formalizado deben tenerse en- cuenta las reglas del sistema.

Por tanto, el formalismo dentro de un sistema axiomatizado como en la Lógica-matemática permite deducir todas las conse--- cuencias de los axiomas escogidos.

E) EL METODO AXIOMATICO EN LA LOGICA MATEMATICA

El sistema axiomático consiste, en dividir los enunciados de un campo del saber en dos clases: La de los axiomas y la de los enunciados deducidos a partir de los axiomas. Por eso el método axiomático a constituído siempre (desde Euclides) un proceso determinado para construir una teoría.

Construcción esquemática de una teoría axiomática:



Primeramente se establecen términos primitivos, depués se toman proposiciones iniciales llamados axiomas (se aceptan sin- demostración) y a continuación por vía deductiva, se infieren - los teoremas de los axiomas.

Frente al sistema clásico (axiomático) la metodología mo-- derna presta las variaciones siguientes:

1.- Los sistemas axiomáticos formales se presentan mediante axiomas expresados simbólicamente y reglas de con-- clusión.

2.- En la construcción axiomática formal de las teorías -- (en este caso de la Lógica simbólica) se hace abs---- tracción de todo el sentido de los símbolos y de sus - combinaciones y solamente se los combina según reglas- estrictamente determinadas.

3.- Con la formalización, un axioma se distingue de los o- tros, enunciados del sistema, sólo por el hecho de que no es deducible en el sistema.

4.- Distinción entre ley y regla. Los axiomas son leyes - y las reglas son indicaciones (no son leyes).

5.- Con la distinción entre ley y regla se ha relativizado el concepto de deducción, ahora se habla de deducción- en relación a un determinado sistema.

6.- " No se puede formalizar........ por completo ninguna- teoría con contenido: en ella, de uno u otro modo ha-- brá tesis no deducibles de axiomas". (Kurt Gödel ---- 1931).

Después de haber analizado estas consideraciones de la metodología moderna, al mismo tiempo las presentamos como consideraciones metodológicas de la Lógica-matemática, ya que son las que hicieron posible los sistemas axiomáticos formalizados. " Los sistemas axiomáticos formales - el cálculo de predicados- en Lógica son el ideal de una construcción y una demostración rigurosa para cualquier teoría". (10)

De lo anterior, podemos decir, que un sistema axiomático moderno está constituído por:

MATEMATICAS	LOGICA MATEMATICA
Términos indefinidos	Términos indefinidos
↓	↓
Axiomas	Axiomas
↓	↓
Reglas de conclusión	Reglas de conclusión
↓	↓
Teoremas	Enunciados deducidos

Nota: También en la construcción de un sistema axiomático formalizado tienen función las definiciones.

Una de las aportaciones, más importantes del sistema axiomático es que no sea contradictorio y de aquí se desprende lo fundamental: la rigurosidad de la construcción. Por eso, el método-axiomático ha sido y seguirá siendo un elemento necesario y determinante en la construcción de teorías científicas, especialmente en las ciencias formales.

Finalmente describimos tres características esenciales del método axiomático para hacer resaltar su significación metodológica en la elaboración de las teorías axiomáticas formalizadas, específicamente de la Lógica matemática, que en la actualidad es el prototipo de un sistema axiomático formal.

1.- El método axiomático es el que proporciona a las teorías una estructura armónica y sistemática.

2.- La construcción axiomática de una teoría tiene un carácter más riguroso y demostrativo; por ejemplo: la construcción de la Lógica matemática tratada posteriormente en este trabajo.

3.- El método axiomático permite poner de manifiesto las estructuras comunes de las diversas teorías y con ello formular amplias generalizaciones.

Por último, queremos hacer saber que los elementos metodológicos y de conceptuación tratados en el presente trabajo no son normas generales que digan la última palabra sobre el tema; por el contrario, son solamente algunos esbozos que manifiestan someramente la encrucijada metodológica de las ciencias formales.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

(1) Bochenski I.M. Los Métodos Actuales del Pensamiento. -- Ed. Rialp Madrid 1981. pág. 25

(2) Quine W.V. Los Métodos de la Lógica. Ed. Ariel. Barcelona. 1981. pág. 18

(3) IBIDEM. pág. 19

(4) IBIDEM. pág. 20

(5) Bochenski I.M. Los Métodos actuales del Pensamiento. --- Ed. RIALP. Madrid 1981. pág. 134

(6) IBIDEM. pág. 140

(7) Reichenbach Hans. La Filosofía Científica. Ed. F.C.E.- México 1981. pág. 234

(8) Quine W.V. Ob. Cit. pág. 64

(9) Nagel E. y Newman. El Teorema de Gödel CONACYT. México- 1981. pág. 74

(10) Kudrin A.K. La Lógica y La Verdad. Ed. Cartago. México 1983. pág. 95

CAPITULO II

CONSTRUCCION FORMAL DE LA LOGICA SIMBOLICA

a) CONSIDERACIONES

En la construcción de la presente teoría matemática se pretende explicar la estructura propuesta por Hilbert, para establecer la prueba de una consistencia absoluta.

La construcción se refiere a las leyes sobre ordenación de números.

I Términos primitivos - Primeramente se establecen los términos o tipos de signos que se van a utilizar en el cálculo dentro del sistema.

N número, , , x+y

variables: x , y

símbolo: +

II Axiomas - A partir de ciertos principios que se aceptan sin demostración (axiomas) se van a deducir una serie de teoremas a partir de ciertas reglas de construcción establecidas en el sistema.

III Teoremas - El propósito de Hilbert era el de presentar cualquier cálculo matemático en el que las fórmulas deducidas se relacionaran mutuamente en número finito de relaciones estructurales dentro de un sistema.

En este caso los teoremas deducidos de los axiomas son 8.

CONSTRUCCION DE UNA TEORIA AXIOMATICA MATEMATICA

LEYES SOBRE LA ORDENACION DE NUMEROS

I.- TERMINOS PRIMITIVOS

Número N ,   , $x + y$

variables: x , y

símbolo: +

II.- AXIOMAS

1º Grupo

Expresan propiedados fundamentales

<u>Axioma 1</u>

Para número cualquiera x e y

vale: $x = y$ ó $x < y$ ó $x > y$

Axioma 2

Si $x < y$, entonces $y \not< x$

Axioma 3

Si $x > y$, entonces $y \not> x$

Axioma 4

Si $x < y$ e $y < z$, entonces $x < z$

Axioma 5

Si $x > y$ e $y > z$, entonces $x > z$

III.- TEOREMAS

Teorema 1

Ningún número es menor que sí mismo.

TESIS : "$x \nless x$"

DEMOSTRACION (Por reducción al absurdo)

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $x < x$	Por negación de la tesis
2. $x \nless x$	Axioma 2 en (1)
3. $x < x$ y $x \nless x$	(1) y (2)
4. $\therefore$ $x \nless x$	De (2) y (1) L.Q.Q.D.

Teorema 2

Enunciado:

"Ningún número es mayor que sí mismo"

TESIS: "$x \ngtr x$"

DEMOSTRACION (Por reducción al absurdo)

AFIRMACIONES RAZONES

1. $x > x$ .... Por negación de tesis
2. $x \ngtr x$ .... Axioma 3 en (1)
3. $x > x$ y $x \ngtr x$ .... (1) y (2)
4. $\therefore$ $x \ngtr x$ .... De (2) y (1) L.Q.Q.D.

Teorema 3

Enunciado:

" $x > y$ sí, y sólo sí, $y < x$"

TESIS : " $x > y$ e $y < x$, son equivalentes"

DEMOSTRACION

AFIRMACIONES RAZONES

1. $y < x$ .... Tesis
2. $x=y$, $x < y$, $x > y$ .... Axioma 1
3. Suponemos $x = y$ .... Por identidad
4. $y < y$ .... Sustituyendo (3) en (1)
5. Si $y < y$, entonces $x \neq y$ .... Teorema 1
6. $x \nless y$ .... Axioma 2 en (1)
7. Si $x \nless y$ y $x \neq y$ entonces $x > y$ .... Axioma 1 en (5) y (6)
8. $\therefore$ Se cumple que $x > y$ si, solo si $y < x$..... Por (1) y (7) L.Q.Q.D.

Teorema 4

Enunciado:

"Si $x \neq y$, entonces $x < y$ ó $y < x$"

TESIS: "Si $x \neq y$, entonces $x < y$ ó $y < x$"

DEMOSTRACION

	AFIRMACIONES	RAZONES
1.	$x \neq y$	Tesis
2.	$x < y$ ó $x > y$	Axioma 1
3.	$x > y$ si, y sólo si $y > x$	Teorema 3
4. $\therefore$	$x < y$ ó $y > x$	Sustituyendo (3) en (2)
5.	Si $x \neq y$, entonces $x < y$ ó $y < x$	Axioma 1 y 3 de (1) y (4) L.Q.Q.D.

Teorema 5

Enunciado:

"Si $x \neq y$, entonces $x > y$ ó $y > x$"

TESIS: "Si $x \neq y$, entonces $x > y$ ó $y > x$"

DEMOSTRACION

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $x \neq y$	Tesis
2. Si $x \neq y$, entonces $x < y$ ó $x > y$..........	Axioma 1 en (1)
3. $x < y$ si, y sólo si $y > x$.................	Teorema 3
4. Si $x \neq y$, entonces $y > x$ ó $x > y$..........	Sust. (3) en (2)
	L.Q.Q.D.

Teorema 6

Enunciado:

"Dos números cualesquiera "x" e "y" satisfacen - una y solo una, de las tres fórmulas: $x = y$, --- $x < y$ ó $x > y$"

TESIS: " Dos números cualesquiera "x" e "y" satisfacen una y - solo una, de las tres fórmulas: $x = y$, $x < y$ ó $x > y$"

DEMOSTRACION

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $x = y$....................................	Axioma 1
2. $x < y$....................................	Axioma 1
3. $x > y$....................................	Axioma 1
4. Si $x = y$, entonces $x < x$.................	Sust. (1) en (2)
5. $x < x$ y $x \nless x$, es falso...............	Contradicción -- del (4) con --- teoría 1

6. $\therefore x = y$ y $x < y$, no se dan al
mismo tiempo................................(5) y (1)

7. Si $x = y$, entonces $y > y$ ....Sust. (1) en (3)

8. $y > y$ y $y \not> y$, es falso.................Contradicción -- del (7) con T. 1

9. $\therefore$ $x = y$ y $x > y$, no se dan al
mismo tiempo................................(8) y (1)

10. $y > x$ sí y sólo si $x < y$..................Teorema 3

11. $\therefore$ Dados dos números "x" e "y" cualesquiera, sólo satisface una y sólo una de las tres-- fórmulas: $x = y$, $x < y$ ó $x > y$............(6) (9) y (10)--

L.Q.Q.D.

IV .- DEFINICIONES

Definición 1

Decimos que $x \leq y$ si, y sólo si, $x = y$ ó $x < y$

Teorema 7

Enunciado:

" $x \leq y$ sí y sólo sí, $x \not> y$

TESIS: "$x \leq y$ es equivalente a $x \not> y$"

DEMOSTRACION

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $x \nless y$	Tesis
2. Si $x \nless y$, entonces $x = y$ ó $x < y$	Axioma 1
3. $x = y$ ó $x < y$ sí y sólo sí, $x \leq y$	Def. 1
4. $\therefore$ $x \nless y$ si y sólo si, $x \leq y$	Sust. (3) en (2)
	L.Q.Q.D.

Teorema 8

Enunciado:

" $x < y$ si, y sólo si, $x \leq y$ y $x \neq y$"

TESIS: " $x < y$ si, y sólo si, $x \leq y$ y $x \neq y$"

DEMOSTRACION

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $x < y$ si, y sólo si, $x \leq y$	Def. 1
2. Si $x < y$, entonces $x \neq y$	Teorema 6
3. $\therefore$ $x < y$ si, y sólo si, $x \leq y$ y $x \neq y$	De (1) y (2) ---
	L.Q.Q.D.

La finalidad de haber presentado la estructura de esta -- teoría matemática, fué la de señalar esquemáticamente, como están fundamentados y relacionados los contenidos de un campo del saber, tomando como esencial: La axiomática, el formalismo, la-deducción las definiciones y la demostración. Esta estructura-matemática nos ayudará a entender la construcción de la Lógica-simbólica y comprender su prueba de consistencia.

Pretendemos en este punto, describir como está construída-- la Lógica simbólica desde la perspectiva de una teoría axiomá- - tica formal. Antes de establecer los términos primitivos, los - axiomas y los teoremas, la teoría formal de la Lógica matemáti-- ca debe reunir las siguientes condiciones:

"a) Poseer un conjunto finito de símbolos con los que se - va a operar en el sistema.

b) Debe existir un conjunto de fórmulas bien formuladas - (F.b.F) en el sistema.

c) Establecer un conjunto de fórmulas bien formuladas y - se les designe como el conjunto de axiomas del sistema.

d) Existe un conjunto finito de ralaciones entre las --- F.b.F. determinadas por las reglas de inferencia." (1)

En la construcción y fundamentación de esta teoría, la de- ducibilidad va a ser el camino preciso para demostrar que los - razonamientos son válisdos.

Un argumento es simplemente una serie de proposiciones en- donde una de ellas que se llama conclusión, se desprende, se -- deduce de las anteriores llamadas premisas. Al decir que un ar- gumento es válido, entendemos que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

El método deductivo está considerado como un instrumento - esencial para toda la ciencia, y en particular para operaciona- lizar en el campo de la Lógica y las Matemáticas. Gracias a su aplicación, toda duda referente al contenido de los conceptos y a la verdad de las aserciones de la teoría dada se reduce considerablemente.

En el caso de la construcción axiomática formal del cálculo proposional, el conocimiento del método deductivo es de importancia fundamental, ya que sin tal conocimiento es imposible aprender la naturaleza de la Lógica matemática.

En la construcción de nuestro sistema, al establecer un enunciado en base a otros, nos referimos a este proceso como una "derivación" o "deducción", y decimos que el enunciado establecido ha sido derivado o deducido o es consecuencia de esos otros enunciados (axiomas).

Por tanto, podemos afirmar que la deducibilidad en el sistema axiomático formal de la lógica proposicional nos permite comprender en forma general la construcción y relación de los elementos que intervienen en este cálculo. Es decir, nos permite conocer si todas las definiciones y demostraciones cumplen su cometido: las definiciones aclarando el sentido de los conceptos definidos y las demostraciones mostrando validez de los teoremas deducidos de los axiomas.

Otro elemento metodológico determinante que interviene en nuestra teoría es la demostración, entendida como el conjunto de proposiciones o razonamientos que sirven como antecedentes para obtener una conclusión por medio de la inferencia. Podemos decir, que la demostración fundamenta la deducibilidad en nuestro sistema, ya que en ella encontramos las razones básicas de las afirmaciones dadas.

Además, la demostración nos muestra la corrección formal de la vinculación lógica entre cada teorema y los axiomas, bien sea inmediatamente o mediante otros teoremas demostrados con anterioridad.

En el nivel correspondiente de nuestro sistema, la demostración se formula determinando en primer lugar el problema o teorema a probar, conocido también como "Hipótesis", para proceder luego a mostrar la validez del mismo por medio de un proceso deductivo, apoyándose en axiomas establecidos inicialmente, o en otros teoremas ya demostrados. A su vez, el resultado obtenido servirá de base para nuevas demostraciones.

Con lo presentado en este punto del trabajo, podemos afirmar que la Lógica simbólica es fundamentada en un sistema axiomático formalizado, en donde la deducción y la demostración juegan un papel determinante.

Ahora procederemos a señalar las partes estructurales que conforman el sistema axiomático para el cálculo proposicional:

I TERMINOS PRIMITIVOS

Se establece los símbolos de la teoría axiomática formal: términos descriptivos y constantes lógicas en donde los símbolos $\sim$ y $\rightarrow$, son llamados Conectivos Primitivos.

Posteriormente se procede a delimitar algunas considera--- ciones para poder entender y operar con el sistema axiomático - formal de la Lógica simbólica.

A) Todas las letras proposicionales son fórmulas bien formuladas (F.b.F.)

B) Si p y q son F.b.F también h serán " $\sim p$" y "$p \rightarrow q$"

C) Una secuencia finita de símbolos en el sistema formal - es una F.b.F. si cumple con lo dicho en (a) y (b). Es - decir que cualquier proposición es una F.b.F. si se --- forma a partir de las letras proposicionales y enlaza-- dos por los conectivos, $\sim$ y $\rightarrow$.

II AXIOMAS

Si p,q y r son cualquier F.b.F. del sistema, entonces los- siguientes son axiomas del sistema formal:

A1 $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

A2 $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

A3 $(\sim q \rightarrow \sim p) --- ((\sim q \rightarrow p) \rightarrow q)$

La regla de inferencia del sistema formal es la del MODUS- PONENDO PONENS.

$p \longrightarrow q$

p

$\vdash$

q

En donde q es una consecuencia directa de p y p --- q.

Tener en cuenta que el conjunto infinito de axiomas del -- sistema está contenido en los tres esquemas axiomáticos (A1) -- (A2) (A3), en donde cada esquema es establecido para un número- infinito de axiomas.

En el desarrollo que llevamos no han aparecido los conec-- tivos de "$\wedge$", "V", " $\longleftrightarrow$ ", para establecerlos procederemos a las definiciones:

D1) $p \wedge q$ para $\sim(p \longrightarrow \sim q)$

D2) $p \vee q$ para $\sim p \longrightarrow q$

D3 $p \longleftrightarrow q$ para $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

Las proposiciones que se han escrito del lado derecho son- "proposiciones equivalentes" de las que se han definido.

Hasta aquí, podemos afirmar con lo anterior expuesto que - el sistema formal de la Lógica matemática es AXIOMATICO, porque- a partir de los tres esquemas axiomáticos señalados, se pueden- deducir los teoremas dentro del sistema.

Ahora bien, en todo sistema axiomático formalizado la de-- ducibilidad es de vital importancia, ya que sin ella no podríamos construir la Lógica simbólica, por esta razón, creimos --- conveniente enunciar el teorema de la deducción para resaltar-- su función metodológica en la construcción de la teoría en --- cuestión.

Teoremas de la deducción: "Si Γ es un conjunto de F.b.F. y A y B son F.b.F. y Γ , A $\vdash$ B, entonces $\Gamma \vdash A \supset B$

En particular, si A $\vdash$ B, entonces $\vdash A \supset B$. (Her---- brand 1930)".

Esto quiere decir: si tenemos un conjunto de premisas (Γ), en donde A y B son F.b.F. del conjunto (Γ), y si ocurre que B- es consecuencia o deducción de A entonces ocurre que ($A \supset B$)- es consecuencia o deducción de (Γ). Por tanto, podemos cons- truir una deducción de $A \supset B$ a partir de las fórmulas de (Γ).

Para ejemplificar el teorema de la deducción, presentamos- un ejercicio para su mejor comprensión.

Demostrar que: $p \rightarrow q,\ q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$ Es una deduc-- ción.

1.- $p \rightarrow q$	Hip.
2.- $q \rightarrow r$	Hip.
3.- p	Hip.
4.- q	M.p.p 1,3
5.- r	M.p.p 2,4

Por tanto, si $p \rightarrow q,\ q \rightarrow r,\ p \vdash r$, entonces por el - teorema de la deducción tenemos:

$p \rightarrow q,\ q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$ L.Q.Q.D

Enunciamos tres propiedades de deducción:

1.- Si $\Gamma \subseteq \Delta$ y $\Gamma \vdash$ A, entonces $\Delta \vdash$ A

2.- $\Gamma \vdash$ A si y sólo si existe un conjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \vdash$ A.

3.- Si $\Delta \vdash$ A, y para toda B en A, $\Gamma \vdash$ B, entonces $\Gamma \vdash$ A.

III TEOREMAS

Para cualquiera F.b.F. p,q, las siguientes son teoremas del sistema axiomático de la lógica proposicional.

Teorema	1	$\sim\ \sim q \rightarrow q$
Teorema	2	$q \rightarrow \sim\ \sim q$
Teorema	3	$\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$
Teorema	4	$(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (p \rightarrow q)$
Teorema	5	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
Teorema	6	$p \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim (p \rightarrow q))$
Teorema	7	$(p \rightarrow q) \rightarrow ((\sim p \rightarrow q) \rightarrow q)$

Hemos señalado los puntos más importantes para construir la teoría axiomática de la Lógica proposicional a partir de: I. Términos Primitivos, II. Axiomas, III. Teoremas.

TEOREMA 1

q	$\sim$	$\sim q$	$\rightarrow$	q
V	V		V	V
F	F		V	F

En este caso ocurre una tautología. Por tanto, el teorema I es válido.

TEOREMA 2

q	q	$\rightarrow$	$\sim\sim q$
V	V	V	V
F	F	V	F

En este caso también el teorema 2 es válido pues ocurre una tautología en la condicional.

TEOREMA 3

p	q	$\sim p$	$\rightarrow$	$(p \rightarrow q)$
V	V	F	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

El teorema 3 es válido por ser tautológico en la condicional.

TEOREMA 4

p	q	(~q	-->	~p)	-->	(p --> q)
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	F	V	F
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

El teorema 4 es vá--lido por ser tauto--lógico en la condi--cional.

TEOREMA 5

p	q	(p --> q)	-->	(~q --> ~p)
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

El teorema 5 es vá--lido por ser tauto--lógico en la condi--cional.

TEOREMA 6

p	q	p	-->	(~q	-->	~(p --> q))
V	V	V	V		V	
V	F	V	V		V	
F	V	F	V		V	
F	F	F	V		F	

El teorema 6 es vá--lido por ser tauto--lógico en la condi--cional.

TEOREMA 7

p	q	$(p \to q) \to [(\sim p \to q) \to q]$		
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

El teorema 7 es válido por ser tautológico en la condicional. (2)

Por tanto, en este punto hemos descrito en forma muy sencillo la formación, deducción y demostración en una construcción axiomática formalizada de la Lógica matemática.

CONSIDERACIONES Y PRUEBA DE CONSISTENCIA EN LA LOGICA MATEMATICA

Kurt Gödel (matemático alemán) en su obra "sobre las --- proposiciones formalmente indecibles de los principia mathema-- tica y sistemas conexos" realiza una serie de reflexiones y a-- portaciones, en relación a la fundamentación y construcción de- de los sistemas axiomáticos formales en el campo de la Lógica - y la Matemática. Es importante hacer notar que actualmente las- conclusiones establecidas por Gödel representan ideas revolucio- narias por su honda significación filosófica. (3)

Para poder ubicar las reflexiones de la metodológia moder- na y de Gödel, empesaremos por puntualizar:

1° El método axiomático clásico fue la base para fundamen- tar la geometría Euclidiana, a tal grado que, la forma- axiomática de la geometría era tomada como modelo del - conocimiento científico.

2° Pero desde el siglo XIX y con base en las aportaciones- de la metodológia moderna, se fue admitiendo tácitamen- te, que todos los sectores del pensamiento matemático - podrían deducirse la totalidad de las proposiciones o - teoremas.

3° -- Con la publicación del trabajo de Gödel en 1931, --- éste demostró que la suposición anterior era insosteni- ble porque:

a) Ni la aritmética ordinaria puede ser plenamente --axiomatizada.

b) Es imposible establecer la consistencia lógica in---terna de una amplia clase de sistemas deductivos, a-menos que se adopten principios tan complejos de ra-zonamiento que su consistencia interna quede tan su-jeta a duda como la de los sistemas. (4)

Con estas aportaciones, no se puede establecer una comple-ta sistematización final de muchas áreas de las matemáticas; --es decir, no se puede garantizar absolutamente que no pueda ha-ber una contradicción interna en alguna parte de las matemáti--cas. Sin embargo, esto no significa que neguemos el avance de-la metodología moderna; sino que tenemos más fundamentos para -seguir investigando en el campo de las ciencias formales.

A continuación tratarémos de explicar las consideraciones-presentadas, para aclarar más detalladamente el avance metodo--lógico y de fundamentación en torno al quehacer lógico - mate--mático y así poder establecer el adelanto e importancia de las-demostraciones de Gödel.

A partir del siglo XIX, parece ser que los filósofos y ma-temáticos se preocupan nuevamente por investigar los métodos y-fundamentos de las ciencias formales, teniendo por resolver va-rios problemas, entre los más importantes tenemos:

- Uno de los problemas más importantes era el que se refe-ría al 5° postulado de Euclides (el de las paralelas). Desde -la antigüedad el problema consistía en que su evidencia estuvoen duda y por tanto, trataron de deducirlo de otros axiomas euclidianos que consideraban claramente evidentes.

Fue hasta el siglo XIX en que Gauss, Bolyai, Lovachevsky y Riemann demostraron "La imposibilidad de deducir de otros axiomas al axioma de las paralelas" . Con esto se estableció - que Euclides no había dicho la última palabra y al mismo tiempo se afirmó que pueden construirse nuevos sistemas de geometría;- como el de las geometrías no euclidianas.

Con base en lo anterior, se admitió que las matemáticas -- eran algo mucho más abstracto y formal de lo que se había creído.

Con la introducción del formalismo y las nuevas perspectivas de la metodológia se abrió el campo a una gran variedad de- sistemas a aplicarse en las matemáticas.

Pero a raíz de los sistemas axiomáticos formalizados apa-- reció un problema serio "suscitó la cuestión de si un determi-- nado conjunto de postulados erigidos como base de un sistema es internamente consistente, de tal modo que no puedan deducirse - teoremas mutuamente contradictorios a partir de esos postula--- dos." (5). Por tanto, el problema esencial ahora es el de la- consistencia; es decir, que no exista contradicción en un sis-- tema axiomático.

De esto, se desprenden otros problemas:

-El problema de las geometrías no euclidianas era el de -- establecer la consistencia interna de sus sistemas.

En la geometría riemanniana se plantea la cuestión ¿ Cómo puede mostrarse su consistencia? Es evidente que la respuesta no se da por el hecho de que los teoremas deducidos no se contradicen entre sí, porque subsiste la posibilidad de que el siguiente teorema deducido sea contradictorio.

Hasta que se resuelva esto, no podemos afirmar con certeza total que las geometrías no euclidianas son igualmente válidas matemáticamente que la de Euclides.

La solución a este problema fue el de idear un modelo para los postulados abstractos del sistema, en donde cada postulado sea una afirmación verdadera respecto del modelo.

En el caso de la geometría reimanniana se intenta demostrar su consistencia apoyándose en la consistencia de la geometría euclidiana.

En los esquemas siguientes, representamos la geometría no euclidiana de Riemann en modelo euclidiano.

Las lineas se convierten en círculos máximos.

Porción limitada por segmentos de lineas rectas, son arcos de círculos máximos.

Dos segmentos de línea recta, son dos segmentos de círcu-- los máximos.

El plano de Riemann se convierte en una esfera euclidiana.

Pero el problema de consistencia sigue existiendo porque - solamente fue desplazado a otro terreno. Por tanto, la geome-- tría de Riemann es consistente si lo es la euclidiana.

Otro problema respecto a la consistencia de los sistemas - lo encontramos en Hilbert, quien también utilizó el mismo méto- do, demostrando la consistencia de los postulados euclidianos,- apoyándose en un modelo algebráico.

Por tanto, la argumentación de Hilbert radica en demostrar la consistencia de sus postulados geométricos, basándose en la- consistencia del sistema algebráico.

De la presentación de los problemas anteriores referentes- a la consistencia, podemos concluir las siguientes ideas:

" Los modelos finitos bastan, en principio, para demostrar la consistencia de ciertos conjuntos de postulados, pero éstos- tienen una muy escasa importancia de la matemática. Los mode-- los no finitos, necesarios para la interpretación de la mayoría de los sistemas de postulados matemáticamente importantes, sólo pueden ser descritos en términos generales; y no podemos dar -- por sentado que las descripciones se hallen exentas de ocultas- contradicciones." (6)

Por tanto, hemos visto la importancia del problema de la consistencia y también hemos tratado de resolverlo con ayuda de modelos; pero a pesar de que es una importante herramienta metodológica, no proporciona una respuesta definitiva. Sin embargo, Hilbert además de utilizar modelos para resolver el problema de la consistencia, trató de construir pruebas absolutas de consistencia apoyándose en el formalismo.

Lo esencial para construir una prueba absoluta, es la completa formalización de un sistema deductivo. En un sistema completamente formalizado, la deducción de teoremas a partir de los postulados se limita, siguiendo las reglas establecidas en el sistema.

Los sistemas axiomáticos formales tanto en las matemáticas, como en la Lógica tienen por finalidad mostrar la estructura lógica del razonamiento matemático.

Por tanto, la aportación de Hilbert al construir pruebas absolutas de consistencia, radica en la utilización de un cálculo formal y su descripción. Esta aportación trajo como consecuencia en la construcción de teorías matemáticas y en la construcción de la Lógica matemática.

Para poder entender con facilidad la prueba de consistencia para el cálculo proposicional, describimos a continuación el concepto de tautología: ocurre una tautología cuando al realizar la tabla de verdad de una proposición compuesta, en su conectiva principal resultan ser todos los valores verdaderos.

Prueba de consistencia para el cálculo proposicional.

Los pasos a seguir son:

1.- Todo axioma del sistema es una tautología.

Axioma 1 $\quad p \dashrightarrow (q \dashrightarrow p)$

p	q	p -->	(q --> p)
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Es tautológica.

Axioma 2

$$\left[p \dashrightarrow (q \dashrightarrow r)\right] \dashrightarrow \left[(p \dashrightarrow q) \dashrightarrow (p \dashrightarrow r)\right]$$

p	q	r	$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
			V
			V
			V
			V
			V
			V
			V
			V

Es tautológica

Axioma 3

$$(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow [(\sim q \rightarrow p) \rightarrow q]$$

p	q	$(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow [(\sim q \rightarrow p) \rightarrow q]$
		V
		V
		V
		V

Es tautológica

Por tanto, se cumple el paso (1).

II.- EL SER TAUTOLOGIA ES UNA PROPIEDAD HEREDITARIA.

Se comprobó que los axiomas son tautológicos, entonces esta característica se debe heredar a los teoremas.

III.- TODA FORMULA CORRECTAMENTE DERIVADA DE LOS AXIOMAS -- (LOS TEOREMAS) ES TAMBIEN UNA TAUTOLOGIA.

TEOREMA 1 $\sim\sim q \dashrightarrow q$

q	$\sim\sim q \dashrightarrow q$
	V
	V

Es tautológica

TEOREMA 2 $q \dashrightarrow \sim\sim q$

q	$q \dashrightarrow \sim\sim q$
	V
	V

Es tautológica

TEOREMA 3 $\sim p \dashrightarrow (p \dashrightarrow q)$

p	q	$\sim p \dashrightarrow (p \dashrightarrow q)$
		V
		V
		V
		V

Es tautológica

TEOREMA 4 $(\sim q \dashrightarrow \sim p) \dashrightarrow (p \dashrightarrow q)$

p	q	$(\sim q \dashrightarrow \sim p) \dashrightarrow (p \dashrightarrow q)$
		V
		V
		V
		V

Es tautológica

TEOREMA 5 $(p \dashrightarrow q) \dashrightarrow (\sim q \dashrightarrow \sim p)$

p	q	$(p \dashrightarrow q) \dashrightarrow (q \dashrightarrow \sim p)$
		V
		V
		V
		V

Es tautológica

TEOREMA 6 $p \dashrightarrow [\sim q \dashrightarrow \sim (p \dashrightarrow q)]$

p	q	$p \rightarrow [\sim q \rightarrow \sim(p \rightarrow q)]$
		V
		V
		V
		V

Es tautológica

TEOREMA 7 $(p \rightarrow q) \rightarrow [(\sim p \rightarrow q) \rightarrow q]$

p	q	$(p \rightarrow q) \rightarrow [(\sim p \rightarrow q) \rightarrow q]$
		V
		V
		V
		V

Es tautológica

Por tanto, se cumple el paso (III).

IV.- POR TANTO, CUALQUIER FORMULA QUE NO SEA UNA TAUTOLOGIA NO ES UN TEOREMA.

V.- SE HA ENCONTRADO UN FORMULA QUE NO ES UNA TAUTOLOGIA- La fórmula $p \vee q$ no es una tautología.

p q	p v q
	V
	V
	V
	F

Es contingente.

VI.- LA FORMULA p v q NOS ES TEOREMA.

VII.- SI LOS AXIOMAS FUESEN INCONSISTENTES, TODA FORMULA -- SERIA UN TEOREMA.

VIII.- POR TANTO, LOS AXIOMAS SON CONSISTENTES.

La construcción de la Lógica simbólica es un ejemplo de -- una teoría formalizada. Dicha construcción es posible gracias- a los métodos de conceptuación y demostración que intervienen - en la elaboración, operacionalización y comprobación del pensamiento Lógico-Matemático.

La lógica formal es una ciencia rigurosa que utiliza un -- lenguaje simbólico, técnico y preciso; lo cual, permite evitar- las confusiones y ambigüedades del lenguaje natural. Es cono-- cida también, como lógica matemática porque su construcción y - comprobación se hace con procesos iguales o parecidos al de las matemáticas.

La Lógica matemática nos permite ejercitar la construcción proceso y demostración de una teoría axiomática formalizada, --

así como comprender la estructura, rigor y coherencia en el -- quehacer lógico y matemático. Es indudable que la lógica matemática es un instrumento esencial para propiciar el desarrollo- del raciocinio y la comprensión de comprobaciones de la matemática, porque permite descubrir una serie de enunciados a partir de otros más generales; al mismo tiempo, es un ejemplo muy claro para entender la formación del método deductivo, la impor--- tancia de las demostraciones y el papel de las definiciones --- dentro de una axiomática formalizada.

La lógica simbólica se presenta pues, como un elemento indispensable del pensamiento racional; el cual, nos ayuda a pensar con rigor, coherencia, corrección y verdad. También nos -- permite entender teóricamente las concatenaciones metodológicas de las ciencias formales: La lógica simbólica y las matemáticas.

Por tanto, la lógica simbólica y específicamente la lógica proposicional, tiene por objeto de estudio las formas en que se relacionan unas proposiciones (enunciados) con otras y, sobre - todo, establecer la relación que se da entre las proposiciones- que componen un razonamiento, para posteriormente proceder a -- hacer demostraciones con el auxilio de leyes lógicas y matemá-- ticas.

El papel de la lógica en el quehacer científico, y específicamente en el de las matemáticas, es fundamental en el momento de hacer las deducciones particulares a partir de las hipó--tesis generales; esto no quiere decir que la lógica valide las-teorías, sino simplemente que valida la relación de las teorías entre sí, por tanto, la lógica formal juega un rol metodológico determinante en la construcción de un sistema axiomático formalizado porque "se ha dedicado sobre todo al estudio de lo que - constituye una prueba, es decir, al estudio de los elementos de juicio completo o concluyentes; pues, estos últimos deben por - fuerza intervenir en la determinación del peso de los elementos de juicio parciales..." (7). Su función, es, velar por la corrección o incorrección de las relaciones, fundamentos y argu--mentos de una teoría axiomática formalizada.

Por otra parte, gracias a la Lógica formal se expresan --- inferencias correctas, se da coherencia, consecuencia y rigurosidad al pensamiento lógico y matemático; es decir, que se convierte en un elemento necesario en la producción del conoci----miento.

Si el conocimiento no subsiste por sí mismo, entonces es - necesaria una base sobre la cual pueda expresarse y adquirir - sentido; esto es, que todo conocimiento necesita del lenguaje - para existir. Aunque también, el lenguaje no puede existir -- por sí mismo si no expresa un pensamiento. Por tanto, podemos-deducir que lenguaje y pensamiento se completan en el quehacer-científico, y son necesarios, porque sin ellos sería imposible-toda disertación científica. Es decir, que el pensamiento se--

ría una masa amorfa sin el lenguaje, y el lenguaje sin el pen-- samiento no sería más que una especie de recipiente vacío.

Vista la importancia del lenguaje; en el pensamiento lógico y matemático será determinante, porque solamente comprendiendo sus características, podremos distinguir el lenguaje natural y el lenguaje simbólico en la lógica matemática, para poder entender sus relaciones, coherencia deducción, demostración y -- construcción. Por tanto, la lógica toma como punto de partida- el lenguaje en tanto que los signos son instrumentos necesarios en la formulación o expresión de las proposiciones.

b) LENGUAJE NATURAL Y LENGUAJE SIMBOLICO

El lenguaje natural es aquél que utilizamos cotidianamente para expresar nuestros pensamientos. Es el que aprendemos en - forma espontánea en nuestra actividad diaria, los signos que -- generalmente empleamos para comunicarnos son palabras escritas. Es un lenguaje no especializado cuyo uso generalizado posibilita la comunicación entre las personas, aunque su vaguedad no -- hace explícito el sentido de todos sus términos.

A nivel del lenguaje natural, una palabra puede tener dos- o más significados (La palabra diablo puede significar un utensilio para carga o designa a un niño travieso).

También ocurre que dos palabras tengan el mismo significado o se les utilice en el mismo sentido (como "maestro" y "profesor").

"Gracias a estas imprecisiones del lenguaje natural se -- producen muchos chistes (sobre todo los de doble sentido) y muchas expresiones cómicas. Pero tambiénse originan confusiones- y errores, que si bien en la vida diaria no es del todo necesario evitar, en algunas actividades, como la científica, si es - preciso eliminar en lo posible". (8)

El lenguaje natural es necesario para comunicarnos, pero - como en su uso cotidiano no exigen las normas sintácticas pre-- cisas, sus reglas deformación están sujetas al uso del lenguaje. Sin embargo, es determinante para transmitir pensamientos científicos o no.

Lenguaje Simbólico.- En las ciencias encontramos un len--- guaje distinto al natural, preciso, técnico y simbólico, en -- donde los símbolos son signos elegidos cuidadosamente, en forma convencional para que posean un mismo significado dentro de un- sistema determinado (comoen el dela lógica proposicional).

El lenguaje simbólico es fundamental en la labor científica, ya que encontramos varios lenguajes científicos en la ciencia. Por ejemplo: en las matemáticas encontramos símbolos como (π, $\cong$, $=$, $<$, etc.) en la Química (As, H, O, H2O, etc.) en la- lógica simbólica ($\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, etc.)

Por tanto, en la ciencia encontramos lenguajes simbólicos-especializados que cumplen con las características siguientes:

1.- Que sea un conjunto reducido de símbolos específicos - que representan de manera inequívoca a otros términos del len-- guaje natural.

2.- Que tenga un conjunto de reglas específicas de :

a) Formación dentro de un sistema simbólico específico; en este caso el de la lógica proposicional, para combinar-los símbolos elementales de acuerdo a las reglas esta-- blecidas dentro del lenguaje.

b) Transformación que nos permitan establecer otras rela-- ciones estructurales a partir de las ya establecidas, y al mismo tiempo explicitar el cambio de una combinación de símbolos a otra equivalente.

Por tanto, el lenguaje artificial tiene como referencia a-otros signos (puede ser el lenguaje natural) y cuenta con re--- glas de formación sintáctica, precisas y complejas.

El objetivo central de simbolizar un lenguaje es el de ob-tener claridad y exactitud, para que sea un medio de entender - más facilmente los procesos metodológicos de la lógica matemá-- tica.

Para elaborar el lenguaje simbólico de la lógica, nos re-- ferimos a la estructura más simple del lenguaje natural que es- la proposición (enunciado).

La forma lógica de un lenguaje se evidencia por medio del- análisis de la formología de dicho lenguaje. La forma o es---- tructura lógica es aquello que es compartido por distintos enun ciados, argumentos o argumentaciones cuando se hace abstracción del contenido específico de sus términos descriptivos. En la - lógica proposicional se utilizan las formas o estructuras sin - referencia a un contenido específico, porque lo que interesa es establecer nuevas relaciones estructurales dentro de una cons-- trucción formalizada.

A continuación se presenta un esquema en donde se ven cla- ramente los elementos necesarios para establecer la construc--- ción del lenguaje simbólico.

MORFOLOGIA DEL LENGUAJE

- Términos Descriptivos
  - 1-Letras proposicionales.
  - 2-Nombre de objetos (Temas)
    - Constantes individuales. Variables-individuales.
  - 3-Nombres de propiedades o relaciones.
    - Letras de predicados.
  - 4-Nombre de funciones.
    - Funciones.
- Constantes Lógicas.
  - 1-Conectivas lógicas.
  - 2-Cuantificadores.
  - 3-Signos de agrupación--(paréntesis)

TERMINOS DESCRIPTIVOS.- Tienen un significado específico - dependiendo del campo científico al cual se refiere, en este - caso nos referimos a los usados en la Lógica matemática.

1.-Letras Proposicionales.

Son las letras usadas para simbolizar enunciados, que por- ser afirmativos (declarativos) pueden ser calificados de verda- deros o falsos (V - 1; F - O).

Las letras que se utilizarán serán minúsculas del abeceda- rio latino de la p,q,r,s ..... a la v.

Por ejemplo:

El enunciado: "dos más ocho es igual a siete"

Se simboliza " s "

2.-Nombres de objetos.

Todo nombre tiene un significado y un denotado.

Cuando los nombres de objetos tienen un solo denotado se - le llama constantes individuales y en el enunciado hacen el o-- ficio de sujeto.

Los símbolos más usados para representar a las constantes- individuales serían las letras minúsculas del Abecedario lati-- no de la a, b, c,.....a la w.

NOTA: esta simbología se refiere al campo de la lógica -- cuantificacional.

Ejemplo:

Enunciado: " cuatro es par "

Simbolizado Pc

En donde la letra c es la constante individual.

Según el análisis lógico del lenguaje, los símbolos llamados variables no denotan ni significan cosas que varían. Una variable individual puede referirse a un determinado campo o universo del discurso. Se usan letras minúsculas (las últimas) del abecedario para representar a individuos cualquiera. Las literales minúsculas serían: x, y, z.

Ejemplo:

Enunciado: " Algunos ángulos son rectos "

Simbolizado $(\exists x) \quad (Ax \wedge Rx)$

En donde la letra " x " es la variable individual.

3.-Nombres de propiedades o relaciones.

Mientras el nombre propio denota individuos y juega el papel de sujeto (constantes individuales), el nombre común denota propiedades de objetos, es decir, se refiere a una clase de individuos. Por tanto, se refiere al predicado y por eso se llama letras predicativas.

Para simbolizar el predicado se utilizan letras mayúsculas de la A, B, C,..... a la Z.

Ejemplo:

Enunciado: " Algunos números son racionales "

Existe al menos una x Tal que: x es número y x es racional

$(\exists x) \qquad\qquad (Nx \quad \wedge \quad Rx \quad)$

$(\exists x) \quad (N x \wedge R x)$

En donde " N " y " R " son letras predicativas.

4.-Nombre de funciones (funciones).

Un functor es una expresión cuya instancia da lugar a una-función nominal o designativa. Es decir, cumple como functor - al designar objetos.

La función designativa no puede ser calificada de verdad - o falsa, porque estrictamente hablando no cumple con la estructura de un enunciado: S - P.

Ejemplo;

El enunciado "todos los ángulos rectos miden 90°" pude ser calificado de verdadero o falso.

Sin embargo, si se abstrae de ahí la expresión "Todos los-ángulos rectos", se podrá notar que ella no es verdadera ni falsa, y además, denota algún objeto.

CONSTANTES LOGICAS.- Son expresiones lingüisticas que tienen un significado invariable, independientemente del campo --- científico en que se esté trabajando.

1.-Conectivas Lógicas.

Entre los elementos constantes del lenguaje, encontramos a los que se llaman conectivas lógicas o relaciones lógicas que - sirven para enlazar proposiciones simples (atómicas) y formar a partir de éstas, proposiciones compuestas o molecular. Por esto, las conectivas conducen a criterios veritativos-funcionales.

Presentamos un cuadro para explicar las conectivas Lógicas

Conectiva Lógica	Significa	Lenguaje Simbólico
NEGACION	" No " "No es cierto que" "No ocurre que" "no es el caso que"	$\sim$
CONJUNCION	" y "	$\wedge$
DISYUNCION	" o "	$\vee$
CONDICIONAL	"si....entonces"	$\dashrightarrow$
BICONDICIONAL	"sí y sólo sí"	$\dashleftarrow\!\dashrightarrow$

2.-Cuantificadores.

A la ciencia le interesa demostrar que sus teorías expli-- can conjuntos de objetos.

Por tanto, los enunciados teóricos son por lo general de - las siguientes formas:

Para todo x, Px.

Para algún x, Px

Para ningún x, Px.

Los símbolos específicos para representar estas expresio-- nes se llaman cuantificadores.

Para explicar mejor ésto, recurrimos a los contenidos de - la Lógica cuantificacional para delimitar claramente la función de los cuantificadores "Universal" y "existencial".

La función de los cuantificadores la encontramos en las -- definiciones de las proposiciones universales, particulares y - singulares.

Una proposición es universal cuando el predicado se afirma de "todos" los objetos del conjunto.

Una proposición es particular cuando el predicado se afir- ma de una parte ("algunos") de los objetos del conjunto. Una - proposición es singular cuando el predicado se afirma de un ob- jeto del conjunto.

Por tanto, de la forma como se aplica el predicado en los- enunciados, las proposiciones pueden ser de seis tipos.

Universales Afirmativas.

Universales Negativas.

Particulares Afirmativas.

Particulares Negativas.

Singulares Afirmativas.

Singulares Negativas.

Los cuantificadores son pues:

CUANTIFICADOR	SIGNIFICA	SIMBOLO
	"TODOS"	$\forall$
UNIVERSAL	"NINGUN"	
EXISTENCIAL	"ALGUNOS"	$\exists$

3.-Signos de agrupación (paréntesis).

La función de los signos de agrupación (corchetes, parén-- tesis y llaves) es la de establecer orden en las formulas Lógicas.

Además, sirven para precisar la lectura de las mismas y -- eliminar posibles ambigüedades.

No está de más aclarar que algunos lógicos consideran a -- los paréntesis como constantes lógicas, (por ejemplo B. Mates)- mientras que otros los toman, simplemente, como símbolos auxi-- liares (como Manuel Sacristán).

Después de haber señalado la forma en que intervienen el lenguaje en el conocimiento y distinguir los elementos más importantes que forman el lenguaje simbólico de la lógica, procederemos a simbolizar expresiones y posteriormente a establecer su construcción.

Simbolizar los siguientes enunciados a nivel proposicional.

-Cuatro es divisible entre dos y diez es divisible entre cinco

$p \qquad \wedge \qquad q$

$$p \wedge q$$

-Nueve es un número par o nueve es impar.

$p \qquad \vee \qquad q$

$$p \vee q$$

-Si aumenta la temperatura de un gas entonces aumenta su volumen

$p \qquad \Longrightarrow \qquad q$

$$p \Longrightarrow q$$

-1984 fue año bisiesto si y sólo si febrero de 1984 tuvo 29 días

$p \qquad \longleftrightarrow \qquad q$

$$p \longleftrightarrow q$$

-No es cierto que cuatro más cuatro sea igual a siete y sean --
$\sim$ p $\wedge$
mayor que diez.
q

$$\sim (p \wedge q)$$

Simbolizar los siguientes enunciados a nivel cuantifica---cional.

-7 es impar singular afirmativa.

Is

-El triángulo no es rectángulo. singular negativa.

Rt

-"Algunos" ángulos son agudos. particular afirmativo.

$(\exists x) \quad (Ax \wedge Ax)$

-Algunos números no son racionales. particular negativa.

$(\exists x) \quad (Nx \wedge \sim Rx)$

-Todos los triángulos tienen tres ángulos. Universal afirmativa.

$(\forall x) \quad (Tx \longrightarrow Ax)$

-Ningún ángulo agudo es recto. Universal negativa.

$(\forall x) \quad (Ax \longrightarrow \sim Rx)$

Hasta aquí hemos establecido las reglas en que se usará el lenguaje simbólico de la lógica, lo cual, nos permitirá avanzar en su construcción para poder manejar las estructuras lógicas -

y sus relaciones dentro de la Teoría formalizada de la Lógica - matemática.

En el siguiente cuadro señalamos la relación entre el lenguaje natural y la estructura lógica (representada en el lenguaje proposicional y cuantificacional).

LENGUAJE NATURAL	ESTRUCTURA LOGICA
Patricia y Juan van a ir al mercado el lunes.	$(p \wedge q)$
Hago exámen final el jueves o me presento a repetir el semestre.	$(p \vee q)$
Si la tierra tiene movimientos de rotación y traslación, entonces no puede salirse de su órbita.	$(p \wedge q) \dashrightarrow \sim r$
Todos los planetas giran al rededordel sol.	$(\forall x) \quad (Px \dashrightarrow Sx)$
Ningún número irracional es racional.	$(\forall x) \quad (Ix \dashrightarrow \sim Rx)$
Algunos axiomas son incompatibles en un sistema.	$(\exists x) \quad (Ax \wedge Ix)$

C) TABLAS DE VERDAD

LA NEGACION.

Las tablas de verdad es un proceso esquemático por el que- se muestran los posibles valores de verdad (verdadero- 1,ó falso - 0) de una proposición compuesta.

Realizar la tabla de verdad: P

P	$\sim$P
	F
	V

- si tenemos una proposición verdadera y la negamos, su - negación será falsa.
- si tenemos una proposición falsa y la negamos, su negación será verdadera.

LA CONJUNCION.

Realizar la tabla de verdad: ($p \wedge q$).

P	q	($p \wedge q$)
		V
		F
		F
		F

- La conjunción es verdadera solamente cuando los dos términos son verdaderos.
- si uno de los términos es- falso, la conjunción es falsa.

- si tenemos dos términos como verdaderos en cualquiera de las dos líneas de un argumento, podemos concluir su conjunción.

LA DISYUNCION.

Realizar la tabla de verdad: $(P \vee q)$.

P	q	$(P \vee q)$
		V
		V
		V
		F

- La disyunción es verdadera cuando alguno de sus términos es verdadero.
- si conocemos a un término como verdadero, sabremos que la disyunción es verdadera.
- A un término verdadero podemos agregarle otro término (aunque desconozcamos su valor de verdad), y la disyunción será verdadera.

LA CONDICIONAL.

En esta conectiva se necesita identificar el antecedente - y el consecuente de la proposición.

Realizar la tabla de verdad: $(P \longrightarrow q)$.

P	q	$(P \longrightarrow q)$
		V
		F
		V
		V

- Solamente que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso, la condicional será falsa. En los demás casos será verdadera.

- Si partimos del supuesto - que el condicional es verdadero, y si sabemos que el -- antecedente es verdadero, -- deducimos que el consecuente también es verdadero, si sabemos que su consecuente es- falso, sabemos que su ante-- cedente también lo es.

LA BICONDICIONAL.

Realizar la tabla de verdad: $(P \longleftrightarrow q)$.

p	q	$(p \longleftrightarrow q)$
		V
		F
		F
		V

- Solamente que ambos miem-- bros tengan el mismo valor - de verdad, la Bicondicional- será verdadera. Es decir, - (ambos verdaderos, o ambos - falsos).
- Un bicondicional es falso- cuando uno de sus miembros - es verdadero y el otro falso y viceversa.

En este momento disponemos de los elementos más importan-- tes para proseguir en la construcción de la Lógica matemática.- Las tablas de verdad son instrumentos esenciales pues con ellas demostramos la validez o no validez de los argumentos.

Se propone una serie de ejercicios de tablas de verdad, -- con la finalidad de asimilar el proceso e importancia de saber- manejar las conectivas lógicas con sus respectivas tablas de - verdad y su ordenamiento, delimitados por los signos de agrupa-- ción.

Ejercicios con Tablas de Verdad.

Para realizar tablas de verdad más complejas, que las an-- teriores, es necesario saber la tabla de verdad de cada una de- las conectivas y además identificar la conectiva principal pues en ellas se dará el resultado final.

Para acomodar y dar los valores de verdad correspondientes a cada proposición, se necesita recurrir a la siguiente fórmula:

2^n -- en donde "n" es igual al número de proposiciones simples-que no se repitan.

Ejemplo.

p	q	r	$(p \wedge q) \rightarrow r$
			V
			F
			V
			V
			V
			V
			V
			V

p	q	$(p \wedge q) \vee (p \rightarrow q)$
		V
		F
		V
		V

La conectiva principal es la disyunción "V" la cual resulta de combinar la conjunción " " y la condicional " -- ".

p	q	$\sim(p \wedge \sim q) \vee \sim(\sim p \wedge q)$
		V
		V
		V
		V

En este caso la conectiva principal es la disyunción "V", principalmente se realizó lo del primer paréntesis y luego el resultado se negó.

Después se combinaron las negaciones en disyunción obteniendo el resultado final.

p	q	$\sim[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$
		F
		V
		V
		F

En este caso, podemos ver claramente el uso de los paréntesis y de corchetes, en donde el resultado final se da en la negación del corchete.

Como hemos visto, utilizando el lenguaje simbólico y las formas lógicas, podemos hacer los ejercicios que queramos, siempre y cuando respetemos las reglas establecidas y usemos los signos de agrupación como lo hacemos en las matemáticas.

p	q	$\sim \left[(p \rightarrow q) \vee (p \leftrightarrow q) \right] \wedge \left[(\sim p \rightarrow q) \vee \sim p \right]$	
		F	V
		F	V
		V	F
		F	V

En este ejemplo se ha realizado una tabla de verdad más completa que las anteriores, en donde hemos utilizado paréntesis, corchetes y llaves. Este proceso tan elemental de hacer tablas de verdad utilizando los signos de agrupación nos ayuda a entender también los procesos de las matemáticas. A continuación presentamos un ejemplo de realizar operaciones con signos de agrupación para aclarar lo anterior.

Ejemplo:

EFECTUAR $500 - \left[(6 - 1)\ 8 / 4 \times 3 + 16 / (10 - 2) \right] - 5$

$= 500 - \left[(5)\ 8 / 4 \times 3 + 16 / (8) \right] - 5$

$= 500 - \left[(5)\ 2 \times 3 + 16 / 8 \right] - 5$

$= 500 - \left[30 + 2 \right] - 5$

$= 500 - 32 - 5$

$= 500 - 37$

$= 463$

Ejercicio.

Realizar las siguientes tablas de verdad.

1.- $(p \wedge q) \longleftrightarrow \sim q$

2.- $(p \leftrightarrow \sim q) \longrightarrow r$

3.- $\left[(p \vee q) \longrightarrow r \right] \wedge \sim p$

4.- $\left[(p \longleftrightarrow \sim q \longrightarrow r \right] \longrightarrow (p \wedge q)$

5.- $\sim (p \wedge q) \longrightarrow \sim p$

D) TAUTOLOGIAS, CONTRADICCIONES Y CONTINGENCIAS

Una proposición compuesta es TAUTOLOGICA cuando en la co-- nectiva principal todos los valores resultan ser verdaderos.

Ejemplo:

p	q	p <-> (p V q)
		V
		V
		V
		V

Esta proposición es tautológica porque en el resultado-final todos los valores fueron verdaderos.

Una proposición compuesta es contradictoria cuando en la - conectiva principal todos los valores resultan ser falsos.

Ejemplo:

p	q	$(p \wedge q) \wedge \sim p$
		F
		F
		F
		F

Esta proposición es contra-dictoria porque en el resultado final todos los valores fueron falsos.

Una proposición compuesta es contingente (indeterminada) cuando en la conectiva principal en algunos casos resulta falsa y en otros verdadera.

Ejemplo:

p	q	r	$p \wedge (q \rightarrow r)$
			V
			F
			V
			V
			F
			F
			F
			F

Esta proposición es contingente porque en el resultado final algunos valores son verdaderos y otros falsos.

Mediante tablas de verdad establecer si las siguientes proposiciones son tautológicas, contradictorias o contingentes.

p	q	$(p \wedge q) \rightarrow p$
		V
		V
		V
		V

ES TAUTOLOGICA

p	q	$\sim[(p \wedge q) \rightarrow q]$
		F
		F
		F
		F

ES CONTRADICTORIA

p	q	$(p \rightarrow q) \wedge p$
		V
		F
		F
		F

ES CONTINGENTE

EJERCICIO. Mediante tablas de verdad, decir si son tautológicas, contradictorias o contingentes.

1.- $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$

2.- $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge q)$

3.- $\sim [p \rightarrow (p \vee q)]$

4.- $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

5.- $(p \wedge \sim q) \vee (p \vee q)$

E) LOS ARGUMENTOS Y LAS DEMOSTRACIONES

De los conocimientos que vamos estableciendo, podemos ahora recurrir a lo que se llama verdad formal. En muchos contenidos tanto de la lógica como de las matemáticas se dan relaciones entre enunciados a nivel de una verdad formal, es decir que se trata de "una verdad que depende exclusivamente del modo en que se relacionan entre sí las proposiciones, sin que los hechos puedan servir para efectuar ese tipo de verdad." (9)

Con lo explicado, podemos reafirmar el papel de la lógica en el quehacer lógico-matemático porque el aspecto fundamental y el determinante de la lógica y las matemáticas es moverse en un plano formal. Específicamente en la construcción de la lógica simbólica (Lógica proposicional), la lógica es necesaria porque " se ocupa de estudiar las verdades formales, sus estructuras y sus leyes, de manera que sea posible determinar si una proposición cualquiera, con un contenido variable, es verdadera o falsa formalmente, es decir, independientemente de los hechos a los que se refiere. " (10)

Ahora pasaremos a ver la construcción de un argumento, con lo - cual, estamos puntualizando el papel de la deducción y la de--- mostración en el campo formal de la lógica proposicional y -- cuantificacional .

El argumento está estructurado por una serie de enunciados (proposiciones), en donde uno de ellos (llamado conclusión) se- desprende de los anteriores llamados premisas.

En el siguiente ejemplo tenemos:

ANTECEDENTE

1.- Si el equilátero es un triángulo, entonces el equilá-- tero tiene tres ángulos.

2.- El equilátero es un triángulo.

LUEGO.

CONSECUENTE

3.- El equilátero tiene tres ángulos.

En el ejemplo anterior tenemos la construcción de un argu- mento el cual, está construído por proposiciones, las que pue-- den ser (por separado) calificadas de verdaderas o falsas. Pero el argumento no puede ser falso o verdadero, sino correcto o - incorrecto y es así como puede ser VALIDO o NO VALIDO.

La validez de los argumentos en la lógica simbólica la estableceremos dentro de las reglas de la lógica matemática. Es- por eso que el argumento enunciado lo podemos simbolizar de la- siguiente manera:

1.- p -- q

2.- p

$\vdash$

3.- q

Al encontrarnos con argumentos a nivel de la lógica simbólica tenemos la necesidad de saber si el argumento es VALIDO o- NO VALIDO. En este momento solamente contamos con las tablas - de verdad para demostrar la validez de los argumentos.

Para demostrar la validez del siguiente argumento:

1.- p --- q

2.- p

$\vdash$

3.- q

Estableceremos un procedimiento en tres pasos:

PRIMERO: Trasladar el argumento a la forma de una proposición compuesta, agregando una conjunción entre la proposición (1) y (2) las cuales son el antecedente. Posteriormente sustituir el símbolo ($/\!\!-$) por una condicional, y finalmente poner la conclusión (3).

SEGUNDO: Realizar la tabla de verdad.

TERCERO: Sí la proposición resultó ser tautológica entonces podemos concluir que el argumento es VALIDO; en caso de que no ocurra esto, el argumento será NO VALIDO.

EJEMPLO I:

p	q	$[(p \rightarrow q) \wedge p]$	$\rightarrow$	q	PRIMER PASO
			V		
			V		
			V		SEGUNDO PASO
			V		

La proposición resultó ser tautológica, por tanto, el argumento es VALIDO. TERCER PASO

EJEMPLO 2:

Demostrar la validez del siguiente argumento.

1.- $p \vee q$

2.- $\sim p$

$/\!-$

3.- $\sim q$

p q	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow \sim q$	PRIMER PASO
	V	
	V	SEGUNDO PASO
	F	
	V	

La proposición NO es tautológica por lo tanto, el argumento NO ES VALIDO. TERCER PASO

Demostraciones:

En las siguientes demostraciones se puede ver claramente la función del formalismo dentro del sistema axiomático de la lógica simbólica, por que tomando en cuenta las reglas lógicas establecidas, las definiciones, los signos de agrupación y las mismas demostraciones; podemos afirmar que estos procesos metodológicos son iguales o parecidos a los de las matemáticas. Además que al hablar de método axiomático, implícitamente nos referimos al deductivo.

1.- $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

2.- $\sim (p \vee q)$

$/\!-$

3.- $\sim (p \wedge q)$

p	q	$\{[(p \wedge q) \dashrightarrow (p \vee q)] \wedge \sim(p \vee q)\} \dashrightarrow \sim(p \wedge q)$
		V
		V
		V
		V

La proposición es tautológica por lo tanto, el argumento - es VALIDO.

1.- $p \wedge q$
$/\!-$
2.- p

p	q	$(p \wedge q) \dashrightarrow p$
		V
		V
		V
		V

En este argumento el antecedente solamente esta formado por una proposición, de --- donde se desprende la con--- clusión.

La proposición es tautológica por lo tanto, el argumento - es: VALIDO.

1.- $p \vee q$

2.- $p \dashrightarrow q$

$/\!-$

3.- $(p \vee q) \wedge (p \dashrightarrow q)$

p	q	$[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow [(p \vee q) \wedge (p \rightarrow q)]$
		V
		V
		V
		V

La proposición es tautológica por lo tanto, el argumento - es VALIDO.

1.- $p \rightarrow q$

2.- $q \rightarrow r$

$\vdash$

3.- $p \rightarrow r$

p	q	r	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
			V
			V
			V
			V
			V
			V
			V
			V

La proposición es tautológica por lo tanto, el argumento - es VALIDO.

De las demostraciones de argumentos mediante las tablas -- de verdad, podemos enunciar la siguiente regla: " En general -- todo argumento es válido si al ser transformado en una proposición condicional, está resulta ser tautológica".

Ejercicios:

Demostrar la validez de los siguientes argumentos mediante las tablas de verdad.

1.- $p \leftrightarrow q$

$\vdash$

2.- $(p \leftrightarrow q) \vee (p \wedge q)$

1.- $(p \vee q) \wedge (p \leftrightarrow q)$

$\vdash$

2.- $(p \vee q)$

REGLAS DE INFERENCIA

Respecto a este punto, es importante resaltar la importancia de la inferencia lógica como instrumento esencial para poder llevar a cabo la deducción en el ámbito de la lógica proposicional.

Es decir, que en la demostración de argumentos podemos probar la consecuencia lógica (conclusión) de las premisas, siempre que justifiquemos en el proceso demostrativo cada conclusión con una regla de inferencia por eso, " la idea de inferencia se puede expresar de la manera siguiente: de premisas verdaderas se obtienen sólo conclusiones que son verdaderas" (11).

Las reglas de inferencia que exponemos a continuación nos permitirán demostrar argumentos en el campo de la lógica proposicional. Además creemos conveniente apuntar que tanto las leyes de implicación, equivalencia, ejemplificación y generalización son las reglas en que nos apoyamos para hacer las demostraciones y asi mostrar como se opera y demuestra en la lógica matemática.

Otro aspecto que manifestamos es el de advertir que en los ejercicios demostrativos en donde se aplicarán las reglas de inferencia, hacemos uso del lenguaje simbólico propio de la lógica y también del lenguaje matemático, pero siguiendo las estructuras lógico matemáticas en el proceso.

Por tanto, es necesario conocer las reglas de inferencia -

para poder demostrar a nivel del campo proposicional y al mis-- mo tiempo llevar a cabo la deducción de este sistema axiomático. "El objeto del juego es utilizar las reglas de inferencia de -- manera que conduzcan a otras fórmulas que se denominan conclu-- siones. El paso lógico de las premisas a la conclusión es una- deducción" ( ).

F) LEYES DE IMPLICACION

Se dice que es una proposición compuesta ocurre una implicación, cuando la conectiva principal es una condicional y esta resulta ser tautológica, por tanto, las leyes de implicación -- son las estructuras básicas que pueden tener los argumentos VALIDOS.

Las leyes de implicación enunciaremos son el otro instru-- mento esencial para determinar la validez lógica de los argu--- mentos.

Las leyes de implicación más importantes:

I.- MODUS PONENDO PONENS (M.P.P.)

1.- $r \dashrightarrow s$

2.- r

$\vdash$

3.- s

Si tenemos una proposición - condicional y afirmamos el - antecedente, obtendremos co- mo conclusión la afirmación- del consecuente.

II.- MODUS TOLLENDO TOLENS (M.T.T.)

1.- $r \dashrightarrow s$

2.- $\sim s$

$\vdash$

3.- $\sim r$

Si tenemos una proposición condicional y negamos el consecuente, obtendremos como conclusión la negación del antecedente.

III.- MODUS TOLLENDO PONENS (M.T.P.)

1.- $r \vee s$

2.- $\sim r$

$\vdash$

3.- s

1.- $r \vee s$

2.- $\sim s$

$\vdash$

3.- r

Si tenemos una proposición disyuntiva y negamos alguna de las dos, (proposiciones simples) obtendremos como conclusión la otra alternativa.

IV.- SILOGISMO HIPOTETICO (S.H.)

1.- $r \dashrightarrow s$

2.- $s \dashrightarrow t$

$\vdash$

3.- $r \dashrightarrow t$

Si tenemos dos proposiciones condicionales como premisas, obtendremos como conclusión otra proposición condicional que tenga el antecedente de la primera premisa y el consecuente de la segunda premisa.

V.- SIMPLIFICACION (SIMPLI.)

1.- $r \wedge s$ | 1.- $r \wedge s$
$/$——
2.- r | 2.- s

Si tenemos una proposición conjuntiva como premisa, obtendremos como conclusión alguna de las dos proposiciones conjuntadas.

VI.- CONJUNCION (CONJ.)

1.- r
2.- s
$/$——
3.- $r \wedge s$

Si tenemos dos proposiciones cualesquiera como premisas, obtendremos como conclusión las dos proposiciones conjuntadas.

VII.- ADICION (AD.)

1.- r
$/$——
2.- $r \vee s$

Si tenemos una proposición como premisa, obtendremos como conclusión una proposición disyuntiva, en donde una de las proposiciones es la que tendremos como premisa la otra puede ser cualquiera.

NOTA: La ley de simplificación y adición en el antecedente solamente tienen una premisa, del cual se desprende la conclusión.

Después de haber enunciado las leyes de implicación, se sugiere aprenderlas y asimilarlas porque serán indispensables en los procesos de demostración.

G) LEYES DE EQUIVALENCIA

Ocurre una equivalencia en una proposición compuesta, cuando la conectiva principal es una bicondicional y esta resulta ser tautológica.

El símbolo de equivalencia es: $\equiv$

La utilidad de las leyes de equivalencia en la lógica proposicional, es importante porque si tenemos tablas de verdad "idénticas" se pueden sustituir unas proposiciones por otras, para afirmar que: $(p \rightarrow q) \equiv \sim (p \wedge \sim q)$, lo demostraremos por tablas de verdad, sustituyendo el símbolo de equivalencia "$\equiv$", por una bicondicional "$\leftrightarrow$"; después realizaremos la tabla de verdad y si es tautológica queda comprobada.

p	q	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$
		V
		V
		V
		V

Es tautológica por lo---
tanto podemos establecer

$(p \rightarrow q) \equiv \sim(p \wedge \sim q)$

Leyes de equivalencia más usuales:

I.- LEYES DE CONMUTATIVIDAD (CONM.)

a) $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$

Demostración:

p	q	$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
		V
		V
		V
		V

Es tautológica, por lo tanto $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$

b) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$

Demostración:

p	q	$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
		V
		V
		V
		V

Es tautológica, por lo tanto $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$

II.- LEYES DE ASOCIACION (ASOC.)

a) $[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$

Demostración:

p	q	r	$(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
			V
			V
			V
			V
			V
			V
			V
			V

Es tautológica, por lo tanto $\left[(p \vee q) \vee r\right] \equiv \left[p \vee (q \vee r)\right]$

b) $\left[(p \wedge q) \wedge r\right] \equiv \left[(p \wedge (q \wedge r)\right]$

Demostración:

p	q	r	$(p \wedge q) \wedge r$	$\longleftrightarrow$	$p \wedge (q \wedge r)$
				V	
				V	
				V	
				V	
				V	
				V	
				V	
				V	

Es tautológica, por lo tanto $\left[(p \wedge q) \wedge r\right] \equiv \left[p \wedge (q \wedge r)\right]$

III.- LEYES DE DISTRIBUITIVIDAD (DISTR.)

a) $\left[p \wedge (q \vee r)\right] \equiv \left[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)\right]$

p q r	$p \wedge (q \vee r)$	$\leftrightarrow$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
		V	
		V	
		V	
		V	
		V	
		V	
		V	
		V	

Es tautológica, por lo tanto $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge q)]$

b) $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

Demostración:

p q r	$p \vee (q \wedge r)$	$\leftrightarrow$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
		V	
		V	
		V	
		V	
		V	
		V	
		V	
		V	

Es tautológica, por lo tanto $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

IV. LEYES DE MORGAN (DE M.)

a) $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

Demostración:

p	q	$\sim(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim p \vee \sim q)$
			V	
			V	
			V	
			V	

Es tautológica, por lo tanto $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

b)

$\sim(p \vee q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim p \wedge \sim q)$
	V	
	V	
	V	
	V	

Es tautológica, por tanto $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

V.- LEY DE EXPORTACION (EXP.)

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \equiv [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

Demostración:

p	q	r	$[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$
			V
			V
			V
			V
			V
			V
			V
			V

Es tautológica, por lo tanto $[(p \wedge q) \rightarrow r] \equiv [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

VI.- LEY DE CONTRAPOSICION (CONTR.)

$$(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$$

Demostración:

p	q	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow [\sim q \rightarrow \sim p]$
		V
		V
		V
		V

Es tautológica, por lo tanto $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$

H) LEYES DE EJEMPLIFICACION Y GENERALIZACION

I.- LEY DE EJEMPLIFICACION UNIVERSAL. (E.U.)

1.- $(\forall x)\ Px$
$\vdash$
2.- Pa

Parte de lo universal para concluir con una ejemplificación particular.

II.- LEY DE GENERALIZACION UNIVERSAL (G. U.)

1.- Pa
$\vdash$
2.- $(\forall x)\ Px$

Parte de lo particular para concluir en una generalización universal.

III.- LEY DE EJEMPLIFICACION EXISTENCIAL (E. E.)

1.- $(\exists x)\ Px$
$\vdash$
2.- Pa

Parte de lo general (existencial) para concluir en una ejemplificación particular.

IV.- LEY DE GENERALIZACION EXISTENCIAL (G. E.)

1.- Pa
$\vdash$
2.- $(\exists x)\ Px$

Parte de lo particular para concluir en una generalización existencial.

I) DEMOSTRACION FORMAL DE LA VALIDEZ DE ARGUMENTOS

En el quehacer científico a nivel de la ciencia formal --(lógica y matemáticas) nos encontramos con que se manejan abs--tracciones sujetas a reglas lógicas, con su respectiva coherencia y fundamentación conceptual; lo cual, permite realizar una serie de operaciones o relaciones formales que necesitan de la demostración para su comprobación. Es por esto, que la lógica y la matemática se auxilian en sus procesos metodológicos y de comprobación. Según la metodológia contemporánea, el método de formalización o "Formalismo" es determinante en el quehacer de la Lógica Matemática. "El método de formalización, basado en la generalización de la forma de proceso de diferente contenido en la abstracción de la primera con respecto al segundo, con el fin de elaborar procedimientos generales de operar con ella. El método lo utilizan en gran escala la Lógica Matemática, la Cibernética y algunas otras ramas de la ciencia y de la técnica" (12).

Este método que es esencial en la lógica matemática se --completa con el método de matematización, por el cual se fundamentan las estructuras y conceptuaciones de las matemáticas. --"El método de matematización, que constituye una creación del anterior, adaptado al estudio y generalización del aspecto --cuantitativo, los nexos generales y la estructura de los obje--tos y procesos que se estudian; forman parte de él, en particular, los métodos estadísticos y el cálculo de probabilidades - así como los relacionados con el empleo de máquinas de calcu--- lar" (13).

Con esto confirmamos lo que hemos venido diciendo sobre - los métodos de conceptuación y comprobación de la Lógica y las- Matemáticas; es decir, que sus procesos son iguales o parecidos.

Se hacen estas reflexiones, porque la demostración (procesos de comprobación de las ciencias formales) es fundamental, - tanto en la Lógica Matemática como en las matemáticas. En este apartado explicaremos el proceso de comprobación en demostra--- ciones de argumentos en el lenguaje proposicional y cuantificacional apoyándonos en las leyes previamente enunciadas.

Demostración formal de la validez de argumentos.

Demostrar argumentos mediante leyes de implicación y equivalencia.

Para demostrar argumentos, haremos algunas indicaciones - para facilitar su comprensión.

1.- Se necesita el dominio de las Leyes de implicación y - equivalencia.

2.- Debemos justificar la validez del argumento con la Ley correspondiente, a partir de las conclusiones.

3.- Las premisas se establecen como verdaderas.

4.- Debe procederse en un orden sucesivo; es decir, de --- conclusión a conclusión, hasta justificarlas todas.

5.- Poner la Ley y los números correspondientes con los - que se estructura el argumento demostrado.

Ejemplo:

1.- $r \dashrightarrow (s \wedge t)$	verdadera	
2.- $\sim s \vee \sim t$	verdadera	premisas
3.- $\sim r \dashrightarrow m$	verdadera	
/ —		
4.- $\sim (s \quad t)$	(De M,2)	
5.- $\sim r$	(M.T.T.1,4)	conclusiones
6.- m	(M.P.P.3,5)	

Demostración a nivel proposicional.

Ejemplo 1:

1.- $p \wedge (q \vee r)$ ....verdadera

2.- $\sim (p \wedge r)$ ....verdadera

3.- $p \dashrightarrow t$ ....verdadera

4.- $(t \vee s) \dashrightarrow r$....................verdadera

/ —

5.- $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	(1)
6.- $p \wedge q$	(2, 5)
7.- p	(6)

8.- t	(3,7	)
9.- t V s	(8,	)
10.- r	(4,9	)

En los argumentos anteriores se le proporciona al alumno - todas la conclusiones y en los paréntesis se escribe el o los - números para únicamente realice la justificación poniendo la -- Ley correspondiente. Esto es de gran ayuda pues el estar indicando lo que debe tomar como antecedente facilitándole la forma de concluir.

En el siguiente ejemplo, las demostraciones son un poco -- más complejas que en el anterior, porque se dan las premisas y- se establecen las conclusiones, pero ahora se omiten los núme-- ros dentro del paréntesis, de tal manera que ahora se necesita- poner la Ley e indicar con los números de donde se concluyó.

Ejemplo 2:

1.- $(p \wedge q) \wedge r$

2.- $(q \wedge r) \dashrightarrow t$

/——

3.- $p \wedge (q \wedge r)$	(	)
4.- $q \wedge r$	(	)
5.- t	(	)

En la siguiente demostración formal de argumentos el grado de complejidad es todavía mayor que los ejemplos anteriores --- porque solamente se proporcionan las premisas y el alumno tendrá que ir poniendo la conclusión correspondiente, indicando -- los números que sirven de base para concluir y justificar las - conclusiones con las Leyes de implicación y equivalencia.

Ejemplo 3:

1.- $(p \wedge q) \rightarrow r$ ....verdadera
2.- $(q \rightarrow r) \rightarrow \sim t$...............verdadera
3.- $t \vee s$ ....verdadera
4.- p ....verdadera

5.-
6.-
7.-
8.-

En este ejemplo se puede ver claramente el rigor de las -- demostraciones, porque se debe concluir (5) y después justificar con una Ley, para que pueda procederse a concluir y -- justificar la (6), (7), (8). Se han propuesto estas tres formas (Ejemplos) de demostración para ser utilizadas según el grado de comprensión del alumno, al mismo tiempo que muestra la utilidad de trabajar con formas o estructuras, dentro de un lenguaje simbólico previamente establecido.

Las siguientes demostraciones tienen por finalidad mostrar en conjunto las conceptuaciones y explicaciones tratadas anteriormente.

1.- $(r \wedge s) \rightarrow t$

2.- $(s \rightarrow t) \rightarrow \sim p$

3.- $p \vee m$

4.- r

/——

5.- $r \rightarrow (s \rightarrow t)$ (EXP. 1).

6.- $s \rightarrow t$ (M.P.P.4,5)

7.- $\sim p$ (M.P.P. 2.6)

8.- m (M.T.P.3,7)

1.- $p \vee (q \wedge r)$

2.- $\sim p$

3.- $r \rightarrow (q \wedge p)$

4.- $(p \wedge q) \rightarrow t$

/——

5.- $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (DISTR. 1)

6.- $p \vee r$ (SIMPL. 5)

7.- r (M.T.P. 2,6)

8.- $q \wedge p$ (M.P.P. 3,7)

9.- $p \wedge q$ (COMN. 8)

10.- t (M.P.P. 4,9)

Ejercicio: Demostrar la validez formal de los siguientes argumentos.

1.- $(p \vee q) \dashrightarrow (q \dashrightarrow r)$

2.- $\sim r$

3.- p

4.- $\sim q \dashrightarrow (s \vee t)$

5.- $\sim s$

6.- $t \dashrightarrow w$

$/\!\!-\!\!-$

7.- $p \vee q$ (   )

8.- $q \dashrightarrow r$ (   )

9.- $\sim q$ (   )

10.- $s \vee t$ (   )

11.- t (   )

12.- w (   )

1.- $(q \vee p) \longrightarrow r$

2.- $t \longrightarrow (p \vee q)$

3.- t

$/ \!\!-$

4.- $p \vee q$	(2, 3)
5.- $q \vee p$	(4)
6.- r	(1, 5)

1.- $p \vee q$

2.- $q \longrightarrow r$

3.- $r \longrightarrow s$

4.- $\sim p$

$/ \!\!-$

5.-	( )
6.-	( )
7.-	( )

Demostrar la validez formal de argumentos a nivel cuanti--ficacional.

Para demostrar argumentos en lenguaje cuantificacional necesitamos de las leyes de: Implicación, equivalencia, generalización y ejemplificación.

Es necesario tomar en cuenta las indicaciones de las de---mostraciones realizadas.

Demostrar: E u

1.- ($\forall$ x) (Rx --> Sx) ....verdadera

2.- ($\forall$ x) (Sx --> Ex)........................verdadera

3.- Ru ....verdadera

4.- Ru --> Su (E.U.1)

5.- Su --> Eu (E.U. 2)

6.- Ru --> Eu (S.M.4,5)

7.- Eu (M.P.P. 3,6) L.Q.Q.D.

En estas argumentaciones se tiene que ir deduciendo de - conclusión a conclusión (justificadas) hasta demostrar la validez de E u a partir de las premisas establecidas.

Demostrar: Se ---------> ~ Ee

1.- ($\forall$ x) (Mx --> Ax)

2.- ($\forall$ x) (Ax --> Ex)

3.- ($\forall$ x) (Sx --> Mx)

4.- Me ---> Ae (E.U. 1)

5.- Ae --> ~ Ee (E.U. 2)

6.- Se ---> Me (E.U. 3)

7.- Me ---> ~ Ee (S.H.4,5)

8.- Se ---> ~ Ee (S.H.6,7) L.Q.Q.D.

En los argumentos anteriores quedó demostrado Se ------ - Ee pero dentro de las reglas de la Lógica simbólica este -- enunciado todavía se puede generalizar con otra Ley.

Ejemplo:

Si retomamos 8.- Se ----> $\sim$ Ee (S.H.6,7,)

9.- $(\forall x)$ (Sx ---> $\sim$ Ex) (G.U.8)

Demostrar: Gs $\wedge$ Ee

1.- $(\forall x)$ (Dx -----> Ex)

2.- $(\exists x)$ (Dx $\wedge$ Gx)

3.- Ds ---> Es ....(E.U.1)

4.- Ds $\wedge$ Gs..............................(E.E.2)

.-.Ds..................................(SIMPL. 4)

6.- Es ....(M.P.P.3,5,)

7.- Gs ....(SIMPL.4)

8.- Es $\wedge$ Gs ....(CONJ. 6,7)

9.- Gs $\wedge$ Es ....(CONM.8) L.Q.Q.D.

Como en el ejemplo anterior, también este caso Gs Es se-puede generalizar pero existencialmente.

Ejemplo:

Si retomamos 9.- $Gs \wedge Es$ (COMN.8)

10.- $(\exists x)$ $(Gx \wedge Ex)$ (G.E. 9)

Demostrar: Fr Cr y generalizarlas existencialmente:

1.- $(\forall x)$ $(Rx \rightarrow Hx)$

2.- $(\forall x)$ $(Hx \rightarrow Cx)$

3.- $(\exists x)$ $(Fx \wedge Rx)$

4.- $Rr \rightarrow Hr$	(E.U. 1)
5.- $Hr \rightarrow \sim Cr$	(E.U.2)
6.- $Fr \wedge Rr$	(E.E.3)
7.- $Rr \rightarrow \sim Cr$	(S.H.4,5,)
8.- Rr	(SIMPL.6)
9.- $\sim Cr$	(M.P.P.7,8,)
10.- Fr	(SIMPL. 6)
11.- $\sim Cr \wedge Fr$	(CONJ.9,10)
12.- $Fr \wedge \sim Cr$	(COMN.11) L.Q.Q.D.
13.- $(\exists x)$ $(Fx \wedge \sim Cx)$	(G.E.12) Se aplicó la Ley de generalización existencial.

Con todo lo presentado hasta aquí, queda explicada la construcción de la lógica simbólica. Se trataba de mostrar los elementos conceptuales y de demostración de la Lógica matemática dentro de un sistema axiomático formalizado como es el de la lógica matemática. Otro de los objetivos propuestos al abordar este trabajo, era el de conocer algunas consideraciones metodológicas en el quehacer lógico y matemático.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

(1) Tarski Alfred. Introducción a la Lógica y a la Metodología de las - Ciencias Deductivas Ed.Espasa-Calpe Madrid 1977 pág.195.

(2) Amor Montaño .Antología de la Lógica Matemática.México 1976.Pág.68.

(3) Nogel E.Newmann J.R. El Teorema de Gödel . Conacyt.México.1982 pág.70

(4) IBIDEM Pág.82

(5) IBIDEM Pág.90

(6) IBIDEM Pág.91

(7) Kudrín A.K La Lógica y la verdad.Ed.Cartago.México 1983 pág.47

(8) Cohen Morris y Nagel Ernest.Introducción a la Lógica y al Método -- Científico.Tomo I .Amorrorto editores.Argentina 1979.pág.18

(9) Arnaz Jose Antonio.Iniciación a la Lógica Simbólica.Ed.Trillas México 1984 Pág.14

(10) IBIDEM Pág.43

(11) Suppes P.y Hill.S Introducción a la Lógica Matemática.Ed.Reverté, España.1975 pág.87

(12) Kudrín A.K.La Lógica y la verdad. Ed.Cartago .México 1983 pág.49

(13) Kedrov y Spirkin.La Ciencia Ed.Grijalbo México 1984 pág.18.

CAPITULO III

LOGICA DE COMPUTADORAS

a) La lógica simbólica y los circuitos lógicos.

Después de haber presentado la construcción de la lógica matemática, creímos conveniente esquematizar más claramente como ocurre la aplicación de las estructuras abstractas del cálculo proposicional en algo más concreto: "El álgebra de circuitos".

Es importante recordar que la aplicación más relevante de la lógica matemática la encontramos en el escenario de la cibernética y telecomunicación principalmente. "El álgebra de circuitos se utiliza para diseñar simplificar o adecuar los circuitos empleados en las computadoras electrónicas, los sistemas de telecomunicación y otros muchos y variados dispositivos de control electrónico". (1)

Lo que pretendemos preferentemente en este aspecto es mostrar que apartir de los elementos estructurales y metodológicos de la lógica simbólica, podemos de manera análoga entender la construcción de lo que se podría llamar la "Lógica de circuitos", y al mismo tiempo describir su formación y aplicación en circuitos sencillos tanto en serie como en paralelo.

Por tanto, creemos importante presentar un cuadro comparativo entre la construcción de la lógica matemática y la construcción de la teoría de los circuitos lógicos, para ejemplificar de manera sencilla sus elementos constitutivos y la fundamentación, operacionalización y aplicación de los mismos. (Solamente a nivel elemental - tablas de verdad.)

Empesaremos por delimitar algunos elementos de formalización en la teoría de los circuitos lógicos para poder entender el significado y forma de operar con los símbolos empleados en esta teoría.

- La formación de los circuitos lógicos que describimos en forma práctica y funcional es un modelo para comprender la formación y operación de las tablas de verdad, esto tiene por finalidad, comprender efectivamente la aplicación de algunas relaciones estructurales entre proposiciones.

En la teoría de los circuitos lógicos interviene en gran medida la formalización del lenguaje simbólico de la lógica y además otra conceptuación y simbología específica que a continuación presentamos:

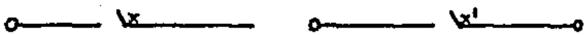
b) Las conectivas y los circuitos.

P	$\sim$ P
	F
	V

x	x'
	0
	1

Si P es verdadera su negación será falsa.
Si P es falsa su negación será verdadera.

Cuando el interruptor X está cerrado, entonces el iterruptor X está abierto.
Cuando el interruptor X está ABIERTO, entonces el interruptor X está cerrado. (1)

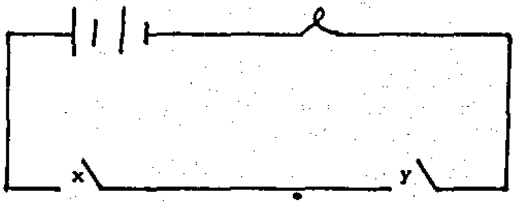


LA CONJUNCION

p q	p $\wedge$ q
	V
	F
	F
	F

PRODUCTO LOGICO

x y	xy
	1
	0
	0
	0



CIRCUITO LOGICO EN SERIE REPRESENTADO POR LA CONJUNCION

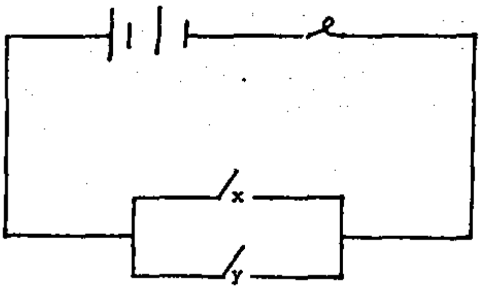
Solamente que los dos interruptores
estén cerrados pasa la corriente.

DISYUNCION

p	q	p V q
		V
		V
		V
		F

SUMA LOGICA

x	y	x + y
		1
		1
		1
		0



CIRCUITO LOGICO EN PARALELO REPRESENTADO POR LA DISYUNCION

Es suficiente que un interruptor está
CERRADO para que pase la corriente. (3)

Al estructurar el circuito de la condicional tendremos que recurrir a la equivalencia entre proposiciones para que la implicación pueda ser presentada en un circuito en paralelo.

La proposición $p \dashrightarrow q$ es equivalente a $\sim p \vee q$

p	q	p --> q
		V
		F
		V
		V

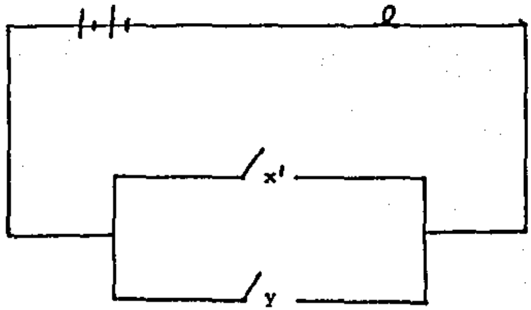
p	q	∼p V q
		V
		F
		V
		V

Por tanto, $(p \dashrightarrow q) \equiv (\quad p \vee q)$. En este caso es en - donde vemos claramente la utilidad de la equivalencia, pues nos permite sustituir una proposición por otra.

CONDICIONAL

p	q	p V q
		V
		F
		V
		V

x	y	x' + y
		1
		0
		1
		1



CIRCUITO LOGICO EN PARALELO REPRESENTADO POR LA CONDICIONAL Y - SU RESPECTIVA EQUIVALENCIA.

Solamente que los dos iterruptores-- estén ABIERTOS no pasa la corriente, en los demás casos si pasa.

En la estructura del circuito lógico de la BICONDICIONAL - también recurriremos a su proposición equivalente para repre--- sentarla.

p	q	$p \leftrightarrow q$
		V
		F
		F
		V

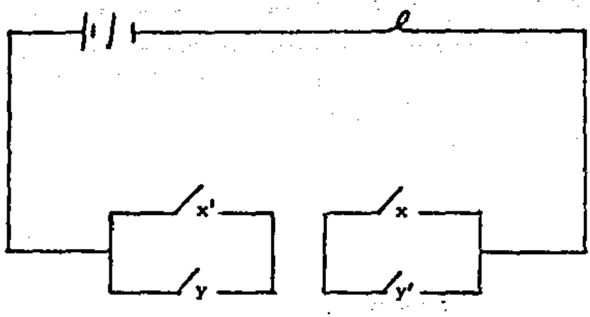
p	q	$(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$
		V
		F
		F
		V

Por tanto, $(p \leftrightarrow q) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$

BICONDICIONAL

p	q	$(\sim p \vee q)$	$\wedge$	$(p \vee \sim q)$
			V	
			F	
			F	
			V	

x	y	$(x' + y)$	$(x + y')$	$x \leftrightarrow y$
		1	1	1
		0	1	0
		1	0	0
		1	1	1



CIRCUITO LOGICO EN SERIE DE DOS CIRCUITOS EN PARALELO REPRESENTADO POR LA BICONDICIONAL Y SU RESPECTIVA EQUIVALENCIA.

Solamente que ambos interruptores esten CERRADOS pasa la CORRIENTE. Un iterruptor cerrado en cada circuito en paralelo.

Los circuitos lógicos y su funcionamiento.

Después de haber señalado la formación de los circuitos en SERIE Y EN PARALELO a partir de los elementos de la lógica proposicional, pasaremos a representar el funcionamiento de Circuitos eléctricos en base a los posibles valores de verdad que-se combinen según la tabla de verdad del conectivo Lógico en --cuestión.

La conjunción

La tabla de valores de verdad para la conjunción es.

p	q	$p \wedge q$
		V
		F
		F
		F

En la conjunción de propo-- siciones podemos deducir:

a) Una condición necesaria para que la conjunción sea falsa es:

La tabla de condiciones - en que funciona este circuito es:

x	y	x y
		1
		0
		0
		0

De este circuito en serie podemos deducir:

a)Una condición necesaria para que el circuito este abierto es que:

que las proposiciones p y q sean:

p = (F) y / 0 q = (V)

b) Una condición necesaria para que la conjunción p q sea verdadera es que:

p = (V) y q = (V)

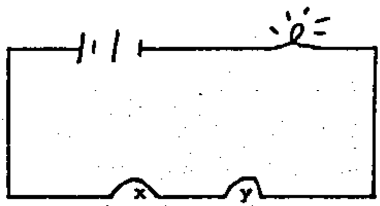
Los iterruptore Xy y sean

x = 0 y / 0 y = 0

b) Una condición necesaria para que el circuito esté cerrado es que:( )

x = 1 y y = 1

V V



En este caso el circuito esta cerrado por tanto, el foco - enciende.

La tabla de valores correspondientes a la tercera posibi-- lidad, para que un circuito se encuentre conectado en serie -- respecto a la conjunción es:

p	q	$\sim p \wedge q$
		F
		F
		V
		F

x	y	x' y
		0
		0
		1
		0

De la presente proposición podemos deducir:

a) La condición necesaria para que la proposición - sea falsa es: p q

p = (V) y/O q =(F)

b) La condición necesaria para que la proposición -

p q sea verdadera es:

p = (F) y q = (V)

Del circuito representado -- podemos deducir:

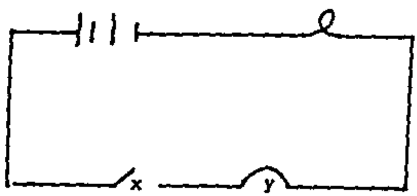
a) La condición necesaria -- para que el circuito este -- ABIERTO es:

x = 1 y/O y = 0

b) La condición necesaria -- para que el circuito este -- cerrado es:

x = 0 y y = 1

F V



En este caso el circuito está ABIERTO, por lo tanto, el foco -- permanece apagado.

La cuarta posibilidad de un circuito conectado en serie -- respecto a la conjunción es:

p	q	$\sim p \wedge \sim q$
		F
		F
		F
		V

x	y	$x' \quad y'$
		0
		0
		0
		1

De esta tabla de verdad - podemos deducir:

a) La condición necesaria- para que la proposición - p q sea falsa es:- p = (V) y/O q = (V)

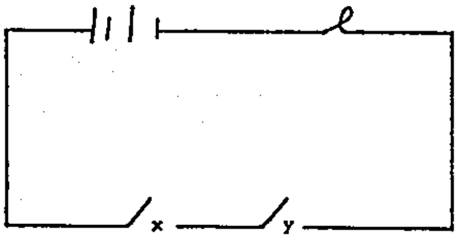
b) La condición necesaria para que la proposición - p V q sea verdadera es: p = (F) y q = (F)

respecto a este circuito --- podemos deducir:

a) La condición necesaria -- para que el circuito este -- abierto es: x = 1 y/O y = 1

b) La condición necesaria -- para que el circuito este -- CERRADO es: x = 0 y y = 0

F F



La tabla de valores correspondiente a la tercera posibilidad, para que un circuito se encuentre conectado en serie respecto a la conjunción es:

p	q	$\sim p \wedge q$
		F
		F
		V
		F

x	y	x' y
		0
		0
		1
		0

De la presente proposición podemos deducir:

a) La condición necesaria para que la proposición sea falsa es: p q

p = (V) y/O q = (F)

b) La condición necesaria para que la proposición p q sea verdadera es:

p = (F) y q = (V)

Del circuito representado podemos deducir:

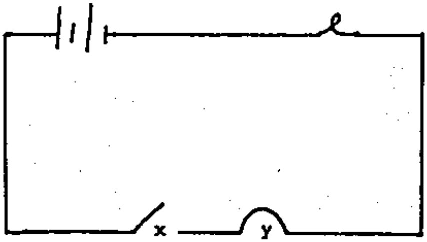
a) La condición necesaria para que el circuito esté ABIERTO es:

x = 1 y/O y = 0

b) La condición necesaria para que el circuito esté cerrado es:

x = 0 y y = 1

F V



En este caso el circuito está ABIERTO, por tanto, el foco - permanece apagado.

LA DISYUNCION

La tabla de verdad para las condiciones posibles de la disyunción es:

p	q	p V q
		V
		V
		V
		F

De esta disyunción entre - proposiciones podemos se-

a) La condición necesaria que la proposición p V q sea falsa es:

p = (F) y q = (F)

b) y para que la proposición p V q sea verdadera es que:

p = (V) y/O q = (V)

La tabla de condiciones-- en que funciona este circuito es:

x	y	x + y
		1
		1
		1
		0

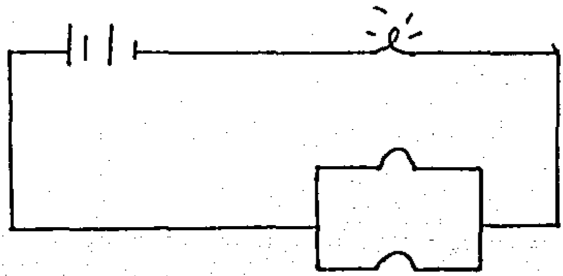
De este circuito en paralelo podemos deducir:

a) La condición necesaria -- para que el circuito esté -- ABIERTO es:

$x = 0$ y $y = 0$

b) y para que el circuito se encuentre cerrado es que:

$x = 1$ y/O $y = 1$



En este caso, el circuito está cerrado por tanto, el foco-se enciende.

La segunda posibilidad de un circuito en paralelo respecto a la Disyunción es:

p	q	p V ∼q
		V
		V
		F
		V

x	y	x + y'
		1
		1
		0
		1

Respecto a esta tabla de verdad podemos deducir:

a) La condición necesaria para que la proposición - p V q sea falsa es -- p = (F) y q = (V)

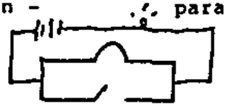
b) La condición necesaria para que la proposición -

De este circuito podemos deducir

a) La condición necesaria -- para que este circuito en -- paralelo este abierto es:

x = 0 y y = 1

b) La condición necesaria -- para que este circuito esté-

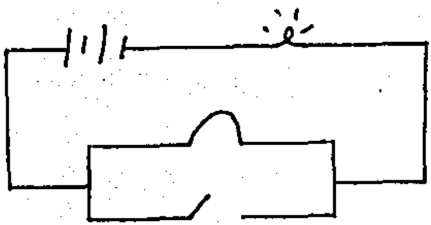


p V q sea verdadera es:

p = (V) y/O q = (F)

CERRADO es:

x = 1 y/O y = 0



En este caso, el circuito está CERRADO por tanto, el foco-se enciende.

La tercera posibilidad de un circuito en paralelo respecto a la Disyunción es:

p	q	~p V q
		V
		F
		V
		V

x	y	x' + y
		1
		0
		1
		1

De estatabla de verdad podemos deducir:

a) La condición necesaria

De el presente circuito en -paralelo podemos decir:

a) La condición necesaria --

para que la proposición - $p \vee \sim q$ sea falsa es: -

p = (V) y q = (F)

para que el circuito se encuentre ABIERTO es:

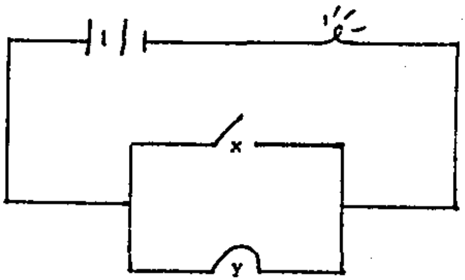
x = 1 y y = 0

b) La condición necesaria para que la proposición - $p \vee \sim q$ sea verdadera es:

p = (F) y/O q = V

b) La condición necesaria -- para que el circuito esté -- cerrado es:

x = 0 y/O y = 1



En este caso, el circuito está CERRADO por tanto, el foco enciende.

La cuarta posibilidad de un circuito en paralelo respecto - a la Disyunción es:

p	q	$\sim p \vee \sim q$
		F
		V
		V
		V

De esta tabla de verdad - podemos deducir:

a) La condición necesaria para que la proposición - p V q sea falsa es:

p = (V) y q = (V)

b) La condición necesaria para que la proposición - p V q se verdadera es:
p = (F) y/O q = (F)

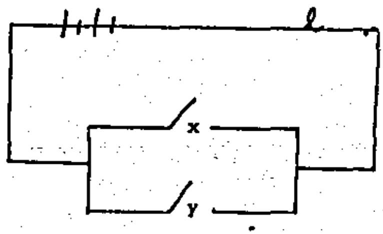
x	y	$x' + y'$
		1
		0
		0
		0

De este circuito podemos deducir:

a) La condición necesaria -- para que este circuito en -- paralelo se encuentre ABIER-TO es:

x = 1 y y =1

b) La condición necesaria -- para que el circuito esté -- CERRADO es: ( )
x = 0 y/O y = 1



En este caso el circuito está ABIERTO por tanto, el foco - permanece apagado.

L A C O N D I C I O N A L

Al elaborar la tabla de verdad de la condicional y su circuito correspondiente, recurriremos al concepto de equivalencia para representar a la condicional mediante un circuito conectado en paralelo.

V - V

Inclusión Lógica

La Tabla de Valores es:

p	q	$\sim p \rightarrow q$
		V
		V
		V
		F

La proposición $(\sim p \rightarrow q) \equiv$ $(p \vee q)$

La Tabla de condiciones en - que funciona este circuito - es:

x	y	x + y
		1
		1
		1
		0

De esta proposición concluímos:

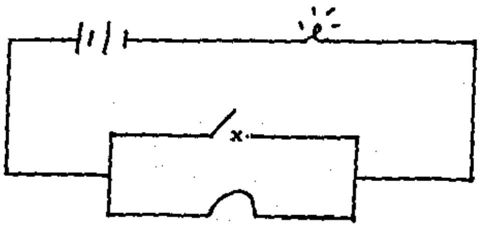
a) La condición necesaria para que la proposición p --- q sea falsa es:
p = (F) y q = (F)

b) La condición necesaria para que la proposición sea verdadera es:
p = (V) y/o q = (V)

De este circuito podemos concluir:

a) La condición necesaria para que el circuito se encuentre ABIERTO es:
x = 0 y y = 0

b) La condición necesaria para que el circuito este CERRADO es:
x = 1 y/o y = 1



El circuito está CERRADO y corresponde a la condicional. - Por tanto, el foco enciende. (4)

V - F

El segundo caso de un circuito conectado en paralelo correspondiente a la condicional es:

Implicación Lógica Inversa

p	q	q --> p
		V
		V
		F
		V

De esta proposición deducimos:

a) La condición necesaria para que la proposición q --> p se falsa es:

p = (F) y q = (V)

b) y además, para que la proposición sea verdadera p = (V) y/o q = (F)

La proposición (q--> p) $\equiv$ p V $\sim$ q

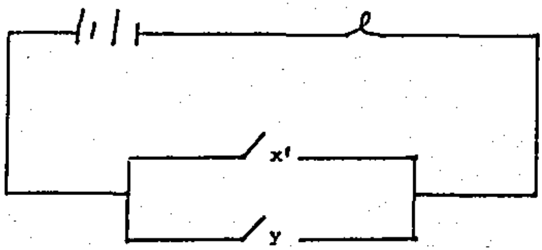
x	y	x + y'
		1
		1
		0
		1

De este circuito deducimos:

a) La condición necesaria para que el circuito se encuentre ABIERTO es:

x = 0 y y = 1

b) y además, para que el circuito esté CERRADO es:
x = 1 y/o y = 0



En este caso el circuito está ABIERTO por tanto, el foco - permanece apagado.

F - V

El tercer caso de un circuito conectado en paralelo correspondiente a la condicional es:

Implicación Lógica

La proposición (p --> q) $\equiv$ ($\sim$ p V q)

p	q	p --> q
		V
		F
		V
		V

x	y	x' + y
		1
		0
		1
		1

De esta proposición pode-
demos deducir:

a) La condición necesaria para que la proposición - sea falsa es:

p = (V) y q = (F)

b) y ademaś, para que la-proposición sea verdadera es:

p = F y/o q = (V)

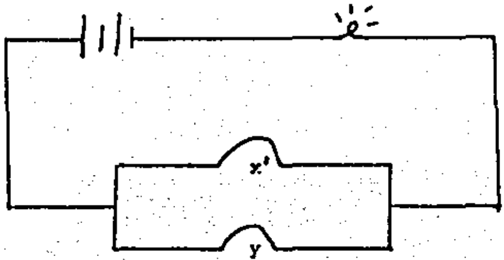
De este circuito podemos deducir:

a) La condición necesaria -- para que el circuito se encuentre ABIERTO es:

x = 1 y y = 0

b) y además, para que el -- circuito esté cerrado es:

x = 0 y/o y = 1



En este caso el circuito está CERRADO por tanto, el foco - enciende...

F - F

La cuarta posibilidad de un circuito conectado en paralelo correspondiente a la condicional es:

Incompatibilidad Lógica

o

Función de Sheffer

p	q	$p \rightarrow \sim q$
		F
		V
		V
		V

La proposición $(p \rightarrow \sim q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

x	y	$x' + y'$
		0
		1
		1
		1

De esta proposición podemos deducir:

a) La condición necesaria para que la proposición sea falsa es:

p = (V) y q = (V)

b) y para que la proposición sea verdadera es que:

p = (F) y/o q = (F)

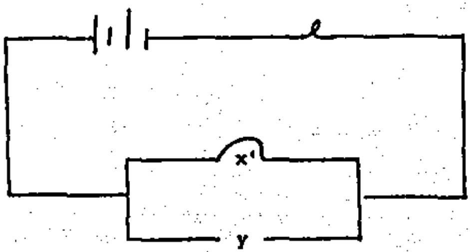
De este circuito podemos deducir:

a) La condición necesaria para que el circuito se encuentre ABIERTO es:

x = 1 y y = 1

b) y para que el circuito esté CERRADO es que: (5)

x = 0 y/o y = 0



En este caso el circuito está CERRADO por tanto, el foco - enciende.

L A B I C O N D I C I O N A L

V V

Al realizar la tabla de verdad de la bicondicional, recu-- rrimos a su equivalencia para poder representarla mediante un - circuito conectado en serie de dos circuitos en paralelo.

La proposición se hace siguiendo el esquema.

La proposición $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \equiv (p \leftrightarrow q)$

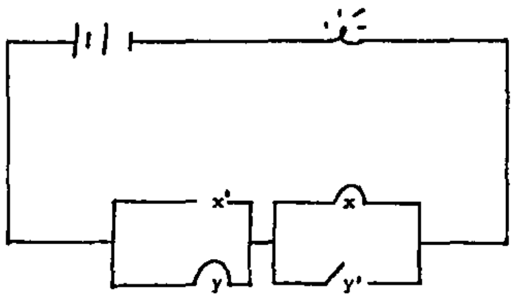
x	y	$x' + y$	Producto Lógico	x	y	$x + y'$
		1	1			1
		0	0			1
		1	0			0
		1	1			1

a) La condición necesaria y suficiente para que el circuito se encuentre ABIERTO es:

$$x = 1 \quad y \quad y = 0 \qquad ó \qquad x = 0 \quad y \quad y = 1$$

b) La condición necesaria y sufuciente para que el circuito se encuentre CERRADO es:

$$x = 1 \quad y \quad y = 1 \qquad ó \qquad x = 0 \quad y \quad y = 0$$



El circuito está CERRADO y corresponde a la bicondicional. Portanto, enciende el foco.

V - F

El segundo caso de un circuito en serie de dos circuitos,- en paralelo correspondiente a la bicondicional es:

x	y	$x' + y'$
		0
		1
		1
		1

Producto Lógico
0
1
1
0

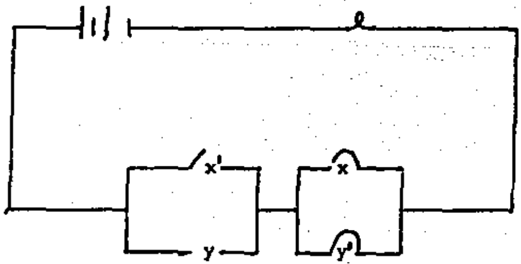
x	y	$x + y$
		1
		1
		1
		0

a) La condición necesaria y suficiente para que el circuito esté ABIERTO es:

$$x = 1 \quad y \quad y = 1 \qquad ó \qquad x = 0 \quad y \quad y = 0$$

b) La condición necesaria y suficiente para que el circuito se- encuentre CERRADO es:

$$x = 1 \quad y \quad y = 0 \qquad ó \qquad x = 0 \quad y \quad y = 1$$



El circuito está ABIERTO y corresponde a la bicondicional. Portanto, el foco permanece apagado.

F - V

El tercer caso de un circuito conectado en serie de dos -- circuitos en paralelo correspondiente a la Bicondicional es:

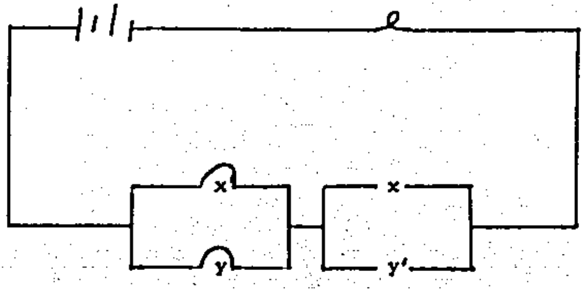
x	y	x + y	Producto Lógico	x	y	x' + y'
		1	0			0
		1	1			1
		1	1			1
		0	0			1

a) La condición necesaria y suficiente para que el circuito se- encuentre ABIERTO es:

$$x = 1 \quad y \quad y = 1 \quad ó \quad x = 0 \quad y \quad y = 0$$

b) La condición necesaria y suficiente para que el circuito se encuentre CERRADO es:

$$x = 1 \quad y \quad y = 0 \quad ó \quad x = 0 \quad y \quad y = 1$$



El circuito está ABIERTO y corresponde a la bicondicional. Por tanto, el foco permanece apagado.

F - F

El cuarto caso de un circuito conectado en serie de dos circuitos en paralelo correspondiente a la bicondicional es:

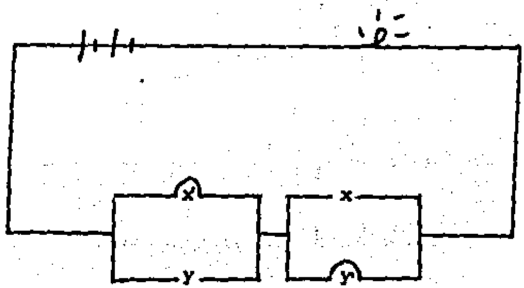
x	y	$x + y'$	Producto Lógico	x	y	$x' + y$
		1	1			1
		1	0			0
		0	0			1
		1	1			1

a) La condición suficiente y necesaria para que el circuito se- encuentre ABIERTO es:

$$x = 1 \quad y \quad y = 0 \quad ó \quad x = 0 \quad y \quad y = 1$$

b) La condición suficiente y necesaria para que el circuito es- té CERRADO es: ( )

$$x = 1 \quad y \quad y = 1 \quad ó \quad x = 0 \quad y \quad y = 0$$



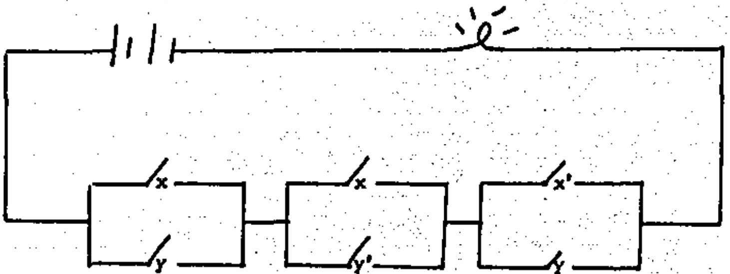
El circuito está CERRADO y corresponde a la bicondicional. Por tanto, el foco enciende.

Finalmente exponemos dos ejemplos de circuitos eléctricos- con sus respectivas tablas para ejemplificar en forma sencilla- y concreta la aplicación del funcionamiento de los circuitos apartir de las tablas de verdad descritas.

CIRCUITO EN SERIE DE TRES CIRCUITOS EN PARALELO:

x	y	(x + y)	(x + y′)	(x′+ y)	x Y
		1	1	1	1
		1	1	0	0
		1	0	1	0
		0	1	1	0

por tanto, $(x + y)(x + y')(x' + y) \equiv x\,y$

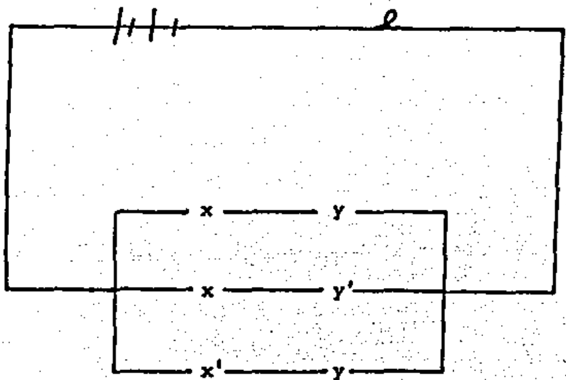


La corriente fluye y el foco prende cuando x y y están cerra--dos.

CIRCUITO EN PARALELO DE TRES CIRCUITOS EN SERIE:

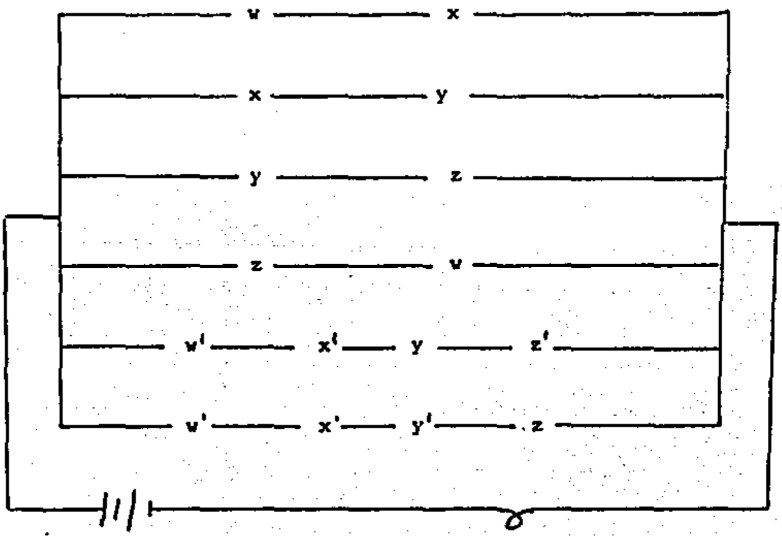
x	y	(x y) +	(x y') +	(x' y)	x + y
		1	0	0	1
		0	1	0	1
		0	0	1	1
		0	0	0	0

Por tanto, $(x\ y) + (x' y) + (x\ y') \equiv (x + y)$



La corriente fluye y el foco enciende cuando uno o dos de-los interruptores están cerrados.

Finalmente describimos un ejemplo en donde a partir de las leyes del álgebra de circuitos y del concepto de equivalencias-podemos estructurar y presentar el diagrama de un circuito en -serie.



Su representación algebraica es:

$$(w\ x) + (x\ y) + (y\ z) + (z\ w) + (w' x' y\ z') + (w' x' y' z)$$

LA TABLA DE FUNCIONAMIENTO DE ESTE CIRCUITO ES:

w x y z	(w x) +	(x y) +	(y z) +	(z w) +	(w x y z) +	(w x y z)	Función
	1	1	1	1	0	0	1
	1	1	0	0	0	0	1
	1	0	0	1	0	0	1
	1	0	0	0	0	0	1
	0	0	1	1	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	1	0	0	0	1
	0	1	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	0	1	1
	0	0	0	0	0	0	0

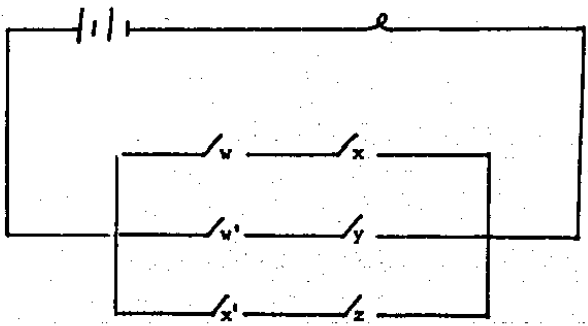
Por tanto este circuito se encuentra CERRADO y el foco enciende si:

$$w = 1 \quad x = 1 \qquad ó \qquad w = 0 \quad y = 1 \qquad ó \qquad x = 0 \quad z = 1$$

pero además, si tomamos en cuenta las posibilidades en que este circuito está cerrado y las simbolizamos para estructurar otra-expresión algebráica tenemos:

$$w\,x + w'\,y + x'\,z$$

y su representación en un circuito es:



Su tabla de funcionamiento es:

w x y z	(w x) +	(w y) +	(x z)	Función
	1	0	0	1
	1	0	0	1
	1	0	0	1
	1	0	0	1
	0	0	1	1
	0	0	0	0
	0	0	1	1
	0	0	0	0
	0	1	0	0
	0	1	0	1
	0	0	0	1
	0	0	0	0
	0	1	1	0
	0	1	0	1
	0	0	1	1
	0	0	0	1
				0

por tanto, podemos afirmar que ambos circuitos son equivalentes:

$$(w\,x) + (x\,y) + (yz) + (z\,w) + (w'x'y\,z') + (w'x'y'z) \equiv (w\,x) + (w'y) + (x'z)$$

Las condiciones para que el foco encienda, son las mismas que en el circuito anterior. (6)

C) COMPUERTAS LOGICAS

Además deseamos comprobar la función metodológica de la lógica matemática, en la lógica de las computadoras.

La computadora realiza funciones básicas en las unidades aritméticas y de control, en donde se utilizan circuitos forma- por combinaciones de compuertas. En este caso las compuertas constituyen el circuito lógico elemental.

Conocer elementalmente a una computadora nos ayudará explicar de manera más facil la función metodológica de la lógica matemática en el funcionamiento de las mismas.

A continuación presentamos un cuadro sinóptico de los elementos y partes esenciales de una computadora.

COMPUTADORA

- + **ELEMENTOS**
  - -HARDWARE
  - _SOFTWARE
- + **PARTES**
  - -MONITOR
  - -UNIDAD DE DISCOS
  - -IMPRESORA
  - -UNIDAD CENTRAL DE PROCESO (U.C.P.)

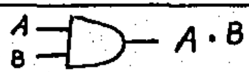
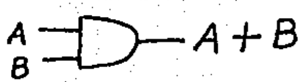
- MEMORIAS
  - RAM
  - ROM
- UNIDAD ARITMETICO LOGICA
- UNIDAD DE CONTROL

El funcionamiento básico de una computadora se da a partir de circuitos lógicos o compuertas es por eso que describimos la representación gráfica del funcionamiento de las compuertas lógicas en una computadora.

Cada computadora es un circuito que acepta una entrada o más, en forma de impulso (I) o impulso invertido (O) y proporciona una salida del mismo tipo. (7)

ENTRADAS ---------- $\boxed{\text{COMPUERTA}}$ ---------- SALIDA

Existen varios tipos de compuertas cuyo funcionamiento es análogo al de las conectivas y circuitos lógicos. Las más importantes son: COMPUERTA "Y", "O", "NAND", "NOR".

CONECTIVA	CIRCUITO	COMPUERTA
$A \wedge B$	$A \cdot B$	
$A \vee B$	$A + B$	

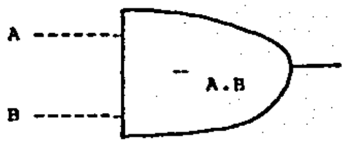
COMPUERTA " Y "

La compuerta "Y" equivale a un circuito en serie y su tabla ---binaria es la siguiente.

A	B	A.B
I	I	I
I	O	O
O	I	O
O	O	O

Esta tabla binaria corres---ponde a un circuito en serie.

Su representación gráfica en compuerta lógica es:



Si hay impulso en todas sus entradas entonces se produce como -salida un impulso (I) como se muestra en la tabla.

COMPUERTA "O"

La compuerta "O" equivale a un circuito en paralelo y su tabla-binaria es la siguiente:

A	B	A + B
I	I	I
I	O	I
O	I	I
O	O	O

A esta tabla binaria corresponde a un circuito en paralelo.

Su representación gráfica en compuerta lógica es:

Cuando cualquiera de sus entradas es un impulso (I), da como -- salida un impulso (I).

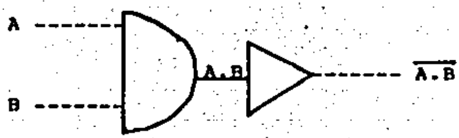
COMPUERTA "NAND"

La compuerta "NAND" equivale a un circuito en paralelo y su --- tabla binaria es la siguiente:

A	B	A.B	A.B
I	I	I	O
I	O	O	I
O	I	O	I
O	O	O	I

Esta tabla binaria equivale - un circuito en paralelo.

Su representación gráfica en compuerta lógica es:



En este caso tenemos de entrada un circuito en serie, pero con- el inversor tenemos como salida un circuito en paralelo.

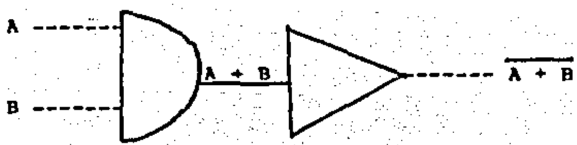
COMPUERTA " NOR "

La compuerta "NOR" equivale a un circuito en serie y su tabla- binaria es la siguiente:

A	B	A + B	A + B
I	I	I	O
I	O	I	O
O	I	I	O
O	O	O	I

Esta tabla binaria equivale- a un circuito en serie.

Su representación gráfica en compuerta lógica es:



En este caso tenemos de entrada un circuito en paralelo pero -- con el inversor tenemos como salida un circuito en serie. (8)

Con los esquemas anteriormente presentamos demostramos - la aplicación metodológica de la lógica matemática a la lógica- de computadoras.

Finalmente mostramos una aplicación práctica de los operadores lógicos en un sencillo programa para computadora.

```
10  CLS
20  PRINT "CONTESTA SI O NO A LAS PREGUNTAS".
30  PRINT
40  INPUT  "JUAN TIENE BALON?"; X$
50  INPUT "JUAN TIENE TIEMPO ?"; Z$
55  IF X$ "SI" AND X$  "NO" OR Z$  "SI" AND Z$ "NO" THEN
    165
60  IF X$ = "SI" AND Z$ = "SI" THEN 120
70  PRINT
80  PRINT  "COMO NO SE CUMPLEN"
90  PRINT  "LAS DOS CONDICIONES"
100 PRINT "JUAN NO PUEDE JUGAR"
110 GO TO 30
120 PRINT
130 PRINT "COMO SE CUMPLE"
140 PRINT "LAS DOS CONDICIONES"
150 PRINT "JUAN PUEDE JUGAR"
155 PRINT "---------------"
160 GO TO 30
```

```
165 PRINT
170 PRINT " TECLEASTE MAL TU RESPUESTA CONTESTA OTRA VEZ"
180 GO TO 30
190 END
```

(9)

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

(1) Gortari Eli de . Elementos de Lógica Matemática.
Ed.Oceáno México 1983 pág.111

(2) IBIDEM Pág.117

(3) IBIDEM Pág.119

(4) Flores Meyer y Fautacht. Temas Selectos de Matemáticas.
Ed.Progreso. México 1981 Pág.65

(5) IBIDEM Pág.72

(6) Gortari Eli de . Elementos de Lógica Matemática.
Ed.Oceáno México 1983 pág.139

(7) Benice D.Daniel. Introducción a las Computadoras y al Proceso de Datos.

(8) IBIDEM Pág.88

(9) Wat Soffa y Mavgada Miguel. Basic avanzado para niños.
Fernando Editores. México 1986.

C O N C L U S I O N E S

Después de haber elaborado el presente trabajo se pueden -- establecer las siguientes conclusiones:

- Los elementos metodológicos y de conceptuación más importantes de la lógica matemática son: El método axiomático, la - deducibilidad, la demostración, el formalismo y la implicación; porque son indispensables en el desarrollo del pensamiento ló-- gico - matemático.

- El formalismo se convirtió en estrategia metodológica -- fundamental para la construcción de las teorías axiomáticas -- formalizadas, específicamente en la lógica matemática.

- La deducibilidad y la implicación son conceptuaciones -- metodológicas esenciales en todo sistema axiomático formalizado, porque permiten demostrar los teoremas y enunciados deducidos - de los axiomas establecidos en el sistema.

- La construcción del sistema axiomático formalizado de la Lógica simbólica es un ejemplo claro del avance y aplicación de las consideraciones metodológicas actuales.

- Las demostraciones a nivel proposicional y cuantifica--- cional, ayudan a entender el rigor sistemático del procedimiento metodológico en las teorías estructurales de la lógica matemática.

- La teoría axiomática formalizada de la lógica matemática posee elementos estructurales que pueden aplicarse en otros -- campos científicos.

- Con los elementos metodológicos de la lógica simbólica - podemos comprender más facilmente la construcción de la teoría- respecto a los circuitos lógicos.

- La teoría de la lógica matemática tiene aplicación en la fundamentación y operacionalización en el campo de los circui-- tos eléctricos, la computación y la electrónica.

- Los elementos y la conceptuación de la lógica simbólica- son importantes pues nos ayudan a comprender los elementos -- componentes de la teoría y "el álgebra de circuitos".

- Con los elementos metodológicos de la lógica matemática podemos entonces entender más facilmente el funcionamiento de - los circuitos lógicos y su aplicación a la lógica de computadoras.

B I B L I O G R A F I A

- Academia de ciencias de la URSS y Cuba. Metodología del conocimiento científico. Quinto Sol, México 1975. 445 págs.
- Amor Montaño. Antología de la Lógica-matemática.
- Aréchiga G. Rafael. Fundamentos de computación. Ed. Limusa. - México 1984 391 págs.
- Arnaz José Antonio. Iniciación a la lógica simbólica. Ed. - Trillas Méx. 1984.
- Benice D. Daniel.-Introducción a las computadoras y proceso - de datos. Ed. Prentice/ Hall International. Argentina 1982.
- Bochenski. I. M. Los métodos actuales del pensamiento. Ed. -- Rialp, Madrid 1981.
- Bunge Mario. La ciencia, su método y su filosofía. Ed. S. XX- Buenos Aires 1974.
- Bunge Mario. La Investigación científica. Ed. Ariel. España - 1981.
- Cohen Morris y Nagel Ernest. Introducción a la lógica y al -- Método Científico. Tomo I. Amorrortu editores. Argentina 1979.
- Chapa de Santos R. Ma. Elena. Introducción a la lógica. Ed. - Kapeluaz. México 1976.
- Chávez C.P. Lógica. Introducción a la ciencia del razonamiento. Publicaciones Cultural. México 1983.
- Elí de Gortari. Lógica General. Ed. Grijalbo S.A. México 1980.
- Fingerman Gregorio. Lógica y teoría del conocimiento. Ed. A-- teneo, Buenos Aires 1977. 251 págs.

- Flores Meyer. M. A. y Fautscht. Temas selectos de matemáticas Ed. Progreso, México 1981.
- Gorski y Tavans. Lógica. Ed. Grijalbo S.A. México 1981.
- Gortari Eli de, Elementos de lógica matemática. Ed. Océano. - México 1983.
- Gortari Eli de, Metodológia general y métodos especiales. Ed. Océano. México 1983.
- Heller y Dianne Martin. Bits y Bits. Iniciación a la informática. Publicaciones cultural. México 1985.
- Hofstadter R. Douglas. Godel, Escher, Bach: una eterna trenza dorada. CONACYT. México 1982. 915 págs.
- Kedrov. M.B. y Snirkin A. La ciencia. Ed. Grijalbo. México -- 1985.
- Kudrin A. K. La lógica y la verdad. Ed. Cártago 2ª ed. México 1983.
- López Cano J.L. Método e hipótesis Científicas. Ed. Trillas - México 1984.
- Nagel E. y Newwman J.R. El teorema de Gödel. Conacyt. México- 1981.
- Newman James. El mundo de las matemáticas Tomo V. Ed. Grijalbo. México 1982.
- Pinzón Alvaro. Conjuntos y Estructuras. Ed. Harla. México -- 1982.
- Quine W.V. Los métodos de la lógica. Ed. Ariel. España 1981.
- Romero Francisco. Lógica. Ed. Losada 4ª ed.. Ed. Buenos Aires 1979.

- Reichembach Hans. La filosofía Científica. Ed. F.C.E.. México 1981.
- Rivera Márquez Melesio. La comprobación científica. Ed. Tri-- llas. México 1981.
- Rusell Bertrand. Los principios de la matemática. Espa-Calpe- S.A. Madrid 1983. 619 págs.
- Sacristán Manuel. Introducción a la lógica y al análisis --- formal. Ed. Ariel. España.
- Supess Patrick. Introducción a la lógica simbólica. Ed. C.E._ C.S.A. México 1978.
- Supees P. Hill. Introducción a la lógica matemática. Ed. --- Reverté. México 1975.
- Tarski Alfred. Introducción a la lógica y a la Metodología de las Ciencias Deductivas. Ed. Espasa-Calpe S.A. Madrid 1977. - 285 págs.
- Wartofsky Max W. Introducción a la filosofía de la ciencia.- Tomo I. Ed. Alianza. España 1976.
- Watt Sofía y Maugada Miguel. Basic avanzado para niños. Fer-- nández Editores. México 1986.
- Yuren Camarena Ma. Teresa. Leyes Teorías y Modelos. Ed. Tri-- llas. México 1981.
- Zubieta R. Fco.. Lógica matemática elemental. Ed. Esfinge. -- México 1977. 120 págs.