Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

ENFOQUE Y SUGERENCIA PARA LA IMPARTICION DEL CURSO DE MATEMATICAS II EN EL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES SEGUN LA PRACTICA DOCENTE.

T E S I S

Que para obtener el Título de :

A C T U A R I O

P r e s e n t a :

SILVIA MADRIGAL HERNANDEZ

México, D.F., 1990

I N D I C E

INTRODUCCION

El trabajo que se presenta, no es más quela experiencia de más de 1[illegible] años de impartir clases de matemáticas en el nivel bachillerato.

El curso que se tomó como referencia es *Matemáticas II* en el Colegio de Ciencias y Humanidades, que corresponde al Algebra y cuyo desarrollo y explicación se realizó, pensando que el *alumno* será, en última instancia, el lector potencial de esta tesis.

En el trabajo se describen una serie de problemas que se resuelven de manera *intuitiva*, tratando que el alumno procure la solución con sus propios recursos, ideas e imaginación sin que se utilice el recurso del algebra.

También se hace énfasis constantemente en la correspondencia entre los *conceptos algebraicos* y las *representaciones geométricas*, considerando que es la forma menos rígida, a fin que el alumno asimile la explicación.

La formalización de los métodos y de las expresiones algebraicas se lleva a cabo al final de cada tema, dado que se considera mas didáctico comenzar de manera intuitiva y de forma geometrica

CAPITULO I

PROPIEDADES DE LOS NUMEROS REALES

Dos de las necesidades que surguieron desde tiempos inmemoriales son las de contar y medir. El hombre primitivo contaba los días y sus pertenencias. Para hacerlo asociaba a cada objeto otro más manejable, por ejemplo, una piedra, un nudo en una cuerda o bien una muesca o marca en algún objeto de uso cotidiano, como su cuchillo. Una asociación natural que se dió fue la de hacer corresponder los dedos de las manos con los objetos que se querían contar, asociación que se ha preservado a través de los siglos y se usa todavía para aprender a contar. Posteriormente hicieron marcas en la pared de su habitación o las pintaban en papiro, un tipo de papel elaborado por los egipcios. Por ejemplo, /// simbolizaban tres objetos.

Esta última forma de asociación permitía el mostrar "cuántos" aún cuando no existía el concepto de número tal y como lo conocemos, ni una palabra que lo expresara. Sin embargo para mostrar números grandes, tales como 100, se volvía poco eficiente y era di-

I N D I C E

INTRODUCCION

El trabajo que se presenta, no es más quela experiencia de más de 10 años de impartir clases de matematicas en el nivel bachillerato.

El curso que se tomó como referencia es Matemáticas II en el Colegio de Ciencias y Humanidades, que corresponde al Algebra y cuyo desarrollo y explicación se realizó, pensando que el alumno será, en última instancia, el lector potencial de esta tesis.

En el trabajo se describen una serie de problemas que se resuelven de manera intuitiva, tratando que el alumno procure la solución con sus propios recursos, ideas e imaginación sin que se utilice el recurso del álgebra.

También se hace énfasis constantemente en la correspondencia entre los conceptos algebraicos y las representaciones geométricas, considerando que es la forma menos rígida, a fin que el alumno asimile la explicación.

La formalización de los métodos y de las expresiones algebraicas se lleva a cabo al final de cada tema, dado que se considera más didactico comenzar de manera intuitiva y de forma geométrica en algunos casos.

Los capítulos de la tesis corresponden a cada uno de los temas del curso mencionado, en el orden que personalmente los expone la autora.

Una recomendación importante es la de contar con apoyos audiovisuales para que el tiempo no sea el verdugo de este tipo de exposiciones.

SILVIA MADRIGAL HERNANDEZ

CAPITULO I

PROPIEDADES DE LOS NUMEROS REALES

Dos de las necesidades que surguieron desde tiempos inmemóriales son las de contar y medir. El hombre primitivo contaba los días y sus pertenencias. Para hacerlo asociaba a cada objeto otro más manejable, por ejemplo, una piedra, un nudo en una cuerda o bien una muesca o marca en algún objeto de uso cotidiano, como su cuchillo. Una asociación natural que se dió fue la de hacer corresponder los dedos de las manos con los objetos que se querían contar, asociación que se ha preservado a través de los siglos y se usa todavía para aprender a contar. Posteriormente hicieron marcas en la pared de su habitación o las pintaban en papiro, un tipo de papel elaborado por los egipcios. Por ejemplo, /// simbolizaban tres objetos.

Esta última forma de asociación permitía el mostrar "cuántos" aún cuando no existía el concepto de número tal y como lo conocemos, ni una palabra que lo expresara. Sin embargo para mostrar números grandes, tales como 100, se volvía poco eficiente y era difícil tener una idea clara de las cantidades representadas. El agrupar las marcas surgió como una ayuda para contar; así por ejemplo, ~~////~~ simbolizaban cinco objetos.

A medida de que el hombre tiene necesidad de manejar números más grandes y realizar operaciones con ellos, empieza a desarrollar diferentes maneras de escribirlos. A estas maneras de escribir los números, que nos permiten operar con ellos, es a lo que llamamos sistemas de numeración. En los cursos anteriores de matemáticas se han estudiado las características de algunos de ellos como el egipcio, el babilónico, el romano, el maya, etc. y por supuesto las del sistema decimal que es el que actualmente usamos. La idea de agrupar es central en todos ellos, aunque el tamaño del agrupamiento puede ser diferente. En algunos casos se agrupa de diez en diez en otros de cinco en cinco o de veinte en veinte, etc. Al tamaño de los agrupamientos se le llama la base del sistema.

Para facilitar la representación de estos agrupamientos es que se introducen los símbolos. Las diferentes civilizaciones usaron símbolos diferentes para representar a los números.

Actualmente usamos el sistema de numeración decimal, de base 10, en el que se emplean 10 símbolos diferentes, llamados dígitos por estar relacionados directamente con los dedos de nuestras manos.

Estos dígitos son:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

El valor que adquiere cada uno de estos dígitos depende de la posición que ocupan en la escritura del número. Así por ejemplo, en el número 324 el dígito 4 representa 4 unidades, el 2 representa 2 decenas y el 3, tres centenas. Al valor que toma un dígito dependiendo de su posición en el número, se le llama el valor relativo del dígito. A los sistemas en los que los valores de las cifras dependen de la posición que ocupan en el número, se les llama sistemas posicionales.

Operar con números expresados en un sistema posicional y con cierta base, tiene grandes ventajas, ya que se pueden establecer métodos llamados algoritmos.

Desde el inicio en el aprendizaje de las matemáticas se han efectuado operaciones con los números por lo que en este capítulo sólo se verán algûnas de sus características.

La necesidad de medir surgió también desde las sociedas primitivas y fue indispensable con el advenimiento de la agricultura y el comercio. En tiempos remotos se usaban diferentes partes del cuerpo para efectuar estas mediciones. Por ejemplo, el brazo era la longitud del antebrazo desde el codo hasta la punta de los dedos, el pie era lo longitud de un pie, etc. Como unidades de capacidad y volumen se usaban medidas más bien vagas como la capacidad de una canasta o la carga de un barco.

Hay dos objeciones básicas a estas unidades de medida. La primera, que una unidad basada en el tamaño de una parte del cuerpo es diferente cuando es medida por diferentes personas, no puede ser uniforme. La segunda, que las diferentes medidas no guardan una relación entre sí.

Hoy en día las unidades siguen siendo variadas pero son uniformes, es decir, ha existido un acuerdo mundial para usarlas como el metro, la milla, el pie que son medidas de longitud lineales, o el kilogramo, la libra, etc. para medidas de peso. Por otro lado, se conoce la relación entre las diferentes medidas; por ejemplo:
1 pie = 12 pulgadas, 1 pulgada = 0.0232 *m* etc.

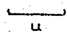
Cada una de ellas sirve para medir adecuadamente determinada cosa u objeto por ejemplo: una carretera se mide en kilómetros o millas, un insecto en centímetros o milímetros, un microbio en micras, una pieza de tela en metros; en un terreno, al medir su perímetro, se utilizan unidades lineales pero si se quiere medir su superficie se utilizan unidades cuadradas (m^2, km^2, Ha).

LOS NUMEROS NATURALES

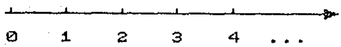
Son los números que se usaron para contar: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., etc.
Se representan en la recta numérica en base al concepto de medir. En virtud de que se utilizan ciertas unidades de longitud, se dice que

medir es contar el número de veces que cabe una longitud en otra y en consecuencia también se asocia un <u>número</u> a una <u>longitud</u>.

Sea el segmento U la <u>unidad de longitud</u> como se muestra a continuación:



Trazando una recta cualquiera y determinando un punto fijo 0 (cero) a partir del cual se coloca la unidad de longitud repetidas veces de tal forma que se asocio a cada longitud un <u>numero natural</u>:



los puntos suspensivos indican que se podría continuar con este proceso indefinidamente, lo cual señala que se trata de un <u>conjunto infinito</u>.

Podemos simbolizar este conjunto por extensión así:

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

En los cursos de primaria y secundaria se aprende a sumar, restar, multiplicar y dividir números naturales. Ahora se analizan algunos aspectos de las operaciones que los alumnos manejan en forma natural.

Considérese la siguiente suma de números naturales:

$$\begin{array}{r} 238 \\ 4275 \\ +\ 182 \\ 45 \\ 227 \\ \hline \end{array}$$

Para efectuarla se suman las unidades, decenas, centenas, etc. Esta se puede realizar en el orden en que se dan los números o bien cambiar el orden de ellos.

Así:

$$8 + 5 + 2 + 5 + 7 = 27$$

pero también si se ordena así:

$$8 + 2 + 5 + 5 + 7 = 27$$

o también:

$$7 + 5 + 2 + 5 + 8 = 27$$

El resultado es el mismo en los tres casos pero el manejo de los números es más rápido si se utiliza la segunda forma.

De igual manera se procede a sumar las decenas, las centenas y las unidaddes de millar agrupando a los números de forma tal que la suma se realice lo más rápido posible. Finalmente el resultado es:

$$\begin{array}{r} 238 \\ 4275 \\ +\quad 182 \\ 45 \\ 227 \\ \hline 4967 \end{array}$$

Al ordenar los números o guarismos de distintas formas, se está usando una de las propiedades de la suma de números naturales que es la <u>propiedad conmutativa</u>.

Otra de las propiedades que es muy usual para efectuar las sumas con mayor rapidez es la de agrupar cantidades cuando se tiene una suma con muchos números.

Veamos un ejemplo:

```
           283
            34
          1087       1404
        -----------------
           275
  +         62
           129        466
        -----------------
            72
          8432       8504
        -----------------
            62
           129        191
        -----------------
         10565      10565
```

es decir, se efectúa la suma tal como se presenta o la efectuamos agrupando de la siguiente manera. En ambos casos el resultado es el mismo:

$$(283 + 32 + 1087) + (275 + 62 + 129) + (72 + 8432) + (62 + 129)$$

La propiedad que permite agrupar los sumandos de distintas formas, es la <u>propiedad asociativa</u> de la suma de números naturales.

Al presentarse la operación de multiplicación como la siguiente:

```
     4387
  x    12
  -------
```

es común efectuarla multiplicando uno de los factores por cada uno de los digitos del otro factor y ordenarlos:

```
      4387
   x    12
  --------
      8774
     4387
  --------
     52644
```

o también, aunque menos común, de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r} 4387 \times 10 = 43870 \\ 4387 \times 2 = +8774 \\ \hline 52644 \end{array}$$

Al hacerlo de la segunda manera, se está usando la <u>propiedad distributiva</u>. También se puede cambiar el orden de los factores:

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 4387 \\ \hline 84 \\ 96 \\ 36 \\ 48 \\ \hline 52644 \end{array} \qquad \text{ó} \qquad \begin{array}{r} 4387 \times 2 = 8774 \\ 4387 \times 10 = 43870 \\ \hline 52644 \end{array}$$

los resultados no cambian por lo que se cumple también la <u>propiedad conmutativa</u> para la multiplicación.

Como se ha observado, las propiedades de las opeaciones con los números sirven para facilitar el operar con ellos. Alqunos ejemplos se exponen a continuación.

Para encontrar la suma de los primeros 100 números naturales consecutivos es posible efectuarla así:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 100 =$$

esto es sumando uno por uno los números. Utilizando las propiedades conmutativa y asociativa se tiene:

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (50 + 51)$$

si se ordenan de la siguiente forma y se suman verticalmente:

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \ldots + 49 + 50 \\ 100 + 99 + 98 + \ldots + 52 + 51 \\ \hline 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 \end{array}$$

se obtiene 50 veces el número 101 por lo que el total es:

$$50 \times 101 = 5050$$

(esta observación se le debe al famoso matemático aleman Carl Friedrich Gauss 1777-1855)

Utilizando ese mismo procedimiento se encontrará la suma de:

a) Los primeros 70 números naturales consecutivos.

b) Los primeros 49 números naturales consecutivos.

c) Los primeros números impares del 1 hasta el 49.

Solución:

a)

$$\begin{array}{rrrrr} 1 + & 2 + & 3 & + \ldots & + 35 \\ 70 + & 69 + & 68 & + \ldots & + 36 \\ \hline 71 + & 71 + & 71 & + \ldots & + 71 \end{array}$$

1+2+3+ ... +34+35+36+37+ ... +68+69+70

la respuesta es 71 x 35 = 2485

b)

$$\begin{array}{rrrrrr} 1 + & 2 + & 3 + & \ldots & + 24 & + 25 \\ 49 + & 48 + & 47 + & \ldots & + 26 & \\ \hline 50 + & 50 + & 50 + & \ldots & + 50 & + 25 \end{array}$$

1+2+3+ ... +24+25+26+ ... +47+48+49

la respuesta es (50 x 24) + 25 = 1225

c)

$$\begin{array}{rrrrrrrr} 1 + & 3 + & 5 + & 7 + & 9 + & \ldots & + 23 & + 25 \\ 49 + & 47 + & 45 + & 43 + & 41 + & \ldots & + 27 & \\ \hline 50 + & 50 + & 50 + & 50 + & 50 + & \ldots & + 50 & + 25 \end{array}$$

$1+3+5+\ \ldots\ +23+25+27+\ \ldots\ +45+47+49$

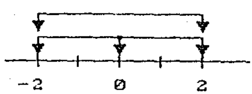
la respuesta es (50 x 12) + 25 = 625

LOS NUMEROS ENTEROS.

Estos números hacen su aparición cuando el hombre se ve en la necesidad de representar fenómenos naturales o sociales como son temperaturas, elevaciones de montañas o profundidades de barrancos, operaciones de crédito, nacimientos y mortandad, etc.

Este conjunto está formado por los números enteros <u>positivos</u> los números enteros <u>negativos</u> y el <u>cero</u>; los números enteros positivos son el conjunto de los números naturales de ahí que éste conjunto sea un subconjunto de los números enteros.

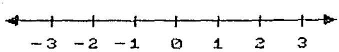
A cada número entero positivo le corresponde un número entero negativo, es decir, cada número entero positivo tiene su simétrico en la recta. Por ejemplo, el simétrico de 2 es −2, que es el número que está a la misma distancia del 0, pero en el otro lado de la recta



Así también a los números enteros negativos les corresponde un número entero positivo que es su simetrico. El número cero es el único que se corresponde con él mismo.

Para simbolizar situaciones como temperaturas sobre 0 y bajo 0, fechas antes y después de Cristo, etc. se usan los números enteros.

Siguiendo el criterio para representar a los números en la recta numérica usado anteriormente, se escoge un punto fijo llamado origen que corresponde con el número cero ubicándose los números positivos y negativos utilizando la unidad de medida.



También éste conjunto es <u>infinito</u> y se indica en la recta numérica por medio de las flechas. Simbólicamente se puede expresar este conjunto como:

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1. 2. 3. \ldots\}$$

Una de las propiedades de éstos números es la del <u>inverso aditivo</u> que dice: sumar un número entero con su inverso se cumple que el resultado es cero. Por ejemplo si <u>a</u> es un número entero y simbolizamos por <u>-a</u> a su inverso, se tiene:

$$a + (-a) = 0$$

Para sumar números enteros, se tienen los siguientes casos:

a) que los números enteros sean positivos, entonces la suma es un número entero positivo.

$$3 + 4 = 7$$

b) que los números enteros tengan distinto signo, entonces la suma se convierte en una diferencia y el signo del número que resulta será el del número que represente más unidades.

$$3 + (-5) = -2$$

c) que los números enteros sean negativos, entonces la suma es negativa.

$$(-3) + (-8) = -11$$

Con el siguiente ejemplo se verá lo anterior.

Los resultados mensuales de un desarrollo financiero informa de los ingresos y egresos de una compañía durante un semestre así como de los saldos.

(MILLARES DE PESOS)

	JUL.	AGS.	SEPT.	OCT.	NOV.	DIC.
INGRESOS	1295	1028	2373	1975	1875	2348
EGRESOS	498	1145	632	2035	429	1239
SALDOS	797	-117	1741	- 60	1446	1109
SALDOS ACUMULADOS	797	680	2421	2361	3807	4916

El saldo es la diferencia entre los ingresos menos los egresos.

El saldo acumulado, es la suma de los saldos.

Los saldos negativos en finanzas se dice que son "números rojos".

La operación de diferencia es una suma del minuendo y el in verso aditivo del sustraendo.

Para la multiplicación, operación que nos representa una suma en forma abrevida,observense los siguientes ejemplos:

$$(5)(-2) \quad =$$

nos indica que -2 se repite cinco veces:

$$-2 + (-2) + (-2) + (-2) + (-2)$$

es decir, sumar esos numeros da por resultado -10

Si se trata del producto de dos números enteros negativos:

$$(-3)(-2) \quad =$$

nos indica que -2 se va a sumar tres veces pero antecedido del signo negativo que lo convierte en inverso aditivo de -2:

$$+ -(-2) + -(-2) + -(-2) = 2 + 2 + 2 = 6$$

En conclusión, sobre la regla de los signos para la operación de multiplicación se tiene:

a) el producto de dos números enteros positivos, es positivo.

b) el producto de dos números enteros negativos, es positivo.

c) el producto de dos números enteros, uno positivo y el otro negativo, es negativo.

La división, que es la operación inversa de la multiplicación sigue la misma regla de los signos sólo que en lugar de producto será el cociente.

Es decir, el producto o el cociente de números enteros con signos iguales es positivo

$$\frac{12}{3} = 4 \qquad \frac{-12}{-3} = 4$$

El producto o el cociente de números enteros con distinto signo es negativo

$$\frac{-12}{3} = -4 \qquad \frac{12}{-3} = -4$$

LOS NUMEROS RACIONALES

El proceso de medir una cuarta parte de un capital o una y media veces la longitud de una tela, etc., introdujo el concepto de fracciones, quebrados o números racionales.

Los números enteros son insuficientes por lo que es necesario tener otros números que permitan simbolizar aquellas mediciones que no siempre son medibles con un número entero de veces la unidad de medida.

El conjunto de los números racionales se representa usualmente con la letra Q.

$$Q = \{\ldots, -\frac{2}{3}, \ldots, -\frac{2}{5}, \ldots, -\frac{1}{5}, \ldots, 0, \ldots, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{2}{5}, \ldots, \frac{2}{3}, \ldots\}$$

Un número racional es de la forma $\frac{p}{q}$ donde "p" y "q" son enteros y donde "q" es distinto de cero: también recibe el nombre de quebrado o fracción y representa un cociente, "p" recibe el nombre de numerador, dividendo o antecedente, "q" recibe el nombre de denominador, divisor o consecuente.

Se observa, en las siguientes figuras, lo que un número de la forma $\frac{p}{q}$ representa al considerar un cuadrado al que se divide en dos partes iguales, cada parte recibe el nombre de "mitad de un cuadrado" y que simbolicamente se escribe así: $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Si el mismo cuadrado se divide en cuatro partes iguales, cada parte recibe el nombre de "un cuarto de cuadrado".

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Continuando con esta rutina, de ir dividiendo cada vez más el cuadrado, se van obteniendo porciones cada vez más pequeñas:

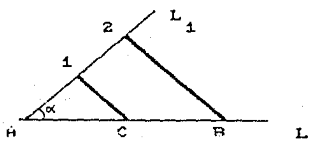
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

De la figura, se observa que $\frac{1}{4}$ es equivalente a $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$

Los números racionales o fraccionarios también tiene su lugar en la recta numérica sólo que para ubicarlos es necesario entender qué es lo que están representando.

Veámos cómo se puede representar en la recta numérica las partes en que se ha dividido el cuadrado anterior. Para ésto se utiliza una recta (L) cualquiera con dos puntos fijos: A y B que representa la unidad de medida y una regla graduada (L_1).

Colocamos la regla en lo que llamamos L_1 apoyada en A de tal manera que forme un ángulo α cualquiera con L. Uniendo el punto 2 con el punto B mediante una recta y después trazando otra recta paralela a la anterior a partir del punto 1, que se intersecte con el segmento $\overline{AB}$ en C



La figura que resulta tiene las siguientes características:

1) se ha formado dos triángulos: A1C y A2B.

2) dichos triángulos son semejantes, es decir, tienen sus ángulos respectivamente iguales por lo tanto sus lados son propor-

cionales. Es decir:

$\overline{A1}$ es $\overline{A2}$ como $\overline{AC}$ es a $\overline{AB}$

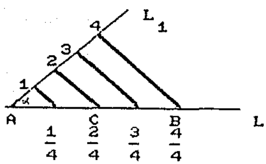
también se puede escribir así:

1: 2 :: $\overline{AC}$: $\overline{AB}$

o también: $\frac{1}{2} = \frac{AC}{AB}$

lo anterior indica que el punto C divide al segmento $\overline{AB}$ en dos partes iguales.

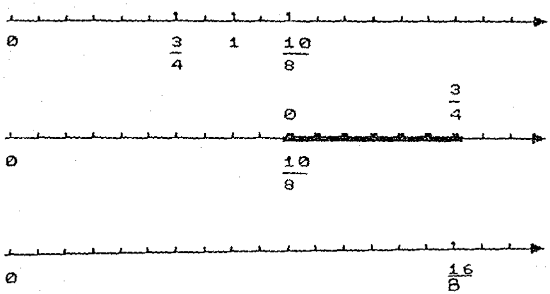
Ahora si se divide AB en cuatro partes, se procede de forma análoga de acuerdo a la siguiente figura:



En este caso también se han formado triángulos semejantes y el segmento $\overline{AB}$ ha quedado dividido en cuatro partes iguales que reciben el nombre de cuartos y que se escribe así: $\frac{1}{4}$ para expresar la longitud de una parte de la unidad que se ha dividido en cuatro partes iguales.

Cabe ahora hacer la pregunta: ¿se puede expresar la suma de dos números racionales en la recta numérica?

¡Claro que sí! pues éste concepto es análogo a colocar fisicamente dos segmentos que representen dichos números racionales uno a continuación del otro, por ejemplo: $\frac{3}{4} + \frac{10}{8}$



$$\frac{3}{4} + \frac{10}{8} = \frac{10}{8} + \frac{3}{4}$$

donde $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ ya que como se observó en la división de nuestro cuadrado, cada cuarto equivale a dos octavos:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$$

y por lo tanto se expresa la suma como:

$$\frac{3}{4} + \frac{10}{8} = \frac{6}{8} + \frac{10}{8} = \frac{16}{8}$$

Otro ejemplo es el siguiente:

Para sumar numéricamente $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ se procede así:

1) convertir $\frac{1}{2}$ a sextos es: $\frac{3}{6}$

2) convertir $\frac{2}{3}$ a sextos es: $\frac{4}{6}$

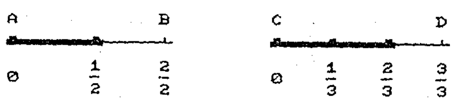
3) se escogen sextos porque es el mínimo común múltiplo de 2 y de 3.

Lo que se ha hecho es dar otra fracción o número racional equivalente y donde ambas fracciones tienen un mínimo común denominador.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$$

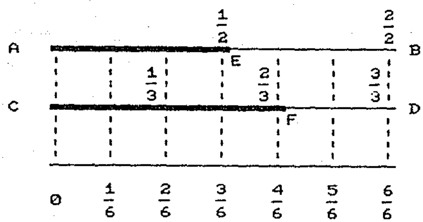
Visto geométricamente, ésto se representa con las siguientes figuras:

Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos iguales, el primero de ellos se divide en dos partes iguales y el segundo en tres partes iguales:



En las rectas numéricas siguientes se ubican las porciones de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

Para visualizar por qué se están convirtiendo las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ a $\frac{3}{6}$ y $\frac{4}{6}$ respectivamente, se ha procedido a dividir cada medio en tres partes iguales y cada tercio en dos partes iguales.



Por lo anterior, la suma de:

$$\overline{AE} + \overline{CF} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$$

Es decir, para sumar es más sencillo hacerlo con fracciones del mismo denominador.

Para la resta, operación inversa de la suma, tanto para el conjunto de los naturales, los enteros y los racionales, procemos a efectuarla como una suma, es decir, sumamos el minuendo con el inverso aditivo del sustraendo.

Ejemplo:

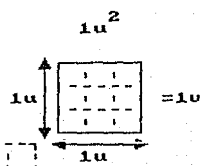
$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \left(-\frac{2}{3}\right)$$

para efectuar la suma convertimos las fracciones a un mismo común denominador:

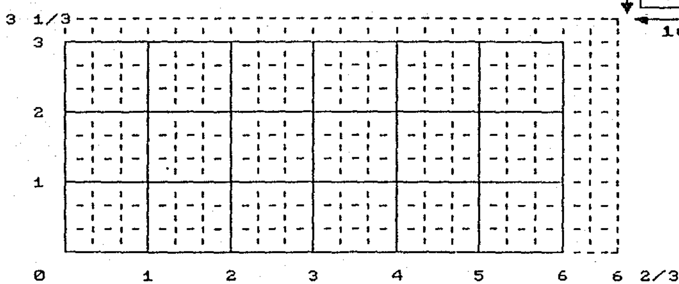
$$\frac{3}{6} + \left(-\frac{4}{6}\right) = -\frac{1}{6}$$

La necesidad de multiplicar los números fraccionarios se presenta cuando se trata de medir áreas y aparece en forma natural sobre todo cuando las figuras a medir son de forma rectangular.

Por ejemplo, se quiere medir un terreno que tiene forma de rectángulo y la unidad de medida es un cuadrado donde caben nueve cuadrados de lado $\frac{1}{3} * \frac{1}{3}$



De acuerdo con la siguiente figura:



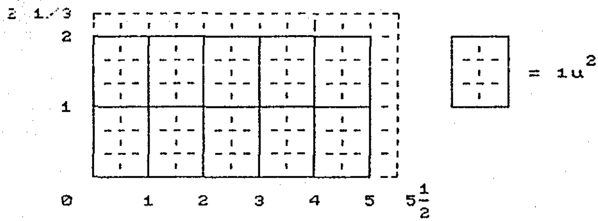
que tiene $6\frac{2}{3}$ de largo, $3\frac{1}{3}$ de ancho, y que en total, si se cuentan los cuadritos, se tiene:

$$[(6 \times 3) + 2] \text{ de largo por } [(3 \times 3) + 1] \text{ de ancho}$$

$$[20] \quad \times \quad [10] \quad = \quad 200 \text{ cuadritos}$$

Otro ejemplo:

Se desea saber el área de un terreno que tiene por lados $2\frac{1}{3}$ y $5\frac{1}{2}$ unidades respectivamente.



Los rectángulos, <u>unidades de área,</u> se dividen en pequeños rectángulos de $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$. Se observa que cada rectángulo tiene seis rectangulitos, es decir, que cada uno de ellos es la sexta parte de la unidad y como en el ejemplo anterior, se tiene:

$(2 \times 3 + 1) = 7$ rectángulos verticales y

$(5 \times 2 + 1) = 11$ rectángulos horizontales

Por lo anterior, el área del terreno es de 7×11 rectangulitos y, como son seis por unidad, el área del terreno estará dada así:

$$\frac{77}{6}$$

En estos ejemplos se observa que para efectuar la operación de suma de cuadritos o rectangulitos se han homogeneizado el largo y el ancho bajo una misma unidad de medida. Esto nos lleva a tener un mismo común divisor.

La división de números racionales puede ser tratada como una multiplicación de números racionales en la cual los factores sean el dividendo y el inverso multiplicativo del divisor, siempre y cuando éste sea distinto de cero. Todo número entero pueda ser representado como un número racional donde el denominador es la unidad.

$$\frac{7}{3} : \frac{2}{5} = \frac{7}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{35}{6} \qquad 7 : \frac{3}{4} = \frac{7}{1} : \frac{3}{4} = \frac{7}{1} \times \frac{4}{3} = \frac{28}{3}$$

Para el conjunto de números racionales se tiene la <u>propiedad del inverso multiplicativo</u> que es el número que al multiplicarse con su recíproco, da por resultado el número 1. El número 1 es llamado el <u>idéntico multiplicativo</u>.

Los ejemplos geométricos que se han presentado pueden dar una idea más clara de lo que son y representan los números racionales. A continuación se aprovecha la experiencia en el manejo de las operaciones, cuando al sumar, restar, multiplicar o dividir, se emplean algunas de las propiedades que facilitan su manejo. Para sumar números racionales, como se ha dicho, es conveniente tener el mismo común denominador. Sea el siguiente ejemplo:

$$\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}$$

Para sumar los números anteriores, se efectúa la agrupación de aquellos racionales que tengan el mismo denominador:

$$\frac{2}{4}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{2}{3} \quad = \quad \frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{2}{3}$$

Después de realizar esta suma, se calcula un común denominador de los tres números racionales

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{2}{3}$$

En este caso es 60 ya que es el mínimo común múltiplo. A continuación se convierte cada uno de los números racionales a otro equivalente con denominador igual a 60, es decir:

$$\frac{3}{4}=\frac{45}{60} \qquad \frac{3}{5}=\frac{36}{60} \qquad \frac{2}{3}=\frac{40}{60}$$

Por lo que la suma:

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{2}{3}$$

se convierte en:

$$\frac{45}{60}+\frac{36}{60}+\frac{40}{60} = \frac{131}{60}$$

que, si se cambia el orden de los sumandos resulta:

$$\frac{45}{60}+\frac{40}{60}+\frac{36}{60} = \frac{131}{60}$$

que también es el mismo, es decir, se ha utilizado la <u>propiedad</u>

<u>conmutativa</u> para la suma de los números racionales.

Si se coloca un paréntesis para agrupar a los dos primeros sumandos y se procede a efectuar la suma, ésta no cambia:

$$\left(\frac{45}{60}+\frac{40}{60}\right)+\frac{36}{60} \;=\; \frac{95}{60}+\frac{36}{60} \;=\; \frac{131}{60}$$

ésta propiedad o ley es la <u>propiedad asociativa</u> para los números racionales.

Otra forma en que agilizamos nuestras operaciones, por ejemplo en la multiplicación de fracciones, es conocer algunas propiedades reglas o leyes de dichos números. Para efectuar la siguiente operación:

$$\frac{2}{4} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \frac{1}{8} \times \frac{3}{2} \times \frac{16}{5}$$

se agrupan de la siguiente forma los factores

$$\left(\frac{2}{4} \times 4\right)\left(\frac{1}{2} \times 2\right)\left(\frac{1}{8} \times \frac{3}{2}\right)\left(\frac{16}{5}\right) \;=$$

efectuando las operaciones indicadas dentro de cada paréntesis

$$(2)(1)\left(\frac{3}{16}\right)\left(\frac{16}{5}\right) \;=\; 2\left(\frac{3}{16}\right)\left(\frac{16}{5}\right) \;=\; 2 \times \frac{3}{5} \;=\; \frac{6}{5}$$

ha sido más sencillo que efectuar el producto de todos los numeradores y dividir por el producto de todos los denominadores.

Se ha hecho uso de las <u>propiedades asociativa y conmutativa</u> para el producto de números racionales.

Todos los números racionales pueden ser representados como números decimales.

Si se tienen números racionales como: $\frac{1}{3}$ se pueden escribir como decimales efectuando el cociente indicado.

$$\text{Si } n = \frac{1}{3} \quad \text{entonces:} \qquad 3 \overline{\smash{)}\,1.0\,} \text{ cociente } 0.333$$

```
     0.333
3 / 1.0
     10
      10
       1
```

Se observa que el residuo siempre es 1, por lo cual en el cociente se repite indefinidamente la cifra 3.

$$\text{Si } n = \frac{1}{7} \quad \text{entonces}$$

```
    0.14285714
7 / 1.0
     30
      20
       60
        40
         50
          10
           30
```

Obsérvese que los residuos son siempre menores que el divisor o denominador y por lo tanto llega un momento en que alguno de ellos se repite. En el resultado de la division anterior, se repiten las mismas cifras y éste proceso es infinito.

Este tipo de decimales recibe el nombre de <u>decimales periódicos</u> y son los que a partir de cierto dígito repiten la misma o mismas cifras.

Ejemplo:

a) 1.000

b) $0.25\overline{25}$

c) $0.3\overline{3}$

en donde la línea horizontal indica que los números señalados se repiten indefinidamente.

Así:

$$\frac{1}{3} = 0.33\overline{3}$$

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$$

Todo número racional se puede expresar como un decimal periódico.

Si tenemos decimales periódicos como: $0.\overline{25}$ lo podemos escribir en forma de racional de la siguiente manera:

$$n = 0.\overline{25} \qquad \begin{array}{r} 100n = 25.\overline{25} \\ -\quad n = 0.\overline{25} \\ \hline 99n = 25 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad n = \frac{25}{99}$$

$$n = 0.33\overline{3} \qquad \begin{array}{r} 10n = 3.3\overline{3} \\ -\quad n = 0.3\overline{3} \\ \hline 9n = 3 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad n = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

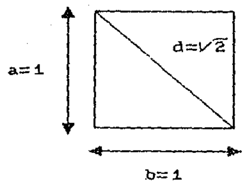
$$n = 8.901\overline{90} \qquad \begin{array}{r} 100000n = 890190.\overline{90} \\ -\quad 1000n = 8901.\overline{90} \\ \hline 99000n = 881289 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad n = \frac{881289}{99000}$$

El denominador siempre posee tantos <u>nueves</u> como cifras tenga la parte periodica, seguidos de tantos <u>ceros</u> como cifras no periódicas tenga el número decimal.

En cursos superiores se verá que, para denotar un decimal que no es finito se utiliza otra notacion.

LOS NUMEROS IRRACIONALES

El hombre al observar las figuras geometricas se dió cuenta de que no todas las longitudes de rectas se pueden repre - presentar por medio de números fraccionarios o racionales ya que la diagonal de un cuadrado de lado igual a la unidad, no puede repre - sentarse por medio de una fracción, por lo cual se tuvo la necesidad de extender el sistema de numeración para que contuviera a éstos números. A este conjunto de números se les denomina irracionales y se denota como $\mathbb{I}$ ó Q'.



De acuerdo con el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = a^2 + b^2$$

y como los lados son iguales a la unidad entonces

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

por lo tanto:

$$d = \sqrt{2}$$

Se demuestra que $\sqrt{2}$ no puede escribirse como un racional suponiendo que $\sqrt{2}$ si puede expresarse como un número racional:

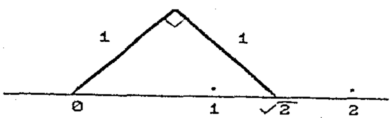
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

de tal manera que p y q no pueden simplificarse más por lo tanto p y q no son pares es decir múltiplos de dos.

$$\text{Si } \sqrt{2} = \frac{p}{q} \implies 2 = \sqrt{2}\sqrt{2} = \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} = \frac{p^2}{q^2}$$

por lo tanto $\frac{p^2}{q^2} = 2 \implies p^2 = 2q^2$ es decir p^2 es par y en consecuencia p es par por lo tanto podemos decir que $p = 2k$ para algún entero k, por lo tanto $p^2 = 4k^2$ e igual a $2q^2$ y ésto implica que $q^2 = 2k^2$ de donde q^2 es par y q es par!! y ésto es una contradiccion porque se supuso que p y q no eran números pares y por lo tanto $\sqrt{2}$ no puede escribirse en forma de racional.

Podemos representar algunos números irracionales en la recta numérica, por ejemplo $\sqrt{2}$ usando sus características particulares.



Un método mas general para ubicar a los números irracionales en la recta numérica consiste en acotar su valor, es decir, en acercarnos al número irracional tanto por la derecha como por la izquierda con números racionales bien determinados en la recta hasta que se obtenga un punto en la recta que sólo es asociado con un número irracional

Los números no periódicos son aquellos que a partir del punto decimal no repiten la misma cifra, es decir, que no se puede predecir cuál o cuáles son las cifras siguientes como en el caso del número que equivale a 3.1415... ó el número 1.017803... ó $\sqrt{2} = 1.41421...$los puntos suspensivos indican que sigue una infinidad de cifras que no se repiten.

Por todo lo anteriormente visto sobre los conjuntos de números podemos concluir lo siguiente:

1) $N \subset Z$

2) $Z \subset Q$

3) $Q \cup Q^{\sim} = R$

Existe una relación biunívoca entre la recta y los números decimales, es decir, que a cada punto de la recta le corresponde una expresión decimal y a cada expresión decimal le corresponde un punto sobre la recta. Esta propiedad se le conoce como completitud o completez de los números reales.

EL VALOR ABSOLUTO DE UN NUMERO REAL

En la recta numérica es la distancia de un punto cualquiera que nos representa a un número medido desde el origen, por ejemplo - para "x" un número cualquiera, la distancia que hay de él al origen-y la distancia de su inverso aditivo $(-x)$, también medida hasta el origen, es la misma. Estas distancias reciben el nombre de <u>valor absoluto</u> del número "x" y se simboliza así:

$$|x|$$

y se define de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

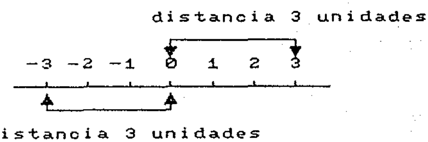
es decir que la distancia de un punto x, positivo al origen, es siempre el valor absoluto de x. La distancia de un punto x situado a la izquierda del origen es decir la distancia de un punto negativo al origen, es siempre positiva, es decir $-(-x)$

Ejemplos:

1) $|3| = 3$

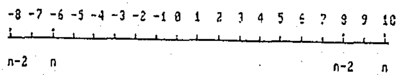
2) $|-3| = 3$

3) $|0| = 0$



4) Cuál es el valor de n si $|n - 2| = 8$

Si se representa en la recta numérica se tiene:



por lo tanto:

si $n - 2 = -8$ entonces $n = -6$

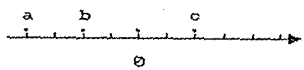
si $n - 2 = 8$ entonces $n = 10$

PROPIEDADES DE ORDEN DE LOS NUMEROS REALES

Al observar los números en la recta numérica y comparando tres de ellos se tienen las siguientes propiedades, considerando que, si $a<b$ entonces a está a la izquierda de b en la recta numérica.

i) <u>Propiedad Transitiva</u>. Si $a<b$, $b<c$ entonces $a<c$

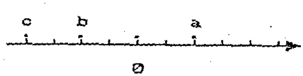
a) Si a es menor que b y b es menor que c, se concluye que a tambien es menor que c.



es decir a está colocado a la izquierda de b y b a la izquierda de c .

b) Si a es mayor que b y b es mayor que c se concluye que a es mayor que c , es decir a está colocado a la derecha de b y c.

Si $a>b$, y $b>c$ entonces $a>c$



ii) <u>Axioma de Comparación o de Tricotomía</u>

También se observa que al comparar cualquier pareja de números se cumple una y sólo una de las siguientes condiciones:

a) Los dos números son iguales $a = b$

b) El primero es menor que el segundo $a < b$

c) El segundo es menor que el primero $a > b$

iii) <u>Propiedades de Orden para la Suma</u>

a) Si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + d$

b) Si $a \geq b$, entonces $a + c \geq b + c$

En donde c representa a cualquier número real ya sea positivo o negativo.

c) Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$

d) Si $a \geq b$ y $c \geq d$ entonces $a + c \geq b + d$

iv) <u>Propiedades de Orden para el Producto</u>

a) Si $a \leq b$ y $c \geq 0$ entonces $ac \leq bc$

b) Si $a \geq b$ y $c < 0$ $ac \leq bc$

En donde a, b y c son números reales.

En esta propiedad se debe notar que, al multiplicar o dividir por un número negativo, el sentido de la desigualdad cambia.

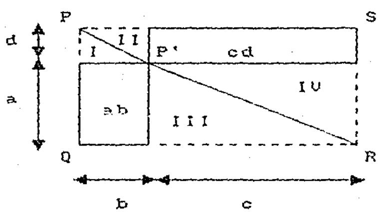
Veamos ahora las propiedades en forma geométrica ya que se cumple que, numéricamente, al sumar dos números se obtiene otro número y no se altera el resultado si se procede a cambiar el orden de la suma. ¿Pero qué sucede si se multiplican valores numéricos? es claro que se obtiene otro valor numérico. Y, ¿si se multiplican dos segmentos? se obtendrá otro segmento tal que su longitud sea igual al producto de las longitudes de los segmentos dados.

PROPIEDAD DE CERRADURA.

Sean a y b dos segmentos cualesquiera.

Numéricamente, si a mide "a" unidades y b mide "b" unidades, el producto será "a*b" unidades lo cual nos indica que el producto de segmentos está íntimamente ligado con el área del rectangulo que forman.

Por lo anterior, el producto de a*b, dos segmentos, será c, otro segmento. De acuerdo con la siguiente figura, se define el segmento d como la unidad de medida. Se colocan los rectángulos cuyas áreas son: a*b y c*d de tal forma que los lados de uno estén paralelos con los del otro y que se toquen sólo por un vértice (P'). Se prolongan sus lados hasta formar un rectángulo que los contenga al que se traza la diagonal que pase por el vértice (P').



En la figura se han formado los triángulos:

$\triangle PQR$ y RSP

los cuales son congruentes, es decir, si se recortan y se sobreponen uno sobre otro se ve que son iguales, coinciden en la longitud de sus lados y en la medida de sus ángulos. Por lo anterior se dice que:

el área de $\triangle PQR$ = al área de $\triangle RSP$

y por lo mismo, también los triángulos I y II son iguales y III y IV también.

área(I + III + a*b) = área(II + IV + c*d)

es decir:

área I = área II

área III = área IV

por lo tanto:

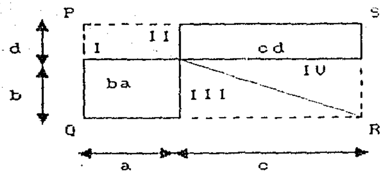
área a*b = área c*d

que era lo que se quería obtener, otro segmento tal que fuera el -- producto de a por b y en donde d sería la unidad de medida, es decir d = 1 entonces a*b = c donde c es otro segmento.

Esta propiedad nos dice que, dados dos elementos de un conjunto (en éste caso dos segmentos) bajo una operación cualquiera (el producto), el resultado debe ser uno de los elementos del conjunto.

PROPIEDAD CONMUTATIVA

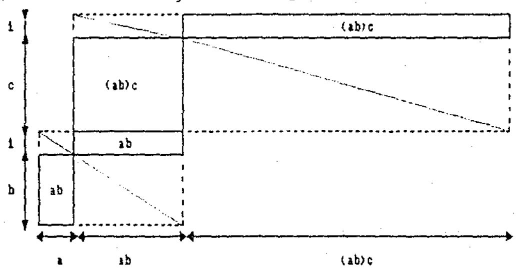
Con las condiciones anteriores para dibujar los segmentos - a, b, y d obsérvese la siguiente figura:

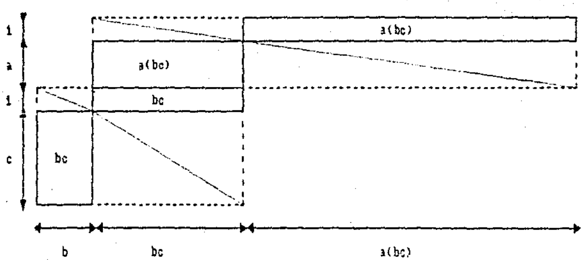


se han cumplido las condiciones que antes se enumeraron y que el producto de dos segmentos b por a tambien es otro segmento c que coincide con el de la figura primeramente vista por lo cual se dice que, el producto de dos números, los cuales esta asociados a la longitud de los segmentos, es conmutativo

PROPIEDAD ASOCIATIVA

Obsérvense las siguientes figuras:





Ahora son tres los segmentos: <u>a</u>, <u>b</u> y <u>c</u> con d = 1 donde, recuerdese, tienen una longitud determinada a la cual se le asigna un valor numérico.

En la primera figura se ha obtenido primeramente el producto a*b y después se ha multiplicado por <u>c</u>, para obtener como resultado el segmento: (a*b)c

En la segunda figura se ha calculado el producto b*c y posteriormente se ha multiplicado por <u>a</u> para obtener como resultado el segmento:

$$a(b*c)$$

Comparando se podrá observar que las longitudes son iguales es decir

$$(a*b)c = a(b*c)$$

Esta propiedad de los números recibe el nombre de <u>asociativa</u>.

Hasta aquí se ha visto que existe una relación entre el manejo geométrico de segmentos, adoptando uno de ellos como unidad de medida y la longitud del segmento asociada a un número para efectuar la multiplicación, tal que se pueda:

Primero: medir la longitud del segmento resultante

Segundo: medir los segmentos originales y luego multiplicar los números anteriormente obtenidos.

De cualquier forma, los resultados son los mismos. Esto indica que se puede trabajar con un álgebra de segmentos.

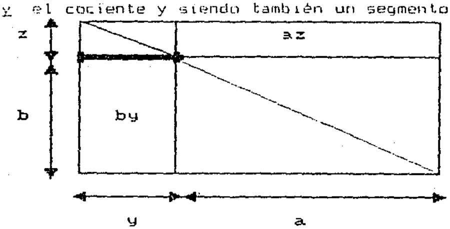
También se puede hacer uso del álgebra de segmentos para la suma, diferencia y el cociente.

PROPIEDAD DEL INVERSO

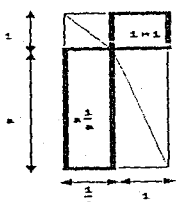
Para esta propiedad se realiza el cociente del segmento a entre el segmento b. Se escoge z, otro segmento, como unidad de medida de tal forma que, en la figura se cumple:

$$by = a \qquad y = \frac{a}{b}$$

resultando y el cociente y siendo también un segmento.



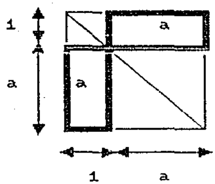
esta construcción permitirá definir otra propiedad de los números que es la del inverso multiplicativo y que es el cociente de la unidad entre un número cualquiera, ya que el producto de dicho número, multiplicado por su inverso multiplicativo, da como resultado la unidad.



$$a*\frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

PROPIEDAD DEL IDENTICO.

Otra propiedad es la del <u>idéntico multiplicativo</u> que nos- dice que todo número multiplicado por el idéntico no lo cambia. Para la multiplicacion el idéntico es la unidad.



$$1*a = a$$

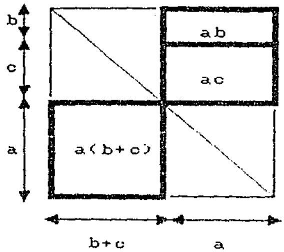
ésta propiedad, para la suma nos dice que, al sumar el idéntico aditivo con cualquiera de los elementos de un conjunto de números, no lo altera. Para la suma el idéntico es el cero.

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.

Una propiedad más de los números es la propiedad distributiva donde se conjugan las operaciones de suma y producto de tal forma que se define como:

$$a(b + c) = a*b + a*c$$

y que visto geométricamente se observa lo siguiente:



Hasta aquí se han mencionado las propiedades de las operaciones con los NUMEROS REALES. Se dice que éste conjunto de números forman un CAMPO porque cumplen con:

a) Ser un GRUPO ABELIANO ADITIVO.

b) Ser un GRUPO ABELIANO MULTIPLICATIVO

c) La verificación de la DISTRIBUTIVIDAD del producto respecto a la suma.

Ser un grupo abeliano significa que se cumplan las propiedades de cerradura, de conmutatividad, de asociatividad, de tener elemento idéntico y ser único así como que todos los elementos del conjunto tengan inverso.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Es común que se presenten problemas del tipo de adivinar cuál es el número que se ha pensado. Por ejemplo: "Escribe un número de tres cifras que hayas pensado sin que lo enseñes. Puede tener co-

ros no existe limitación. A continuación de ese número, vuelve a escribirlo obteniendo una cantidad de seis cifras. Divídelo entre 7. El cociente obtenido divídelo entre 11. También es divisible entre 11, es decir no habrá residuo. Ahora, éste nuevo residuo divídelo entre 13. La división es exacta. Dobla el papel de modo que no vea el número que has pensado y dámelo".

Se supone el número pensado:	145
Se repite el mismo número a continuación:	145145
Se divide entre 7:	20735
El resultado obtenido se divide entre 11:	1885
Nuevamente, el cociente obtenido se divide entre 13 obteniéndose el número pensado:	145

La explicación es la siguiente: el número

$$145145 = 145000 + 145$$

es decir 145 se ha multiplicado por mil y se ha sumado nuevamente el número original. Esto significa que el número 145 se ha multiplicado por 1001. Este número se puede expresar como el producto de:

$$7*11*13 = 1001$$

por lo que al multiplicar y dividir por el mismo número a cualquiera de los elementos del conjunto de reales, éste no se altera.

$$\frac{(1001)*145}{1001} = \frac{1001}{1001} * 145 = 1*145$$

¿Cuáles de las propiedades de los números reales se han utilizado en este caso?

2) Otro ejemplo semejante es el siguiente: "Piensa un número. Súmale 3, multiplica el resultado por 2. Al resultado réstale 4. Divídelo entre dos y por último resta el número que pensaste". La respuesta es uno en todos los casos sin importar qué tipo de

número es el que se pensó. Da un explicación de lo anterior y di qué propiedad se utiliza.

En los siguientes ejercicios enuncia la propiedad que representan.

3) Si $\frac{2}{3} = x$ y $x = y$, entonces $\frac{2}{3} = y$ se cumple ...

4) Si $(5 \times \frac{2}{7}) = \frac{10}{7}$ ...

5) Si $(4 + (-5)) = -1$ ...

6) Si $2(3 + 5) = 2*3 + 2*5$ ...

7) Si $2 + 1 = 1 + 2$ ...

8) Si $5*1 = 5$ ...

9) Si $2(5 + \frac{1}{3}) = 2*5 + 2*\frac{1}{3}$ ...

10) Si $(8 + 3) + 5 = 5 + (8 + 3)$ ...

11) Si $\frac{4}{7} + 0 = \frac{4}{7}$ ...

12) Si $(x + y)(a + b) = x(a + b) + y(a + b)$

En los siguientes ejercicios anota a la derecha de cada uno el inverso aditivo y el inverso multiplicativo.

		INVERSO ADITIVO	INVERSO MULTIPLICATIVO
13)	-5		
14)	7.45		
15)	$\frac{4}{9}$		

16) π

17) 5

18) $0.\overline{33}$

19) $4\frac{1}{5}$

20) -18.76

21) $-2\frac{2}{7}$

Dados los siguientes números decimales represéntalos como una fracción.

22) 0.45

23) $0.\overline{125}$

24) $0.87\overline{5}$

25) 0.5

26) 0.12

27) 2.4

28) $0.66\overline{6}$

29) 0.25

En los siguientes ejercicios resueltos explica, a la derecha de cada renglón, como se llega al resultado en base a las propiedades de los reales.

30) $\dfrac{7}{24} * \dfrac{16}{5} = \dfrac{7 * 16}{24*5}$ ____________________

31) $= \dfrac{7*2*8}{3*8*5}$ ____________________

32) $= \dfrac{14*8}{15*8}$ ____________________

33) $= \dfrac{14}{15}$ ____________________

34) $\dfrac{1}{3} : \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{3}*\dfrac{4}{3}$ ____________________

35) $= \dfrac{1*4}{3*3}$ ____________________

36) $= \dfrac{4}{9}$ ____________________

37) $\dfrac{3}{7} + \dfrac{7}{10} = \dfrac{3*10}{7*10} + \dfrac{7*7}{10*7}$ ____________________

38) $= \dfrac{30}{70} + \dfrac{49}{70}$ ____________________

39) $= \dfrac{77}{70}$ ____________________

Graficar cada uno de los siguientes conjuntos sobre recta numérica.

40) $\{x/x \in Z \text{ y } -4<x<6\}$

41) $\{x/x \in R \text{ y } x>-\dfrac{5}{3}\}$

42) $\{x/x \in Z \text{ y } -\dfrac{7}{2}< x < \dfrac{9}{4}\}$

43) $\{x/x \in R \text{ y } x< -\dfrac{1}{2}\}$

44) $\{x/x \in R \text{ y } 2<x<6\}$

45) $\{x/x \in R \text{ y } 6>x<2\}$

46) $\{x/x \in R \quad x<6 \text{ ó } x<2\}$

47) $\{x/x \in R \quad x>2 \text{ ó } x<6\}$

48) Ordenar los siguientes números mediante la relación "<" menor que:

$3,\ 1.5,\ -4,\ 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{5},\ 3.1415...$

Completar las siguientes desigualdades con el número o signo correspondiente.

49) Si $0 / 3$ y $3 / 9 \Longrightarrow 0$ ____

50) Si $5 > 2$ y $2 > -2 \Longrightarrow 5$ ____

51) Si $3 < 5 \Longrightarrow 3 - 4$ ____ $5 - 4$

52) Si $10 > 8 \Longrightarrow 10 - 5 >$ ____

53) Si $-4 < 0$ y $8 < 10 \Longrightarrow -4 + 8$ ____ $0 + 10$

54) Si $7 > 3$ y $6 > 2 \Longrightarrow 7 + 6$ ____ $3 + 2$

55) Si $5 < 11 \Longrightarrow 5*6$ ____ $11*6$

56) Si $-2 < -1 \Longrightarrow \frac{-2}{4}$ ____ $\frac{-1}{4}$

57) Si $8 > 5 \Longrightarrow \frac{8}{-3}$ ____ $\frac{5}{-3}$

CAPITULO II

EL LENGUAJE ALGEBRAICO

Cuando se habla de matemáticas, el solo hecho de escuchar este vocablo hace que la mayoría de las personas, presenten una actitud de rechazo hacia esta area del conocimiento, esto se debe en gran medida, según considéro, a la manera mecanica en que se introduce a los alumnos en esta disciplina.

Uno de los tropiezos fundamentales es el de aprender un nuevo lenguaje de simbolos, diferente al lenguaje natural, que la matematica utiliza para interpretar los fenomenos que rodean a los individuos.

Otro de los obstaculos es que algunas otràs ramas y conceptos de la matemática no tienen una aplicación inmediata pero son el sustento de otro tipo de conocimientos.

Tratando de resolver el primero de los tropiezos, a continuación se presenta una serie de problemas que, de algún modo, representan aspectos cotidianos y que pueden resolverse con sólo utilizar algún diagrama o las operaciones fundamentales.

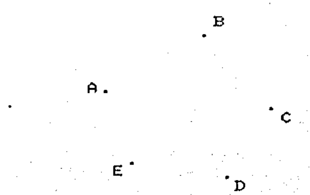
El razonamiento para encontrar el modelo que lleve a la solución es lo que para la mayor parte de las personas presenta cierto grado de dificultad que sólo puede ser abatido con la constante ejercitación.

Se observará que en la solución de algunos problemas, el desarrollo operacional es extenso y laborioso, o que, para dar contestación a otra pregunta que involucre números mayores o aproximaciones más exactas, el desarrollo es reiterativo y tedioso, pero sin embargo se llega a la solución.

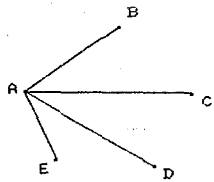
MISCELANEA DE PROBLEMAS

1) Se quiere conocer el número de juegos que realizan cinco equipos de futbol suponiendo que no hay empates y que todos juegan contra todos.

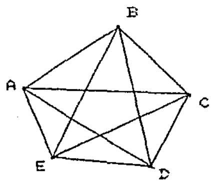
Una forma de encontrar la solución es simbolizando los equipos y los juegos efectuados con puntos y líneas respectivamente, es decir, llamamos a los equipos A, B, C, D y F y a cada letra le asociamos un punto:



Para responder la pregunta: ¿con quiénes juega el equipo A?, se re-representa cada juego por una línea, obteniendo el siguiente diagrama en el que se observa que se han realizado cuatro juegos.

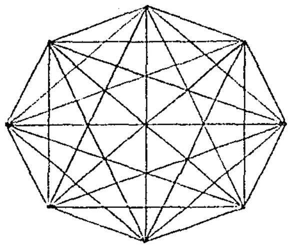


De la misma manera se establecen los juegos que realizan los demás equipos hasta, tener representados en un solo diagrama todos los juegos que realizan cada uno de los equipos.



Contando el número de líneas tendremos el número de juegos realizados. En total son diez juegos.

Si se quiere conocer el número de juegos que realizan 8 -- equipos, se tiene el siguiente diagrama.

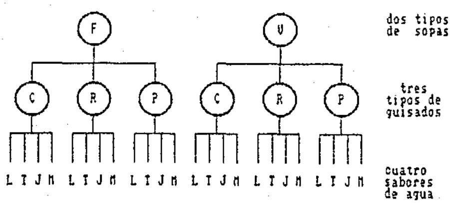


Contando las líneas, se tiene que son 28 los juegos que se realizan dadas las condiciones iniciales.

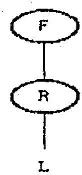
Al preguntar: ¿cuántos son los juegos que se realizan con- 9, 10, 11, 12, ..., etc. equipos?, cada vez sería más complicado el diagrama y por la cantidad de líneas es fácil que exista confusión, pero se puede obtener la respuesta.

2) En un restaurante hay dos tipos de sopas: fideos y verduras; tres guisados: con carne de cerdo, de res y de pollo; cuatro sabores de aguas frescas: limón, tamarindo, jamaica y melón. Se quiere saber ¿cuántas comidas distintas podría ofrecer el restaurante?

El siguiente diagrama podrá auxiliarnos:



En este diagrama están representadas las distintas comidas que puede ofrecer el restaurante. Como ejemplo se puede ver la siguiente porción del diagrama:

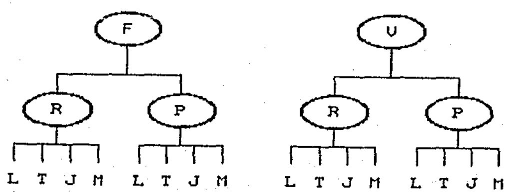


representa la comida que consta de sopa de fideo, guisado de res y agua de limón.

Se observa que el número de comidas distintas es 24. Para obtener este número podemos multiplicar el número de sopas, por el número de guisados y por el número de aguas frescas.

$$2 \times 3 \times 4 = 24$$

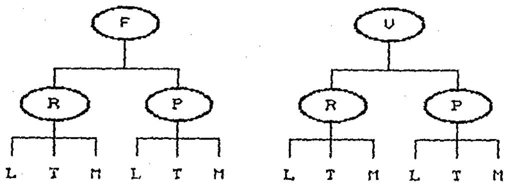
También es posible hacer otras combinaciones suponiendo que no a todos les gusta tomar carne de cerdo; para construir el diagrama sólo consideraríamos dos sopas, dos guisados y cuatro sabores de agua:



Observamos que el número de comidas distintas son 16, que podemos obtener efectuando la siguiente multiplicación:

$$2 \times 2 \times 4 = 16$$

también puede ser que a alguien, además de no gustarle la carne de cerdo, no le guste determinada agua fresca y entonces sus posibles combinaciones se reducen todavía más:



En este caso el número de comidas distintas es 12, que se puede obtener efectuando la siguiente multiplicación.

$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

Como se advierte, también la solución a este problema se puede obtener mediante un diagrama.

3) a) Se quiere conocer el número de placas que cualquier estado de la República tiene a disposición de los usuarios con la combinación de tres letras: L, M, T por ejemplo y los números dígitos para formar combinaciones alfa-numéricas de seis caracteres donde los tres primeros deberán ser literales y los tres siguientes dígitos.

En el siguiente diagrama se representa la placa:

En cada uno de los tres primeros lugares podemos colocar cualquiera de las tres letras y en cada uno de los tres últimos, cualquier dígito, de esa manera, cada uno de los tres primeros lugares se puede llenar de tres formas distintas y cada uno de los tres últimos de diez formas distintas.

$\frac{3}{\text{letra}}$	$\frac{3}{\text{letra}}$	$\frac{3}{\text{letra}}$	$\frac{10}{\text{digito}}$	$\frac{10}{\text{digito}}$	$\frac{10}{\text{digito}}$

es decir, el número de placas es :

$$3 \times 3 \times 3 \times 10 \times 10 \times 10 = 27{,}000$$

b) Si se considera la restricción de que no se repitan ninguna de las letras y de los números en cada placa, se tiene:

$\frac{3}{L}$	$\frac{2}{L}$	$\frac{1}{L}$	$\frac{10}{D}$	$\frac{9}{D}$	$\frac{8}{D}$

El primer lugar podría ser ocupado por cualquiera de las tres letras, el segundo lugar sólo por las dos restantes y el tercer lugar por la única letra posible. El mismo criterio sería para los dígitos. El resultado es, entonces:

$$3 \times 2 \times 1 \times 10 \times 9 \times 8 = 4,320$$

c) Si la restricción es que ninguno de los dígitos se repita, se tiene el siguiente diagrama:

$\frac{3}{L}$	$\frac{3}{L}$	$\frac{3}{L}$	$\frac{10}{D}$	$\frac{9}{D}$	$\frac{8}{D}$

y el resultado es:

$$3 \times 3 \times 3 \times 10 \times 9 \times 8 = 19,440$$

En el caso de que las letras no se repitan y los números pueden ser cualesquiera de los mencionados, se tiene el diagrama:

$\frac{3}{L}$	$\frac{2}{L}$	$\frac{1}{L}$	$\frac{10}{D}$	$\frac{10}{D}$	$\frac{10}{D}$

y el resultado es:

$$3 \times 2 \times 1 \times 10 \times 10 \times 10 = 6,000$$

4) Una familia recibirá una herencia de \$12'000,000 repartida como sigue: la viuda recibe la tercera parte de la herencia y el resto se repartirá en partes iguales para cada uno de sus tres hijos. ¿Qué cantidad de dinero recibirá cada uno de los integrantes de la familia?

La viuda recibe la tercera parte de \$12'000,000

$$\frac{1}{3} \times 12'000,000 = \frac{12'000,000}{3} = 4'000,000$$

el resto de la herencia o sea \$8'000,000 que representan las dos terceras partes restantes, se reparten entre los tres hijos por partes iguales:

$$\frac{8'000,000}{3} = 2'666,666.67$$

o sea que a cada uno de los hijos le corresponde dicha cantidad.

Cabe recordar que, en operaciones de tipo comercial, con frecuencia se calcula el beneficio, la perdida, la rebaja etc. en relación a 100 unidades. Los problemas que de ello resultan se llaman de <u>tanto por ciento</u>. Por ejemplo: al decir que el maiz da el 80 por ciento (80%) de harina, se quiere indicar que de 100Kg de maiz producen 80kg de harina y el resto, 20 kg será salvado (cascarilla del maiz). Si se tuvieran 150 kg de maiz, el 80% serían 120 kg de harina.

El tanto por ciento significa tambien centésimas, ésto es, el 15% de 120 son 15 centésimas de 120, es decir:

$$120 \times \frac{15}{100} = 120 \times 0.15$$

5) Un equipo de beisbol ha ganado 90 partidos de un total de 100 partidos jugados y le restan 60 partidos por jugar. ¿Cuántos de ellos tiene que ganar par obtener por lo menos el 80% de partidos ganados en la temporada?

El total de partidos que se juegan en la temporada es de 160 partidos, es decir los cien jugados, mas sesenta por jugar. Como se quiere ganar por lo menos el 80% de todos los partidos, se tiene que:

$$160 \times 0.8 = 128$$

es el número total de partidos que cuando menos se deberán ganar.

De este total de partidos ya se jugaron y ganaron 90 por lo tanto, la diferencia entre el total de partidos que como mínimo deben ganar y los ya ganados, será el número de partidos que tendrán que ganar para obtener por lo menos el 80% de partidos ganados:

$$128 - 90 = 38$$

6) A un obrero le ofrecen un sueldo semanal de $48,000.00. Antes le pagaban en efectivo $ 41,000 pero le habían descontado el 4% de impuesto y el 10% de su seguro de vida. ¿Qué pago es el que le conviene más?

La cantidad de $41,000 corresponde al 86% del total de su salario ya que le habían descontado en total un 14% entre impuesto y seguro de vida. Con lo anterior, la pregunta es: ¿cuál es la cantidad que representa el 100% de su salario?

Para contestarla se establece una relación entre las cantidades que corresponden al salario y los porcentajes que éstas representan.

41,000 es el 86%, entonces: $\dfrac{41,000}{86} = 476$ que representa el 1% de su salario por lo que:

$476 \times 100 = 47,600$, representa el 100% de su salario.

El ofrecimiento sería que el salario que es conveniente es el de $49,000 aunque sea por unos cuantos pesos mas.

Los problemas que se han presentado hasta este momento no representan mayor dificultad en su solución pues solo han intervenido en ellos las operaciones básicas de suma, producto, diferencia o cociente. En el primero y segundo problemas, la grafica ha sido un gran auxiliar y con sólo contar las posibles combinaciones, se encuentra el resultado.

El tercero y cuarto problema requirió de efectuar multiplicaciones para obtener la respuesta.

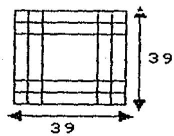
El quinto y sexto para su solución requirieron del concepto de porcentajes y de efectuar multiplicaciones y divisiones.

En realidad, la simbolización de estos problemas ha sido tan obvia que, desde los primeros estudios de la matematica el alumno la ha aplicado.

Cuando los problemas a resolver corresponden a la geometría ya intervienen en éstos, otro tipo de simbolización. Ya no sólo es conveniente usar los numeros reales y los signos de operación sino que es necesario introducir alguna o algunas letras que representen los datos necesarios.

Si se quiere conocer el perímetro de un rectángulo, es necesario recordar que es un perímetro, qué es un rectangulo, de cuántos lados consta una figura geométrica, en este caso el rectángulo. Para representar lo anterior, se hace uso de las literales. También para el volumen y superficies de figuras geométricas es necesario conocer ciertas carateristicas de las figuras o cuerpos de los cuales se nos presenta una o varias incognitas.

7) Calcula la superficie de un terreno que tiene la forma de un cuadrado cuyo lado mide 39 m.



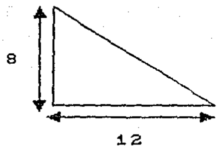
Si el terreno se cuadricula utilizando como unidad de medida un cuadrado cuyo lado es de un metro cuadrado, cabrían en dicho terreno

$39 \times 39 = 1521$ metros cuadrados

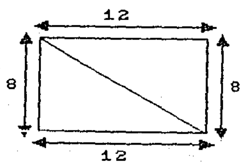
En el caso anterior se ha efectuado una multiplicación de la medida de un lado por la medida del otro.

Esto se hace extensivo para encontrar el área de un -- rectángulo sólo que en lugar de ser lados iguales se tienen dos medidas distintas que son largo y ancho y el área es el producto de estas dos medidas.

8) Se quiere conocer el área de un triángulo rectángulo que mide de base 12 m y de altura 8 m



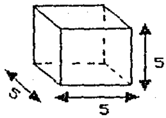
Se tiene un rectángulo que tiene por lado 12 m y de ancho 8 m, trazando una diagonal se obtienen dos triángulos rectángulos de base 12 y de altura 8, por lo que el área de cada triángulo será igual a la mitad del área del rectángulo.



ésto es: $\dfrac{12 \times 8}{2} = 48 \text{ m}^2$

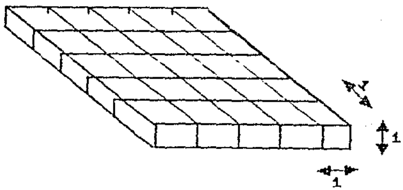
9) ¿Cuál es el volumen de un cubo cuyos lados tienen una longitud de 5 cm?

En la siguiente figura se anotan los datos del problema:



Si se colocan sobre su base un conjunto de pequeños cubos que midan 1 cm x 1 cm x 1 cm se tienen 25 de éstos.

La base tiene por medidas 5 x 5 y al colocar los cubitos como se ilustra en la siguiente figura, dan una altura de 1 cm.

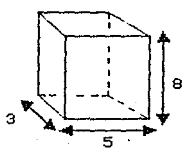


Si se coloca otro tanto de esos cubitos, se tienen 50 y una altura de 2 cm. En el problema se considera una altura de 5 cm por lo que habrá que colocar cinco tantos como los que se tienen en el primer nivel que son 25, dando un total de:

$$25 \times 5 = 125$$

El volumen del cubo es entonces, $5 \times 5 \times 5 = 125$

10) Calcula el volumen de un prisma rectangular cuya base tiene medidas 5 cm y 3 cm y cuya altura es de 8 cm.



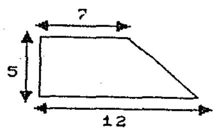
Considerando que el prisma se llena con pequeños cubos de un centímetro por lado, en la base se tienen quince cubos donde la altura de esta capa es de 1 cm.

Enseguida se coloca otra capa con el mismo número de cubos que con la anterior se tienen en total 30 cubos y así se continuaría hasta llenarlo, teniéndose en total ocho capas de 15 cubos cada una. En total se tiene

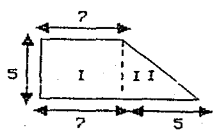
$$15 \times 8 = 120 \text{ cubos de un } cm^3$$

El volumen del prisma es entonces $3 \times 5 \times 8 = 120\ cm^3$

11) Calcula el área de un trapecio rectangular cuya base mayor mide 12 cm, base menor 7 cm y su altura es de 5 cm.



En la figura, se traza una recta perpendicular a la base que parta del vértice de la base menor, con lo anterior, la figura se ha dividido en un rectángulo y un triángulo cuyas medidas se anotan a continuación:



Para obtener el área del trapecio será necesario sumar el área I y el área II.

Area I = $7 \times 5 = 35$ cm² ya que el largo mide 7 cm y el -- ancho es igual a 5 cm

$$\text{Area II} = \frac{5 \times 5}{2} = \frac{25}{2} = 12.5 \text{ cm}^2$$ ya que la base y la altura miden lo mismo.

Por lo anterior, el área del trapecio es:

$$\text{Area I} + \text{Area II} = 35 + 12.5 = 47.5 \text{ cm}^2$$

12) Se tiene un capital de $100,000.00 en un banco que ofrece una tasa de interés del 20% anual. Se quiere saber, al cabo de tres años, qué capital se tendrá si los intereses causados cada año se suman al capital.

Es muy probable que éste tipo de planteamiento se presente al alumno de manera directa o indirecta y que lo haya tratado de resolver de alguna forma. A continuación se presenta una tabla-donde se observa con claridad los pasos que se han seguido para llegar al resultado

TIEMPO (anos)	CAPITAL INVERTIDO	INTERESES	CAPITAL + INTERES AL FINAL DEL ANO
1	100,000	100,000*0.20 = =20,000	100,000 + 20,000= =120,000
2	120,000	120,000*0.20 = =24,000	120,000 + 24,000= =144,000
3	144,000	144,000*0.20 = =28,800	144,000 + 28,800= =172,800

El resultado es $172,800.00 al final del tercer año. Pero, ¿que pasaría si en lugar de conocer el monto del capital más los intereses al cabo de tres años se pide conocerlo hasta los quince años? El proceso sería el mismo pero mucho más tardado, por lo que hay que encontrar un modelo matemático que permita encontrar la solución y que sirva también para resolver otros problemas de éste tipo.

13) A un depósito de agua llega el líquido a razón de 10 litros por segundo y salen 5 litros en el mismo tiempo. Si el tanque está ocupado por agua hasta la mitad y se abren simultáneamente las llaves de entrada y salida, en qué tiempo se llenará sabiendo que tiene una capacidad de 500 litros.

Se tienen los siguientes datos:

a) hay en el depósito 250 lts.

b) se llena a razón de 10 lts/seg

c) se vacía a razón de 5 lts/seg

d) el depósito tiene una capacidad de 500 lts

A continuación se presenta una tabla en la que se observa el llenado del tinaco al cabo de 20, 30, 40, 50 y 60 seg

TIEMPO TRANSCURRIDO (seg)	AGUA CONTENIDA INICIALMENTE (Lts)	LLENADO 10 Lts/s	VACIADO 5 Lts/s	CANTIDAD DE AGUA AL CABO DEL TIEMPO
20	250	+ 10(20)	- 5(20)	= 350
30	250	+ 10(30)	- 5(30)	= 400
40	250	+ 10(40)	- 5(40)	= 450
50	250	+ 10(50)	- 5(50)	= 500
60	250	+ 10(60)	- 5(60)	= 550

De los resultados anteriores se observa que los datos del problema se satisfacen cuando han transcurrido 50 segundos ya que es cuando el tanque se llena.

Este metodo de tanteo ha permitido llegar a la solución pero ¿qué pasará si en lugar de sólo hacer tres, cuatro o cinco tanteos se tuviera necesidad de mas?

En los problemas anteriores es claro que no ha sido dificil resolver problemas con sólo aplicar las operaciones elementales y algunos conocimientos sobre geometria, física, porcentajes o simplemente tener un poco de imaginación.

En realidad, en el estudio que se ha tenido de la matemámatica desde la educación basica se ha enfrentado al alumno a muy diversos modelos algebraicos como son las fórmulas utilizadas en geometria para calcular áreas y volúmenes.

$$A = l^2 \quad \text{(área del cuadrado)}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{(volumen de una esfera)}$$

$$A = Bh \quad \text{(área de un rectangulo)}$$

También ha utilizado modelos algebráicos en su estudio de la física como:

$$P = \frac{F}{S} \quad \text{(presión)}$$

$$E = PeV \quad \text{(empuje)}$$

$$A = \frac{I}{d^2} \quad \text{(superficie iluminada)}$$

$$F = G \frac{Mm}{d^2}$$ (Ley de Gravitacion de Newton)

En quimica se ha utilizado cierta simbolización para los distintos compuestos o sustancias que al unirse formen determinada reacción:

$$2Na + Cl_2 \longrightarrow 2NaCl$$

En geografía se han conocido las escalas con que se mide en el mundo la temperatura y son también modelos:

Grados Farenheit $$F = \frac{9}{5} C + 32$$

Grados Centigrados $$C = (F - 32)\frac{5}{9}$$

Para levantar un censo ya sea de población, ganadero o agrícola, también se tiene el auxilio de modelos para obtener índices de: mortalidad, natalidad, población escolar; clasificación del tipo de ganado como pueden ser de: engorda, para sacrificio, en reproducción, etc.; en la agricultura también se dan índices sobre: el tamaño de los granos, cantidad de cosecha de acuerdo con determinadas condiciones, etc.

Como se observa, los modelos algebraicos se encuentran en todos los renglones de actividades a las que toda persona, destinada a desempeñar un trabajo, debe enfrentarse.

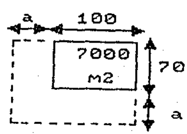
En los problemas que a continuación se plantean, se intoducirán modelos algebráicos, es decir, aquellos en que existe alguna o algunas literales que representan números que desconocemos y que juegan el papel muy importante de incógnitas.

En matemáticas se parte de situaciones concretas para formular modelos que utilizan una serie de símbolos y que, a través de ellos se determinen ciertas analogías y generalizaciones que permitan conformar una teoría matemática. Es importante considerar a la matemática como una herramienta y un método en constante desarrollo y vinculada con otras disciplinas. La matemática es un lenguaje que permite la comunicación en forma oral o escrita.

Este lenguaje, además de utilizar numerales, literales, signos de operación, signos de igualdad y de desigualdad, también usa signos de agrupación como son los paréntesis en sus distintas formas: ( ), [ ], { }. Estos signos como se recordará precisan las operaciones que tienen prioridad, y debe cuidarse no abusar de su uso.

En el siguiente problema, se introduce la literal "a" que relaciona al largo con el ancho de una pista de patinaje. Se usó "a" como pudo haberse usado cualquier otra literal. El proceso para llegar a la solución está especificado paso por paso de una manera aritmética.

14) Una pista de patinaje que mide 100 metros de largo por 70 metros de ancho requiere ser remodelada aumentado su superficie a 13,800 m^2, incrementando la misma longitud en su ancho como en su largo. ¿Cuánto debe medir de ancho la franja que se debe de aumentar?



$$F = G\frac{Mm}{d^2}$$ (Ley de Gravitación de Newton)

En química se ha utilizado cierta simbolización para los distintos compuestos o sustancias que al unirse formen determinada reacción:

$$2Na + Cl_2 \longrightarrow 2NaCl$$

En geografía se han conocido las escalas con que se mide en el mundo la temperatura y son también modelos:

Grados Farenheit $F = \frac{9}{5}C + 32$

Grados Centígrados $C = (F - 32)\frac{5}{9}$

Para levantar un censo ya sea de población, ganadero o agrícola, también se tiene el auxilio de modelos para obtener índices de: mortalidad, natalidad, población escolar; clasificación del tipo de ganado como pueden ser de: engorda, para sacrificio, en reproducción, etc.; en la agricultura también se dan índices sobre: el tamaño de los granos, cantidad de cosecha de acuerdo con determinadas condiciones, etc.

Como se observa, los modelos algebraicos se encuentran en todos los renglones de actividades a las que toda persona, destinada a desempeñar un trabajo, debe enfrentarse.

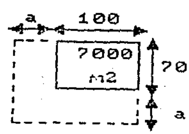
En los problemas que a continuación se plantean, se intoducirán modelos algebráicos, es decir, aquellos en que existe alguna o algunas literales que representan números que desconocemos y que juegan el papel muy importante de incógnitas.

En matemáticas se parte de situaciones concretas para formular modelos que utilizan una serie de símbolos y que, a traves de ellos se determinen ciertas analogías y generalizaciones que permitan conformar una teoría matemática. Es importante considerar a la matemática como una herramienta y un metodo en constante desarrollo y vinculada con otras disciplinas. La matemática es un lenguaje que permite la comunicación en forma oral o escrita.

Este lenguaje, además de utilizar numerales, literales, signos de operación, signos de igualdad y de desigualdad, también usa signos de agrupacion como son los paréntesis en sus distintas formas: ( ), [ ], { }. Estos signos como se recordará precisan las operaciones que tienen prioridad, y debe cuidarse no abusar de su uso.

En el siguiente problema, se introduce la literal "a" que relaciona al largo con el ancho de una pista de patinaje. Se usó "a" como pudo haberse usado cualquier otra literal. El proceso para llegar a la solución está especificado paso por paso de una manera aritmética.

14) Una pista de patinaje que mide 100 metros de largo por 70 metros de ancho requiere ser remodelada aumentado su superficie a 13,800 m², incrementando la misma longitud en su ancho como en su largo. ¿Cuanto debe medir de ancho la franja que se debe de aumentar?



El planteamiento del problema es claro en el diagrama anterior. Ahora es necesario asignarle determinados valores a la variable "a" para encontrar en cuál de ellos el área del rectángulo resulte igual a 13,800 m².

Este proceso lleva por consiguiente a efectuar varios cálculos hasta aproximarse, o tener el valor igual al área pedida.

El área del rectángulo está dada por el producto del largo por el ancho, o sea, se quiere que:

$$(70 + a)(100 + a) = 13,800$$

Si sucede que:

a = 10	(70 + 10)(100 + 10)	= 80 x 110	= 8,800
a = 12	(70 + 12)(100 + 12)	= 82 x 112	= 9,194
a = 15	(70 + 15)(100 + 15)	= 85 x 115	= 9,775
a = 20	(70 + 20)(100 + 20)	= 90 x 120	= 10,800
a = 25	(70 + 25)(100 + 25)	= 95 x 125	= 11,250
a = 30	(70 + 30)(100 + 30)	= 100 x 130	= 13,000
a = 32	(70 + 32)(100 + 32)	= 102 x 132	= 13,464
a = 33	(70 + 33)(100 + 33)	= 103 x 133	= 13,699
a = 34	(70 + 34)(100 + 34)	= 104 x 134	= 13,936

Se observa que el valor del área buscada se encuentra al agregar una franja cuyo ancho está entre 33 y 34 m. En la siguiente aproximación no se utilizan números enteros.

Si a = 33.1 (70 + 33.1)(100 + 33.1) = 103.1 x 133.1 = 13,722.61

$a = 33.3 \quad (70 + 33.3)(100 + 33.3) = 103.3 \times 133.3 = 13{,}769.89$

$a = 33.4 \quad (70 + 33.4)(100 + 33.4) = 103.4 \times 133.4 = 13{,}793.56$

$a = 33.5 \quad (70 + 33.5)(100 + 33.5) = 103.5 \times 133.5 = 13{,}817.25$

Nuevamente se observa que la franja que hay que agregar se encuentra entre 33.4 m y 33.5 m. Para una mejor aproximación calculemos el segundo número decimal.

Si:

$a = 33.41 \quad (70 + 33.41)(100 + 33.41) = 103.41 \times 133.41 = 13{,}795.93$

$a = 33.42 \quad (70 + 33.42)(100 + 33.42) = 103.42 \times 133.42 = 13{,}798.30$

$a = 33.43 \quad (70 + 33.42)(100 + 33.43) = 103.43 \times 133.43 = 13{,}800.66$

El resultado más cercano es el que corresponde para

$$a = 33.43 \text{ m}$$

El proceso seguido para resolver el problema ha sido largo y laborioso. Posteriormente, aplicando los conocimientos algebraicos sobre solución de ecuaciones, el problema resultará más sencillo de resolver.

15) ¿Cuál es el área máxima de un rectángulo que se puede cercar con 98 m de alambre de púas?

Para resolver el problema hay que considerar:

a) el largo y el ancho del terreno

b) el perímetro del rectángulo que debe ser de 98 m, pues es el alambre con que se cuenta.

c) que el rectángulo sea de área máxima

Simbolizando lo anterior se tiene:

largo: L

ancho: a

perímetro: $2a + 2L = 98$

área: $a*L$

Considerando que se cuenta con 98 metros de alambre de púas, la suma de la longitud del ancho y del largo deberá ser un número mayor que cero pero menor que 49 metros.

Se presenta a continuación una tabla con los valores para el ancho y para el largo, tal que el perímetro sea igual a 98 m y a continuación se calcula el área de cada rectangulo:

ANCHO	LARGO	AREA
10	39	390
15	34	510
20	29	580
23	26	598
24	25	600
25	24	600
26	23	598
27	22	594

En la tabla se observa que, para $a = 24$ y $a = 25$ se - tiene el área mayor. Como no estamos seguros que esa sea la máxima, calcularemos el área para valores de "a" comprendidos entre 24 y 25.

ANCHO	LARGO	AREA
24.0	25.0	600.00
24.2	24.8	600.16
24.4	24.6	600.24
24.6	24.4	600.24
24.8	24.2	600.16
25.0	24.0	600.00

Como se ve, éste planteamiento del problema nos lleva a efectuar más de un cálculo haciendo el trabajo más laborioso y tardado.

Este tipo de problemas pueden ser resueltos de manera más eficiente y precisa mediante el uso del Calculo Diferencial e Integral.

16) ¿Cuántos metros de tela de alambre se necesitarán para bardear un terreno rectangular cuya longitud es tres veces su anchura si se sabe que la longitud es de 600 m.

Simbolicemos por: L: la longitud

a: el ancho

Se quiere entonces que:

$$L = 3a \qquad P = 2L + 2a$$

En la siguiente tabla se dan valores al ancho hasta llegar a encontrar un valor tal que siendo tres veces el ancho sea de 600 metros su longitud:

a	3a	L
50	3(50)	150
100	3(100)	300
150	3(150)	450
200	3(200)	600

En la tabla se ve que el valor del ancho que cumple la condición del problema es 200 m.

$$2(200) + 2(600) = 400 + 1200 = 1600$$

La respuesta es: 1600 m de tela de alambre serán necesarios.

17) Si se usan dos mangueras para llenar una alberca, la manguera de diámetro mayor la llena en dos horas y la de diámetro menor la llena en cinco horas. ¿Cuánto tardarán las dos mangueras juntas en llenar la alberca?

Considérese el volumen total de la alberca igual a la unidad, se establece una regla de tres para conocer el volumen que tiene la alberca según el tiempo que transcurre para llenarse:

manguera de diámetro mayor:

1 -------- 2h

V_1 -------- t por lo tanto $V_1 = \frac{t}{2}$

manguera de diámetro menor:

1 -------- 5h

V_2 -------- t por lo tanto $V_2 = \frac{t}{5}$

El volumen total de la alberca en un tiempo t llenada con las dos mangueras sería:

$$V = V_1 + V_2$$

En la siguiente tabla se muestra el volumen de la alberca variando el tiempo:

t min.	t hrs.	V_1	V_2	$V_T = V_1 + V_2$
60	1.00	0.50	0.20	0.70
65	1.08	0.54	0.22	0.76
70	1.17	0.58	0.23	0.81
75	1.25	0.63	0.25	0.87
80	1.33	0.67	0.27	0.93
85	1.42	0.71	0.28	0.99
85.5	1.425	0.71	0.29	0.997
86	1.43	0.72	0.286	1.003

La tabla muestra que la alberca se llena aproximadamen- en una hora y veinticinco minutos y medio: 1.425 h = 1 h 25.5'

18) Un barco petrolero cuya velocidad es de 30 millas por hora, dista de su escuadra 70 millas, si ésta se mueve con una ve-

locidad de 15 mill/h. ¿Cuánto tiempo tarda en incorporarse a su escuadra?

Para resolver el problema es necesario tener presente que la distancia es igual a la velocidad por el tiempo. Así, si se simboliza distancia con la letra d, velocidad con la letra v y tiempo con la letra t:

$$d = vt$$

La distancia que el barco petrolero deberá recorrer son las 70 millas marítimas, más la distancia que recorra la escuadra para poder alcanzarla.

Las siguientes tablas muestran los valores de las distancias que han recorrido el barco petrolero y la escuadra en los tiempos indicados, así como la distancia de la escuadra a la posición inicial del barco.

t h	distancia recorrida por el barco (Mi.)	distancia recorrida por la escuadra (Mi.)	distancia de la escuadra a la posicion inicial del barco. (Mi.)
1	30(1) = 30	15(1) = 15	15 + 70 = 85
2	30(2) = 60	15(2) = 30	30 + 70 = 100
3	30(3) = 90	15(3) = 45	45 + 70 = 115
4	30(4) = 120	15(4) = 60	60 + 70 = 130
5	30(5) = 150	15(5) = 75	75 + 70 = 145

Se observa que para el tiempo igual a cuatro horas, el barco petrolero ha recorrido 120 millas y la escuadra se encuentra a 130 millas del punto de partida del barco. En cinco horas el barco ya habrá sobrepasado a la escuadra por lo que el tiempo que tarda en encontrarse está comprendido entre 4 y 5 horas, es decir:

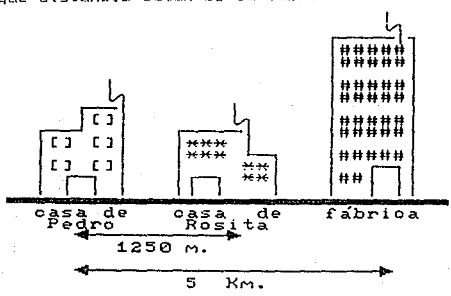
$$4 < t < 5$$

t/h	distancia recorrida por el barco (Mi.)	distancia recorrida por la escuadra (Mi.)	distancia de la escuadra a la posicion inicial del barco. (Mi.)
4.0	30(4.0)=120	15(4.0)=60.0	60.0 + 70 = 130.0
4.1	30(4.1)=123	15(4.1)=61.5	61.5 + 70 = 131.5
4.2	30(4.2)=126	15(4.2)=63.0	63.0 + 70 = 133.0
4.3	30(4.3)=129	15(4.3)=64.5	64.5 + 70 = 134.5
4.4	30(4.4)=132	15(4.4)=66.0	66.0 + 70 = 136.0
4.5	30(4.5)=135	15(4.5)=67.5	67.5 + 70 = 137.5
4.6	30(4.6)=138	15(4.6)=69.0	69.0 + 70 = 139.0
4.7	30(4.7)=141	15(4.7)=70.5	70.5 + 70 = 140.5

Hasta este momento se tiene que la mejor aproximación de tiempo en que el barco alcanza a la escuadra es entre t = 4.6 h y t = 4.7h

Si se quiere una mayor precision se calcula un decimal más que nos lleva a encontrar que las embarcaciones se reunen en un tiempo t = 4.66 h.

19) Rosita vive entre la casa de Pedro y la fábrica donde trabajan. Pedro vive a 1,250 m de la casa de Rosita y a 5 km de la fábrica. Rosita para ir a la fábrica camina a razon de 65 m/min y Pedro a razón de 135 m/min; Pedro y Rosita salen, de su domicilio a la fábrica, a la una en punto. Se quiere saber en qué tiempo se encuentran y a qué distancia están de la fábrica?



En la siguiente tabla se observa la distancia recorrida por Pedro respecto al tiempo transcurrido. Se utiliza el modelo visto anteriormente: $d = v*t$

tiempo (minutos)	distancia (metros)
0	135(0) = 0
10	135(10)=1350
20	135(20)=2700
30	135(30)=4050
40	135(40)=5400

La tabla indica que Pedro llega a la fábrica en un tiempo comprendido entre 30 y 40 min.

La tabla que muestra la distancia que recorre Rosita hasta la fábrica es la siguiente:

tiempo (minutos)	distancia (metros)
0	65(0) = 0
10	65(10)= 650
20	65(20)=1300
30	65(30)=1950
40	65(40)=2600
50	65(50)=3250
60	65(60)=3900

Rosita llega a la fábrica entre el minuto 50 y el 60, es decir:

$$50 < t < 60$$

A continuación se muestra la tabla tomando en cuenta la distancia a la fábrica pero desde la casa de Pedro. El modelo que se utiliza es: $d = 65t + 1250$ donde se considera la ventaja que lleva Rosita.

tiempo minutos	distancia metros
0	65(0) + 1250 = 1250
10	65(10) + 1250 = 1900
20	65(20) + 1250 = 2550
30	65(30) + 1250 = 3200
40	65(40) + 1250 = 3850
50	65(50) + 1250 = 4500
60	65(60) + 1250 = 5150

Las siguientes tablas muestran el tiempo en que se encuentran Pedro y Rosita que es el problema que se plantea.

TIEMPO (min.)	DISTANCIAS RECORRIDAS POR PEDRO (metros)	DISTANCIAS RECORRIDAS POR ROSITA (metros)	DISTANCIAS RECORRIDAS DESDE LA CASA DE PEDRO A LA FABRICA (metros)
5	135(5) = 675	65(5) = 325	325 + 1250 = 1575
10	135(10)= 1350	65(10)= 650	650 + 1250 = 1900
15	135(15)= 2025	65(15)= 975	975 + 1250 = 2225
20	135(20)= 2700	65(20)= 1300	1300 + 1250 = 2550

Los cálculos hechos indican que el tiempo está entre 15 y 20 minutos, por lo tanto, en las siguientes tablas se hace una aproximación entre esos valores:

TIEMPO (min.)	DISTANCIAS RECORRIDAS POR PEDRO (metros)	DISTANCIAS RECORRIDAS POR ROSITA (metros)	DISTANCIAS RECORRIDAS DESDE LA CASA DE PEDRO A LA FABRICA (metros)
15	135(15)= 2025	65(15)= 975	975 + 1250 = 2225
16	135(16)= 2160	65(16)= 1040	1040 + 1250 = 2290
17	135(17)= 2295	65(17)= 1105	1105 + 1250 = 2355
18	135(18)= 2430	65(18)= 1170	1170 + 1250 = 2420

El tiempo para el que se cumple que las distancias puedan ser las mismas, se encuentra entre 17 y 18 minutos.

TIEMPO (min.)	DISTANCIAS RE CORRIDAS POR PEDRO (metros)	DISTANCIAS RE CORRIDAS POR ROSITA(metros)	DISTANCIAS RECORRIDAS DESDE LA CASA DE PEDRO A LA FABRICA (metros)
17.2	135(17.2)=2322	65(17.2)=1118	1118 + 1250 = 2368
17.4	135(17.4)=2349	65(17.4)=1131	1131 + 1250 = 2381
17.6	135(17.6)=2376	65(17.6)=1144	1144 + 1250 = 2394
17.8	135(17.8)=2403	65(17.9)=1157	1157 + 1250 = 2407
17.9	135(17.9)=2416.5	65(17.9)=1163.5	1163.5+ 1250 = 2413.5

Analizando las tablas anteriores, el tiempo se encuentra entre 17.8 y 17.9 minuto. Si se quiere una mayor aproximación, se procede de igual manera para encontrar el segundo decimal.

Para contestar la segunda pregunta: ¿a qué distancia se encuentran?, será necesario fijar la atención en el número de metros recorridos cuando ha transcurrido un tiempo determinado. Por ejemplo para t = 17.8 minutos, se reporta una distancia recorrida desde la casa de Pedro de 2,403 m y de 2,407 m. No son distancias iguales porque se tendría que calcular un tiempo más exacto.

En los problemas aquí expuestos el camino para llegar a la solución fue, en muchas ocasiones largo y lleno de operaciones, sin embargo, el alumno se siente satisfecho si encuentra la solución y si esta solución es plenamente justificada mediante un proceso lógico y aritmético.

Lo anterior es válido, pero como en todo lo que el hombre se propone está el de superarse continuamente, es necesario encontrar métodos mas eficientes para resolver problemas.

El <u>Algebra</u> es, entonces, la herramienta que se utiliza para lograr éste objetivo.

MODELOS ALGEBRAICOS

En los siguientes problemas, se trata de establecer un modelo algebraico para cada problema mediante la abstracción del mismo con auxilio del lenguaje simbólico; en el siguiente capítulo, se menciona la forma de resolver ésos modelos planteando la teoría que permita resolverlos. Se ha mencionado la palabra abstracción y por tal se entiende "desmenuzar" el problema y escoger de él lo más importante para dar respuesta a la o las preguntas planteadas.

PROBLEMA 1 (Página 49)

DATOS;

Número de equipos: 9
Generalizando el número de equipos por: n
Juegos que efectúa cada equipo: 8
Generalizando el núm. de juegos que efectúa cada equipo: $n - 1$
No hay empates
Total de juegos: J

MODELO ALGEBRAICO;

$$J = \frac{n(n-1)}{2}$$

Otra variante del mismo problema es el siguiente:

En una fiesta donde un observador contó un total de 66 saludos que realizaron entre si todos los invitados, preguntó a su acompañante: ¿Cuántos son los invitados?

DATOS;

MODELO ALGEBRAICO;

Número de invitados: n

Total de saludos: 66 $66 = \frac{n(n-1)}{2}$

PROBLEMA 2 (Página 50)

DATOS;	MODELO ALGEBRAICO:
Sólo hay un platillo	1
Hay un platillo y dos bebidas	1x2
Hay un platillo, dos sopas y tres bebidas	1x2x3
Hay un platillo, dos sopas, tres bebidas y cuatro postres	1x2x3x4
" " "	...
" " "	...
" " "	...
Hay un platillo, dos sopas,...,n alimento	1x2x3x4x...xn

El número que resulta se le llama <u>factorial</u> de n y se simboliza así: n!

Simbólicamente se escribe lo anterior así:

Hay un solo platillo	1!
Hay un platillo y dos bebidas	2!
Hay un platillo, dos sopas y tres bebidas	3!
Hay un platillo, dos sopas, tres bebidas y cuatro postres	4!
" " "	...
" " "	...
" " "	...
Hay un platillo, dos sopas,...,n alimento	n!

PROBLEMA 3 (b) (Página 53)

DATOS:	MODELO ALGEBRAICO:
Considérese que el primer lugar de las literales puede ser ocupado por cualquiera de las 3 letras:	3
Generalizando:	L
El siguiente lugar, por cualquiera de las 2 restantes:	2
Generalizando:	L-1
El último lugar correspondiente a literales, por la sobrante:	1
Generalizando:	L-2

El primer lugar de los digitos

por cualquiera de los 10:	10
Generalizando:	D
El siguiente por cualquiera de los 9 que quedan	9
Generalizando:	D-1
El tercer lugar por cualquiera de los 8 restantes:	8
Generalizando:	D-2

El resultdo está dado por: $L(L-1)(L-2)D(D-1)(D-2)$

$$3 \times 2 \times 1 \times 10 \times 9 \times 8$$

PROBLEMA 4 (Página 54)

DATOS;

Total herencia: \$1'200,000
Viuda: 1/3(1'200,000)
A cada hijo: x
x corresponde a la tercera parte de los 2/3 restantes

MODELO ALGEBRAICO;

$$\frac{2/3}{2/9} = \frac{800,000}{x}$$

PROBLEMA 5 (Página 55)

DATOS:

Número de juegos jugados y ganados:	90
Número de juegos jugados y perdidos:	10
Total de juegos temporada:	160
Número de juegos que debe ganar:	x

MODELO ALGEBRAICO:

$$\frac{160}{x} = \frac{100}{80}$$

$x - 90 =$ juegos por ganar

PROBLEMA 6 (Página 56)

DATOS:

Ofrecimiento:	\$ 48,000
Ganaba:	\$ 41,000
Descuentos anteriores:	14%
Pago probablemente conveniente:	x
86% de \$ 48,000:	41,000

MODELO ALGEBRAICO:

$$\frac{x}{41,000} = \frac{100}{86}$$

Los problemas correspondientes a areas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos respectivamente, se reducen a conocer la fórmula que desde la enseñanza elemental se han manejado, con la diferencia de que en el nivel bachillerato no sólo es interesante conocer el área o volumen sino cualquiera de las literales que intervienen en dicho modelo y que por lo tanto es necesario saber algunas reglas algebraicas para que ésto sea más sencillo.

Área de un cuadrado: $L*L = S$

area de un rectángulo: $L*a = S$

Área de un triángulo: $\dfrac{b*a}{2} = S$

área de un trapecio: $\dfrac{(B + b)h}{2} = S$

volumen de un cubo: $L^3 = V$

Conocer las propiedades de los triángulos facilita los cálculos para encontrar áreas de figuras no regulares.

PROBLEMA 7 (Página 58)

DATOS:

Lado del cuadrado: 39 m

Area: S

MODELO ALGEBRAICO:

$L*L = S$

$39 \times 39 = S$

PROBLEMA 8 (Página 58)

DATOS:

Area del triángulo: S
Base: 12 m
Altura: 8 m

MODELO ALGEBRAICO:

$$\frac{b*h}{2} = S$$

$$\frac{12 \times 8}{2} = S$$

Area del rectángulo: A
Largo: 12 m
Ancho: 8 m

$$L*a = A$$

$$12x8 = A$$

PROBLEMA 9 (Página 59)

DATOS:

Volumen del cubo V
Largo: 5 m

MODELO ALGEBRAICO

$$V = L^3$$

$$V = 5x5x5$$

PROBLEMA 10 (Pagina 60)

DATOS:

Volumen del prisma: V
Base rectangular:
Largo 5 cm
Ancho 3 cm
Altura: 8 cm

MODELO ALGEBRAICO

$$V = (\text{Área de la base})h$$

$$V = (5x3)8$$

PROBLEMA 11 (Página 61)

DATOS:

Area del trapecio rectangular: A

Base mayor: B = 12 cm
Base menor: b = 7 cm
Altura: h = 5 cm

MODELO ALGEBRAICO

$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

$$A = \frac{(12 + 7)5}{2}$$

PROBLEMA 12 (Página 62)

DATOS:

Capital : 100,000
Interés: 20% anual
Tiempo: 3 años
Monto al cabo de 3 años: M

MODELO ALGEBRAICO:

$$M = C(1 + i)^t$$

$$M = 100,000(1 + 0.20)^3$$

PROBLEMA 13 (Página 63)

DATOS:

MODELO ALGEBRAICO:

Capacidad deposito: 500 lt
Existen: 250 lt
Se llena a razon de: 10 lt/s
Se vacía a razón de 5 lt/s
Llaves abiertas simultaneamente, tiempo de llenado: t

$$250 + 10t - 5t = 500$$

PROBLEMA 14 (Página 66)

DATOS:

Ancho: 70 m
Largo: 100 m
Aumento: a m
Superficie requerida: 13,800

MODELO ALGEBRAICO:

$$(70 + a)(100 + a) = 13,800$$

PROBLEMA 15 (Página 68)

DATOS:

Largo: L
Ancho: a
Perímetro: P = 98 m
Area: A

MODELO ALGEBRAICO:

$$A = L*a$$

$$P = 2a + 2L$$

$$98 = 2a + 2L$$

PROBLEMA 16 (Página 70)

DATOS:

Ancho: a
Largo: 3a = 600 m
Metros necesarios para cercar: P

MODELO ALGEBRAICO:

$$P = 2a + 2(3a)$$

$$3a = 600$$

PROBLEMA 17 (Página 70)

DATOS:

Volumen total alberca llenada con dos mangueras: V_T
Volumen llenado en 2 horas: V_1
Volumen llenado en 5 horas: V_2

MODELO ALGEBRAICO:

$$1 \text{ ---- } 2 \text{ h} \qquad 1 \text{ ---- } 5 \text{ h}$$

$$V_1 \text{ ---- } t \text{ h} \qquad V_2 \text{ ---- } t \text{ h}$$

$$V_1 = \frac{t}{2} \qquad V_2 = \frac{t}{5}$$

$$V_T = \frac{t}{2} + \frac{t}{5}$$

PROBLEMA 18 (Página 71)

DATOS:

Velocidad barco petrolero: $V_b = 30$ mi/h
Velocidad escuadra: $V_e = 15$ mi/h
Distancia entre barco y escuadra: 70 mi/h
Tiempo en encontrarse: t
Distancia barco: d_b
Distancia escuadra: d_e

MODELO ALGEBRAICO:

$d_b = V_b t$

$d_e = V_e + 70$

$d_b = d_e$

$V_b t = V_e t + 70$

PROBLEMA 19 (Página [illegible])

DATOS:

Distancia casa Pedro-fábrica: 5 km
Distancia casa Rosita-fábrica: 3.750 km
Distancia casa Pedro-Rosita: 1,250 m
Velocidad Pedro: 135 m/min
Velocidad Rosita: 65 m/min
Tiempo en que se encuentran: t
Distancia a la fábrica: d

MODELO ALGEBRAICO:

$d_P = V_P t$

$d_R = V_R t + 1250$

$d_P = d_R$

$135t = 65t + 1250$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Los siguientes problemas se proponen para que se haga la traducción del lenguaje común al lenguaje simbólico cuidando de expresar lo que se pregunta mediante una incógnita usando una literal o las que sean necesarias para establecer el o los modelos algebraicos. No se pide resolver los problemas.

1.- El doble de la diferencia de dos números.

2.- La raíz cuadrada del producto del cociente de dos números y su diferencia.

3.- La diferencia del cuadrado de un número y el quintuplo de otro.

4.- La suma de un número y cinco es menor que doce.

5.- El producto de dos números es mayor o igual que la diferencia de ellos.

6.- El cubo de la diferencia del triple de un número y su tercera parte.

7.- El producto de la suma de dos numeros y su diferencia.

8.- El cuadrado de la suma de dos números es distinto de la suma de sus cuadrados.

9.- La suma de un número y cinco es igual a menos dos.

10.- El cuadrado de un número es mayor o igual que cero.

11.- La suma de cuatro números consecutivos es 130.

12.- La suma de tres números es 65. El primero es cinco unidades menor que el segundo y el tercero es diez unidades mayor que el segundo.

13.- La longitud de un terreno rectangular es veinte metros más grande que su ancho. Si cada dimensión se incrementa en 10 m, su área aumentaría 1,800 m^2. Encuentra una expresión algebraica para el área.

14.- El largo de un terreno rectangular es de 10 m más que el doble de su ancho. Encuentra una expresión algebraica para el perimetro.

15.- Si a la longitud del lado de un cuadrado se le aumentan 4 m, su área se incrementa en 64 m^2, encuentra una expresión algebraica para la longitud del lado del cuadrado original.

16.- El Sr. López invierte $ 100,000. Una parte le produce un interes del 30% anual, y la otra el 45% anual. Encuentra una expresión algebraica que determine el monto de cada parte, si el interés total anual que recibe es de $39,750.

17.- Una persona tiene $ 5'237,428 y quiere repartirlos entre sus cuatro hijos en forma proporcional con su edad: Martha de 3 años, Carlos de 9 años, Armando de 12 años y José de 25 años. Encuentra una expresión algebraica que relacione la parte que le toca a cada uno.

18.- Un triangulo cuyos lados están en la proporción de 3, 4 y 5 y su perímetro es de 96 m, encuentra una expresión algebraica que relacione las longitudes de sus lados.

19.- Juanito tiene 80 monedas de $50 y $100. En total las monedas suman la cantidad de $6,750. Encuentra una expresión algebraica que relacione el número de monedas de $50 y de $100.

20.- En un lienzo rectangular de 40 cm de ancho y 50 cm de largo se pinta un bodegón. Se dejan sin pintar márgenes iguales tanto a lo ancho como a lo largo y se pinta sobre una superficie de 1,064 cm^2. Encuentra una expresión algebraica que describa el ancho de los márgenes.

21.- Un obrero entrega 55 piezas terminadas y le pagan $1,200 por cada pieza sin defecto pero el tiene que pagar $80 por cada pieza defectuosa. Finalmente recibe $36,000. Encuentra una expresión algebraica que describa el número de piezas sin defecto que entregó.

22.- A las diez de la mañana, un edificio de cuarenta metros de altura proyecta una sombra de veinte metros y a la misma hora, un segundo edificio proyecta una sombra de 50 m. Encuentra una expresión algebraica que describa la altura que tiene el segundo edificio.

23.- La edad de Claudia es tres veces menos que la de Yola. Hace cinco años la edad de Yola era cuatro veces más que la de Claudia. Yola tiene 45 años. Encuentra una expresión algebraica que describa la edad de Claudia.

24.- Un tren bala hace un recorrido de una ciudad a otra a una velocidad promedio de 300 km/h y el regreso lo hace a 320 km/h. Se hace el recorrido en 30 minutos menos que a la ida. Encuentra una expresión algebraica que describa la distancia que existe entre una ciudad y otra.

Hasta aquí, se ha seguido un proceso aritmetico en la solución de algunos de los problemas, o en otros, se ha llegado a establecer el modelo algebraico que solucionaría el problema pero que no se ha resuelto ya que es necesario conocer la teoría de ecuaciones además de efectuar las operaciones básicas con expresiones algebraicas. Por lo tanto, utilizando alguno de los ejercicios vistos anteriormente se verá cómo operar con ésas expresiones.

A continuación se enlistan los modelos algebraicos que se presentaron en los problemas vistos en la primera parte de éste capítulo.

PROBLEMA NUMERO:	MODELO ALGEBRAICO:
1	$J = \frac{n(n-1)}{2}$
1'	$66 = \frac{n(n-1)}{2}$
4	$\frac{2/3}{2/9} = \frac{800,000}{x}$
5	$\frac{160}{x} = \frac{100}{80}$
5	$\frac{x}{41,000} = \frac{100}{80}$
11	$\frac{(12+7)5}{2} = A$
12	$100,00(1+20)^3 = M$
14	$(70+a)(100+a) = 13,800$
17	$V_r = \frac{t}{2} + \frac{t}{5}$

En cada una de ellas existe una literal que en la primera parte del capítulo se calculó por tanteo sustituyendo diferentes valores numéricos hasta encontrar el valor que satisfizó la expresion.

En dichas expresiones hay simbolizadas operaciones de sumas, diferencias, productos y cocientes así como potencias. Estas se han resuelto aritméticamente aún sin saber operar esas expresiones. Sin embargo existen metodos que nos facilitan éste trabajo.

En la expresión:

$$V_T = \frac{t}{2} + \frac{t}{5}$$

esta representada una suma de $\frac{t}{2}$ y $\frac{t}{5}$, cada uno de ellos recibe el nombre de <u>término</u> donde $\frac{t}{2}$ está formado por $\frac{1}{2}t$ y $\frac{t}{5}$ está formado por $\frac{1}{5}t$ que representan el producto de un número real por una variable, donde t es la variable.

Los números reales son llamados <u>coeficientes numericos</u> ya que también existen <u>coeficientes literales</u> que se acostumbra simbolizar con las primeras letras del alfabeto.

Cuando el coeficiente numérico o el exponente de una literal o variable es la <u>unidad</u>, éste valor <u>no se escribe</u>.

Los términos también pueden ser un numeral o una variable o el producto de un numeral y una o más varibles como pueden ser:

$$-2 \qquad y^2 \qquad 2x \qquad -4ab^2$$

MONOMIOS Y POLINOMIOS.

Si los términos o monomios contienen a las mismas variables, es decir, a las mismas incógnitas o literales, elevadas a los mismos exponentes, se les llama <u>términos semejantes</u> como por ejemplo:

$$2x \quad -5x; \qquad 3ab^3 \quad -8b^3a; \qquad -3 \quad 2; \qquad \frac{t}{2} \quad \frac{t}{5}$$

Recibe el nombre de polinomio la expresión algebraica que representa la suma de dos o más monomios por ejemplo:

$2x + 3y \qquad 2x - 4x + 5 \qquad -72a - 2ab + b^2 + 1$

Si sólo tiene dos monomios, se denomina binomio; si consta de tres, se denomina trinomio.

A continuación se proporciona el siguiente cuadro para ser llenado donde el primer ejercicio esta resuelto.

EXPRESION ALGEBRAICA	TERMINOS	LITERALES	COEFICIENTES RESPECTIVOS	SEGUN EL NUM. DE TERMINOS
$\frac{x}{2} + y^3$	$\frac{x}{2}, y^3$	x , y	$\frac{1}{2}$, 1	binomio
$7ab + 2xy - 1$				
$2x + 3y - 4z$				
$9a^3b^2$				
$3a^2 - 5a^2 + 7b^2$				

El grado de un monomio es la suma de los exponenetes de cada una de las variables, por ejemplo:

$2x^2y$ es de grado 3

$9a^3b^2$ es de grado 5

4 es de grado 0

El grado de un polinomio es el grado mayor de cualquiera de sus términos, por ejemplo en el polinomio:

$$4x^3y - 5x^2y^4 + 8xy - 3$$

el primer término es de grado 4, el segundo término es de grado 6, el tercero es de grado dos y el cuarto es de grado cero. El término de grado mayor es el de grado seis, por lo tanto el grado del polinomio es también seis.

El siguiente ejercicio consiste en que se clasifique la expresión algebraica de acuerdo con su grado.

EXPRESION ALGEBRAICA	GRADO
$2x^2 + 3y - 4z + 2$	
$tx^3 + 4y$	
$5x + 5y + tz - 1$	
$-x$	
$-3x^2y^2 + 2xy$	
$7a^2b + 6a^3 - 7b^2 + 2$	
8	

Para poder operar con las expresiones algebraicas se usan las propiedades de los números reales, ya que las variables representan números reales.

VALOR NUMERICO DE UNA EXPRESION ALGEBRAICA.

En una expresión algebraica intervienen una o más literales, éstas representan números así es que, si en una expresión se asigna a cada literal un valor numérico, al efectuar las operaciones se obtiene otro número. Por ejemplo en la expresión: $(3h - 2)(h + 2)$ si se da el valor de 2 a la literal h, el valor numérico de dicha expresión es 16 ya que:

$$\begin{aligned}(3(2) - 2)(2 + 2) &= (6 - 2)(4)\\ &= (4)(4)\\ &= 16\end{aligned}$$

Es importante evaluar expresiones algebraicas en distintas ramas del conocimiento como por ejemplo en física al estudiar el -- movimiento, en finanzas para conocer un capital o el monto, etc.

A continuación se evalúa una expresión algebraica:

1) Si $y = \frac{w}{z} + 3w - 2$ ¿Cuál es el valor de y cuando $w = 6$ y $z = 3$?

$$y = \frac{6}{3} + 3(6) - 2 = 2 + 18 - 2 = 18$$

2) Para la misma expresión, ¿cuál es su valor si $w = -2$ y $z = 1$?

$$y = \frac{-2}{1} + 3(-2) -2 = -2 - 6 - 2 = -10 \text{ entonces } y = -10$$

3) Si $w = \frac{1}{2}$ y $z = \frac{2}{3}$ entonces y vale:

$$y = \frac{1/2}{2/3} + 3(1/2) - 2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} - 2 =$$

$$\frac{3}{4} + \frac{6}{4} - \frac{8}{4} = \frac{1}{4} = y$$

SUMA DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Para sumar o restar dos expresiones como: $4x$ y $2x$ se apli ca la propiedad distributiva de los números reales de la siguiente forma:

$$4x + 2x = (4 + 2)x = 6x$$

$$4x - 2x = (4 - 2)x = 2x$$

también se pueden representar esas operaciones en forma vertical:

$$\begin{array}{rr} & 4x \\ + & 2x \\ \hline & 6x \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 4x \\ - & 2x \\ \hline & 2x \end{array}$$

Para la siguiente operación:

$$4 - 3(r + 2s) + 5(2r - 4s) + 1$$

primero habrá que desarrollar los paréntesis, es decir, aplicando la propiedad distributiva se tiene:

$$4 - 3r - 6s + 10r - 20s + 1$$

resolviendo en forma vertical se colocan términos semejantes bajo términos semejantes:

$$\begin{array}{rrrr} & 4 & - 3r & - 6s \\ + & & & \\ & 1 & + 10r & - 20s \\ \hline & 5 & + 7r & - 26s \end{array}$$

De los ejercicios anteriores se deduce que para sumar o restar dos polinomios basta con sumar o restar los coeficientes de los términos semejantes.

Si se tiene un polinomio de la forma:

$$a_1x + a_2x + a_3x \ \ldots + a_nx = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)x$$

donde a_1, a_2, a_3, ..., a_n son coeficientes, también se aplica la propiedad distributiva

EJERCICIOS RESUELTOS.

Efectúa las sumas y diferencias de los siguientes polinomios tanto en forma horizontal como vertical:

1) $(3x^2 + 2y^3 + 1) + (-4x^2 + 4y^3 + 2) =$

$= (3x^2 - 4x^2) + (2y^3 + 4y^3) + (1 + 2) =$

$= -x^2 + 6y^3 + 3$

esta expresión se dió asociando los términos semejantes, enseguida se aplicó la propiedad distributiva y finalmente se sumaron los coeficientes.

En forma vertical:

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 2y^3 + 1 \\ + \quad -4x^2 + 4y^3 + 2 \\ \hline -x^2 + 6y^3 + 3 \end{array}$$

se han colocado términos semejantes debajo de términos semejantes para efectuar la suma. Se observa que son los coeficientes los que se suman.

2) $(2x^3 + 4y^2 - x + 1) - (2x^3 + y^2 + 5x - 3) =$

$= 2x^3 + 4y^2 - x + 1 - 2x^3 - y^2 - 5x + 3 =$

$= (2x^3 - 2x^3) + (4y^2 - y^2) + (-x + (-5x)) + (1 + 3) =$

$= (2 - 2)x^3 + (4 - 1)Y^2 + (-1 + (-5))x + (1 + 3) =$

$= 0x^3 + 3y^2 + (-6)x + 4 =$

$= 3y^2 - 6x + 4$

esta expresión nos representa una <u>resta</u> de dos polinomios. Podemos efectuarla como una <u>suma del minuendo con los inversos aditivos del sustraendo</u>. A continuación se asocian los términos semejantes para después aplicar la propiedad distributiva y sumar los coeficientes.

En forma vertical:

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 4y^2 - x + 1 \\ - \quad 2x^3 + y^2 + 5x - 3 \\ \hline 0x^3 + 3y^2 - 6x + 4 \end{array}$$

aquí se procede de la misma forma que para sumar polinomios, se colocan los términos semejantes debajo de los términos semejantes y el signo de operación de la diferencia cambia los signos de cada uno de los términos del sustraendo para trabajar con los inversos aditivos.

3) $(x^3 + 4y + 2x + 7) - (3x^3 + 5x - 2)$

$= x^3 + 4y + 2x + 7 - 3x^3 - 5x + 2$

$= (x^3 - 3x^3) + (2x - 5x) + 4y + (7 + 2)$

$= (1 - 3)x^3 + (2 - 5)x + 4y + 9$

$= (-2)x^3 + (-3)x + 4y + 9$

$= -2x^3 - 3x + 4y + 9$

en forma vertical:

$$\begin{array}{r} x^3 + 4y + 2x + 7 \\ - \quad 3x^3 + 5x - 2 \\ \hline -2x^3 + 4y - 3x + 9 \end{array}$$

4) $4 - 3(r + 2s) + 5(2r - 4s) + 1$

$= 4 - 3r - 6s + 10r - 20s + 1$

$= (4 + 1) + (-3r + 10r) + (-6s - 20s)$

$= 5 + (-3 + 10)r + (-6 - 20)s$

$= 5 + 7r + (-26)s$

$= 5 + 7r - 26s$

para efectuar esta operación en forma vertical, es necesario desarrollar primero los paréntesis para después ordenar los términos semejantes:

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 4 & - \;\; 3r & - & 6s \\
+ & & & & \\
 & 1 & + \; 10r & - & 20s \\
\hline
 & 5 & + \;\; 7r & - & 26s
\end{array}
$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

Efectúa las siguientes sumas y diferencias de polinomios reduciendo términos semejantes.

1) $(4x + 2y - 3x^2 + 5) + (2x^2 - 3y + 2) + (7y - 3x^2)$

2) $[(-5x^2 + 2y - 3) + (9x - 2y + 7)] - (5x - 7y + 2x^2 + 3)$

3) $(a - 7ab^2 + 2a - 3) + (-3a + 9ab^2 + 2)$

4) $[(-3xy^2 + 2x - 7x + 2) + 3xy^2] - [(2x + 2z - 3) + (5xy^2 + 2z)]$

5) $(2x^2 + 3y - z) + (2y - 5z + 2x^2)$

6) $4x^2y - 3x^2y + 2xz + xz + 7x^2y + 2 - 7$

7) $(8x^3 - x^2 + 5) + (2x^2 - 5x + 2)$

8) $\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\right) - \left(2x^3 + x^2 + \frac{1}{6}\right)$

9) $(x^2 - 3x + 4) + (2x^2 + 3x + 1)$

10) $(3a + 2ab - 7b^2 + 7a) - (4ab + 7ab + 9b^2)$

A continuación se presentan las operaciones de multiplicación y división de polinomios y las operaciones de potenciación y radicación a partir de ejemplos numericos que nos permitan establecer las reglas que rigen a dichas operaciones.

MULTIPLICACION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Se parte del conocimiento de que, al multiplicar un número cualquiera por sí mismo tantas veces sea necesario, es posible que lo simbolicemos como una potencia:

$$3*3*3*3 = 81 \quad ó \quad 3^4 = 81$$

$$2*2 = 4 \quad ó \quad 2^2 = 4$$

$$6*6*6 = 216 \quad ó \quad 6^3 = 216$$

por lo anterior, si el número se llamara:

a "a"

xy "equis ye"

$3xy^2z$ "tres equis ye cuadrada zeta"

o simplemente:  "garabato"

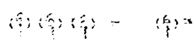
y ésos números se multiplican por sí mismo dos, tres, cuatro, etc. veces, recibirán distinto nombre.

Al multiplicar tres veces el mismo número, se tiene el cubo de dicho número:

$$a*a*a = a^3$$

$$(xy)(xy)(xy) = (xy)^3$$

$$(3xy^2z)(3xy^2z)(3xy^2z) = (3xy^2z)^3$$



al multiplicarse, por sí mismo, cuatro veces, se tendrá la potencia cuarta; por cinco veces, la potencia quinta y así sucesivamente.

En la multiplicación cada uno de los operandos recibe el nombre de <u>factor</u> y si un factor se multiplica varias veces por sí mismo, el resultado recibe el nombre de <u>potencia</u>.

Al obtener la potencia cúbica de dos, se tiene:

$$2^3 = 2*2*2 = 8$$

de $$(xy)^3 = xy*xy*xy = x*x*x*y*y*y$$

ya que el orden de los factores no altera el producto y por el conocimiento del cual se partió, se puede escribir:

$$x*x*x*y*y*y = x^3y^3$$

y por lo tanto:

$$x^3y^3 = (xy)^3$$

al elevar $3xy^2z$ al cubo, se tiene:

$$(3xy^2z)^3 = (3xy^2z)(3xy^2z)(3xy^2z)$$

$$= 3*3*3*x*x*x*y^2*y^2*y^2*z*z*z$$

$$= 3^3*x^3*y*y*y*y*y*y*z^3$$

$$= 3^3x^3y^6z^3$$

por lo tanto: $(3xy^2z)^3 = 3^3x^3y^6z^3$

de este resultado se observa que:

$$(y^2)^3 = y^6$$

por lo anterior, los siguientes ejemplos numéricos se desarrollan así:

$$3^2*3^5 = 3*3*3*3*3*3*3 = 3^7$$

$$4*4^2 = 4*4*4 = 4^3$$

$$(1/7)^2(1/7)^4 = 1/7*1/7*/1/7*1/7*1/7*1/7 = (1/7)^6$$

$$x^3x^2 = x*x*x*x*x = x^5$$

A continuación se anotan los conceptos derivados de la experiencia con los ejemplos anteriores como <u>leyes de los exponentes</u>:

i) Los factores que se multiplican por sí mismos se les -- llama <u>base</u> y el número de factores recibe el nombre de <u>exponente</u>.

ii) Si se tiene $x*x*x*\ldots*x$ <u>ene</u> veces, se simboliza como

$$x^n$$

y se lee la potencia <u>enesima</u> del número <u>x</u> donde <u>x</u> es la base y <u>n</u> es el exponente.

iii) El producto de dos potencias cuyas bases son iguales — es equivalente a elevar la base a la suma de sus exponentes.

$$x^n x^m = x^{n+m}$$

iv) La potencia de otra potencia es equivalente a conservar la base pero el exponente es igual al producto de sus exponentes.

$$(x^n)^m = x^n x^n x^n \ldots x^n =$$

$$= \overbrace{\underbrace{(x*x\ldots*x)}_{n \text{ veces}}\underbrace{(x*x\ldots*x)}_{n \text{ veces}}\ldots\underbrace{(x*x\ldots*x)}_{n \text{ veces}}}^{m \text{ veces}} = x^{nm}$$

n(m) veces

$$(x^n)^m = x^{n*m}$$

Al efectuar las siguientes multiplicaciones se obtienen — también conceptos válidos que pueden ser generalizados.

1) $3^2*2^3*3^3 = 3^3*3^2*2^3$

$= 3^5*2^3 = 243*8 = 1944$

2) $(x^2)^3 = (x*x)(x*x)(x*x) = x^{2*3} = x^6$

3) $(ax)(bx) = (a*b)(x*x) = abx^2$

4) $(2x^2y)(3xy) = 2*3(x^2*x)(y*y) = 6x^3y^2$

5) $(3a)^3(2ab)^4 = 3*3*3*a*a*a*2*2*2*2*a*a*a*a*b*b*b*b$

$= 3*3*3*2*2*2*2*a*a*a*a*a*a*a*b*b*b*b$

$= 3^3 2^4 a^7 b^4$

6) $(1/3x^2y)^3(2/5xy^2)^2 = (1/3x^2y)(1/3x^2y)(1/3x^2y)*$

$(2/5xy^2)(2/5xy^2)$

$= 1/3*1/3*1/3*x^2x^2x^2*y*y*y*2/5*2/5*x*x*y^2*y^2$

$= (1/3)^3(2/5)^2x^2x^2x^2*x*x*y*y*y*y^2y^2$

$= (1/3)^3(2/5)^2x^8y^7$

7) $6(2 - 7) = 6*2 - 6*7 = 12 - 42 = -30$

8) $3(1/5 + 2/15) = 3(1/5) + 3(2/5) = 3/5 + 6/15 = (9 + 6)/15$

$= 15/15 = 1$

9) $3(2a + 5a) = 3*2a + 3*5*a = 6a + 15a = 21a$

10) $2z(3x + 4y) = 2z*3x + 2z*4y = 2*3*z*x + 2*4*z*y$

$= 6*z*x + 8*z*y$

11) $(2x^2 + 3x)(5x^2 - x) = 2x^2(5x^2 - x) + 3x(5x^2 - x)$

$= 2x^2*5x^2 - 2x^2*x + 3x*5x^2 - 3x*x$

$= 2*5*x^2*x^2 - 2x^2*x + 3*5*x*x^2 - 3x*x$

$= 10x^4 - 2x^3 + 15x^3 - 3x^2$

$= 10x^4 + 13x^3 - 3x^2$

los conceptos observados son:

1) Los ejercicios ya se resolvieron sin necesidad de desglosar las potencias a su mínima expresión; se utilizaron los conceptos anteriormente anotados.

2) Se utilizó la propiedad conmutativa para la multiplicación.

3) Para multiplicar dos monomios, se multiplican los valores numéricos y después las variables que tengan la misma base. si no hay dos o más facotres que tengan la misma base sólo se indica en el resultado.

4) Para multiplicar un monomio por un polinomio o polino-

mio por polinomio, se utiliza la propiedad distributiva.

5) En los casos en que aplicamos la propiedad distributiva, hay ejemplos numericos o ejemplos donde hay terminos semejantes donde resultaría más sencillo efectuar la operacion dentro del paréntesis y despues la multiplicación, pero con el proceso que se siguió queremos hacer patente que la solución es idéntica aunque el proceso sea distinto y ésto nos permite generalizarlo para expresiones algebraicas más complejas. de donde se deducen las siguientes leyes:

v) El producto de dos potencias de igual base, es una potencia cuya base es la misma y cuyo exponente es la suma de los exponentes de los factores.

$$x^n x^m = x^{n+m}$$

vi) La potencia de una potencia es una potencia cuyo exponente es igual al producto de los exponentes.

$$(x^n)^m$$

Las leyes de los exponentes son válidas para exponentes enteros -- cualesquiera.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resuelve y simplifica los siguientes productos:

1) $(3/4)^2 =$ 2) $(-2)^3 =$

3) $a^2a^3 =$ 4) $w^4w^4w^3 =$

5) $(2x^2y)(3xy) =$ 6) $(-1/3a^2b^3)(4a^4b) =$

7) $(-2x^3)(3qw^2)(-6q) =$ 8) $(3^2)^4 =$

9) $(x^3y^2)^3 =$ 10) $((1/5)^2)^3 =$

11) $(x^2y)^2(2xy)^{-3} =$ 12) $((3/4x^2y)^2)^4 =$

13) $3(x^2)^3(p^2)^3 =$ 14) $(x^3)^2(x^2)^3(y^2)^4 =$

Una aplicación de las potencias se tiene cuando se requiere manejar cantidades muy grandes o excesivamente pequeñas.

Las matemáticas, se dice, son la herramienta tanto de las ciencias experimentales como de las sociales. Precisamente en las ciencias experimentales se utilizan las potencias de diez para simbolizar cantidades que van acompañadas de muchos ceros antes o después del punto decimal.

Expresar una cantidad con potencias de diez recibe el nombre de notación desarrollada. Ejemplo

$$3{,}873 = 3{,}000 + 800 + 70 + 3$$
$$= 3x10^3 + 8x10^2 + 7x10 + 3x10^0$$

es claro que ésta simbolización para cantidades como la del ejemplo, no son todo lo eficaces y útiles que se requieran pero, en cambio, si queremos simbolizar: 3,874,000,000,000,000,000 con potencias de diez, será más fácil su manejo de la siguiente forma:

$$3.874 \times 10^{18}$$

Esto mismo tambien se podría representar así: $3{,}874 \times 10^{15}$, pero es usual expresar una cantidad con potencias de diez para uniformizar la notación tomando como factor un número entre 0.1 y 10.

Cuando el número que se esta simbolizando es un número mayor que cero, el punto decimal se recorre a la izquierda tantos lugares como sean necesarios hasta dejar que el factor de las potencias esté entre 0.1 y 10.

Cuando el número es menor que cero, el punto se recorre a la derecha hasta dejar igualmente un factor de las potencias entre 0.1 y 10 y el exponente de diez es negativo.

Ejemplo:

$$0.00000000018 = 1.8 \times 10^{-11}$$

EJERCICIOS RESUELTOS:

Expresa con potencias de diez las siguientes cantidades:

1) La distancia del sol a la estrella Alfa Centauro es de 4,070,000,000,000,000,000 cm

$$4.07 \times 10^{18} \text{ cm}$$

2) La masa de un átomo de hidrógeno es de:
0.000,000,000,000,000,000,000,001,67 gr

$$1.67 \times 10^{-24} \text{ gr}$$

3) Se cree que la edad del universo es de aproximadamente 3×10^{10} años. Expresa esta edad en segundos.

$24 \times 60 \times 60 \times 365$ es igual al número de segundos en un año

Esa cantidad se puede expresar como:

$24 \times 6 \times 10 \times 6 \times 10 \times 365$ y también $24 \times 6 \times 6 \times 365 \times 10^2$

Para dar contestacion a la pregunta, se tiene que:

$$3 \times 10^{10} \times 24 \times 6 \times 6 \times 365 \times 10^2$$

que representa el número de segundos que tiene de edad aproximadamente el universo. Esa cantidad se expresa también como:

$$3 \times 10^{12} \times 24 \times 36 \times 365 = 946,980 \times 10^{12}$$

$$= 9.46080 \times 10^{17}\ S.$$

4) La masa del sol es de aproximadamente 2×10^{33} gr y consta principalmente de hidrógeno. ¿Cuántos átomos de hidrógeno hay en el sol aproximadamente?

Si la masa de un átomo de hidrógeno es:

$$1.67 \times 10^{-24} \text{ gr}$$

entonces hay aproximadamente:

$$\frac{2 \times 10^{33}}{1.67 \times 10^{-24}} = \frac{2 \times 10^{9}}{1.67} = 1.20 \times 10^{9} \text{ átomos de H}$$

5) 32'000,000 expresado como potencia:

$$3.2 \times 10^{7}$$

6) 0.0008

$$0.8 \times 10^{-3}$$

7) Expresa la siguiente operación con potencias de diez. Simplifica el resultado. $\dfrac{0.00084 \times 12'000,000}{5'328,000}$

$$\frac{8.4 \times 10^{-4} \times 12 \times 10^{6}}{5.328 \times 10^{6}} = \frac{8.4 \times 10^{-4} \times 12}{5.328}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

Expresa las siguientes cantidades como potencias de diez.

1) 0.000000021

2) 37'000,000,000

3) 0.0000073

4) $\dfrac{0.000015 \times 7'000,000,000}{0.00000004 \times 7'385,000}$

5) $\dfrac{17'045,000.000 \times 0.107^{10}}{0.0000000107 \times (0.107)^{10}}$

6) 0.000000000000017

7) 5'172,000,000,000 x 0.00000007

8) $12'000,000,000 \times 9.72000000000$

PRODUCTOS NOTABLES.

Son productos de polinomios cuya frecuencia ha permitido establecer reglas o fórmulas que hacen que, para obtener su solu - ción, se eviten desarrollos largos e innecesarios como se puede no tar en los siguientes ejemplos:

1) $(2x + 3)^2 = (2x + 3)(2x + 3) =$

$= 2x(2x + 3) + 3(2x + 3) = 2x*2x + 2x*3 + 3*2x + 3*3 =$

$= (2x)^2 + 2x*3 + 2x*3 + 3^2 =$

$= (2x)^2 + 2(2x*3) + 3^2 =$

$= 4x^2 + 12x + 9$

2) $(-4x + 4)^2 = (-4x + 4)(-4x + 4) =$

$= -4x(-4x + 4) + 4(-4x + 4) =$

$= -4x(-4x) + -4x(4) + 4(-4x) + 4*4 =$

$= (-4x)^2 + 4(-4x) + 4(-4x) + 4^2 =$

$= (-4x)^2 + 2(4(-4x)) + 4^2 =$

$= 16x^2 - 32x + 16$

3) $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) =$

$x(x + y) + y(x + y) =$

$x*x + x*y + y*x + y*y =$

$x^2 + xy + xy + y^2 =$

$x^2 + 2y + y^2$

En los ejemplos anteriores se observa lo siguiente:

1) Son binomios elevados al cuadrado.

2) Los resultados expresados tienen en común lo siguiente:

a) En todos los casos el primer término está elevado al cuadrado.

b) El segundo término es el doble del producto del primero y segundo término del binomio.

c) El tercer término del resultado también es el cuadrado del segundo término del binomio.

d) Finalmente se observa que el resultado de un binomio al cuadrado es un trinimio que llamamos trinomio cuadrado perfecto.

Por lo anterior, como regla general se tiene que.

un binomio elevado al cuadrado es igual a:

el cuadrado del primer término, más dos veces el producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término.

Aplicando la regla en los siguientes ejemplos se tiene:

1) $(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2(2x*3) + 3^2$

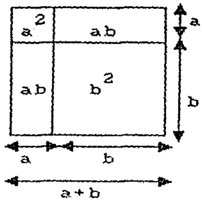
$= 4x^2 + 12x + 9$

2) $(-4x + 4)^2 = (-4x)^2 + 2(-4x*4) + 4^2$

$= 16x^2 - 32x + 16$

3) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Geométricamente se representa lo anterior como el área de un cuadrado cuyo lado mide a+b donde a y b pueden tomar cuales - quier valor numérico.



observando la figura se tiene el valor del área que representa cada zona, si se suman las cuatro zonas se tiene el área total del cuadrado:

$$a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2(ab) + b^2$$

pero, por otro lado, el área de un cuadrado es igual a lado por lado:

$$(a + b)(a + b)$$

y que: $(a + b)(a + b) = (a + b)^2$

de donde: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

quedando simbolizado el resultado de cualquier binomio al cuadrado de la forma anterior.

Los siguientes ejemplos permitirán deducir otra regla para productos notables.

1) $(6x - 3)(6x + 3) = 6x(6x + 3) - 3(6x + 3)$

$= 6x*6x + 6x*3 - 3*6x - 3*3$

$= (6x)^2 + 3*6x - 3*6x - 3^2$

$= (6x)^2 - 3^2$

$= 36x^2 - 9$

2) $(-2x + 4)(-2x - 4) = -2x(-2x -4) + 4(-2x -4)$

$= (-2x)(-2x) -2x(-4) + 4(-2x) + 4(-4)$

$= (-2x)^2 + 2x*4 - 2x*4 - 4^2$

$= 4x^2 - 16$

3) $(x - y)(x + y) = x(x + y) - y(x + y)$

$= x*x + x*y - y*x - y*y$

$= x^2 + x*y - x*y - y^2$

$= x^2 - y^2$

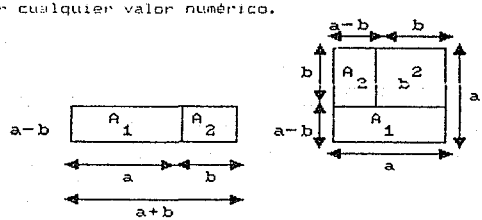
Lo observado en los ejercicios anteriores es:

1) Se trata del producto de dos binomios que solo difieren en el signo de uno de ellos. Este tipo de binomios recibe el nombre de binomios conjugados.

2) Los resultados, nos indican que se trata de una diferencia de cuadrados de los términos.

El producto de dos binomios conjugados es igual a la diferencia de los cuadrados de sus términos.

Geométricamente se representa lo anterior como el área de un rectángulo de lados (a + b) y (a - b) en donde de nuevo las literales a y b pueden tomar cualquier valor numérico.



De las figuras, se observa que el producto de (a - b)(a + b) es igual al área del rectángulo A_1 más el área del rectángulo A_2

$$(a - b)(a + b) = A_1 + A_2$$

de la segunda figura, el área del cuadrado de lado a, menos el á -

rea del cuadrado de lado b es igual al área del rectángulo A_1 más el área del rectángulo A_2:

$$a^2 - b^2 = A_1 + A_2$$

en donde $A_1 = (a - b)a$ y $A_2 = (a - b)b$ por lo tanto:

$$a^2 - b^2 = (a - b)a + (a - b)b = aa - ab + ab - bb$$

finalmente se obtiene:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

quedando simbolizado el producto de cualquier binomio conjugado.

Obsérvense los siguientes ejercicios:

1) $(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b)$

$$= xx + xb + ax + ab$$

$$= x^2 + x(a + b) + ab$$

2) $(x + 4)(x + 6) = x(x + 6) + 4(x + 6)$

$$= xx + x*6 + 4*x + 4*6$$

$$= x^2 + x(6 + 4) + 24$$

3) $(9x - 3)(9x + 5) = 9x(9x + 5) - 3(9x + 5)$

$$= 9x*9x + 9x*5 - 3*9x - 3*5$$

$$= (9x)^2 + 9x(5 - 3) - 15$$

Por lo anterior, se obtienen las siguientes conclusiones:

1) Se trata del producto de dos binomios.

2) Los binomios tienen en común un término.

3) Los resultados parciales que se han obtenido tienen en común lo siguiente:

a) Se trata de un trinomio como resultado.

b) El primer término de dicho trinomio está formado por el cuadrado del término común.

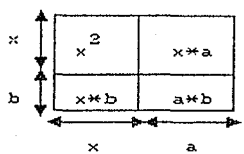
c) El segundo término es la suma de los términos que no son comunes multiplicados por el término común.

d) El tercer término es el producto de los términos no comunes.

En conclusión, se dice que:

El producto de dos binomios con un término común es igual al cuadrado del término común más la suma algebraica de los términos no comunes por el término común más el producto de los términos no comunes.

Visto lo anterior en un rectángulo cuyos lados midan $(x + a)$ y $(x + b)$ donde x, a y b pueden tomar cualesquier valor numérico, se tiene:



Donde el área del rectángulo será igual a sumar las cuatro zonas, cuyas áreas se anotan dentro de la figura:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + xa + xb + ab$$
$$= x^2 + (a + b)x + ab$$

Para obtener el resultado de un binomio al cubo se aplican los conceptos sobre potencia vistos en la primera parte de este cacítulo:

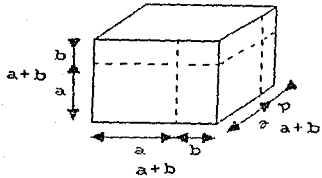
$$(2x + 3)^3 = (2x + 3)(2x + 3)(2x + 3) =$$
$$= (2x + 3)^2(2x + 3)$$

en forma simplificada y utilizando el concepto de un binomio al cuadrado, se tiene:

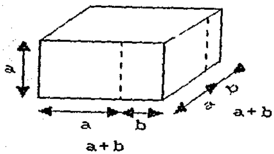
$$\begin{aligned}(2x + 3)^2(2x + 3) &= [(2x)^2 + 2(2x)(3) + 3^2](2x + 3)\\ &= (2x)^2(2x + 3) + 2(2x)3(2x + 3) + 3^2(2x + 3)\\ &= (2x)^2*2x + (2x)^2*3 + 24x^2 + 36x + 18x + 3^3\\ &= (2x)^3 + (2x)^2*3 + 24x^2 + 54x + 9\\ &= (2x)^3 + 4x^2*3 + 24x^2 + 54x + 9\\ &= (2x)^3 + 12x^2 + 24x^2 + 54x + 9\\ &= 8x^3 + 36x^2 \;\; 54x \;\; 27\end{aligned}$$

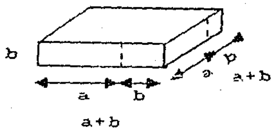
se observa que el primero y el último termino son los cubos de los términos que forman el binomio, sin embargo los otros dos términos, no es fácil detectar cómo están formados. El resultado es un polinomio de cuatro términos. La regla para este producto notable dice: La suma algebraica de un binomio al cubo es igual al cubo del primer término, más, el triple del producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple del producto del primer término por el cuadrado del segundo, más, el cubo del segundo término.

Utilizando un prisma cuadrangular de lado $(a + b)$ se observa lo anterior. El prisma tiene por lado $(a + b)$ por lo tanto su volumen es $(a + b)^3$.

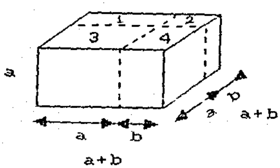


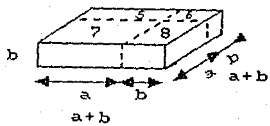
Seccionando el prisma en dos partes de la siguiente forma:





y a su vez dividiendo cada parte en cuatro, de la siguiente manera:

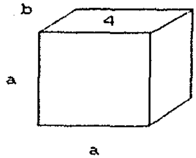




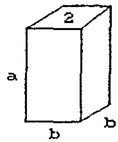
se tiene los volúmenes de cada uno de ellos en el siguiente listado, así como las figuras correspondientes a los prismas rectangulares - números 1 y 2.

PRISMA RECTANGULAR NUMERO	VOLUMEN DEL PRISMA
1	a^2
2	ab^2
3	a^3
4	a^2b
5	ab^2
6	b^3
7	a^2b
8	ab^2

FIGURA



$V_4 = a$



$V_2 = b^2 a$

al sumar todos los volúmenes se tiene el volumen total del prisma cuadrangular cuyos lados miden (a + b).

Por lo anterior: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 + 3ab^2 + b^3$ que simbólicamente representa la suma de un binomio al cubo.

Para obtener el resultado de la suma de un binomio a la cuarta, se tiene, generalizando el anterior ejemplo, lo siguiente:

$$(a + b)^4 = (a + b)^2(a + b)^2$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a^2(a^2 + 2ab + b^2) + 2ab(a2 + 2ab + b^2) + b^2(a2 + 2ab + b^2)$$

$$= a^2a^2 + a^22ab + a^2b^2 + 2aba^2 + 2ab2ab + 2abb^2$$

$$= + b^2a^2 + b^22ab + b^2b^2$$

$$= a^4 + 2a^3b + 2a^2b^2 + 2a^3b + 4a^2b^2 + 2ab^3 + 2ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

El resultado es un polinomio de cinco términos. ¿Cuál será la generalización para $(a + b)^n$?

BINOMIO DE NEWTON

Para dar respuesta a la anterior pregunta, se agrupan los valores obtenidos y se agrega que $(a + b) = a + b$

$$(a + b) = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

de lo anterior se observa que:

1) El número de términos obtenidos es una unidad mayor que el exponente del binomio a desarrollar.

2) El primero y el último de los términos de cada desarrollo corresponden a potencias cuyas bases son los mismos términos del binomio y cuya potencia corresponde con el exponente del binomio.

3) Los demás términos del desarrollo están formados por el producto de potencias de los terminos del binomio en su parte literal. La caracteristica es que conforme se avanza en obtener terminos, los exponentes de una de las literales disminuyen en una unidad hasta ser cero y los exponentes de la otra van aumentando hasta obtener la potencia máxima del binomio.

Para determinar los coeficientes numéricos se usará el factorial de un número. El desarrollo de $(a + b)^n$ quedará como:

$$(a + b)^n = \frac{a^n}{0!} + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^{3} + \ldots + b^{n}$$

En el desarrollo de una potencia donde se trate de una suma o diferencia de binomios se tendrá solo la diferencia entre los signos positivo o negativo que correspondan a cada termino.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Utilizando las reglas para efectuar el producto de polinomios, efectua las siguientes operaciones.

1) $(x + y)^2$	2) $(3a - 2b)^3$
3) $(5y + z)^2$	4) $(x + p)(x - p)$
5) $(2x + q)(2x + 3)$	6) $(m + 1/2)^2$
7) $(m + 7)(m - 2)$	8) $(2a - 5)(-5 + 4b)$
9) $(7b + c)(7b - c)$	10) $(3x + y)^4$

DIVISION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

La división se puede tratar como un producto del dividendo por el inverso multiplicativo del divisor ya que la división es la operación inversa de la multiplicación. En la división se usa la siguiente simbología:

$$: \qquad / \qquad \overline{)\quad}$$

En la division los operandos reciben el nombre de dividendo y divisor y el resultado, el de cociente. Cuando el dividendo no es divisible, el sobrante se llama residuo.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} \\ \text{divisor} \; / \overline{\;\text{dividendo}\;} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{residuo} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{148} \\ 5 \; / \overline{\;743} \\ 24 \\ 43 \\ 3 \end{array}$$

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} \qquad \frac{743}{5}$$

$$\text{dividendo} : \text{divisor} \qquad 743 : 5$$

Se dice que un número es divisible entre otro cuando se cumple que el residuo es cero y por lo tanto, el producto del cociente por el divisor es igual al dividendo.

En el ejemplo anterior, el residuo es distinto de cero por lo que 743 no es divisible entre 5 ya que:

$$743 = 148 \times 5 + 3$$

Un ejemplo de divisibilidad sería:

$$\begin{array}{r} \underline{135} \\ 4 \; / \overline{\;540} \\ 14 \\ 20 \\ 0 \end{array} \qquad \text{ya que:} \quad 135 \times 4 = 540$$

Si la división es la operación inversa de la multiplicación, entonces, las propiedades usadas en esa operación serán válidas para la división.

DIVISION DE MONOMIOS

Con los siguientes ejercicios se obtendrán las reglas de los exponentes para resolver cocientes de potencias en forma sencilla y práctica.

$$1) \quad \frac{2^5}{2^3} = \frac{2*2*2*2*2}{2*2*2} = \frac{2}{2}*\frac{2}{2}*\frac{2}{2}*2*2 = 1*1*1*2*2 = 2^2$$

2) $$\frac{6^4*2^5}{6^2*2^3} = \frac{6*6*6*6*2*2*2*2*2}{6*6*2*2*2} = \frac{6}{6}*\frac{6}{6}*6*6*\frac{2}{2}*\frac{2}{2}*\frac{2}{2}*2*2 =$$

$$= 1*1*6*6*1*1*1*2*2 = 6^2*2^2$$

3) $$\frac{x^2y^4}{y^3} = \frac{x*x*y*y*y*y}{y*y*y} = x*x*\frac{y}{y}*\frac{y}{y}*\frac{y}{y}*y = x*x*1*1*1*y$$

$$= x^2y$$

4) $$\frac{2^3}{2^5} = \frac{2*2*2}{2*2*2*2*2} = \frac{2}{2}*\frac{2}{2}*\frac{2}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{2} = 1*1*1*\frac{1}{2*2} = \frac{1}{2^2}$$

5) $$\frac{6^2*2^3}{6^4*2^5} = \frac{6*6*2*2*2}{6*6*6*6*2*2*2*2*2} = \frac{6}{6}*\frac{6}{6}*\frac{1}{6}*\frac{1}{6}*\frac{2}{2}*\frac{2}{2}*\frac{2}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{2} =$$

$$= 1*1*\frac{1}{6*6}*1*1*1*\frac{1}{2*2} = \frac{1}{6^2}*\frac{1}{2^2} = \frac{1}{6^2 2^2}$$

6) $$\frac{y^3}{x^2y^4} = \frac{y*y*y}{x*x*y*y*y*y} = \frac{1}{x}*\frac{1}{x}*\frac{y}{y}*\frac{y}{y}*\frac{y}{y}*\frac{1}{y} = \frac{1}{x*x}*1*1*1*\frac{1}{y} =$$

$$= \frac{1}{x^2}*\frac{1}{y} = \frac{1}{x^2y}$$

7) $$\frac{3^2}{3^2} = \frac{3*3}{3*3} = 1*1 = 1$$

8) $$\frac{6^3 2^2}{2^2 6^3} - \frac{6*6*6*2*2}{2*2*6*6*6} = \frac{6}{6}*\frac{6}{6}*\frac{6}{6}*\frac{2}{2}*\frac{2}{2} = 1*1*1*1*1 = 1$$

9) $$\frac{x^3y^4}{x^4x^3} = \frac{x*x*x*y*y*y*y}{y*y*y*y*x*x*x} = \frac{x}{x}*\frac{x}{x}*\frac{x}{x}*\frac{y}{y}*\frac{y}{y}*\frac{y}{y}*\frac{y}{y} = 1*1*1*1*1*1*1=1$$

De los ejercicios anteriores, se obtienen las siguientes conclusiones:

i) El cociente de dos monomios que tienen la misma base pero diferente de cero, su resultado es igual a la base y su exponente es la diferencia de los exponentes donde el minuendo es el exponente del numerador y el sustraendo es el exponente del denominador.

En los ejemplos 1), 2) y 3) al aplicar lo anterior se tiene:

1) $\dfrac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$

2) $\dfrac{6^4 2^5}{6^2 2^3} = 6^{4-2}2^{5-3} = 6^2 2^2$

3) $\dfrac{x^2 y^4}{y^3} = x^2 y^{4-3} = x^2 y$

generalizando:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

ii) En los ejercicios 4), 5) y 6) se observa que se han invertido los operandos y los resultados son recíprocos de 1), 2) y 3) respectivamente por lo que se deduce que tener un exponente negativo indica que se trata de una fracción.

4) $\dfrac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2}$

también $\dfrac{2^3}{2^5} = \dfrac{2*2*2}{2*2*2*2*2} = \dfrac{1}{2^2}$

por lo tanto $2^{-2} = \dfrac{1}{2^2}$

5) $\dfrac{6^2 2^3}{6^4 2^5} = 6^{2-4}2^{3-5} = 6^{-2}2^{-2}$

$$\text{donde } 6^{-3}2^{-2} = \frac{1}{6^3 2^2}$$

6) $$\frac{y^3}{x^2y^4} = \frac{1}{x^2}y^{3-4} = \frac{1}{x^2}\,y^{-1}$$

$$\text{donde } \frac{1}{x^2}\,y^{-1} = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{x^2y}$$

iii) En los ejercicios 7), 8), 9) es claro que si el numerador es igual al denominador, al resultado es la unidad. Todo numero dividido entre sí mismo es la unidad, sin embargo también es aplicable la conclusion de que si se tiene un cociente cuyas bases son iguales, la base se conserva y los exponentes se restan.

7) $$\frac{3^2}{3^2} = 3^{2-2} = 3^0$$

se cumple que: $\frac{3^2}{3^2} = 1$ y por lo tanto $3^0 = 1$

8) $$\frac{6^3 2^2}{2^2 6^3} = \frac{6^3}{6^3} * \frac{2^2}{2^2} = 6^{3-3}2^{2-2} = 6^0 2^0 = 1$$

9) $$\frac{x^3y^4}{y^4x^3} = y^{4-4}x^{3-3} = y^0x^0 = 1$$

se concluye que: "toda potencia cuyo exponente es cero da como resultado la unidad"

RESUMIENDO

Al tener el cociente de dos monomios se presentan tres casos:

a) El exponente del numerador es mayor que el del denominador y por lo tanto, el resultado es una potencia con exponente positivo.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad \text{donde} \quad n>m \quad y \quad n-m>0$$

b) El exponente del denominador es mayor que el del numerador y por lo tanto, el resultado es una potencia con exponente negativo.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad \text{donde} \quad m>n \quad y \quad n-m<0$$

el resultado puede escribirse como un numero racional cuyo numerador es la unidad y el denominador es la misma potencia pero el exponente es positivo.

$$\frac{1}{a^{n-m}} \qquad \text{en este caso } n-m>0$$

c) Los exponentes del numerador y del denominador son iguales, en consecuencia, el resultado es una potencia cuyo exponente es cero.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^0 \quad \text{donde} \quad n = m$$

LEYES DE LOS EXPONENTES

1) $x^n x^m = x^{n+m}$ 2) $(x^n)^m = x^{nm}$

3) $(x/y)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$ $y \neq 0$ 4) $(x/y)^n = x^0$ $x = y$

$x = y \neq 0$

5) $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

estas leyes son válidas para cualquier x,y en los reales salvo cuando x e y son divisores nulos y para cualquier n, m en los enteros.

DIVISION DE POLINOMIOS

Para dividir un polinomio entre otro polinomio, éstos deben ordenarse en forma decreciente en función del exponente de la variable. Si el polinomio es incompleto se dejará un hueco para que al efectuar el cociente, aparezcan aquellas variables faltantes.

En la división de polinomios se sigue el mismo algoritmo que se usa para dividir números reales.

Ejemplo numérico

$$\begin{array}{rr} & \underline{\quad 32} \\ 18 \;/ & 587 \\ & -\;54 \\ & \overline{\quad 47} \\ & -\;16 \\ & \overline{\quad 31} \end{array}$$

Ejemplo algebraico

$$\begin{array}{rl} & \underline{4x - 7 \qquad\quad} \\ x + 3 \;/ & 4x^2 + 5x + 7 \\ & -\;4x^2 - 12x \\ & \overline{\quad 0 \;-\; 7x \qquad} \\ & \qquad\;\; +\;7x + 21 \\ & \qquad\;\; \overline{\;\;0 \qquad 28} \end{array}$$

otra forma de escribir el cociente sería:

$$\frac{4x^2 + 5x + 7}{x + 3}$$

donde cada uno de los sumandos del dividendo se divide entre los sumandos del divisor:

$$\frac{4x^2}{x + 3} + \frac{5x}{x + 3} + \frac{7}{x + 3}$$

que es en realidad el mismo proceso que se siguió en el ejemplo algebraico. Al obtenerse el primer residuo, si es mayor el grado del polinomio, se continúa la división hasta que el residuo es de grado menor que el divisor.

Ejemplo:

Efectuar la siguiente operacion:

$$(x^3 - 4x + 1 - 4x^2) : (x - 1)$$

a) Ordenar el polinomio dividendo:

$$x^3 - 4x^2 - 4x + 1$$

b) Proceder a simbolizarlo utilizando

$$x - 1 \;/\; \overline{x^3 - 4x^2 - x + 1}$$

c) Buscar un primer cociente resultado de dividir $\dfrac{x^3}{x - 1}$ es decir, ¿qué número multiplicado por x da x^3?

d) Este valor lo multiplicamos por todos y cada uno de los términos del polinomio divisor y el resultado de esa multiplicación se coloca debajo del polinomio dividendo de modo que coincidan los términos semejantes solo que con signo contrario para efectuar una suma del minuendo con los inversos aditivos del sustraendo.

$$\begin{array}{rl} & \underline{\;x^2\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ x - 1 \;/ & x^3 - 4x^2 - 4x + 1 \\ & \underline{-x^3 + x^2\qquad} \\ & 0 - 3x^2 \end{array}$$

e) Este proceso lo continuamos hasta obtener un residuo no divisible entre el primer término del polinomio divisor.

$$\begin{array}{rllll} & \underline{x^2} & \underline{-\;3x} & \underline{-\;7} & \\ x - 1 \;/ & x^3 & - 4x^2 & - 4x & + 1 \\ & \overline{0} & - 3x^2 & & \\ & & \underline{+ 3x^2} & \underline{- 3x} & \\ & & 0 & - 7x & \\ & & & \underline{+ 7x} & \underline{+ 7} \\ & & & 0 & 8 \end{array}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Efectúa las siguientes operaciones con monomios.

1) $(w/a)^3$ 2) $(4p/b)^2(2p^2/b^2)^3$

3) $(x^3/y^2)(x/y)^2$

4) $(3a^2b/c^3)^2(5a/c^2)^3$

5) $2x(4y^2)^2(1/4x^2y)^3$ 6) $(a/b)^2(b/c)^3$

7) $(1/5x^2)^3(1/2y)^2$ 8) $(x^3/x^2)^2$

De acuerdo con los datos, efectúa las siguientes divisiones:

	Dividendo	Divisor
1)	$12x^2 - 10x - 2$	$x - 1$
2)	$x^3 - 8$	$x - 2$
3)	$5x^2 - 3x + 1$	$x - 1$
4)	$x^3 + 3x^2 - x + 2$	$2x - 3$
5)	$6x^4 - 5x^3 + 11x^2 + 15x - 4$	$3x^2 + 2x + 1$
6)	$2a^3 - 7a^2 + 9a - 3$	$a^2 + 1$

DIVISIBILIDAD DE UN POLINOMIO ENTERO ENTRE $x + a$ o $x - a$

Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros en x con exponentes enteros y positivos, de cualquier grado y que se desea dividir entre $x + a$ ó $x - a$ donde C es el cociente y R es el residuo, es posible representarlo como:

$$P(x) = (x + a)C(x) + R$$

ó

$$P(x) = (x - a)C(x) + R$$

donde al sustituir a x por $-a$ o por $+a$ resulta:

$$P(-a) = (-a + a)C(x) + R$$

$$P(-a) = R$$

y
$$P(a) = (a - a)C(x) + R$$
$$P(a) = R$$

por lo tanto, el residuo de la división de $P(x) : (x + a)$ se obtiene sustituyendo a x por $-a$ y en el cociente de $P(x) : (x - a)$ se obtiene sustituyendo a x por a.

Ejemplo:

El polinomio $x^2 - 11x + 18$ ¿Es divisible entre $x - 9$?

Sea $x = 9$; entonces $P(9) = 9^2 - 11(9) + 18 = 0$

de donde $x^2 - 11x + 18$ si es divisible por $x - 9$. El cociente es:

$$\begin{array}{r|l} & x - 2 \\ \hline x - 9 \; / & x^2 - 11x + 18 \\ & -x^2 + 9x \\ \cline{2-2} & - 2x \\ & 2x - 18 \\ \cline{2-2} & 0 \quad 0 \end{array}$$

cuando un polinomio es divisible también se resuelve sin efectuar la división en su forma tradicional sino descomponiendo en factores los polinomios dividendo o divisor.

$$\frac{x^2 - 11x + 18}{x - 9} = \frac{(x - 9)(x - 2)}{x - 9} = x - 2$$

Descomponer en factores una expresión algebraica, significa <u>factorizar</u> la expresión. Este procedimiento consiste en representar las expresiones algebraicas como el producto de dos o más factores para lo cual es útil aplicar los productos notables como se observa en el ejemplo.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Encuentra el cociente factorizando:

1) $(x^2 - 36) : (x + 6)$

2) $(x^2 - 20x + 100) : (x - 10)$

3) $(x^2 - 8x + 16) : (x - 4)$

4) $(25 - 9y^2) : (5 - 3y)$

5) $(x^4 - 1) : (x + 1)$

Encuentra el residuo sin efectuar la división:

1) $(a^2 + 1) : (a - 2)$

2) $(16a^4 - 1) : (2a + 2)$

3) $(3a^5 + 2a^4 - 4a^3 + 4a^2 + 5a - 2) : (a + 1)$

4) $(x^3 - 1) : (x + 1)$

5) $(x^2 + xy - x - y) : (x - y)$

LEYES DE LOS RADICALES

En el apartado correspondiente a leyes de los exponentes se menciono que el exponente era un número entero. En éste, se ven los exponentes racionales y su significado.

Se recuerda la definición de la operación raíz cuadrada de un número:

Sean a y b números reales, b es la raíz cuadrada de a y esto se simboliza como

$$\sqrt{a} = b$$

siempre que a sea mayor o igual que cero y que $b^2 = a$

Obsérvense los siguientes ejemplos:

$$\sqrt{4} = 2 \qquad 2 > 0 \quad y \quad 2^2 = 4$$

$$\sqrt{4} = -2 \qquad -2 < 0 \quad y \quad (-2)^2 = 4$$

$$\sqrt{0} = 0 \qquad 0 > 0 \quad y \quad 0^2 = 0$$

$$\sqrt{25} = 5 \qquad 5 > 0 \quad y \quad 5^2 = 25$$

$$\sqrt{25} = -5 \qquad -5 < 0 \quad y \quad (-5)^2 = 25$$

$$\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5} \qquad \frac{2}{5} > 0 \quad y \quad (2/5)^2 = \frac{4}{25}$$

si se trata de la raiz cúbica de un número, se tiene:

$$\sqrt[3]{8} = 2 \quad \text{donde} \quad 2^3 = 8$$

$$\sqrt[3]{-1} = -1 \quad \text{donde} \quad (-1)^3 = -1$$

$$\sqrt[3]{27} = 3 \quad \text{donde} \quad 3^3 = 27$$

generalizando, se puede decir que:

Si a y b son dos números reales y n es un entero positivo, entonces b es la <u>raiz enésima</u> de a y se escribe como:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{donde} \quad b^n = a$$

Cuando n sea par, a debe ser mayor o igual a cero; si n es impar entonces a puede ser positivo nulo o negativo.

En la simbolización, n recibe el nombre de <u>indice</u> de la raiz, a es el <u>radicando</u>, $\sqrt{\ }$ es el <u>radical</u> y b es la <u>raiz</u>.

Por otro lado, si una base está elevada a una potencia fraccionaria por ejemplo 1/2 y a su vez al cuadrado se tiene:

$$(9^{1/2})^2 = 9^{(1/2)(2)} = 9$$

lo anterior indica que $9^{1/2}$ representa un número que elevado al cuadrado es 9; puede ser 3 ó -3.

En términos generales, para cualquier índice que tenga la raíz se define que:

1) $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ con $x \geq 0$ si n es par

2) Si el exponente es una fracción cuyo numerador es diferente de uno

$$x^{n/m} \quad \text{donde} \quad n, m \in Z \quad m \neq 0$$

al descomponerse el exponente de la siguiente forma:

$$x^{(1/m)n} = (x^{1/m})^n$$

también se escribe como:

$$(x^{1/m})^n = (\sqrt[m]{x})^n$$

que, de acuerdo con la definición, se escribe:

$$x^{n(1/m)} = (x^n)^{1/m} = \sqrt[m]{x^n}$$

$$(\sqrt[m]{x})^n = \sqrt[m]{x^n}$$

3) En los radicales, cuando el radicando es un cociente, se puede descomponer en el cociente de dos radicales cuyo índice es el mismo.

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \qquad y \neq 0,$$

4) Cuando se tiene el producto de dos radicales cuyo índice es el mismo, se puede representar en un solo radical cuyo índice es el mismo y el radicando es el producto de los radicandos.

$$\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

ya que:

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n} \qquad y \qquad \sqrt[n]{y} = y^{1/n}$$

entonces:

$$\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = x^{1/n}y^{1/n} = (xy)^{1/n}$$

pero:

$$(xy)^{1/n} = \sqrt[n]{xy}$$

5) La raíz enésima (n) de la raíz emésima (m) de un radicando es igual a otro radical cuyo índice es el producto de los índices y el radicando es el mismo.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$$

ya que:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n]{x^{1/m}} = (x^{1/m})^{1/n}$$

$$x^{1/mn} = \sqrt[mn]{x}$$

por lo que se cumple:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[mn]{x}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Representa las siguientes potencias fraccionarias como raíces y de ser posible simplifícalas.

1) $16^{1/2} = \sqrt{16} = \pm 4$

2) $4^{-1/2} = \dfrac{1}{4^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{\pm 2}$

3) $144^{1/2} = \sqrt{144} = \pm 12$

4) $(x/yw)^{1/4} = \sqrt[4]{\frac{x}{yw}} = \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{yw}}$

Resuelve los siguientes ejercicios expresando los resultados sin exponentes fraccionarios ni negativos.

1) $a^{2/4}a^{1/5} = a^{(2/4 + 1/5)} = a^{14/20} = a^{7/10}$

$= \sqrt[10]{a^7}$

2) $7^{1/3}a^{1/3}b^{1/3} = \sqrt[3]{7}\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{7ab}$

3) $2^{1/2}xy^{3/2} = \sqrt{2}\, x\sqrt{y^3} = x\sqrt{2y^3}$

4) $\left(\frac{5^2 + 2^4}{2^2}\right)^{-1} =$

$$= \frac{1}{\frac{5^2 + 2^4}{2^2}} = \frac{1}{\frac{5^2}{2^2} + \frac{2^4}{2^2}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{25}{4} + 2^{4-2}} = \frac{1}{\frac{25}{4} + 2^2} = \frac{1}{\frac{25}{4} + 4}$$

$$= \frac{1}{\frac{25}{4} + \frac{16}{4}} = \frac{1}{\frac{41}{4}} = \frac{4}{41}$$

CAPITULO III

FUNCIONES. SUS GRAFICAS Y SU APLICACION A PROBLEMAS

En los capítulos anteriores se ha hablado de conjuntos de números y sus operaciones pero no sólo se pueden relacionar elementos de conjuntos numéricos exclusivamente sino también toda clase de conjuntos como pueden ser: conjuntos de obras de arte, meses del año, etc. y no necesariamente relacionar los elementos de dos conjuntos diferentes sino también relacionar entre sí elementos de un sólo conjunto.

RELACIONES.

1) Si se relacionan los meses del año con sus respectivas temperaturas máximas, la tabla siguiente muestra la variación de temperatura en el transcurso de un año en la Ciudad de México, obteniéndose la temperatura máxima en el mes de julio y un valor mínimo en el mes de enero.

MESES	TEMPERATURAS
Enero	11°C
Febrero	14°C
Marzo	16°C
Abril	21°C
Mayo	25°C
Junio	26°C
Julio	32°C
Agosto	30°C
Septiembre	26°C
Octubre	24°C
Noviembre	19°C
Diciembre	17°C

2) Se tiene un conjunto de hombres y un conjunto de mujeres. Si éstos se relacionan bajo la siguiente regla de asociación: "x es esposo de y", ésta relación se puede representar como sigue:

X	Y
Juan	Beatriz
Luis	Carmen
Miguel	Lucía
Guillermo	
	Leticia

Como se observa en la tabla, no todos los elementos de ambos conjuntos están relacionados ya que no todos cumplen con la regla de asociación.

3) Se relacionan el valor de los perímetros y áreas de un rectángulo según la variación de la medida de sus lados. Se tiene un rectángulo de largo igual a 2 m y de ancho igual a 3 m de donde su perímetro es de 10 m y su área de 6 m^2. Si se aumenta en una unidad el largo del rectángulo, el valor del perímetro y su área tendrán una variación que se muestra en la siguiente tabla:

LARGO	ANCHO	PERIMETRO	AREA
2	3	10	6
3	3	12	9
4	3	14	12
5	3	16	15
6	3	18	18

Observando los valores anteriores se nota que al variar en una unidad el largo y manteniendo constante el ancho en 3 unidades, el perímetro aumenta cada vez 2 unidades y el área aumenta 3 unidades cuadradas respectivamente. Si se aumenta 1 m tanto el ancho como el largo, el valor de su perímetro y área variará como se muestra en la siguiente tabla, aunque no en la misma proporción que en el ejemplo anterior.

LARGO	ANCHO	PERIMETRO	AREA
2	3	10	6
3	4	14	12
4	5	18	20
5	6	22	30

Otros ejemplos de asociación entre elementos de conjuntos no numéricos pueden ser:

4) El conjunto de las áreas académicas que forman el Colegio de Ciencias y Humanidades con su respectivo Jefe de Materia:

AREA	JEFE DE MATERIA
C. Experimentales	Profesor Villalobos
Historia	Profesora Elizondo
Matemáticas	Profesor Sarmiento
Talleres	Profesora Guevara

5) Las conferencias que se sustentan en los auditorios del Colegio.

CONFERENCIA	AUDITORIO
La vida en el mar	A-I
Matemáticas aplicadas a la sociología	A-II
El medio ambiente en el entorno de tu escuela	A-II
Ecología y salud	A-I
Problemas mundiales sobre contaminación	A-I

b) Dos de las facultades de la U.N.A.M. a las que se le asocian las carreras que en ellas se imparten.

FACULTADES	CARRERAS
Ciencias	Física
Ciencias	Biología
Ciencias	Matemáticas
Ciencias	Actuaría
Ciencias Químicas	Ing. Química
Ciencias Químicas	Ing. Farmacobiólogo
Ciencias Químicas	Ing. Petrolero

En los ejemplos anteriores se han relacionado entre sí:

a) conjuntos de elementos numéricos con conjuntos de elementos numéricos.

b) conjuntos de elementos no numéricos con conjuntos de elementos no numéricos.

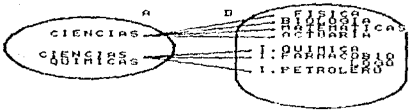
c) conjuntos de elementos numéricos con conjuntos de elementos no numéricos.

Intuitivamente se ha estado manejando el concepto de <u>par ordenado</u> en donde los elementos de un conjunto que se denomina A o cualquier otra letra mayúscula, y los de otro conjunto que se denota por B, se relacionan entre sí, para formar una pareja ordenada, donde el primer elemento de dicha pareja pertenezca al conjunto A y el segundo elemento pertenezca al conjunto B. Por ejemplo, sea A el conjunto que representa a las Facultades y B el conjunto de carreras que se imparten en ellas:

A = { Ciencias, Ciencias Químicas }

B = { Física, Biología, Matemáticas, Actuaría, Ingeniería Química, Ingeniero Farmacobiólogo, Ingeniero Petrolero }

Estos conjuntos los podemos representar por un <u>diagrama de Venn-Euler</u>:



Esta relación se puede simbolizarmediante parejas ordenadas:

{(Ciencias, Física), (Ciencias, Biología), (Ciencias, Matemáticas), . . . (Ciencias Químicas, Ingeniero Petrolero)}

De lo anterior, se define una relación R entre dos conjuntos, A y B como el conjunto de todas las parejas ordenadas de la forma (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$ que cumplen con una regla de asociación entre dichos conjuntos.

7) Sea R el conjunto de los números reales y N el conjunto de los números naturales y la regla de asociación "a es divisible por b". Lo anterior se simboliza así:

R = {(a, b)/ "a es divisible por b" donde $a \in R \wedge b \in N$}

las siguientes parejas son algunas de la relación R

R = { ... (8, 1), (8, 2), (8, 4), (8, 8), (6, 1), ...}

8) Dados los conjuntos: A = {D.F., Sinaloa, Yucatán} y B = {Mazatlán, Progreso, Sisal, Veracruz} donde la relación es: "en a se encuentra el puerto b", la simbolización es:

R_1 = {(a, b)/ "en a se encuentra el puerto b" $a \in A \wedge b \in B$}

de donde R_1 = {(Sinaloa, Mazatlán), (Yucatán, Progreso), (Yucatán, Sisal)}

9) Si $A = \{-7, -15, 8, 15\}$ y $B = A$ y la relacion es: "a es menor que b", se tiene"

$R_2 = \{(a, b) /$ "a es menor que b", $a, b \in A\}$ y las parejas son:

$R_2 = \{(-7, 8), (-7, 15), (-15, -7), (-15, 8), (-15, 15), (8, 15)\}$

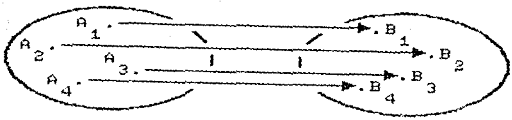
DEFINICION DE FUNCION.

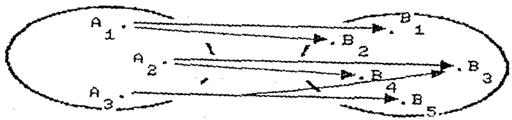
Existen muchas formas de relacionar a los conjuntos pero en este capítulo se tratará un tipo de relación que recibe el nombre de <u>función</u> en donde a cada elemento del conjunto A se le relaciona con uno y sólo uno del conjunto B. A la relación entre esos conjuntos se le llama <u>regla de correspondencia</u>. A los elementos de dichos conjuntos les llamamos variables. Como variables podemos anotar: meses, temperaturas; conferencia, auditorio; facultades, carreras; x, y de los ejemplos anteriores.

También se puede ver una función como un conjunto de parejas ordenadas donde el primer elemento de la pareja corresponde a la variable independiente y el segundo elemento pertenece a la variable dependiente: (mes, temperatura); (conferencia, auditorio); (x, y)

Un ejemplo que puede aclarar lo anterior es el caso de una sala de cine, en donde a cada espectador le corresponde una y solamente una butaca. En el caso en que a una persona se le asocian dos o más butacas, ya no representaría una función y lógicamente no podría ser ocupada por más de una persona.

A continuación se representa lo anterior utilizando un diagrama de Venn:





En el segundo diagrama se representa una no función ya que los elementos del primer conjunto están asociados con más de un elemento del segundo conjunto.

Obsérvense los siguientes ejemplos:

Sea A = {(A.L.Mateos, Rep. Mexicana), (J.F.Kennedy, E.E.U.U.), (J.D.Perón.Argentina), (J.B.Tito,Yugoeslavia)}

donde la regla de correspondencia es: "...fue presidente de ..."

Sea $D = \{(1,3), (2,6), (3,9), (5,15)\}$

y su regla de correspondencia es: $y = 3x$ donde:

$$D = \{(x,y) / \ y=3x, \ 1 \leq x \leq 5 \ x,y \in N\}$$

La regla de correspondencia que relaciona a los conjuntos en ocasiones no se encuentra en forma explícita, es decir, sólo se da un conjunto de parejas a las que hay que buscar una fórmula que exprese su relación. La regla de correspondencia de las funciones que, con mayor frecuencia se presentan en el estudio de las matemáticas, está asociada a una fórmula.

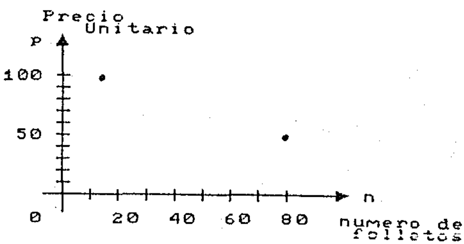
FUNCIONES Y SUS GRAFICAS.

Hasta este momento se han representado las relaciones y en particular las funciones utilizando diagramas de Venn, pero no es la única representación; tambien es usual y más práctico representarlas utilizando un sistema de ejes coordenados que permita obtener mayor información de la gráfica ya que en ocasiones sólo se tiene un número limitado de parejas ordenadas y, por el contrario, si se conoce la regla de correspondencia, es posible determinar las características que tendrá la figura.

El sistema de ejes coordenados también llamado plano cartesiano, debe su nombre al matemático, René Descartes, francés nacido en La Haya el 31 de marzo de 1596.

El plano está formado por dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto que llamamos origen. El eje horizontal o eje de las equis o de abscisas en el que usualmente se ubican los primeros elementos de cada pareja ordenada que corresponden a la variable independiente y el eje vertical o eje de las yes o de ordenadas en el que se anotan a los segundos elementos de cada pareja y que corresponden a la variable dependiente. Del origen hacia arriba y hacia la derecha se consideran los valores positivos y hacia abajo y a la izquierda los valores negativos. En los siguientes ejemplos se puede apreciar en algunas gráficas que sólo se han anotado algunos puntos, en otras se ha trazado una línea continua que los une, ésto depende del tipo de información que se tiene o se requiera.

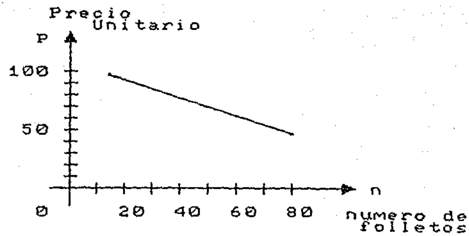
1) Considérese el caso en que se mandan imprimir una cantidad de folletos cuyo número es variable y cuyo precio unitario es proporcional a la cantidad imprimida de manera que si se imprimen 15 ejemplares, el precio unitario será de $100 pero al imprimir 80 ejemplares el precio unitario se reduce a $50. De esta manera el precio unitario es variable y depende del número de folletos que se impriman.



Con esos datos, se sabe que el precio máximo es de $100 por unidad de folleto y de $50 el mínimo y que, el número de folletos, para poder obtener esos precios está entre 15 y 80 folletos.

Si se quiere conocer lo que cueste mandar imprimir 20, 30, etc., folletos, se puede utilizar una gráfica en el plano cartesiano tal que, ubicando los datos proporcionados como dos parejas ordenadas: (15, 100) y (80, 50) éstas, representan en el plano dos puntos, los que determinan una recta ya que que existe una proporción entre el precio y la cantidad imprimida. Adelante se hablará de constante de proporcionalidad.

Cada uno de los puntos de esa recta representa la información requerida, trazando rectas paralelas al eje vertical que coincidan con el número de folletos que se quiere saber su precio y rectas paralelas al eje horizontal, de tal forma que se corten en un punto coincidente con la recta original.



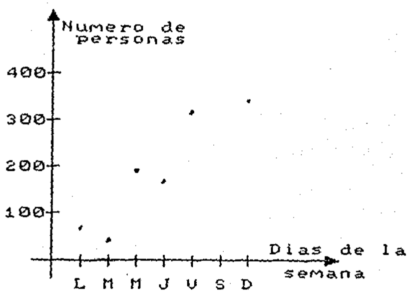
De la anterior gráfica se obtiene la tabla siguiente:

NUMERO DE FOLLETOS	PRECIO UNITARIO	PAREJAS ORDENADAS
15	100	(15,100)
20	96	(20,96)
30	88	(30,88)
40	80	(40,80)
50	72	(50,72)
60	66	(60,66)
70	58	(70,58)
80	50	(80,50)

1) Otro ejemplo es: En una sala cinematográfica durante una semana se registró una asistencia diaria comprendida entre 70 y 350 personas. En este ejemplo las variables son el día de la semana y el número de personas asistentes. La tabla de registro es:

DIA DE LA SEMANA	NUMERO D PERSONAS	PAREJAS ORDENADAS
lunes	80	(L ,80)
martes	70	(Ma,70)
miercoles	200	(Mi,200)
Jueves	180	(J ,180)
viernes	320	(V ,320)
sabado	340	(S ,340)
domingo	350	(D ,350)

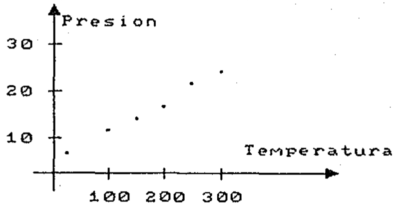
En este ejemplo, todos los datos se han proporcionado y en esa forma, cada pareja ordenada representa un punto en la gráfica.



2) El siguiente ejemplo trata de una caldera que soporta la presion del gas que contiene según la temperatura que tenga el fluido. De esta manera, al someter al gas a una temperatura de 25°C, la caldera tiene una presion de 7 atmósferas y al elevar la temperatura hasta 300°C la presion se eleva a 25 atmósferas. Aqui las cantidades variables son la presion y la temperatura. Los datos proporcionados son:

TEMPERATURA	PRESION	PAREJAS ORDENADAS
25	7	(25,7)
100	12	(100,12)
150	15	(150,15)
200	18	(200,18)
250	22	(250,22)
300	25	(300,25)

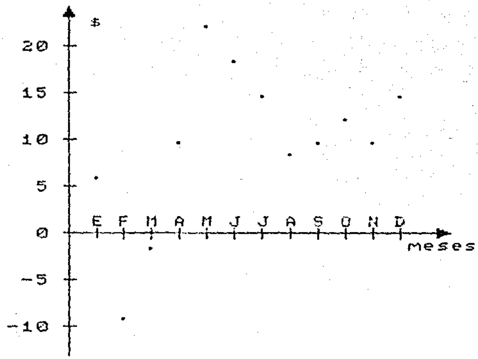
La gráfica que les corresponde a ésos datos es:



3) Las utilidades y pérdidas en una empresa durante un año -- son las que se presentan en la siguiente tabla:

MESES	PERDIDAS O GANANCIAS (MILLONES DE PESOS)
Enero	6
Febrero	-8
Marzo	-1.5
Abril	10
Mayo	23
Junio	19
Julio	15
Agosto	7
Septiembre	9
Octubre	13
Noviembre	9
Diciembre	15

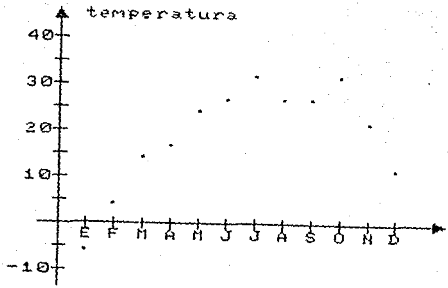
Las parejas formadas por los meses y las cantidades son las que a continuación aparecen en la siguiente gráfica.



4) Las temperaturas registradas durante el año en el Estado de Chihuahua son, en promedio, las señaladas en el siguiente cuadro

MESES	TEMPERATURAS
Enero	−5°C
Febrero	5
Marzo	15
Abril	17
Mayo	25
Junio	28
Julio	31
Agosto	27
Septiembre	29
Octubre	31
Noviembre	21
Diciembre	12

Representado lo anterior en el plano:



En éstos dos últimos ejemplos se tienen cantidades que se ubican abajo del eje horizontal significando pérdidas o temperaturas bajo cero.

CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD.

Una de las aplicaciones mas útiles de las funciones es en problemas donde interviene una constante que es llamada "constante de proporcionalidad".

Ejemplo: En un taller se utilizan tornillos de las siguientes medidas 2, 2 1/4, 2 1/2, 2 3/4, 3, 3 1/4, 3 1/2 pulgadas. Se quieren conocer sus equivalencias en centímetros, para lo cual se utiliza la siguiente expresión:

$$f(c) = 2.54x$$

donde f(c) representa la medida en centímetros y x es la medida en pulgadas, sabiendo que una pulgada es aproximadamente 2.54 cm. La tabla que se obtiene es:

LONGITUD EN PULGADAS	LONGITUD EN CENTIMETROS
2	5.08
2 1/4	5.71
2 1/2	6.35
2 3/4	6.99
3	7.62
3 1/4	8.26

Otro caso en el que interviene la constante proporcional es cuando se quiere conocer el tipo de cambio de una moneda a otra: dólares a pesos, pesetas a pesos, libras esterlinas a pesos, etc. donde los tipos de cambio pueden variar de un día a otro, sin embargo la expresión que representa el fenómeno es

$$f(x) = tx$$

donde t representa el tipo de cambio y x la cantidad de dinero a ser convertida a otra unidad monetaria y f(x) es el cambio monetario.

EJERCICIOS RESUELTOS

1) ¿Cuál sería una expresión algebraica que represente la conversión de gramos a kilogramos?

$$y = \frac{x}{1000}$$

2) Aplicando la expresión anterior obten los demás valores de la siguiente tabla:

CANTIDAD EN GRAMOS	CANTIDAD EN KILOGRAMOS
345	0.345
25	0.025
1250	1.250
3285	3.285
10	
32	
125	
2046	

3) Un atleta corre a una velocidad de 10 km/h. Escribe una expresión que represente la distancia recorrida en t horas.

$$D = 10t$$

4) Llena la siguiente tabla para encontrar las distancis que recorre en los tiempos que se marcan:

TIEMPO (horas)	DISTANCIA (Km.)
2	
2.5	
3	
3.25	
4	
4.3	
5	

5) Una nave espacial llega hasta su estación orbital en 45 horas. Viaja a una velocidad de 4,000 millas por hora. En qué tiempo llegará otra nave que viaje a 24,000 millas por hora?

La primera recorre una distancia: d

con una velocidad de: 4,000 mi/h

en un tiempo de: 45 h

que, de acuerdo con el problema anterior, el modelo sería:

$$d = 4000(45)$$

La segunda recorre también una distancia: d con una velocidad de: 24.000 mi/h

en un tiempo de: t h

por lo que, la expresión algebraica sería:

$$d = 24.000(t)$$

y para dar contestación a la pregunta del problema, se igualan las dos expresiones, ya que d es la misma

$$4,000(45) = 24,000(t)$$

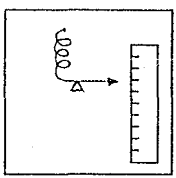
6) Una aplicación más de las funciones puede ser en la Física en la verificación de la ley de Hooke que dice:

"Los alargamientos producidos en un cuerpo elástico son proporcionales a las fuerzas deformantes".

$$a = KP$$

7) Fabrica un modelo como el que se ve en la figura utilizando un alambre o un resorte fijándolo a una tabla en la que se anexe una regla graduada. Coloca en el cuerpo elástico distintos pesos y llena la siguiente tabla. Recuérdese que para verificar esta ley se realiza esta práctica en el laboratorio de física en la secundaria.

PESOS (gr.)	ALARGAMIENTOS (cm.)



Dicha ley se puede expresar como:

$a = KP$

a = alargamiento

P = peso

K = constante proporcional, depende del material con el que se ha elaborado el resorte

o también como: $K = \frac{a}{p}$

o como: $\frac{a_1}{p_1} = \frac{a_2}{p_2} = \frac{a_3}{p_3}$

ya que existe una razon de proporcionalidad entre los alargamientos y el peso.

Si un peso de 6 Kg produce un alargamiento de 8 cm, qué alargamiento producirá un peso de 4 Kg?

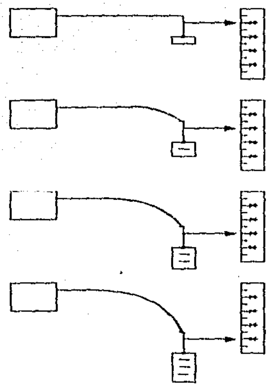
$$\frac{8}{6} = \frac{a_1}{4} \qquad a_1 = \frac{8(4)}{6} = 5.3 \text{ cm de alargamiento}$$

9) Una varilla de acero fijada por un extremo en posicion horizontal sostiene un peso por el otro extremo. Si se agregan distintos pesos en el extremo que los sostiene, la varilla se habrá flexionado, es decir, existe una relación entre la magnitud de la flexión y el peso que se agrega correspondiendo a distintas posiciones de la varilla.

El cambio que sufre la varilla también puede designarse por una función de proporcionalidad donde K es una constante.

$$y = Kx$$

En el siguiente diagrama se observa lo anterior:



En la tabla que a continuación se anota, se observa la relación entre los conceptos matematicos y los conceptos físicos.

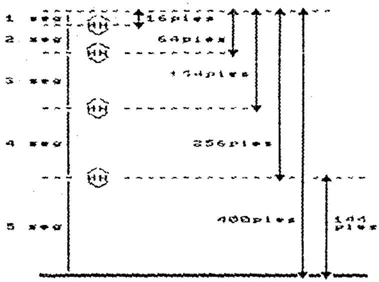
CONCEPTOS EN MATEMATICAS	CONCEPTOS EN FISICA
Variable independiente x (peso)	Magnitud del peso
Variable dependiente y (flexion)	Cantidad que se ha curvado la varilla
Funcion es la relacion entre x e y $y=Kx$	Funcion es la relacion entre el peso y la cantidad que se ha curvado la varilla

9) Se arroja una bomba desde una aeronave que esta a 400 pies de altura. Antes de que llegue al suelo transcurren 5 segundos. La distancia recorrida por un cuerpo que cae está dada por:

$$y = 16x^2$$

En física se conoce que un cuerpo adquiere mayor rapidez a medida que cae, despreciando la resistencia del aire.

En la siguiente figura se observan las distancias recorridas al cabo de cada segundo.



Con los ejemplos anteriores es posible definir los diversos conceptos que se han manejado intuitivamente como son:

<u>variable</u>: es un valor que representa a cualquiera de los elementos de un conjunto dado.

<u>variable independiente</u>: es la variable a la que se asignan valores en forma libre e independiente.

<u>variable dependiente</u>: es la variable cuyo valor depende del valor que tome la variable independiente.

De los ejemplos descritos anteriormente, se tomaron algunos para identificar el tipo de variable que se anota en el siguiente - cuadro:

VARIABLES INDEPENDIENTES	VARIABLES DEPENDIENTES
meses del año	temperatura máxima
número de folletos	precio unitario
número de folletos	precio total
días de la semana	num. personas asist.
temperatura	presión

Las funciones pueden ser tratadas como entes matematicos-- abstractos o como modelos de muchos fenómenos naturales o sociales que ocurren cotidianamente.

DOMINIO, CONTRADOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCION.

Se define dominio de la función al conjunto de todos los valores que la variable independiente puede tomar de un conjunto - determinado de valores.

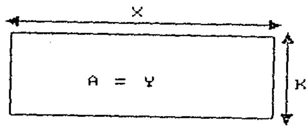
Contradominio o codominio de la función son todos los valores que corresponden a la variable dependiente.

La imagen de un punto bajo una función es un elemento del conjunto contradominio que está asociado con al menos uno de los elementos del conjunto dominio.

Rango de una funcion es el conjunto de imágenes.

Regla de correspondencia es la expresión que asocia a los elementos del dominio con los elementos del rango.

Tómese, por ejemplo, el área de un rectángulo cuando existe un ancho constante y una longitud variable como se vio en los ejemcicios al principio del capítulo:



En la figura, X representa la longitud del rectángulo, K es el ancho constante y Y es el área del rectángulo. Los conjuntos de valores que satisfacen a las variables X e Y son:

$$X = \{x/x \in R \wedge x > 0\}$$

$$Y = \{y/y \in R \wedge y > 0\}$$

y el modelo algebraico para obtener el area es la regla de correspondencia:

$$Y = KX$$

donde el dominio de la función es el conjunto de valores que toma X y el rango es el conjunto de valores que toma Y

CLASIFICACION DE FUNCIONES

Se ha observado, en los distintos ejemplos, que al tener algunas parejas de valores o la regla de correspondencia que los asocia es posible obtener su gráfica. Sin embargo, cuando sólo se conocen algunas parejas no es fácil determinar a qué tipo de figura corresponde por lo que, es necesario tener un conocimiento más amplio de las expresiones algebraicas que las denotan.

Las funciones se clasifican de acuerdo con sus términos en

a) Funciones algebraicas

b) Funciones trascendentes

Las <u>funciones algebraicas</u> son aquellas que, como su nombre lo indica, se representan por terminos algebraicos unidos por los signos de operación para los números reales como por ejemplo:

$$y = 3x$$

$$f(t) = t^2 - 2t + 1$$

$$3x + 2y - 5 = 0$$

$$g(x) = x^3 + 2$$

Las <u>funciones trascendentes</u> son aquellas en que alguno o algunos de sus términos son expresiones de tipo:

trigonométrico	$y = \operatorname{sen} x$
logarítmico	$y = \log \cos x$
exponencial	$y = 2^x$

En el desarrollo de este tema sólo se abordarán las funciones algebraicas cuyo dominio y contradominio es el conjunto de los números reales, es decir, <u>funciones reales y algebraicas</u>.

Las funciones algebraicas se clasifican en:

Función constante	$y = k$
Función idéntica	$y = X$
Función valor absoluto	$y = \lvert x \rvert$
Función lineal	$y = a_1x + a_0$
Función cuadrática	$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$
Función cúbica	$y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
...	...

... ...

Función polinomial $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+ \ldots + a_1 x + a_0$

Función racional aquella que se expresa como cociente de dos funciones polinomiales.

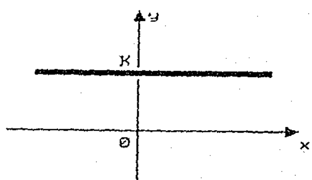
Estas formas generales de expresar las funciones lineal, cuadrática, cúbica, etc. hasta una función de n variables, tienen la forma de polinomios. En Algebra Lineal, curso superior de matemáticas la función que hemos llamado lineal recibe el nombre de <u>función afín</u>.

En el plano cartesiano, las gráficas se dibujan de manera continua, siempre y cuando no haya valor de la variable independiente para la cual no exista la función, o cuando la función dé un "brinco" pero por comodidad en la tabla sólo aparecen algunos valores.

A continuación se dan las gráficas correspondientes a cada una de las funciones clasificadas.

<u>Función constante</u>. Es aquella en que la variable dependiente siempre tomará el mismo valor constante no importando cuál tome la variable independiente.

x	y=K	(x, y)
.	.	.
-3	K	(-3, K)
-2	K	(-2, K)
-1	K	(-1, K)
0	K	(0, K)
1	K	(1, K)
2	K	(2, K)
.	.	.



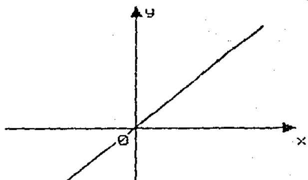
Y = K

El dominio para esta funcion es: $D = \{x / x \in R\}$

El rango es: $R = \{y / y = k\}$

<u>Función idéntica</u>. Es aquella en que al asignar un valor arbitrario, a la variable independiente, el valor que toma la variable dependiente es al mismo.

x	y=x	(x, y)
.	.	.
.	.	.
-3	-3	(-3, -3)
-2	-2	(-2, -2)
-1	-1	(-1, -1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	2	(2, 2)
.	.	.
.	.	.



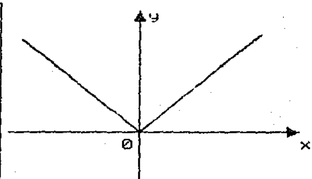
Y = X

El dominio es: $D = \{x / x \in R\}$

El rango es: $R = \{y / y \in R^{+} \cup \{0\}\}$

<u>Función valor absoluto</u>. és aquella en que al asignarle un valor cualquiera a la variable independiente, éste se ve afectado por la operación valor absoluto.

x	y=|x|	(x, y)
.	.	.
.	.	.
-3	|-3|=3	(-3, 3)
-2	|-2|=2	(-2, 2)
-1	|-1|=1	(-1, 1)
0	|0|=0	(0, 0)
1	|1|=1	(1, 1)
2	|1|=1	(2, 2)
.	.	.
.	.	.



Y = |X|

El dominio para esta funcion es: $D = \{x / x \in R\}$

El rango es: $R = \{y / y > 0 \; y \in R\}$

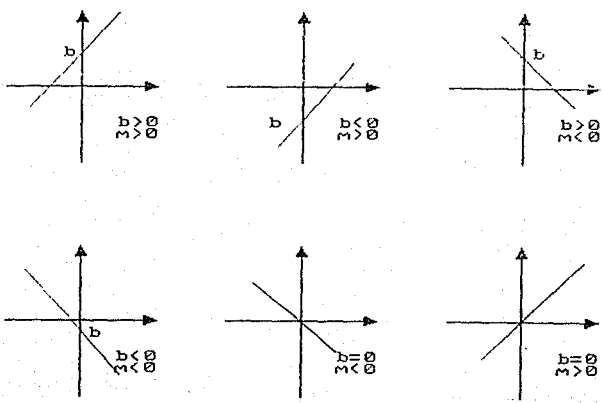
<u>Función lineal.</u> Es aquella en donde ambas variables tienen exponente unitario y ninguna de ellas se encuentra en el denominador de una fracción después de que se ha reducido a su mínima expresión.

Su forma polinomial ya se ha anotado antes como:

$$y = a_1 x + a_0$$

también a esa forma se le llama ecuación de una recta pendiente ordenada al origen donde $a_1 = m$ que es la pendiente de dicha recta, es decir, es la inclinación que tiene con respecto al eje de las equis y $a_0 = b$ que es la ordenada a partir del origen, indica la altura, con respecto al origen, donde la recta corta al eje de las "y". La ecuación queda de la siguiente forma:

$$y = mx + b$$



Si se iguala a cero esa expresión, se tiene la ecuación general de una recta:

$$mx - y + b = 0$$

su forma mas común es:

$$ax + by + c = 0$$

donde a y b son los coeficientes de las variables y c representa el termino constante.

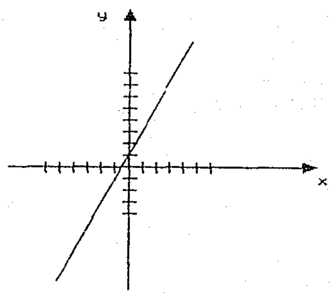
La gráfica de una función lineal es una línea recta que puede tener distinta inclinación con respecto al eje de las equis dependiendo del valor que tome la pendiente.

En el siguiente ejemplo:

$$y = 2x + 1$$

donde $m = 2$ y $b = 1$ la tabla y la gráfica correspondiente a algunas de las parejas de $y = 2x + 1$ es:

x	y = 2x + 1	(x, y)
⋮	⋮	⋮
−2	2(−2) + 1 = −3	(−2, −3)
−1	2(−1) + 1 = −1	(−1, −1)
0	2(0) + 1 = 1	(0, 1)
1	2(1) + 1 = 3	(1, 3)
2	2(2) + 1 = 5	(2, 5)
⋮	⋮	⋮



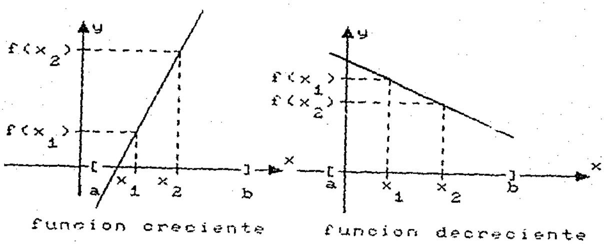
De acuerdo con la figura, se tienen las siguientes observaciones:

1) La recta corta al eje de las "y" a una altura con respecto al origen de <u>una unidad</u>. El término independiente en la ecuación $y = 2x + 1$ es igual a uno.

2) Por cada unidad de avance horizontal la recta asciende dos unidades. El coeficiente de x es <u>dos</u>.

3) El coeficiente de x es mayor que cero. Exite una relación entre el aumento de la variable independiente y el crecimiento de la función, es decir, la <u>función es creciente</u> en un intervalo $[a, b]$. Si sucede que $a < x_1 < x_2 < b$ entonces las imágenes de la función cumplen $f(x_1) < f(x_2)$. Una función será <u>decreciente</u> en un intervalo $[a, b]$ si sucede que $a < x_1 < x_2 < b$ y se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$

Las siguientes gráficas muestran lo anterior:



EJERCICIO PROPUESTO.

Grafica las siguientes expresiones en las que sólo se ha -

cambiado el término independiente en un mismo plano cartesiano:

1) $y = 2x + 3$

2) $y = 2x$

3) $y = 2x - 3$

Contesta las siguientes preguntas:

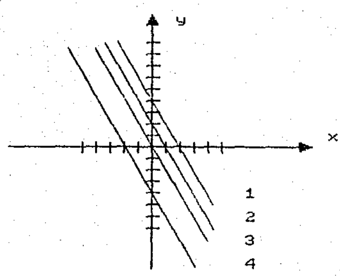
4) ¿En qué puntos corta cada una de las rectas anteriores al eje de las "y"?

5) Geométricamente, ¿cómo son entre sí las gráficas obtenidas?

6) ¿Son funciones crecientes o decrecientes?

7) ¿Qué significa que la variable x tenga el mismo coeficiente?

Obsérvese la siguiente figura:



Cada una de las rectas corresponde con las siguientes tabulaciones donde se obtuvieron algunos puntos.

x	y	(x, y)
-2	8	$(-2, 8)$
-1	6	$(-1, 6)$
0	4	$(0, 4)$
1	2	$(1, 2)$

(1) $y = -2x + 4$

x	y	(x, y)
-2	4	$(-2, 4)$
-1	2	$(-1, 2)$
0	0	$(0, 0)$
1	-2	$(1, -2)$

(3) $y = -2x$

x	y	(x, y)
-2	6	$(-2, 6)$
-1	4	$(-1, 4)$
0	2	$(0, 2)$
1	0	$(1, 0)$

(2) $y = -2x + 2$

x	y	(x, y)
-2	0	$(-2, 0)$
-1	-2	$(-1, -2)$
0	-4	$(0, -4)$
1	-6	$(1, -6)$

(4) $y = -2x - 4$

Las siguientes observaciones se concluyen del ejercicio propuesto y de éste:

1) El término independiente nos está indicando la altura con respecto al origen, donde la recta corta o intersecta al eje de las "y".

2) Por cada unidad de avance o de retroceso horizontal, la recta asciende dos unidades. En el primer caso el coeficiente de equis es dos y en el segundo caso es menos dos.

3) El coeficiente de x es mayor que cero para el ejercicio que se dejó resolver y en éste caso que se analiza, el coeficiente de x es menor que cero. Esto está ligado a observar que las funciones son crecientes y decrecientes respectivamente.

4) Las rectas son paralelas entre sí tanto en el primer -

caso como en el segundo.

5) Una funcion lineal o de primer grado representa gráficamente una recta.

En el siguiente ejemplo, variando el coeficiente de x en las siguientes expresiones, observa las distintas inclinaciones que las rectas tienen con repecto al eje de las "x". Graficalas en un mismo plano cartesiano.

a) $y = -x + 2$ b) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

c) $y = -4x + 2$ d) $y = x + 2$

e) $y = \frac{1}{2}x + 2$ f) $y = 4x + 2$

En el apartado anterior se observo que el punto de intersección con el eje de las "y" de una función lineal, está dado por el término independiente que corresponde con el segundo valor de una pareja ordenada (, b) y que el primer valor corresponde al cero ya que todo punto sobre el eje de las "y" tiene abscisa cero (0, b).

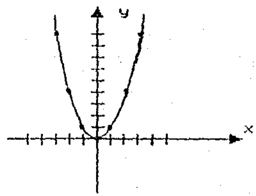
Para conocer el punto de intersección con el eje de las "x" se sabe que, todo punto sobre el eje de las "x" tiene valor de ordenada igual a cero por lo que al graficar, se obtiene el va- aproximado para x. Las coordenadas del punto son: (x, 0).

Lo anterior es válido para una función lineal, cuadrática, cúbicos, etc.

<u>Función cuadrática.</u> Es aquella expresión de la forma $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ donde a_2, a_1, a_0 son números reales donde a_2 puede tomar cualquier valor menos cero. Así como la función lineal es de grado uno por tener exponente unitario, la función cuadrática es de grado dos porque la máxima potencia de x es dos.

Considérese la gráfica de $y = x^2$ y evalúese para valores de $x = (-2, -1, 0, 1, 2, 3)$

x	$y = x^2$	(x, y)
-2	4	$(-2, 4)$
-1	1	$(-1, 1)$
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
2	4	$(2, 4)$
3	9	$(3, 9)$



Se observa que la gráfica es una curva donde para cualquier valor real x se cumple que: $(-x)^2 = x^2$ por lo que la gráfica es simétrica con respecto al eje de las ordenadas obteniéndose la gráfica de una curva llamada parábola.

Las gráficas para las siguientes funciones, donde sólo varía el término independiente, se anotan a continuación junto con sus tabulaciones:

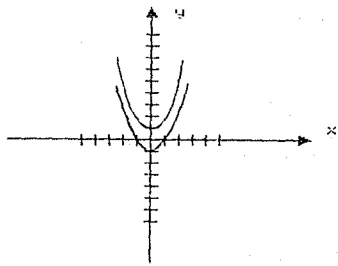
$y = x^2 + 1$ $\qquad\qquad$ $y = x^2 - 1$

(I)

x	$y = x^2 + 1$	(x, y)
−2	$(-2)^2+1=5$	(−2, 5)
−1	$(-1)^2+1=2$	(−1, 2)
0	$(0)^2+1=1$	(0, 1)
1	$(1)^2+1=2$	(1, 2)
2	$(2)^2+1=5$	(2, 5)

(II)

x	$y = x^2 - 1$	(x, y)
−2	$(-2)^2-1=5$	(−2, 3)
−1	$(-1)^2-1=2$	(−1, 0)
0	$(0)^2-1=1$	(0, −1)
1	$(1)^2-1=2$	(1, 0)
2	$(2)^2-1=5$	(2, 3)



En las gráficas se observa lo siguiente:

1) La gráfica de I no corta al eje de las "x".

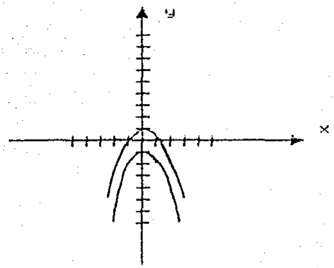
2) El vértice de la parábola I es el punto (0, 1). El vértice de la parábola II es el punto (0, −1).

3) ¿Se podrá decir que el vértice de una parábola de la forma $y = x^2 + a_0$ es el punto $(0, a_0)$?. En efecto, así es, aunque para tal afirmación sólo se tiene a la vista la gráfica de tres parábolas.

El dominio de I es: $D = \{x / x \in R\}$ y el Rango $= \{y / y \geq 1, y \in R\}$

El dominio de II es: $D = \{x / x \in R\}$ y el Rango $= \{y / y \geq 0, y \in R\}$

A continuación se analiza el caso donde el coeficiente de x^2 es un número negativo. Sean $y = -x^2 + 1$, $y = -x^2 - 1$ las gráficas son:



Se observa que :

1) Hay simetría con respecto al eje de las "y".

2) Las curvas cortan al eje de las "y" a una altura, con respecto al origen, igual al valor del término independiente.

3) Las curvas abren hacia abajo. El signo del coeficiente de x^2 es negativo.

EJERCICIO PROPUESTO.

Grafica las siguientes funciones, en un mismo plano cartesiano, donde varía el valor del coeficiente de x.

$$y = \frac{1}{2} x^2 \qquad\qquad y = x^2$$

$y = 2x^2$ $\qquad$ $y = 8x^2$

Haz lo mismo para el siguiente grupo de funciones:

$y = -\frac{1}{2}x^2$ $\qquad$ $y = -x^2$

$y = -2x^2$ $\qquad$ $y = -8x^2$

La conclusión del ejercico anterior es la siguiente: la curva se abre más si el valor absoluto del coeficiente de x^2 es pequeño; la curva se abre menos, se cierra, si el valor absoluto del coeficiente de x^2 aumenta.

En el siguiente ejemplo se tiene un polinomio completo de segundo grado:

$$y = x^2 + 4x + 8$$

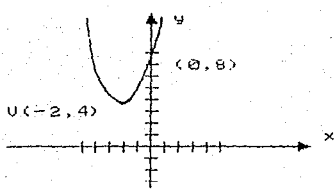
que se puede escribir como:

$$y = (x^2 + 4x + 4) + 4$$

al factorizarla queda:

$$y = (x + 2)^2 + 4$$

Su gráfica es:



Al cambiar el signo del coeficiente de x para el mismo -

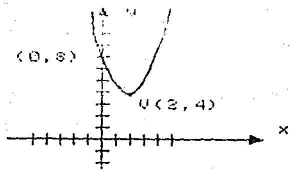
ejemplo, se tiene:

$$y = x^2 - 4x + 8$$

y siguiendo las mismas consideraciones, se tiene:

$$y = (x - 2)^2 + 4$$

[illegible]



Observaciones:

1) El término independiente indica la altura del vértice con respecto al origen.

2) El término constante dentro del binomio desplaza la parábola lateralmente: a la izquierda del eje de las "y" si es positivo y a la derecha si es negativo. ¿cual es el desplazamiento? es el valor absoluto del término independiente dentro del binomio.

3) Es de esperarse que si el coeficiente de x^2 aumenta, la parábola se cierra y si disminuye, se abre.

4) La parábola se abre hacia arriba si el coeficiente de x^2 es positivo. Se abre hacia abajo si el coeficiente es negativo.

Función cúbica. Es de la forma:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = y$$

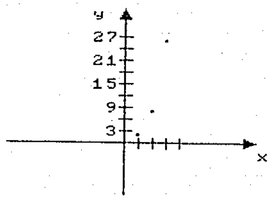
donde $a_3 \neq 0$. Las funciones que se han analizado son casos especiales de las llamadas funciones polinomiales que pueden ser de cero grado, de primero, de segundo, de tercero, ... de n grado y en consecuencia una función polinomial de grado n se expresa así:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a$$

donde n es un entero no negativo y $a_n \neq 0$

Un ejemplo de función cúbica es la que representa el volumen que tienen varias cajas de forma cúbica dependiendo de la longitud del lado de la caja, es decir:

Lado u	Volumen u^3
1	1
2	8
3	27
4	64

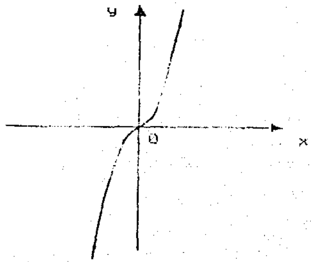


Se observa que esta función está definida en el conjunto de los naturales como dominio y contradominio. La expresión algebraica es:

$$y = x^3$$

Si la misma función la definimos para valores reales tanto para el dominio como para el contradominio, la gráfica sería:

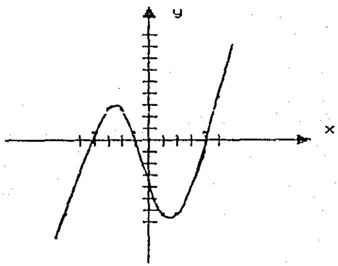
x	f(x)
-1	-1
0	0
0.5	0.125
1	1
2.5	15.625
3	37



Otro ejemplo de función cúbica es:

$$y = 0.5x^3 + 0.25x^2 - 2x - 1$$

su gráfica es la siguiente:



de la gráfica se obtiene que, al cortar la curva al eje de las e - quis en tres lugares: $x = -2$, $x = 2$ y $x = -0.5$ significa que tiene tres raices reales que satisfacen a la funcion, es decir, si se sustituyen esos valores en la ecuacion donde "y" vale cero, la igualdad se cumple. Se cumple tambien que el termino independiente indica la interseccion con el eje de las "y".

De lo anterior se deduce que las funciones polinomiales tienen gráficas distintas y que si se conocen determinadas caracteristicas de sus expresiones algebraicas, tendremos la informacion necesaria para tener una idea aproximada de su forma de tal manera que no sea necesario calcular un sinfín de imágenes de la función.

CAPITULO IV

ECUACIONES Y DESIGUALDADES

En el capitulo II se plantearon modelos algebraicos de los problemas. Algunos de ellos son.

1) $A = \dfrac{(12 + 7)5}{2}$ 2) $J = \dfrac{n(n - 1)}{2}$

3) $\dfrac{2/3}{2/9} = \dfrac{600,000}{x}$ 4) $(70 + a)(100 + a) = 13,800$

5) $3x = 600$

En cada una de estas expresiones aparece un numero que se desea determinar al que se llama incognita. Por ejemplo en:

$A = \dfrac{(12 + 7)5}{2}$ la incognita es A, en $\dfrac{2/3}{2/7} = \dfrac{300,000}{x}$, la incognita es x. A estas expresiones algebraicas les llamamos ecuaciones. Determinar el valor de la incognita en algunos casos es muy sencillo, por ejemplo, para determinar el valor de A, de la anterior expresión simplemente se efectúan las operaciones indicadas:

$$A = \frac{(19)5}{2} = \frac{95}{2} = 47.5$$

En otros casos no es tan simple. En este capitulo se verá cómo encontrar el valor de las incognitas de algunas ecuaciones. Para facilitar lo anterior, se clasificarán con la finalidad de esta -

blecer algoritmos. Una primera clasificación será de acuerdo con su grado.

En los ejercicios 1, 3 y 5 aparecen ecuaciones que llamamos de primer grado porque las incógnitas. "A", "x" están elevadas a la primera potencia.

Las ecuaciones 2 y 4 donde las incógnitas "n" y "a" después de efectuar operaciones, tienen exponente dos. se dice que son ecuaciones de segundo grado. Para la ecuación 2, a J se le asignaría un valor constante.

En este capítulo sólo se verán ecuaciones de primero y segundo grado pero hay ecuaciones de grado mayor por ejemplo:

$$x^3 + 3x^2 - 5 = x - 1 \quad ó \quad (a + 2)^4 = 0$$

donde las variables "x" y "a" están elevadas a las potencias tres y cuatro respectivamente.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

Considerado una de las funciones representativa de un modelo de la realidad como es el caso del tiempo que un atleta tarda en recorrer una distancia de 42 km a una velocidad de 10 km/h. La expresión usada para resolver este problema es: $d = vt$.

$$42 = 10t$$

En el caso en que se desean conocer las dimensiones de un local comercial que tiene forma rectangular cuyo perímetro es de 38 m y del que se sabe también que su largo es 12 m más grande que su ancho, es necesario recordar algunos conceptos geométricos por lo que, la expresión que nos permite conocer dichas dimensiones es:

$$2x + 2(x + 15) = 58$$

donde "x" será la incógnita asignada al ancho del local.

En fin que, varios ejemplos ya se han señalado en capítulos anteriores donde se observan estos tipos de expresiones algebraicas.

Para encontrar, por ejemplo el valor solución de t en la siguiente ecuación:

$$10t - 42 = 0$$

recuérdese que, las variables, representan números reales por lo que se operarán como tales.

1) Se suma, a ambos miembros de la igualdad, el inverso aditivo de (-42) para que la variable t quede en uno de los miembros:

$$10t - 42 + 42 = 0 + 42$$

2) Se efectúan las operaciones indicadas en cada miembro:

$$10t = 42$$

3) En la ecuación ha quedado, en uno de los miembros, la variable y en el otro la constante, por lo que se procede a dividir toda la ecuación entre el coeficiente de la variable para encontrar el valor de t que haga verdadera la igualdad.

$$\frac{10t}{10} = \frac{42}{10} \qquad \Longrightarrow \qquad t = \frac{42}{10}$$

por lo que: t = 4.2 horas el tiempo que tarda el atleta en hacer el recorrido de 42 kilómetros.

En términos generales, para resolver ecuaciones de primer grado, se procede de la siguiente forma:

Si $2x + 2x - 5(x + 2) = 3(x + 1) - 1$ es una ecuación:

1) se efectúan las operaciones indicadas en ambos miembros. En este caso aplicamos la propiedad distributiva.

$$2x + 2x - 5x - 10 = 3x + 3 - 1$$

2) se reducen los términos semejantes en cada miembro.

$$-x - 10 = 3x + 2$$

3) las variables se reúnen en uno de los miembros y las constantes en el otro. Se aplica la propiedad del inverso aditivo.

$$-x + (x) - 10 + (-2) = 3x + (x) + 2 + (-2)$$

4) se reducen nuevamente los términos que sean semejantes en cada miembro.

$$0 - 12 = 4x + 0 \; ; \quad -12 = 4x$$

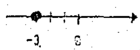
5) para despejar el valor de la incógnita se divide toda la ecuación entre el coeficiente de la misma. Es decir, se utiliza el inverso multiplicativo del coeficiente de la variable.

$$\frac{-12}{4} = \frac{4x}{4} \; ; \qquad -12\left(\frac{1}{4}\right) = 4x\left(\frac{1}{4}\right)$$

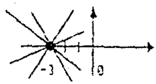
6) simplificando se obtiene la solución o raíz.

$$-3 = x$$

Su representación geométrica es un punto en la recta numérica.



Al tratarse de una funcion lineal de dos variables, el punto −3 sobre el eje de las "x" es un punto de intersección de la recta o rectas que representan a la función o familia de funciones que pasan por el punto (−3, 0), es decir para y = 0.



COMPROBACION DEL RESULTADO DE UNA ECUACION LINEAL

Para comprobar que una ecuacion se ha resuelto bien, y que el resultado de la ecuacion es unico, se procede a sustituir dicho valor en la ecuacion original en el lugar de la incognita.

De acuerdo con la ecuacion anterior:

$$2x + 2x - 5(x + 2) = 3(x + 1) - 1$$

se sustituye el valor de $x = -3$:

$$2(-3) + 2(-3) - 5(-3 + 2) = 3(-3 + 1) - 1$$

efectuando las operaciones indicadas:

$$-6 + (-6) - 5(-1) = 3(-2) - 1$$

$$-6 - 6 + 5 = -6 - 1$$

$$-7 = -7$$

el resultado final indica que el primer miembro es igual al segundo miembro y que la ecuacion solo se satisface para el valor de $x = -3$.

Considerando que se sustituye otro valor cualquiera al obtenido como solución, observese lo que se obtiene. Para el valor de $x = 2$:

$$2(2) + 2(2) - 5(2 + 2) = 3(2 + 1) - 1$$
$$4 + 4 - 5(4) = 3(3) - 1$$
$$8 - 20 = 9 - 1$$
$$-12 = 8$$

Para $x = 0$

$$2(0) + 2(0) - 5(0 + 2) = 3(0 + 1) - 1$$
$$0 + 0 - 5(2) = 3(1) - 1$$
$$0 - 10 = 3 - 1$$
$$-10 = 2$$

el resultado es que la igualdad no se cumple para ninguno de los valores asignados arbitrariamente.

SOLUCION DE ECUACIONES MODELO.

El objetivo de presentar un apartado con ecuaciones modelo es el de hacer énfasis en el proceso algebraico de solución aunque ya se haya puesto de manifiesto en el capítulo correspondiente pues presenta al alumno con objetividad los pasos seguidos hasta obtener el valor solución de la ecuación; proceso en el cual muchas veces se pierde por no tener claro que necesita despejar la incognita de la ecuación pues aplica erroneamente las propiedades de los números reales a las operaciones correspondientes. Otras veces, realiza todo del proceso de reducir la ecuación a su forma más simple pero no obtiene el valor solución de la ecuación quedando en su mente que se trata solo de una operacion algebraica de suma o multiplicación en la que hay que reducir términos semejantes. Por lo anterior es que se presentan los siguientes ejemplos:

$$1) \quad -\{3x + 8 -[-15 -(-3x + 2) + 4x] + 2\} = 6$$

a) Se procede a quitar los signos de agrupación, generalmente empezando por los paréntesis, siguiendo con los corchetes y por último las llaves:

$$-\{3x + 8 -[-15 + 3x - 2 + 4x] + 2\} = 6$$

$$-\{3x + 8 + 15 - 3x + 2 - 4x + 2\} = 6$$

$$-3x - 8 - 15 + 3x - 2 + 4x - 2 = 6$$

b) Se agrupan los términos semejantes:

$$-3x + 3x + 4x - 8 - 15 - 2 - 2 = 6$$

$$4x - 27 = 6$$

c) Se procede a dejar los términos que contengan a las variables en un miembro y los términos independientes en el otro:

$$4x - 27 + 27 = 6 + 27$$

$$4x = 33$$

d) Por último, se despeja a la variable dividiendo entre el coeficiente de ésta toda la ecuación:

$$\frac{4x}{4} = \frac{33}{4}$$

obteniéndose la solución: $\quad x = \dfrac{33}{4}$

$$2) \quad (3x - 4)(4x - 3) = (6x - 4)(2x - 5)$$

a) Se efectúan las operaciones indicadas:

$$12x^2 - 9x - 16x + 12 = 12x^2 - 30x - 8x + 20$$

b) Se agrupan los términos semejantes:

$$12x^2 - 25x + 12 = 12x^2 - 38x + 20$$

c) Se procede a dejar los términos que contengan a las variables en un miembro y en el otro a las constantes:

$$12x^2+(-12x^2)-25x+(38x)+12+(-12) = 12x^2+(-12x^2)-38x+(38x)+20+(-12$$

$$13x = 8$$

d) Despejando a la variable, se tiene:

$$x = 8/13$$

3) $$\frac{7x - 1}{3} - \frac{5 - 2x}{2x} = \frac{4x - 3}{4} + \frac{1 + 4x^2}{3x}$$

Para resolver esta ecuación fraccionaria, es necesario buscar el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores:

de 3 sus factores son $1*3$

de $2x$ sus factores son $2*x$

de 4 sus factores son 2^2

de $3x$ sus factores son $3*x$

por lo tanto, el m.c.m. de todos ellos es el producto de todos los factores que son comúnes y no comúnes con máxima potencia:

$$3*2^2*x = 12x$$

$$12x\,\frac{7x - 1}{3} - 12x\,\frac{5 - 2x}{2x} = 12x\,\frac{4x - 3}{4} + 12x\,\frac{1 + 4x^2}{3x}$$

efectuando la multiplicación y simplificando, se tiene:

$$4x(7x - 1) - 6(5 - 2x) = 3x(4x - 3) + 4(1 + 4x^2)$$

quedando una ecuación entera que se procede a resolver siguiendo - los pasos indicados para las otras ecuaciones.

$$28x^2 - 4x - 30 + 12x = 12x^2 - 9x + 4 + 16x^2$$

$$28x^2 + 8x - 30 = 28x^2 - 9x + 4$$

$$28x^2+(-28x^2)+8x+9x-30+30 = 28x^2+(-28x^2)-9x+9x+4+30$$

$$17x = 34$$

$$x = 34/17$$

4) $\frac{a}{x} = \frac{1}{b}$ resolver esta ecuacion literal para $x \neq 0$

$\frac{a}{x} \cdot x = \frac{1}{b} \cdot x$ por una de las propiedades de orden para la multiplicación.

$a = \frac{x}{b}$ propiedad del producto para racionales

$ab = x$ multiplicando ambos miembros por b.

5) $\frac{ax - b}{c} = bx, \quad c \neq 0,$ resolver para x

$ax - b = c(bx)$

$ax - b + (b) + (-cbx) = cbx + (-cbx) + (b)$

$ax - cbx = b$

$x(a - cb) = b$

$$x = \frac{b}{a - cb}$$

Para comprobar una ecuación literal, es más sencillo repasar los pasos que se siguieron para llegar a su solución que sustituir el valor encontrado.

En los cinco ejemplos que se propusieron como ecuaciones modelo, se observa que, antes de despejar a la variable, se tienen ecuaciones cuya forma es:

$$ax + c = 0$$

donde a y c son números reales con $a \neq 0$. Esta es la llamada <u>forma general de una ecuación de primer grado</u>.

Cabe mencionar que una función lineal o de primer grado con dos varibles cuya forma general es:

$$ax + by + c = 0$$

que fue tratada en el capítulo correspondiente como $y = mx + b$ al ser despejada la variable dependiente, se convierte en una ecuación de primer grado.

Este proceso facilita graficar la funcion conociendo los puntos de intersección con los ejes cartesianos. Por ejemplo:

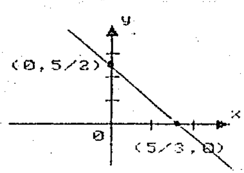
Graficar $3x + 2y - 5 = 0$

Al hacer $x = 0$ se tiene:

$2y - 5 = 0$ =====> $y = \frac{5}{2}$ por lo que $(0, \frac{5}{2})$ es el punto de interseccion con el eje de las "x"

Al hacer $y = 0$ se tiene:

$3x - 5 = 0$ =====> $x = \frac{5}{3}$ por lo que $(\frac{5}{3}, 0)$ es el punto de interseccion con el eje de las "y"



En expresiones como las siguientes:

a) $7a + 11a = 18a$

b) $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

c) $5(h + 3) = 5h + 15$

Al asignarles a las variables en cada una de ellas cualesquier valor real se observa que las igualdades se conservan. Por ejemplo, para la primera, se asignan los valores para "a" igual a −1, 0 y 3 y se obtiene:

$$7(-1) + 11(-1) = 18(-1)$$
$$-7 + (-11) = -18$$
$$-18 = -18$$

$$7(0) + 11(0) = 18(0)$$
$$0 + 0 = 0$$
$$0 = 0$$

$$7(3) + 11(3) = 18(3)$$
$$21 + 33 = 54$$
$$54 = 54$$

Estas expresiones reciben el nombre de <u>identidades</u>.

Hay expresiones como: $3x + 2 = 3x - 2$ que no son identidades para valor alguno de la variable. Para estas expresiones se utilizan los signos de desigualdad para enlazar los miembros (>, <)

En este caso, se reduce la expresión a:

$$2 \neq -2$$

en donde sólo se está relacionando un valor determinado y conocido.

En otros, la expresión reducida también involucra alguna o algunas variables:

$$5x > 6$$

Estas expresiones son llamadas desigualdades o inecuaciones.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

Hasta este momento solo se han mencionado ecuaciones lineales o de primer grado pero existen problemas en los que aparece un termino de segundo grado como pueden ser problemas de movimiento en donde interviene la aceleracion, problemas de areas, etc., los que hay que representar mediante una ecuacion cuadratica o de segundo grado.

Una ecuacion es de segundo grado cuando, despues de realizar las operaciones necesarias como es quitar parentesis, denominadores, etc., queda reducida a una expresion asi:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

que llamamos: forma general de la ecuacion de segundo grado.

Utilizando el siguiente problema, comprobemos lo anterior: "Dos campesinas llevan al mercado un total de 100 huevos entre las dos. Una de ellas llevo mayor cantidad que la otra pero ambas obtuvieron igual cantidad de dinero. Una de ellas dijo a la otra: si yo tuviera la cantidad de huevos que tu tienes ganaria 15 cruzados y la segunda contesto: "si yo tuviera lo que tu, tendria 6 2/3 de cruzados" ¿cuántos huevos llevo al mercado cada una?

Considerando que una de las campesinas tiene x huevos, la otra tiene $100 - x$. Suponiendo que la primera tuviera la misma cantidad de huevos que la segunda, entonces vendió cada huevo en $\frac{15}{100 - x}$ cruzados. Por el mismo razonamiento, la segunda vendió

a $\frac{6\ 2/3}{x} = \frac{20}{3x}$ cruzados cada huevo. Por lo tanto,

la primera obtuvo por sus huevos: $x \frac{15}{100 - x}$

y la segunda: $(100 - x)\frac{20}{3x}$

que de acuerdo a las condiciones del problema, se plantea la siguiente ecuación:

$$\frac{15x}{100-x} = \frac{20(100 - x)}{3x}$$

efectuando operaciones:

$$45x^2 = 20(100 - x)^2$$

$$45x^2 = 20(10000 - 200x + x^2)$$

$$45x^2 - 20x^2 + 4000x - 200000 = 0$$

reduciendo términos semejantes:

$$25x^2 + 4000x - 200000 = 0$$

dividiendo entre 25 toda la ecuación:

$$x^2 + 160x - 8000 = 0$$

quedando reducida a su forma general que, al resolverse, los valores solución son dos; $x_1 = 40$ y $x_2 = -200$ sólo que para solución del problema, no tiene sentido escoger el valor negativo.

Retomando la ecuación de segundo grado sobre la pista de patinaje obtenida en el capítulo II utilizamos el siguiente método para encontrar los valores solución de "a":

$$a^2 + 170a + 7000 = 13,800$$

o su equivalente:

$$a^2 + 170a = 6,800$$

procedamos a encontrar los valores de $\underline{a}$ que hagan válida la igualdad, completando un trinomio cuadrado perfecto en el primer miembro:

$$a^2 + 170a + 7225 = 6800 + 7225$$

factorizando el trinomio cuadrado perfecto como un binomio al cuadrado:

$$(a + 85)^2 = 14025$$

extrayendo la raíz en ambos miembros de la igualdad y resolviendo:

$$a + 85 = \sqrt{14025}$$

$$a + 85 = 118.427$$

$$a_1 = + 118.427 - 85 = \underline{33.427} \qquad a_2 = - 118.427 - 85 = \underline{-203.427}$$

Utilizando el mismo proceso de factorización, y con la ecuación de segundo grado en su forma general, se obtendrá la <u>fórmula para resolver cualquier ecuación de segundo grado</u> con solo utilizar los coeficientes de las literales y el término constante.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

i) El término en x^2 está afectado por el coeficiente "a" por lo que se procede a dividir toda la ecuación entre "a":

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

ii) Se suma, a ambos miembros de la igualdad, el inverso aditivo del término independiente:

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

iii) Para obtener un trinomio cuadrado perfecto en x, se suma a ambos miembros de la igualdad, el cuadrado de la mitad del coeficiente de x:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

iv) Se factoriza el primer miembro y se reduce el segundo miembro a un común denominador:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

v) Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

vi) Se despeja a x para obtener el valor de las raíces de la ecuación:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

de donde, las raíces son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Utilizando la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado resuélvase la ecuación:

$$a^2 + 170a - 6800 = 0$$

donde: $a = 1$ $\quad b = 170 \quad$ y $\quad c = -6800$

$$a = \frac{-170 \pm \sqrt{170^2 - 4(1)(-6800)}}{2(1)}$$

$$a = \frac{-170 \pm \sqrt{28900 + 27200}}{2}$$

$$a = \frac{-170 \pm \sqrt{56100}}{2} = \frac{-170 \pm 236.854}{2}$$

de donde: $a_1 = 33.427$ y $a_2 = -203.427$

son los resultados que satisfacen la ecuación y de acuerdon con el planteamiento del problema se escoge el resultado que lo satisfaga que en este caso es $a_1 = 33.427$ ya que se pide encontrar una longitud y ésta no puede ser negativa. La solución de la ecuación utilizando la fórmula ha sido más rápida.

En la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, la expresión $b^2 - 4ac$ se llama el <u>discriminante de la ecuación</u> y este puede ser, de acuerdo con la ley de tricotomia:

i) $b^2 - 4ac = 0$ es decir, $\pm\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$

y el conjunto solucion es unitario y vale $-\frac{b}{2a} \in R$

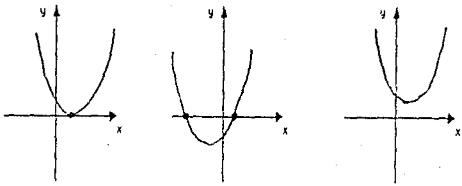
ii) $b^2 - 4ac > 0$ y en consecuencia $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ es un valor real y por lo tanto existen dos valores que satisfacen la ecuación y $x \in R$.

iii) $b^2 - 4ac < 0$ en cuyo caso $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ no será un valor real y por lo tanto los valores de x, también dos, no serán reales, es decir, $x \notin R$.

El inciso iii) nos lleva a mencionar al conjunto de los <u>números complejos</u> como una estructura numérica que cumple con las propiedades de campo. Sin embargo este conjunto de números sólo se definen como aquellos que están formados por dos partes, una <u>real</u> y otra imaginaria denotada por la letra i: $a + bi$ donde a y b son números reales e i se define como: $i = \sqrt{-1}$ ya que $i^2 = -1$

En el caso de que la solución de una ecuación lleve a obtener este tipo de números, simplemente se indica que su solución no pertenece al conjunto de los reales.

Interpretando geometricamente las ecuaciones donde se cumple que el discriminante de la ecuación, de acuerdo con la ley de tricotomia puede ser igual a cero, mayor que cero o menor que cero, y teniendo como expresión general $y = x^2 + bx + c$, se tienen:



a) $b^2 - 4ac = 0$ b) $b^2 - 4ac > 0$ c) $b^2 - 4ac < 0$

Hasta este momento se han anotado expresiones algebraicas como:

polinomios: $a^2 + 170a - 6,800$

ecuaciones: $a^2 + 170a = 6,800$

funciones: $a^2 + 170a - 6,800 = y$

todas muy similares con la característica de que podemos operar con ellas utilizando las propiedades que para los polinomios, expresiones más abstractas, se han expuesto. Las ecuaciones y las funciones son resultado de la aplicacion de polinomios a la solución de problemas.

Al fijar el valor de una de las variables en una función, da por resultado una ecuación. Por eso, al dar a la variable y el valor de cero, la ecuación $y = x^2 + bx + c$ se convierte en una ecuación de segundo grado que al resolverla nos determina los puntos de intersección con el eje de las "x"

En el caso de la gráfica a), la función cuadrática sólo toca en un punto al eje de las "x", en la gráfica b), sólo toca en dos puntos al eje de las "x" y en la c), la gráfica no toca en ningun punto al eje.

Las ecuaciones, tanto lineales como cuadráticas, al efectuar las operaciones para reducir sus términos dan por resultado ecuaciones equivalentes a las originales.

Es conveniente remarcar el error, muy común, de confundir una ecuación de primer grado con una de segundo grado o viceversa que, siendo de segundo grado se confunda con una de primer grado. Por ejemplo:

1) $x^2 + 2 = (x + 2)^2$

ya que al efectuar las operaciones,

$$x^2 + 2 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 - x^2 - 4x + 2 - 4 = 0$$

$4x - 2 = 0$ es una ecuación de primer grado.

2) $\frac{3}{x} = \frac{x + 1}{2}$

efectuando operaciones,

$$(3)(2) = x(x + 1)$$

$$6 = x^2 + x$$

$$0 = x^2 + x - 6$$ es una ecuación de segundo grado

para evitar los errores es conveniente efectuar las operaciones indicadas para reducir términos y obtener una ecuación simplificada y equivalente.

ECUACIONES SIMULTANEAS LINEALES CON DOS VARIABLES

Existen fenómenos sociales, o naturales que pueden ser expresados algebraicamente por un sistema de ecuaciones lineales con dos o más variables.

En este desarrollo se tratarán sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables, sin embargo, la solución para más de dos variables o variables no lineales, puede apoyarse en alguno de los métodos que aquí se expongan aunque existen otros que pueden facilitar su solución como es el caso de utilizar matrices que es un arreglo de coeficientes de las ecuaciones.

En el capítulo II se resolvieron algunos problemas cuyo planteamiento originaron un sistema de ecuaciones lineales, por ejemplo, el problema 19 referente al tiempo en que Rosita y Pedro se encuentran y la distancia a la fábrica en ése momento, se resolvió calculando la distancia recorrida por Pedro y Rosita mediante el siguiente modelo:

$$d = vt$$

en el que se asignó a t distintos valores. Este método fué útil pero tardado.

A continuación y con los datos que se anotan, se procede a resolver el problema utilizando el <u>método gráfico</u>.

DATOS:

Distancia de la casa de Pedro a la fábrica:	5 km
Distancia de la casa de Rosita a la fábrica:	3.759 km
Distancia de la casa de Pedro a la de Rosita:	1,250 m
Velocidad de Pedro:	135 m/min
Velocidad de Rosita:	65 m/min
Tiempo en que se encuentran Pedro y Rosita:	t
Distancia a la que se encuentran de la fábrica:	d

El siguiente modelo representa, de acuerdo con los datos, el tiempo en que Pedro llegaría a la fábrica:

$$d_P = v_P t \qquad d_P = 135t$$

el siguiente es el tiempo que hace Rosita considerando la ventaja que tiene sobre Pedro de 1,250 m:

$$d_R = v_R t \qquad d_R = 65t + 1,250$$

por lo anterior, se establece como d la distancia en que, al mismo tiempo, se encuentran Pedro y Rosita:

$$d_P = d_R = d$$

en consecuencia, las ecuaciones del sistema son:

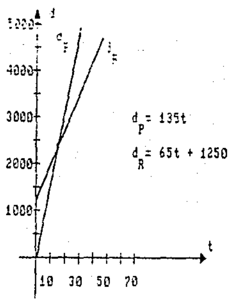
$$d = 135t$$

$$d = 65t + 1250$$

METODOS DE SOLUCION.

METODO GRAFICO.

Este consiste en graficar las ecuaciones del sistema como se indicó en el tema de funciones y encontrar, por observación, el punto donde las rectas se cortan. La mayoría de las veces éste metodo no nos permite conocer exactamente los valores buscados ya que en el dibujo de la gráfica intervienen factores como el gruso del lápiz, y las escalas utilizadas en ambos ejes, que hacen que el dibujo sea inexacto. La gráfica es una representación de la ecuación que tiene sus deficiencias por lo que hay que utilizar otro tipo de algoritmos algebraicos que nos permitan conocer exactamente los valores; éstos algoritmos o metodos de solución son: Igualación, Sustitucion, Reducción o de Suma y Resta y de Determinantes. Sin embargo, la gráfica nos da una idea de cuáles pueden ser los valores.



En la grafica se observa que el tiempo requerido para que Pedro y Rosita se encuentren, esta entre 17 y 18 minutos y que Pedro ha recorrido 2,400 m aproximadamente, cuando encontró a Rosita.

Las ecuaciones lineales con dos variables como las del ejemplo tienen como forma general $ax + by + c = 0$ teniendo como solución un conjunto infinito de parejas (x, y) tales que para un valor de x, se obtiene el de y, es decir valores que satisfacen a la ecuación. En la ecuación $d = 135t$ algunas de las parejas de valores que la satisfacen son:

(0,0), (20, 2,700), (30, 4,050)

ya que al sustituir en la ecuación

para $t = 0$ se obtiene $d = 0$

para $t = 20$ se obtiene $d = 2,700$

para $t = 30$ se obtiene $d = 4,050$

y se podría continuar indefinidamente asignando valores a t para obtener los valores de d ya que cada uno de los puntos de la recta es solución de la ecuación.

Cuando se tienen dos ecuaciones cuyo conjunto solución es una pareja de valores, se dice que su solución es simultánea, satisfacen a las dos ecuaciones.

En el ejemplo, y por la gráfica, la pareja que satisface a ambas ecuaciones es: (aproximadamente)

(17, 2400)

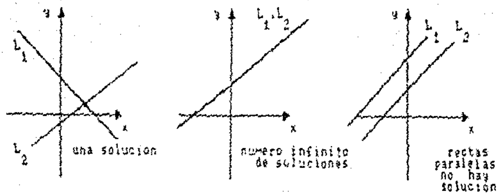
SISTEMAS COMPATIBLES E INCOMPATIBLES

Un sistema de ecuaciones como ya se anotó renglones arriba, es el resultado de expresar algebraicamente las condiciones planteadas por un problema en donde no basta establecer una ecuación con una incógnita y se han de utilizar dos, tres o las que sean necesarias.

En el problema que nos ocupa se observó que para cada ecuación del sistema existen muchas parejas de valores que las satisfacen pero que existe una pareja de valores que es común a ambas. Fué necesario determinar como variable independiente a una de las variables para así obtener una tablo de valores correspondientes a una y otra incógnita. Esto es lo que hace la diferencia entre una ecuación con dos variables y una función.

En un sistema de ecuaciones donde estas tienen la misma pendiente pero distinta ordenada se observa, al graficarlas, que son rectas paralelas. Cuando ésto sucede, se dice que el sistema es incompatible y no tiene solución.

Si el sistema tiene solución, se dice que es un sistema compatible y se dice que es determinado si su solución es única e indeterminado si la solución no es única, éste sería el caso en que dos rectas coincidan en todos sus puntos.



SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

SISTEMA INCOMPATIBLE

METODOS DE SOLUCION ALGEBRAICOS

Los métodos de solución algebraicos son algoritmos para facilitar la búsqueda exacta de los valores que satisfagan a las ecuaciones de un sistema y son los siguientes:

Método de Igualación.

Método de Sustitución.

Método de Reducción o de Suma y Resta.

Método de Determinantes o Regla de Cramer.

Utilizando el mismo ejemplo, se expondrá cada uno de los métodos.

METODO DE IGUALACION.

i) Este consiste en despejar, de cada una de las ecuaciones, a la misma variable.

En el caso del ejemplo, las ecuaciones tienen a la variable d despejada:

$$d = 135t$$

$$d = 65t + 1250$$

ii) Se <u>igualan</u> los segundos miembros:

$$135t = 65t + 1250$$

iii) Se resuelve la ecuación resultante, ésta es de primer grado y de una sola variable:

$$135t - 65t = 1250$$

$$70t = 1250$$

$$t = \frac{1250}{t} \qquad t = 17.86 \text{ min}$$

iv) Los resultados obtenidos se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones originales del sistema para encontrar la otra variable:

$$t = 17.86 \implies d = 135(17.86) \qquad d = 2,411.1 \text{ m}$$

METODO DE SUSTITUCION

i) Este metodo consiste en despejar de una de las ecuaciones a una de las variables:

$$d = 135t \qquad \ldots(1)$$

$$d = 65t + 1250 \ldots(2)$$

ii) El valor despejado se <u>sustituye</u> en la otra ecuación: (en éste caso la ecuación (1) se sustituye en la (2))

$$135t = 65t + 1250$$

iii) La ecuación resultante es de primer grado y con una sola variable que se resuelve:.

$$135t = 65t + 1250$$

$$135t - 65t = 1250$$

$$70t = 1250$$

$$t = \frac{1250}{70} \implies t = 17.86 \text{ min}$$

iv) El valor encontrado se sustituye en cualquiera de las ecuaciones del sistema para encontrar el valor de la otra variable.

$$d = 135(17.86) \implies d = 2{,}411.1 \text{ m}$$

Los resultados son iguales a los obtenidos por el método de igualación.

METODO DE REDUCCION O DE SUMA Y RESTA

Este metodo consiste en anular a una de las variables sumando, miembro a miembro las ecuaciones. Lo anterior se cumple cuando los coeficientes de la variable que se quiere anular son iguales y de signo contrario.

i) Las ecuaciones se ordenan de acuerdo a las variables y el termino independiente pasa al segundo miembro de la ecuación:

$$d - 135t = 0$$

$$d + 65t = 1250$$

ii) Para este sistema de ecuaciones, la variable mas clara de anular es d ya que tienen el mismo coeficiente (uno) pero el signo es el mismo por lo que hay que multiplicar una de las ecuaciones por menos uno:

$$d - 135t = 0 \qquad\qquad d - 135t = 0$$

$$(-1)(d + 65t) = (-1)(1250) \qquad\qquad -d - 65t = -1250$$

iii) Se efectua la suma algebraica término a término resultando una ecuacion de primer grado con una variable:

$$-70t = -1250$$

iv) Se resuelve la ecuacion:

$$t = \frac{-1250}{-70} \quad ===> \quad t = 17.86 \text{ min}$$

v) El resultado se sustituye en cualquiera de las ecuaciones del sistema para encontrar la otra variable:

$$d = 135(17.86) \quad ===> \quad d = 2,411.1 \text{ m}$$

Los resultados son iguales a los obtenidos por los otros métodos.

METODO DE DETERMINANTES O REGLA DE CRAMER.

i) Las ecuaciones se reducen a la forma general. Para éste método, solo se utilizarán los coeficientes de las variables y los términos independientes para hacer un arreglo de ellos en un <u>determinante</u>.

Se obtendrá el <u>determinante del sistema</u>, y los <u>determinantes de las variables</u>.

ii) El determinante del sistema se forma con los coeficientes de las variables. En este caso, el determinante se dice que es un determinante de dos por dos (dos columnas, dos renglones):

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & -135 \\ 1 & -65 \end{vmatrix} =$$

y se resuelve multiplicando cruzadamente los términos. Los que siguen la flecha hacia abajo conservan el signo que les corresponda. Los que siguen la flecha hacia arriba cambian de signo.

$$\Delta_s = 1(-65) + 1(135) = -65 + 135 = 70$$

Los determinantes de las variables, en este caso t y d son:

$$\Delta_d = \begin{vmatrix} 0 & -135 \\ 1250 & -65 \end{vmatrix} \qquad \Delta_t = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1250 \end{vmatrix}$$

se observa que en estos, los términos independientes ocupan el lugar de los coeficientes de las variables cuyo determinante se quiere conocer:

$$\Delta_d = 0(-65) + (135)(1250) = 0 + 168,750 = 168,750$$

$$\Delta_t = 1(1250) - 0(1) = 1250$$

iii) El valor de las variables se obtiene al dividir el determinante de cada una de las variables entre el determinante del sistema:

$$t = \frac{\Delta_t}{\Delta_s} \implies t = \frac{1250}{70} = 17.86$$

$$d = \frac{\Delta_d}{\Delta_s} \implies d = \frac{168,750}{70} = 2,411$$

Los resultados son los mismos obtenidos por los otros métodos.

En términos generales, los métodos de solución para sistemas de ecuaciones pretenden lo siguiente para obtener su solución:

a) Efectuar operaciones y reducir términos en cada una de las ecuaciones.

b) Cancelar a una de las variables para efectuar la ecuación resultante.

c) El resultado obtenido se sustituye en cualquiera de las ecuaciones del sistema para obtener la otra variable.

DESIGUALDADES

Una desigualdad ez aquella en que sus miebros están unidos por los signos de desigualdad (<, >) y donde uno de los miembros es: mayor, menor, mayor o igual, menor o igual que el otro. Los valores que satisfacen una desigualdad son un conjunto finito o infinito de valores.

Consideremos las desigualdades como proposiciones abiertas que pueden ser simples o compuestas, es decir, son abiertas cuando todavía no se conocen el o los valores que las satisfagan y son simples cuando están formadas por una sola proposición y compuestas en el caso contrario:

Proposiciones abiertas simples:

$3 > x$ "Tres es mayor que equis"

$4x - 2 < x - 1$ "cuatro equis menos dos es menor que equis"

Proposiciones abiertas compuestes:

$2 < x < 5$ "dos es menor que equis y equis es menor que cinco"

$5 < t - 1 < 9$ "cinco es menor que t menos uno y t menos uno es menor que nueve"

La traducción de estas desigualdades no es la única ya que también se pueden interpretar como:

"equis es menor que tres", "equis menos uno es mayor que cuatro equis menos dos", "equis es mayor que dos pero menor que cinco", "t menos uno es mayor que cinco pero menor que nueve". Es recomendable traducir las desigualdades empezando por el núcleo del sujeto que es la variable en la desigualdad ya que esto facilita su interpretación gráfica.

Resolver una desigualdad utilizando el proceso que se vio en el capítulo II para conocer cuál o cuáles valores podrían satisfacer a una ecuación nos llevaría a encontrar la solución, sin embargo, hay que aprovechar los conocimientos adquiridos y utilizar algún algoritmo para lo cual es necesario recordar las propiedades de orden:

i) Sumar o restar un número real cualquiera a ambos miembros de la desigualdad, no la altera.

ii) Multiplicar o dividir por un mismo número real a la desigualdad es considerar dos casos:

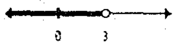
a) Si el número real es positivo, la desigualdad no se altera.

b) Si el número real es negativo, la desigualdad cambia de sentido.

El conjunto solución de una desigualdad lineal de una sola variable es un conjunto de puntos sobre un eje horizontal. Representan intervalos finitos o infinitos, abiertos o cerrados.

Considérese la siguiente desigualdad: $x < 3$

Su representación geométrica es la zona sombreada sobre el eje y un pequeño círculo sobre el valor extremo que se deja sin llenar:

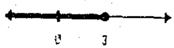


el intervalo que representa lo anterior, es abierto y se simboliza con paréntesis redondos:

$$(-\infty\ ,\ 3)$$

Si la desigualdad fuera: $x \leq 3$

los valores que la satisfacen son todos aquellos que sean menores o iguales a tres. Su representación geométrica sería semejante a la anterior sólo que el círculo está lleno ya que incluye al punto $x=3$.

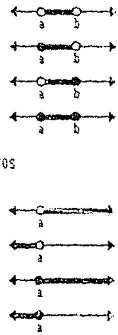


el intervalo que representa a la desigualdad es semi-abierto o semi cerrado, se utiliza un corchete junto al extremo del intervalo que se considera:

$$(-\infty\ ,\ 3]$$

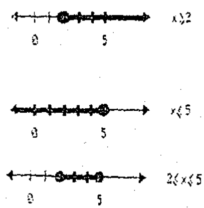
El siguiente cuadro resume los tipos de intervalos en un segmento de recta. Considérese a y b números reales con $a < b$

INTERVALOS FINITOS		
(a,b)	$a<x<b$	abierto
$[a,b)$	$a\leq x<b$	semiabierto
$(a,b]$	$a<x\leq b$	semiabierto
$[a,b]$	$a\leq x\leq b$	cerrado
INTERVALOS INFINITOS		
(a,∞)	$x>a$	abierto
(∞,a)	$x<a$	abierto
$[a,\infty)$	$x\geq a$	semiabierto
$(\infty,a]$	$x\leq a$	semiabierto



Si una desigualdad es del tipo de una proposición compuesta, formada por dos o más enunciados como por ejemplo: "encuentra el conjunto solución de los valores de $x \geq 2$ y los valores de $x \leq 5$."

El conjunto solución es la <u>intersección</u> de los conjuntos solución de cada una de las proposiciones. Gráficamente, se tiene:



Utilizando la notación de conjuntos, se tiene:

$$\{x/\ 2 \leq x\} \cap \{x/\ x \leq 5\} = \{x/\ 2 \leq x \leq 5\} \qquad \in R$$

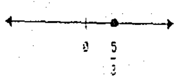
Utilizando la notación de intervalos, se tiene:

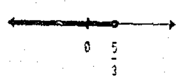
$$[2,\ 5]$$

Resolver una desigualdad es equiparable con resolver una ecuación considerando sólo que si la desigualdad se multiplica por un número negativo, ésta cambia de sentido.

EJEMPLO:

Resolver la ecuación:	Resolver la desigualdad:
$3x + 2 = 7$	$3x + 2 \leq 7$
$3x = 7 - 2$	$3x \leq 7 - 2$
$3x = 5$	$3x \leq 5$
$x = \frac{5}{3}$	$x \leq \frac{5}{3}$
El conjunto solución es:	El conjunto solución es:
$\{\frac{5}{3}\}$ es un conjunto unitario	$\{x/\ x \leq \frac{5}{3}\}$ un conjunto infinito de valores





Resolver la ecuación:

$$4x - 3 = 5x + 8$$

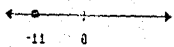
$$4x - 5x = 8 + 3$$

$$-x = 11$$

$$x = -11$$

El conjunto solución es:

$$\{-11\}$$



Resolver la desigualdad:

$$4x - 3 \geq 5x + 8$$

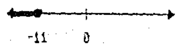
$$4x - 5x \geq 8 + 3$$

$$-x \geq 11$$

$$x \leq -11$$

El conjunto solución es:

$$\{x / x \leq -11\}$$



En ocasiones interviene el valor absoluto en una ecuación o en una desigualdad.

Resolver la ecuación:

$$|x - 3| = 6$$

Resolver la desigualdad:

$$|x - 3| < 6$$

Recordando la definición de valor absoluto, se tienen dos posibilidades:

$$|x - 3| = x - 3 \qquad \text{si} \qquad x - 3 \geq 0$$

$$|x - 3| = -(x - 3) \qquad \text{si} \qquad x - 3 < 0$$

por lo que, al resolver la ecuación o la desigualdad, es necesario considerar dos caminos:

i) que lo que está entre barras es positivo.

ii) que lo que está entre barras es negativo.

$$|x - 3| = 6$$

$$x - 3 = 6 \quad \text{ó} \quad x - 3 = -6$$

$$x = 6+3 \quad \text{ó} \quad x = -6+3$$

$$x = 9 \quad \text{ó} \quad x = -3$$

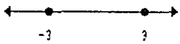
$$|x - 3| < 6$$

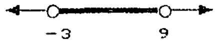
$$x - 3 < 6 \quad \text{ó} \quad x - 3 > -6$$

$$x < 6+3 \quad \text{ó} \quad x > -6+3$$

$$x < 9 \quad \text{ó} \quad x > -3$$

Los resultados, vistos gráficamente son:





Los resultados, en notacion de conjuntos:

$\{x/\ x = -3 \ \wedge \ x = 9\}$ $\qquad$ $\{x/x > -3\} \cap \{x/x < 9\} = \{x/ -3 < x < 9\}$

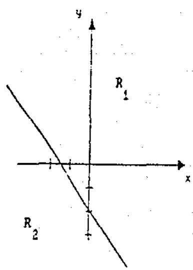
El conjunto solución de una desigualdad lineal de dos variables, es una región del plano cartesiano; un conjunto infinito de parejas ordenadas.

Considérese la desigualdad: $3x + 2y + 4 \leqslant 0$

de manera que el conjunto solución es la region R_2 que cumple con

$$R_2 = \{(x,y)/\ 3x + 2y + 4 \leqslant 0,\ x,y \in R\}$$

Para conocer la region que cumple con las condiciones anteriores, se grafica la igualdad $3x + 2y + 4 = 0$ en el plano cartesiano quedando dividido en tres partes: la region sobre la recta, la recta y la region abajo de la recta.



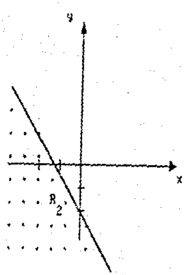
Pero, ¿cuál de las regiones es la que está representada por la desigualdad?. Considerense algunos puntos sobre la recta, es decir, que pertenezcan a la región R_1 y evalúese la desigualdad para dichos valores:

Punto	$3x + 2y + 4$	
(0,1)	$3(0) + 2(1) + 4 = 0 + 2 + 4 = 6$	$6 > 0$
(-1,3)	$3(-1) + 2(3) + 4 = -3 + 6 + 4 = 7$	$7 > 0$
(3,-2)	$3(3) + 2(-2) + 4 = 9 - 4 + 4 = 9$	$9 > 0$

En la siguiente tabla se evalúan algunos puntos pertenecientes a la región R_2:

Punto	$3x + 2y + 4$	
(-4,1)	$3(-4) + 2(1) + 4 = -12 + 2 + 4 = -6$	$-6 < 0$
(0,-3)	$3(0) + 2(-3) + 4 = 0 - 6 + 4 = -2$	$-2 < 0$
(1,-5)	$3(1) + 2(-5) + 4 = 3 - 10 + 4 = -3$	$-3 < 0$

Las tablas anteriores permiten identificar como región solución de la desigualdad a la región R_2 y a los puntos de la recta.



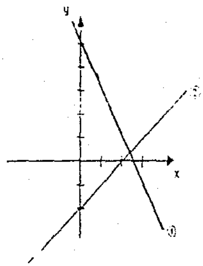
EJEMPLO.

Se quiere conocer la región que representan las siguientes desigualdades, las desigualdades a continuación son equivalentes:

$$2x + y \leq 5 \; ; \quad y \leq 5 - 2x$$

$$x - y \leq 2 \; ; \quad y \geq x - 2$$

1) Se trazan las rectas que se obtienen al considerar la igualdad.



$2x + y = 5$ ①

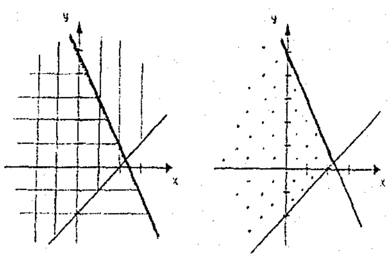
$x - y = 2$ ②

2) Se identifica la región que corresponde a la desigualdad $2x + y \leq 5$:

3) Se identifica la región que corresponde a la desigualdad $x - y \leq 2$:

4) La región que cumpe con las dos desigualdades es la que corresponde con la intersección de los puntos:

además de los puntos de la recta $y = -2x + 5$



Otra forma de identificar las regiones es considerar la desigualdad equivalente, despejando a la variable "y".

$$y \le -2x + 5$$

$$y \ge x - 2$$

de tal forma que, si $y = -2x + 5$ y $y = x - 2$ corresponden con las rectas, ésto implica que, al considerar $y \le -2x + 5$ los valores de "y" deben ser menores o iguales que $-2x + 5$ que es la expresión que representa a la recta y en consecuencia la región es la que está debajo de la misma e incluso los puntos de la recta el caso de la otra desigualdad, los valores de "y" deben ser mayores que $x - 2$ que es la expresión de la otra recta y por lo tanto, la región es la que está sobre esta recta.

En el siguiente ejemplo se incluye una desigualdad de segundo grado.

¿Cuál es la región que representan las siguientes desigualdades simultáneas?

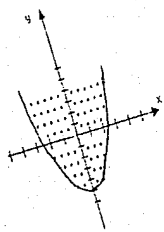
$$y \ge x^2 - 5 \quad y \quad y \le 1/2x$$

es decir:

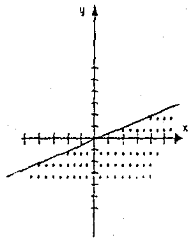
$$x^2 - 5 \le y \le 1/2x$$

1) Representar la región que corresponde con $y \ge x^2 - 5$

La desigualdad representa la región "dentro" de la parábola y los puntos de ella misma:



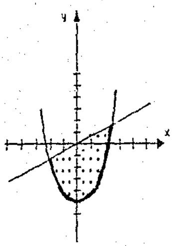
2) Representar la región que corresponde con la desigualdad $y < 1/2x$. Esta corresponde a los puntos que están por "debajo" de la recta representada por $y = 1/2x$.



Sin embargo, por tratarse de desigualdades simultaneas, estas deben ser graficadas en un mismo plano y la región correspondiente será aquella que contenga la intersección de los puntos de una y de otra.

$$\{(x,y)/\ x^2 - 5 \leqslant y < 1/2x,\ x,y \in R\}$$

$$\{(x,y)/\ x^2 - 5 \leqslant y,\ x,y \in R\} \cap \{(x,y)/\ y < 1/2x,\ x,y \in R\}$$



Una aplicación de las desigualdades con dos variables es en programación lineal que estudia problemas cuyo modelo es representado por una ecuación o desigualdad lineal en problemas de optimización en las áreas de administración o en las ciencias sociales.

Utilizando sólo los conceptos básicos hasta aquí mencionados, se ilustra lo anterior con el siguiente problema:

El administrador de una fábrica de colchas y sábanas para bebe desea optimizar sus ventas. Cuenta con las siguientes cantidades de tela:

16 m^2 de algodón   11 m^2 de seda   15 m^2 de lana

cada prenda requiere de las siguientes cantidades de material:

sábanas: 2 m^2 de algodón, 1 m^2 de seda, 1 m^2 de lana

colchas: 1 m^2 de algodón, 2 m^2 de seda, 3 m^2 de lana

si una sábana se vende en \$30,000 y una colcha en \$50,000, ¿cuántas prendas de cada una debe fabricar para obtener la mayor cantidad de dinero?

Es conveniente anotar los datos en forma tabular:

	sabanas	colchas	restricciones
cantidad fabricada	x	y	$x \geq 0$ (1) , $y \geq 0$ (2)
metros utilizados			
algodon	$2x$	y	$2x + y \leq 16$ (3)
seda	x	$2y$	$x + 2y \leq 11$ (4)
lana	x	$3y$	$x + 3y \leq 15$ (5)
ganancia	$30000x$	$50000y$	$30000x + 50000y = G$

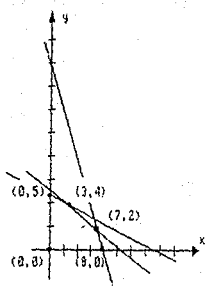
La columna de limitaciones o restricciones, es la que representa las existencias de materia prima con las que se cuenta -

para la fabricación de las sábanas y colchas. El primer renglón considera las desigualdades $x \geq 0$ $y \geq 0$

que significa que x, número de sábanas fabricadas e y, número de colchas fabricadas, no puede ser un número negativo.

La última igualdad representa la <u>función objetivo</u> que es la ganancia esperada.

Graficando cada una de las desigualdades se tiene la región comprendida en el polígono cuyos vértices son los puntos anotados en la figura:



donde el valor máximo (o mínimo) deseado de una función objetivo se encuentra dentro de la región del polígono de manera que, calculando los valores para G correspondientes con los valores de las coordenadas de los vértices, será aquella pareja de valores que cumpla con que G sea la ganancia máxima:

$$G_{(0,0)} = 30,000(0) + 50,000(0) = 0$$

$$G_{(8,0)} = 30{,}000(8) + 50{,}000(0) = 24{,}000$$

$$G_{(7,2)} = 30{,}000(7) + 50{,}000(2) = 310{,}000$$

$$G_{(3,4)} = 30{,}000(3) + 50{,}000(4) = 290{,}000$$

$$G_{(0,5)} = 30{,}000(0) + 50{,}000(5) = 250{,}000$$

la funcion objetivo alcanza su valor maximo para el punto (7,2), - es decir, fabricando 7 sábabas y 2 colchas será optima la función.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resuelve las siguientes ecuaciones, desigualdades y sistemas de ecuaciones.

1) $3x^2 - 2x - 8 = 0$

2) $2x + y = 1$
$x - 3y = 2$

3) $\dfrac{2(x - 5)}{3} - \dfrac{x}{4} = 2x - 7$

4) $(3x - 2)^2 - 1 = -(x - 1)^2$

5) $2x = y - 4$
$3x + 2y = 29$

6) $4(2x - 5) > x - 2$

7) $\dfrac{3x + 2}{7} < 5x + 3$

8) $|4h - 7| > 3$

9) $2x^2 + 5x = 3$

10) $x + y = 72$
$2x = y$

Resuelve los siguientes problemas cuyos modelos algebraicos son ecuaciones, ecuaciones simultaneas o desigualdades.

1) En una obra, el maestro herrero trabajo 6 dias y su ayudante 7 dias. Recibieron en total $ 162,000.00. En otra obra, el maestro trabajo 5 dias y su ayudante 3, obtuvieron $ 95,000.00 Encuentra el salario por dia de cada uno.

2) Anita invirtio una suma de dinero al 37% y otra al 42% Su inversión total fue de $ 825,000.00 y la cantidad que recibio

por intereses fue de $ 403,500.00. ¿Que cantidad invirtió en cada tasa de interes?

3) El volumen de un gas es de 10 m^3 con una presion de 6 atm. ¿Cuál sera su volumen cuando la presión es de 20 atm? (recuerdese: atm significa atmosferas. Utilizando la formula de la Ley general del estado gaseoso $\frac{P_1V_1}{t_1}$ $\frac{P_2V_2}{t_2}$ donde los subíndices 1 representan el estado inicial y los subíndices 2 el estado final del gas.)

4) El perimetro de un triangulo isosceles mide 84 cm y la longitud de uno de los lados iguales es dos tercios de la longitud de la base. Encuentra la longitud de la base del triángulo.

5) Un tendero desea mezclar nueces de $ 12,000.00 el kilo con 30 kilos de avellanas de $ 15,000.00 y quiere vender la mezcla a $ 11,800.00 el kilo. ¿Cuantos kilos de nueces necesita?

6) Un avión hace el vuelo de la ciudad A a la Ciudad B a una velocidad promedio de 329 km por hora. A causa de ciertas condiciones favorables, el viaje de regreso se hace a 360 km por hora. Si el vuelo de A a B toma 27 minutos más que el de regreso, ¿cual es la distancia entre amdbas ciudades?

7) La suma de dos numeros reales positivos es 1. El producto de sus cuadrados tambien es 1. Hallar los dos numeros.

8) Una pista de patinaje mide 100 m de largo y 70 de ancho Se desea aumentar su área a 13,800 m^2 agregando franjas de igual longitud al ancho y al largo de la pista para mantener su forma rectangular. ¿Cual es el ancho de la franja que debe añadirse?

9) Un guia de turistas esta arreglando un viaje. Puede -

llevar un máximo de 10 personas y ha decidido que deben ir por lo menos 4 hombres y 3 mujeres. Su ganancia será de $10,000.00 por cada mujer y $15,000.00 por cada hombre. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres le producirán la mayor ganancia?

10) Utiliza las desigualdades para escribir los puntos del plano que no están entre las rectas paralelas $3x - y = 6$ y $12x - 4y = 15$

CAPITULO V

MUESTRA ESTADISTICA DEL RESULTADO DE CONOCIMIENTOS DE ALUMNOS DE NUEVO INGRESO Y ALUMNOS QUE HAN CURSADO UN AÑO EN EL COLEGIO

Se elaboraron dos exámenes de diagnóstico con distinto grado de dificultad para ser aplicados a los alumnos que recien ingresaban al Colegio y para los que habían estado en él un año.

Los exámenes abordaron los temas de:

a) Propiedades de los números y operaciones aritméticas.

b) Funciones.

c) Operaciones algebraicas y ecuaciones.

d) Solución de problemas.

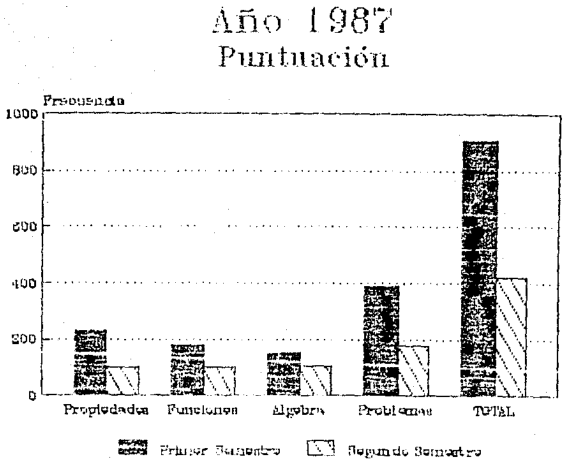
Los exámenes tuvieron tres reactivos de opción múltiple para cada tema. Fueron aplicados a 300 alumnos, la mitad de los cuales era de primer ingreso.

Los resultados fueron que:

Los alumnos de primer ingreso obtuvieron un promedio general de 5.98 obteniendo el mayor puntaje en la solución de problemas y el menor en operaciones algebraicas y ecuaciones.

Los alumnos con un año en el Colegio, tercer semestre, obtuvieron un promedio general de 4.2 obteniendo el mayor puntaje en solución de problemas y el menor en el tema de Funciones. Cabe aclarar que no se tomó en cuenta quiénes habían aprobado Matematicas I y Matematicas II.

La gráfica que se muestra a continuación ilustra lo antes descrito indicando la frecuencia obtenida en cada tema para los distintos tipos de examen.



Las conclusiones obtenidas de estos exámenes son:

a) El examen de diagnóstico solo nos informa lo que está dañado, como el diagnóstico que hace un medico. Toca al maestro hacer un análisis que explique el por qué del daño.

b) Los puntajes más altos obtenidos en el tema de Solución de problemas no hace más que confirmar que los alumnos resuelven, de alguna manera lógica los problemas que se les presentan.

c) Los otros temas que se presentan de forma abstracta, donde el alumno no ve la aplicación practica son para él totalmente ajenos.

d) Resalta el hecho de tener un promedio menor en aquellos alumnos que ya cursaron el primero y segundo semestre, es decir, que ya han estudiado los temas del examen diagnóstico.

Lo anterior se explica por el hecho de haber cursado cada uno de los temas en varias ocasiones desde el ciclo secundario y de manera un tanto inconexa, como se explica a continuación:

- El tema de "propiedades de los números y operaciones aritméticas" se estudia desde los últimos años de la primaria, en el primero y segundo curso de secundaria.
- El tema de "funciones" aparece en los programas de segundo y tercero de secundaria.
- Respecto al tema "operaciones algebraicas y ecuaciones" se observa su repetición en los tres años de la secundaria.
- Finalmente, la "solución de problemas" es un tema que se programa en el segundo y tercer curso de la secundaria.,
- Los alumnos durante el primer año en el Colegio ven de manera integral nuevamente los mismos temas sólo que influyen una serie de factores que hacen que los

conocimientos que pudieron haberse adquirido, solo les permitan salir momentáneamente del compromiso curricular a algunos y a otros se les considere dentro del gran porcentaje de reprobados que existe en las materias de Matemáticas I y Matemáticas II.

CONCLUSIONES

Considero que muchos profesores de matemáticas están actuando bajo el discurso matemático en lugar de actuar bajo el discurso educativo, es decir, que para desarrollar cualquier tema no hay que empezar por la axiomatización que son conceptos que engloban todo un conocimiento, sino precisamente, para comprender un tema es necesario partir del principio natural del conocimiento.

Hacer énfasis en el discurso matemático muchas veces aleja al educando de la cuestión medular que es en sí la de aprender matemáticas. Crea un distanciamiento entre el profesor y el educando.

Los alumnos se preguntan, ¿para qué aprender matemáticas cas?. Para ésto habrá que plantearnos otra cuestión:

¿Cuál es la función social de la enseñanza?.

Al respecto, en la gaceta del Colegio de Ciencias y Humanidades sobre la creación del mismo habla de: "desarrollo integral del educando, su realización plena en el campo individual y su cumplimiento satisfactorio dentro de la sociedad" para lo cual cada individuo dará su propia interpretación. Al respecto, en el libro:

¿Qué es la matemática? de R. Courant y H. Robbins nos presentan la necesidad de conocer ésta rama del conocimiento en función de la demostración objetiva de que las fuentes de creatividad matemática no estan desvinculadas del interés de conocer nuestro entorno independientemente de la obligatoriedad de que sean útiles, aspecto que preocupa mucho al educando.

En lo que respecta a la enseñanza de las matemáticas considero que la filosofía de los matemáticos del siglo XIX encabezados por Felix Klein donde, en su obra: "Las Matemáticas elementales desde un punto de vista superior" (1908). indujeron una corriente en el sentido de tomar su obra como un enfoque didáctico lejos de lo que su trabajo pretendía dirigido a fundamentar y estructurar la matemática. Lo anterior. desde mi punto de vista, provocaron el antagonismo que hay entre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Por el contrario, Hans Freudenthal, en una conferencia en Berkeley el 10 de agosto de 1980: "Mayor Problems in Mathematic Education" (Educational Studies in Mathematics. Vol. 12 No. 2 1981) establece que debe haber un puente entre discernimiento, entendimiento, pensamiento, teoría y repetición, rutinas, repasos, memorización, algoritmos y práctica utilizando modelos que esquematicen el aprendizaje.

Cuando un tema se repite en varios cursos y es expuesto por distintos profesores, los alumnos, lejos de asimilarlo, se enfrentan a distintas formas de explicación y diferentes enfoques sobre el tema. Lo anterior provoca en el alumno una minimización en el aprendizaje y cuando ingresan al Colegio vuelven a estudiarlo incrementando los efectos antes mencionados y por ello los resultados que se obtuvieron en el examen diagnóstico son entendibles.

BIBLIOGRAFIA

Boll, Marcel. Historia de las matemáticas. Editorial Diana. México, D.F., 1976. 133 pp.

Britton, Jack R. y Bello, Ignacio, Matemáticas contemporáneas, Harla, México, D.F., 1982. 688 pp.

Courant R, y Robbins H., ¿Qué es la Matemática?, Editorial Aguilar, Madrid, 1971. 210 pp.

Dolciani, Mary P., et al., Algebra Moderna, Publicaciones Cultural S. A., Mexico, D.F., 1981. 591 pp.

Escandón, Rafael. Curiosidades matemáticas. Editorial Diana, México, D.F., 1980. 206 pp.

Fetter, Helga, y Abreu, José Luis, Sistemas Numericos: Números reales, Limusa, Mexico, D.F., 1984. 63 pp.

Gardner, Martin, More mathematical puzzles and diversions, Penguin books, Londres, 1961. 187 pp.

Lara Aparicio, Miguel, Antología de matemáticas. U.N.A.M., Mexico, D.F., 1971. 197 pp.

Lopez Yáñez, Alejandro. Problema de la Enseñanza de las Matemáticas, Direccion General de Proyectos Academicos. U.N.A.M., México, D.F., 1982. 109 pp.

Lovaglia, Florence, et al., Algebra, Harla, Mexico, D.F., 1972. 395 pp.

Meserve, Bruce E., Sobel, Max A., Introducción a las Matemáticas, Editorial Reverte, Barcelona, 1967. 462 pp.

National Council of teachers of Mathematics, El sistema de los numeros enteros, Editorial Trillas, Mexico, D.F., 1971. 80 pp.

National Council of teachers of Mathematics, Numeros enteros, Editorial Trillas, Mexico, D.F., 1972. 65 pp.

Northrop. Eugene, Riddles in Mathematics, Penguin Books, Londres. 1971. 240 pp.

Perelman, Yuri, El divertido Juego de las Matematicas, Circulo de Lectores, Barcelona, 1970. 200 pp.

Perez Lindo, Augusto, "Matematicas modernas: pedagogía, antropología y politica. Entrevista a Georges Papy", Perfiles Educativos, Núm. 10, Octubre-Diciembre 1980, C.I.S.E., U.N.A.M., Mexico, D.F. 5 pp.

Piaget, J. et al., La enseñanza de las matemáticas modernas, Alianza Editorial, Madrid, 1978, 401 pp.

Quesada Castillo, Rocío, "Los alumnos del bachillerato desean aprender a estudiar", Perfiles Educativos, No. 12, Abril-Junio 1981, C.I.S.E., U.N.A.M., México, D.F. 8 pp.

Ruiz Larraguibel, Estela, "Reflexiones en torno a las teorías del aprendizaje", Perfiles Educativos, No. 2, Julio-Septiembre 1983, C.I.S.E., U.N.A.M., México, D.F. 9 pp.

Struck, Dirk J., A concise History of Mathematics, Dover Publications, Inc., New York. 1967. 195 pp.

Titchmarsh, E.C., Esquema de la matematica actual. Fondo de Cultura Economica, Mexico, D.F., 1956. 196 pp.

Viesca Arrache, Ma. Martha, "Líneas de reflexión para abordar el problema del bajo aprovechamiento escolar", Perfiles Educativos, Núm. 14, Octubre-Diciembre 1981, C.I.S.E., U.N.A.M., México, D.F. 14 pp.

Zarzar Charur, Carlos, "Diseño de estrategias para el aprendizaje grupal", Perfiles Educativos, Núm. 1. Abril-Junio, 1983, C.I.S.E. U.N.A.M., Mexico, D.F. 13 pp.