00382
2
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

PRUEBAS OPTICAS POR DEFLECTOMETRIA LASER

T E S I S

Que para obtener el Grado de

DOCTOR EN CIENCIAS
(Física)

p r e s e n t a

JOSE RUFINO DIAZ URIBE

México, D. F. Enero de 1990

CONTENIDO

INTRODUCCION GENERAL

Las pruebas del taller de óptica, o *pruebas ópticas* simplemente, son los procedimientos por los cuales se determina la calidad de una superficie, una componente, o un sistema óptico.

Existen gran variedad de métodos de prueba. Desde las interferométricas, hasta las mecánicas, pasando por los métodos de Moiré, de filtraje espacial, las geométricas, etc. Cada una de ellas posee ciertas características que la hacen útiles en ciertas circunstancias o para determinados fines. Algunas —como las de interferometría de barrido de franjas— destacan por su alta precisión. Otras —como la de Foucault— por su sencillez. Algunas dan información cualitativa principalmente, etc.

El actual nivel de desarrollo de la instrumentación óptica, ha hecho cada vez más necesario enfrentar un problema de las pruebas ópticas particularmente desafiante: la prueba de superficies asféricas.

Las superficies asféricas, en especial las llamadas rápidas ($f/\# \approx 1$, donde $f/\# = f/D$, f es la distancia focal y D es el diámetro de la superficie), tienen características que hacen difícil el uso o aplicación de las pruebas tradicionales[1]. Dichas pruebas requieren de adaptaciones o modificaciones al procedimiento usual.

Consideremos como ejemplo, el caso de las pruebas con el interferómetro de Twymann-Green. Para probar una superficie asférica cóncava es necesario construir un sistema corrector para evitar que aparezcan un número excesivamente grande de franjas que evite el poder evaluar el interferograma. El, diseño construcción y prueba del sistema corrector es un problema complicado por varias razones. En la etapa de diseño, debido a que el sistema corrector debe ser tan rápido como la superficie a probar, la reducción de aberraciones es más crítica que en un sistema lento. Por lo general esto implica el aumentar el número de elementos del sistema cuando se trabaja sólo con superficies esféricas. Si se opta por incluir también superficies asféricas, el problema es más elaborado. Además, en la etapa de fabricación y prueba del sistema corrector se presenta la necesidad de pulir, probar y ensamblar un gran número de superficies esféricas o pulir, probar y ensamblar superficies asféricas también.

Aún en el caso en que se resuelva satisfactoriamente el problema de hacerse de un excelente sistema corrector para probar una superficie dada, todavía persiste el problema cuando se quiere probar una superficie diferente. En tal caso se requiere diseñar, fabricar y probar un sistema corrector diferente.

Lo expuesto arriba respecto al sistema corrector es aún más complejo si la superficie a probar es convexa en vez de cóncava, pues en el caso de superficies cóncavas, es posible hacer que el haz de prueba, al pasar por el sistema corrector, se haga divergente para cubrir toda la pupila de la superficie de prueba; después de reflejarse en la superficie el haz vuelve a converger sobre el sistema corrector, haciendo posible que el sistema corrector sea de dimensiones pequeñas (ver figura 1). En el caso de superficies convexas si se intenta seguir el mismo procedimiento, el haz

[1] Entenderemos por pruebas tradicionales las descritas en el libro Optical Shop Testing editado por D. Malacara.

reflejado será divergente en vez de convergente y no regresará al sistema corrector. En tal caso el sistema corrector deberá generar un haz convergente

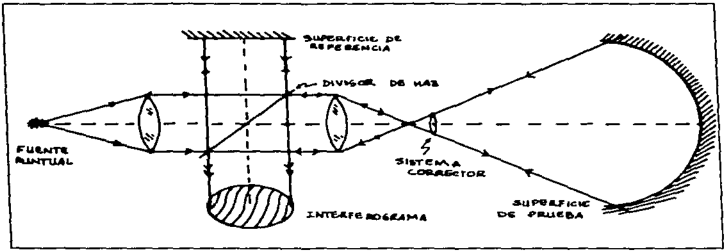


Figura 1. Interferómetro de Twymann-Green en un arreglo para la prueba de superficies asféricas cóncavas.

dirigido al punto nodal de la superficie. Esto implica que el sistema corrector debe de tener dimensiones mayores que la superficie a probar (ver figura 2). Si la superficie no es muy grande, el sistema corrector puede no ser grande tampoco, sin embargo, puede darse el caso de tener que probar superficies convexas de grandes dimensiones como por ejemplo los espejos secundarios de algunos telescopios astronómicos, en cuyo caso debe decidirse si enfrentar el costo en tiempo y recursos de la construcción del sistema corrector, u optar por otro tipo de pruebas.

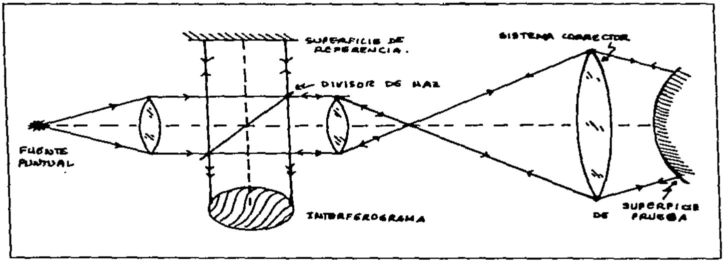


Figura 2. Interferómetro de Twymann-Green en un arreglo para la prueba de superficies asféricas convexas.

Aún suponiendo que todos los problemas arriba mencionados puedan ser enfrentados y resueltos satisfactoriamente, es siempre deseable contar con métodos de prueba alternativos para contrastar los resultados de las diferentes evaluaciones. Esto permite identificar errores sistemáticos o algún otro tipo de problemas en las pruebas.

Con estas ideas en mente, desde 1984 hemos estado desarrollando un tipo de pruebas diferentes a las tradicionales, que llamaremos **PRUEBAS POR DEFLECTOMETRIA LASER DE REFLEXION**. La idea central de estas pruebas consiste en que si se miden las desviaciones de un haz de láser reflejado en la superfice de prueba, es posible determinar la dirección de las normales a la superficie y de ello la forma de la superficie. Nuestra propuesta no es de ninguna manera la primera, en esta dirección se han encaminado diferentes autores, sin embargo la mayoría de sus trabajos representan contribuciones esporádicas para resolver problemas particulares, más que resultados de una línea de investigación definida. Un ejemplo de ello es que no hay acuerdo en la nomenclatura; cada autor llama de diferente forma a su método a pasar de tener ideas comunes. Casi todos ellos tratan el problema de medir superficies casi planas o regladas [Lehman], se preocupan principalmente por el método de medición y muy poco por el cómo evaluar los resultados, o cómo generalizar sus métodos a otros tipos de superficies como las esféricas, las cónicas y asféricas de revolución, las cilíndricas y toroidales, etc.

En este trabajo pretendemos mostrar por un lado que las pruebas por deflectometría láser son una alternativa importante a considerar dentro del campo de las pruebas ópticas pues además que permiten probar las superficies usuales como planos y esferas, son adecuadas también para superficies asféricas sin adaptaciones complicadas y con precisión comparable a otras pruebas. Por otro lado, pretendemos mostrar que existe una manera unificada de ver las pruebas por deflectometría láser. Esta visión permitirá identificar puntos comunes y diferencias de las diferentes pruebas, así como reconocer los principales problemas a resolver en el futuro cercano. Esto, eventualmente, dará lugar a otros procedimientos de prueba y otras aplicaciones basados en los mismos principios e ideas.

Con este fin, en el capítulo 1 presentamos las ideas básicas de la deflectometría láser, en cuanto a la teoría, la exploración y la detección, aplicables a cualquier tipo de prueba, no sólo de superficies o sistemas ópticos.

En el capítulo 2 nos enfocamos especificiamente al problema de deducir las ecuaciones útiles para determinar el perfil de una superficie a partir del ángulo de deflexión. Se describen con cierto detalle los casos de prueba de planos, esferas y superficies asféricas de revolución.

El capítulo 3 lo dedicamos a discutir los problemas experimentales involucrados en la exploración de la superficie y la detección del haz reflejado, para medir el ángulo de deflexión.

Finalmente, en el capítulo 4 discutimos los resultados experimentales particulares que hemos obtenido en diferentes pruebas. Mostramos cómo procesar los datos obtenidos para, además de determinar el perfil, deducir otras propiedades de la superficie probada.

Es conveniente señalar aquí que el presente trabajo está basado, principalmente, en el trabajo desarrollado por el autor en los últimos cinco años. En el Apéndice A se anexan copias de los artículos publicados y de las memorias de congresos en donde ha sido presentado.

C A P I T U L O 1

MEDICIONES POR DEFLECTOMETRIA LASER

En este capítulo vamos a describir las ideas básicas de la deflectometría láser haciendo énfasis en los puntos comunes a las técnicas que se clasifican en esta categoría, más que en los detalles de cada una. Haremos además, un breve recuento de los alcances que hasta ahora se han obtenido con éstas técnicas o métodos.

1.1 ¿Qué es la Deflectometría Laser?

Con este nombre denominamos genéricamente a todas aquellas técnicas para determinar propiedades físicas de un sistema a partir de la medición de la deflexión que sufre un haz de láser al interactuar con el sistema.

Para entender mejor lo que significa ésto, consideremos el esquema general mostrado en la figura 1.1. Se hace incidir un haz de láser sobre el sistema al cual se le va a medir alguna propiedad de interés. Hagamos por el momento la suposición de que el haz de láser se puede considerar en primera aproximación como un rayo y que, por lo tanto, el resultado de la interacción del rayo con el sistema es sólo un cambio de dirección del rayo que sale del sistema (el cual llamaremos rayo emergente), respecto de la dirección del rayo incidente. Al ángulo que hacen entre sí los dos rayos lo llamaremos *ángulo de deflexión*.

Para poder medir la cantidad de interés del sistema, es necesario asegurarnos que el ángulo de deflexión es dependiente de dicha cantidad. De esta manera, midiendo el ángulo de deflexión podremos deducir el valor correspondiente de la cantidad a medir.

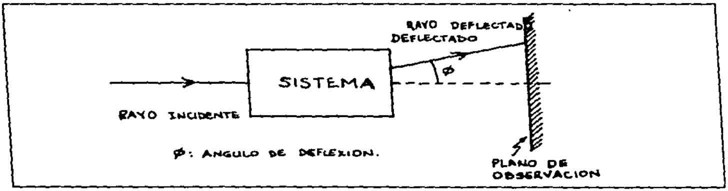


Figura 1.1. Esquema general de las técnicas de deflectometría láser.

1.2 Aspectos Involucrados en la Deflectometría Láser.

Para obtener resultados confiables, es necesario tener muy presentes los diferentes aspectos que influyen o determinan las mediciones por deflectometría láser. A continuación vamos a discutir los tres básicos, a saber: la teoría, la exploración y la detección.

1.2.1 Teoría.

Como se dijo antes, para poder calcular el valor de la cantidad a medir es necesario asegurarse que el ángulo de deflexión depende de ésa cantidad. Esto implica que debe conocerse el mecanismo de interacción entre el rayo incidente y el sistema. Puede tratarse de un proceso de reflexión, como en el caso de medición de parámetros de espejos y superficies; puede tratarse de refracción, para el caso de lentes; o puede tratarse de difracción, para el caso de rejillas, entre otros mecanismos. Por ejemplo, a lo largo de éste trabajo se desarrollarán métodos basados exclusivamente en un proceso de reflexión, aunque lo expuesto en este capitulo es válido para otros procesos.

Por otro lado, es también conveniente imponer algunas condiciones sobre los parámetros que no se van a medir. Por ejemplo, si se desea medir el índice de refracción de un material dado, debe involucrarse un proceso de refracción del haz incidente. El ángulo de deflexión es el definido por el rayo incidente y el refractado; es obvio que dicho ángulo depende del índice de refracción, aunque también de la dirección de la normal a la interfase. Si se impone a la interfase una forma particular (por ejemplo, un plano), la normal a la interfase es conocida, siendo la única incógnita del problema el índice a medir.

Aparte de lo anterior, puede ser útil el conocer algunas propiedades generales de la cantidad a medir. Por ejemplo, en el caso de prueba de superficies ópticas es fundamental saber el tipo de superficie que se va a probar; esto es, si se trata de una superficie muy plana, casi esférica, toroidal, asférica, etc. Ello determinará el procedimiento a seguir, el tipo de mediciones a realizar y la formulación teórica que se necesita para procesar los datos.

Al conocimiento previo o hipótesis propuestas sobre el tipo de interacción que dan lugar a la deflexión del rayo incidente, y que determinan la relación entre el ángulo de deflexión y la cantidad a medir, y que por lo tanto determinan los procedimientos de medición, son los elementos que constituyen la teoria de la prueba.

1.2.2 Exploración.

La cantidad a medir puede representar una propiedad global o una propiedad local del sistema de prueba. Una propiedad global es una cantidad que tiene el mismo valor en cualquier parte del sistema. Una propiedad local varia a lo largo del mismo. Por ejemplo, el indice de refracción de un material es una propiedad local, sin embargo si el material es muy homogéneo el indice de refracción tendrá prácticamente el mismo valor en todo punto, convirtiéndose en una propiedad global. Asi mismo, el valor promedio de cualquier propiedad local del sistema será una propiedad global.

Aparentemente para medir una propiedad global del sistema basta realizar una sóla medición en un punto arbitrario del sistema. Sin embargo, en el caso de cantidades no promediadas, sólo puede asegurarse la homogeneidad o la globalidad de la propiedad medida si se realizan varias mediciones de la misma a lo largo del sistema. Debe ser claro que la evaluación de una cantidad promediada sólo puede obtenerse después de haber realizado varias mediciones también.

Lo anterior implica que es imprescindible el realizar un muestreo sobre el sistema para una adecuada evaluación de la cantidad de interés. Este muestreo se obtiene por medio de una exploración del haz por el sistema.

La exploración puede realizarse por movimiento del sistema o del rayo. Este movimiento puede ser lineal o angular o combinaciones de ellos (ver Figura 1.2). El movimiento del rayo puede realizarse por métodos mecánico u ópticos. Cuando se mueve el sistema sólo pueden usarse métodos mecánicos.

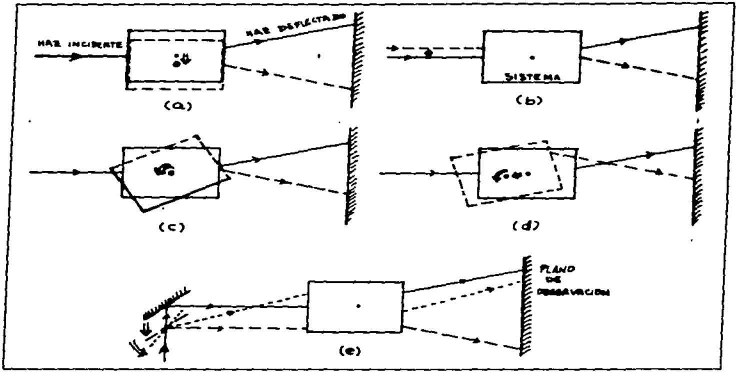


Figura 1.2. Ejemplos de los tipos de exploraciones que se pueden realizar:
a) Por movimiento del sistema, o
b) Por movimiento del haz (en ambos casos de traslación).
c) Exploración por rotación del sistema.
d) Exploración más general por movimiento del sistema.
e) Ejemplo de exploración óptica (con giro y traslación).

Debido a que es mucho más fácil medir o detectar pequeñas desviaciones, usualmente se busca realizar una exploración tal que el ángulo de deflexión sea pequeño o nulo. Las desviaciones grandes presentan el inconveniente de que los haces se salen del área de detección y que, además de los movimientos necesarios para la exploración, debe moverse el detector o alguna otra componente del arreglo. Si la exploración se realiza de manera que el ángulo de deflexión sea siempre cero entonces se trata de una medida nula. En este caso, el tipo de exploración usada para hacer la medición nula determina la propiedad del sistema que se busca conocer.

1.2.3 Detección.

La medición del ángulo de deflexión es un problema importante que considerar; en última instancia el resultado final de la medición de la cantidad de interés depende de qué tan bien hecha, o qué tan confiable es la medición del ángulo de deflexión.

Las desviaciones pequeñas pueden ser medidas con relativa facilidad si se mide el desplazamiento del rayo a lo largo de un plano transversal a su propagación, y que se encuentre suficientemente lejos del punto de desviación, esto es, el punto donde se cruzan o parecen cruzarse el rayo incidente y el emergente. En la aproximación actual, medir la posición del rayo en un plano sería relativamente simple, pues consistiría en determinar la posición de un punto luminoso en una pantalla o un plano transversal imaginario. Sin embargo, las cosas no son tan simples. En este momento debemos abandonar la aproximación de rayo del haz de láser.

Un haz de láser es un haz con sección transversal pequeña, pero finita. Estrictamente, si el láser trabaja en el modo fundamental, $\mathbf{TEM_{00}}$, se trata de un haz gaussiano [Kogelnik (1966)]. Este tipo de haces presentan una divergencia muy pequeña (valores típicos para un laser de He-Ne comercial van de 0.66 a 1.7 miliradianes [Newport (1987)]), por lo que pueden considerarse para efectos prácticos como haces de rayos paralelos a distancias cortas y en propagación libre. Los frentes de onda del haz evolucionan de un frente de onda plano a frentes de onda esféricos, convexos a la dirección de propagación, de radios de curvatura muy grande (el menor valor para el radio de curvatura es de alrededor de un metro, para láseres de He-Ne comerciales, también; ver figura 1.3).

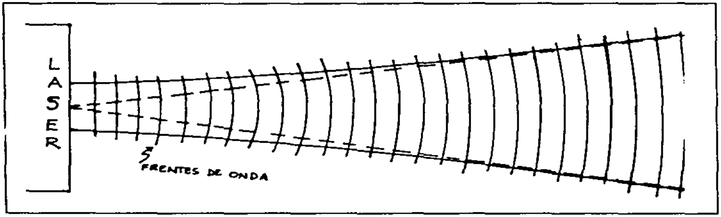


Figura 1.3. Evolución de los frentes de onda (líneas punteadas) de un haz gaussiano (láser en modo TEMoo). Las líneas contínuas muestran la manera en que se ensancha el haz al propagarse.

Tal vez la característica más significativa para la detección del haz sea la dependencia de la irradiancia del haz con la distancia radial al centro del mismo. Esto es, si el haz se propaga en la dirección del eje z, la irradiancia $I(x,y)$ en un plano paralelo al plano xy, está dada por

$$I(r) = I_o \, e^{-2r^2/r_o^2} \tag{1.1}$$

en donde I_o es el valor de máximo de la irradiancia en el punto $r = 0$, y r_o es el valor de r para el cual la irradiancia disminuye a un valor I_o/e^2 (a casi un 14 % de su valor máximo; ver figura 1.4).

El último resultado nos indica que existe un punto característico del haz: el punto central. Esto se debe a dos razones. Una se refiere al hecho de que allí se localiza el máximo de irradiancia; el otro se debe a que además es un punto de simetría. En consecuencia, podemos definir como *posicion del haz* el correspondiente al punto central. Esto también trae como consecuencia que podamos proceder de tres maneras para ubicar la posición de éste punto y

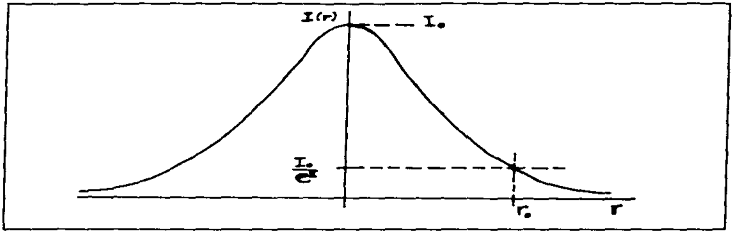


Figura 1.4. Perfil de irradiancia de un haz gaussiano; Io es la irradiancia máxima en $r=0$ y r_0 es la distancia del centro a la cual la irradiancia disminuye a un valor I_0/e^2.

por lo tanto del haz: por su valor máximo, por su centro de simetria, o por su centroide o centro de "gravedad". Resulta que las tres opciones definen al mismo punto.

La detección puede ser visual directamente en una pantalla, o con ayuda de un dispositivo óptico como un microscopio. Debido a que el haz de láser se expande de manera natural o por efecto de la superficie que se prueba, es necesario volver a concentrar el haz o superponerle alguna señal que permitan hacer la detección con mayor objetividad. Es común interponer un elemento difractor tal como un cabello para producir un patrón de difracción cuyas bandas claras y oscuras simétricas ayuden a ubicar el centro del haz.

La detección puede ser realizada también con ayuda de fotodetectores. Aunque se presenta el mismo problema de la divergencia del haz, en este caso es más conveniente el uso de una lente para reconcentrar el haz. Dependiendo del tipo de fotodetector con que se cuente y la electrónica asociada, el criterio para seleccionar la posición del haz podrá variar entre los descritos arriba. Debe ser claro que los fotodetectores mejoran sustancialmente los resultados respecto a la detección visual.

Más adelante abundaremos sobre algunos métodos de detección particulares.

1.3 Alcances de la Deflectometría Láser.

Hasta donde tenemos conocimiento, el primer trabajo que se puede clasificar dentro de la deflectometria láser es el de Evans (1971) (! once años después de la invención del láser !). En ése trabajo, Evans proponía un método muy sencillo para medir el radio de curvatura de espejos esféricos. Se trataba de un método de reflexión, con una exploración lineal mecánica del láser, de sólo dos pasos. El método de detección era visual en una pantalla. No menciona el problema de la divergencia del haz. La prueba no era nula y la precisión reportada era de décimas de milimetro. Evans propone su método para espejos cóncavos pequeños. El método era generalizable a espejos convexos y también a superficies grandes.

F.M. Smolka y T.P. Caudell (1978) retomaron el trabajo de Evans y lo ampliaron para medir el perfil de una superficie. Ellos se abocaron más al problema de cómo medir con precisión el ángulo de deflexión. Para ello hacían girar un divisor de haz con velocidad angular constante. El detector se encontraba fuera del camino original del haz, de manera que a diferentes tiempos llegaban al detector, por un lado, el haz directamente reflejado en el divisor y, por el otro, el haz que primero se transmitía hacia la superficie, después se reflejaba en ella, y finalmente se reflejaba en el divisor [para mayor detalle ver sección 3.1.c)]Midiendo el tiempo transcurrido entre la llegada de los dos haces, medían el ángulo de deflexión, la precisión alcanzada con éste método era de entre 1 y 10 μm. Por lo demás el método propuesto por ellos sólo era aplicable a superficies casi planas; de otra manera el haz deflectado podría alejarse del divisor giratorio. La exploración lo realizaban por movimiento lineal de la superficie. Aparte de determinar el perfil de la superficie medida no lo relacionaron con algún tipo particular de superficie para evaluar la calidad de la superficie medida.

En 1982, A.E. Ennos y M.S. Virdee publicaron un artículo donde reportan sus experiencias con una teoría similar a la de Smolka y Caudell, aunque diferente en el método de detección. Lo más sobresaliente del trabajo es que reportan precisiones experimentales de 10 nanómetros y proponen la posibilidad de llegar a detectar variaciones superficiales de $\lambda/5000$, es decir de alrededor de !1 Å !. De concretarse tal posibilidad se obtendrían resultados comparables a las mejores mediciones interferométricas (heterodina). Para llegar a tales resultados, Ennos y Virdee siguen un escrupuloso procedimiento experimental para eliminar las principales fuentes de error como lo son, las fluctuaciones inherentes de dirección del haz del láser, las imprecisiones de la exploración mecánica, y las vibraciones mecánicas , turbulencia ambiental, e inestabilidades térmicas.

Por ejemplo, para tomar en cuenta las variaciones de dirección del haz, lo dividen en dos haces; uno va a la superficie, mientras el otro va a una superficie reflectora fija antes de hacerlo incidir en el detector. De esta manera, monitorean constantemente la dirección del haz original. Todas las mediciones las realizan en referencia a él; la medición de la deflexión del otro haz sólo considerará los efectos de la superficie a medir.

Por otro lado, Ennos y Virdee se dieron cuenta que su teoría como la de Smolka y Caudell, es adecuada no sólo para superficies casi planas, sino también para superficies regladas como los conos, o cilindros, ampliando el tipo de superficies susceptibles de ser medidas. Este trabajo muestra, además, cómo la deflectometría láser puede ser una importante alternativa en problemas en los que los métodos interferométricos presentan tantas complicaciones que son prácticamente imposibles de usar.

Han aparecido también, algunas otras propuestas de métodos por reflexión como la de Frank V. Kowalski, *et. al.* (1986) y la de T. V. Lakhotskii, *et. al.* (1984).

De los primeros hemos tomado el nombre de los métodos. Ellos se centran más en el método de exploración y el de medición. Prácticamente no proponen ninguna teoría, sólo consideran el hecho de que prueban superficies reflectoras. La exploración es por movimiento del haz y lo realizan por un método óptico. Específicamente, trasladan transversalmente un prisma de esquina de cubo, de manera que el haz reflejado retorna paralelo al haz incidente pero desplazado lateralmente según sea la posición del prisma. Para aumentar la distancia de desplazamiento proponen un arreglo de prismas de esquina de cubo. Así el efecto del desplazamiento es aumentado. En éste trabajo se propone un arreglo para probar superficies esféricas cóncavas no necesariamente de radio de curvatura grande además de sugerir la opción de probar lentes por refracción.

De los segundos, al parecer es la primera propuesta de probar superficies cónicas rápidas. El método es muy específico para parábolas con características bien definidas. La exploración es por movimiento mecánico del láser. Se trata de una prueba nula por reflexión en un espejo auxiliar, el ángulo que se requiere girar este espejo determina las deformaciones o variaciones de la superficie a probar. Los autores no reportan la precisión alcanzada, aunque para su problema particular, no requieren gran precisión.

Muy recientemente apareció otro artículo sobre métodos de deflectometría láser para prueba de componentes ópticas [Häusler y Schneider (1988)] en donde se propone por primera vez un método de refracción para probar lentes o cualquier otro dispositivo refractor; ellos prueban su método con lentes esféricas, asféricas, e incluso con parabrisas de automóviles. Llaman a su método "Trazo Experimental de Rayos" y siguen muy de cerca las ideas y la formulación de la conocida prueba de Hartmann [ver Malacara (1978)]. La exploración se realiza por movimiento longitudinal del haz por un método óptico (desplazan longitudinalmente un espejo desviador del haz). De manera que el haz incide siempre paralelo al eje óptico de la lente. La detección es con un fotodiodo de efecto lateral y ubican el centro del haz por su centroide. La información que pueden obtener es, por un lado, las trayectorias reales que siguen los rayos transmitidos por la componente que se prueba. Por otro lado, determinan lo que ellos llaman el *Poder Refractor Local* que es algo así como la variación zonal de la potencia de la lente.

La precisión reportada es de 0.025 Dioptrías. Curiosamente, este es también el primer trabajo con diodos láser.

1.4 Comentarios y Conclusiones.

En este capítulo hemos presentado los conceptos básicos de los métodos de deflectometría láser. Esta presentación nos ha permitido al momento de hacer la revisión de los trabajos relacionados al tema entender mejor sus puntos comunes y sus diferencias, así como sus ventajas e inconvenientes. Por otro lado, junto con la revisión nos ayudará a ubicar mejor el trabajo que en esta tesis se presenta.

En relación a la revisión hecha arriba, hay dos puntos que saltan a la vista. El primero es el hecho mencionado en la introducción de que la mayoría de los trabajos presentan contribuciones aisladas. Esto debe ser claro, pues de los trabajos revisados no hay autores que tengan más de dos trabajos en relación a estos métodos. La mayoría sólo cuentan con uno.

El segundo de los puntos a notar, que sólo puede verse de las mismas referencias, se refiere a que prácticamente la interrelación entre los diferentes trabajos es nula. Varias de las propuestas son muy semejantes entre sí, y las aportaciones originales reales son mínimas. No existe además, un trabajo que unifique las ideas vertidas. En éste sentido, creemos el trabajo propio presentado en las primeras secciones de este capítulo busca cubrir ése hueco. Por otro lado en los sigientes capítulos pretendemos mostrar que el trabajo desarrollado por nuestro grupo en los últimos años, ni es una contribución esporádica, ni está aislado de los demás.

CAPITULO 2

TEORIA DE PRUEBAS OPTICAS POR DEFLECTOMETRIA LASER DE REFLEXION

En este capitulo vamos a exponer la teoría básica que nos permitirá entender primero, y proponer después el tipo de mediciones y procedimientos a realizar experimentalmente para probar superficies ópticas por métodos de deflectometría láser de reflexión.

2.1 Tipos y Propiedades de las Superficies Opticas a Probar.

Una superficie óptica es, por lo general, una superficie muy suave que puede ser representada matemáticamente de manera exacta o aproximada a través de una función analítica. La propiedad de suavidad es importante porque con ella nos aseguramos que al medir discretamente propiedades locales de una superficie podemos esperar que la variación de dicha propiedad es suave también. De manera que midiendo en un conjunto finito de puntos podemos interpolar los resultados. La propiedad de analiticidad nos asegura que podemos expresar la forma de la superficie por una expresión matemática tal vez no cerrada (como por ejemplo al desarrollar en serie de Taylor).

El saber el tipo de superficies involucradas nos ayuda a delimitar el número de superficies que pueden aparecer durante las pruebas. De esta manera, podemos hacer teorías limitadas pero suficientemente amplias para probar la mayor parte, si no es que todas, las superficies ópticas que se fabrican. Muy comúnmente, aunque no siempre, dichas superficies tienen simetrías que facilitan tanto su diseño como su construcción y prueba. Las superficies más usadas son los planos y las esferas; con menor frecuencia, aunque no menos importantes, se usan las superficies asféricas de revolución en eje y fuera de eje (incluyendo a las cónicas), así como las cilíndricas y toroidales (ver Anexo B).

2.2 El Problema de Probar una Superficie Optica.

Probar una superficie óptica consiste en determinar con cierta precisión la forma o alguna otra propiedad de la misma. En este trabajo nos vamos a centrar en la prueba de superficies ópticas individuales, que pueden ser parte de un elemento, una componente, o de todo un sistema óptico.

Vamos a plantearnos dos problemas básicos. El primero consiste en suponer que la superficie a probar ha sido construida con base a un diseño conocido. Por lo tanto debe ser conocido el tipo de superficie a construir. En este caso, la función central de la prueba es la de indicar las diferencias de forma de la superficie real construida o en proceso de construcción respecto a la superficie ideal establecida por el diseño. Es decir, se busca conocer propiedades locales de la superficie de prueba.

El segundo, se refiere al problema de caracterizar las propiedades de una superficie desconocida. No se trata en este caso de comparar, sino de extraer la información contenida en una superficie óptica respecto a sus propiedades globales. Tales como radio de curvatura, constante de conicidad o coeficientes de deformación. Esto se tratará con cuidado en el capitulo 4.

El conocer la forma de una superficie implica conocer las coordenadas de cada punto de la misma. La propiedad de suavidad nos permite que podamos hacer esto para un número discreto, finito de puntos y que, algún tipo de interpolación, nos dará adecuadamente la información sobre el resto de los puntos de la superficie.

La ubicación directa de un punto sobre la superficie sólo se consigue por métodos mecánicos. En estos métodos una punta de prueba se coloca directamente sobre la superficie, de manera que la posición de la punta coincide en todo momento con algún punto de la superficie. Monitoreando el movimiento de la superficie y el de la punta de prueba se determina la forma de la superficie [Dil, *et. al.* (1980)].

La deflectometría láser de reflexión puede, de manera alternativa, sólo conocer la dirección de las normales a la superficie y, a partir de este conocimiento busca deducir la mayor cantidad de información posible de la superficie que se prueba.

El resultado fundamental para probar una superficie por deflectometría de reflexión consiste en que el rayo, incidente y el reflejado hacen entre sí un ángulo llamado **ángulo de deflexión**, ϕ, que de acuerdo a la ley de la reflexión resulta ser igual al doble del ángulo de incidencia, θ_i. De manera que el ángulo de incidencia está dado por

$$\theta_i = \phi/2 \tag{2.1}$$

es decir, si se mide el ángulo de deflexión, la ecuación (2.1) nos permite conocer la dirección de la normal a la superficie en el punto de incidencia, referida a la dirección del rayo incidente.

2.3 Ecuación de la Forma de la Superficie en Coordenadas Cartesianas.

Para comenzar, es conveniente reconocer que el problema de conocer la forma de una superficie puede reducirse al problema de conocer la forma de un conjunto de curvas que resultan de la intersección de la superficie que se mide, con una familia de superficies (ver figura 2.1). A las curvas así obtenidas les llamaremos los perfiles de la superficie. El caso más común es el de intersectar la superficie de prueba con una familia de planos. En coordenadas cartesianas esta familia se determina por la condición de que cada uno de los planos es ortogonal a alguno de los ejes coordenados.

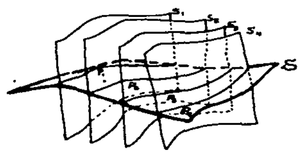


Figura 2.1. La intersección de una superficie, S, con una familia de superficies S1, S2,..., genera una familia de curvas P1, P2,..., llamadas *perfiles* de la superficie S.

Si elegimos una familia de planos ortogonales al eje z, tenemos el problema de determinar la forma de una familia de curvas planas paralelas al plano *xy* (figura 2.2). En tal caso, la dirección de la tangente respecto del eje de las abcisas, x, está dada por

$$\frac{dy(x)}{dx} = \tan \alpha, \tag{2.2}$$

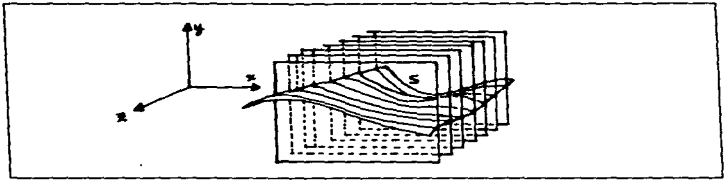


Figura 2.2. La intersección de una superficie, S, con una familia de planos ortogonales al eje z, genera una familia de perfiles planos paralelos al plano xy.

en donde $y(x)$ es la función que representa la forma de la curva en un plano paralelo al plano xy (ver figura 2.3). Si el rayo incidente hace un ángulo θ con el eje x, entonces

$$\alpha = \theta_1 + \theta_0 + 90^\circ. \tag{2.3}$$

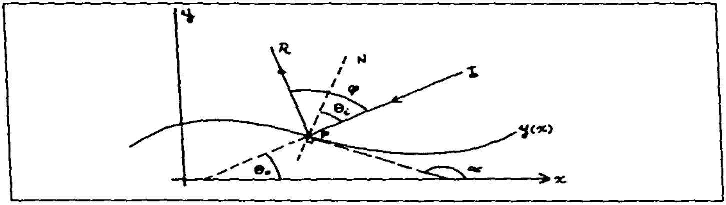


Figura 2.3. Se representa un perfil plano obtenido según muestra la Fig. 2.2. I, es el rayo incidente en un punto, P, del perfil; R, es el rayo reflejado; N, es la normal al perfil; α, es la pendiente del perfil; θi, es el ángulo de incidencia; ϕ, es el ángulo de deflexión y θo, la inclinación del rayo incidente respecto del eje x.

Usando (2.1), (2.2) y (2.3), podemos obtener la forma de la superficie como sigue

$$y(x) = - \int_{x_0}^{x} \cot\,(\phi/2 + \theta_0)\, dx\ . \tag{2.4}$$

Esta ecuación es la expresión básica que nos permite determinar la forma de la superficie, $y(x)$, a partir de mediciones del ángulo de deflexión, ϕ.

2.4 Prueba de Superficies Planas y Regladas.

El haber llegado a una ecuación diferencial simple para el perfil de la superficie, nos permitió expresar al perfil en cuadratura [ecuación (2.4)]. Sin embargo, aunque el resultado es exacto e independiente de la forma de la superficie, experimentalmente surgen varios problemas a considerar.

Como se dijo en el capítulo 1, en la sección de detección, es conveniente que el ángulo de deflexión no varíe considerablemente. Ello implica que la pendiente de la superficie no debe cambiar mucho, o dicho de otra manera, la superficie debe ser muy plana o sus perfiles deben ser casi rectos; es decir, las superficies deben ser regladas (o casi).

Smolka y Caudell (1978) usan este resultado para determinar formas de superficies esféricas de gran radio de curvatura. Ennos y Virdee (1982) prueban las secciones casi rectas de superficies hiperboloidales de revolución que se parecen mucho a un cono. La diferencia básica entre ambos trabajos consiste en el método de medición (esto se comentará con detalle más adelante). En los dos casos $\theta_0=90^\circ$ por lo que

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \tan(\phi/2)\, dx \,. \tag{2.5}$$

En ninguno de esos trabajos se propone qué hacer con los resultados obtenidos. Es claro, sin embargo, que para determinar las variaciones de forma de la superficie probada respecto de una forma plana o recta ideal, simplemente se pueden ajustar los datos de $y(x)$ a una recta, por ejemplo por el método de mínimos cuadrados. La diferencia entre la recta ajustada y los datos medidos darán los errores de la superficie probada; esto resolvería el primer problema de los planteados en la sección 2.2. En el caso de superficies no planas la evaluación de los resultados se complica.

Otro problema surge de la evaluación de la integral en la ecuación (2.5). Debido a que sólo se miden un conjunto discreto de valores de ϕ, la integral se aproxima por una suma. La aproximación más burda se obtiene de sumar el área de los rectángulos bajo la curva que generan los datos medidos (ver figura 2.4). Puede comprobarse que si los valores medidos de las abcisas son muy cercanos entre sí, y la pendiente de la curva no es muy pronunciada, la aproximación es buena. Una aproximación mejor la proporciona el sumar áreas de trapezoides bajo la curva, y aún más la aproximación mediante secciones parabólicas [Press, *et. al.* (1988)]. Los problemas mencionados limitan la teoría aquí delineada (que usan la mayoría de los autores), a la prueba de superficies planas o de curvaturas muy pequeñas.

Finalmente, es importante aclarar que aún en el caso continuo, la integral en (2.5) está determinada hasta una constante aditiva. Esta constante no puede determinarse de los datos experimentales, por lo que si no se da *a priori* o se mide por algún otro procedimiento, se desconoce el valor absoluto real de los valores de y. Esto no es grave, pues normalmente se buscan las variaciones en y, en vez de su valor absoluto, estando aquellas bien determinadas por la teoría aquí presentada.

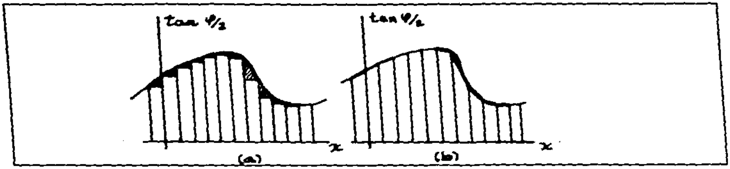


Figura 2.4. Descripción gráfica de dos métodos de integración numérica. (a) Por rectángulos, y (b) por trapezoides. Las regiones sombreadas muestran el error introducido por las aproximaciones; (b) es mejor que (a). En ambos casos la aproximación es menos buena si tan $\phi/2$ varía rápidamente.

2.5 Prueba de Superficies Esféricas.

Cuando la pendiente de la superficie a probar cambia considerablemente conviene replantear la teoria. Debemos buscar la manera de mantener el ángulo de deflexión dentro de limites razonables como para que pueda seguir midiéndose con adecuada precisión.

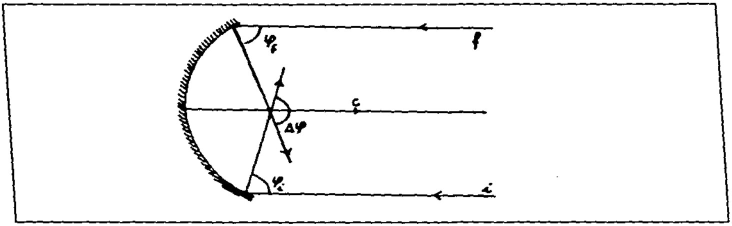


Figura 2.5. Al barrer el haz transversalmente sobre una superficie esférica, S, el ángulo de deflexión varía de un valor ϕi, para la posicion inicial (rayo i), hasta un valor ϕf (rayo f). La variación total del ángulo de deflexión es $\Delta\phi$. C es el centro de curvatura y F el foco de la superficie.

Para ver esto más claramente, consideremos el caso de una superficie esférica de razón focal $f/\#$. Si el haz incidente siempre es paralelo al eje de simetria, la variación total del ángulo deflectado, $\Delta\phi$, será aproximadamente igual a $1/(2f/\#)$ (ver figura 2.5). Así, para una superficie de razón focal $f/\#=10$, la variación del ángulo de deflexión será $\Delta\phi \cong 3^\circ$; mientras que para otra superficie de $f/\#=\ 2$, tendremos que $\Delta\phi\cong 15^\circ$. Aparentemente, medir tales deflexiones no implica ninguna dificultad, sin embargo, normalmente no se mide el ángulo de manera directa pues el punto de incidencia no está fijo.

Lo usual es medir el desplazamiento lineal del haz, Δx, en un plano transversal a su dirección original. Si el plano de observación se coloca a una distancia d de la superficie, la variación de la posición lineal total del haz será de aproximadamente

$$\Delta x = d \times \Delta\phi = \frac{d}{2\ f/\#}\ ,$$

así, si el plano de observación se localiza, por ejemplo, a 50 cm de la superficie, entonces para $f/\# = 10$, tenemos que $\Delta x = 2.5$ cm. Este valor es ya un poco grande para ser observado con una precisión de 1 micra, pues requeriría de un error relativo de 4×10^{-5}, es decir de un error porcentual del 4×10^{-3} %. Para el caso de $f/\# = 2$, $\Delta x = 12.5$ cm y el error relativo deberá ser de !! 8×10^{-6} !! mostrando la problemática de continuar con el mismo procedimiento.

Debemos buscar ahora, un mecanismo por el cual hacer el ángulo de deflexión pequeño y poderlo medir con alta precisión absoluta, sin requerir alta precisión relativa.

En este momento conviene utilizar las propiedades de simetría de las superficies esféricas. Una manera de explorar con el haz una superficie esférica, manteniendo el ángulo de deflexión pequeño o nulo, fué propuesto por Cornejo y Cordero (1980) para medir el radio de curvatura de superficies esféricas. La idea fundamental consiste en reconocer que el centro de curvatura es el punto de simetría de una esfera. Si la superficie se gira en torno de cualquier eje que pase por ése punto, una esfera ideal se recorrerá sobre sí misma sin que haya manera de distinguir las dos posiciones, antes y después del giro.

El resultado anterior nos resuelve el problema de lograr ángulos de deflexión pequeños. Si hacemos incidir el haz de láser normalmente en algún punto de la superficie y giramos ésta entorno de su centro de curvatura, el haz reflejado no se alterará de ninguna forma, a menos que la superficie no sea perfectamente esférica. Si encontramos la manera en que se relacionan las deformaciones superficiales con las desviaciones del haz reflejado, podremos probar la superficie.

2.5.1 Ecuación General de la Forma de la Superficie en Coordenadas Polares.

El hecho de realizar una exploración por giro de la superficie en lugar de hacerlo por desplazamiento longitudinal, nos indica que en vez de trabajar en coordenadas cartesianas, debemos encontrar la ecuación que determina la forma de la superficie en coordenadas polares. Es decir, ahora vamos a medir el ángulo de deflexión, ϕ, para diferentes ángulos de giro de la superficie (ángulo polar, θ) y de ello buscamos deducir la distancia del punto de incidencia al eje de giro (radio polar, r).

En referencia a la figura 2.6, I es el haz incidente sobre la superficie descrita por la curva, N es la normal a la superficie en el punto de incidencia y R es el haz reflejado. Si θ_o es el ángulo que hace el haz incidente respecto al eje polar, tenemos que

$$tan\ \alpha = \frac{dr}{r\ d\theta} \qquad (2.6)$$

donde $\alpha = \theta_i + \theta_o - \theta$ y θ_i es el ángulo de incidencia. Por lo tanto

$$r(\theta) = r(\theta_1)\ \ exp \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta} tan \left(\frac{\phi}{2} + \theta_o - \theta \right) d\theta \right\} \qquad (2.7)$$

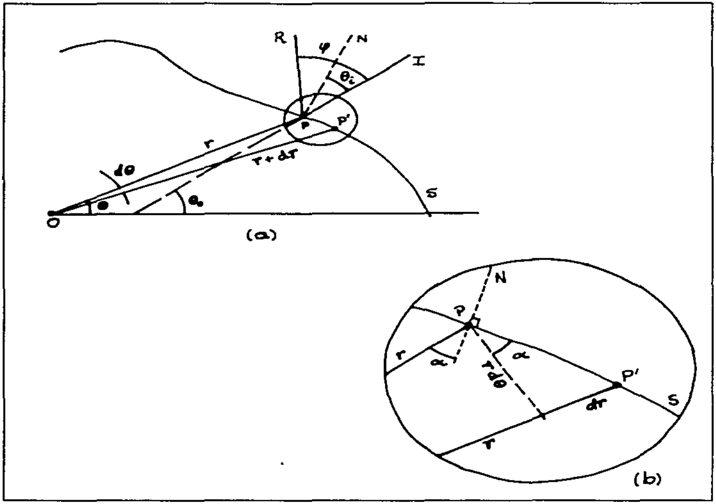


Figura 2.6. (a) Diagrama para encontrar la relación entre el perfil de la superficie, S, y el ángulo de deflexión ϕ. (b) Detalle del diagrama (a). α es el ángulo entre la normal y el radio polar en P.

Los problemas involucrados en la utilización de la ecuación (2.7) para la determinación de la forma del perfil de una superficie esférica son semejantes a los enumerados en la sección 2.4. Ello exige que el tipo de superficies a probar no presenten ángulos de deflexión con grandes variaciones; esto asegurará por un lado que ϕ es medible con precisión adecuada, mientras por el otro la aproximación de la integral por una sumatoria discreta dará buenos resultados. Por lo tanto, cualquier superfice que presente perfiles circulares o cercanamente circulares como esferas, cilindros circulares, toroides o asféricas lentas[1], será susceptible de ser probada con con ayuda de la ecuación (2.7). En este sentido, dicha ecuación es el equivalente en coordenadas polares de la ecuación (2.4) en coordenadas

[1]Como es usual, se conocen como superficies lentas, las superficies de número-f grande. Las superficies asféricas lentas difieren muy poco de una superficie esférica

cartesianas.

La constante aditiva involucrada en la integración, si es determinante en este caso por lo que debe medirse. En este caso dicha constante representa el valor inicial del radio polar $r_1[=r(\theta_1)]$. Tampoco se obtiene de la teoría aquí desarrollada. Más adelante hablaremos sobre este punto.

Utilizando esta formulación, realizamos algunas pruebas [Rosete y Díaz (1988) y (1989), Rosete (1989)], con $\theta_0 = \theta$, por lo que la ecuación (2.7) se simplificó como sigue

$$r = r(\theta_1)\, exp \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta} tan \left(\frac{\phi}{2} \right) d\theta \right\} . \tag{2.8}$$

La precisión que obtuvimos fué de alrededor de 3 µm, aunque puede mejorarse; trabajo más reciente [Rosete, *et. al.* (1989)] sugiere la posibilidad de mejorar sustancialmente los resultados. Más adelante detallaré el trabajo experimental.

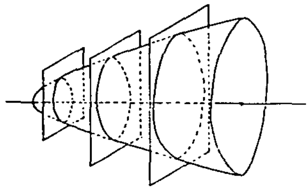


Figura 2.7. La intersección de una superficie asférica de revolución con un conjunto de planos ortogonales al eje de revolución, da lugar a perfiles circulares.

2.6 Prueba de Superficies Asféricas Rápidas de Revolución.

Debe ser claro que para probar superficies asféricas de revolución la ecuación (2.4) no es conveniente. Podría pensarse en la posibilidad de probar, con ayuda de la teoría desarrollada en la sección anterior, los perfiles circulares de tales superficies. Por ser de revolución, las curvas circulares resultan de la intersección de planos ortogonales al eje de simetría o de revolución (ver figura 2.7). Esta posibilidad tal vez debería explorarse, sin embargo desde 1984 hemos estado desarrollando pruebas de superficies asféricas por deflectometría láser con un enfoque particular que describiré en términos generales a continuación [Díaz-Uribe, *et. al.* (1985)].

2.6.1 Un sistema de Coordenadas Adecuado.

Para probar los perfiles de las superficies asféricas, que resultan de intersectar la superficie con planos que contienen al eje de simetría (ver figura 2.8), debemos buscar de nuevo la manera de evitar que el ángulo de deflexión varíe considerablemente por las razones discutidas antes. Si pensamos con detenimiento en las propuestas para planos y esferas, podemos ver que el resultado común consiste en hacer incidir normalmente (o casi) el haz sobre la superficie de prueba. Esto implicaba en el caso de planos, que sólo era necesario desplazar longitudinalmente para probar un perfil, mientras que para esferas bastaba con girar alrededor del centro de curvatura de la superficie.

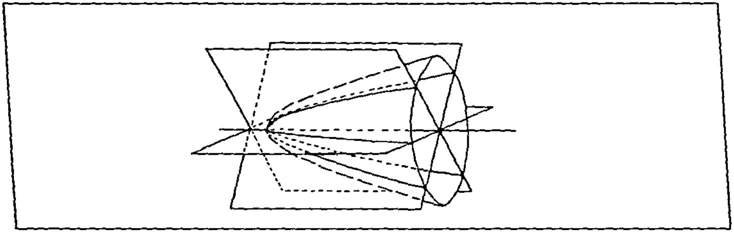


Figura 2.8. La intersección de una superficie asférica de revolución con un conjunto de planos que contienen al eje de revolución produce una serie de perfiles iguales a la curva generadora de la asférica.

Las normales a una superficie asférica, sin embargo, no presentan la misma dirección como las de un plano, ni un punto común como las de una esfera (ver figura 2.9), es necesario conocer dos propiedades para ubicarlas en un plano (como a toda línea recta): su pendiente respecto a algún eje dado, y un punto por donde pasa.

Esta simple y obvia afirmación abre un infinito de posibilidades teóricas, sin embargo, no todas son prácticas. La elección que resultó más fácil de instrumentar en el laboratorio estaba asociada al eje de simetría o eje óptico de la superficie de revolución[2]. La dirección, θ, de las normales se determinan en referencia a dicho eje, mientras que el punto de intersección, X, entre ambas líneas determina un punto por donde pasa la normal. Estos dos parámetros la determinan completamente, falta ahora relacionar tales parámetros con la forma de la superficie.

2.6.2 Cambio a Ecuaciones Algebraicas.

La forma de la superficie (dada por las coordenadas del punto de incidencia, P), en coordenadas cartesianas en el plano del perfil, se representan usualmente por s y z. s se conoce con el nombre de el **semidiametro**, y representa la distancia del eje al punto de la superficie. z, conocida como la **sagita**, representa la distancia del mismo punto de la superficie al plano tangente a la superficie en el vértice. De acuerdo con Malacara (1988), la relación entre los parámetros de la normal y las coordenadas del punto de la superficie, esta dada por

[2] Ahora es más claro para nosotros, que no es necesario que la superficie presente un eje de simetría. Es suficiente elegir un eje arbitrario para realizar las mediciones que se proponen y probar la superficie de interés.

$$\tan \theta = \frac{dz}{ds} . \tag{2.9}$$

y

$$X = z + \frac{s}{\tan \theta} . \tag{2.10}$$

Donde X es la distancia, respecto de un origen arbitrario, del punto de intersección de la normal a la superficie y el eje óptico; si X se mide respecto del centro de curvatura paraxial, se tiene la *aberración longitudinal*. θ es el ángulo entre la normal y el eje óptico.

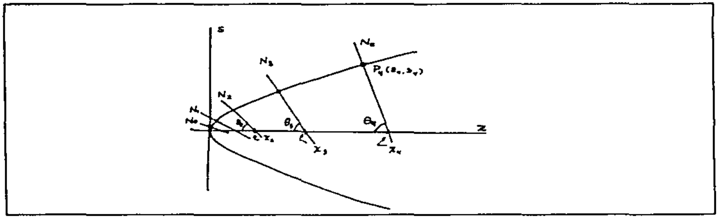


Figura 2.9. Las normales No, N1, N2, ... a una superficie asférica no coinciden en un solo punto, ni son paralelas. Se pueden describir en términos de su ángulo de inclinación θo, θ1,... y su intersección Xo, X1,... con el eje de giro.

La ecuación (2.9) es la misma ecuación diferencial (2.2) escrita con diferentes variables. Debe ser claro, como se dijo antes, que dicha ecuación no es útil para nuestros propósitos.

Otra posibilidad sería el sustituir (2.10) en (2.9), para obtener otra ecuación diferencial para la forma de la superficie $s(z)$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{s}{(X-z)} , \tag{2.11}$$

cuya solución es

$$s = \sqrt{-z^2 + 2 \int_0^z X(z)\, dz} . \tag{2.12}$$

Para que la ecuación anterior sea útil, es necesario determinar la dependencia de la aberración longitudinal, X, con la sagita, z. Esto no es fácil, o al menos no lo parece, por lo que debemos buscar otro resultado más adecuado.

Un segundo intento de plantear el problema como la solución de una ecuación diferencial nos conduce a eliminar la sagita de las ecuaciones (2.9) y (2.10). La ecuación diferencial obtenida resulta ser

$$ds = \frac{1}{2} \sin 2\theta \left(\frac{dX}{d\theta} - \frac{s}{\operatorname{sen} \theta} \right) d\theta. \tag{2.13}$$

Esta ecuación es más complicada que las anteriores pues, por un lado no puede ser llevada a cuadraturas de una manera simple. Por otro lado, implica el conocer a X y s como función de θ. La primera dependencia es posible obtenerla, la segunda es ¡ justamente la solución que esperamos obtener !

Una solución limitada pero viable, consiste en agregar una tercera ecuación a las ya establecidas por (2.9) y (2.10). La ecuación que se necesita es aquella que especifica de manera genérica el tipo de superficie que se espera obtener; por ejemplo, puede tratarse de una cónica, de una asférica de revolución o cualquier otra superfice. Si representamos tal expresión por

$$z = z(s) \tag{2.14}$$

podemos entonces calcular la derivada en (2.9), convirtiéndola junto con (2.10) en un sistema de ecuaciones algebraicas con dos incógnitas (s y z), y dos cantidades medibles experimentalmente (X y θ). Cada tipo de superficie tendrá sus propias ecuaciones algebraicas, que habrán de deducirse para ser usadas. A continuación mostraremos las ecuaciones que se obtienen para dos casos específicos: superficies cónicas y superficies asféricas de revolución.

2.6.3 Superficies Cónicas.

La relación entre la sagita y el semidiámetro para una superficie cónica está dada por [Malacara (1978)]

$$z = \frac{c\, s^2}{1 + \sqrt{1 - (k+1)\, c^2 s^2}}, \tag{2.15}$$

donde $c = 1/r$, es la curvatura paraxial o la curvatura en el vértice de la superficie (r es el radio de curvatura paraxial), y k es la constante de conicidad de la cónica generadora ($k = -e^2$; e es la excentricidad de la misma).

Utilizando la ecuación (2.15) para obtener la derivada de z respecto de s, y sustituyendo en la ecuación (2.11), se pueden obtener las ecuaciones algebraicas siguientes [Cornejo-Rodriguez y Malacara-Hernández (1978)]

$$x = -\, kz\ , \tag{2.16}$$

en donde $x = X - r$, es la aberración longitudinal medida desde el centro de curvatura paraxial, si X se mide respecto al vértice. Además,

$$\tan\theta = \frac{s}{r - z(k+1)}\ , \tag{2.17}$$

de donde obtenemos a las coordenadas del punto de incidencia s y z, en función de las cantidades medidas x y θ, como sigue

$$z = -\,\frac{x}{k}\ , \tag{2.18}$$

y

$$s = \tan\theta \left(r + \frac{x\,(k+1)}{k} \right)\ . \tag{2.19}$$

Las últimas dos ecuaciones las hemos usado para probar superficies cónicas rápidas [Díaz-Uribe, *et. al.* (1985)]. Con equipo muy simple y observaciones visuales, conseguimos precisiones de 10 μm en la sagita y de 40 μm en el semidiámetro.

Hemos continuado el trabajo con el fin de ampliarlo a superficies más generales como las superficies asféricas de revolución, de lo cual hablaremos en la siguiente sección.

2.6.4 Superficies Asféricas.

La propuesta particular que haremos en este caso, al parecer es suficientemente amplia para considerar gran parte de las superficies asféricas usadas en óptica. Se trata de una aproximación polinómica de grado 10 a una superficie más general. Considerando que hemos pasado de la prueba de la prueba de cónicas a la prueba de asferas, no es difícil entender que la expresión analítica de la asfera se proponga como la expresión usual para las cónicas más otro término de deformación [Malacara (1978)]

$$z = \frac{c\ s^2}{1 + [1-(k+1)\ c^2 s^2]^{1/2}} + A_1\ s^4 + A_2\ s^6 + A_3\ s^8 + A_4\ s^{10} \qquad (2.20)$$

en donde, como antes, c es la curvatura paraxial, k es la constante de conicidad de la superficie base, a partir de la cual se realiza la deformación para obtener la forma deseada, y los coeficientes A_1, A_2, A_3, y A_4, son los coeficientes de deformación.

Existen otras posibilidades para definir la forma de la superficie. El cambio proviene de la elección de la superfice base; por ejemplo, puede elegirse una esfera, en cuyo caso k=0, o un plano (k=0 y c=0). En éste último caso se considera como deformación al término cuadrático por lo que se tendría una expresión de la forma

$$z = \sum_{n=1}^{5} D_{2n}\ s^{2n} \qquad (2.21)$$

Como se trata, en última instancia, de describir con (2.20) o (2.21) la misma superficie, ambas expresiones deben dar los mismos valores de z para cada valor de s. Esto implica que los coeficientes de las dos expresiones deben estar relacionados como sigue

$$\left.\begin{aligned} D_2 &= \frac{c}{2} \\ D_4 &= \frac{Q\ c^3}{8} + A_1 \\ D_6 &= \frac{Q^2 c^5}{16} + A_2 \\ D_8 &= \frac{5}{128}\ Q^3 C^7 + A_3 \\ D_{10} &= \frac{7}{256}\ Q^4 c^9 + A_4. \end{aligned}\right\} \qquad (2.22)$$

Para determinar la relación de z y s con x y θ, sustituímos (2.21) en (2.11), de donde obtenemos

$$\tan\ \theta = \sum_{n=1}^{5} E_{2n-1}\ s^{2n-1} \qquad (2.23)$$

en donde $E_{2n-1} = 2n\ D_{2n}$. Esto es

$$
\left.\begin{aligned}
E_1 &= c \\
E_3 &= \frac{1}{2}\, Q\, c^3 + 4\, A_1 \\
E_5 &= \frac{3}{8}\, Q^2 c^5 + 6\, A_2 \\
E_7 &= \frac{5}{16}\, Q^3 c^7 + 8\, A_3 \\
E_9 &= \frac{35}{128}\, Q^4 c^9 + 10\, A_4
\end{aligned}\right\} \tag{2.24}
$$

Para poder evaluar s de valores medidos de θ, es necesario invertir el polinomio (2.23). El procedimiento usual [Arfken (1970)] es proponer una solución polinomial de la forma

$$
s = \sum_{n=0}^{4} T_{2n-1}\, \alpha^{2n-1} \tag{2.25}
$$

en donde α = tan θ. En (2.25) sólo se incluyen potencias impares ya que (2.23) también es función impar.

Sustituyendo (2.25) en (2.23), se obtienen cinco ecuaciones simultáneas en donde las T's son las incógnitas. Resolviendo el sistema se obtiene

$$
\left.\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{E_1} \\
T_3 &= -\frac{E_3}{E_1^4} \\
T_5 &= \frac{1}{E^7}\left(3E_3^2 - E_1 E_5 \right) \\
T_7 &= \frac{1}{E_1^{10}}\left(8E_1 E_3 E_5 - 12E_3^2 - E_1^2 E_7 \right) \\
T_9 &= \frac{1}{E_1^{13}}\left(-55E_1 E_3^2 E_5 + 55E_3^4 + 10E_1^2 E_3 E_7 + 5E_1^2 E_5^2 - E_1^3 E_9 \right)
\end{aligned}\right\} \tag{2.26}
$$

Sustituyendo en tales expresiones la dependencia de las E's con c, k, y las A's, dadas por (2.24), obtenemos finalmente la expresión de las T's

$$
\left.\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{c} \\
T_3 &= -\frac{4A_1}{c^4} - \frac{Q}{2c}
\end{aligned}\right\} \tag{2.27}
$$

$$\left.\begin{aligned}
T_5 &= \frac{48A_1^2}{c^7} - \frac{6A_2}{c^6} + \frac{12A_1Q}{c^4} + \frac{3Q^2}{c} \\
T_7 &= -\frac{768A_1^3}{c^{10}} + \frac{192A_1A_2}{c^9} - \frac{8A_3}{c^8} - \frac{288A_1^2Q}{c^7} + \frac{24QA_2}{c^6} - \frac{24Q^2}{c^4} - \frac{5Q^3}{c}
\end{aligned}\right\}(2.27)$$

$$\begin{aligned}
T_9 = {} & \frac{14080A_1^4}{c^{13}} - \frac{5280A_1^2A_2}{c^{12}} + \frac{320A_1A_3}{c^{11}} + \frac{180A_2^2}{c^{11}} - \frac{10A_4}{c^{10}} + \frac{7040A_1^3Q}{c^{10}} \\
& - \frac{1320A_1QA_2}{c^9} + \frac{40QA_3}{c^8} + \frac{990A_1^2Q^2}{c^7} - \frac{60Q^2A_2}{c^6} + \frac{40A_1Q^3}{c^4} + \frac{35Q^4}{128c}
\end{aligned}$$

en donde $Q = k+1$.

El valor de la sagita se obtiene, finalmente, resolviendo la ecuación (2.11) para z y sustituyendo el valor de s dado por la ecuación (2.25). En este caso obtenemos

$$z = -\sum_{n=1}^{5} T'_{2n-1}\ \alpha^{2n-2} \tag{2.28}$$

con $T'_1 = x$ y $T'_{2n-1} = T_{2n-1}$, para n = 2,3,4 y 5. O una vez calculada la s,

$$z = r + x - \frac{s}{\alpha} \tag{2.29}$$

De todo lo anterior resulta que, para conocer la sagita y el semidiámetro de la superficie real, a partir de valores medidos de x y θ para diferentes puntos sobre la superficie, debemos de hacer uso de las ecuaciones (2.25) con (2.26) o (2.27), según sea la elección de la superficie base en la descripción de la superficie ideal, además de la ecuación (2.29). Esto determina los valores experimentales de z y s. Los correspondientes valores teóricos se calculan por medio de la ecuación que da la forma de la superficie (2.20) o (2.21). La diferencia de z_E y de z_T para diferentes valores de $s_T = s_E = s$, nos indicará los errores de la superficie real en relación a la superficie ideal.

Hasta ahora no se ha podido llevar a la fase experimental la propuesta para superficies asféricas, sin embargo, estamos trabajando en ello y, esperamos, pro n to tener resultados. La propuesta aquí descrita fué presentada en la Reunión General de la Comisión Internacional de la Optica de 1987 (ICO-14), en Quebec, Canadá [Díaz, *et. al.* (1987)].

2.7 Conclusiones.

En este capítulo hemos presentado las formulaciones teóricas necesarias para realizar las pruebas de las superficies opticas más comunes, tales como planos, esferas, cónicas y asféricas, por métodos de deflectometría láser. Estas formulaciones no son las únicas posibles, sin embargo, son lo suficientemente amplias para realizar gran variedad de pruebas. En el capítulo siguiente hablaremos sobre los aspectos experimentales de las pruebas, principalmente en lo referente a la exploración y la detección. En el capítulo 4, hablaremos sobre el tratamiento de los datos experimentales y mostraremos que las formulaciones de este capítulo 2 nos permiten evaluar más propiedades de las superficies que lo que hasta ahora se ha podido mostrar.

CAPITULO 3

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

De acuerdo con la teoría desarrollada en el capitulo 2, para realizar la prueba de superficies ópticas debe hacerse incidir un haz de laser, de dirección conocida, sobre varios puntos de la superficie de prueba. Para cada uno de ellos debe medirse el ángulo de deflexión correspondiente y, con ayuda de las ecuaciones deducidas en el capitulo 2, se determinan los perfiles de la superficie.

En este capitulo analizaremos la problemática involucrada en la medición del ángulo de deflexión, describiremos el arreglo y procedimiento experimentales que usamos en las mediciones.

3.1. Detección del Haz.

En el capitulo 1 se describió el problema de la detección del haz de láser. Como se explicó entonces, los problemas surgen debido a que se trata de un haz de rayos de sección transversal finita. La naturaleza gaussiana del haz de láser nos permite elegir como rayo representativo al rayo correspondiente a la irradiancia máxima del haz, o que divide al haz en dos haces de igual potencia.

Diferentes autores han seleccionado diversos criterios y por tanto diferentes métodos, para determinar la posición de este rayo representativo.

a) Detección visual. El más simple de ellos, aunque obviamente el menos preciso, es el método visual. Este consiste en proyectar el haz sobre una pantalla de observación. El haz se manifiesta como una mancha circular luminosa, con variación de intensidad gaussiana (ver figura 1.4). El centro de dicha mancha indica el punto de intersección del rayo representativo con la pantalla. Generalmente la pantalla de observación contiene un orificio pequeño por donde pasa el haz incidente; este orificio sirve además como referenecia del centro de la mancha cuando el ángulo de deflexión es nulo.

La precisión del método es reducida debido a que, en los trabajos usados, el haz incide sobre una superficie de un radio de curvatura relativamente pequeño produciendo una divergencia final del haz. De esta manera la mancha en la pantalla es grande (del orden de varios centimetros), haciendo difícil detectar pequeñas deflexiones. Este problema es aún más crítico por el hecho de observar en eje, es decir, en la trayectoria del haz incidente.

Para superar ese problema [Díaz-Uribe, *et. al.*(1985)], seguimos una idea desarrollada previamente por Cornejo-Rodríguez, *et. al.* (1981). Si se hace pasar el haz incidente previamente por una abertura difractora centrada, el patrón de difracción producido estará también centrado. Después de reflejarse en la superficie, las franjas de difracción ayudarán a centrar el haz o a medir la deflexión lineal en la pantalla respecto al orificio mencionado. Con tal procedimiento, pueden detectarse deflexiones transversales de sólo unos cuantos milímetros o angulares de alrededor de un grado.

Una manera más objetiva de medir la deflexión es através del uso de fotodetectores. Los hay sensibles a posición y los que sólo miden irradiancia o potencia luminosa, en todos los casos, es necesario hacer mediciones fuera de eje, pues el detector bloquearía el haz incidente. Para ello se hace uso de un divisor de haz que permita hacer llegar el haz incidente, y desviar de la trayectoria original al haz reflejado.

b) Detectores sensibles a posición. Principalmente podemos distinguir dos tipos de detectores sensibles a posición: los diferenciales y los de integración.

Los diferenciales toman las señales de la potencia luminosa que incide sobre varios sectores del detector y sacando diferencias entre ellas determinan si el haz está centrado en el fotodetector. Si no es así, pueden determinar el decentrado presente. Estos son los llamados *detectores de cuadrante* y pueden medir desplazamiento uni- y bi-dimensional con dos y cuatro sectores, respectivamente. Ennos y Virdee (1982) usan estos detectores y determinan la posibilidad de medir desplazamientos transversales de hasta 0.1 μm.

Hay otros fotodetectores que en cierto sentido son equivalentes a los detectores de cuadrante porque directamente, de mediciones diferenciales, determinan el centroide de un haz de luz. Ejemplo de éstos son los *fotodiodos de efecto lateral* [Hausler y Schneider (1988)].

Los detectores que trabajan por integración, lo que hacen es muestrear la irradiancia del haz y de esos datos determina el centroide o centro de irradiancia del haz (como en Mecánica Clásica se determina el centro de masa de una distribución de masas). En esta categoría podríamos incluir los arreglos lineales y bidimensionales de fotodiodos o reticones y CCD's.

c) Detectores no sensibles a posición. Cuando sólo se cuenta con un detector que mide potencia luminosa, debe instrumentarse algún mecanismo para determinar la posición de un haz de láser.

Un mecanismo propuesto por Smolka y Caudell (1978), consiste en utilizar un divisor de haz giratorio con frecuencia angular constante. En cada momento existen dos haces reflejados en el divisor (ver figura 3.1). Uno se debe al haz directo que viene del láser (*A*); el otro se debe al haz inicialmente transmitido en el divisor, que incide en la superficie de prueba, se refleja en ella, regresa al divisor y es reflejado por este (*B*). En su constante cambio de dirección, el divisor desvía los haces *A* y *B* en diferentes direcciones. Ocasionalmente, *A* es desviado hacia el detector, *D*; posteriormente, después de un cierto tiempo, es *B* el que es desviado hacia el detector. Midiendo el tiempo transcurrido entre la detección de *A* y la detección de *B*, puede deducirse el ángulo de deflexión correspondiente. Debido, sin embargo, a que le haz es gaussiano y el detector tiene un ancho finito y una cierta función de transferencia, no se observa un pulso agudo, sino una señal dispersa en el tiempo. Smolka y Caudell determinan teóricamente el punto del pulso que debe asociarse con el centro del haz. Este método, requiere de un sistema de giro muy preciso, además de la posterior conversión del dominio del tiempo al dominio angular. La precisión alcanzada con este método está en el rango de 1 a 10 μm en las variaciones de altura de la superficie probada.

Recientemente hemos propuesto reproducir con un sólo detector no sensible a posición, la manera en que trabaja un detector de cuadrante. Para determinar posición en una dimensión, requerimos dividir en dos el haz reflejado y comparar la potencia de cada parte. Como la frontera entre los dos haces debe ser una línea recta, utilizamos un prisma de tejado en reflexión externa. Este prisma tiene la propiedad de tener una arista (la del tejado), muy recta y sin bisel (que alteraría las mediciones). El prisma se montó sobre una platina de desplazamiento transversal, de manera de poder posicionar la arista en el centro del haz. Para identificar tal situación, los haces reflejados se enviaban a sendos espejos que a su vez reflejaban los haces hacia el mismo detector. (ver figura 3.2).Bloqueando alternativamente cada haz podía medirse la potencia que portaba cada uno. Si alguno de los haces resultaba más potente que el otro, la platina se desplazaba en la dirección del primero hasta conseguir la igualación. Para aumentar la precisión de las lecturas, se colocó un microscopio para detectar pequeñas variaciones de la aguja del amplificador. Este procedimiento nos permitió determinar el centro del haz con precisión de 1 µm. La repetibilidad era de 5 µm, principalmente a inestabilidades del láser más que al método de medición. Este método nos permitía observar las fluctuaciones en dirección del haz de láser durante el tiempo de calentamiento del mismo; también eran evidentes los problemas ocasionados por la turbulencia del aire y con las vibraciones de personas caminando. En consecuencia, la precisión del radio polar fue de 3 µm, aunque creemos puede mejorarse.

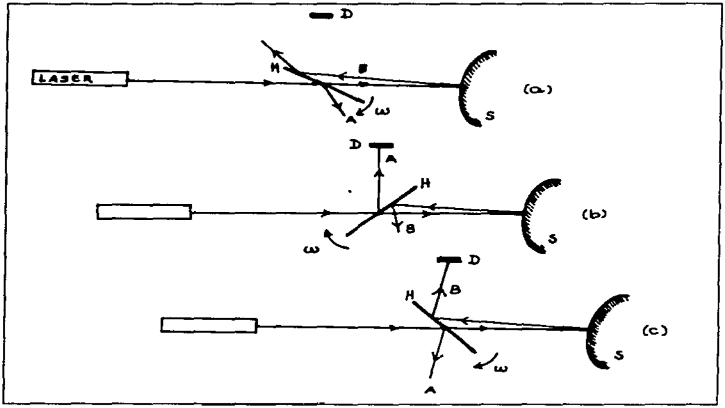


Figura 3.1 Método para medir el ángulo de deflexión por medio de un divisor de haz, H, que gira con velocidad angular constante, ω. A, es el rayo directamente reflejado en H; B, es el rayo inicialmente transmitido en H, reflejado por la superficie de prueba, S, y reflejado después por H. En diferentes instantes A y B son enviados al detector D, el tiempo transcurrido entre (b) y (c) determina el ángulo de reflexión.

3.1.1 Una Alternativa Para Monitorear la Posición del Haz.

De los métodos descritos arriba, hemos usado la detección visual y la última descrita en que se usa un prisma de tejado. Sin embargo, la detección visual es poco precisa y la otra es muy tardada por la necesidad de estar censando alternativamente los dos haces para después comparar. Actualmente estamos considerando la opción de adquirir un detector sensible a posición, sin embargo, aunque un detector es relativamente barato, la instrumentación necesaria no lo es tanto (siendo del orden de varios miles de dólares). Esta situación nos condujo a proponer otro método de determinar la posición de un haz de láser, pensando además en la posibilidad de automatizar el proceso.

Cuando estuvimos trabajando con el método del prisma, se hizo aparente la dependencia unívoca entre potencia medida en uno de los dos haces y posición del haz. Siendo capaces de encontrar dicha dependencia, bastaría dividir de nuevo el haz con un borde recto y midiendo la potencia de uno de los dos haces, automáticamente tendríamos la posición del haz.

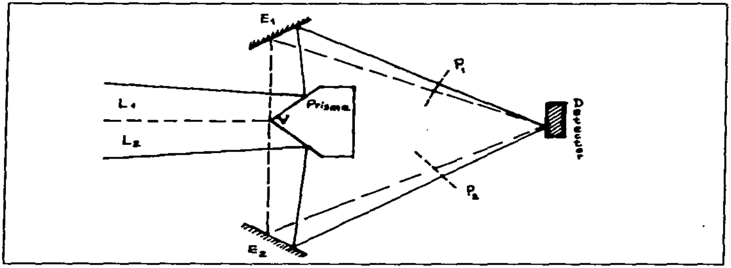


Figura 3.2 Método del prisma para medir la deflexión lineal del haz. El prisma separa dos partes del haz, L1 y L2, los espejos, E1 y E2, los envían a un detector común. Las pantallas móviles, P1 y P2, permiten bloquear alternativamente cada uno de los haces. Cuando el detector mide la misma potencia para cada haz, el vértice del tejado del prisma, V, coincide con el centro del haz.

i) Teoria basica. Consideremos la dependencia gaussiana de la irradiancia del haz con las coordenadas transversales a su propagación [ecuación (1.1)]. Si dividimos el haz con un borde recto paralelo al eje *y*, colocado en un punto x_o, la potencia de la sección izquierda del haz está dada por la integral de la función de irradiancia en la región anterior al borde, es decir

$$P(x_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{x_o} dx \quad I_o \, exp\left[\frac{-2(x^2 + y^2)}{r_o^2}\right] . \tag{3.1}$$

Haciendo la integral obtenemos

$$P(x_o) = \frac{\pi}{4} \; I_o \, r_o^2 \left[1 + erf\left(\frac{2x_o^2}{r_o^2}\right)\right] . \tag{3.2}$$

en donde

$$erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t exp\ (-t^2)dt, \qquad (3.3)$$

es la conocida *función de error* [Dwight (1961)] (ver figura 3.3).

Tomando en cuenta que el factor que se encuentra fuera de los paréntesis cuadrados de la ecuación (3.2) es la mitad de la potencia total del haz (la integral de $-\infty$ a $+\infty$ en x y y), y despejando x_o de la ecuación (3.3), tenemos que

$$x_o = \frac{r_o}{\sqrt{2}}\ erf^{-1}\left[\frac{2P(t)}{P_t} - 1\right], \qquad (3.4)$$

donde $erf^{-1}(t)$ es la función inversa de la función de error y P_t es la potencia total del haz.

La ecuación (3.4) es la relación buscada. x_o es la distancia entre el borde recto que secciona al haz gaussiano y el centro de éste. Si conocemos, o medimos, el semiancho, r_o, y la potencia total del haz, P_t, podemos determinar la deflexión transversal del haz respecto al borde recto como sigue.

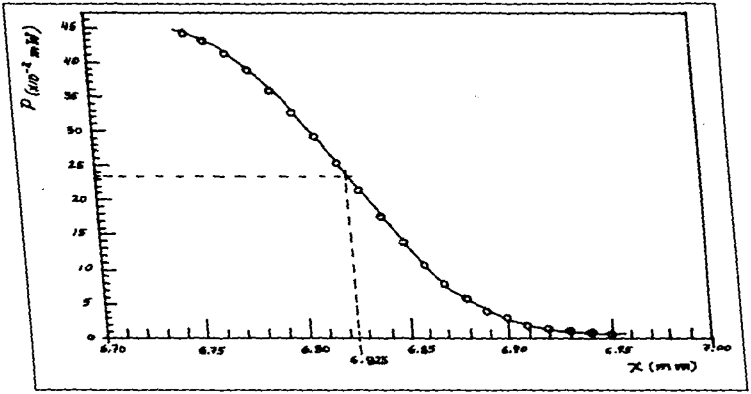


Figura 3.3 Gráfica de la variación de la potencia de una sección de un haz gaussiano, con la posición del borde recto que secciona al haz. Resultados experimentales.

Teniendo al haz de láser en posición centrada, es decir, con deflexión nula, se coloca el borde recto de manera que seccione al haz en dos partes.Se mide la potencia del la parte izquierda del haz seccionado, $P(t)$. Usando la ecuación (3.4) se determina la posición inicial del centro del haz (que coincide con la del rayo representativo), respecto del porde recto. Dejando fijo el borde, cualquier variación en la potencia $P(t)$ se deberá a que el Haz se ha deflectado de su posición original. Midiendo de nuevo el valor de $P(t)$, se encuentra la nueva posición del haz usando de nuevo la ecuación (3.4). La diferencia de valores de x_o dará la deflexión transversal del haz.

ii) Sensitividad. Para darnos una idea de la sensitividad del método, analicemos cómo depende el valor de la deflexión transversal, Δx, con un cambio, ΔP, en la potencia de la sección izquierda del haz. Es decir, si detectamos una variación ΔP en la potencia, a qué cambio en la deflexión transversal está asociado? Para variaciones pequeñas podemos hacer la siguiente aproximación

$$\Delta x \cong \frac{dx}{dP}\,\Delta P. \tag{3.5}$$

Haciendo uso de la ecuación (3.4), tenemos que

$$\Delta x \cong \sqrt{\pi/2}\;\frac{r_o}{P_t}\;\exp\left[\frac{2x^2}{r_o^2}\right]\;\Delta P. \tag{3.6}$$

La ecuación (3.6) nos indica que, obviamente, el menor valor de Δx que puede ser medido depende de que tan pequeña es la variación de ΔP que puede ser detectada. Por otro lado, Δx es más pequeño, cuanto más angosto sea el haz en el plano de seccionamiento (r_o pequeño) y cuanto mayor sea la potencia total del haz. Además, el valor de Δx depende de la posición misma del haz; el valor más pequeño se consigue cuando el centro del haz está más cerca del borde seccionador. En tal caso $x \cong 0$, y

$$\Delta x_{min} \cong \sqrt{\pi/2}\;\frac{r_o}{P_t}\;\Delta P. \tag{3.7}$$

Para darnos una idea del orden de magnitud de la deflexión transversal que puede ser medida, consideremos el caso mostrado en la figura 3.3. La potencia total del haz es de 0.473 mW y su semiancho es de 68 μm, por lo que: $\Delta x_{min} \cong \left[180\ \frac{\mu m}{mW}\right]\ \Delta P$. De manera que si la mínima variación de potencia que podemos detectar es de 1 mW, $\Delta x_{min} \cong 180\ \mu m$; pero si ΔP lo reducimos a $1\ \mu W = 10^{-3} mW$, entonces podemos detectar deflexiones transversales hasta de poco menos de 0.2 μm ! Obviamente, las condiciones experimentales pueden variar y por tanto la sensitividad, sin embargo, el ejemplo anterior nos da una idea de los alcances del método.

iii) Deflexión angular. Hasta ahora sólo hemos propuesto el cómo medir la deflexión transversal en un plano ortogonal a la propagación del haz, en donde se coloca el borde recto que lo secciona. Vamos ahora a encontrar la manera en que se relaciona la deflexión transversal, que en principio podemos medir, con la deflexión angular o ángulo de deflexión, que es lo que finalmente nos conducirá a encontrar los perfiles de una superficie.

De lo expuesto arriba sabemos que nos conviene trabajar con haces angostos para aumentar la precisión, sin embargo, el haz de láser diverge, ya sea de manera natural o debido a la curvatura de la superficie de prueba.

Debido a ello, es conveniente utilizar una lente positiva para hacerlo converger de nuevo. De esta manera, un arreglo típico para detectar el haz es como se muestra en la figura 3.4. Si d es la distancia entre la superficie de prueba y la lente, y el plano de detección lo colocamos a una distancia arbitraria, l, de la lente, la deflexión angular, ϕ, se relaciona con la transversal, x, por medio de la siguiente ecuación

$$\tan \phi = \frac{xf}{d\,(l-f) - lf}\,, \tag{3.8}$$

en donde f es la distancia focal de la lente. Esta ecuación tiene validez general al menos dentro de la aproximación paraxial. Esto no es muy restrictivo para deflexiones pequeñas. Además, aunque se considera delgada a la lente, la ecuación (3.8) sigue siendo válida para lentes gruesas tomando a d como la distancia al primer plano principal, mientras que l debe medirse al segundo plano principal de la lente. Finalmente, debe ser claro que no es conveniente que d y l sean distancias conjugadas, pues en tal caso la deflexión transversal en el plano de observación es nulo siempre.

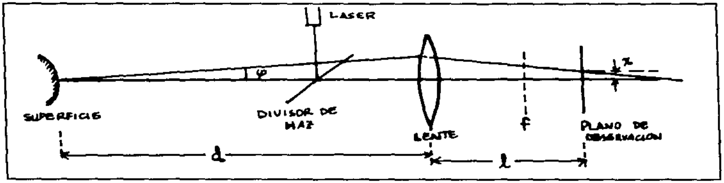


Figura 3.4 Esquema del arreglo para determinar la deflexión angular, ϕ, de la deflexión transversal, x.

Un caso particularmente interesante sucede cuando l f, pues sucede que la relación (3.8) se torna muy simple

$$\tan \phi = \frac{x}{f}\,. \tag{3.9}$$

Sólo es necesario conocer bien el valor de f y medir x para encontrar la deflexión angular. Es posible, sin embargo, que en el plano focal de la lente el haz no sea lo suficientemente angosto para que pueda ser detectado (generalmente los detectores presentan una área pequeña). Aún así puede usarse la expresión (3.9), seccionando en el plano focal y detectando en un punto posterior donde converja, o al menos se vuelva más angosto, el haz.

3.2 Exploración del Haz.

El correcto posicionamiento del haz es sumamente importante pues, por un lado, esto nos permitirá identificar correctamente al punto de incidencia (coordenada x en una exploración transversal o coordenada θ en una exploración angular). Por otro lado, las mediciones de tipo nulo no miden el ángulo de deflexión, sino la manera en que se conjugan dos coordenadas (x y θ, para prueba de superficies asféricas), para dar un ángulo de deflexión nulo; es decir, la exploración da directamente el valor de las coordenadas buscadas.

Los dispositivos clásicos para realizar desplazamientos de precisión, son las platinas embaladas movidas por tornillos micrométricos. El sistema de rodamiento permite realizar movimientos muy suaves y con muy poca fricción; el tornillo micrométrico proporciona movimientos de gran precisión y permite a la vez medir el desplazamiento. Con tales mecanismos se pueden obtener resoluciones transversales de al menos 10 μm, aunque se puede llegar a 0.1 μm. Los desplazamientos totales pueden ser hasta de varios centimetros. En el caso de giros, es relativamente fácil encontrar sistemas de *sinfin y corona*, que proporcionan resoluciones de hasta 1/1000 de grado, con giros de hasta 360°.

Estos sistemas están afectados principalmente de un error de *retroceso (backlash)*, debido al mínimo juego que siempre existe entre la rosca del tornillo y la de la "tuerca". Este error se disminuye grandemente si se avanza siempre en la misma dirección y si se coloca un resorte que mantenga presionado el tornillo contra la tuerca.

Existen otros mecanismos alternativos pero por lo general son más costosos y/o requieren de instrumentación adicional. Tal es el caso de los "motores piezoeléctricos" (*inchworm motors*) [Burleigh], que sustituirían a los tornillos micrométricos. Estos sistemas proporcionan igual o mejor resolución que los sistemas de tornillo y, generalmente, con mejor repetibilidad. El principal inconveniente es que sólo pueden ser controlados electrónicamente y no hay posibilidades de ajustes manuales, esto encarece el sistema. Además, al parecer sólo hay un fabricante y sus opciones aún son limitadas.

Eventualmente convendría también analizar la posibilidad de usar los llamados "cojinetes de aire", pues reducen aún más los problemas de fricción y suavidad de movimiento.

3.3 Arreglo Experimental.

De acuerdo con lo anterior, tanto lo referente al capítulo anterior como lo de este mismo capítulo, el arreglo experimental debe contar con los siguientes elementos: un láser, una montura para la superficie de prueba, un sistema de exploración y un sistema de detección.

Con excepción de un caso, siempre se ha usado un laser de He-Ne con diferentes características. Las potencias usadas van de 1 mW a varias decenas de mW, mostrando que la potencia realmente no es un factor determinante para las mediciones. Un láser de mayor potencia simplifica algunos detalles experimentales. Por ejemplo, permite hacer mediciones con baja iluminación ambiental, o aumenta la sensitividad del método propuesto en la sección 3.1.d). Hausler y Schneider, utilizan un diodo láser de 2 mW.

Para montar la superficie, conviene usar mecanismos de posicionamiento fino en tres direcciones ortogonales, así como giros alrededor de tres ejes también. Esto permite realizar la alineación inicial con mayor facilidad. En nuestros primeros trabajos usamos un simple portalentes, cada vez se hizo más evidente la necesidad de contar con una mejor montura. En nuestro trabajo sobre la prueba de superficies esféricas fué indispensable el tipo de montura arriba señalado.

Los sistemas de exploración que hemos usado en todos nuestros trabajos han sido puramente mecánicos. En los trabajos referentes a la prueba de superficies cónicas usamos el dispositivo mecánico de una platina de microscopio para realizar el desplazamiento longitudinal; para los giros, usamos una mesa goniométrica de un espectrómetro. En el primer caso la precisión del dezplazamiento era de 10 μm, mientras que para los giros era de 2 minutos de arco. En estos trabajos la precisión de la exploración era fundamental, pues la exploración misma daba la lectura de las coordenadas x y θ (ver figura 3.5).

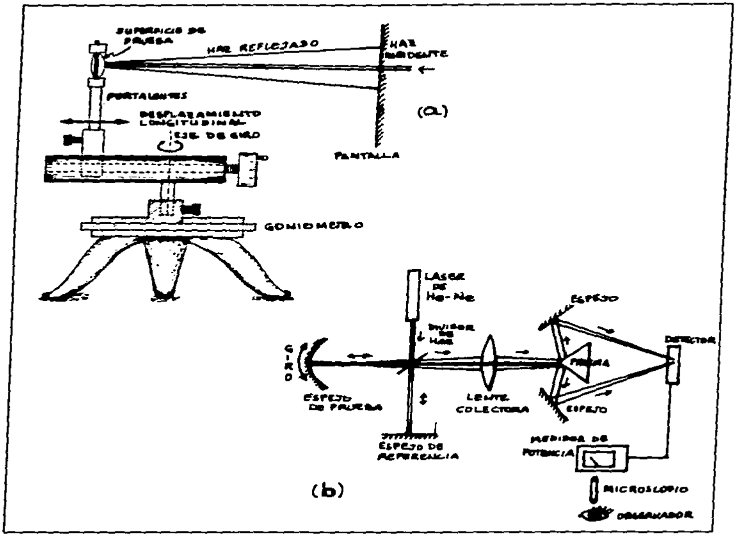


Figura 3.5 Arreglos experimentales para probar superficies (a) cónicas, (b) esféricas.

En el caso del trabajo sobre prueba de superficies esféricas, la exploración se realizaba con una platina giratoria de baja precisión (2°). En este caso, sólo se usaba para posicionar la superficie, las mediciones se tomaban en una platina de desplazamiento longitudinal de precisión donde se encontraba el prisma de tejado que seccionaba el haz. La mínima escala indicaba 1 μm; es decir, podíamos detectar diferencias de deflexión transversal del haz reflejado de 1 μm.

En la sección 3.1 se mencionaron los métodos de detección usados. Aquí solamente indicaremos que el detector usado en el caso de la prueba de superficies esféricas fue un medidor de potencia de láser, marca Newport, modelo 820. Este medidor permite medir desde 0.002 μW hasta 100 mW. Presenta un despliege analógico de aguja, por lo que para observar mejor se hizo uso de un microscopio.

3.3.1 Una propuesta de arreglo experimental. No es difícil darse cuenta, de lo dicho hasta ahora, que es posible integrar en un sólo arreglo experimental diferentes mecanismos o dispositivos que permitan realizar la prueba de cualquier tipo de superficie óptica. Para ello sólo es necesario contemplar la posibilidad de realizar cualquier tipo de exploración: lineal, para prueba de planos y superficies rectificables; angular, para prueba de esferas y superficies con secciones transversales circulares como cilindros circulares y toroides; y una combinación de ambos para superficies asféricas.

Con este fin, con apoyo parcial del CONACyT, hemos adquirido el equipo y accesorios que, complementados con algunos elementos ya existentes en el Laboratorio de Optica del Centro de Instrumentos de la UNAM, se integrará en un prototipo de un dispositivo de prueba de superficies ópticas por métodos de deflectometría láser de reflexión. El arreglo propuesto consiste de lo siguiente (ver figura 3.6):

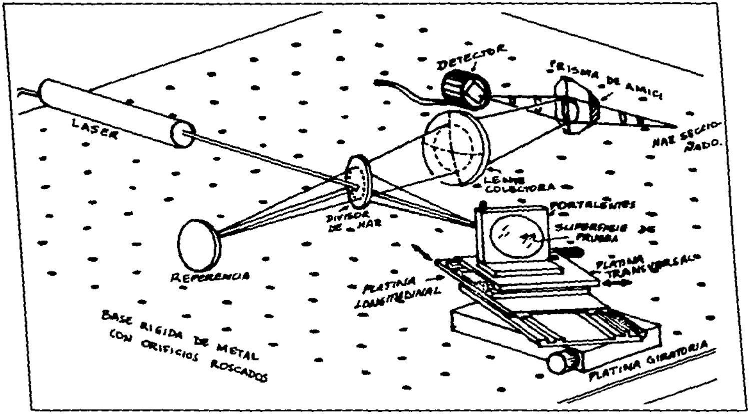


Figura 3.6 Propuesta de arreglo experimental para probar todo tipo de superficies ópticas.

i)Láser. Debido a que en última instancia, el parámetro que determina los resultados de la medición es la dirección del haz del láser, es necesario que el láser a usar sea lo más estable posible en dirección del haz. Si, además, se utiliza el método propuesto en la sección 3.1.1 para detectar la posición del haz, es necesario que el láser tenga también estabilidad en intensidad. Esto se consigue muy bien con un láser estabilizado, sin embargo aún los más económicos de He-Ne cuestan poco más de tres mil dólares. Seleccionamos por tanto un láser marca UNIPHASE, modelo 1301 que presenta las siguientes caracteristicas:

Potencia nominal	1 mW Potencia real 4 mW
Polarización	aleatoria
Diámetro del haz	0.63 mm
Divergencia del haz	1.3 mrad
Deriva angular	**0.02 mrad**
Tiempo de calentamiento	2 min
Máxima variación en potencia de salida después del tiempo de calentamiento	2 %

Además su costo es bastante razonable $642.00 dólares.

ii) Divisor de haz. Para evitar la presencia de dos (o más) haces reflejados en el divisor, se seleccionó un divisor de película. Esto presenta, además, la ventaja de que no es necesario hacer correciones en los cálculos por desviación del divisor. Se utilizó uno de los divisores de película que se encontraban en el laboratorio. Estos fueron distribuidos por Ealing, No. de catálogo 22-8940, con las siguientes especificaciones:

Tipo	recubierto
Razón reflectancia/transmitancia	50/50 a 6328 Å
Espesor	8 μm ± 10%
Apertura	elíptica de 63x44 mm

La apertura elíptica permite tener una apertura efectiva circular cuando el divisor se coloca a 45°.

iii) Portalentes. El portalentes es la montura de la superficie. Debe cumplir algunos requisitos importantes para que sea útil. Por ejemplo, debe permitir realizar movimientos finos para un correcto centrado y alineación de la superficie a probar; esto requiere de desplazadores lineales a lo largo de cada eje coordenado (x,y,z), además de permitir inclinaciones y giros en torno de cada uno de los mismos ejes. Es deseable que pueda alojar lentes o superficies de diferentes dimensiones y formas; esto no es grave, si se pueden hacer adaptaciones y aún cambiar de portalentes según sean las características de la superficie a probar. Hemos elegido una montura óptica *gimbal* de 5 ejes, marca Newport, modelo LP-2B, por las siguientes razones:

Acepta componentes de hasta 50 mm de diámetro, tiene un aditamento para componentes más pequeñas a 38 mm. Tiene movimientos de 5 grados de libertad: 3 longitudinales, 2 angulares. El movimiento lineal a lo largo del eje óptico es "de tipo zoom"; al avanzar, gira la superficie, por lo que se puede usar para cambiar el perfil que se prueba (aunque de manera limitada). Los movimientos angulares tienen un recorrido total de 10°, con una sensitividad de 3 segundos de arco. Los movimientos lineales transversales al eje óptico tienen un recorrido total de 5 mm, con una sensitividad de 1 μm. El movimiento longitudinal a lo largo del eje óptico tiene un recorrido total de 6 mm, con una sensitividad de 4 μm.

iv) Sistema mecánico de exploración. Como se indicó arriba, se necesita realizar exploraciones lineales transversales, longitudinales y angulares. Para ello se superponen un conjunto de platinas de precisión, la inferior es giratoria, las dos superiores son lineales ortogonales. Las cuatro platinas son marca Newport.

La platina giratoria es el modelo 472, con las siguientes especificaciones:

Recorrido angular total	360°
Resolución	0.002° (7 segundos)
Máximo error sinusoidal	±0.150°, no acumulativo.
Retroceso (backlash)	<0.001°
Repetibilidad	±0.001°
Capacidad de carga	45 kg

La platina tiene orificios roscados para aceptar sobre ella otros accesorios, en este caso otra platina.

La platina de traslación longitudinal es la modelo 440-4, con un recorrido total de 100 mm. La transversal por su parte es la 440-2, con 50 mm de recorrido total. La 440-4 tiene dos cabezas micrométricas Starret, modelos SM-2:; la 440-2, tiene sólo una cabeza. Ambas platinas están embaladas para movimiento suave y gran precisión. Las cabezas micrométricas tienen graduaciones para lecturas de cada 0.5 mm y 0.01 mm, así como un vernier para lectura de hasta 0.001 mm (1μm).

v) Lente colectora. La lente colectora que se use dependerá del tipo de superficie que se pruebe; si es muy curva conviene usar una lente de gran diámetro para que pueda recibir toda la luz proveniente de la superficie. De cualquier forma es conveniente que sea una lente lo mejor corregida posible y con recubrimiento antirreflector para evitar pérdidas importantes. Actualmente estamos utilizando un doblete acromático de 18 mm de diámetro y 50 mm de distancia focal; esta lente fue manufacturada por Melles Griot y tiene No. de catálogo 01LA0059.

vi) Detección. Con el fin de poner en práctica la propuesta del método de detección hecha en la sección 3.1.1, seccionamos el haz de láser con un prisma de tejado en reflexión externa. El prisma es de tipo Amici y fué aluminizado para aumentar la reflectancia, y evitar que, eventualmente, el haz transmitido rgrese después de ser reflejado en las otras caras del prisma.

El prisma desvía los dos haces obtenidos a 90°. Como sólo se necesita conocer la potencia de uno de ellos, se elige alguno y en ésa dirección se coloca el detector. Si el haz es demasiado ancho y se sale del detector, conviene colocar otra lente colectora. Esta lente no necesita ser de muy buena calidad, aunque conviene que esté recubierta con antirreflectoras.

El detector que actualmente estamos usando es el mismo que se indicó arriba para la prueba de superficies esféricas.

El detector propiamente, es un detector de silicio, de gran área, modelo 818-SL. Es un fotodiodo PIN de 1cm^2 de área activa con responsividad de banda ancha de 400 a 1100 nm. A continuación damos sus especificaciones:

Rango de longitudes de onda	400-1100 nm
Area activa	1 cm^2
Densidad de potencia máxima (CW)	10 mW/cm^2
Responsitividad>100 mA/W, (400-1060 nm)	
Precisión con calibración de	±3% 400-700 nm
espectro total	±5% 700-1100 nm
tiempo de respuesta	2 microsegundos

El amplificador y display presenta las siguientes especificaciones:

Resolución	1% de rango total de 1 nW a 1 μW
Escalas	0.1,1,10,100 μW, 1,10,100 mW
Linealidad	±1.5% de escala total
Repetibilidad	1% de escala total
Precisión	±4%
Longitudes de onda calibradas	488.0,514.5,632.8 nm
Ancho de banda	18 kHz en la escala de 0.1μW 180 kHz las demás escalas
Ruido de entrada equivalente	1 nW
Salida analógica	-100±0.5 mV escala total

y usa baterías de mercurio como fuente de alimentación para aumentar la precisión de las mediciones.

vii) Superficie de referencia. Se puede aprovechar el haz que inicialmente se transmite en el divisor de haz como referencia del cero de desviación. Para ello se coloca una superficie reflectora de aproximadamente el mismo radio de curvatura de la superficie de prueba para que el haz reflejado en esta superficie sea detectado de la misma manera. Esta superficie no requiere ser de gran calidad en una gran área, sólo en los pocos milimetros en donde incide el haz. Es suficiente colocar la superficie a una distancia tal que los dos haces reflejados tengan aproximadamente el mismo diámetro y divergencia al llegar al divisor de nuevo. El haz de prueba sólo se utiliza para monitorear constantemente la dirección original del laser y corregir si hay variaciones no debidas a la superficie.

viii) Base rígida y aislamiento. Con el fin de evitar, o al menos disminuir lo más posible, las vibraciones mecánicas de todo el arreglo, todas las componentes y elementos deben montarse sobre soportes rígidos y éstos, a su vez, sobre una base rígida de metal. La base seleccionada en este caso, fué el modelo No. XS-24 de Newport. Esta base tiene dimensiones de 2 4 pies (aproximadamente 60 120 cm), y 2 pulgadas de ancho. La superficie es una placa de acero inoxidable ferromagnético de 3/16 de pulgada de grosor. El interior consta de una malla exagonal, tipo panal, con un módulo de corte (*shear modulus*) mayor o igual a 35,000 psi. Finalmente, tiene variación de planitud máxima de ±0.004 pulgadas por cada dos pies en cualquier dirección.

Adicionalemente es conveniente aislar todo el arreglo de perturbaciones ambientales en luminosidad, turbulencia y, de ser posible, de temperatura.

ix) Automatización. Los primeros trabajos que realizamos alcanzaban baja precisión y las mediciones se podían hacer con relativa rapidez y facilidad. Conforme se aumentó la precisión las mediciones resultaban mucho más laboriosas y tardadas. Para las cónicas, un perfil se podía medir en alrededor de media hora, después de haber alineado el arreglo; para las esféricas, la medición de un perfil implicaba con mucho esfuerzo de dos personas, todo un día de trabajo. Esto nos ha conducido irremediablemente a considerar prioritaria la automatización del dispositivo. En este sentido, consideramos primordialmente tres aspectos: la exploración, la detección y el tratamiento de datos.

Para la exploración vamos a mover los tornillos impulsores de las platinas con motores de pasos, controlados por microprocesadores comandados por una computadora. Los sistemas comerciales de movimientos controlados por computadora, que distribuyen las compañías de productos ópticos (Newport, Melles Griot, Aerotech, Ealing, etc.), son excesivamente caros (del orden de $10,000.00 dólares, para un sistema como el que requerimos). Debido a ello estamos empezando a integrar un sistema de módulos producidos y distribuidos por Computer Continuum, con los que con menos de $1000.00 dólares, podemos controlar 4 motores de pasos (con la posibilidad de aumentar el número), además de contar con un adquisitor de datos.

Se adquirieron con presupuesto del Centro de Instrumentos los siguientes elementos:

Tarjeta de interfase para computadora PC compatible, modelo LAB-40 GENERATOR.

Tarjeta de control de hasta 4 motores de pasos, modelo LAB-40 FUNCTION MODULE.

Tarjeta digitalizadora de 12 bits para lectura de hasta 4 señales, modelo LAB-40 FUNCTION MODULE.

En cuanto a la detección, el adquisitor de datos o tarjeta digitalizadora, nos permitirá medir la potencia del haz seccionado para determinar la deflexión. Esta información será grabada en archivos para su posterior proceso.

Para el proceso de los datos, se están elaborando programas de cómputo, para la evaluación de las parámetros buscados. Además, se harán desplieges gráficos en la pantalla de la computadora para una mejor interpretación de los resultados.

3.4 Conclusiones.

En este capitulo hemos descrito los principales aspectos experimentales de las pruebas por deflectometria láser de reflexión. Hemos propuesto un método muy simple para medir la deflexión del haz, asi como un arreglo experimental para probar prácticamente cualquier superficie óptica. Si bien es cierto que hasta el momento son propuestas que están en vias de ser instrumentadas, la experiencia y resultados de trabajos previos (algunos de ellos ya publicados), asegura que se trata de propuestas viables. De hecho, podria decirse que tales propuestas no son sino la conclusión de los trabajos previos. Con el fin de fundamentar estas propuestas, además de las formulaciones teóricas descritas, en el siguiente capitulo vamos a describir con cierto detalle los procedimientos especificos seguidos, los datos obtenidos y los tratamientos que de ellos se han hecho, asi como de los resultados finales incluyendo una descripción y un análisis de los resultados obtenidos hasta ahora.

CAPITULO 4

RESULTADOS EXPERIMENTALES

En este capitulo vamos a presentar los resultados particulares que hemos obtenido en nuestros trabajos. A diferencia de la teoria descrita en el capitulo 2, aquí vamos a seguir un orden cronológico, de esta manera se pretende hacer más evidente la evolución del trabajo desde sus inicios. Como se verá, paulatinamente se ha ampliado la visión de los alcances de los métodos de deflectometría láser; esto ha hecho posible la presentación general y unificada de los métodos de deflectometría láser que se ha hecho en los capítulos anteriores. Además, se han mejorado los resultados obtenidos, al menos en cuanto a la precisión obtenida se refiere.

En la presentación de resultados haremos hincapié en que, aparte de poder determinar la forma de una superficie, o sus perfiles, es posible evaluar cuantitativamente las diferencias que presenta respecto a una superficie ideal, sin defectos. Por otro lado, los métodos descritos nos permiten determinar los parámetros de una superficie desconocida; por ejemplo, radios de curvatura, constantes de conicidad y coeficientes de deformación.

4.1 Prueba de Superficies Cónicas.

En 1984 comenzamos a desarrollar una serie de trabajos sobre prueba de superficies cónicas por medio de lo que ahora llamamos métodos de deflectometría láser.

Inicialmente la idea que se pretendía alcanzar consistía en lo siguiente. Motivados por el trabajo de Cornejo y Cordero (1980) para medir radios de curvatura, se pensó en la posibilidad de medir zonalmente el radio de curvatura de superficies cónicas. Si esto fuera posible, la determinación del perfil de una superficie cónica resultaría casi inmediata pues J. Pedraza, *et. al.*, habían deducido una serie de ecuaciones para este tipo de superficies, incluyendo una que relacionaba el radio de curvatura local con la curvatura paraxial, la constante de conicidad y el semidiámetro del punto de interés. Aunque en principio la idea era correcta ésta no se pudo concretar experimentalmente por el siguiente problema. El método de Cornejo y Cordero para medir radios de curvatura requería de localizar el centro de curvatura bajo la premisa de que al girar la superficie en torno de un eje que pasara por el centro de curvatura, el haz reflejado permanecería estático en una pantalla de observación. Esto implica necesariamente que, estrictamente, el método sólo es válido para superficies esféricas o, aproximadamente, para superficies con variación lenta del radio de curvatura. En este último caso era difícil observar pequeñas variaciones del haz reflejado. Por otro lado, si el radio de curvatura zonal varía rápidamente, el haz reflejado no permanecerá estático aún cuando efectivamente se gire alrededor del centro de curvatura zonal, pues al girar la superficie el punto de incidencia cambia y por tanto, cambia rápidamente el centro de curvatura del nuevo punto de incidencia.

Aunque conocíamos ya entonces el método de Evans (1971) para medir radios de curvatura, no consideramos útil su idea debido a que su formulación está hecha especificamente para superficies esféricas.

Durante el trabajo experimental nos dimos cuenta que al tratar de medir localmente el radio de curvatura, el haz reflejado no permanecia estático al girar la superficie, aún cuando teóricamente estuviéramos cerca del radio de curvatura local. Nos dimos cuenta que ese movimiento del haz reflejado se debia a variaciones del radio local para diferentes puntos de incidencia y que, justamente ese movimiento nos podia indicar la forma de la superficie.

El problema presente en ésa segunda idea es un problema presente en la prueba de superficies asféricas rápidas. Sucedia que al observar la desviación del haz reflejado en la pantalla de observación, comenzaba desde un valor nulo para el vértice, y crecia considerablemente para puntos alejados de él. Resultaba desmasiado complicado el intentar medir la desviación. De alguna manera, pensamos, seria muy conveniente tener una condición parecida a la del método de Cornejo para medir radios de curvatura; esto es, que el haz reflejado no se desviara; o dicho de otra manera, nos gustaria lograr incidencia normal del láser en cada punto de la superficie. Como ya vimos esto no es de posible para superficies cónicas con un sólo giro. Esto dió lugar a dos preguntas: la primera es ¿Qué tipo de movimientos deben darse a la superficie bajo prueba para obtener incidencia normal?, la segunda, una vez que se ha logrado incidencia normal, ¿cómo deducir la forma de la superficie?.

La respuesta a ambas preguntas, descrita en el capitulo 2, provino del trabajo de Cornejo-Rodriguez y Malacara-Hernández (1978). En él, Cornejo y Malacara encuentran la manera en que se distribuyen las normales de una superficie cónica. Resulta que para un punto dado sobre la superficie, la normal a ella está determinada por su dirección y el punto de intersección con el eje óptico. De manera que para conseguir incidencia normal basta girar la superficie y desplazarla sobre su eje óptico.

Para conocer la forma de la superficie, se mide el ángulo girado, θ, y la longitud de desplazamiento, x, que corresponde a las coordenadas de la normal a la superficie en el punto de incidencia. Como se vió en el Capitulo 2, tales coordenadas son suficientes para medir el perfil de una cónica, con ayuda de las ecuaciones (2.18) y (2.19).

4.1.1 Procedimiento experimental

Bajo estas consideraciones, el método experimental propuesto finalmente consistió en lo siguiente (ver figura 4.1):

a) Se localiza el vértice de la superficie. Para ello se usa un método propuesto por Longhurst: al hacer incidir el haz de laser sobre la superficie, el haz reflejado presenta un patrón de difracción particular debido a polvo o defectos sobre el vértice (ver figura 4.2). Al girar la superficie en torno a un eje arbitrario, por un lado, el haz reflejado se aleja de la dirección de incidencia; mientras, por el otro, el patrón de difracción del haz reflejado cambia, pues al girar la superficie el punto de incidencia cambia.

Se desplaza la superficie a lo largo de su eje de simetria o eje óptico hasta lograr que el patrón de difracción en el haz reflejado siempre sea el mismo [figura 4.1 a)]. De esta manera al girar la superficie el haz incide siempre sobre el vértice; es decir, el eje de giro pasa por el vértice de la superficie. Asi se ubica la posición del vértice. Se toma lectura de la posición en el desplazador longitudinal.

b) Se localiza el centro de curvatura paraxial de la superficie bajo prueba. Para ello se hace uso del método de Cordero y Cornejo (1980). Para la zona cercana al vértice o paraxial, la superficie es muy parecida a una esfera y el método es aplicable [ver figura 4.1. a)]. Se gira la superficie un ángulo pequeño, si el haz se desvía, se desplaza la superficie a lo largo de su eje óptico hasta hacer regresar al haz por el mismo camino. Se toma la lectura del desplazador longitudinal. La diferencia de medidas dá el valor del radio de curvatura paraxial, *r*, que aparece en la Ec. (2.19).

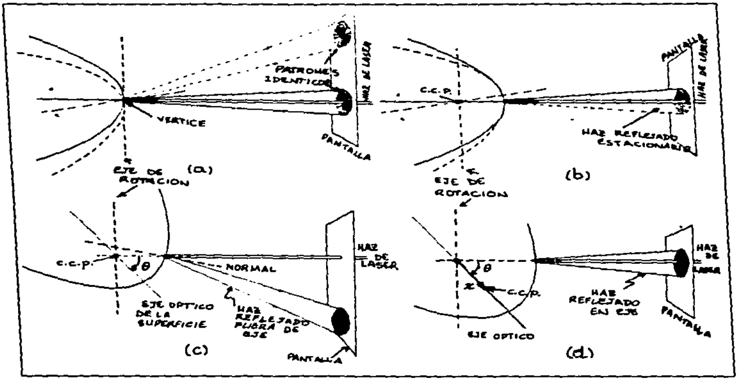


Figura 4.1 procedimiento experimental para determinar el perfil de una superficie cónica (aplicable también a asféricas de revolución). (a) Determinación del vértice. (b) Ubicación del Centro de Curvatura Paraxial (c.c.p.). (c) La superficie se gira un ángulo θ, y (d) la superficie se desplaza una distancia *x* del c.c.p. [Figura tomada de Díaz-Uribe, et. al. (1985)].

c) Se gira la superficie un ángulo θ. El eje de giro es arbitrario una vez ubicado el c.c.p. La magnitud del giro es también un tanto arbitrario, sólo se requiere que se pierda la incidencia normal, i.e., que el haz reflejado no esté centrado sobre la pantalla de observación. Se toma lectura del ángulo girado, θ, respecto a la posición de la superficie cuando el haz incide con el vértice [ver figura 4.1 c)].

d) Se desplaza la superficie a lo largo del eje óptico. La dirección del desplazamiento debe ser en tal sentido que haga que el haz reflejado regrese a la dirección inicial o de incidencia hasta obtener incidencia normal. Se toma lectura de ésta nueva posición de la superficie; la diferencia entre esta lectura y la del c.c.p. da el valor de la aberración longitudinal, *x* [ver figura 4.1 d)].

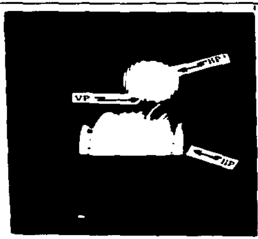


Figura 4.2 Fotografía de diferentes haces reflejados en la lente CINEPHOR de Bausch & Lomb, durante la prueba de superficies cónicas. HP es el haz directamente reflejado en la superficie de prueba. HP' es el haz reflejado en la segunda superficie de la lente. En ambos casos se notan las franjas de difracción producidas por un cabello puesto en la trayectoria del haz incidente. VP son anillos de interferencia del tipo de Newton, producidos por la interferencia entre los haces HP y HP', asegurando la alineación correcta de la lente . Abajo, ligeramente a la derecha, se aprecia el patrón de difracción que produce algún defecto de la superficie de prueba en el vértice; dicho patrón ayudó a localizar el vértice según una propuesta de Longhurst. [Figura tomada de Díaz-Uribe, et. al. (1985)].

4.1.2 Tratamiento de datos

Una vez que se han medido diferentes valores del ángulo y la aberración longitudinal para la superficie de prueba, ¿Cómo podemos averigüar las características de la superficie?.

En este punto surgen varias posibilidades. Puede suceder que uno esté tratando de fabricar o construir una superficie cónica con ciertas características dadas por un diseño. En este caso lo que se busca es averigüar qué tanto parecido tiene la superficie que se está construyendo con la que se diseñó. Se averigüa dónde difiere la superficie real con la ideal, se trata de corregir con pulido y se vuelve a probar.

En un segundo caso, puede tratarse de una superficie construida, que por ejemplo se ha encargado de fabricar a un taller o compañía. Cuando es entregada la superficie uno debe asegurarse que la superficie cumple con los requisitos impuestos a la petición. En este caso las pruebas sirven como una evaluación final de la superficie.

Finalmente una tercera posibilidad, de interés en países como el nuestro, es el indagar las características de un sistema óptico desconocido, ya sea para entender mejor su funcionamiento, ya sea para poder reproducirlo, ya sea para proponer adaptaciones al sistema con que se cuenta.

Tanto en el primero como en el segundo caso se conocen las características del sistema ideal o que se pretende construir. En el caso de superficies esféricas esto implica conocer sólo su radio de curvatura. En el caso de superficies cónicas, es necesario conocer dos parámetros: su radio de curvatura paraxial, r, y su constante de conicidad, k (por ejemplo). En este caso entonces, el procedimiento a seguir es el siguiente. Dados r y k, usando la ecuación (2.15) se determinan diversos pares de valores de s_T y z_T para la superficie ideal. Por otro lado, para cada par de valores x y θ medidos sobre la superficie real, con ayuda de las ecuaciones (2.18) y (2.19), se determinan los correspondientes valores de s_E y z_E. Para los mismos valores de s, i.e., para $s_E = s_T = s$, determina la diferencia $\Delta z = z_E - z_T$.

T A B L A I

Angulo θ y aberración longitudinal x medidos experimentalmente para la lente CINEPHOR de Bausch & Lomb.

θ (° ± 1')	x (mm ± 0.01 mm)	k
30° 10'	7.65	-1.006 ± 0.002
31° 10'	8.14	-0.993 ± 0.002
32° 10'	8.64	-0.979 ± 0.002
33° 10'	9.22	-0.970 ± 0.002
34° 10'	9.85	-0.964 ± 0.002
35° 10'	10.54	-0.959 ± 0.002
36° 10'	11.34	-0.960 ± 0.002
37° 10'	12.28	-0.965 ± 0.002
38° 10'	13.38	-0.975 ± 0.001
39° 10'	14.74	-0.993 ± 0.001
40° 10'	16.43	-1.017 ± 0.001
41° 10'	18.04	-1.031 ± 0.001
42° 10'	19.26	-1.028 ± 0.001
43° 10'	20.26	-1.015 ± 0.001
44° 10'	21.24	-1.001 ± 0.001
45° 10'	21.85	-0.978 ± 0.001
46° 10'	22.31	-0.951 ± 0.001
		$k_{promedio}$ = -0.987
		Desviación estándar = 0.025

El valor de Δz nos determina el error de la superficie real respecto a la ideal o teórica. Si $\Delta z > 0$, la superficie real está más alta que la ideal; si $\Delta z < 0$, sucede lo contrario.

Los valores de s para los cuales $|\Delta z| > \varepsilon$, donde ε es la tolerancia del diseño (en sagita), indican en donde la superficie debe ser corregida. En la tabla I se listan los datos de x y θ medidos para la lente CINEPHOR de Baush & Lomb, así como los resultados obtenidos para s_E y z_E, en la Fig. 4.3 se grafican ésos resultados, así como la diferencia Δz.

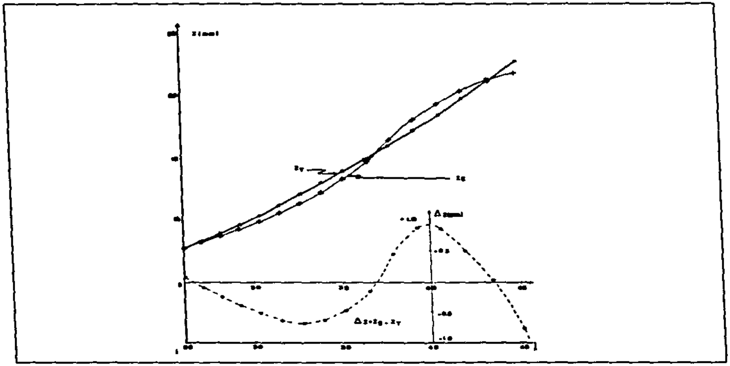


Figura 4.3 Gráfica del perfil de la superficie cónica de la lente CINEPHOR. Se muestran los resultados experimenteales (+) y los teóricos (●). La curva discontinua muestra, en diferente escala, las diferencias entre ambos conjuntos de datos. Las incertidumbres asociadas son tan pequeñas que no pueden graficarse. [Figura tomada de Díaz-Uribe, et. al. (1985)].

4.1.3 Análisis de Errores.

Los errores introducidos en estas mediciones pueden provenir de varias fuentes:

1) Error en el posicionamiento del haz reflejado.
2) Errores de alineación de la superficie.
3) Error en la determinación del centro de curvatura paraxial.
4) Errores instrumentales en la medición de x y θ.
5) Errores propagados al calcular s_E y z_E.

1.- Error por divergencia del haz de láser.

Debemos recordar que para este trabajo la detección fué visual en una pantalla. Al hacer incidir el haz de laser en una superficie esférica, el haz que, en segunda aproximación podemos considerar como un haz de rayos paralelos (la primera aproximación fué considerarlo un rayo), se convertirá en un haz convergente si la superficie es cóncava y divergente si la superficie es convexa. En el primer caso, después de pasar por el punto focal el haz se volverá divergente. De esta manera cuando se observa el haz reflejado en lugar de ver una mancha luminosa pequeña, se ve grande dependiendo de la distancia de la pantalla al vértice de la superficie, l, del radio de curvatura de la superficie, r_o, así como del ancho inicial del haz. En este sentido, para asegurarnos que el haz incidía normalmente, en las primeras pruebas centrábamos el círculo luminoso que se formaba en la pantalla de observación debido al haz reflejado respecto del orificio por donde pasaba el haz incidente.

Este método descrito, no era realmente satisfactorio por lo que buscamos alguna mejor manera de centrar el haz reflejado. Como comentamos antes, en un trabajo previo [Cornejo-Rodríguez, *et. al.* (1981)], algunos de los mismos autores de este trabajo habían propuesto la medición de índices de refracción de una lente por deflexión de un haz de láser. En ése trabajo se les presentaba también el problema de centrar un haz divergente o expandido. La solución que encontraron consistió en hacer pasar el haz de laser por una abertura cuadrada, y considerar el orden cero de difracción como el indicador de la dirección del "rayo central".

Para nuestro trabajo probamos diferentes aberturas pero la que mejor resultado dió fué la de una banda opaca. Esto es, en el camino del haz incidente, cuando todavía no se ha expandido, colocamos un cabello centrado en el haz. Se producía un patrón de difracción con simetría bilateral. Después de reflejarse en la superficie, sobre la pantalla se observaba el patrón de difracción amplificado (ver figura 4.2). Dada la simetría del patrón, para centrar el haz bastaba colocar los máximos y mínimos de difracción simétricos respecto al orificio en la pantalla. Este procedimiento nos permitió mejorar las mediciones.

2.- Errores de alineación de la superficie.

Los errores de alineación influyen seriamente en los resultados de la prueba por lo que buscamos alinear lo mejor posible la superficie.

La alineación de una sola superficie es un problema serio. El caso de una esfera es más simple pues cualquier radio es un eje de simetría (sin contar el centrado de la abertura).

Para superficies asféricas de revolución, sólo existe un eje de simetría y es ése el que debe de alinearse respecto del haz de laser y del desplazador longitudinal.

La alineación de una lente resultó más sencillo pues debido a que contaba con dos superficies centradas entre sí. Observando las primeras dos reflexiones que se producen en ambas superficies, y llevándolas a un punto común coincidente con el orificio de la pantalla, nos acercábamos bastante a una correcta alineación. Para mejorar esto, se observaba el patrón de interferencia del tipo de anillos de Newton que producían los dos haces mencionados y llevándolo también al orificio de la pantalla asegurábamos una mejor alineación (ver figura 4.2).

En este caso también, pero principalmente cuando trabajábamos con superficies solas, tomábamos la siguiente precaución. Girábamos la superficie un ángulo pequeño en torno de un eje cercano al centro de curvatura paraxial. Determinábamos la posición del haz reflejado en la pantalla. Girábamos después en sentido contrario un ángulo igual al anterior, observábamos el haz reflejado. Si no resultaba simétrico respecto al caso anterior la superficie estaba mal alineada. Hacíamos esto para varios ángulos hasta estar convencidos de lo correcto de la alineación.

3.- Error en la determinación del centro de curvatura paraxial y del vértice de la superficie.

Los errores involucrados en este punto sólo afectan a la determinación del radio de curvatura paraxial y a la medición de la aberración longitudinal. De manera que pueden ser contabilizadas. Sin embargo, veamos su procedencia.

En el caso de la determinación del vértice de la superficie, el error correspondiente proviene de la imprecisión en detectar movimientos del patrón de difracción sobre la mancha del haz. Debido a que el giro de la superficie puede llevarse más alla de los 45° (probablemente hasta alrededor de los 60°), los pequeños errores pueden ser detectados.

Para la determinación del c.c.p. el error proviene tanto del error de observación de la variación del haz reflejado en la pantalla, como de las variaciones de curvatura propias de la superficie. En este caso, cuando se gira la superficie, el laser incide relativamente lejos del vértice. Esto último provoca variación de posición del haz reflejado aún cuando se gire alrededor del c.c.p. Para reducir este error es conveniente no girar mucho la superficie, sino sólo lo suficiente para detectar o no movimiento del haz por decentrado.

4.- Errores instrumentales en la medición de x y θ.

Estos errores provienen de la escala del instrumento de medición. Para la aberración longitudinal nosotros usamos tornillos micrométricos con precisión de 0.01 mm = 10 μm. Aunque no es difícil conseguirlos con precisión de 1 μm. Incluso, a nivel comercial comienzan a aparecer dispositivos de muy alta precisión como el llamado NANOMOVER que da una resolución de 50 nm.

Para la medición del ángulo, usamos una mesa goniómetrica (de un espectrómetro) la cual nos proporcionaba una resolución angular de 2 minutos de arco. Pueden conseguirse mejores dispositivos con resolución de hasta 1 segundo de arco.

5.- Errores propagados al calcular s_E y z_E.

De una manera elemental, el error propagado está asociado con la suma de productos del valor absoluto de la derivada parcial de la función que se calcula respecto a cada variable involucrada en el cálculo por la incertidumbre correspondiente a ésa variable.

De ésa manera, usando las ecuaciones (2.18) y (2.19) tenemos que

$$\delta z = \frac{1}{|k|}\ \delta x \tag{4.1}$$

$$\delta s = \left| r + \frac{k\ (k+1)}{x} \right| sec^2\theta\ \delta\theta + |tan\theta|\,\delta r + \left| \frac{k\ (k+1)\ tan\ \theta}{x^2} \right| \delta x \tag{4.2}$$

Tales ecuaciones muestran que el error propagado en z depende exclusivamente de la medición de la aberración longitudinal; es directamente proporcional al error de x y la constante de proporcionalidad es el inverso de la constante de conicidad. Para superficies parabólicas o cónicas muy parecidas, el error en z es prácticamente el mismo que el de x. Para superficies que tienden más a ser esferas, i.e. superficies cónicas de poca excentricidad, el error en z es mayor que el de x y tiende a ser muy grande para casi esferas. Por el contrario, para superficies muy excéntricas como las hipérboloides, el error en z es menor que el de x. Es razonable suponer que la sagita puede ser medida con precisión de centésimas de milímetro y aún mayor si se disminuyen los errores debidos a los casos 1, 2, 3, y 4.

El error en la determinación del semidiámetro es más complicado. Depende de los valores y errores de r, x y θ. La ec. (4.2) muestra que si se hacen mediciones muy pequeñas de x; i.e. cerca del c.c.p., o en la zona paraxial de la superficie, o para ángulos pequeños el error en s puede aumentar considerablemente.

Además, si consideramos superficies parabólicas o casi parabólicas

$(k+1) \cong 0$, y esféricas o casi esféricas $k \cong 0$, la ecuación (4.2) se reduce a:

$$\delta s \cong \tan\theta\ \delta r + \sec^2\theta\ \delta\theta \tag{4.3}$$

Para un ángulo relativamente grande, tal como 45°, tenemos

$$\delta s \cong \delta r + 2r\ \delta\theta \tag{4.4}$$

Si consideramos como valores representativos, δr = 0.01 mm r = 50 mm y $\delta\theta$ = 2 minutos de arco, tenemos que $2r\ \delta\theta \cong 0.04$ mm, siendo el error total en s de alrededor de 40 μm.

Si además uno considera el valor de r dado por el diseño, δr=0. O en el caso de medir r con un esferómetro digital δr=1μm.

4.1.4 Medición de k y r para superficies cónicas

Durante la elaboración del trabajo para prueba de superficies cónicas, nos encontamos con el problema de contar con superficies asféricas completamente desconocidas. Esto es, no conocíamos su radio de curvatura paraxial ni su constante de conicidad. El radio de curvatura era medible por el procedimiento descrito en la sección 4.1.1, sin embargo, la constante de conicidad no.

Además, en al menos un caso nos encontramos con una superficie que carecía de zona paraxial o vértice. Se trataba de un espejo condensador de una lámpara proyección de cine super 8. En éste caso ni el radio de curvatura paraxial era medible.

En tales circunstancias no era posible aplicar el método antes descrito. En el caso de una superficie asférica como la lente CINEPHOR de Bausch & Lomb, reportada en la sección 4.1.2, contamos con dos circunstancias favorables. Una de ellas fue que el radio de curvatura paraxial era medible pues la zona central de la superficie estaba presente. La segunda consistió en que ante el desconocimiento de la constante de conicidad de la superficie medida probamos la posibilidad de que se tratara de una superficie parabólica (k = −1) dando excelente resultados. Esto fué afortunado porque si se hubiese tratado de una elipse o una hipérbola, la elección de la constante de conicidad no hubiera sido tan directa.

De cualquier manera, persistía la duda de si existía un mejor valor de la constante de conicidad. Es decir, que si al comparar los datos obtenidos de la superficie real con los calculados para otra superficie ideal (en vez de parabólica, elíptica o hiperbólica), las diferencias disminuirían.

Esto implicaba el buscar un método que permitiera evaluar los valores de k de la superficie real ya sea conociendo r o sin conocerla y considerando aún la posibilidad de no contar con la zona central de la superficie, para medir r o para determinar siquiera el valor del c.c.p.

4.1.5. Teoría.

Una cónica está descrita por la ecuación (2.15), y la reproducimos a continuación

$$z = \frac{c\ s^2}{1 + [1-(k+1)c^2s^2]^{1/2}} \tag{4.5}$$

Esta ecuación relaciona la sagita y el semidiámetro de cada punto de una superficie cónica a través de k y r=1/c. Además la relación entre s y z con x y θ está dada por las ecuaciones (2.16) y (2.17), sustituyendo dichas ecuaciones en (4.5) obtenemos una ecuación para x, θ, k y r dada por

$$\left[\tan^2\theta\ (rk + xk + x)^2 + x\ [2kr+(k+1)x]\right]\ (rk + xk + x)^2 = 0 \tag{4.6}$$

Si podemos medir x y θ para diferentes puntos sobre la superficie entonces la ecuación (6) sólo tiene como incógnitas a r y k. Se trata, entonces en principio, de una sola ecuación con dos incógnitas. Para encontrar las incógnitas conviene distinguir dos casos:

CASO 1: r conocida

Si conocemos el valor de r dado por el diseño, o si encontramos algún otro medio de medir r, es directo en principio determinar el valor de k. Sólo el primer factor en (4.6) es válido para cónicas por lo que debemos despejar a k de la ecuación

$$\tan^2\theta\ (rk + xk + x)^2 + x\ [2kr + (k+1)x] = 0 \tag{4.7}$$

Se trata de una ecuación cuadrática en k cuya solución es

$$k = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4\ AC}}{2\ A} \tag{4.8}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} A &= \tan^2\theta\ (r + x)^2, \\ B &= 2x\ (r + x)\ \tan^2\theta + 2xr + x^2, \\ C &= x^2\ (\tan^2\theta + 1) \end{aligned}\right\} \tag{4.8.a}$$

De manera que para una superficie de muy alta calidad; i.e. para una superficie que prácticamente no tiene defectos, basta medir un par de valores de x y θ y dado el valor de r (o midiéndolo), podemos determinar el valor de k a través de las ecuaciones (4.8) y (4.8.a).

En la tabla I reportamos los resultados de aplicar este método a la lente CINEPHOR antes referida. La constante de conicidad obtenida para cada par de valores medidos de x y θ, varía entre -0.959 y -1.031, con un promedio de -0.987 y una desviación estándar de 0.025. Este resultado afirma lo que antes era sólo una conjetura, la superficie probada se semeja mucho a una parábola; las fluctuaciones y diferencias se deben a los errores mismos de la superficie.

CASO 2: r es desconocida.

Si no se conoce el valor de r y no es posible medirlo, o aún en caso de ser medible, puede averigüarse tanto el valor de k como de r de la siguiente manera.

En este caso, la ecuación (4.7) se convierte en una ecuación con dos incógnitas: k y r. Si además permitimos la posibilidad de que el c.c.p. no pueda ubicarse debido a la ausencia de la zona central de la superficie, entonces, no puede medirse correctamente el valor de x (la distancia del c.c.p. al punto de intersección de la normal a la superficie con el eje óptico). Aún en ése caso, puede medirse la posición de dicha intersección respecto a un origen arbitrario O', de tal manera que si llamamos c' a la posición (desconocida) del c.c.p. repecto de este mismo origen arbitrario, resulta que

$$x = x' - c'$$

En la Figura 4.4, tenemos x' y $c' < 0$ pues se miden de derecha a izquierda, por lo que

$$x = |\ c'\ | - |\ x'|$$

sustituyendo dicha relación en la ec. (4.7), obtenemos

$$(c'-x')\left[(k+1)\tan^2\theta+1\right]\left[(c'-x')(k+1)+2kr\right]+k^2r^2\tan^2\theta=0, \tag{4.9}$$

en donde es evidente la presencia de tres incógnitas: c', k, y r.

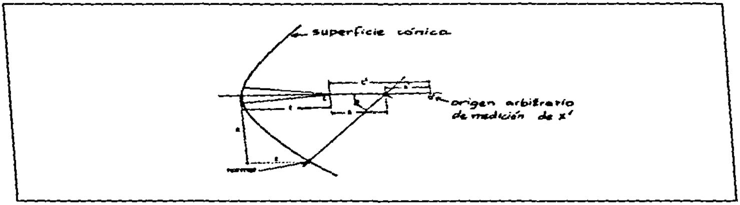


figura 4.4 Definición de parámetros para la teoría para determinar r y k de una superficie cónica.

- Comprobación de forma parabólica:

Existe un caso especial para el cual la ec.(4.9) toma una forma muy simple. Si la superficie es un paraboloide, $k = -1$, y la ec.(4.9) se convierte en

$$(c'-x')2kr + r^2\tan^2\theta = 0$$

o despejando x':

$$x' = \frac{r}{2}\ \tan^2\theta + c' \tag{4.10}$$

Lo cual implica que si la superficie es parabólica una gráfica de x' *vs.* $\tan^2\theta$, obtenida de datos de x' y θ medidos sobre la superficie, se ubicarán sobre una linea recta de pendiente $r/2$ y ordenada al origen c'. De esta manera puede comprobarse previamente si se trata de una parábola. Si por el contrario los datos no se ubican sobre una linea recta, se trata de otra superficie y debe trabajarse aún más la solución.

En la figura 4.5 se muestra una gráfica de x *vs* $\tan^2\theta$, para la lente CINEPHOR, mencionada antes. La gráfica es muy sugestiva: efectivamente, la superficie asférica de la lente es muy parecida a una parábola. Además, el valor de r (= 44.2±1.5 mm) que resulta de la pendiente obtenida por un ajuste de mínimos cuadrados es muy cercano al valor medido, r=44.93±0.01 mm. La ordenada al origen indica un pequeño error en la determinación del c.c.p., c'= 0.0±0.5 mm.

- Caso no parabólico ($k \neq -1$):

En este caso, a partir de la ec.(4.9) debemos generar un conjunto de 3 ecuaciones de donde obtener las 3 incógnitas k, r y c'. Para ello basta medir tres pares de valores de x' y θ, (x'_1,θ_1), (x'_2,θ_2) y (x'_3,θ_3), sustituir cada par en la ecuación (4.9), y resolver el sistema de ecuaciones generado, para encontrar los valores k, r y c.

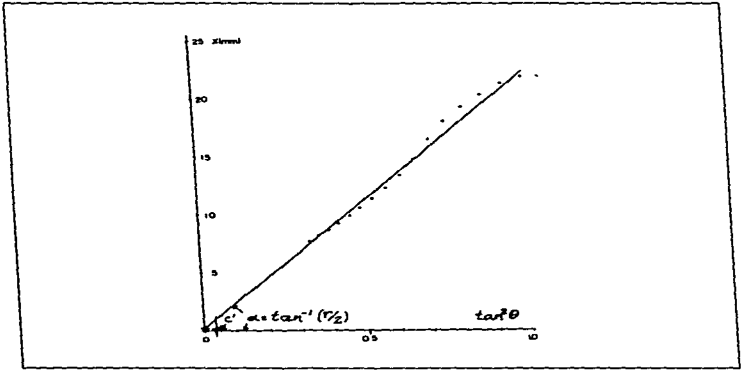


Figura 4.5 Gráfica de x vs. θ, para datos de la lente CINEPHOR. La disposición de los puntos experimentales sobre casi una recta indica que el perfil de la superficie se parece mucho a una parábola. [Figura tomada de Díaz-Uribe y Cornejo-Rodríguez (1986)].

Consideremos una de ellas, por ejemplo para los valores número 1 y haciendo $x_1'-c' = x_1$ y $\tan\theta_1 = \alpha_1$ tenemos una ecuación cuadrática para x_1:

$$x_1^2 (k+1) + x_1(2rk) + \alpha_1^2 r^2 k^2 / [\alpha_1^2 (k+1) + 1] = 0$$

cuya solución es:

$$x_1 = x_1' - c' = -\frac{rk}{(k+1)} \left[1 \mp \frac{1}{[1 + (k+1)\alpha^2]^{1/2}} \right] \qquad (4.11)$$

donde sólo el signo superior es válido para cónicas. Como c' es independiente de cuál pareja de datos sea usada, tenemos que

$$c' = x_1' + \frac{rk}{(k+1)} \left[1 - \frac{1}{[1 + (k+1)\alpha_1^2]^{1/2}} \right] \qquad (4.12)$$

escribiendo esta ecuación para i = 1,2 y 3, y eliminando a c' de ellas tenemos un par de ecuaciones para r y k, dadas por

$$r = (x_1' - x_2')\left(\frac{k+1}{k}\right)\left[\frac{1}{[1+(k+1)\tan^2\theta_1]^{1/2}} - \frac{1}{[1+(k+1)\tan^2\theta_2]^{1/2}}\right]^{-1}$$

y

$$r = (x_2' - x_3')\left(\frac{k+1}{k}\right)\left[\frac{1}{[1+(k+1)\tan^2\theta_2]^{1/2}} - \frac{1}{[1+(k+1)\tan^2\theta_3]^{1/2}}\right]^{-1} \tag{4.13}$$

Estas ecuaciones afortunadamente adoptan una forma muy simple pues r está despejada. Podria en principio intentarse eliminar r pero la ecuación resultante adopta una forma muy complicada:

$$\left(\frac{x_1' - x_2'}{x_2' - x_3'}\right) = \frac{\left[\dfrac{1}{[1+(k+1)\tan^2\theta_1]^{1/2}} - \dfrac{1}{[1+(k+1)\tan^2\theta_2]^{1/2}}\right]}{\left[\dfrac{1}{[1+(k+1)\tan^2\theta_2]^{1/2}} - \dfrac{1}{[1+(k+1)\tan^2\theta_3]^{1/2}}\right]}$$

de donde debe despejarse k. Una vez obtenida k, a través de una de las ecuaciones (4.13) se obtiene r y finalmente de (4.12) se obtiene c'. Aún cuando la superficie sea perfecta las incertidumbres asociadas a x' y a θ ocasionarán que la evaluación de k, r y c' presente errores propagados. En una simulación numérica del proceso de obtener k y r resolviendo gráficamente el sistema de ecuaciones (4.13) encontramos que es más adecuado usar mediciones de x' y θ para combinaciones de datos cercanos al vértice con datos cercanos al borde de la superficie de prueba. Utilizar puntos muy cercanos entre si arroja resultados muy alejados de la realidad siendo peor cuando ambos puntos están cerca del vértice de la superficie (ver figura 4.6).

4.2 Prueba de Superficies Asféricas.

No es dificil darse cuenta que el método para medir los valores de x y θ, descrito en la sección 4.1.1, no es exclusivo para superficies cónicas. De hecho, el método es válido para cualquier superficie asférica de revolución. Con ayuda de la teoria desarrollada en la sección 2.6.4 puede determinarse el perfil de la superficie probada, i.e., pueden determinarse los valores experimentales de s y z.

Hasta el momento no hemos realizado ninguna prueba de superficies asféricas, aunque hemos continuado el trabajo teórico como se describe a continuación.

En el caso de superficies asféricas, cabe también plantearse un problema semejante al de determinar los valores de k y r de una superficie cónica dados el conjunto de mediciones (x_i, θ_i), $i=1,2,\ldots,N$. En este caso , a diferencia de las cónicas, existen 5 parámetros a determinar, y son: el radio de curvatura paraxial (r.c.p.), r, y las 4 constantes de deformación, A_1, A_2, A_3, y A_4 (suponiendo que un polinomio de grado 10 de la forma dada por la ecuación (2.20) represente adecuadamente a la superficie), o si elegimos la descripción de una asférica por una ecuación de la forma (2.21), tenemos como incógnitas los 5 coeficientes de asfericidad D_2, D_4, D_6, D_8, y D_{10}.

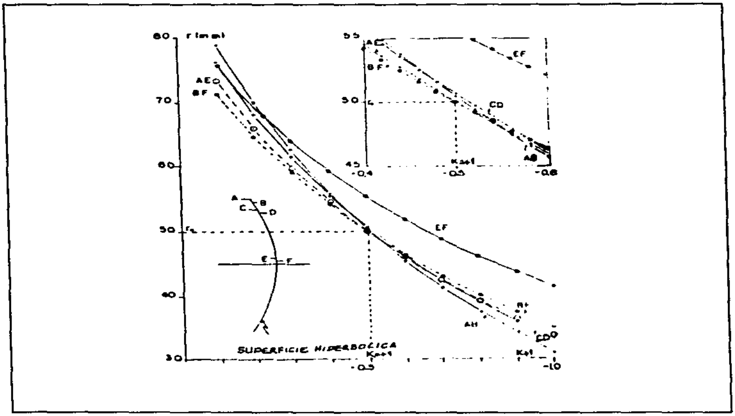


Figura 4.6 Solución gráfica del sistema de ecuaciones (4.13). La intersección de dos curvas indican posibles soluciones para r y k. El recuadro es una ampliación de la gráfica cerca de r_0 = 50, k+1 = -0.5. Los datos x y θ con los que se hizo este ejemplo son simulados. (Figura tomada de Díaz-Uribe y Cornejo-Rodríguez (1986)).

4.2.1 Cálculo de los coeficientes de deformación y del r.c.p.

En lo que sigue vamos a encontrar la correspondiente relación entre la aberración longitudinal y el ángulo de las normales cuando la superficie real se describe en términos de z y s_E por una relación de la forma (2.20), pero con distintos coeficientes; esto es, los coeficientes, A_1, A_2, A_3, y A_4, además de k y $r = 1/c$, representan la superficie ideal o teórica, mientras que los coeficientes $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, y $\mathcal{A}_4$, junto con κ y $\imath = 1/\mathcal{C}$, representan la superficie real que se prueba. Esto es, la superficie real está representada por

$$z_E = \frac{\mathcal{C}\, s^2}{1 + [1-(k+1)\,\mathcal{C}^2 s^2]^{1/2}} + \mathcal{A}_1 s^4 + \mathcal{A}_2 s^6 + \mathcal{A}_3 s^8 + \mathcal{A}_4 s^{10}, \qquad (4.14)$$

en donde hemos supuesto que vamos a considerar en todos los cálculos que la comparación entre la superficie real o experimental y la ideal o teórica se realizará, como en el caso de las cónicas, para los mismos valores del semidiámetro, es decir, que para cada punto vamos a considerar $s_E = s_T = s$. Esto implica que en todas las ecuaciones no habrá diferencia entre los semidiámetros aún cuando se trate de ecuaciones para diferentes superficies (la real y la ideal); en general , todos los demás parámetros sí serán diferentes para cada superficie.

Podemos, de la misma manera, escribir una ecuación semejante a (2.25), que relacione al semidiámetro, s, con α_e (= $tan\ \theta$), para la superficie real

$$s = \sum_{n=0}^{4} \mathcal{T}_{2n-1}\, \alpha_e^{2n-1}\ , \qquad (4.15)$$

en donde, de nuevo, $\mathcal{T}$ y α_e son los parámetros de la superficie real. Sustituyendo (4.15) en (4.14), desarrollando y conservando sólo los términos hasta de grado 10 obtenemos una relación polinomial de $\mathcal{Z}$ en función de α_e de la forma ($\mathcal{Z}$ es la sagita real)

$$\mathcal{Z} = \sum_{n=1}^{5} \mathcal{F}_{2n}\, \alpha_e^{2n}\ . \qquad (4.16)$$

en donde

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{F}_2 &= \mathcal{D}_2 \mathcal{T}_1^2 \\
\mathcal{F}_4 &= 2\ \mathcal{D}_2 \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_3 + \mathcal{D}_4 \mathcal{T}_1^4 \\
\mathcal{F}_6 &= \mathcal{D}_2 (\mathcal{T}_3^2 + 2\ \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_5) + 4\ \mathcal{D}_4 \mathcal{T}_1^3 \mathcal{T}_3 + \mathcal{D}_6 \mathcal{T}_1^6
\end{aligned}\right\} \qquad (4.17)$$

$$\mathcal{F}_8 = 2\ \mathcal{D}_2 (\mathcal{T}_3 \mathcal{T}_5 + \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_7) + \mathcal{D}_4\ (4\ \mathcal{T}_1^3 \mathcal{T}_5 + 6\ \mathcal{T}_1^2 \mathcal{T}_3^2) + 6\ \mathcal{D}_6 \mathcal{T}_1^5 \mathcal{T}_3 + \mathcal{D}_8 \mathcal{T}_1^8$$

$$\mathcal{F}_{10} = \mathcal{D}_2\ (\mathcal{T}_5^2 + 2\ \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_7 + 2\ \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_9) + \mathcal{D}_4\ (4\ \mathcal{T}_1^3 \mathcal{T}_7 + 12\ \mathcal{T}_1^2 \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_5 + 4\ \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_3^3)$$
$$+ \mathcal{D}_6\ (15\ \mathcal{T}_1^4 \mathcal{T}_3^2 + 6\ \mathcal{T}_1^5 \mathcal{T}_5) + 8\ \mathcal{D}_8 \mathcal{T}_1^7 \mathcal{T}_3 + \mathcal{D}_{10} \mathcal{T}_1^{10}$$

en estas ecuaciones los parámetros $\mathcal{D}$, son los correspondientes coeficientes de deformación de la superficie real cuando se expresa la relación entre la sagita y el semidiámetro de la misma a partir de un plano; es decir, se trata de los coeficientes correspondientes a la superficie real en un desarrollo de la forma (2.21). Para esos coeficientes se siguen satisfaciendo las relaciones de la forma (2.22), con las $\mathcal{A}$'s.

Sustituyendo las relaciones (4.15) y (4.16) en la ecuación del tipo (2.29) para la superficie real, y despejando la aberración longitudinal, obtenemos finalmente la relación buscada

$$\alpha = \sum_{n=1}^{5} \mathcal{G}_{2n}\, \alpha_e^{2n} \tag{4.18}$$

en donde
$$\mathcal{G}_{2n} = \mathcal{F}_{2n} + \mathcal{T}_{2n+1} \tag{4.19}$$

o de manera desarrollada, usando (4.17) con (2.22) y (2.27),

$$\mathcal{G}_2 = -4\ \mathcal{A}_1/\mathcal{C}^4 - Q/(2\mathcal{C}) + 1/(2\mathcal{C})\ . \tag{4.20,a}$$

$$\mathcal{G}_4 = 48\ \mathcal{A}_1^2/\mathcal{C}^7 - 6\ \mathcal{A}_2/\mathcal{C}^6 - 3\ \mathcal{A}_1/\mathcal{C}^4 + 12\ \mathcal{A}_1 Q/\mathcal{C}^4 - 3/8\ Q/\mathcal{C} + 3/8\ Q^2\mathcal{C}\ , \tag{4.20,b}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_6 = &-768\ \mathcal{A}_1^3/\mathcal{C}^{10} + 192\ \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2/\mathcal{C}^9 - 8\ \mathcal{A}_3/\mathcal{C}^8 + 40\ \mathcal{A}_1^2/\mathcal{C}^7 - 288\ \mathcal{A}_1^2 Q/\mathcal{C}^7 \\ &+ 24\ Q\mathcal{A}_2/\mathcal{C}^6 - 5\ \mathcal{A}_2/\mathcal{C}^6 + 10\ \mathcal{A}_1 Q/\mathcal{C}^4 - 24\ \mathcal{A}_1 Q^2/\mathcal{C}^4 + 5/16\ Q^2/\mathcal{C} \\ &- 5/16\ Q/\mathcal{C}\end{aligned} \tag{4.20,c}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_8 = &\ 14080\ \mathcal{A}_1^4/\mathcal{C}^{13} - 5280\ \mathcal{A}_1^2\mathcal{A}_2/\mathcal{C}^{12} + 320\ \mathcal{A}_1\mathcal{A}_3/\mathcal{C}^{11} + 180\ \mathcal{A}_2^2/\mathcal{C}^{11} \\ &- 10\ \mathcal{A}_4/\mathcal{C}^{10} + 7040\ \mathcal{A}_1^3 Q/\mathcal{C}^{10} - 1320\ \mathcal{A}_1 Q\mathcal{A}_2/\mathcal{C}^9 + 40\ Q\mathcal{A}_3/\mathcal{C}^8 + 990\ \mathcal{A}_1^2 Q^2/\mathcal{C}^7 \\ &- 60\ Q^2\mathcal{A}_2/\mathcal{C}^6 + 40\ \mathcal{A}_1 Q^3/\mathcal{C}^4 - 672\ \mathcal{A}_1^3/\mathcal{C}^{10} + 168\ \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2/\mathcal{C}^9 - 7\ \mathcal{A}_3/\mathcal{C}^8 \\ &-252\ \mathcal{A}_1^2 Q/\mathcal{C}^7 + 21\ Q\mathcal{A}_2/\mathcal{C}^6 - 21\ \mathcal{A}_1 Q^2/\mathcal{C}^4 - 35/128\ Q^3/\mathcal{C} + 35/128\ Q^4/\mathcal{C}\end{aligned} \tag{4.20,d}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{10} = &\ 12672\ \mathcal{A}_1^4/\mathcal{C}^{13} - 4752\ \mathcal{A}_1^2\mathcal{A}_2/\mathcal{C}^{12} + 288\ \mathcal{A}_1\mathcal{A}_3/\mathcal{C}^{11} + 162\ \mathcal{A}_2^2/\mathcal{C}^{11} \\ &- 9\ \mathcal{A}_4/\mathcal{C}^{10} + 6336\ \mathcal{A}_1^3 Q/\mathcal{C}^{10} - 1188\ \mathcal{A}_1 Q\mathcal{A}_2/\mathcal{C}^9 + 36\ Q\mathcal{A}_3/\mathcal{C}^8 + 891\ \mathcal{A}_1^2 Q^2/\mathcal{C}^7 \\ &- 54\ Q^2\mathcal{A}_2/\mathcal{C}^6 + 36\ \mathcal{A}_1 Q^3/\mathcal{C}^4 + 63/256\ Q^4/\mathcal{C}\end{aligned} \tag{4.20,e}$$

La ecuación (4.18) nos dice que si la superficie considerada es una función par del semidámetro, entonces la aberración longitudinal es también una función par de la tangente del ángulo de las normales. Esto no es de sorprender, es más, debería de haberse esperado. Lo más importante de los resultados anteriores es que hemos encontrado no sólo el tipo de función, sino también la dependencia de los coeficientes, $\mathcal{G}$, de la relación entre la aberración y el ángulo con los coeficientes de deformación, $\mathcal{A}$, la curvatura paraxial, $\mathcal{C}$, y la constante de conicidad, $k = Q-1$.

Los resultados anteriores nos permiten por un lado, saber el tipo de relación que podemos esperar de los datos directamente medidos. Con ello podemos realizar un ajuste de mínimos cuadrados de los datos obtenidos para conocer los valores de las $\mathfrak{S}$'s de la superficie real. Una vez realizado este trabajo, resulta que por otro lado, en las relaciones dadas por las ecuaciones (4.20) las $\mathfrak{S}$'s son cantidades conocidas, mientras que las $\mathcal{A}$'s, $\mathfrak{G}$, y Q son cantidades desconocidas; esto es, las ecuaciones (4.20) se convierten en un sistema de 5 ecuaciones algebraicas con (aparentemente) 6 incógnitas: $\mathfrak{G}$, Q, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, y $\mathcal{A}_4$. En realidad Q no es una incógnita, sino un parámetro sujeto a elección a *priori*, de tal elección resultarán los valores de las $\mathcal{A}$'s. Como se dijo antes, lo que determina Q es la elección de la superficie cónica base a partir de la cual se deforma la superficie hasta obtener la forma deseada. Por lo tanto al tener sólo 5 incógnitas el sistema puede ser resuelto.

Aparentemente el sistema (4.20) es muy complicado pues no es lineal, sin embargo , puede observarse que tienen una estructura muy conveniente para su solución: la (4.20,a) depende linealmente de $\mathcal{A}_1$ por lo que puede despejarse en función de Q, $\mathfrak{S}_2$ y $\mathfrak{G}$, como sigue

$$\mathcal{A}_1 = 1/8\ \mathfrak{G}^3\ (1-Q) - 1/4\ \mathfrak{G}^4\mathfrak{S}_2. \qquad (4.21,a)$$

La ecuación (4.20,b), depende linealmente de $\mathcal{A}_2$ y aunque depende cuadráticamente de $\mathcal{A}_1$, con ayuda de la ecuación (4.21,a) podemos despejar $\mathcal{A}_2$ en función de Q, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_4$, y $\mathfrak{G}$, como sigue:

$$\mathcal{A}_2 = 1/16\ \mathfrak{G}^5\ (1-Q^2) - 3/8\ \mathfrak{G}^6\mathfrak{S}_2 + 1/2\ \mathfrak{G}^7\mathfrak{S}_2^2 - 1/6\ \mathfrak{G}^6\mathfrak{S}_4 \qquad (4.21,b)$$

Siguiendo con ese procedimiento podemos obtener

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_3 = {} & 3/16\ \mathfrak{G}^7Q\ (1+Q) - 29/128\ \mathfrak{G}^7Q^3 - 1/2\ \mathfrak{G}^8Q\ \mathfrak{S}_4 - 9/8\ \mathfrak{G}^8Q\ \mathfrak{S}_2 \\ & + 5/48\ \mathfrak{G}^8\mathfrak{S}_4 + 67/64\ \mathfrak{G}^8\mathfrak{S}_2 - 1/8\ \mathfrak{G}^8\mathfrak{S}_6 - 3/8\ \mathfrak{G}^8Q^2\mathfrak{S}_2 + 3/2\ \mathfrak{G}^9Q\ \mathfrak{S}_2^2 \\ & - 9/4\ \mathfrak{G}^9\mathfrak{S}_2^2 + 3/2\ \mathfrak{G}^{10}\mathfrak{S}_2^3 - 19/128\ \mathfrak{G}^7 \qquad (4.21,c)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_4 = {} & 99/160\ \mathfrak{G}^9Q + 99/160\ \mathfrak{G}^9Q^2 - 99/160\ \mathfrak{G}^9Q^3 - 7/256\ \mathfrak{G}^9Q^4 \\ & - 33/20\ \mathfrak{G}^{10}Q\ \mathfrak{S}_4 - 417/80\ \mathfrak{G}^{10}Q\ \mathfrak{S}_2 + 159/160\ \mathfrak{G}^{10}\mathfrak{S}_4 + 3803/640\ \mathfrak{G}^{10}\mathfrak{S}_2 \\ & - 33/80\ \mathfrak{G}^{10}\mathfrak{S}_6 - 1/10\ \mathfrak{G}^{10}\mathfrak{S}_8 - 219/80\ \mathfrak{G}^{10}Q^2\mathfrak{S}_2 + 3/2\ \mathfrak{G}^{10}Q^3\mathfrak{S}_2 \\ & + 4\ \mathfrak{G}^{11}Q\ \mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_2 + 279/20\ \mathfrak{G}^{11}Q\ \mathfrak{S}_2^2 - 203/60\ \mathfrak{G}^{11}\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{G}^{11}\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_6 \\ & + 3\ \mathfrak{G}^{11}Q^2\mathfrak{S}_2^2 + 1/2\ \mathfrak{G}^{11}\mathfrak{S}_4^2 - 685/32\ \mathfrak{G}^{11}\mathfrak{S}_2^2 - 12\ \mathfrak{G}^{12}Q\ \mathfrak{S}_2^3 + 5/2\ \mathfrak{G}^{12}\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_2^2 \\ & + 1321/40\ \mathfrak{G}^{12}\mathfrak{S}_2^3 - 37/2\ \mathfrak{G}^{13}\mathfrak{S}_2^4 - 757/1280\ \mathfrak{G}^9 \qquad (4.21,d)\end{aligned}$$

Por último, tenemos la ecuación (4.20,e), que depende de todas las $\mathcal{A}$'s. Sustituyendo las ecuaciones (4.21) en ella, obtenemos una ecuación cuártica para $\mathfrak{G}$ de la forma

$$A\mathcal{C}^4 + B\mathcal{C}^3 + D\mathcal{C}^2 + E\mathcal{C} + F = 0 \tag{4.22}$$

en donde

$$A = 297/2\ \mathcal{S}_2^4$$

$$B = 297/2\ Q\ \mathcal{S}_2^3 - 99/2\ \mathcal{S}_2^2\mathcal{S}_4 - 9639/40\ \mathcal{S}_2^3$$

$$D = -\ 99/2\ Q\ \mathcal{S}_4\mathcal{S}_2 - 7047/40\ Q\ \mathcal{S}_2^2 + 216/5\ \mathcal{S}_2\mathcal{S}_4 + 297/16\ Q^2\mathcal{S}_2^2 + 2295/16\ \mathcal{S}_2^2$$

$$E = -\ 1371/160\ \mathcal{S}_4 - 23967/640\ \mathcal{S}_2 - 63/80\ \mathcal{S}_6 + 9/10\ \mathcal{S}_8 - \mathcal{S}_{10} + 108/5\ Q\ \mathcal{S}_4 + 5373/8\ Q\ \mathcal{S}_2 - 99/8\ Q^2\mathcal{S}_4 - 1863/160\ Q^2\mathcal{S}_2 - 297/16\ Q^3\mathcal{S}_2$$

$$F = -\ 81/10\ Q + 189/160\ Q^2 + 81/10\ Q^3 - 297/64\ Q^4 + 4743/1280 \tag{4.23}$$

Con estos resultados, para determinar los errores o defectos de una superficie asférica, se debe proceder como sigue.

1. Se miden, por el método propuesto en la sección 4.1.1, diferentes valores de la aberración longitudinal para otros tantos ángulos de las normales a la superficie. Como resultado tenemos un conjunto de pares de valores medidos sobre la superficie real (x_i,θ_i), $i = 1,\ldots,N$, donde N es el número de pares de datos.

2. Para cada valor de θ se calcula el valor de su tangente, obteniéndose un nuevo conjunto de pares de datos: $(x_i, \tan\theta_i) = (x_i,\alpha_i)$, $i = 1,\ldots,N$.

3. Por el método de mínimos cuadrados se ajustan los datos obtenidos en 2 a la expresión polinómica (4.18). Esto determina los valores de las $\mathcal{S}$'s que mejor representan a la superficie real, y no son necesariamente iguales a los que corresponden a la superficie ideal.

4. Con los valores de las $\mathcal{S}$'s determinadas en 3 y con alguna elección conveniente de $Q = k+1$, se calculan, por medio de las expresiones (4.23), los coeficientes de la ecuación cuártica (4.22).

5. Se resuelve la ecuación cuártica (4.22) para determinar el valor correcto de la curvatura paraxial, $\mathcal{C}$, de la superficie real. El correspondiente valor del r.c.p. de la superficie real está dado por $r = 1/\mathcal{C}$.

6. Con el valor de $\mathcal{C}$ calculado en 5, por medio de las ecuaciones (4.21), se calculan los valores correspondientes de los coeficientes de deformación $\mathcal{A}_j$, $j = 1,2,3,4$, de la superficie real. Esto determina completamente la forma analítica, dentro de la presente aproximación, de la superficie real [ecuación (4.14)].

7. Por medio de la ecuación (4.14) se pueden calcular los correspondientes valores de la sagita para diferentes valores del semidiámetro para la superficie real.

8. Usando la ecuación (2.20), la cual incluye los coeficientes de deformación de la superficie ideal supuestamente conocidos, se calculan los correspondientes valores de la sagita para los mismos valores del

semidiámetro que se usaron con la superficie real.

9. Con los valores de las sagitas calculadas para la superficie real en 7 y los de la superficie ideal calculadas en 8, se calcula la diferencia $z_i - z = \Delta z$ para cada valor de s. Esto determina finalmente los errores de la superficie real respecto de la ideal.

10. Se gira la superficie en torno de su eje de simetría y se repiten todos los pasos hasta el 9 para diferentes diámetros de la superficie. Con esto se logra tener los errores sobre toda la apertura de la superficie. Esta información se puede desplegar gráficamente para una observación global de los errores.

4.3 Prueba de Superficies Esféricas.

El método propuesto en las secciones anteriores para probar una superficie asférica (incluyendo las cónicas como caso particular), implica la medición de la aberración longitudinal para diferentes ángulos de la normal a la superficie. Esta propuesta funciona muy bien cuando se trata de una superficie rápida y sólo en las regiones lejanas del vértice. En los casos de superficies lentas o en las regiones cercanas al vértice para superficies rápidas, la aberración longitudinal toma valores muy pequeños haciendo difícil su medición. Este problema podría resolverse de dos posibles maneras. La primera consistiría en mejorar la precisión y sensibilidad del método de medición de la aberración longitudinal, de manera que la teoría desarrollada previamente pudiera seguir siendo de utilidad. La segunda implicaría el cambiar completamente de método de probar la superficie.

La primer salida planteada arriba durante algún tiempo fué prácticamente imposible de intentar por las condiciones de infraestructura y recursos materiales que se tenían. La segunda, sin embargo, podía intentarse al menos teóricamente. Esta segunda línea se inició con la dirección de una tesis de licenciatura sobre prueba de superficies esféricas por reflexión de un haz de láser, afortunadamente los resultados fueron satisfactorios y dieron lugar a la teoría que sobre esferas se presentó en el capítulo 2. Sin embargo, el trabajo no sólo tuvo carácter teórico, sino que fué posible realizar pruebas experimentales.

Como se explicó en la sección 2.5, midiendo el ángulo de deflexión para diferentes ángulos polares, con ayuda de la ecuación (2.7), se determinan los perfiles de una superficie esférica o cercanamente esférica. En el capítulo 3 se describió brevemente el arreglo experimental, sólo falta aclarar que en nuestro caso $\theta_o = \theta$. Por lo que la tangente dentro de la integral sólo dependía directamente del angulo de deflexión.

Como en el caso de las cónicas y asféricas, una vez determinado el perfil es necesario evaluar la calidad de la superficie. En el presente caso, si se espera que la superficie sea una esfera, entonces, es necesario comparar el perfil obtenido con una circunferencia. En este caso, se hizo rápidamente evidente que justamente por la gran simetría de una esfera, la alineación es aún más crítica que en el caso de las otras superficies. Por ello fué necesario involucrar dentro del procedimiento de evaluación la posibilidad de que la superficie de prueba tuviera errores de alineación. Es decir, puede suceder que el eje de giro no coincida con el centro de curvatura de la superficie. A continuación mostramos cómo puede considerarse ese problema para una correcta evaluación de la superficie.

4.3.1 Ecuación para esferas descentradas.

Si definimos como eje polar (eje x en coordenadas cartesianas) la dirección del rayo incidente, para una esfera cuyo centro de curvatura tiene coordenadas (a,b) en coordenadas cartesianas, la ecuación que la describe en coordenadas polares está dada por

$$r(\theta;a,b) = a\cos\theta + b\,sen\theta \pm [r_o^2 - (a\,sen\theta - b\cos\theta)^2]^{1/2} \quad (4.24)$$

donde r_o es el radio de curvatura de la esfera que se prueba.

Este resultado muestra que si probáramos una esfera perfecta, en general no deberíamos esperar una función constante, sino la función descrita por la ecuación (4.24). Por lo tanto para determinar los errores superficiales deberíamos tomar la diferencia de los radios determinados con los datos medidos de ϕ y la ecuación (2.8), con los radios determinados por (4.24). Aún este procedimiento no es completo pues a *priori* no conocemos los valores de a y b.

4.3.2 Evaluación del descentramiento.

Para determinar los valores de las coordenadas del centro de curvatura de la superfice de prueba (a,b), se pueden tomar tres puntos arbitrarios de la superficie probada experimentalmente y encontrar el centro de la circunferencia que pasa por los tres puntos.. En el caso de una superficie perfecta, cualesquiera tres puntos deberían dar el mismo resultado, sin embargo para una superficie real con defectos se obtienen diferentes valores para diferentes puntos. Si se hace esto para todas las posibles combinaciones de tres puntos experimentales, se obtiene una distribución casi simétrica y muy aguda. El promedio de todos ésos valores nos dará una excelente estimación del descentramiento.

Otro posible método, consistiría en desarrollar la expresión (2.24) en serie de potencias y considerar algún orden de aproximación para obtener un polinomio. Los coeficientes de este polinomio dependerían de a y b. Haciendo un ajuste de los datos experimentales al polinomio por un método de mínimos cuadrados, podrían obtenerse los coeficientes del desarrollo y, de ellos, los valores representativos de a y b.

4.3.3 Procedimiento experimental.

De acuerdo con la teoria, el procedimiento experimental en este caso es muy simple. Una vez alineada la superficie lo mejor posible, con la condición de que el haz pase por el eje de giro y que el centro de curvatura de la superficie esté lo más cercanamente posible al mismo eje, se procede a medir el correspondiente ángulo de deflexión para diferentes puntos de la superficie, descritos por diferente ángulo polar θ. Se gira la superficie con la platina giratoria, con el método del prisma medimos el ángulo de deflexión, como se explicó en la sección 3.1c).

Los datos se procesaron con un programa de computadora hecho para ese fin, siguiendo la siguiente secuencia: tomando en cuenta que lo que realmente se mide es la deflexión transversal con ayuda de la ecuación (3.9), se determina la deflexión angular. Esta última cantidad es la que se utiliza para evaluar el perfil de la superficie por un método de integración numérico. Se calcula la exponencial de la integral realizada (para cada punto de incidencia; i.e., para cada ángulo θ). En este momento, no se tiene todavía el valor del radio, sino la proporción del radio en cada punto respecto del valor inicial $r(\theta_o)$; i.e., $r(\theta)/r(\theta_o)$. Estos son los valores que se utilizan para ajustar diferentes circunferencias a cada conjunto de tres datos. Con ello se obtiene el valor del descentramiento (a,b), así como el radio proporcional de la circunferencia que mejor se ajusta al conjunto de datos (con el criterio del promedio). Con ello se obtienen las diferencias, también proporcionales de los errores de la superficie. Se multiplica el resultado por el factor de proporcionalidad correcto, que es muy cercano a r_o

(para valores pequeños de a y b), y se obtienen los valores reales de la deformación de la superficie respecto de una esfera de radio r_o y que mejor se ajusta a la esfera deformada.

4.3.4 Resultados.

Antes de proceder experimentalmente se hicieron simulaciones numéricas para probar el funcionamiento de la teoría y se hicieron programas computacionales para el tratamiento de datos.

Para probar experimentalmente el método se realizó la prueba de un espejo esférico que tenía un radio de curvatura de 41.6 mm, un diámetro de 50 mm, y estaba aluminizado. Al momento de probarlo se desconocía la calidad de la superficie aunque visualmente no se apreciaban defectos importantes. De hecho esta fué la razón por la que el método se mejoró bastante; las primeras pruebas no permitían detectar variaciones de la esfericidad del espejo.

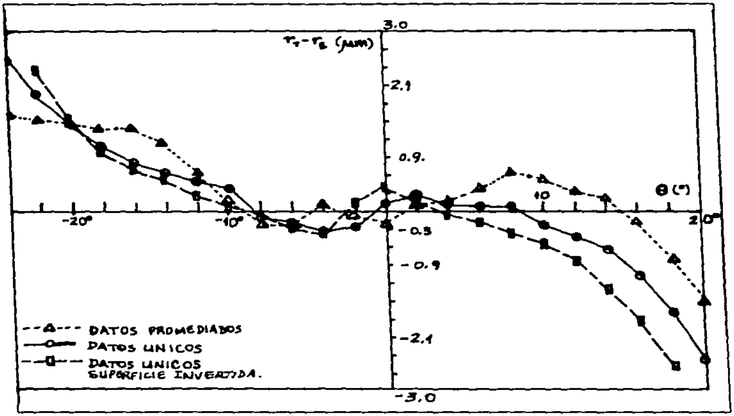


Figura 4.7 Gráficas de la variación del radio de una superficie esférica real respecto de una ideal.

Los primeros resultados se muestran en la figura 4.7. La curva (a) corresponde a resultados obtenidos después de efectuar el promedio de 10 mediciones en cada punto (cada valor de θ). La curva (b) corresponde a otra serie de resultados, pero con una única medición por cada punto. La máxima diferencia entre ambas curvas es de alrededor de 0.6 μm. Si consideramos que los datos promediados se acercan más al valor real del estado de la superficie, entonces la desviación de los datos simples respecto a los datos promediados, los podemos considerar como la inexactitud de las mediciones simples.

En cuanto a la precisión de las mediciones, el hecho de realizar una integración numérica, en cada paso de integración el error se incrementa, por lo que el error propagado en el resultado final de los radios es muy pequeño en los primeros puntos, y aumenta bastante hacia los últimos final. A continuación calculamos el error propagado por las operaciones involucradas en el cálculo del radio polar.

4.3.5 Cálculo del error propagado.

Utilizando la ecuación (3.9) podemos calcular el error propagado en calcular la deflexión angular de la lineal como sigue:

$$\delta\phi = \left|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right| \delta x + \left|\frac{\partial\phi}{\partial f}\right| \delta f \tag{4.25}$$

$$= \frac{f}{f^2 + x^2}\,\delta x + \frac{|x|}{f^2 + x^2}\,\delta f .$$

Tomando en cuenta que, en general, $f \gg x$, podemos hacer la siguiente aproximación

$$\delta\phi = \frac{\delta x}{f} + \frac{|x|}{f^2}\,\delta f. \tag{4.26}$$

La deflexión angular, x, dependiendo del decentramiento de la superficie así como de su calidad, puede variar de sólo algunas micras, a varías centenas de micras. Con el fin de estimar el error propagado en ϕ, consideremos como valor máximo $x_{max} = 0.5$ mm. Supongamos, además, que este valor lo podemos determinar con una precisión de $\delta x = 1\ \mu$m. Usando una lente colectora de f = 250 mm, y suponiendo un error en su valor de $\delta f = 5$ mm, tenemos entonces que el error propagado en ϕ depende principalmente de δx, alcanzando un valor máximo de $\delta\phi_{max} \cong 4\times10^{-6}$, siendo el valor de máximo de $\phi \cong 2\times10^{-3}$.

Con esos resultados vamos a calcular el error propagado durante el proceso de evaluar la integral en la ecuación (2.8) y su efecto sobre el resultado final de r. Usando la aproximación por trapezoides a la integral mencionada y, como dijimos antes, $\theta_N=0$, tenemos que

$$r(\theta) = r(\theta_1)\ exp\left\{\sum_{i=1}^{N}[tan\ (\phi_i/2) + tan\ (\phi_{i+1}/2)]\right\}\alpha/2 \tag{4.27}$$

donde θ_1 es el límite inferior de la integral, α es el incremento de θ en cada medición ($\alpha \cong d\theta$), y N es el número de datos ($\phi_{N+1}=0$). De manera que

$$\delta r = r(\theta)\left\{\sum_{i=1}^{N}[sec^2(\phi_i/2) + sec^2(\phi_{i+1}/2)]\ \delta\phi_i\right\}\alpha/4 \tag{4.28}$$

$$+ \ r(\theta)\left\{\sum_{i=1}^{N}[tan\ (\phi_i/2) + tan\ (\phi_{i+1}/2)]\right\}\delta\alpha/2 + \frac{r(\theta)}{r(\theta_1)}\,\delta r_1.$$

Para estimar el valor máximo que puede tomar el error en r, hagamos las siguientes consideraciones: como $\phi_{max} \cong 10^{-3}$ radianes, tenemos que $sec^2(\phi_i/2) \cong sec^2(\phi_{i+1}/2) \cong 1$; además, $tan(\phi_i/2) \cong tan(\phi_{i+1}/2) \le \phi_{max}/2$. De esta manera, el primer término de (4.28), involucra el factor $N\alpha = \theta-\theta_1 = \Delta\theta$ (la variación total de θ), quedando entonces,

$$\delta r \cong r\ [\Delta\theta\ \delta\phi/2 + N\ \phi_{max}\delta\alpha] + \frac{r}{r_1}\delta r_1. \tag{4.29}$$

Si consideramos los siguientes valores, N=10, $\delta\alpha$=2x10^{-5}, r = 50 mm, δr_1= 0.1 mm, y $\Delta\theta_{max}$= 0.5 radianes, el error propagado debido al primer término de (4.29) será menor a 10^{-4} mm. La influencia del segundo término depende de con cuánta precisión se mida el radio inicial r_1; $r/r_1 \cong 1$, por lo que aparentemente es muy importante medir r_1 con un error menor a 10^{-4}mm, también.

Realmente el asunto no es tan grave si en vez de considerar el error en r, lo evaluamos en $\Delta r = r-R$, donde $R = R(\theta)$ es el radio de la superficie esférica ideal con la que se compara r [$=r(\theta)$]. En ese caso, tenemos que si

$$r = r_1 e_E, \tag{4.30}$$

donde e_E es La exponencial de la sumatoria en (4.27). Y si además escribimos una expresión similar para R, es decir,

$$R = r_1 e_T, \tag{4.31}$$

tenemos que

$$\Delta r = r_1(e_E - e_T) = r_1\ \Delta e. \tag{4.32}$$

Diferenciando obtenemos

$$\delta(\Delta r) = r_1\ \delta(e_E - e_T) + \delta r_1\ \Delta e. \tag{4.33}$$

En este caso el error en r_1 se multiplica por Δe, que es del orden de 5x10^{-5}, implicando que el segundo término en (4.33) es aproximadamente 5 δr_1x10^{-5}. Así, entonces, será suficiente determinar r_1 con una precisión de ¡diez milímetros! para garantizar que el error propagado es menor a 10^{-4}mm en las variaciones de esfericidad de la superficie probada.

En nuestro caso no contábamos con las condiciones experimentales óptimas, sin embargo, recordemos que el cálculo anterior es una cota superior, de manera que aún así obtuvimos que el error propagado es en el peor de los casos menor a 10 μm.

Por otro lado, la evaluación del descentramiento resultó ser excelente, pues después de una primera prueba se evaluó el descentramiento, siendo de

$$a = -0.200 \text{ mm}$$

y

$$b = 0.017 \text{ mm}.$$

Se corrigió este error de descentramiento directamente sobre la montura de la superficie y las desviaciones del haz disminuyeron apreciablemente. Una segunda evaluación de a y b, indicó una franca mejoría en a, mientras que para b se tuvo un leve aumento (a=0.016 mm, b=0.020 mm).

Finalmente para evaluar la reproducibilidad de las mediciones, se giró la superficie 180° alrededor de su eje óptico. De esta manera se probaba el mismo perfil con todo el arreglo idéntico, pero la superficie invertida. Para nuestra sorpresa, que esperábamos una gráfica invertida también, obtuvimos casi la misma gráfica (ver figura 4.7). Es decir, la mayor parte de las variaciones no se debían a deformaciones superficiales, sino a otro tipo de errores sistemáticos de la prueba (sistemáticos porque lo único que se había cambiado era la superficie, todo lo demás permanecía invariante). Pensamos en la posibilidad de separar los errores superficiales de los sistemáticos como sigue. Si los errores son aditivos, el error total, Δr, lo podemos escribir como la suma del error superficial, Δs, más el error sistemático, Δd, es decir

$$\Delta r = \Delta s + \Delta d \tag{4.25}$$

Al girar la superficie 180° podemos escribir una ecuación similar

$$\Delta r' = \Delta s' + \Delta d' \tag{4.26}$$

Como Δd son errores sistemáticos, $\Delta d = \Delta d'$; mientras que, como el perfil de la superficie sufre una inversión, $\Delta s = -\Delta s'$. De manera que sumando y restando Δr y $\Delta r'$ podemos separar al error superficial del sistemático como sigue

$$\Delta s = \frac{1}{2}[\Delta r - \Delta r'] \tag{4.27}$$

y

$$\Delta d = \frac{1}{2}[\Delta r + \Delta r'] \tag{4.28}$$

Se evaluaron los errores superficiales y sistemáticos para dos perfiles diferentes, resultando que los sistemáticos eran prácticamente idénticos (la variación máxima fué de 0.3 μm), mientras que los superficiales eran completamente diferentes. Esto era de esperarse pues los errores sistemáticos no deben cambiar al cambiar de perfil. Los errores superficiales son, en general, diferentes para cada perfil de la superficie (ver figuras 4.8 y 4.9).

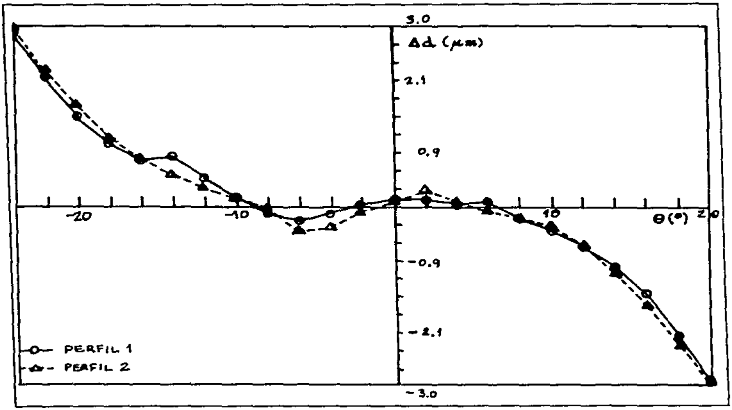


Figura 4.8 Comparación de los errores sistemáticos Δd para dos perfiles de la superficie probada.

Aparte de los resultados cuantitativos que en sí son excelentes, cualitativamente se podía observar durante las mediciones lo sensible de la prueba. Cuando en el laboratorio había mucho movimiento era difícil realizar mediciones pues la aguja del medidor de potencia fluctuaba mucho. Además durante la primera hora y media de encendido del láser las medidas no eran confiables, debido a que durante ése tiempo la dirección del haz del láser varía continuamente. Es nuestra creencia que podemos obtener más precisión con un poco más de esfuerzo.

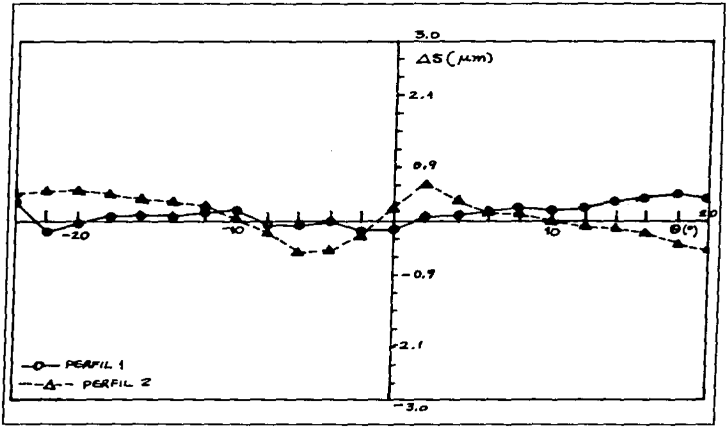


Figura 4.9 Comparación de los errores superficiales Δs para dos perfiles de la superficie probada.

4.4 Conclusiones.

Los resultados anteriores muestran varias cosas. La primera de ellas, bastante obvia, se ha mostrado la factibilidad de realizar la prueba de superficies esféricas, cónicas y asféricas. Falta instrumentar la posibilidad de realizar un muestreo completo de la superficies para evaluarlas por completo, no sólo un perfil. La segunda se refiere al hecho de haber mejorardo la precisión de las mediciones. Respecto a los resultados experimentales con las cónicas, la precisión se ha aumentado con las esféricas al menos diez veces (la incertidumbre es a lo más un décimo de lo obtenido con las cónicas).

CONCLUSIONES.

En este trabajo hemos mostrado que es posible determinar los errores de fabricación (de forma) de superficies ópticas, tanto esféricas como asféricas, a partir de mediciones de la deflexión que sufre un haz de láser reflejado en la superficie de prueba. Hemos mostrado, también, que se pueden determinar otro tipo de propiedades de las superficies, tales como su radio de curvatura, su constante de conicidad y sus coeficientes de deformación, además de algunos errores de referencia, tales como descentramiento, cuña y giro de lentes cilíndricas y tóricas (ver apéndice C).

A diferencia de otros autores, nuestros métodos no están limitados a la prueba de superficies con pequeñas variaciones de forma respecto de un plano. Por el contrario, nuestros métodos son adecuados tanto para superficies lentas como superficies rápidas.

En cada caso hemos deducido las ecuaciones necesarias que relacionan la deflexión angular o transversal con el perfil de la superficie y hemos especificado el tipo de exploración que se requiere para realizar las mediciones.

Por otro lado paulatinamente hemos mejorado el método de detección; se ha evolucionado de un método visual a métodos con detectores de luz no sensibles a posición. Esto ha permitido mejorar la precisión de las pruebas llegando, en el mejor de los casos, a sólo algunas micras. Si bien, tales precisiones aún no son comparativas a otro tipo de pruebas convencionales, otros trabajos como el de Ennos y Virdee (1982) y (1983) muestran la factibilidad de llegar al nivel de las otras pruebas, si no de superarlas.

Las principales cualidades de los métodos aquí propuestos son:

a) **Versatilidad.** En principio, con un sólo dispositivo experimental, se pueden llevar al cabo la prueba superficies de diferentes formas: planos, esferas, cónicas, asféricas, cilíndricas, y tóricas.

Con un mismo dispositivo se pueden probar tanto superficies cóncavas como **¡convexas!**

Dentro de ciertos límites, con un mismo dispositivo se pueden probar superficies de diferentes tamaños, diferentes radios de curvatura, diferentes constantes de conicidad y diferentes coeficientes de deformación.

Se pueden medir diversos parámetros de una superficie.

b) **Prueba cuantitativa.** La prueba proporciona directamente datos cuantitativos sobre la superficie.

c) **Prueba no destructiva.** No se trabaja directamente con un objeto sobre la superficie (como con un esferómetro o un palpador mecánicos), por lo que la prueba no presenta el riesgo de dañar la superficie.

d) **Intervalo de aplicación.** Las pruebas deflectométricas presentan un gran intervalo de aplicación: pueden medir desde algunos milímetros hasta algunas fracciones de micra [Ennos y Virdee (1982) y (1983)] en variaciones de forma.

Lo anterior permite afirmar que la Deflectometría Láser es una atractiva alternativa a considerar en el campo de las pruebas ópticas. Sin embargo, como en todo campo de investigación aún hay problemas que resolver para mejorar los resultados o ampliar su aplicabilidad[1]. Entre ellos podemos mencionar los siguientes:

1. Prueba de otras superficies. De dimensiones extremas como por ejemplo, en las superficies de grandes telescopios astronómicos y de pequeñas lentes como las de algunos objetivos de microscopios.

De diferentes formas o características; por ejemplo, superficies fuera de eje, conos, CPC's, etc.

Superficies diferentes a las ópticas; superficies metálicas, maquinadas en vez de pulidas, superficies naturales como la de los líquidos o la córnea del ojo humano, etc.

Lo anterior conduce de manera natural a las preguntas:

¿Cuáles son los límites de aplicabilidad de estos métodos? ¿son limitaciones fundamentales o son de naturaleza técnica?

2. Teorías alternativas. Es claro que nuestra formulación teórica tiene limitaciones. Por ejemplo, en general, una superficie real no tiene porqué estar correctamente representada por una aproximación polinómica de sólo términos pares. Por otro lado, puede suceder que se requiera una aproximación mejor a la proporcionada por un polinomio de grado 10.

Además, las superficies asféricas lentas de revolución se pueden probar muy bien con el método para las esferas, sin embargo, aún no hemos deducido las ecuaciones que nos permitan calcular, dentro de tal esquema, las desviaciones de la superficie asférica real respecto de la forma ideal.

Finalmente, al enfrentar otras superficies ¿siguen siendo aplicables las teorías aquí desarrolladas? ¿es necesario elaborar nuevas formulaciones? ¿Existen mejores teorías aún para las superficies convencionales?

3. Otros Métodos de Exploración. Esto se refiere tanto al tipo de movimientos que se propone realizar como a los dispositivos que los producen.

Cuando se pretenda probar otras superficies conviene mantener los ángulos de deflexión muy pequeños o nulos, ¿cuál es la mejor combinación de movimientos que ayudan a ésto?

Existen otros mecanismos para realizar la exploración con un haz de láser, tales como los espejos oscilantes, los polígonos giratorios, los moduladores acusto-ópticos, etc. ¿Cuáles y cuándo conviene utilizarlos?

4. Problemas con la Detección. En todo nuestro trabajo hemos estado suponiendo que al reflejarse el haz en la superficie de prueba, el haz continúa siendo gaussiano, o al menos simétrico. Es bien sabido que la aberración de coma puede en algunos casos alterar significativamente esta propiedad. Es necesario tener una correcta evaluación de este problema para saber en qué casos no es aplicable nuestro método de detección.

5. Mejoramiento de la Precisión. Si se pretende que las pruebas deflectométricas compitan con las demás (particularmente con las interferométricas), es imperativo mejorar la precisión de las mediciones. Hace dos años nos impusimos como meta alcanzar una micra de error máximo; en

[1] Recordemos, solamente, que otros métodos llevan cerca de un siglo desde que se propusieron por primera vez; otros llevan varios decenios, mientras que las pruebas deflectométricas no llevan ni veinte años.

año y medio llegamos a 3 micras para superficies esféricas. En un año debemos llegar a la región de las décimas de micra.

6. Disminución en el Tiempo de Evaluación. Hasta ahora todas nuestras pruebas han sido manuales, sin embargo a pesar de la sencillez, para mejorar la precisión las pruebas se hicieron más tardadas. El trabajo actual se encamina en lograr probar una superficie completa en unos cuantos minutos (tal vez alrededor de una hora como máximo). Aún así existen superficies susceptibles de ser probadas que tienen movimientos lentos pero suficientes para evitar que la prueba se pueda realizar aún en "algunos segundos". El ejemplo más cercano de ello es la córnea del ojo; el ojo tiene pequeños (imperceptibles) movimientos involuntarios, de manera que para determinar la forma de la córnea, las mediciones deben realizarse en alrededor de ¡un segundo! Esto es todo un reto.

BIBLIOGRAFIA

Arfken, G., Mathematical Methods for Physicists, 2a. Ed., Academic Press, New York, 1985, pps. 316-317.

Burleigh, Micropositioning Systems, New York (1986).

Cordero, A., Cornejo, A., Harris, O., y Pedraza, J., "Análisis Teórico Sobre Parámetros Experimentales y Técnicas Empleadas en el Centrado de Superficies Opticas", Rev. Mex. Fis.,27, 501 (1981).

Cardona-Núñez, O., Cornejo-Rodriguez, A., Diaz-Uribe, R., Cordero-Dávila, A. y Pedraza-Contreras, J., "A Comparison Between the Conic and Toroid that Best Fits an off-axis Conic Section", Appl. Opt., 26, 4832 (1987).

Cornejo-Rodriguez, C. y Cordero-Dávila, A., "Measurement of radii of curvature of convex and concave surfaces using a nodal bench and He-Ne laser', Appl. Opt., 19, 1743 (1980).

Cornejo-Rodriguez, A. y Malacara-Hernández, D., "Caustic Coordinates in Platzeck-Gaviola Test for Conic Mirrors", Appl. Opt., 17, 18 (1978).

Cornejo-Rodriguez, A., Pedraza-Contreras, J., Cordero-Dávila, A., Cobos-Dueñas, F., "Measurement of the refractive-index of a lens for one wavelength (6328 Å)", Appl. Opt., 20, 2975 (1981).

Diang-Qiang Su y Ya-Nan Wang, "Some ideas about representations of aspheric optical surfaces", Appl. Opt., 24, 323 (1985).

Diaz-Uribe, R., Cornejo-Rodriguez, A., Pedraza-Contreras, J., Cardona-Núñez, O. y Cordero-Dávila, A., "Profile Measurement of a Conic Surface, Using a He-Ne Laser and a Nodal Bench", Appl. Opt., 24, 2612 (1985).

Diaz-Uribe, R., Pedraza-Contreras, J., Cardona-Núñez, O. y Cordero-Dávila, A., Cornejo-Rodriguez, A., "Cylindrical lenses: testing and radius of curvature measurement", Appl. Opt., 25, 1707 (1986).

Diaz-Uribe, R. y Cornejo-Rodriguez, A., "Conic constant and paraxial radius of curvature measurements for conic surfaces", Appl. Opt., 25, 3731 (1986).

Diaz, R., Pastrana, R. y Cornejo, A., "Profile Measurement of Aspheric Surfaces by Laser Beam Reflection", Proceedings of the SPIE, Vol. 813, pps. 355-356 (1987).

Dil, G., Mesman, W., y Driessen, J.C., "High-precision Measurement of Aspheric Surfaces", SPIE, Vol. 235, Aspheric Optics: Design, Manufacturing, Testing (Sira). pps. 85-90 (1980).

Dwight, H. B., Tables of Integrals and Other Mathematical Data, MacMillan, 4a. ed., New York, 1961. pp. 323.

Ennos, A.E. y Virdee, M.S., "High Accuracy Profile Measurement of Quasi-conical Mirror Surfaces by Laser Autocollimation", Precision Engineering, 4, 5 (1982).

Ennos, A.E. y Virdee, M.S., "Precision Measurement of Surface Form by Laser Autocollimation", SPIE, Vol. 398, Industrial Applications of Laser Technology, 252 (1983).

Evans, J.D. "Method for Approximating the Radius of Curvature of Small Concave Spherical Mirrors Using a He-Ne Laser". Appl. Opt., 10, 995 (1971).

Evans, J.D. "Analysis to: Method for Approximating the Radius of Curvature of Small Concave Spherical Mirrors Using a He-Ne Laser". Appl. Opt., 11, 945 (1972).

Hausler, G. y Schneider, G. "Testing Optics by Experimental Ray Tracing with a Lateral Effect Photodiode". Appl. Opt., 27, 5160 (1988).

Johnson, H.F., y Wolpert, H.D., "Cylindrical Optics: How to Test Them", Photonics Spectra, 18, 55 (1984).

1

Kogelnik, H. y Li, T. "Laser Beams and Resonators". Appl. Opt., 5, 1550 (1966).

Kowalski, K.V., Milner Jr., T.E. y Stanich, M.J., "Beam Deflection as a Method for Testing Optical Components", Appl. Opt., 25, 3735 (1986).

Lehmann, Ch.H., Geometría Analítica, Limusa, 10a. reimpresión, México (1986), pp. 416.

Longhurst, R.S., Geometrical and Physical Optics, Wiley, New York, 1964, pp. 68.

Lakhotskii, T.V., Skolozdra, S.V., Solyanyk, Z.V. y Timoshchuk, E.Z., "Apparatus for Determining the Aberrations of Paraboloidal Lighthouse Lamp Reflectors", traducción del Izmeritel'naya Tekhnika, No. 11, pp. 37-38, noviembre de 1984.

Malacara, D., Optical Shop Testing, John Wiley and Sons, E.U.A., 1978.

Newport Corporation. "The Newport Catalog". No. 100, E. U. A., 1987, pp. K-9.

Pedraza-Contreras, J., Cornejo-Rodriguez, A., y Cordero-Dávila, A., "Formulas for setting the diamond tool in the precision machining of conic surfaces", Appl. Opt., 20, 2882 (1981).

Press, W.H., Flannery, B.P.,Tenkolsky, S., y Vetterling, W.T., Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing", Cambridge University Press, New York (1988).

Rodgers, J. M., "Non Standard Representations of Aspheric Surfaces in a Telescope Design", Appl. Opt. 23, 520 (1984).

Rosete, M. y Diaz, R., "Medición de Errores de una Superficie Esférica por Reflexión de un Haz de Láser", Suplemento del Bol. Soc. Mex. Fis., Vol. 2, mayo-agosto de 1988, pp.8.

Rosete Aguilar, M., Prueba de Superficies Esféricas por Reflexión de un Haz de Láser, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, U.N.A.M., mayo de 1989.

Rosete-Aguilar, M. y Diaz-Uribe, R., (1989). "Spherical Surface Testing by Laser Beam Deflection', en preparación.

Rosete, M., Diaz, R., Olguin, G., y Ortega, R., "Determinación de la Posición de un Haz Gaussiano con un Fotodetector y un Prisma", XXXII Congreso Nacional de Fisica, S.M.F., León ,Gto., octubre de 1989.

Shannon, R. R., "Aspheric Surfaces", in Applied Optics and Optical Engineering, Vol. VIII, J. Wyant and R. Shannon, eds.; Academic Press, Londres, 1980, capitulo 3.

Slyusarev, G. G., Aberration and Optical Design Theory, Adam Hilger, 2a. ed., Bristol, Gran Bretaña, 1984; capitulo 6.

Smolka, F.M. y Caudell, T.P., "Surface Profile Measurement and angular Deflection Monitoring Using a Scanning Laser Beam: a Non-contact Method", Appl. Opt., 17, 3284 (1978).

Welford, W. T. y Winston R., The Optics of Non-imaging Concentrators: Light and Solar Energy, Academic Press, New York, 1978.

APENDICE A

SOBRETIROS DE LOS TRABAJOS PUBLICADOS SOBRE EL TEMA:

Díaz-Uribe, R., *et. al.* (1985).

Díaz-Uribe, R., *et. al.* (1986).

Díaz-Uribe, R. y Cornejo-Rodríguez, A., (1986).

Cardona-Núñez, O., *et. al.*, (1987).

Díaz-Uribe, R., *et. al.* (1987).

Profile measurement of a conic surface, using a He–Ne laser and a nodal bench

R. Diaz-Uribe, A. Cornejo-Rodriguez, J. Pedraza-Contreras, O. Cardona-Nunez, and A. Cordero-Davila

A method of measuring the profile along one diameter of a conic surface is presented. Using some well-known formulas for the conic sections, useful mathematical relations are derived that, together with a simple experimental setup can be used for comparing theoretical and real values of the sagitta of the surface.

I. Introduction

In the last few years, the use of aspherical surfaces as optical components has been increasing.[1] The methods of producing them are of a special kind; and testing these surfaces is usually an extension of the conventional methods[2-3] of testing spherical surfaces, some of which are cumbersome. Therefore, there is a need for new methods to produce and test such surfaces. Here we report a method of measuring the profile of a convex or a concave conic surface along one diameter, using a He–Ne laser and a nodal bench, common equipment in many optical laboratories. Also we describe the theory involved in this method as well as the setup and procedure for using it together with some experimental results.

II. Theory

A. Basic Formulas

The sagitta z of a conic surface of revolution can be written in the form[4]

$$z = \frac{cs^2}{1 + [1 - (k+1)c^2s^2]^{1/2}}, \tag{1}$$

where c is the curvature for the vertex of the surface; $k = -e^2$ is the conic constant of the surface, where e is the eccentricity; and $s^2 = x^2 + y^2$ is the distance of some point on the surface from the axis of revolution. With reference to Fig. 1, the longitudinal aberration X for the normals for the different zones of the surface is given by[5]

$$X = -kz. \tag{2}$$

The angle θ between the axis of revolution and the normals to the surface is equal to[6]

$$\tan\theta = \frac{s}{r - z(k+1)}, \tag{3}$$

where $r = 1/c$ is the paraxial radius of curvature (prc). The nonparaxial radius of curvature R for the different zones can be written as[5]

$$R = \frac{(1 - kc^2s^2)^{3/2}}{c}; \tag{4}$$

therefore, for a conic there are five variables to be considered over the surface: z, s, X, θ, and R; there are four equations relating them and two constant parameters k and r. This implies that for given parameters there is only one independent variable. However, for comparing theoretical and experimental values of any of the variables in the experiment, it is necessary to measure two of them.

B. Procedure

Assuming that we know or are able to measure the parameters k and r, the problem of measuring the profile of a conic can be stated as follows: measure any two of the variables z, s, X, θ, and R and use Eqs. (1)–(4) to find the rest of them.

Some authors measure directly z and s[7]; others determine the angles of the tangents to the surface and the diameter ($2s$) for the different zones.[8] These two methods, however, have the disadvantage that one must work directly on the surface. To get around this problem, another possibility is to check the deviations of the normals to the surface and the angular position of the tested region with respect to the optical axis. For this case, the optical setup is complicated, and one needs at least five well-corrected lenses and four parallel optical plates; some of them are semitransparent.[9] To overcome some of these problems, we propose a method of measuring directly the longitudinal aberration X and the corresponding angular position θ. This implies that we need to measure one distance between the paraxial center of curvature and the intersection of the normal to any zone of the surface with the optical axis and one angle between the normal to the surface and the optical axis. With Eqs. (2) and (3), z and s can be found, respectively. If one still wants to know the nonparaxial radius of curvature R, it can be obtained by means of Eq. (4).

R. Diaz-Uribe and A. Cordero-Davila are with Universidad Autonoma de Puebla, Esc. Cien.Fis.Matem., A. P. 1152, Puebla, Pue. 72000 Mexico; the other authors are with INAOE, A. P. 216 Puebla, Pue. 72000 Mexico.

Received 1 March 1985.
0003-6935/85/162612-04$02.00/0.

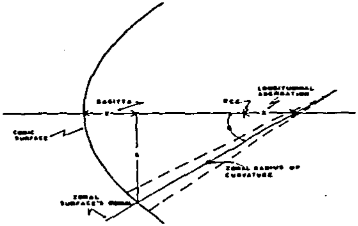


Fig. 1. Variables z, s, r, x, and θ for a conic surface are shown; pcc is the paraxial center of curvature.

Once the experimental values of z for the surface under test have been determined, one can compare them with the theoretical values and find their differences. To get some idea of the surface, for example, where the surface is high or low, it is useful to plot both theoretical and experimental values of z vs s or Δz vs s (see Fig. 6).

C. Error Analysis

In this section we shall calculate the error introduced in the calculated variables z and s from the experimental data for r, θ, and X.

Since z is related to X by Eq. (2), one gets

$$\delta z = \frac{1}{|k|}\,\delta X, \tag{5}$$

where δz is the error for the sagitta. To obtain the smallest possible error in the determination of z, one must measure X as precisely as one can. For a sphere Eq. (5) is not applicable since $X = 0$. For a paraboloid, $k = -1$, the error in the sagitta equals the error of the longitudinal aberration; for an hyperboloid, $k < -1$, the first error is lower than the second, and for a prolate ellipsoid $0 > k > -1$, the converse is true; thus δz becomes bigger than δX. Then, as we shall see, for the device we used $\delta X = 0.01$ mm, so $\delta z = 0.01\ \mathrm{mm}/|k|$, and, for a paraboloid, $\delta z = 0.01$ mm. From this we conclude that δz can be around this value for most of the conics.

On the other hand, to find the error for s, we consider only the case of a parabola. For such a situation, from Eq. (3), θ does not depend on X, and

$$s = r\tan\theta. \tag{6}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}\delta s &= \left|\frac{\partial s}{\partial r}\right|\delta r + \left|\frac{\partial s}{\partial \theta}\right|\delta\theta \\ &= \tan\theta\,\delta r + r\sec^2\theta\,\delta\theta;\end{aligned} \tag{7}$$

thus, for the special case, $\theta = 45°$, which is an upper limit for θ:

$$\delta s = \delta r + 2r\,\delta\theta. \tag{8}$$

Usually r is of the order of some centimeters, and δr is around a hundredth of a millimeter; so the second term of Eq. (8) is the dominant one (especially when one uses the design value for r, then $\delta r = 0$); therefore, the error in measuring θ is small. For example, if one has an uncertainty of 2 min of arc for θ assuming $r = 50$ mm, $2r\delta\theta = 0.04$ mm, which is four times greater than δr.

III. Experimental Procedure

With the previous formulation, in what follows we explain how we measured the values for the paraxial radius of curvature r and for each X and θ corresponding to the different zones of a surface. To find the value of r it is necessary, first, to locate the vertex and the paraxial center of curvature (pcc). The position of the vertex is obtained by the technique described by Longhurst[10]; it seeks the same reflection pattern coming from the surface, with or without rotation of the surface around a vertical axis on the vertex. When this happens, the vertex coincides with the rotation axis of the nodal bench [see Fig. 2(a)]. To find the position of the pcc, we look for a stationary spot of light on the screen when the surface is rotated by a small angle. When this situation occurs,[11] the pcc of the surface coincides with the rotation axis of the nodal bench [see Fig. 2(b)], because the pcc coincides with the nodal point of the surface. Therefore, the paraxial radius of curvature can be found by measuring the distance between the positions for the vertex and the pcc.

Once the paraxial center of curvature is known from the pcc position, several values of θ and its corresponding values of X are determined. First, the surface is rotated by a certain angle θ; when this is done, the reflected beam from the surface is shifted laterally from the center of the screen [see Fig. 3(a)]. To get normal incidence on the surface, which implies a corresponding value for X for the rotation θ, the surface is displaced slowly and smoothly along the optical axis until the reflected beam is again centered on the observing screen. When these situations are observed, corresponding values for each X and θ are measured; Fig. 3(b) shows this case. An initial value of X can be set, and the corresponding value of θ can be found. With the experimental values for r, θ, and X, the values for z and s can be calculated using Eqs. (2) and (3).

The setup for the method is shown in Fig. 4. It consists of a goniometric table for measuring θ and a support with a micrometric screw for measuring X. With this equipment we could measure angles and distances with a precision of 2 min of arc and 0.01 mm, respectively. For a better positioning of the reflected patterns from the surface, on the observing screen, we found it best to use the diffraction pattern produced by a hair placed on the laser beam path (see Fig. 5). A commercial nodal bench can also be used replacing the conventional light source by a laser and the observing screen.

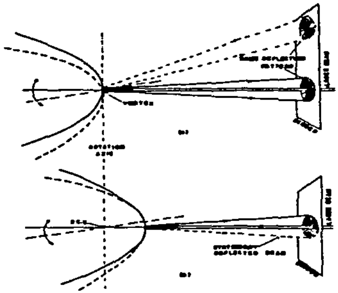


Fig. 2. Value of the prc is calculated by the difference between positions (a) and (b). (a) To find the vertex, the surface is rotated until the reflection pattern does not change. (b) To find the prc, the surface is rotated by a small angle until the reflected beam remains stationary.

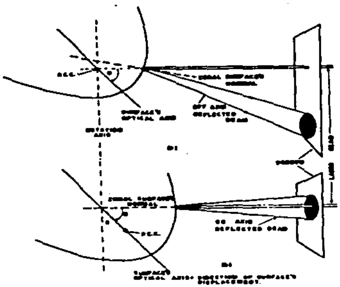


Fig. 3. Rotation and longitudinal displacement to obtain normal nonparaxial incidence on the surface. (a) When the surface is rotated by an angle θ, the reflected beam is off-axis; this means that incident beam is not normal. (b) For the same angle θ as in (a), the surface is displaced along the surface's optical axis until the reflected beam is on-axis again.

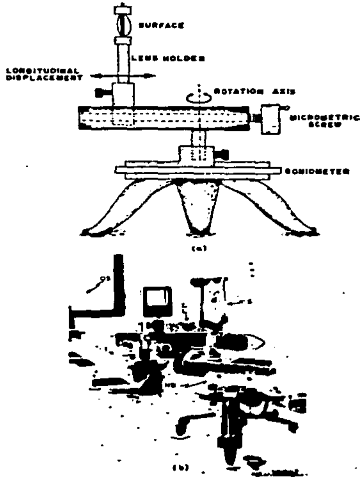


Fig. 4. (a) Diagram of the nodal bench used for measurements of the profile. (b) Actual experimental setup showing the He–Ne laser L; observing screen OS; nodal bench NB; surface under measurement S; and hair support that produces a reference diffraction pattern.

IV. Experimental Results

In Fig. 6, we show a plot of the experimental z_e and the theoretical data for z and s obtained for a Baush & Lomb 100-mm diam lens (Cinephor) that has an assumed value of $k = -1$; the measured value of r is equal to 44.93 ± 0.01 mm. The dotted curve shows the magnified differences between experimental and theoretical sagittas. The errors in z and s for this case are within 10 and 40 μm, respectively.

V. Conclusions

In this work we presented a method of measuring the profile of a conic surface along one diameter, for either concave or convex surfaces, which are not necessarily

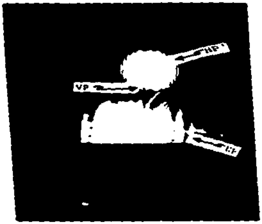


Fig. 5. Typical diffraction patterns produced by the surface vertex *VP* and by the hair placed on the laser beam path *HP* and *HP'*. The first one is used to find the vertex position. The reflected pattern *HP*, coming from the front surface of the lens, under measurement, is used to center such reflection. The pattern *HP''* comes from the back surface of the lens.

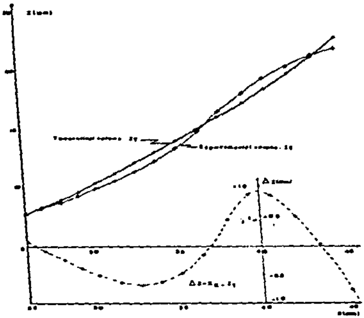


Fig. 6. Experimental results of z and Δz vs s for the conic surface of the Cinephor lens (Bausch & Lomb).

coated for measurement. The simplified formulation and procedures allowed us, with some practice, after centering the system, to make the measurements in a short time.

The setup for this technique is simple to implement and the method can be improved by using electronic positioners and detectors. For the particular conditions of our laboratory, visual measurements were made, and surfaces with prc bigger than 200 mm cannot be measured.

The main limitation of the method is that the surface being measured cannot be smaller than the laser beam diameter. Another constraint is that when the surface is very close to a spherical one ($k \simeq 0$), the method fails.

We are grateful to J. Vázquez, M. E. Machado, and G. Cerón for assistance in the laboratory, with typing, and drawing, respectively.

This work was presented at the ICO-13 meeting,[12] held in Sapporo, Japan, Aug. 1984, as well as at the Twenty-seventh Congreso Nacional, Soc. Mex. Física, held in San Luis Potosí, México, Nov. 1984. We acknowledge financial support from CONACYT and SESICSEP, México, for travel support to both meetings. Two of the authors (R.D.U., A.C.D.) acknowledge support from the Secretaría de Educación Pública (SEP) under grant PRONAES-84-0195.

References

1. W. T. Welford and R. Winston, *The Optics of Nonimaging Concentrators: Light and Solar Energy* (Academic, New York, 1978).
2. A. Cornejo-Rodriguez and D. Malacara-Hernandez, "Ronchi Test of Aspherical Surfaces; Analysis and Accuracy," Appl. Opt. 9, 1897 (1970).
3. D. Malacara-Hernandez and A. Cornejo-Rodriguez, "Null Ronchi Test for Aspherical Surfaces," Appl. Opt. 13, 1778 (1974).
4. O. N. Stavroudis, *The Optics of Rays, Wavefronts, and Caustics* (Academic, New York, 1972), p. 91.
5. A. Cornejo-Rodriguez and D. Malacara-Hernandez, "Caustic Coordinates in Platzeck-Gaviola Test for Conic Mirrors," Appl. Opt. 17, 18 (1978).
6. J. Pedraza-Contreras, A. Cornejo-Rodriguez, and A. Cordero-Davila, "Formulas for Setting the Diamond Tool in the Precision Machining of Conic-Surfaces," Appl. Opt. 20, 2882 (1981).
7. B. A. Chunin and S. Kachkin, "Methods of Controlling the Shape of Aspheric Surfaces," Sec. 1: "Mechanical Methods," in *Generation of Optical Surfaces*, K. J. Kumanin, Ed. [Focal Library, London, 1962 (Russian edition)], Chap. 9, pp. 294–300.
8. T. M. Leushina, "Testing of Aspherical Surfaces on a Goniometer," Sov. J. Opt. Technol. 45, 544 (1978).
9. Ref. 7, Section 3: "Aspherometer," in *Generation of Optical Surfaces*, K. J. Kumanin, Ed. [The Focal Library, London, 1962 (Russian edition)], pp. 312–325.
10. R. S. Longhurst, *Geometrical and Physical Optics* (Wiley, New York, 1964), p. 68.
11. A. Cornejo-Rodriguez and A. Cordero-Davila, "Measurement of Radii of Curvature of Convex and Concave Surfaces Using a Nodal Bench and He–Ne Laser," Appl. Opt. 19, 1743 (1980).
12. A. Cornejo-Rodriguez *et al.*, "Profile Measurement of a Conic Surface Using a Nodal Bench and a He-Ne Laser," in *Conference Digest, Optics in Modern Science Technology*, ICO-13, Sapporo, Japan (1984), p. 402.

Cylindrical lenses: testing and radius of curvature measurement

Rufino Diaz-Uribe, Jesus Pedraza-Contreras, Octavio Cardona-Nunez, Alberto Cordero-Davila, and Alejandro Cornejo-Rodriguez

Using a technique that was previously developed for measuring the radius of curvature of spherical surfaces, an alternative method for testing cylindrical as well as toric lenses is presented. The basic equipment required is a nodal bench and a low power He–Ne laser.

I. Introduction

In a review of the methods for testing cylindrical surfaces,[1] it was found that the techniques used for spherical surfaces can also be employed for testing cylindrical ones.

Considering the principle that for a spherical optical surface the principal points are at the vertex and the nodal points are at the center of curvature,[2] a method was developed in previous work[3] to measure the radius of curvature of such surfaces by means of a nodal bench and a low power He–Ne laser.

More recently, the same method was used to measure the paraxial radius of curvature of a conic along one diameter together with the profile of the surface.[4] In a similar approach, an alternative method is presented for measuring the radius of curvature of cylindrical lenses and some of their defects such as wedges, decenterings, and twists. The same technique can be applied to toric lenses.

II. Test Method

Using this method[3] we describe the main steps for finding the values of the radius of curvature of cylindrical or toric surfaces of lenses. The measurements should be obtained along one circular section for cylindrical surfaces or along two sections for toric surfaces. Figure 1(a) and (b) show the two major steps for testing cylindrical convex surfaces; a similar scheme can be used for concave and toric surfaces. In Fig. 1(a) we show how to find the vertex of the surface. When the lens is rotated about the vertex, the reflected diffraction pattern translates across the screen but its structure remains unchanged. As the rotational axis is brought into coincidence with the center of curvature of the cylinder, the reflected diffraction pattern becomes stationary and is centered on the screen as shown in Fig. 1(b). Measuring the distance between the above described positions of the vertex and the center of curvature, a value of r is obtained for the section of the surface under test. By moving the lens up and down, other sections of the lens can be tested and their radii of curvature measured. With the equipment used in the experiment and with visual observations, a ± 0.05-mm precision was obtained for the r values, but we expect greater accuracy if better devices are used.

When a lens has some decentering,[5] equivalent to a wedge represented by γ in Fig. 2(a), one can observe that the reflected beam is shifted from the center of the screen.

Rotating the lens about the axis indicated in Fig. 2(a) and centering the reflected pattern on the screen for one of the surfaces, say S_1, a surface such as S_2 which is decentered exhibits a shifted reflected pattern. The reflected pattern shifts a distance h from the center of the screen. Then, from Fig. 2(a) we can write that

$$\gamma = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{h}{d}\right) \simeq \frac{1}{2}\cdot\frac{h}{d}, \tag{1}$$

the last approximation takes into account that γ is very small.

To obtain the error in the measured decentering by means of Eq. (1), we can obtain the relative error as

$$\frac{\delta\gamma}{\gamma} = \frac{\delta h}{h} + \frac{\delta d}{d}. \tag{2}$$

Octavio Cardona-Nunez and A. Cornejo-Rodriguez are with INAOE, Apd. P. 216, 72000 Puebla, Mexico; the other authors are with ECFM, UAP, Apdo. Postal 1152, 72000 Puebla, Mexico.

Received 26 August 1985.
0003-6935/86/101707-03$02.00/0.

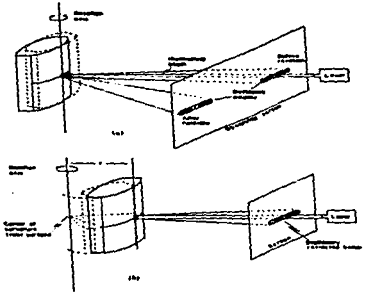


Fig. 1. Two-step procedure for measuring r: (a) finding the vertex position, (b) finding the center of curvature position. Full and broken lines represent the lens without and with rotation, respectively.

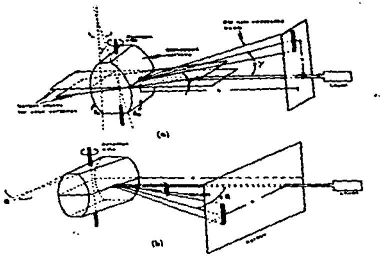


Fig. 2. Measuring defects of a cylindrical lens: (a) decentering of one of the surfaces, (b) presence of a wedge.

Assuming the following values: $d = 500$ mm, $h = 3$ mm, and $\gamma = 1' = 0.3$ mrad, and if $\delta d = 1$ mm and $\delta h = 0.2$ mm, we obtained $\delta\gamma = 0.07' = 0.02$ mrad, which seems an acceptable accuracy. If there is a wedge α in the direction perpendicular to the one shown in Fig. 2(a), a similar calculation can be done. In the latter case the reflected pattern shifts laterally toward the right or left from the center of the screen as shown in Fig. 2(b).

The twist error in a cylindrical lens can be visualized as originated by a rotation between the two surfaces of the lens, around an axis defined by the intersection of an optical plane containing all the normals to the surface at the vertex, and a plane orthogonal to the axis of the cylinder [see Fig. 3(a)]. Figure 3(b) shows how to measure the twist θ of a cylindrical lens. First, we have to align one of the two surfaces of the lens with respect to the direction defined by the laser beam. For a small rotation of the lens around the axis of symmetry of this first surface, the reflected beam will remain stationary. Now if the lens is rotated 180° until the laser is incident on the other lens surface, the reflected beam will deviate from the direction of the incident beam due to the existence of the twist, except for incidence just on the vertex. Then, measuring the deviation of the beam from the center of the screen, one can find the actual value of the twist, θ.

It can be shown that, for a cylindrical surface with twist θ, and rotated an angle ϕ around its center of curvature (the surface is on-axis when $\phi = 90°$), the

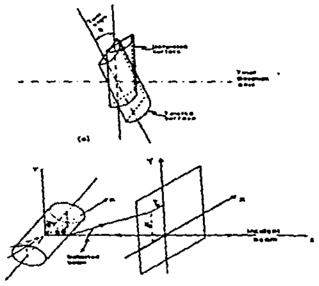


Fig. 3. (a) Diagram showing the effect of twisting a cylindrical surface. (b) When a cylindrical twisted surface is rotated an angle ϕ around the vertical axis Y, the reflected beam is deviated on the screen to points X_0, Y_0.

cylinder's equation in a Cartesian coordinate system [see Fig. 3(b)] is

$$(x \cos\theta \sin\phi + y \sin\theta + z \cos\theta \cos\phi)^2 + (x \cos\phi - z \sin\phi)^2 = a^2 \qquad (3)$$

where a is the radius of curvature of the cylinder. From Eq. (3) one can obtain the inner vector normal to the surface, at point $(0,0,z)$, as

$$n = \frac{z}{a}\,[\sin\phi\cos\phi\sin^2\theta]\,\hat{i} + [\cos\phi\sin\theta\cos\theta]\,\hat{j} + [\cos^2\phi\sin^2\theta - 1]\,\hat{k}. \tag{4}$$

Considering the reflection law in vectorial form, for an incident ray parallel to the z axis, i.e., $\hat{r} = (0,0,-1)$, the reflected ray can be defined by the unit vector

$$\hat{r}' = [2\sin\phi\cos\phi\sin^2\theta]\,\hat{i} + [2\cos\phi\sin\theta\cos\theta]\,\hat{j} + [1 - 2\cos^2\phi\sin^2\theta]\,\hat{k}. \tag{5}$$

This implies that the reflected beam intersects the plane of the screen at $z = a + d$ at points

$$X_0 = 2b\sin\phi\cos\phi\sin^2\theta, \quad \text{and} \quad Y_0 = 2b\cos\phi\sin\theta\cos\theta, \tag{6}$$

where b is almost equal to the distance d between the surface and the screen. For some typical values of d = 500 mm, $\theta = 1°$, $\phi = 80°$, X_0 is negligible—5×10^{-2} mm or less—and Y_0 is of the order of a few millimeters. Hence from Eq. (6) the following equation can be obtained:

$$\theta \approx \frac{Y_0}{2d(\pi - \phi)}, \tag{7}$$

which implies a knowledge of Y_0, d, and ϕ to ascertain the value of θ. To estimate the relative error in θ, due to errors in Y_0, ϕ, and d, the following formula can be derived:

$$\frac{\delta\theta}{\theta} = \frac{\delta Y_0}{Y_0} + \frac{\delta d}{d} + \frac{\delta\phi}{(\pi - \phi)}. \tag{8}$$

Assuming the above-mentioned value for d, θ, and ϕ, from Eq. (6), $Y_0 = 2.5$ mm; therefore, the relative error for θ is ~5% for $\delta d = 2$ mm, $\delta\phi = 2' = 0.6$ mrad, and $\delta Y_0 = 0.1$ mm, and the error for θ increases as smaller angles are measured. Therefore, this method is limited to measuring twist angles as small as 10′. That value depends on the specific lens under test and the sophistication of the experimental setup.

III. Conclusion

A versatile technique has been developed for measuring the radius of curvature of different types of surface (spherical, cylindrical, toric, and conic), either convex or concave. In addition, the method can be classified as noncontact, having the natural advantages of this type of technique. The equipment required is simple in principle, but if better accuracy is needed more sophisticated measuring instruments are necessary. The main limitations for using this experimental scheme are that the beam diameter of the He–Ne restricts the minimum diameter of the lens under test, and that, for a coherent source,[6] there is a certain uncertainty in defining the edge of the diffraction patterns, which limits the accuracy. Typical accuracies are 0.05 mm for the radius of curvature, 0.01 mrad for the wedge and decentering, and ~5% for the twist.

References

1. H. F. Johnson and H. D. Wolpert, "Cylindrical Optics: How to Test Them," Photonics Spectra 18, 55 (Apr. 1984).
2. R. S. Longhurst, *Geometrical and Physical Optics* (Wiley, New York, 1964), p. 68.
3. A. Cornejo-Rodriguez and A. Cordero-Dávila, "Measurement of Radii of Curvature of Convex and Concave Surfaces Using a Nodal Bench and He–Ne Laser," Appl. Opt. 19, 1743 (1980).
4. R. Diaz-Uribe, A. Cornejo-Rodriguez, J. Pedraza-Contreras, O. Cardona-Nunez, and A. Cordero-Davila, "Profile Measurement of a Conic Surface Using He–Ne Laser and a Nodal Bench," Appl. Opt. 24, 2612 (1985); in *Conference Digest, Optics in Modern Science & Technology*, ICO-13, Sapporo, Japan (1984), p. 402.
5. We adopt the definitions given in Ref. 1 for the errors of a cylindrical lens.
6. B. J. Thompson, U. Rochester; private communication (1985).

We acknowledge the support of CONACYT and SESIC-SEP for presenting this paper at the 1985 Annual Meeting of the Optical Society of America. Some of the authors—A. Cordero-Davila, Jesus Pedraza-Contreras, R. Diaz-Uribe—are grateful for the support from SEP under grant PRONAES-84-01-0195. We appreciate the typing of G. Quiroz and M. Olmos and the drawings of G. Ceron, as well as the enlightening comments of the referees.

Conic constant and paraxial radius of curvature measurements for conic surfaces

Rufino Diaz-Uribe and Alejandro Cornejo-Rodriguez

From a set of previously derived equations for conic surfaces, we derived another set of equations from which the conic constant k and the paraxial radius of curvature r can be obtained, if at least three values of the longitudinal aberration X and their corresponding angles θ of the normals to the surface are measured. The procedure is useful when the area around the vertex surface cannot be used. Some experimental results are presented.

I. Introduction

In a previous paper,[1] a method was proposed for finding the profile of a conic surface, assuming that the conic constant k and the paraxial radius of curvature r were already known. However, a new method is presented for finding the values of k and r when they are unknown, and therefore the profile of the surface. In work by Kent[2] a method was apparently developed for finding the value of k; however, it seems to us that there is an error in that work. In the method proposed here, the measurements of k and r are based on the experimental data obtained for the longitudinal aberration X of the normals to the surface, and their corresponding angles θ (see Fig. 1), even when the center of the surface cannot be used.

II. Theory

For a conic surface[3,4] the sagitta z and the distance s (from a point on the surface to the optical axis) are related to the parameters X, θ, r, and k by the following equations:

$$z = \frac{cs^2}{1 + [1 - (k+1)c^2s^2]^{1/2}}, \tag{1}$$

$$\tan\theta = \frac{s}{r - z(k+1)}, \tag{2}$$

$$X = -kz. \tag{3}$$

Solving for z and s from Eqs. (2) and (3) and substituting the results into Eq. (1), a quartic equation is obtained for k and r:

$$[\tan^2\theta(rk + Xk + X)^2 + X[2k + (k+1)X]](rk + Xk + X)^2 = 0. \tag{4}$$

The solutions for k and r from Eq. (4) can be obtained for cases 1 and 2.

A. Case 1: r is Known

When the value of r is known or it can be measured, the two solutions for k that are valid for conics ($k \neq 0$) are equal to

$$k = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \tag{5}$$

where

$$\left.\begin{aligned} A &= \tan^2\theta(r + X)^2, \\ B &= 2X(r + X)\tan^2\theta + 2Xr + X^2, \\ C &= X^2(\tan^2\theta + 1). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

The solutions for k depend on the sign of the square root in Eq. (5); the positive sign corresponds to spheres and oblate ellipsoids, and the negative sign is for spheres, hyperboloids, paraboloids, and prolate ellipsoids. Using these solutions we can find the value of the conic constant k of a conic surface when the value

Rufino Diaz-Uribe is with State University of Puebla, School of Physico-Mathematical Sciences, A.P. 1152, Puebla, Pue. 72000, Mexico; Alejandro Cornejo-Rodriguez is with National Institute of Astrophysics, Optics, & Electronics, A.P. 216, Puebla, Pue. 72000, Mexico.
Received 30 April 1986.
0003-6935/86/203731-04$02.00/0.

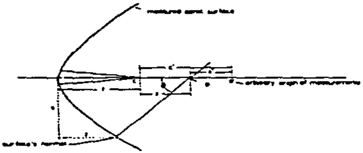


Fig. 1. Variables s, z, r, X, θ, X', and c' for a conic surface; X' and c' are needed when r cannot be measured.

of r is known. It is sufficient, in principle, to measure a pair of values of X and θ for the surface, and these values are substituted into Eq. (6). However, in practice, it is more useful to calculate k with several values of X and θ to have more reliable results. In this case, the final error for k is of the order of 1% or lower, if the experimental errors for r or X are of 0.01 mm and 1 min of arc for θ.

B. Case 2: r is Unknown

Some methods already exist for measuring the value of the paraxial radius of curvature r. Sometimes, however, one has only a portion of the surface that does not contain the vertex, i.e., the paraxial zone. For this case and because the paraxial center of curvature (pcc) is unknown, instead of measuring directly the longitudinal aberration X, the position of the intersection of a normal to the surface with the optical axis should be measured, but referred now to some origin O' (see Fig. 1). Calling this new quantity X',

$$X = c' - X', \tag{7}$$

where c' is an unknown distance from O' to the paraxial center of curvature c of the surface. Substituting Eq. (7) into the first term on the left-hand side of Eq. (4), the next equation is obtained:

$$(X' - c')[(k+1)\tan^2\theta + 1][(X' - c')(k+1) + 2kr] + k^2r^2\tan^2\theta = 0, \tag{8}$$

where X' and θ are the quantities to be measured. Equation (8) allows one to know k and r as follows:

(1) *Checking Whether $k = -1$*

For a paraboloid ($k = -1$), Eq. (8) becomes

$$X' = \frac{r}{2}\tan^2\theta + c'; \tag{9}$$

thus a plot of X' vs $\tan^2\theta$ gives a straight line with slope $r/2$ and with the intercept point with the ordinate axis equal to c'. Then measuring many values of X' and θ and plotting as mentioned before, one can check if a surface is parabolic. Furthermore this method allows one to find the paraxial radius of curvature (prc) as we shall see in Sec. III.B.

(2) *General Case*

If the surface is not parabolic, it is possible to obtain a set of three simultaneous nonlinear equations for k, r, and c'. By measuring at least three pairs of data of X' and θ, substituting them into Eq. (6), and eliminating c', one can reduce the system from three to only two equations for k and r. This system of equations is

$$\left.\begin{aligned} r &= (X'_2 - X'_1)\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &\quad\times\left\{\frac{1}{\sqrt{1+(k+1)\tan^2\theta_1}} - \frac{1}{\sqrt{1+(k+1)\tan^2\theta_2}}\right\}^{-1}, \\ r &= (X'_3 - X'_2)\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &\quad\times\left\{\frac{1}{\sqrt{1+(k+1)\tan^2\theta_2}} - \frac{1}{\sqrt{1+(k+1)\tan^2\theta_3}}\right\}^{-1}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

which can be solved either numerically or graphically to obtain values for r and k.

III. Experimental and Numerical Results

In what follows we present the experimental results obtained using the formulation developed in Sec. II. For case 1 we used the measurements already obtained for the Bausch & Lomb Cinephor Lens.[1] Using the same data, the precedure developed in Sec. II.B.1 is studied. The third example—a numerical one—allows one to obtain some insight about where the measurements should be done.

A. r is Known

The measurement of the paraxial radius of curvature for the Cinephor lens gave $r = 44.95$ mm $\pm$ 0.01 mm. Table I lists the data for X and θ; the calculated value of k is shown in the third column, after using Eqs. (5) and (6). The mean conic constant becomes equal to -0.987 with a standard deviation of 0.025. As can

Table I. Angle θ and Longitudinal Aberration X Measured for a Bauch & Lomb Cinephor Lens; Measured prc = 44.93 mm ± 0.01 mm; the Value of k is Calculated Using Eqs. (5) and (6)

θ (° ± 1′)	X (mm ± 0.01 mm)	k
30° 10′	7.65	−1.006 ± 0.002
31° 10′	8.14	−0.993 ± 0.002
32° 10′	8.64	−0.979 ± 0.002
33° 10′	9.22	−0.970 ± 0.002
34° 10′	9.85	−0.964 ± 0.002
35° 10′	10.54	−0.959 ± 0.002
36° 10′	11.34	−0.960 ± 0.002
37° 10′	12.28	−0.965 ± 0.002
38° 10′	13.38	−0.975 ± 0.001
39° 10′	14.74	−0.993 ± 0.001
40° 10′	16.43	−1.017 ± 0.001
41° 10′	18.04	−1.031 ± 0.001
42° 10′	19.26	−1.028 ± 0.001
43° 10′	20.26	−1.015 ± 0.001
44° 10′	21.24	−1.001 ± 0.001
45° 10′	21.85	−0.978 ± 0.001
46° 10′	22.31	−0.951 ± 0.001

Mean $k = -0.987$
Standard devintion $\sigma_k = 0.025$

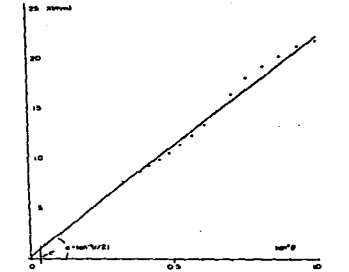


Fig. 2. Experimental data for the Cinephor lens (Bausch & Lomb). When the data are along a straight line, the surface is a paraboloid.

be seen, the profile of the surface is close to a parabolic one ($k \simeq -1$). However, surface quality and shape variations probably give rise to deviations from k around that calculated value.

B. Checking Whether $k = -1$

To reinforce the results obtained in Sec. III.A, we proceeded to check whether $k = -1$ using the procedure developed in Sec. II.B.1. With the Table I data we plotted $\tan^2\theta$ vs X' (see Fig. 2). By fitting a linear least squares to them, the next results are derived, $r = 44.2$ mm $\pm$ 1.5 mm and $c' = 0.0$ mm $\pm$ 0.5 mm. Since the linear correlation coefficient is 0.991, this result supports the assumption that $k = -1$, i.e., that the Cinephor lens was designed with a parabolic surface. On the other hand, we believe that the data deviations from a straight line (Fig. 2) are a consequence of the defects of the surface.

C. Numerical Example

In this section we simulate an experiment to get some information about where to locate the measured data along the surface to obtain better results.

We consider a theoretical hyperboloid with a conic constant $k_0 = -1.5$, and a prc of $r_0 = 50$ mm. Then, using Eqs. (1)–(3) we calculate the X and θ data that would be measured in an ideal experiment.

Using Eqs. (10) we plot r as a function of $k + 1$ for different values of X and θ; the intersection point between any two curves gives the k and r values, which solves the system (10) for each three pairs of values of X and θ. From Fig. 3 we can see that, due to the rounding of the data, the curves do not all intersect at the same point as would be expected; in a real experiment this is due to the uncertainty of the measurements. Then, the best choice is to use data or measurements from points near the vertex as well as points near the rim of the surface. It can also be concluded that it is not very good to use only points near the rim or near the vertex of the surface (becoming worse in the latter case). This conclusion about where to collect the data can be readily understood, recalling that near the vertex all the conics (with the same prc) are very close to a sphere.

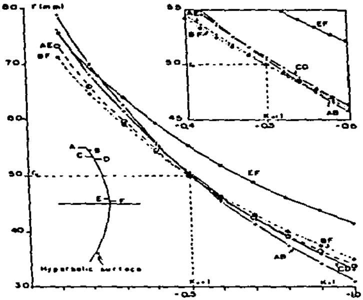


Fig. 3. Simulation of solving the system of Eqs. (10) for an ideal hyperboloid with $k_0 = -1.5$ and $r_0 = 50$ mm. Points A–F, where the calculations were done, are located along the surface as shown. Each intersection of two curves gives a possible solution of Eq. (10); the best results come from points AE and BF.

Table II. Calculated Longitudinal Aberration and Square Tangent of the Angle for a Hyperboloid with $k_0 = -1.5$ and $r_0 = 50.0$ mm (See Fig. 3)

Point	X (mm)	$\tan^2\theta$
A	9.10	0.2222
B	8.40	0.2026
C	6.48	0.1621
D	5.88	0.1481
E	0.06	0.0016
F	0.01	0.0004

IV. Conclusions

We have extended the method for finding the profile of a conic surface[1] to the measurement of the conic constant and to the paraxial radius of curvature of such a surface. This means that assuming only that the surface is a conic, it is possible to obtain all the parameters that identify it, including its profile

About the experimental setup, it is worthwhile to mention that the method uses only a low power He–Ne laser and a nodal bench for measuring the longitudinal aberration and the corresponding angle of the normals to the surface. This is a noncontact method, and the precision of the measurements can be improved if better instruments are used.[5] The theory involved is simple and allows the calculations to be done on a programmable calculator. The method is even suitable and useful for conic surfaces that do not have a vertex. With few changes, it could probably be used for off-axis conic surfaces also, but this is a matter for future work.

We acknowledge the support of CONACYT and Secretaría de Desarrollo Académico of UAP for the presentation of this paper at the 1985 Conference on Applied Optics, Workshop on Optical Fabrication and Testing, Cherry Hill, NJ; R. Diaz-Uribe is grateful for the support from SEP under grant PRONAES C85-01-0215, DGICSA 850378, PROY. 02.11. We appreciate the revision of the manuscript by Octavio Cardona-Nuñez and the drawings of G. Cerón and J. Vázquez Castillo.

Alejandro Cornejo-Rodriguez is on sabbatical leave at the Universidad Autonoma de Puebla.

References

1. R. Diaz-Uribe *et al.*, "Profile Measurement of a Conic Surface, Using a He–Ne Laser and a Nodal Bench," Appl. Opt. 24, 2612 (1985).
2. J. J. Kent, Jr., "Testing of Fast Concave Aspheric Reflecting Surface," in *Optical Shop Notebook, Vol. II* (Optical Society of America, Washington, DC, 1979), pp 31–37.
3. A. Cornejo-Rodriguez and D. Malacara-Hernández, "Caustic Coordinates in Platzeck-Gaviola Test of Conic Mirrors," Appl. Opt. 17, 18 (1978).
4. J. Pedraza-Contreras, A. Cornejo-Rodriguez, and A. Cordero-Dàvila, "Formulas for Setting the Diamond Tool in the Precision Machining of Conic Surfaces," Appl. Opt. 20, 2882 (1981).
5. A. E. Ennos and M. S. Virdee, "Precision Measurement of Surface Form by Laser Autocollimation," Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. 398, 252 (1983).

Comparison between toroidal and conic surfaces that best fit an off-axis conic section

Octavio Cardona-Nuñez, Alejandro Cornejo-Rodríguez, Rufino Díaz-Uribe, Alberto Cordero-Dávila, and Jesús Pedraza-Contreras

A mathematical treatment is developed to establish the difference in the sagitta between toroidal and off-axis conic surfaces. The best fit betwen these surfaces is found by optimizing the curvatures of the toroid, and a comparison is made between these results and those obtained previously.

I. Introduction

As is well known, off-axis conic surfaces are very useful in the design of some optical ...struments. However, producing these off-axis surfaces is not an easy task because most machinery allows fabrication mainly of symmetric and centered surfaces. Hence one way to produce off-axis conic sections is to use the fact that we can produce symmetric surfaces and then find that one that is closer to or better fits the desired off-axis surface. The purpose of this work is to find out how well an off-axis conic section can be fit by toroids, which fortunately can be produced conventionally, and compare these results with the ones previously obtained by fitting a conic by another conic.[1]

For presentation, we divide the material in three main sections: first, we develop the mathematical formulation for the toroidal surfaces and obtain the difference in sagittas between both surfaces, the toroid, and the off-axis section; next, we analyze the fitting between the off-axis section and the toroid; and finally, we establish a comparison between the numerical results for fitting the off-axis section by toroids and conic surfaces.

II. Mathematical Analysis

The toroid can be expressed mathematically as

$$(\sqrt{x^2+y^2}-b)^2+z^2=a^2, \tag{1}$$

where the origin of the coordinate system is in the center of the toroid [see Fig. 1(a)], a is the radius of the generating circle, and b is the radius of the middle section generated by the center of the generating circle. Since we want to compare the external surface of the toroid, it is necessary to change the origin of our coordinate system on the external rim and the z axis pointing toward the center of the toroid. Therefore, we rotate our original system by 90° around the x axis and translate the origin by the amount $(a+b)$, obtaining

$$Z_T=(a+b)-\sqrt{[b+\sqrt{a^2-y^2}]^2-x^2}. \tag{2}$$

Defining the curvatures $c_1=1/(a+b)$ and $c_2=1/a$, Eq. (2) becomes

$$Z_T=\frac{1}{c_1}\left[1-\sqrt{[1-\frac{c_1}{c_2}(1-\sqrt{1-c_2^2y^2})]^2-c_1^2x^2}\right]. \tag{3}$$

Developing in terms of x and y the square root of Eq. (3) in a power series, up to the fourth power, we get

$$Z_T=\tfrac{1}{2}(c_1x^2+c_2y^2)$$
$$+\tfrac{1}{8}(c_1^3x^4+c_2^3y^4)+\tfrac{1}{4}c_1^2c_2x^2y^2+\ldots. \tag{4}$$

For the off-axis conic section under study, the saggita is equal to[1]

$$Z_c=\frac{\beta}{\alpha}(1-\sqrt{1-2\gamma/\beta^2}), \tag{5}$$

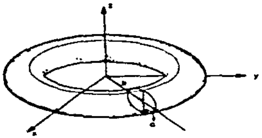
where the parameters α,β,γ are defined in terms of the vertex curvature c, the conic constant K of the parent conic, and the angle θ that the normal at the center of the off-axis section makes with the z axis [see Fig. 1(b)]. Developing Eq. (5) in a power series to the same order of approximation of Eq. (2), we obtain

$$Z_c=\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta}+\frac{1}{4}\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3}+\frac{3}{8}\frac{\alpha^2\gamma^3}{\beta^5}+\ldots\right). \tag{6}$$

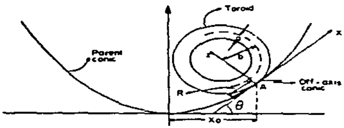
To establish the difference in sagittas $W=Z_T-Z_c$, using Eqs. (4) and (6), we change the rectangular coor-

O. Cardona-Nuñez and A. Cornejo-Rodriguez are with National Institute of Astrophysics, Optics, & Electronics, A. P. 216, Puebla, Pue. 72000, Mexico; R. Diaz-Uribe is with UNAM, Science Faculty, A. P. 21-939, Mexico, D. F. 04000, Mexico; the other authors are with ECFM, UAP, A. P. 1152, Puebla, Pue 72000, Mexico."

Received 24 June 1987.
0003-6935/87/224832-03$02.00/0.



(a)



(b)

Fig. 1. (a) Centered coordinate system and radii of curvature of a toroid; (b) fitting of an off-axis section by a toroid with the shifted coordinate system and related parameters X_0, θ, R.

dinates to the cylindrical ones ($x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$) obtaining

$$W = \alpha_{20}\rho^2 + \alpha_{22}\rho^2\cos 2\phi + \alpha_{31}\rho^3\cos\phi + \alpha_{33}\rho^3\cos 3\phi$$
$$+ \alpha_{40}\rho^4 + \alpha_{42}\rho^4\cos 2\phi + \alpha_{44}\rho^4\cos 4\phi. \qquad (7)$$

where the coefficients αij are represented by

$$\alpha_{20} = \tfrac{1}{4}[c_1 + c_2 - c\delta(1 + \delta^2)] \quad \text{focus;}$$
$$\alpha_{22} = \tfrac{1}{4}[c_1 - c_2 + c\delta(1 - \delta^2)] \quad \text{astigmatism;} \qquad (8)$$
$$\alpha_{31} = -\tfrac{1}{8}c^2\delta^2 K\sin\theta\cos\theta(1 + 3\delta^2) \quad \text{coma;}$$
$$\alpha_{33} = \tfrac{1}{8}c^2\delta^2 K\sin\theta\cos\theta(1 - \delta^2);$$
$$\alpha_{40} = \tfrac{1}{64}[2c_1^2c_2 + 3(c_1^3 + c_2^3) - c^3\delta^3[a(1 + 3\delta^2) + b(3 + \delta^2)]]$$
$$\text{spherical aberration;}$$
$$\alpha_{42} = \tfrac{1}{16}[c_1^3 - c_2^3 - c^3\delta^3(a\delta^2 - b)],$$
$$\alpha_{44} = \tfrac{1}{64}[c_1^3 + c_2^3 - 2c_1^2c_2 - c^3\delta^3(b - a)(1 - \delta^2)],$$

$\delta = \sqrt{1 + K\sin^2\theta}$, with a and b defined previously.[3]

III. Fitting the Off-Axis Conic by a Toroid

Following the criterium already established by Cardona *et al.*[1] to find the way to approximate optimally a conic by a toroid, the next Eq. (9) was already defined:

$$E = 2\int_0^{\pi}\int_0^{R} W^2\rho\,d\rho\,d\phi. \qquad (9)$$

Substituting W of Eq. (7) into Eq. (9) and doing the integration, finally we obtained

$$E = \pi R^4(\tfrac{1}{3}\alpha_{20}^2 + \tfrac{1}{2}\alpha_{20}\alpha_{40}R^2 + \tfrac{1}{6}\alpha_{22}^2 + \tfrac{1}{4}\alpha_{22}\alpha_{42}R^2$$
$$+ \tfrac{1}{8}\alpha_{31}^2R^2 + \tfrac{1}{8}\alpha_{33}^2R^2 + \tfrac{1}{5}\alpha_{40}^2R^4 + \tfrac{1}{10}\alpha_{42}^2R^4 + \tfrac{1}{10}\alpha_{44}^2R^4). \qquad (10)$$

If this Eq. (10) is differentiated with respect to c_1 and c_2 and the results are set equal to zero, the following two equations are obtained:

$$20c_1^3 + c_2^3 + 9c_1^2c_2 + 4c_1c_2^2 + 6c_1^2c\delta(1 - \delta^2)$$
$$-c\delta(1 + \delta^2)(9c_1^2 + 4c_1c_2)$$
$$+ \frac{32}{3R^2}(3c_1 + c_2) - \frac{32}{3R^2}c\delta(1 + 3\delta^2) - 2c^3\delta^3(a\delta^2 - b) \qquad (11)$$
$$-c^3\delta^3[a(1 + 3\delta^2) + b(3 + \delta^2)] = 0;$$
$$3c_1^3 + 20c_2^3 + 4c_1^2c_2 + 3c_1c_2^2 - 6c_2^2c\delta(1 - \delta^2$$
$$-c\delta(1 + \delta^2)(2c_1^2 + 9c_2^2) + \frac{32}{3R^2}(c_1 + 3c_2) - \frac{32}{3R^2}c\delta(3 + \delta^2)$$
$$+ 2c^3\delta^3(a\delta^2 - b) - c^3\delta^3[a(1 + 3\delta^2) + b(3 + \delta^2)] = 0, \qquad (12)$$

where R is the semidiameter of the section under study, and we are taken only up to the R^2 terms. On the other hand, the coefficients a, b, and δ are defined in terms of c, K, and θ.

Before solving these simultaneous Eqs. (11) and (12), one can use one of the properties of the conics referred to its principal curvatures, that is,

$$c_1 = \delta^2 c_2. \qquad (13)$$

Using this property, we were able to eliminate c_1 and the cubic terms from both equations and finally obtain a second degree equation for c_2 equal to

$$c\delta p c_2^2 + qc_2 - (q + s) = 0, \qquad (14)$$

where the coefficients p, q, s are equal to

$$p = 15 - 17\delta^2 - 3\delta^4 + \delta^8 - 23\delta^{10} - 5\delta^{12},$$
$$q = \frac{32}{3R^2}(17 + 50\delta^2 - 18\delta^4 - 54\delta^8 - 11\delta^{11}),$$
$$s = 2c^3\delta^3[(a\delta^2 - b)u + [a(1 + 3\delta^2) + b(3 + \delta^2)]v], \qquad (15)$$
$$u = 21 + 7\delta^2 + 13\delta^4 + 23\delta^6,$$
$$v = 19 - \delta^2 - 5\delta^4 - 17\delta^6.$$

The solution of Eq. (14) for c_2 is

$$c_2 = 2c\delta\{(1 + c^2\delta^2 s/q)/[1 + \sqrt{1 + 4c^2\delta^2(q + c^2\delta^2 sp/q)}]\}. \qquad (16)$$

and by means of Eq. (13) the value of c_1 can be known.

IV. Numerical Results

To compare the fittings between toroidal and on-axis conic sections with an off-axis conic section, some numerical experiments were done using the next set of parameters. The diameter $2R$ of the off-axis conic section was fixed at 20 cm, and three different locations off-axis were used $X_0 = 5, 10$, a[illegible] 20 cm from the vertex. The conic constants of the parent conic used are $K = -1, -0.5, +0.5, +1$; and the curvatures of the conic at the vertex are $c = 2.5 \times 10^{-2}, 1 \times 10^{-2}, 5 \times 10^{-3}, 2.5 \times 10^{-3}, 1.0 \times 10^{-3}$, and 2.5×10^{-4} cm^{-1}.

By defining the parameter $x = X_0/f/$, where X_0 is the distance between the center of the off-axis section to the center of symmetry, and $f/$ is the focal number of the parent conic, we were able to establish in terms of x the values for which the toroidal or the conic can better fit the off-axis conic section. Therefore, it was possible to conclude that the toroidal surface fits better in the following conditions: for $f/ = 1$, $x < 0.5$; for $f/ = 2.5$, $x < 0.2$; and for $f/ \geq 5$, $x < 0.1$.

A more general conclusion using the previous numerical results is that when the center of the off-axis section is closer to the vertex, the conic fits better than the toroidal surface (in the rms sense) and the opposite occurs for regions farther from the vertex.

We acknowledge the help of B. Aguilar and G. Ceron for typing and drawing, respectively. The members of the ECFM, UAP, acknowledge the support of the Secretaria de Educacion Publica (SEP), Mexico, through the SESIC-DGICSA.

Reference

1. O. Cardona-Nuñez, A. Cornejo-Rodriguez, R. Diaz-Uribe, A. Cordero-Davila, and J. Pedraza-Contreras, "Conic that Best Fits an Off-Axis Conic Section," Appl. Opt. 25, 3585 (1986).

PROCEEDINGS OF THE SPIE
VOL. 813, PPS. 355-356
QUEBEC, CANADA (1987).

PROFILE MEASUREMENT OF ASPHERIC SURFACES BY LASER BEAM REFLECTION

R. DIAZ-URIBE*, R. PASTRANA-SANCHEZ*, A. CORNEJO-RODRIGUEZ#
+ FC-UNAM, Apdo. Postal 21-939, México, D. F., 04000, MEXICO.
* ECFM-UAP, Apdo. Postal 1152, Puebla, Pue., 72000, MEXICO.
# INAOE, Apdo. Postal 216, Puebla, Pue., 72000, MEXICO.

1. INTRODUCTION

By observing the reflection of a laser beam from an optical surface, it is possible to infer certain geometrical properties of the surface, such as its radius of curvature, its conic constant, its profile and some errors of fabrication; the method depends on the type of surface. With this approach, we have developed a method for measuring the longitudinal aberration, X, and the angle, θ, with respect to the optical axis, of the normals of a conic surface[1]. Although this information is sufficient to describe the surface, it was necessary to develop a formulation for calculating, from those parameters, more evident variables such as the sagitta, Z, and the semidiameter, S (see figure).

For aspheric surfaces of revolution, we find that it is possible to extend the method and to find the real profile of the fabricated aspheric and to compare it with the ideal one. The experimental procedure for measuring X and θ is the same as for conic surfaces; however a set of equations must be deduced for calculating Z and S once X and θ have been measured.

2. THEORY

Usually an aspheric surface is described by the relation between Z and S; it includes a basic conic term plus an even polynomial of tenth degree, that is

$$Z = \frac{C\,S^2}{1 + \sqrt{1-(K+1)\,C^2 S^2}} + A_1 S^4 + A_2 S^6 + A_3 S^8 + A_4 S^{10}\,, \qquad (1)$$

where C is the paraxial curvature, K is the conic constant of the base conic surface, and the A_n's are the aspheric coefficients which aspherize the base surface. In general, for any one surface, X and θ are obtained from Z and S through the relations

$$\tan\theta = \frac{dZ}{dS}\,, \qquad (2) \qquad\qquad \text{and} \qquad\qquad X = Z + \frac{S}{(dZ/dS)} - \frac{1}{C}\,. \qquad (3)$$

Using eq. (1) for the derivative in eq. (2) and developing the square root in a power series, neglecting terms higher than the ninth power in S, then

$$\tan\theta = \sum_{n=0}^{4} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,(K+1)^n\, C^{(2n+1)} + 2(n+1)\,A_n\right] S^{(2n+1)} \qquad (4)$$

where $A_0=0$, $n!!=n(n-2)!!$, $1!!=0!!=(-1)!!=1$, and we assumed that $|(K+1)\,C^2 S^2| < 1$. In order to calculate Z and S from the measured data of X and θ, we must invert the polynomial (4). The standard procedure is to propose a polynomial solution like

$$S = \sum_{n=0}^{4} T_{(2n+1)}\, Y^{(2n+1)} \qquad (5)$$

where Y = tan θ, and only appear odd powers, as in eq. (4). Substituting eq. (5) in eq.

(4), and after equalizing coefficients of the same power on each member of the resulting equation, we obtain for the T_n's

$$\left.\begin{aligned}
&T_1 = \frac{1}{C}, \qquad T_3 = -\frac{1}{C^4}\left(\frac{1}{2}\, QC^3 + 4\, A_1\right), \qquad T_5 = \frac{1}{C^7}\left(\frac{3}{8}\, Q^2C^6 + 12\, QC^3A_1 - 6\, CA_2 + 48\, A_1^2\right) \\
&T_7 = \frac{1}{C^{10}}\left(-\frac{5}{16}Q^3C^9 - 24\, Q^2C^6A_1 + 24\, QC^4A_2 - 288\, QC^3A_1^2 - 8\, C^2A_3 + 192\, CA_1A_2 - 768\, A_1^3\right) \\
&T_9 = \frac{1}{C^{13}}\Big\{\frac{105}{384}\, Q^4C^{12} + 40\, Q^3C^9A_1 - 60\, Q^2C^7A_2 + 990\, Q^2C^6A_1^2 + 40\, QC^5A_3 - 1320\, QC^4A_1A_2 \\
&\qquad + (7040\, QA_1^3 - 10\ )\, C^3 + (320\, A_1A_3 + 180\, A_2^2)\, C^2 - 5280\, CA_1^2A_2 + 14080\, A_1^4\Big\}
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

where Q=K+1. The value for the sagitta is obtained by solving eq. (3) for Z and substituting S as given by eq. (5) and dZ/dS by Y; then

$$Z = \frac{1}{C} + X - \sum_{n=0}^{4} T_{(2n+1)}\, Y^{2n} \qquad (7)$$

with the aid of eqs. (5), (6) and (7), the actual shape of an aspheric surface can be compared with the ideal one and, if the surface it is not known at all, the aspheric coefficients, the paraxial radius of curvature as well as the conic constant can be found by a least squares fit of the relation between X and Θ.

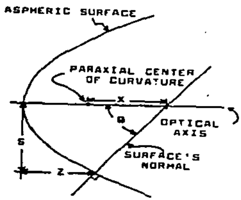
3. EXPERIMENTAL PROCEDURE

In any case, to accomplish the above mentioned aims, one has to measure the values of X and Θ for different zones of the surface. That measurements are made on the basis of null deviation of the reflected beam in reference to the incident laser beam as is described in ref. 1. This procedure has several advantages: as a non-contact method it avoids possible surface damage; it allows one to test either convex or concave reflecting surfaces. Furthermore, the setup is easily implemented in an optics laboratory, because it uses as basic elements a nodal bench and a low power He-Ne laser; it is also useful for testing other optical surfaces such as spherical[2] or cylindrical[3] ones.

The accuracy of the measurements depends on the resolution of the nodal bench scales and on the skill for detecting small deviations of the beam; it can be improved by using better positioning devices and ligth detectors.

4. REFERENCES

1. R. Díaz-Uribe, et. al., Appl. Opt., 24, 2612 (1985).
2. A. Cornejo-Rodríguez and A. Cordero-Dávila, Appl. Opt., 19, 1743 (1980).
3. Rufino Díaz-Uribe, et.al., Appl. Opt., 25, 1707 (1986).



APENDICE B

PROPIEDADES MATEMATICAS Y CLASIFICACION DE SUPERFICIES ASFERICAS.

Las superficies ASFERICAS son estrictamente todas las superficies que no son esféricas. Esta definición es muy amplia por lo que es conveniente enumerar algunos tipos especificos de asféricas que son usados con cierta frecuencia en óptica. Una primera distinción entre los diferentes tipos de superficies asféricas consiste en identificar las simetrias que mantienen.

B.1 Asféricas de Revolución.

Las superficies de revolución o de simetría axial pueden ser descritas analiticamente por expresiones tales como

$$z(x,y) = f(x^2 + y^2) \qquad \text{(B.1.a)}$$

o haciendo

$$s = x^2 + y^2 \qquad \text{(B.1.b)}$$

entonces

$$z(s) = f(s^2) \qquad \text{(b.1.c)}$$

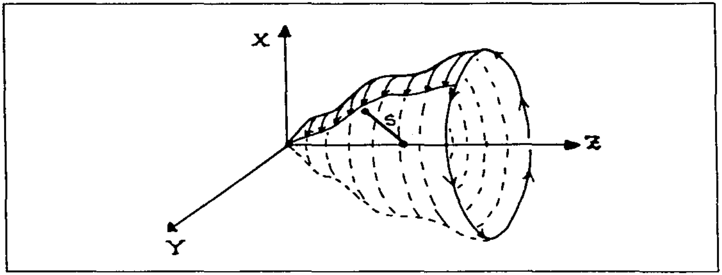


Figura B.1 Generación de una superficie de revolución.

B.1.1 Convenciones en optica. Usualmente en óptica, z se conoce como la SAGITA o FLECHA de la superficie; en una superficie de revolución es sólo función de la distancia al eje de simetria o eje óptico, s. El origen de coordenadas corresponde al vértice de la superficie (fig B.1). Cuando una superficie óptica real, no su representación matemática, consiste de una región simétrica de una superficie asférica respecto del eje óptico, se dice que la superficie "se encuentra en eje". En ausencia de simetría, se dice que la superficie "está fuera de eje". Si la región antes mencionada contiene al vértice (su intersección con el eje óptico), se dice que la superficie se encuentra con vértice (fig. B.2). En óptica suelen reconocerse de utilidad principalmente dos tipos de superficies de revolución:

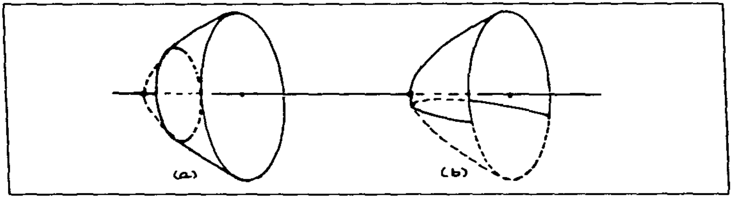


Figura B.2 (a) Superficie "en eje", sin vértice. (b) Superficie "fuera de eje" con vértice.

B.1.2 Superficies cónicas. Como su nombre lo indica, estas superficies asféricas son generadas por la revolución de las secciones o curvas cónicas en torno de su eje de simetría. En este caso la expresion (B.1.c) adopta la forma siguiente

$$z = \frac{c\ s^2}{1 + \sqrt{1 - (k+1)\ c^2 s^2}}\ , \qquad \text{(B.2.a)}$$

o también

$$z = \frac{1 - \sqrt{1 - (k+1)\ c^2 s^2}}{(k+1)\ c}\ , \qquad \text{(B.2.b)}$$

en donde como antes, z es la sagita y s es la distancia de un punto (x,y,z) al eje óptico; c es la curvatura paraxial o en el vértice y k es la constante de conicidad de la superficie en cuestión y se relaciona con la excentricidad, e, de la cónica generadora por $k = -e^2$. Como puede verse, un caso especial de particular importancia resulta ser el caso de un paraboloide (k=-1); la ecuacion (B.2.a) adopta una forma sumamente sencilla:

$$z(s) = -\frac{1}{2}\ cs^2 \qquad \text{(B.3)}$$

La caracteristica principal de las superficies cónicas radica en el hecho de generar haces estigmáticos perfectos bajo condiciones especificas; i.e., estas superficies presentan puntos aplanáticos caracteristicos. Por ejemplo, cuando a una parábola se le hace incidir un frente de onda plano viajando paralelamente al eje óptico, despues de reflejarse, se genera una onda esférica perfecta que converge al foco de la parábola (fig. B.3.a). Otro ejemplo (fig. B.3.b), es el caso de una fuente puntual colocada en uno de los focos de un elipsoide prolato. Por sus caracteristicas propias, la imagen perfecta de dicha fuente se produce en el otro; foco tanto el objeto como la imagen son reales para superficies concavas, mientras que para superficies convexas, ambos son virtuales. Un hiperboloide genera a su vez, una imagen virtual perfecta de un objeto puntual real, y viceversa, ellos se encuentran colocados también en sus focos (fig. B.3.c), ya sea para superficies cóncavas o convexas.

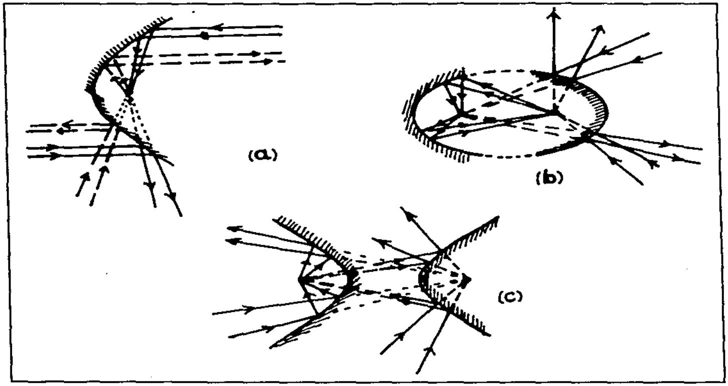


Figura B.3 Puntos aplanáticos de las superficies cónicas por reflexión de luz: (a) paraboloide, (b) elipsoide, (c) hiperboloide, cóncavos y convexos.

B.1.3 Superficies asféricas. Es usual que con este mismo nombre se denomine a las superficies asféricas de revolución, no cónicas, generadas por funciones de la forma (B.1.c). En óptica son de interés las superficies generadas por curvas suaves (lo que los matemáticos conocen como curvas de clase C^1). Generalmente tales curvas generadoras son funciones analíticas que pueden ser desarrolladas en serie de potencias; a nivel práctico sólo interesa retener los términos cuya contribución pueda ser significativa; esto es, se retienen términos hasta orden décimo [Malacara (1978), Shanon 1980)]. En consecuencia, la sagita puede expresarse como

$$z = \sum_{n=1}^{5} D_{2n}\ s^{2n} = D_2 s^2 + D_4 s^4 + D_6 s^6 + D_8 s^8 + D_{10} s^{10} \qquad \text{(B.4)}$$

En tal descripción, se espera que los coeficientes de asfericidad disminuyan con el orden del término; i.e., $D_{n+1} < D_n$. Cuando la sagita varía rápidamente con s, puede no suceder lo anterior y se hacen más recomendables otras descripciones equivalentes a (B.4). En ellas los términos de asfericidad sólo implican pequeñas variaciones respecto de una superficie descrita por una expresión analítica cerrada tal como la de una esfera o una cónica; en tales casos la sagita se expresa por

$$z = \frac{c\ s^2}{1 + \sqrt{1 - c^2 s^2}} + \sum_{n=1}^{4} B_n\ s^{2(n+1)} \tag{B.5}$$

cuando la superficie base es una esfera, mientras que cuando es una cónica

$$z = \frac{c\ s^2}{1 + \sqrt{1 - (k+1)\ c^2 s^2}} + \sum_{n=1}^{4} A_n\ s^{2(n+1)} \tag{B.6}$$

Es importante señalar aquí, que las tres descripciones son equivalentes y pueden usarse indistintamente, sin embargo, para reducir el error en cálculos numéricos, es conveniente usar la expresión que dé una convergencia más rapida; esto es, aquella expresión cuyos términos de deformación decrezcan más rápidamente.

Desarrollando en serie de potencias las raices en (B.5) y (B.6), e igualando coeficientes de los términos de igual grado, es posible encontrar la relación entre los distintos coeficientes, a saber [Malacara (1978)]:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{Q-1}{8}\ c^3 + A_1 \\ B_2 &= \frac{Q^2-1}{16}\ c^5 + A_2 \\ B_3 &= \frac{5}{128}\ (Q^3-1)c^7 + A_3 \\ B_4 &= \frac{7}{256}\ (Q^4-1)\ c^9 + A_4. \end{aligned}\right\} \tag{B.7}$$

en donde $Q = k+1$. Además,

$$\left.\begin{aligned} D_2 &= \frac{c}{2} \\ D_4 &= \frac{Q\ c^3}{8} + A_1 \\ D_6 &= \frac{Q^2 c^5}{16} + A_2 \\ D_8 &= \frac{5}{128}\ Q^3 C^7 + A_3 \\ D_{10} &= \frac{7}{256}\ Q^4 c^9 + A_4. \end{aligned}\right\} \tag{B.8}$$

Rodgers (1984) ha planteado una forma alternativa de representar superficies asféricas tomando como base del desarrollo superficies de revolución generadas por curvas diferentes a las cónicas; por ejemplo, usando funciones logarítmicas, secantes y funciones hiperbólicas, logra disminuir el número de términos en el polinomio aproximante, pudiendo reducir significativamente los cálculos y disminuir las aberraciones de un diseño propuesto a través de las expresiones usuales (B.5) o (B.6). El planteamiento es interesante, a pesar de las objeciones de Diang-Qiang Su y Ya-Nan Wang (1985).

B.2. Superficies Cuyo Eje de Revolución no Coincide con su Eje de Simetría.

A continuacion describiremeos brevemente dos ejemplos de superficies ópticas no convencionales. Estas superficies dan lugar a los sistemas llamados NO FORMADORES DE IMAGEN, pues se les ha usado principalmente como concentradores de radiación para detectores o para el aprovechamiento de la energía solar [Welford y Winston (1978)]. Aunque tales superficies también se obtienen de por la revolución de ciertas curvas, el eje de giro no coincide con el eje de simetría de la curva generadora.

B.2.1 Conos. Estas superficies se obtienen de girar una recta. Los ejes de simetría de una recta corresponden a la recta misma y a cualquier recta normal a la recta original. Girar la recta alrededor de estos ejes genera, por un lado, la recta misma, y por el otro, un plano. La primera carece de interés, la segunda puede pensarse como una esfera de radio de curvatura muy grande (fig. B.4).

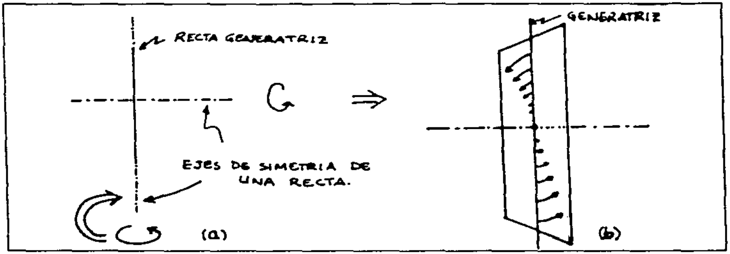


Figura B.4 (a) Los ejes de simetría de una recta son, la recta misma, y cualquier otra recta ortogonal a ella. Las superficies de revolución que se obtienen de girar la recta en torno de dichos ejes de simetría son la recta misma y (b) un plano ortogonal al eje de giro.

Para obtener un cono basta girar la recta original en torno de cualquier otro eje que intersecte a la recta generadora (fig. B.5). La representación analitica de estas superficies puede darse de manera cerrada por

$$z = a + b\ |s| = a + b\sqrt{s^2} \tag{B.9}$$

Como puede verse, tales superficies presentan un punto singular en el vértice; esto es, sus derivadas nò son continuas en $s = 0$. Por ello a veces se adopta la representación aproximada de un hiperboloide de revolución con una curvatura paraxial muy grande (fig. B.5). Esto facilita en mucho los cálculos durante el diseño.

B.2.2 El concentrador parabólico compuesto (CPC). Esta superficie es generada por una parábola girada alrededor de un eje de giro que hace un ángulo ($\theta \neq 0$) con el eje de simetria de la parábola. Este eje de giro debe, además, dividir en dos partes iguales al segmento que siendo ortogonal al eje de giro

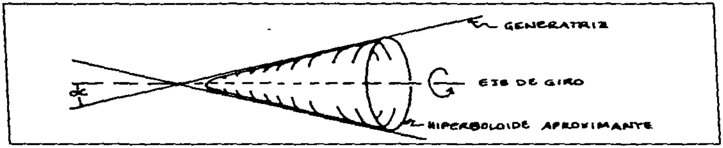


Figura B.5 Una recta girada en torno a un eje de giro diferente a los ejes de simetría genera un cono. Este cono puede aproximarse por un hiperboloide de revolución con una curvatura paraxial muy grande.

mismo, va del punto focal a la intersección con la parábola; en consecuencia, al realizar el giro, el punto focal describe un circulo sobre la superficie (fig. B.6). Usada como concentrador, la parte útil de la superficie consiste sólo de la región que parte del "circulo focal" descrito antes y se extiende hacia donde abre la parábola; el "pico" generado se elimina.

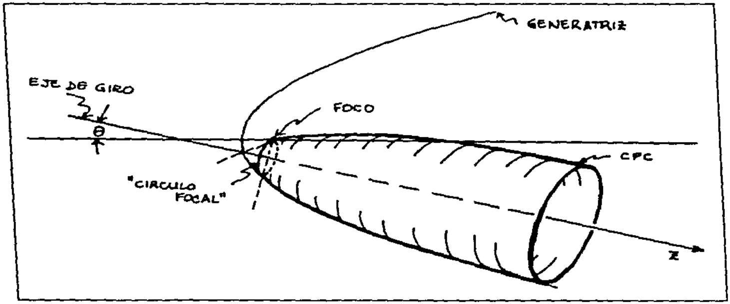


Figura B.6 Generación de un concentrador parabólico compuesto (CPC).

La ecuacion del CPC en un sistema de coordenadas cartesiano en donde el eje óptico del CPC corresponde a la sagita z, se puede escribir como

$$z = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\left[P-(s+D)\operatorname{sen}\theta\right] \pm \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left\{P\left[P-2\operatorname{sen}\theta\,(s+D)\right]\right\}^{1/2} \tag{B.10}$$

en donde $s=\sqrt{x^2+y^2}$ $(s \geq 0)$, es la distancia al eje óptico; θ es el ángulo caracteristico del CPC, y esta asociado al semidiámetro angular de la fuente (en el caso del sol θ = 0.005 radianes). P es el LADO RECTO de la parábola y se relaciona con el semidiámetro, a, de la "pupila"[1] de entrada a través de la relación

$$P = 2f = a\,\frac{(1+sen\ \theta)(1+cos\ \theta)}{sen\ \theta} \qquad (B.11)$$

donde f es la distancia focal de la parábola generadora. Finalmente, D, es el semidiámetro de la "pupila" de salida dado por

$$D = \frac{1}{2}\,P\left(\frac{1-sen\ \theta}{cos^2\theta}\right) = \frac{1}{2}\,P\left(\frac{1}{1+sen\ \theta}\right) \qquad (B.12)$$

Es importante mencionar aquí que, estrictamente, los conos y los CPC's no pueden ser descritos por desarrollos de la forma dada por la ec. (B.4), pues en ambos casos aparecen potencias impares de s; esto tiene relación también con el hecho de que en el vértice de tales superficies se tiene un punto singular o un "pico".

B.3 Asféricas con Dos Planos de Simetría.

En esta categoría caen dos tipos de superficies asféricas bien conocidas y que usualmente no se clasifican como tales: las superficies CILINDRICAS y las TORICAS. Aunque las segundas podrían incluirse en el tipo de asféricas de revolución no giradas en torno a un eje de simetría por la manera en que son generadas, las características ópticamente importantes corresponden a esta clasificación. Los sistemas ópticos que incluyen este tipo de superficies se conocen como SISTEMAS ANAMORFICOS o ANAMORFOTICOS [Slyusarev (1984)].

B.3.1 Superficies cilíndricas. Esta clasificación contiene a las superficies que son generadas a partir de una curva plana dada, que es recorrida en dirección ortogonal al plano que la contiene (fig. B.7); por ello la superficie puede ser descrita por

$$Z = f(Y) \qquad (B.13)$$

y es independiente de X.

El caso más común de encontrar corresponde a cilindros de sección circular con centro de curvatura sobre el eje Z y con vértice en el origen:

$$Z = R - \sqrt{R^2 - Y^2} \qquad (B.14)$$

Aunque no es común, ocasionalmente pueden encontrarse también superficies cilíndricas generadas por curvas o secciones cónicas o no circulares del tipo (B.2.a) o (B.4), respectivamente, con la sustitucion $s \longrightarrow Y$. Pueden presentarse también, cilindros rectos (dos planos haciendo un ángulo α entre sí), o CPC's bidimensionales; tales superficies se describen por relaciones del tipo (B.9) o (B.10) con la misma sustitucion $s \longrightarrow Y$ (fig. B.8).

La principal característica de estas superficies consiste en que sólo desvían la luz en la dirección ortogonal al eje del cilindro; sólo en esa dirección concentran o divergen la luz.

B.3.2 Superficies tóricas. Un TORO (o dona) se obtiene de girar un círculo en torno de un eje que no pasa por su centro y que es coplanar al círculo mismo (fig. B.9). La parte útil de los toros corresponde a la parte más externa de ellos; en esta región presentan dos radios de curvatura diferentes en dos direcciones ortogonales. Uno de los radios de curvatura corresponde a

[1] Recordar que se trata de un sistema no formador de imagen. En este caso por "pupila" de entrada y salida entendemos las aberturas por donde entra y sale la radiación a concentrar.

la distancia más alejada del circulo generador al eje de giro; el otro corresponde al radio de curvatura del circulo generador.

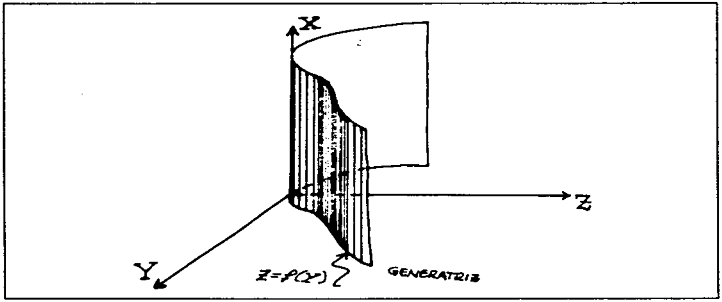


Figura B.7 Generación de superficies cilíndricas por la traslación de una curva $Z=f(Y)$, en dirección del eje X.

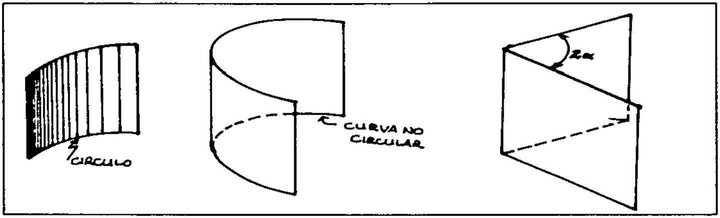


Figura B.8 Diversos tipos de superfices cilíndricas que pueden ser generadas con círculos, curvas no circulares (por ejemplo, cónicas), y rectas.

En el sistema de referencia descrito en la fig. B.10, el toro se puede representar analiticamente por [Cardona-Núñez, *et. al.* (1987)]

$$Z = \frac{1}{c_1}\left[1-\sqrt{\left\{1-\left(c_1/c_2\right)\left[1-\sqrt{1-c_2^2Y^2}\;\right]\right\}^2 - c_1^2X^2}\;\right] \tag{B.15}$$

en donde $c_1 = 1/R_1$ y $c_2 = 1/R_2$.

La propiedad más caracteristica de las superficies tóricas consiste en poseer dos distancias focales diferentes para direcciones ortogonales; tal propiedad permite corregir la aberración de ASTIGMATISMO, defecto visual muy frecuente. Por ello tales superficies son usadas principalmente en lentes oftálmicas.

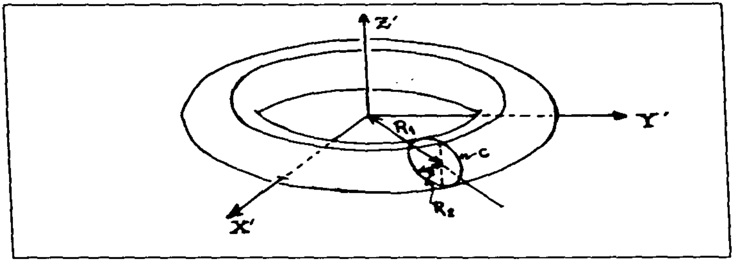


Figura B.9 Generación de un TORO por giro del círculo C en torno del eje Z'

Recientemente las superficies tóricas han sido propuestas para aproximar secciones fuera de eje de superficies cónicas [Cardona-Nuñez, *et. al.*] y asféricas. Esto se debe a que relativamente lejos del vértice estas superficies muestran dos curvaturas diferentes en direcciones ortogonales y, aunque van variando continuamente, para secciones no muy grandes la variación es suficientemente pequeña.

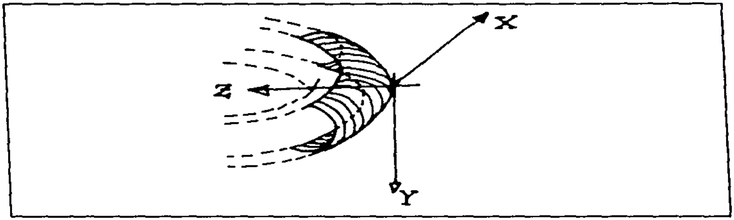


Figura B.10 Sistema de referencia para describir localmente a una superficie tórica en términos de la sagita Z.

APENDICE C

PRUEBAS DE LENTES CILNDRICAS.

Como una muestra de otras posibilidades de los métodos de deflectometría láser, vamos a presentar un trabajo sobre lo que llamamos *pruebas de referencia* en lentes cilíndricas.

Las pruebas de referencia, a diferencia de las pruebas superficiales, consisten en determinar la posición u orientación de dos superficies ópticas entre sí. El ejemplo típico de ésto son los problemas de centrado de superficies ópticas esféricas [Cordero D., A., *et. al.* (1981)].

A continuación resumimos la propuesta de Diaz-Uribe, *et. al.* (1986), para medir el radio de curvatura y los errores de cuña (*wedge*), descentrado (*decentering*), y giro (*twist*), de lentes cilíndricas construídas.

C.1 Medición del radio de curvatura.

La medición del radio de curvatura de superficies cilíndricas, difiere del de las esféricas por el tipo de simetrías que mantiene cada una. El esferómetro mecánico usual de tres puntos para esferas debe cambiarse por otro de dos o de cuatro para cilíndricas. Lo que en este trabajo proponemos, es el utilizar el método de Cornejo [Cornejo-Rodriguez y Cordero-Dávila, (1980)] para medir radios decurvatura, con la propuesta adicional de Longhurst para localizar el vértice de la superficie. El método propuesto tiene la ventaja de medir el radio de curvatura de perfiles circulares haciéndolo útil tanto para esferas, como fué propuesto originalmente, como para cilindros y toroides también.

Aunque no es parte del trabajo citado, ahora es claro que, como se dijo antes, usando el método propuesto para la prueba de superficies esféricas, se pueden probar también cilindros y toroides con las ventajas ya mencionadas antes (ver figura C.1).

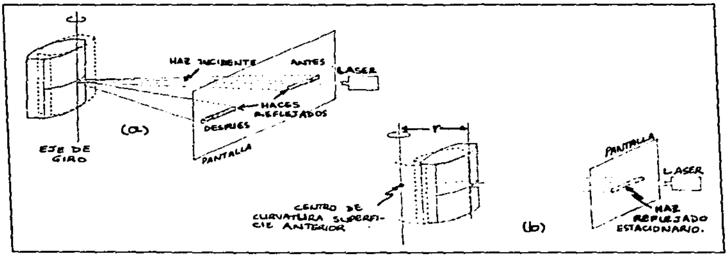


Figura C.1 Método de Cornejo para medir radios de curvatura aplicado a superficies cilíndricas. [Figura tomada de Díaz-Uribe, et. al. (1986)].

C.2 Medición de errores de referencia.

La idea básica para la medición de cualquiera de los errores de referencia mencionados arriba, coniste en hacer incidir normalmente un haz de láser sobre una de las superficies de la lente. La lente debe montarse sobre una platina giratoria de precisión. Se gira la lente un ángulo de 180° en torno de un eje vertical. Si la lente no tuviera ningún error de referencia, el haz incidente, ahora sobre la segunda superficie, debería ser reflejado también sobre la trayectoria original del haz incidente. Cualquier desviación del haz reflejado puede asociarse a un error de referencia.

En todo lo que sigue vamos a suponer que la lente se coloca de manera que sus ejes de simetría (de los cilindros de ambas superficies) estén verticales.

C.2.1 Error de descentrado.

En una lente cilíndrica el error de descentrado se puede ver como una diferencia en los espesores de la lente en los bordes rectos a cada extremo de la lente [ver figura C.2.a)].

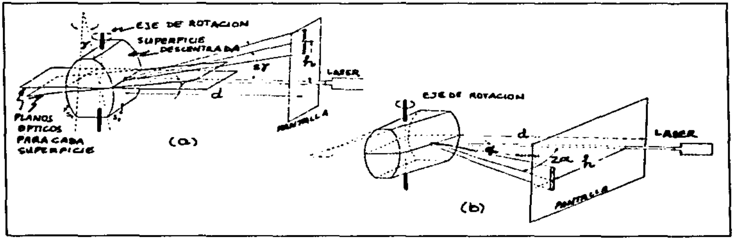


Figura C.2 Se ilustran los errores, (a) de descentrado, y (b) de cuña de una lente cilíndrica. Se muestran los parámetros a medir para determinar los errores. [figura tomada de Díaz-Uribe, et. al. (1986)].

Si después de alinear y girar la superficie el haz reflejado en la segunda superficie se desvía horizontalmente, se trata de un error de descentrado. Colocando una pantalla ortogonal a la dirección del haz incidente, a una distancia d del vértice de la superficie, si el desplazamiento lateral es h, entonces el ángulo de descentramiento, γ, está dado por

$$\gamma = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{h}{d}\right) \approx \frac{1}{2}\frac{h}{d} \qquad \text{(C.1)}$$

La aproximación es válida para descentramientos pequeños, lo cual es de esperarse. El error relativo al realizar tal medición está dado por

$$\frac{\delta\gamma}{\gamma} = \frac{\delta h}{h} + \frac{\delta d}{d} \qquad \text{(C.2)}$$

Suponiendo un descentrado de $\gamma = 1' = 0.3$ mrad, y observando a una distancia $d = 500$ mm, tenemos que $h = 3$ mm. Si podemos medir d y h con incertidumbres de $\delta d = 1$ mm y $\delta h = 0.2$ mm, lo cual se ve razonable, el error en el descentramiento es de sólo $\delta\gamma$ = 0.07' ≈ 0.02 mrad. Siendo una precisión aceptable, aunque puede mejorarse.

C.2.2 Error de cuña.

El error de cuña también puede visualisarse como una diferencia de espesor, sólo que en este caso el espesor varía continuamente a lo largo de los bordes rectos de la lente (ver figura C.2.b)). Los ejes de simetría de cada superficie ahora se encuentran inclinados entre sí; en el caso de descentramiento los ejes permanecen paralelos.

Un error de cuña se manifiesta en un desplazamiento vertical. Las expresiones son idénticas que para el descentramiento, con resultados y precisión similares.

C.2.3 Error de giro.

El error de giro consiste en que las superficies están giradas relativamente entre sí en torno de un eje ortogonal a ambos ejes de simetría (ver figura C.3).

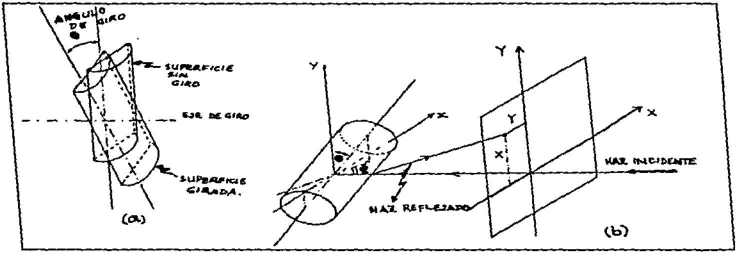


Figura C.3 (a) Se ejemplifica el error de giro. (b) Efecto del error de giro en el haz reflejado. [Figura tomada de Díaz-Uribe, et. al. (1986)].

Este error se manifiesta en el haz reflejado en que cuando la lente se gira de la primera superficie a la segunda y el haz incidente va recorriendo esta última, el haz reflejado se mueve sobre una línea inclinada en la pantalla. Desplazando verticalmente la lente hasta que la línea que recorre el haz reflejado en la pantalla intersecte el orificio de entrada del haz incidente, se logra que el haz incidente coincida con el eje del *giro*. Bajo estas condiciones, el girar 180° la lente en torno a un eje vertical mantiene al haz reflejado coincidente con el haz incidente.

Para poder medir el error de *giro*, es necesario dejar la lente en un punto intermedio, antes de llegar a los 180°. De esta manera el haz reflejado intersectará la pantalla en un punto de coordenadas (x,y), donde x es el eje horizontal y y es el eje vertical. Si ϕ es el ángulo que faltó para llegar a los 180°, entonces las coordenadas x y y están relacionadas con el *giro* de la siguiente manera

$$x = 2d \; sen\phi \; cos\phi \; sen^2\theta \tag{C.3}$$

y

$$y = 2d \; cos\phi \; sen\phi \; cos\theta \tag{C.4}$$

en donde d es la distancia del vértice a la pantalla y θ es el error de giro de la lente que se prueba.

Para errores de *giro* pequeños x es despreciable, y se puede medir para determinar el valor del error. De la ecuación (8.4) se puede determinar el valor del *giro* como sigue

$$\theta \simeq \frac{y}{2d(\pi-\phi)} \tag{C.5}$$

el correspondiente error relativo está dado por

$$\frac{\delta\theta}{\theta} = \frac{\delta y}{y} + \frac{\delta d}{d} + \frac{\delta\phi}{(\pi-\phi)} \tag{C.6}$$

El error es de alrededor de un 5% para $d = 500$ mm, $\theta = 1^\circ$ y $\phi = 80^\circ$, con incertidumbres en las mediciones de $\delta d = 2$ mm, $\delta\phi = 2' = 0.06$ mrad, y $\delta y = 0.1$ mm. Debido a que el error se incrementa para errores de *giro* menores, el método está limitado a medir *giros* tan pequeños como 10'.

C.3 Comentarios.

Como se dijo antes este tópico es sólo una muestra de otras posibilidades de los métodos de deflectometría láser. Estas técnicas nos permiten hacer muchos otros tipos de mediciones tales como de índices de refracción, frecuencia espacial de rejillas de difracción, etc. Es pues, evidente la versatilidad de estas técnicas.