



24  
29

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**" DISEÑO DE ELEMENTOS CURVOS  
DE CONCRETO REFORZADO "**

**FALLA DE ORIGEN**  
**T E S I S**

Que para obtener el Título de:

**INGENIERO CIVIL**

Presenta:

**JOSE LUIS CAMACHO GONZALEZ**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

UNAM



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

### CAPITULO I

I . - INTRODUCCION	1
I.1. - Clasificaciones	4

### CAPITULO II

II. - LA BARRA CURVA	7
II.1. - Generalidades	7
II.2. - Analisis de Esfuerzos Tangenciales	8
II.3. - Esfuerzos Radiales	13
II.4. - Tipos de Curvatura	17
II.5. - Parametro de Curvatura $r/n$	18

### CAPITULO III

III. - LA BARRA CURVA DE CONCRETO REFORZADO	21
III.1. - Comportamiento Del Concreto	21
III.2. - Elementos Sometidos a Distintos Estados de Esfuerzo	23
III.3. - Refuerzo Adicional Por Esfuerzos Radiales	28

## CAPITULO IV

IV. - PROPUESTAS PARA EL DISEÑO	31
IV.1. - Participación De Los Estribos En El Cortante y Esfuerzos Radiales	32
IV.2. - Proceso De Diseño De Elementos Curvos	33
IV.3. - Resultantes de Esfuerzos a Compresión y a Tensión y Momento De Diseño	37
IV.4. - Area De Acero Transversal	40

## CAPITULO V

V. - CONCLUSIONES	43
-------------------	----

## CAPITULO VI

VI. - BIBLIOGRAFIA	47
--------------------	----

## CAPITULO VII

VII. - FIGURAS	49
VII.1. - Ejemplos De Estructuras que contienen Elementos Curvos	49
Apéndice A	54
Apéndice B	61

## INTRODUCCION

Los elementos estructurales lineales curvos utilizados en edificación y que pueden funcionar como vigas, columnas y arcos horizontales y verticales, no tienen un uso tan profuso en la práctica de la Ingeniería Civil como lo tienen los elementos estructurales rectos.

Un empleo mucho más común de esos elementos estructurales se tiene en la Ingeniería Mecánica, por lo que el estudio de sus características básicas caen generalmente dentro de esta especialidad, ocasionando que en los temarios y cursos de la carrera de Ingeniero Civil se omita por completo el tratamiento de la teoría de elementos curvos creando entonces un punto débil para la formación de los Ingenieros Estructuristas. Como se verá mas adelante los mecanismos de esfuerzos actuantes en los elementos curvos son en esencia muy distintos a los mecanismos existentes en elementos rectos. En la referencia 1 se puede consultar la teoría existente para elementos curvos, teoría que revisaremos en el siguiente capítulo de esta tesis.

Sin embargo, aunque no se utilizan frecuentemente en la

Ingeniería Civil Estructural, es posible dar ejemplos concretos en los que estos elementos curvos juegan un papel importante. Se plantea entonces el gran problema de que el Ingeniero Civil no posee los conocimientos básicos para enfrentarse al diseño de esos elementos.

Sucede por tanto, que cuando el estructurista se encuentra con un elemento curvo, la falta de preparación técnica conduce a que en primera instancia trate de reducir estos elementos curvos a elementos rectos empleando los métodos de análisis y diseño que corresponden a estos últimos, simplificaciones que conducen a situaciones por completo erróneas en las que existe la posibilidad de falla o colapso catastrófico.

Mediante este trabajo, pretendemos alcanzar los siguientes objetivos:

1.- Dar algunos ejemplos de edificios en donde los elementos curvos son indispensables en sus sistemas estructurales.

2.- Revisar la teoría de la flexión de elementos curvos sometidos a flexión y cortante.

3.- Proponer algunas sugerencias para realizar el diseño

de elementos curvos hechos con concreto reforzado.

4.- Mostrar la importancia de considerar un diseño adecuado de elementos curvos de concreto reforzado sujetos a flexión.

Comenzaremos haciendo una breve lista de posibles destinos de obras ingenieriles en las cuales podemos utilizar los elementos curvos en sus sistemas estructurales:

Almacenes y/o bodegas, laboratorios, centros comerciales, gimnasios, coliseos, pistas de distintos usos, centros de convenciones, salones, construcciones coloniales, monumentos, puentes para carreteras y ferrocarriles, obras del Metro, rampas, obras de drenaje, viaductos, presas, etc..

Para la clasificación de elementos curvos recurriremos en primer lugar a las tres formas básicas en que son cargados:

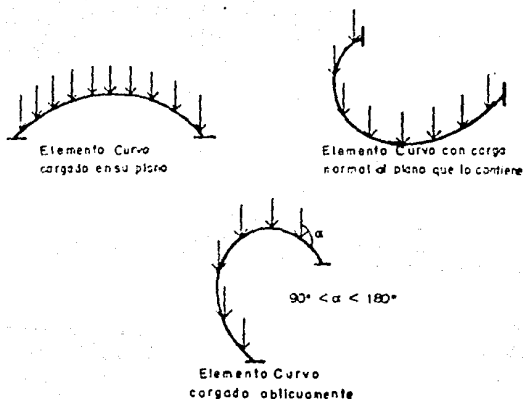
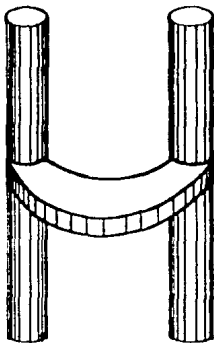


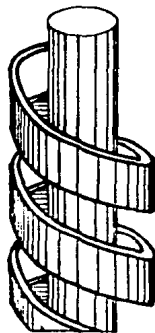
Fig. 1.1 Formas de carga en elementos curvos.

Existen además otras clasificaciones de estos elementos y son : Elementos curvos contenidos en un plano y elementos curvos no contenidos en el mismo plano ( tridimensionales). En el primer caso tendríamos una viga-balcón como ejemplo y en el segundo una escalera helicoidal como se ilustran a continuación:





Viga — Balcón



Escalera Helicoidal

Fig. 1.2 Elementos contenidos en el plano y tridimensionales.

Existe otra forma de clasificación, de mayor importancia, que es la que se refiere a la magnitud de la curvatura de los elementos, ya que tiene implícitos varios conceptos que juegan papeles más trascendentes que las clasificaciones anteriores. Esta clasificación es :

- a) Elementos de curvatura excesiva.
- b) Elementos de poca curvatura.

Para esta última clasificación es indispensable recurrir al establecimiento de curvaturas, radios de curvatura y criterios a partir de los cuales podremos definir

convencionalmente cuando un elemento es curvo o recto.

Puesto que este trabajo está enfocado hacia el diseño de elementos curvos de concreto reforzado, en el capítulo II, estableceremos los criterios a partir de los cuales podremos identificar fácilmente cuando un elemento debe ser diseñado como curvo o como recto.

Aunque el problema no se limita únicamente a elementos de concreto reforzado, ya que en estructuras metálicas es posible tener situaciones análogas, en este trabajo solo se consideraran elementos construidos con concreto reforzado, dejando el importante caso de las estructuras metálicas sin tratamiento en esta tesis por limitaciones de espacio.

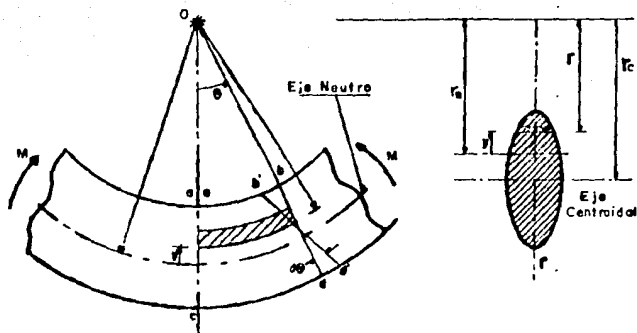
## CAPITULO II

### LA BARRA CURVA

Hemos visto en el capítulo anterior que es posible hacer varias clasificaciones respecto a los elementos curvos.

A partir de este momento entenderemos por elemento curvo, aquel cuya conformación geométrica no permite la utilización de las hipótesis de flexión utilizadas para elementos rectos. Como recordaremos, para la teoría básica de flexión en elementos rectos, se tiene como condición el que el eje longitudinal del elemento sea una línea recta. Cuando tenemos un eje que no sea línea recta, la teoría de flexión de elemento recto para la cual es válida la fórmula de la escuadría  $\sigma = Mc/I$ , no es aplicable.

Consideremos un tramo de viga curva como el de la figura siguiente:



Al aplicar flexión pura a la viga en el plano  $r_0$ , se considera en la superficie de la sección transversal un eje de simetría. Recordando la teoría de la viga recta, dicha sección transversal no sufrirá deformaciones al flexionarse el elemento.

Luego en cualquier posición  $r$ , la deformación tangencial será:

$$\xi_0 = \frac{b'b}{ab} = \frac{(rn-r)de}{r_0}$$

Deduciéndose el esfuerzo tangencial como:

$$\sqrt{V}_0 = E\xi_0 = \frac{E(rn-r)}{r} \frac{de}{r_0} \text{ -----(a)}$$

Como la fuerza neta en la dirección tangencial es cero

$$\int \sqrt{V}_0 dA = \frac{Ed_0}{r_0} \int \frac{rn-n}{r} dA = 0$$

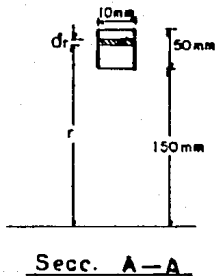
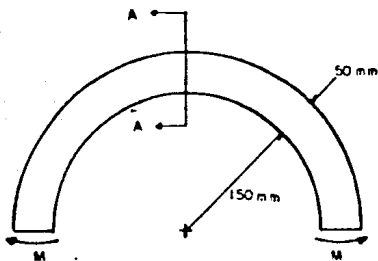
Ya que  $\int d\theta = 0$ ; entonces la integral debe ser igual a cero. Luego

$$\int \frac{r_n - r}{r} dA = r_n \int \frac{dA}{r} - A = 0$$

$$r_n = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} \text{ -----(b)}$$

En el caso de vigas curvas, los ejes centroidal y neutro no coinciden, ya que siempre  $r_c > r_n$ .

Ejemplo 2.1: Determinar la localización del eje neutro y la distancia  $\lambda$  para la barra de sección rectangular presentada en la siguiente figura:



Solución: El eje centroidal es  $r_c = 175$  mm considerando

$dA = 10 dr$  y  $A = 10 (50) = 500 \text{ mm}^2$  resulta que:

$$r_n = \frac{500}{10 \int \frac{dr}{r}} = \frac{50}{\ln 200 - \ln 150} = \frac{50}{\ln 1.333}$$

$$r_n = \underline{173.80 \text{ mm}}$$

$$\text{Ahora } \lambda = 175 - 173.8 = \underline{1.20 \text{ mm}}$$

Sabemos que de acuerdo a la distribución de esfuerzos el momento producido por  $\sqrt{\sigma}$  equivale a  $M$ . Entonces:

$$\begin{aligned} M &= -\int y \sqrt{\sigma} dA = E \frac{d_o}{\sigma} \int \frac{(r_n - r)^2}{r} dA = \\ &= E \frac{d_o}{\sigma} \left( r_n^2 \int \frac{dA}{r} - 2r_n \int dA + \int r dA \right) \end{aligned}$$

De donde  $\int dA = A$ ,  $\int r dA = r_c A$  y de la ecuación (b)

$$\int \frac{dA}{r} = \frac{A}{r_n}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} M &= E \frac{d_o}{\sigma} (-r_n A + r_c A) \\ \implies E \frac{d_o}{\sigma} &= \frac{M}{A \lambda} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (a):

$$\sqrt{\sigma} = \frac{M (r_n - r)}{A \lambda r} \text{ ----- (c)}$$

Como  $y = r_n - r$  tenemos:

$$\sqrt{\sigma} = \frac{M y}{A \lambda (r_n - y)} \text{ ----- (d)}$$

Consultar la tabla anexa de fórmulas para el cálculo de

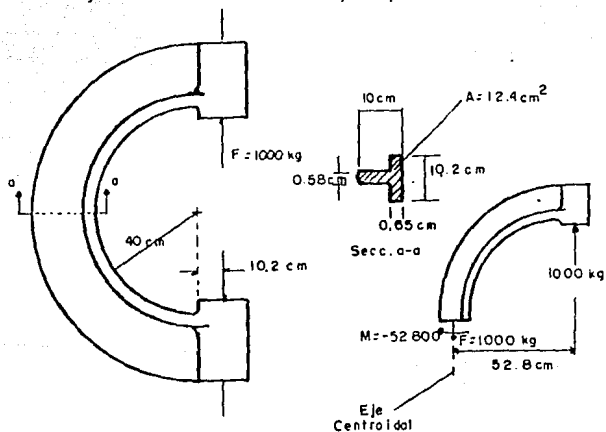
$$\int \frac{dA}{r}$$

El término  $\lambda$  en las ecuaciones (c) y (d) tiene valores

bajos, obtenidos de la diferencia de  $r_o - r_i$ . Ahora el calculo de  $r_o$  y  $r_i$  tiene que ser más exacto, así que  $\lambda$  debe ser obtenido como mínimo para tres figuras significativas. Notese que las ecuaciones (c) y (d) están dadas por los esfuerzos normales debidos sólo a los efectos de flexión. En el caso de vigas curvas estas son fuerzas normales adicionales.

EJEMPLO 2.2: La sección del cuerpo que presenta la figura, se encuentra sometida a una fuerza de 1000 Kg.

Determine la distribución de esfuerzos normales en el corte a-a y el esfuerzo de tensión y compresión máximo.



Solución : Primeramente se localiza el eje centroidal.

Considerando la superficie superior rectangular, tenemos :

$$12.4 r_c = (0.58)(9.45)(45.375) + (0.65)(10.2)(40.325)$$

$$r_c = 516.05 / 12.4 = \underline{42.610 \text{ cm.}}$$

De acuerdo a la figura, la fuerza F es transmitida directamente sobre el eje centroidal.

$$r_n = \frac{0.58 \times 9.45 + 10.2 \times 0.65}{10.2 L_n [40.65 / 40] + 0.58 L_n [50.1 / 40.65]} = 42.398 \text{ cm}$$

$$\lambda = 42.610 - 42.398 = \underline{0.212 \text{ cms.}}$$

Pero en flexión el máximo esfuerzo a tensión ocurre en el punto central, donde  $y = 42.398 - 40$

$$y = 2.398 \text{ cms.}$$

$\therefore$  en la ecuación (d) este máximo es :

$$\left(\sqrt{\sigma}\right)_{r_t} = - \frac{(-52800)(2.398)}{(12.4)(0.212)(42.398 - 2.398)} = 1204.1 \text{ Kg/cm}^2$$

El máximo esfuerzo a compresión ocurre para

$$y = 42.398 - 50.1 = -7.702 \text{ cms y es :}$$

$$\left(\sqrt{\sigma}\right)_{r_c} = - \frac{(-52800)(-7.702)}{(12.4)(0.212)(42.398 + 7.702)} = -3087.75 \text{ Kg/cm}^2$$



El esfuerzo directo debido a F es

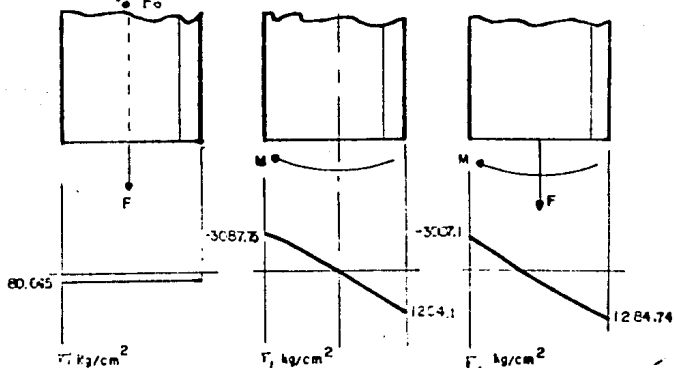
$$\sigma = \frac{F}{A}, \text{ o}$$

$$\sigma = \frac{1000}{12.4} = 80.645 \text{ kg/cm}^2$$

Los esfuerzos netos en estos puntos son :

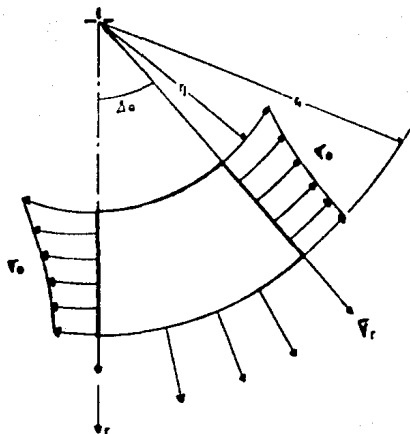
$$(\sigma_o)_{rc} = 1204.1 + 80.645 = 1284.745 \text{ kg/cm}^2$$

$$(\sigma_o)_{ro} = -3087.75 + 80.645 = -3007.105 \text{ kg/cm}^2$$



Complementando el análisis de la viga curva, se determina que existen también esfuerzos radiales debido posiblemente a que el ancho de la sección transversal es pequeña de acuerdo al eje neutro.

Tomemos ahora un segmento de la viga curva, como se muestra en la siguiente figura :



Ahora si  $\bar{V}_r$  se toma positiva la fuerza neta  $\bar{V}_\theta$  en la dirección radial negativa es :

$$\text{Sen } \Delta\theta \int \bar{V}_\theta dA$$

Valuando la integral para  $r = r_1$  o  $r_2$  y considerando  $\Delta\theta$  infinitesimal tal que  $\text{Sen } \Delta\theta = \Delta\theta$  resultando que la fuerza es

$$\Delta\theta \int \bar{V}_\theta dA$$

En la dirección radial positiva, la fuerza debida a  $\bar{V}_r$  es  $\bar{V}_r b r_1 \Delta\theta$ , siendo  $b$  igual al espesor de la sección en función de  $r_1$ . Sumando fuerzas en esta dirección

$$\bar{V}_r = \frac{1}{b r_1} \int_{r_1}^{r_2} \bar{V}_\theta dA$$

sustituyendo en la ecuación (c) y simplificando resulta :

$$\sqrt{r} = - \frac{M}{A b r_1 \lambda} \left( r_n \int_{r_1}^{r_t} \frac{dA}{r} - A_1 \right) \text{-----}(e)$$

donde  $A_1$  es el área de la sección transversal desde  $r_1$  a  $r_t$ .

**EJEMPLO 2.3:** Determinar la distribución de esfuerzos radiales en el corte a-a de la sección del ejemplo 2.2.

Solución: Valuamos en el patín la integral  $\int \frac{dA}{r}$  con  $r_t = 40$  cm;  $r_o = r_1$  y  $b = 10.2$  cm. Usando la sección transversal rectangular en la tabla de formulas para cálculo de  $\int \frac{dA}{r}$  tenemos que  $\int \frac{dA}{r} = 10.2 \text{ Ln } \frac{r_1}{40}$ , el área desde  $r_1$  hasta  $r_t$  es  $A_1 = 10.2 (r_t - 40)$ .

Sustituyendo estos terminos en (e) con  $b = 10.2$ , la distribución de esfuerzos radiales que resulta en el patín es:

$$\sqrt{r} = - \frac{M}{10.2 A r_1 \lambda} \left( r_n \text{Ln } \frac{r_t}{40} - 10.2 r_t + 408 \right) \text{-----}(1)$$

Dentro del área total, la sección aislada para  $r_t$  es una sección "T" (consultar tabla de formulas) con  $b_1 = 10.2$ cm,  $h_1 = 0.65$ cm  $r_t = 40$ cm,  $r_o = r_1$  y  $b = b_o = 0.58$ cm Así:

$$\begin{aligned} \int \frac{dA}{r} &= 10.2 \text{ Ln } \left( 1 + \frac{0.65}{40} \right) + 0.58 \text{ Ln } \left( \frac{r_1}{40 + 0.58} \right) = \\ &= 0.16442 + 0.58 \text{ Ln } \left( \frac{r_1}{40.58} \right) \end{aligned}$$

y  $A_1 = 10.2 (0.65) + (r_t - 40.65) (0.58) = 0.58 r_t - 16.947$

sustituyendo  $\int \frac{dA}{r}$  y  $A_t$  en la ecuación (e) con  $b = 0.58\text{cm}$  la distribución de esfuerzos radiales del patin esta dada por:

$$\sqrt{r} = - \frac{M}{0.58 A_t r \lambda} \left( 0.58 r_n \ln \left( \frac{r_t}{40.58} \right) - 0.16442 r_n - 0.58 r_t + 16.947 \right) \text{-----(2)}$$

Del ejemplo 2.2  $M = -52800\text{Kg}$ . con  $A = 12.4\text{cm}^2$   $\lambda = 0.212\text{cm}$  y  $r_n = 42.398\text{cm}$ . Ahora de (1) y (2) tenemos:

$$\text{Patin : } \sqrt{r} = (1.97 \times 10^3) \left( \frac{42.98}{r_t} \ln \frac{r_t}{40} - 10.2 + \frac{408}{r_t} \right)$$

$$\text{Area total : } \sqrt{r} = (3.463 \times 10^4) \left( \frac{24.59}{r_t} \ln \frac{r_t}{48.58} + \frac{23.92}{r_t} - 0.58 \right)$$

El máximo esfuerzo radial en el patin ocurre para  $r_t = 40.65\text{cm}$  y es:

$$\begin{aligned} (\sqrt{r})_{\text{max. patin}} &= (1.97 \times 10^3) \left( \frac{42.39}{40.65} \ln \frac{40.65}{40} - 10.2 + \frac{408}{40.65} \right) = \\ &= -288.19 \text{Kg/cm}^2 \end{aligned}$$

El máximo esfuerzo radial en el cuerpo total para  $r_t = 42.68\text{cm}$  donde  $d\sqrt{r}/dr = 0$ . Valuando esto, tenemos:

$$\begin{aligned} (\sqrt{r})_{\text{tot.}} &= (3.463 \times 10^4) \left( \frac{24.59}{42.68} \ln \frac{r_t}{48.58} + \frac{23.92}{42.68} - 0.58 \right) = \\ &= -3260.6 \text{Kg/cm}^2 \end{aligned}$$

Sin embargo pudiera darse el caso de que un elemento curvo de concreto reforzado posea una curvatura muy tenue ( o muy suavizada ), en la cual no se cometería ningún error significativo al idealizarla como viga recta. Hara falta entonces, un criterio para establecer a partir de que condiciones geométricas es necesario realizar un diseño y, tomar en cuenta la teoría de las barras curvas o hacer la idealización para considerarla como elemento recto.

Mediante los siguientes desarrollos trataremos de cumplir estos objetivos.

Antes de definir los criterios para calificar a un elemento estructural como curvo haremos un breve repaso de los tipos de curvas más comunes que pudieran presentarse. Esta discusión se limita a elementos curvos contenidos en el plano.

El primer tipo de curvatura será la circular, lo cual implica que presentará un radio de curvatura constante:

El segundo tipo, sera una curvatura de tipo parabólico lo cual implicará que el radio de curvatura varíe de acuerdo a la ecuación de la parabola.

El tercer tipo pertenecerá a elementos curvos que no

cumplen las ecuaciones del círculo ni la parábola, y que sin embargo, poseen un radio de curvatura el cual es variable. Es necesario indicar que el elemento estructural puede ser considerado como parcialmente curvo; esto es, que tendrá partes rectas combinadas con ciertas partes curvas siendo estas últimas de cualquiera de los tres tipos mencionados.

Es posible hacer una primera clasificación a partir del radio de curvatura lo cual tendrá cierta utilidad para elementos curvos de los tipos 1 y 2, pero que no tendrá aplicación en los de tipo 3. Por lo tanto, salvo que el radio de curvatura sea distinto de infinito, con todo rigor el elemento será necesariamente curvo. Es necesario entonces definir un valor del radio de curvatura que nos indicará cuando un elemento curvo puede ser idealizado como elemento recto.

El parámetro más significativo para establecer este criterio, es el cociente de  $r_0/h$ , donde  $r_0$  es igual al radio de curvatura al eje neutro y  $h$  es la dimensión del elemento curvo tomada en la misma dirección en la que se establezca

Entonces  $r_0/h$  nos proporcionara un valor adimensional el

cual para valores menores que 20 el elemento será considerado como curvo. Este valor de 20 es conservadoramente adecuado para elementos de concreto reforzado.

El problema de este enfoque es que se recurre a la pura geometría para definir un criterio y para nada se toman en cuenta las propiedades del material. Por tanto, un segundo criterio, el cual deberá ser más adecuado será tomar en consideración ciertas propiedades del material para definir el criterio de la existencia del elemento curvo.

Específicamente, este método se basa en la evaluación de esfuerzos y deformaciones radiales y tangenciales calculados de los elementos curvos en cuestión, para ser comparados posteriormente con los esfuerzos permisibles del material y si no son mayores que un mínimo porcentaje de estos últimos (5 o 10 %) el elemento podrá ser considerado como recto. Los dos métodos anteriormente mencionados poseen ventajas y desventajas. El primer método tiene como ventajas su sencillez y simplicidad, en tanto que tiene como desventajas lo ya señalado referente a que no considera ninguna propiedad del material pues es fácil observar que no es lo mismo diseñar un elemento de concreto que un elemento de acero.

El segundo método tiene como ventaja que es más preciso, y como desventajas se tienen que requiere del dominio de la teoría de vigas curvas y de los cálculos correspondientes lo cual puede ser más tardado.

En conclusión, será cuestión de preferencias personales utilizar uno u otro método. Es necesario aclarar solamente que para los elementos del tipo 3 será suficiente revisar para el menor radio de curvatura, independientemente de cual de los dos métodos anteriores se utilice.

Es posible que mediante este trabajo se considere que las barras curvas puedan tener cualquier condición de geometría, incluyendo la espacial (escalera helicoidal) y también cualquier condición de carga normal o en el plano que contenga al elemento curvo, en esta tesis solo trataremos elementos curvos con cargas en el mismo plano.

Para el caso de un elemento curvo tridimensional como el de la escalera helicoidal, se requiere un estudio adicional que no se realizará como parte de este trabajo y básicamente deberá contener las consideraciones teóricas, para tomar en cuenta la torsión y las distribuciones específicas de esfuerzos dentro del elemento curvo.



## CAPITULO III

### LA BARRA CURVA DE CONCRETO REFORZADO

Al establecer especificaciones para elementos curvos de concreto reforzado cargados en su plano de curvatura, se plantean retos especiales debidos principalmente a la complejidad en la acción de los diversos elementos mecánicos que actúan dentro del elemento curvo.

Para empezar hemos visto en el capítulo anterior que existen dos tipos de esfuerzo que actúan en una porción de elemento curvo; a saber, los esfuerzos radiales y los tangenciales ( $\sqrt{r}$  y  $\sqrt{\theta}$ ).

En el caso de los esfuerzos radiales  $\sqrt{r}$ , estos solo pueden ser plenamente identificables mediante la teoría de vigas curvas establecida en el capítulo anterior la cual fue presentada para vigas hechas de un material isótropo elástico.

Sin embargo, ya sabemos que el concreto no es ni isótropo ni elástico, pues recordando la grafica  $\sqrt{\sigma} - \epsilon$  de concreto

vemos que solo tiene un comportamiento lineal hasta un 40 % de su esfuerzo último  $f'_c$  (Fig. 3.1).

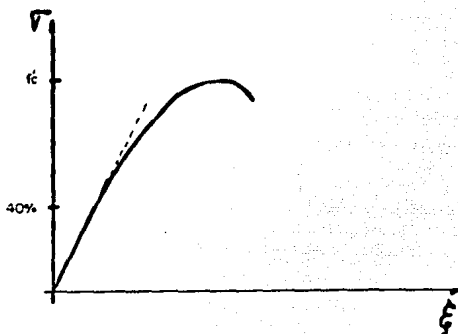


FIG. 3.1 Comportamiento del concreto.

Este comportamiento no lineal está intimamente ligado a la esencia del concreto que es un material no homogéneo lo cual se debe principalmente a los procesos de deterioro del concreto aún en condiciones de esfuerzos relativamente bajos.

Surgen entonces grandes dificultades para la utilización de la teoría establecida en el capítulo anterior, las cuales fueron establecidas para un material elástico homogéneo, para su utilización en elementos de concreto reforzado.

Distinguiremos además el sentido en que pudieran estar actuando los momentos flectores en el elemento curvo.

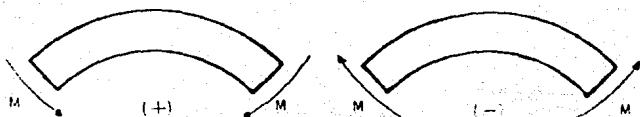


FIG 3.2 Convención de signos.

A continuación haremos una discusión sobre las condiciones en que actúan los distintos esfuerzos en ambos casos mostrados.

Ubicaremos para esta descripción tres distintos "elementos" de la viga como se observan en la fig. 3.3.

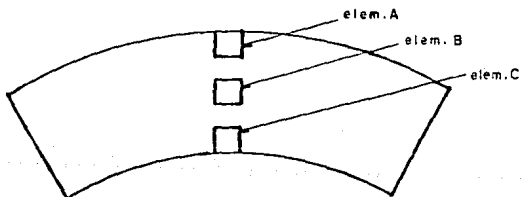


FIG. 3.3

El elemento A se encuentra sujeto a un estado de esfuerzos

biaxial al igual que los dos restantes. Cuando el sentido del momento flector es positivo, el bloque del elemento A tiene la siguiente configuración fig. 3.4 por lo que

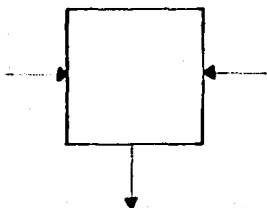


FIG. 3.4

la condición crítica será en la cara superior, la cual permanece libre de esfuerzos.

Cuando el elemento estructural mostrado en la figura 3.3 se encuentre sometido a momento flexionante con sentido negativo el elemento A tendrá la configuración mostrada en la fig. 3.5.

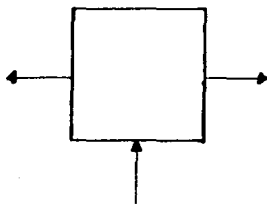


FIG. 3.5

Esta actua como una condición sumamente desfavorable, ya que es un estado biaxial de esfuerzos a tensión.

Pasando al elemento B de la fig. 3.3 observamos que si este elemento lo ubicamos en el eje neutro entonces solo existirá la configuración mostrada en la fig. 3.6 para momento positivo y en la fig. 3.7 para momento negativo.

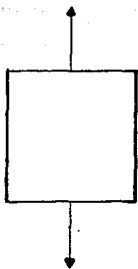


FIG. 3.6

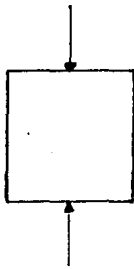


FIG. 3.7

Considerando al elemento C de la fig. 3.3, observamos que

para momento positivo y momento negativo respectivamente tendra los estados de esfuerzos mostrados en las fig. 3.8 y 3.9.

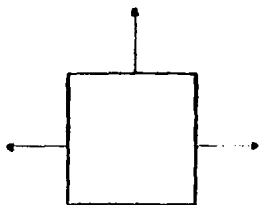


FIG. 3.8

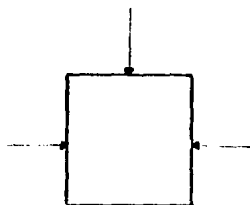


FIG. 3.9

Si consideramos elementos curvos sometidos a flexión en el plano vertical tendremos que para todos los casos anteriores con estado de esfuerzos y acciones (planos) en donde el caso más crítico de acuerdo a la bibliografía experimental revisada será el caso mostrado en la fig. 3.5 en donde a la tensión provocada por las fuerzas actuando en sentido contrario, se le superpone una fuerza a compresion en la otra dirección, sumándose los efectos.

Si consideramos que los elementos curvos de concreto reforzado, no sufrirán grandes esfuerzos ya que los refuerzos longitudinales y transversales serán suficientes para evitar los posibles agrietamientos, podremos eliminar la revisión o diseño de los distintos bloques de concreto. O sea, el

critorio general será, dejar que los refuerzos longitudinal y transversal resistan los esfuerzos a tensión y solo revisar los efectos de compresión en el concreto en donde se tendrá como condición crítica la que se tiene en la fig. 3.4.

Puesto que muchos fenómenos tienen carácter reversible como son el viento o el sismo, es necesario agregar a la discusión hecha hasta ahora, las distintas combinaciones de esfuerzos que se tendrían cuando el elemento curvo tiene una curvatura inversa a la mostrada en la fig. 3.3. Para abreviar se muestra en la fig. 3.10 el conjunto total de elementos que tendría una barra curva sometida a estas sollicitaciones. Se observa entonces que se tienen los mismos estados de esfuerzos en ambas curvaturas solo que en forma inversa.







MOMENTO	POSITIVO	NEGATIVO
ELEMENTO "A"		
ELEMENTO "B"		
ELEMENTO "C"		

FIG. 3.10

A partir de la discusión anterior para resistir los esfuerzos radiales, es necesario colocar refuerzo transversal originado por estos y, este refuerzo deberá adicionarse al refuerzo necesario para resistir el cortante actuante en el elemento curvo, o también deberá adicionarse al refuerzo necesario para resistir la torsión existente.

Como se ha dicho, si consideramos que el concreto no se agrieta, o que el refuerzo tanto longitudinal como transversal será suficiente para que el concreto no se agriete, la cuantía de refuerzos transversal estará regida por el cálculo de refuerzos correspondientes al elemento B que se muestra en la fig. 3.6.

En el apéndice A se muestran algunos cálculos y resultados obtenidos para distintas secciones rectangulares de concreto reforzado y para distintos niveles de momento flexionante actuante.

Es necesario recordar que en la práctica común de edificación es muy difícil que existan elementos de concreto reforzado sometidos exclusivamente a flexión, ya que, casi siempre la flexión se encuentra actuando simultáneamente con



el cortante por lo que, al refuerzo obtenido por efecto del esfuerzo  $\sqrt{r}$  habrá que agregarle el refuerzo necesario por cortante y en caso de que exista, del refuerzo para resistir la torsión.

Como hemos visto el refuerzo transversal del elemento curvo, es independiente del refuerzo transversal necesario por cortante o por torsión. Además, este refuerzo transversal necesario para resistir los esfuerzos radiales en elementos curvos, pueden estar sometidos a tensión o a compresión por lo que, en el primer caso se habrán de tomar en cuenta los esfuerzos que produzcan su fluencia y en el último caso el posible pandeo del mismo.

El caso en el cual el refuerzo será sometido a esfuerzos de tensión, es posible observarlo claramente a partir del elemento mostrado en las figs. 3.6 y 3.7, pero el caso en el cual el refuerzo transversal pueda pandearse; es posible visualizarlo si observamos la fig. 3.10. En realidad se tendrá un "pandeo" inducido por el aplastamiento del concreto, el cual ejerce presión sobre los estribos produciendo un combado; el cual puede llegar a ser excesivo.

Una forma de evitar lo anterior es mediante la colocación de refuerzo longitudinal que pase por la parte central de la viga acompañado de "grapas" como se muestra en la fig. 3.11.

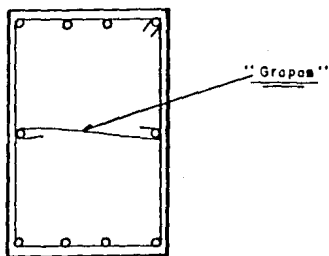


FIG. 3.11

Desde el punto de vista del concreto simple, un elemento curvo posee combinaciones de esfuerzos muy complejas, complejidad que aumenta al reforzar transversal y longitudinalmente al mismo.

Es necesario; por tanto, hacer consideraciones para el diseño adecuado de estos elementos, lo cual se hará en el siguiente capítulo.

## CAPITULO IV

### PROPUESTAS PARA EL DISEÑO

En este capítulo se pretenden alcanzar algunas aplicaciones de las teorías vistas en los dos últimos capítulos referentes a elementos Curvos. Se intentará llegar a resultados que faciliten los criterios de diseño de los ingenieros proyectistas para decidir sin profundizar en la teoría, cuándo es necesario hacer un diseño detallado de los elementos estructurales curvos sometidos a flexión. Hemos visto en el capítulo II que es muy difícil en la práctica ingenieril encontrar elementos estructurales, ya sean curvos o no, que estén sometidos exclusivamente a la acción de flexión pura. Lo más común es encontrar flexión acompañada de cortante. Esta combinación de acciones conduce a situaciones que pueden llegar a ser críticas puesto que a la tensión diagonal producida por el cortante habrá que superponerle la acción de los esfuerzos  $\sqrt{r}$ . La suma de estas dos acciones dará una sola resultante de esfuerzos la cual deberá ser resistida en primer lugar por el concreto no agrietado y posteriormente al agrietamiento del concreto, por los

estribos. En este punto comenzaremos la discusión sobre la posibilidad de trabajar con concreto agrietado; es deseable que los elementos de concreto trabajen dentro del rango no agrietado. Esto se debe principalmente a dos razones inherentes al comportamiento del concreto reforzado. La primera es que el agrietamiento del mismo está asociado a grandes deformaciones y por ende a grandes desplazamientos. La segunda es tal vez la más crítica y es que al existir agrietamiento del concreto, el refuerzo se encuentra expuesto a la humedad del medio ambiente apareciendo entonces el peligro de la corrosión del refuerzo. Es importante entonces asegurar que el concreto no se agrietará por la acción simultánea de la fuerza cortante y de la acción de  $\sqrt{r}$ .

Para lograr lo anterior un criterio bastante conservador es suponer que la contribución del concreto para resistir esfuerzos de tensión es nula. La otra opción consiste en realizar estudios paramétricos sobre la compatibilidad en deformaciones que deben tener tanto el concreto como el acero bajo la acción simultánea de flexión y cortante. Esta última opción es muy complicada aunque es más atractiva desde el punto de vista económico, pues al hacer trabajar a tensión al

concreto implica menor cuantía de refuerzo transversal. Por lo anterior consideraremos en esta tesis la primera opción que es desprestigiar por completo la contribución del concreto para resistir los esfuerzos de tensión.

Al nivel de esta tesis podemos establecer como aportaciones suficientes el poder lograr un armado tanto transversal como longitudinal de los elementos considerados como curvos y sujetos a la acción simultánea de flexión y cortante. En el apéndice B de esta tesis se muestra el diagrama de flujo y el programa escrito en Basic el cual es aplicable directamente a las calculadoras portátiles (CASIO FX-850-P). Es necesario entonces, establecer una secuencia lógica en la cual se deben revisar los elementos curvos, la secuencia descrita a continuación pretende servir de ayuda en el proceso de diseño de los elementos curvos y es

- 1) Establecer si el elemento curvo se encuentra sometido principalmente a flexión y cortante exclusivamente o tiene una fuerte contribución de carga axial.

- 2) Verificar si para la zona de mayor acción de la flexión y el cortante se tiene una curvatura con relación  $r_n/h < 20$  donde  $r_n$  es el radio de curvatura y  $h$  el peralte del elemento

curvo.

3) Si la relación  $rn/h > 20$  el elemento podrá ser considerado como recto y en caso de que  $rn/h < 20$  se deberán revisar los esfuerzos  $\sqrt{n}$  y  $\sqrt{\bullet}$  los cuales deberán ser superpuestos a los esfuerzos actuantes ocasionados por los diagramas de momentos flectores y fuerzas cortantes.

4) Al refuerzo longitudinal de diseño por flexión y al refuerzo por cortante habrá que agregarles la cantidad de refuerzo necesario por  $\sqrt{r}$  y  $\sqrt{\bullet}$ .

En este punto es importante mencionar que en ciertas situaciones específicas muy comunes, existen además de la flexión y del cortante, otras acciones que pueden ejercer una gran importancia como es el caso de la carga axial y la torsión. Los esfuerzos originados por la carga axial modificarán los armados longitudinales en tanto que los esfuerzos originados por la torsión modificarán el refuerzo transversal. Es importante tener en cuenta estas posibilidades pues el no considerarlas en el diseño puede tener efectos negativos en este.

En lo que resta de la presente tesis se harán algunos comentarios útiles para ser empleados en el diseño de

elementos curvos.

Hemos visto que los esfuerzos normales a la sección transversal de los elementos curvos se modifican sustancialmente respecto a los obtenidos en elementos rectos. Además, estos esfuerzos pueden modificarse aun más por la presencia de carga axial. Estudiando entonces la variación de los esfuerzos normales, que por efecto de la curvatura se tiene en los elementos curvos, se puede observar que para la mayoría de los casos prácticos esta variación de esfuerzos a lo largo de la sección transversal tiene la configuración de una curva, muy atenuada, o sea, casi recta. Esta observación resulta de mucha utilidad para fines de diseño pues aunque el hecho de considerar como recta a una curva muy atenuada implica un error, éste error no será de mucha importancia para fines prácticos. Por tanto si suponemos a partir de ahora que los esfuerzos normales  $\sigma$  en elementos curvos tienen una variación lineal a lo largo de la sección transversal simplificamos el problema pues de otra forma, lo que habría que hacer para mantener la exactitud de la teoría sería integrar las áreas bajo la curva de esfuerzos para poder calcular el momento flexionante actuante a compresión o

a tensión .

Hecha la simplificación mostrada en la figura 4.1 vemos que los momentos producidos por los esfuerzos normales tanto a compresión como a tensión pueden calcularse fácilmente pues en vez de una sola recta hemos tomado en cuenta dos rectas para respetar la posición del eje neutro, posición que es necesaria mantener para poder calcular los esfuerzos causados tanto a compresión como a tensión.

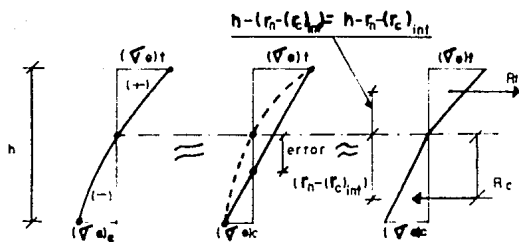


Fig. 4.1- Idealización para simplificar los cálculos en esfuerzos normales de elementos curvos.



Las resultantes de los esfuerzos a compresión y a tensión ( $R_c$  y  $R_t$ ) pueden calcularse mediante las áreas de los triángulos correspondientes, mediante las siguientes expresiones;

$$R_c = \frac{1}{2} (r_n - (r_c)_{int}) (\sqrt{\sigma})_c b$$

$$R_t = \frac{1}{2} (h - r_n + (r_c)_{int}) (\sqrt{\sigma})_t b$$

de donde  $r_n$  es la distancia del eje neutro al centro de curvatura.

$(r_c)_{int}$  es la distancia del centro de curvatura a la frontera de la barra más cercana a dicho centro.

$b$  es la base de la sección transversal y  $h$  es la altura de la sección transversal.

Estas dos resultantes  $R_c$  y  $R_t$  multiplicadas por sus respectivos brazos nos dan los momentos flexionantes que serán utilizados para el cálculo de los armados longitudinales, o sea:

$$M = R_c \left( \frac{2}{3} (r_n - (r_c)_{int}) \right) + R_t \left( \frac{2}{3} (h - r_n + (r_c)_{int}) \right)$$

Con este momento podemos obtener el refuerzo longitudinal si existiese únicamente flexión, pero en caso de que exista carga axial adicional a la flexión se sugiere modificar  $(\sqrt{\sigma})_c$  y  $(\sqrt{\sigma})_t$  y luego utilizar las expresiones propuestas

para calcular  $M$ .

Para el caso de los esfuerzos radiales  $r$ , al intentar proponer armados que resistan estos esfuerzos surgen dificultades adicionales, principalmente por los distintos efectos que produciría el sentido de la flexión actuante. Discutiendo un poco más estos efectos tenemos que para el momento  $M_1$  actuando en sentido positivo en la fig. 4.2 los esfuerzos radiales generados por la flexión, producirían en los estribos (refuerzo transversal) fenómenos de compresión en tanto que para  $M_2$  actuando en sentido positivo los estribos estarán sometidos a tensión. Para el primer caso, cuando actúa  $M_1$  el problema es complejísimo puesto que al estar el núcleo de concreto sometido a compresión surgirá el problema del confinamiento y el posible pandeo de los estribos. Para este caso se recomienda el uso de estribos rectangulares combinados con estribos romboidales, en tanto que para el 2o. caso bastará la presencia de los estribos, en cierta cuantía, para garantizar un perfecto comportamiento del elemento curvo.

Para calcular la cuantía del refuerzo transversal no es necesario integrar el área contenida dentro de la curva

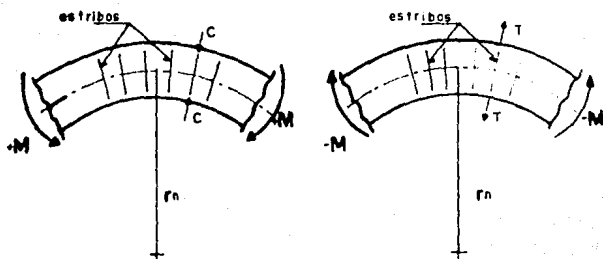


Fig. 4.2 Convención de signos para el momento flexionante.

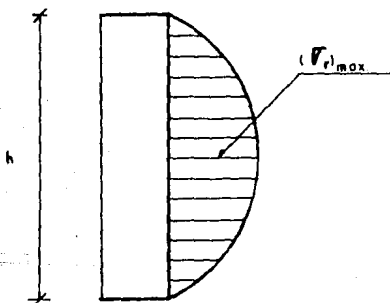


Fig. 4.3 Distribución de los esfuerzos radiales a lo largo de la sección transversal rectangular

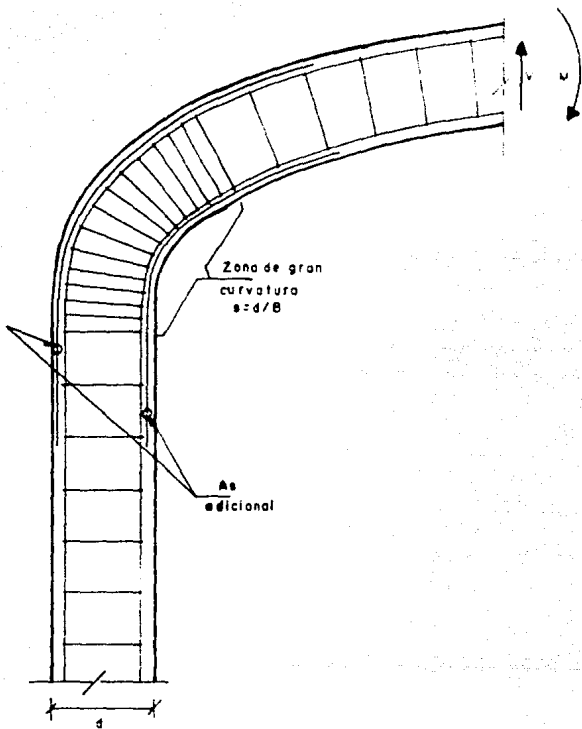
parabólica definida por los esfuerzos radiales, como se muestra en la fig. 4.3, sino simplemente a partir de  $(\sqrt{r})_{\max}$  el cual se da en la parte central de la sección, exactamente en el eje neutro. Se tomará el valor de  $(\sqrt{r})_{\max}$  y se propondrá el área necesaria por ejemplo. si  $(\sqrt{r})_{\max} = 50.00 \text{ Kg/cm}^2$  entonces esto significa que en forma uniforme se deben resistir  $50.00 \text{ Kg/cm}^2$  con acero transversal uniforme. Los estribos no pueden ponerse uniformemente, o sea, deben ir espaciados entre si una distancia que permita un colado del concreto eficiente. Por tanto S, la separación de los estribos, jugará un papel importantísimo en la siguiente operación:

Usando  $f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$  y  $\phi \text{ est} = 1.27 \text{ cm} \times 2 = 2.54 \text{ cm}$

la fórmula a emplear será:

$$A_{\text{est}} = \frac{(\sqrt{r})_{\max} (b) (s)}{2 f_y} = \frac{50 (50) (5)}{2 (4200)} = 1.45 \text{ cm}^2$$

En las figuras 4.4 y 4.5 se muestran las configuraciones típicas de armado para elementos curvos en donde se puede apreciar una mejor densidad de los estribos en la región de mayor curvatura.



**Fig. 4.4** Configuración típica del refuerzo en elementos curvos.

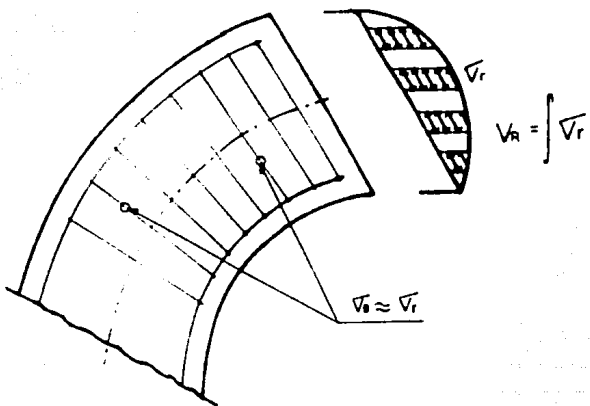


Fig 4 5 - Armado en elementos curvos.

## CAPITULO V

### CONCLUSIONES

1. En este trabajo se señalan algunas deficiencias en la formación de Ingeniero Civil puesto que algunos temas no especializados y de frecuencia común en edificación, no son vistos ni siquiera someramente, simplemente se omiten y ya. Entre estos temas omitidos en todos los programas de materias en vigor en las escuelas de Ingeniería del país, el de los elementos curvos sometidos a flexión y cortante simultáneas ocupa un lugar importante.

2. En el primer capítulo de esta tesis se muestran diversos ejemplos de aplicaciones de elementos curvos en edificación común. Solo se mencionan algunos de los muchos ejemplos en los que son ampliamente empleados los elementos curvos; es posible ampliar la lista de ejemplos hasta hacerla interminable pero no es necesario.

3. Se propone en el Capítulo 2 de esta tesis la teoría básica de la barra curva sometida a flexión y cortante de la cual se puede concluir que existen diversas modificaciones respecto a la teoría de la barra recta. Se deducen las expresiones correspondientes a esfuerzos radiales y

tangenciales y se aplican en un ejemplo numérico.

4. Se mencionan algunas limitaciones de la tesis y de la teoría de la barra curva debidos principalmente a la naturaleza esencial del concreto reforzado. Entre las limitaciones que tuvieron su origen en la naturaleza del concreto se tienen:

a) consideraremos que el concreto, es un material homogéneo e isotrópico.

b) Se desprecian las sustanciales diferencias existentes entre las propiedades físicas del concreto y del acero del refuerzo;

c) se considera que el área y la inercia de las secciones de concreto reforzado no se ven afectados por la presencia del acero de refuerzo, calculándolas como si fueran de concreto únicamente.

d) no se harán modificaciones, debido a las diferencias existentes entre los módulos de elasticidad del concreto y del acero.

e) se considera que el concreto no experimenta el fenómeno del agrietamiento: ni siquiera se toma en consideración el microagrietamiento del mismo lo cual es el origen del



comportamiento no-lineal del concreto.

5. Se discuten en el capítulo 3 los problemas intrínsecos a la naturaleza del concreto reforzado y se discuten también las consecuencias de las simplificaciones realizadas en el desarrollo de la presente tesis. Creemos que se puede lograr un buen nivel de concordancia entre teoría y práctica a pesar de las simplificaciones realizadas durante el desarrollo del presente trabajo.

6. Finalmente, en el último capítulo se dan algunas aplicaciones de la teoría de la viga curva a problemas específicos de concreto reforzado. Se señalan en este último capítulo de la tesis algunas recomendaciones necesarias para lograr que la teoría vista en el capítulo II conduzca a soluciones adecuadas. Se discuten también los armados adicionales que resultan del incremento de esfuerzos tangenciales y por la aparición de los esfuerzos radiales causados por las curvaturas de los elementos.

7. Como conclusión final y más importante del presente trabajo mencionaremos que el no considerar el efecto que la curvatura produce en las combinaciones de esfuerzos en las barras curvas, puede conducir a efectos desastrosos de

los elementos, los cuales pueden llegar al colapso total. La presencia de los esfuerzos radiales en elementos estructurales curvos de concreto reforzado originan un incremento adicional en los estribos (refuerzo transversal); refuerzo que deberá adicionarse al ya existente causado por las fuerzas cortantes existentes en los elementos sujetos simultáneamente a flexión y cortante. También, la distribución de esfuerzos normales obliga a incrementar el refuerzo longitudinal.

3. Esta tesis pretende llenar el hueco detectado en la formación actual de los Ingenieros Civiles al tratar un tema que es considerado eminentemente del área de Ingeniería Mecánica.

## CAPITULO VI

### BIBLIOGRAFIA

- 1.- Badynas, J. "Advanced Strength of Materials and Stress Analysis"; McGraw-Hill ; 1975.
  
- 2.- Baeza, J. " Comportamiento de Columnas Cortas de Concreto Reforzado "; Tesis de Maestria, DEPMI, UNAM, 1984.
  
- 3.- Park - Paulay " Comportamiento de Estructuras de Concreto Reforzado "; LIMUSA; 1974.
  
- 4.- Roark - Young " Formulas for Stress and Strain " ; McGraw - Hill; 1987.

5. - Daly -Riley      '' Experimental Stress Analysis '' ;  
McGraw - Hill; 1976.

6. - Boresi-Sidebottom      '' Advanced Mechanics of Materials '' ;  
Wiley, Fourth Ed. ; 1988.

CAPÍTULO VII

FIGURAS

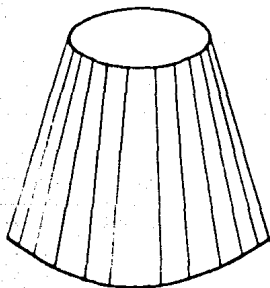


FIG. 7.1 Estructura que contiene  
elementos curvos

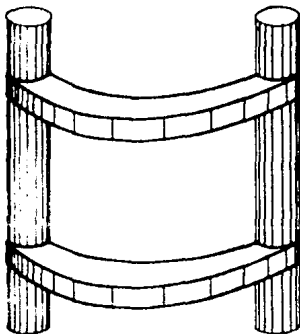


FIG. 7.2 Estructura del tipo  
viga-balcón.

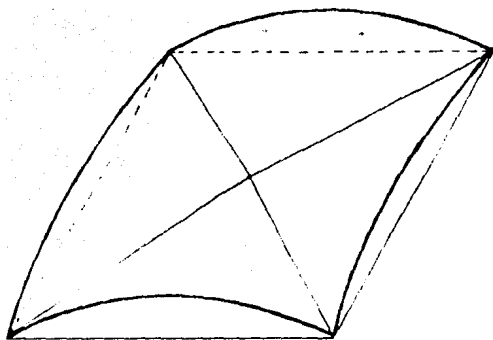


FIG. 7.3 Los principales elementos de la estructura son traveses curvos.

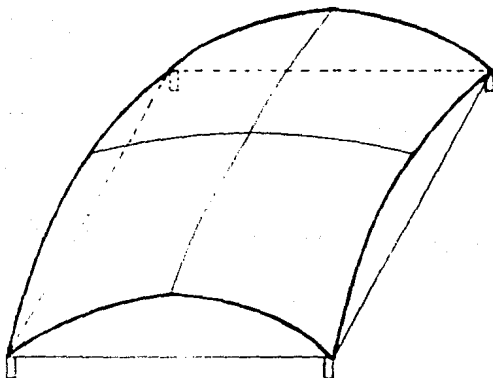


FIG. 7.4 Estructura con elementos del tipo parabólico.

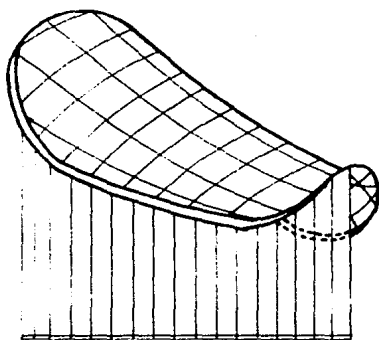


FIG 7 5 Estructura que contiene elementos curvos.

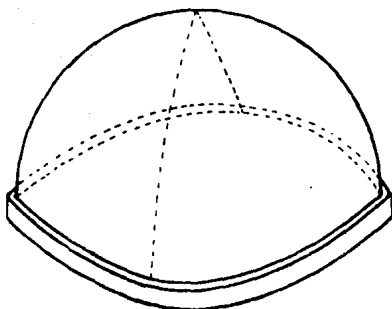


FIG 7 6 Elementos curvos del tipo circular.

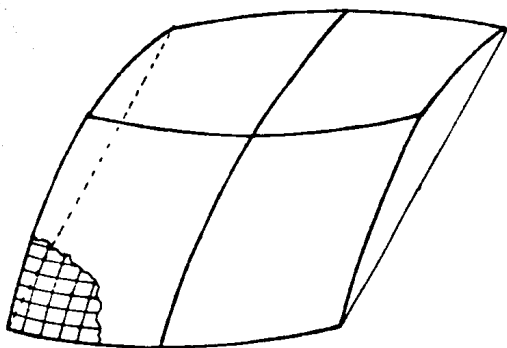


FIG. 7.7 Cubierto soportado por elementos curvos.

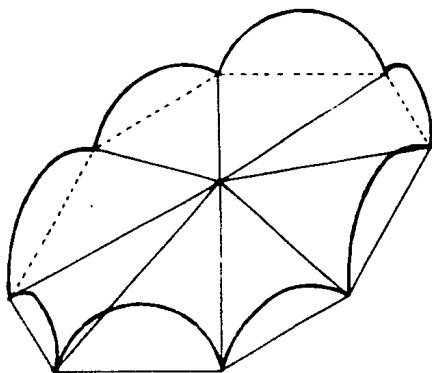


FIG. 7.8 Estructura formada por segmentos del tipo circular.



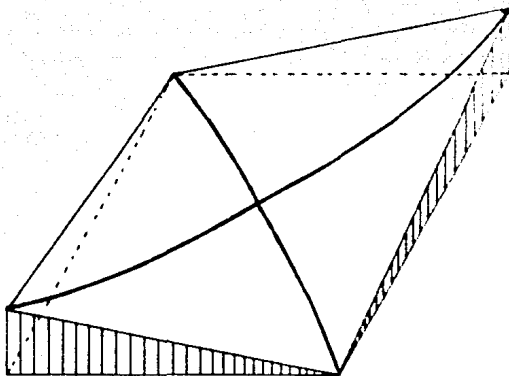


FIG. 7. 9 Combinación de elementos curvos y rectos.

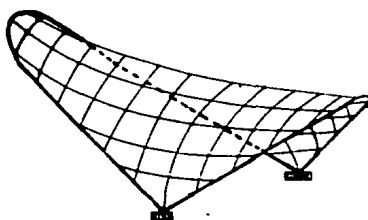
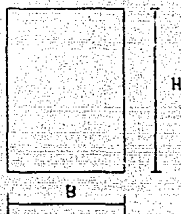


FIG. 7. 10 Estructura con elementos del tipo parabólico.

## APENDICE A

Obtención de esfuerzos radiales ( $\sqrt{r}$ ) y esfuerzos tangenciales ( $\sqrt{\theta}$ ), para vigas curvas de sección rectangular con las siguientes características:



Caso a. - Sección de  $B=20$  ;  $H=60$

a - 1 .-  $\rho = 150$  cm.

$M = - 3.0 \times 10^6$  Kg-cm.

$P_t$	$\sqrt{r}$
210	0.0
200	9.2
190	15.3
190	17.8
RN	17.9
170	16.4
160	10.7
150	0.0

$$\sqrt{\sigma_t} = 281.1 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sqrt{\sigma_c} = -224.6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\lambda = 1.68 \text{ cm}$$

a - 2 .-  $\rho = 200$  cm.

$M = -3.0 \times 10^6$  Kg-cm.

$\rho_1$	$\sqrt{r}$
260	0.0
240	9.95
230	11.51
RN	<u>11.54</u>
220	10.55
200	0.0

$$\sqrt{v}_{ot} = 273.7 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sqrt{v}_{oc} = -229.8 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\lambda = 1.31 \text{ cm.}$$

a - 3 .-  $\rho = 300$  cm

$M = -3.0 \times 10^6$  Kg-cm

$\rho_1$	$\sqrt{r}$
350	5.60
330	10.40
RN	<u>10.42</u>
220	9.40
200	6.00

$$\sqrt{v}_{ot} = 266.1 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sqrt{v}_{oc} = -235.6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\lambda = 0.91 \text{ cm}$$

a - 4 .-  $\rho = 400$  cm

$M = -3.0 \times 10^6$  Kg-cm

$\rho_1$	$\sqrt{r}$
450	4.40
430	8.15
RN	<u>8.16</u>
420	7.40
410	4.67

$$\sqrt{v}_{ot} = 262.15 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sqrt{v}_{oc} = -236.83 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\lambda = 0.698 \text{ cm}$$

a - 5 .-  $\rho = 500 \text{ cm}$

$M = - 3.0 \times 10^6 \text{ Kg-cm}$

$\rho_t$	$\sqrt{r}$
550	3.66
540	5.88
RN	<u>6.70</u>
515	5.12
505	2.11

$\sigma_t = 259.8 \text{ Kg/cm}^2$

$\sigma_c = -240.87 \text{ Kg/cm}^2$

$\lambda = 0.57 \text{ cm}$

\* Como el momento se mantiene constante, los esfuerzos radiales se reducen, conforme se incrementa el radio de curvatura ( $\rho$ ), obteniendose una minima variación en los esfuerzos tangenciales. Lo anterior se presenta en una sección constante.

Ahora duplicando el momento tenemos:

a - 6 .-  $\rho = 150 \text{ cm}$

$M = - 6 \times 10^6 \text{ Kg-cm}$

$\rho_t$	$\sqrt{r}$
200	18.43
190	30.53
RN	<u>35.73</u>
170	32.88
160	21.40

$\sigma_t = 562.2 \text{ Kg/cm}^2$

$\sigma_c = -449.3 \text{ Kg/cm}^2$

$\lambda = 1.68 \text{ cm}$

\* Comparando con el caso a-1, se observa que se duplicaron los valores debido al incremento del momento.

Caso b. - Sección de B= 30 cm; H= 90 cm

b - 1. -  $\rho = 150$  cm

M =  $-3 \times 10^6$  Kg-cm

$\rho_t$	$\sqrt{r}$
200	10.08
190	10.41
RN	<u>10.42</u>
170	7.84
160	4.66

$$\sqrt{\sigma}_t = 131.25 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sqrt{\sigma}_c = -95.92 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\lambda = 3.51 \text{ cm}$$

b - 2. -  $\rho = 200$  cm

M =  $-3 \times 10^6$  Kg-cm

$\rho_t$	$\sqrt{r}$
260	4.89
RN	<u>5.75</u>
240	5.74
230	5.30
220	4.25

$$\sqrt{\sigma}_t = 84.4 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sqrt{\sigma}_c = -65.8 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\lambda = 2.78 \text{ cm}$$

b - 3. -  $\rho = 300$  cm

M =  $-3 \times 10^6$  Kg-cm

$\rho_t$	$\sqrt{r}$
380	1.58
360	3.69
RN	<u>4.27</u>
330	3.90
310	1.81

$$\sqrt{\sigma}_t = 81.1 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sqrt{\sigma}_c = -68.1 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\lambda = 1.97 \text{ cm}$$

b - 4. -  $\rho = 400 \text{ cm}$

$M = -3 \times 10^6 \text{ Kg-cm}$

$\rho_t$	$\nabla_r$
480	1.91
460	4.43
RN	<u>5.10</u>
440	5.07
410	2.13

$$\nabla_{o_t} = 119.1 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\nabla_{o_c} = -104.0 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\lambda = 1.52 \text{ cm}$$

b - 5. -  $\rho = 500 \text{ cm}$

$M = -3 \times 10^6 \text{ Kg-cm}$

$\rho_t$	$\nabla_r$
580	1.07
570	1.89
RN	<u>2.83</u>
540	2.81
515	1.63

$$\nabla_{o_t} = 78.37 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\nabla_{o_c} = -70.18 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\lambda = 1.24 \text{ cm}$$

b - 6. -  $\rho = 300 \text{ cm}$

$M = -9 \times 10^6 \text{ Kg-cm}$

$\rho_t$	$\nabla_r$
380	4.74
360	11.06
RN	<u>12.82</u>
330	11.72
310	5.43

$$\nabla_{o_t} = 243.28 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\nabla_{o_c} = -204.23 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\lambda = 1.97 \text{ cm}$$

Caso c . - Sección de B= 40 cm; H= 120 cm

c - 1. -

$\rho = 150 \text{ cm}$

$M = -8 \times 10^6 \text{ Kg-cm}$

$P_t$	$\nabla_r$
260	2.42
230	7.67
RN	<u>9.27</u>
190	8.72
170	5.86

$$\nabla_{o_t} = 102.96 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\nabla_{o_c} = -69.55 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\lambda = 5.84 \text{ cm}$$

c - 2. -

$\rho = 200 \text{ cm}$

$M = -8 \times 10^6 \text{ Kg-cm}$

$P_t$	$\nabla_r$
300	3.92
280	6.57
RN	<u>7.82</u>
240	7.28
220	4.82

$$\nabla_{o_t} = 98.44 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\nabla_{o_c} = -71.94 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\lambda = 4.68 \text{ cm}$$

c - 3. -

$\rho = 300 \text{ cm}$

$M = -8 \times 10^6 \text{ Kg-cm}$

$P_t$	$\nabla_r$
400	3.07
380	5.08
RN	<u>5.95</u>
340	5.48
320	3.57

$$\nabla_{o_t} = 93.70 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\nabla_{o_c} = -74.86 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\lambda = 3.36 \text{ cm}$$

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

c - 4. -  $\rho = 400 \text{ cm}$

$$M = -8 \times 10^6 \text{ Kg-cm}$$

$\rho_t$	$\sqrt{r}$
500	2.52
480	4.15
RN	<u>4.81</u>
440	4.39
420	2.83

$$\sqrt{\sigma}_t = 91.23 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sqrt{\sigma}_c = -76.59 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\lambda = 2.62 \text{ cm}$$

c - 5. -  $\rho = 500 \text{ cm}$

$$M = -8 \times 10^6 \text{ Kg-cm}$$

$\rho_t$	$\sqrt{r}$
600	2.14
580	3.50
RN	<u>4.03</u>
540	3.67
520	2.35

$$\sqrt{\sigma}_t = 89.71 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sqrt{\sigma}_c = -77.73 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\lambda = 2.15 \text{ cm}$$

y duplicando el momento, se incrementan en la misma proporción los esfuerzos:

c - 6. -  $\rho = 500 \text{ cm}$

$$M = -16 \times 10^6 \text{ 179.43 Kg-cm}$$

$\rho_t$	$\sqrt{r}$
600	4.27
580	6.99
RN	<u>8.07</u>
540	7.33
520	4.70

$$\sqrt{\sigma}_t = 179.43 \text{ Kg/cm}^2$$

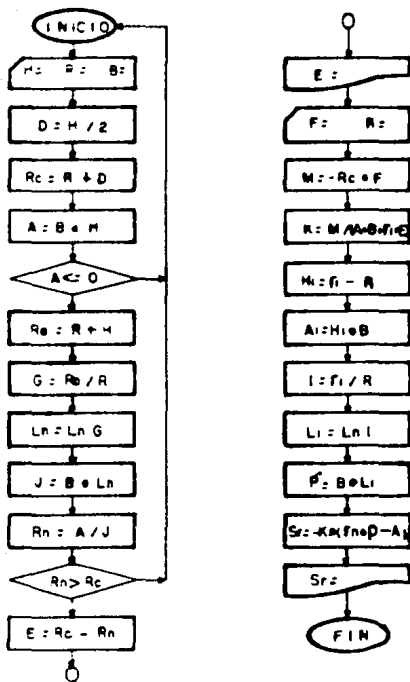
$$\sqrt{\sigma}_c = -155.45 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\lambda = 2.15 \text{ cm}$$



## APENDICE B

Diagrama de flujo y programa para el cálculo de los esfuerzos tangenciales y radiales de elementos curvos de concreto reforzado.



PROGRAMA DE CALCULO

( BASIC )

```

10 Clear
20 Print "Calculo de  $\sqrt{t_t}$ ,  $\sqrt{t_c}$ , y  $\sqrt{r}$  "
30 Input "H=";H, "B=";B, "R=";R
40 D=H/2
50 Rc=R+D
60 Ro=R+H
70 G=Ro/R
80 L=LnG
90 J=B*L
100 A=B*H
110 Rn=A/J
120 Print "Rn=";Rn
130 E=Rc-Rn
140 Print "E=";E
150 Input "M=";M
160 Y=Rn-R
170  $\sqrt{t_t} = -M*Y / (A * E * (Rn - Y))$ 
180 Print "  $\sqrt{t_t} =$  ";  $\sqrt{t_t}$ 
190 X=Rn-Ro

```

```

200  $\sqrt{t_c} = -M \times X / (A \times E \times (R_n - X))$ 
210 Print "  $\sqrt{t_c} =$ ";  $\sqrt{t_c}$ 
220 Input "  $R_1 =$ ";  $R_1$ 
230  $K = M / (A \times B \times R_0 \times E)$ 
240  $H_1 = R_1 - R$ 
250 If  $H_1 \leq 0$  Then Goto 140
260  $A_1 = H_1 \times B$ 
270  $I = R_1 / R$ 
280  $L_1 = L \times I$ 
290  $P = B \times L_1$ 
300  $\sqrt{r} = -K \times (R_n \times P - A_1)$ 
310 Print "  $\sqrt{r} =$ ";  $\sqrt{r}$ 
320 If  $R_1 \geq R$  Then Goto 140
330 End

```