

200  
29



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**COMPENDIO REOLOGICO GENERAL**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
**INGENIERO PETROLERO**

**P R E S E N T A :**

Luis Angel Ibáñez Gómez

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

MEXICO, D. F.

1989



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## CONTENIDO

---

Introducción.....	X
Notación y símbolos.....	XI
I. GENERALIDADES.....	(1)
1. Movimiento laminar, Esfuerzo cortante.....	(1)
1.1 Movimiento laminar de deslizamiento (pg.1)	
1.2 Esfuerzo cortante (pg.2)	
1.3 Ejemplo de movimientos laminares de deslizamiento. Hipótesis de la capa límite (pg.3)	
2. Deformación y velocidad de corte (shear strain and rate).....	(4)
2.1 Deformación de corte (shear strain) (pg.4)	
2.2 Velocidad de corte (shear rate) (pg.6)	
3. Ecuación reológica de estado, reogramas.....	(7)
3.1 Ecuación reológica de estado (pg.7)	
3.2 Reogramas (pg.8)	
4. Viscosidades.....	(8)
4.1 Viscosidad dinámica (pg.8)	
4.2 Viscosidad cinemática (pg.9)	
4.3 Viscosidad relativa, específica e intrínseca (pg.9)	
5. Límites del régimen laminar-Número de Reynolds.....	(10)
<b>APENDICE I</b>	
A. Esfuerzos normales en un movimiento de deslizamiento simple.....	(11)
II. VISCOELASTICIDAD LINEAL.....	(12)
1. Definiciones generales.....	(12)
1.1 Comportamiento lineal: principio de superposición de Boltzmann (pg.13)	
1.2 Funciones de deformación y recuperación (pg.14)	
1.3 Comportamiento sólido y líquido (pg.16)	
2. Modelos reológicos elementales.....	(16)
2.1 Sólido elástico perfecto (pg.16)	
2.2 Líquido viscoso newtoniano (pg.17)	
2.3 Leyes de asociación en serie y en paralelo (pg.19)	
2.4 Sólido de Kelvin-Voigt (pg.20)	
2.5 Líquido de Maxwell (pg.21)	
3. Comportamiento viscoelástico general: Modelo de Kelvin-Voigt y Maxwell generalizados.....	(23)
3.1 Modelo de Kelvin-Voigt generalizado (pg.23)	
3.2 Modelo de Maxwell generalizado (pg.26)	
4. Material viscoelástico lineal sometido a esfuerzos y deformación sinusoidales.....	(30)
5. Potencia disipada y almacenada en un experimento oscilatorio.....	(34)
<b>APENDICE II</b>	
A. Formas generales de la ecuación reológica de los materiales lineales.....	(36)
B. Deformación de tracción, de compresión o de dilatación volumétrica: Ley de Hooke.....	(38)
C. Análisis matemático de Inokuchi.....	(39)
III TIPOLOGIA DE LOS DIFERENTES MODELOS DE FLUJO.....	(42)
1. Los líquidos lineales.....	(43)
2. Los líquidos no-newtonianos (no lineales).....	(45)
2.1 Generalidades (pg.45)	

2.2 Los líquidos plásticos de Bingham o de Casson (pg.45)	
2.3 Los cuerpos fluidificantes (pg.49)	
2.4 Los líquidos espesantes (pg.54)	
2.5 Flujo generalizado (pg.55)	
3. Las deformaciones permanentes (de flujo) en los sólidos.....	(56)
3.1 Las deformaciones plásticas (pg.56)	
3.2 La deformación de los sólidos bajo la acción de esfuerzos (pg.56)	
4. Variación del comportamiento reológico a través del tiempo.....	(58)
4.1 Caso de los líquidos: la tixotropía (pg.58)	
4.2 Caso de los sólidos (pg.63)	
<b>IV. PRINCIPIO Y DESCRIPCIÓN DE LOS REOMETROS.....</b>	<b>(65)</b>
<b>IV.1 Reómetros de régimen permanente.....</b>	<b>(66)</b>
1. Reómetros de tipo Couette.....	(67)
1.1 Reómetros planos con translación (pg.67)	
1.2 Reómetros rotativos cilíndricos (pg.70)	
1.3 Reómetros rotativos con cono/disco (pg.83)	
2. Reómetros de tipo Poiseuille.....	(85)
2.1 Principios de funcionamiento (pg.85)	
2.2 Ecuaciones generales (pg.86)	
2.3 Líquido newtoniano, Ley de Poiseuille y aplicaciones (pg.88)	
2.4 Campo de utilización (pg.90)	
3. Viscosímetro con caída de bola.....	(91)
<b>IV.2 Reómetros de régimen transitorio.....</b>	<b>(92)</b>
1. Reómetros de deformación bajo esfuerzo.....	(93)
1.1 Definición (pg.93)	
1.2 Principios y ecuaciones de funcionamiento (pg.93)	
1.3 Ventajas y límites de los reómetros de deformación (pg.96)	
2. Reómetros de relajamiento.....	(97)
<b>IV.3 Reómetros dinámicos (u oscilatorios).....</b>	<b>(99)</b>
1. Los reómetros de oscilación forzada.....	(99)
1.1 El caso en que se miden fuerzas y desplazamientos (pg.99)	
1.2 Caso en el cual se miden los desplazamientos (pg.105)	
2. Reómetros de resonancia.....	(105)
3. Los aparatos con ascitación libre.....	(106)
3.1 Principios y ecuaciones (pg.106)	
3.2 Los aparatos y su utilización (pg.109)	
4. Ventajas y límites de los reómetros dinámicos.....	(109)
<b>APENDICE IV</b>	
A. Esfuerzo cortante y velocidad de corte en un reómetro con cono/disco.....	(110)
B. Reómetros del tipo Poiseuille.....	(112)
C. Deformación y esfuerzo de corte de un material lineal en un reómetro cono/disco.....	(116)
<b>V. Conclusiones.....</b>	<b>(119)</b>
<b>GLOSARIO BRITANICO ESTANDAR DE TERMINOS REOLOGICOS.....</b>	<b>(121)</b>
<b>Bibliografía.....</b>	<b>(140)</b>

## INTRODUCCION

---

Etímicamente, la reología es una disciplina que trata del flujo y la deformación de los materiales bajo la acción de fuerzas: es decir, que su esfera de estudio debería de ser más exacta. En realidad, la reología tiene objetivos más precisos: ante la impotencia de la teoría de la elasticidad y de la mecánica de fluidos (teorías elaboradas el siglo pasado), el describir y explicar las propiedades de los materiales con un comportamiento intermedio entre los sólidos elásticos perfectos y los fluidos newtonianos, se volvió necesaria la elaboración de una disciplina nueva.

Esta se constituyó independiente de otras ciencias a partir del año 1928 y se desarrolló rápidamente. Su campo de interés es cada vez más evidente por la aparición de un número creciente de sustancias con un comportamiento complejo: pastas, lodos, suspensiones, emulsiones, polímeros, etc.

Existe un cierto número de obras generales de reología que son escritas:

- Sea con un espíritu fundamentalista, que presenta principalmente el marco matemático formal de la teoría, sin analogía con la experiencia.

- Sea desde un punto de vista muy especializado, que dan prioridades a los resultados experimentales, sin acordar espacio suficiente a las bases teóricas y a los principios físicos de la experimentación.

Otros trabajos adoptan un punto de vista más equilibrado: sin embargo, su lectura necesita conocimientos relativamente profundos de matemáticas y física. Creemos que un trabajo de iniciación a la reología por su definición destinado a gente no especializada, debería de cambiar la presentación concreta y práctica tan poco formal como sea posible, en la cual la teoría sea estrictamente fundamentada con los procedimientos y aplicaciones experimentales y justificada con un análisis matemático simple.

## NOTACION Y SIMBOLOS

$a_T$	Coefficiente de Superposición Tiempo-Temperatura	$c$	Concentración
$b_T$	Coefficiente de Superposición Tiempo-Temperatura	$D$	Gradiente de velocidad
$C$	Constante de rebote de un hilo-torsión	$e$	Carga del electrón
$E$	Módulo de Young	$E_e$	Energía activa de carga
$E_{vap}$	Calor molar de vaporización	$f(t)$	Función de deformación
$g$	Aceleración de la gravedad	$g(t)$	Función de recuperación
$G$	Módulo de rigidez	$\bar{G}(\omega)$	Módulo de rigidez compleja
$G(\omega)$	Módulo de conservación	$G''(\omega)$	Módulo de pérdida
$I$	Momento de inercia	$J$	Complacencia elástica
$\bar{J}(\omega)$	Complacencia compleja	$K$	Constante de Boltzmann (Módulo de compresión uniforme)
$L_n$	Logaritmo neperiano	$Log$	Logaritmo base 10
$M$	Masa molar	$M$	Par (de fuerzas)
$M_0$	Masa molar de un monómero	$n$	Número de moléculas por unidad de volumen
$N$	Número de monómeros de una cadena macromolecular	$N_A$	Número de Avogadro
$P$	Presión	$R$	Constante real de los gases
$R$	Número de Reynolds	$\sqrt{r^2}$	Distancia cuadrática media
$S$	Entropía	$T$	Temperatura absoluta
$T_v$	Temperatura de transición vítrea	$\bar{u}$	Velocidad cuadrática media
$v_f$	Volumen libre	$Z$	Grado de polimerización
$Z$	Número de cadena intermolecular	$\delta$	Defasamiento
$\epsilon$	Deformación de corte	$\epsilon_0$	Viscosidad aparente
$\dot{\epsilon}$	Velocidad de corte	$\bar{\epsilon}$	Deformación compleja
$\zeta$	Potencial Zéta	$S_0$	Coefficiente de fricción
$\eta$	Coefficiente de viscosidad absoluta	$\eta_0$	Coefficiente de viscosidad de flujo permanente
$\eta_s$	Coefficiente de viscosidad del solvente	$\theta, \theta'$	Tiempo de retraso
$K''$	Radio de una doble capa difusa	$\mu$	Coefficiente de viscosidad dinámica

$\bar{\mu}(\omega)$  Coeficiente de viscosidad compleja

$\mu'(\omega)$  Coeficiente de viscosidad relativa

$[\mu]$  Coeficiente de viscosidad intrínseca

$\rho$  Masa volumétrica

$\tau$  Esfuerzo cortante

$\phi(t)$  Angulo de rotación

$\omega$  Pseudo-pulsación

$\omega_0$  Velocidad angular de rotación del molil

$\mu'(\omega)$  Coeficiente de viscosidad dinámica

$\mu_{sp}$  Coeficiente de viscosidad específica

$\nu$  Coeficiente de viscosidad cinemática

$\sigma$  Coeficiente de Poisson

$\tau_c$  Punto cedente

$\psi$  Angulo Cono/Disco

$\omega(r)$  Velocidad angular de rotación de la capa cilíndrica de radio  $r$

## Generalidades

### 1. Movimiento laminar, Esfuerzo cortante

#### 1.1.- Movimiento laminar de deslizamiento

Un material sometido a un sistema de fuerzas es susceptible de ser deformado, los movimientos de los diferentes puntos del material dependen naturalmente de la repartición y la intensidad de las fuerzas aplicadas. Para ciertas distribuciones de esas fuerzas (de las cuales daremos unos ejemplos) es generado un movimiento laminar de deslizamiento. Este movimiento es difícil de definir rigurosamente sin hacer uso de un formalismo matemático que sobrepasa el nivel de este trabajo. Sin embargo, es posible dar una exposición intuitiva.

Un movimiento laminar de deslizamiento es un movimiento durante el cual el material presenta una estructura de laminillas, en capas adyacentes y de espesor infinitamente pequeño; la deformación del material ocurre por un resbalamiento relativo de las diferentes capas, unas sobre otras, sin que haya una transferencia de materia de una capa a otra; es un movimiento estrictamente ordenado y estratificado que se produce sin alteración del material y sin cambio de su volumen. La forma de las capas depende naturalmente de la geometría del problema y consecuentemente de las condiciones experimentales.

## 1.2 - Esfuerzo cortante

Durante un movimiento laminar de deslizamiento, las capas se mueven relativamente entre sí. Dos capas sucesivas en contacto, se desplazan relativamente dando como resultado la aparición de fuerzas de fricción que se ejercen tangencialmente a la superficie de la capa: esas fuerzas tangenciales se denominan fuerzas cortantes.

Consideremos dos elementos de superficie infinitamente pequeños pertenecientes a dos capas consecutivas (1) y (2), de velocidades paralelas  $\vec{V}_1$  y  $\vec{V}_2$  (figura 1). Si se supone que  $|\vec{V}_1| > |\vec{V}_2|$ , es claro que la capa (1) ejerce una fuerza de corte  $d\vec{F}$ , paralela al movimiento y tendiente a acelerar la capa (2). Recíprocamente, la capa (2) ejerce sobre la capa (1) una fuerza cortante  $-d\vec{F}$  que tiende a frenarla.

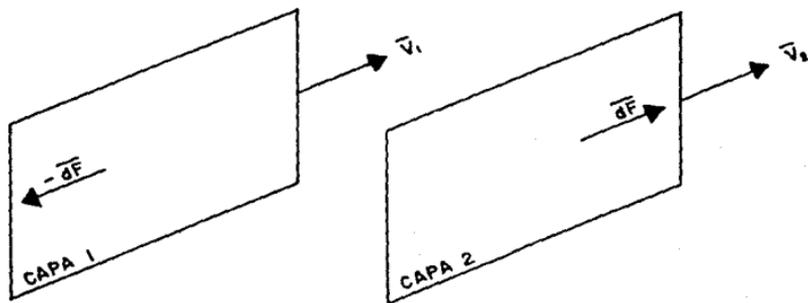


Figura (1)

Es fácil relacionar estas fuerzas cortantes con una unidad de superficie, sobre la cual se ejercen; así se define lo que conocemos como, esfuerzo cortante  $\tau$ :

$$\tau = \frac{dF}{dS} \quad (1.1)$$

donde  $dF$ , representa la proyección algebraica de  $d\vec{F}$  sobre un eje paralelo al movimiento.  $\tau$ , representa una fuerza por unidad de área, se expresa en (Pascal o Newton/metro<sup>2</sup>) en un sistema MKS, y en (dinas/cm<sup>2</sup>) en un sistema CGS.

Es claro que el esfuerzo cortante  $\tau$ , es una función definida en cada punto del material y varía en general de una capa a otra (más frecuentemente por razones de simetría,  $\tau$ , es constante en cada punto de una misma capa). El esfuerzo cortante  $\tau$ , es una magnitud dinámica fundamental de la reología.

Nota. Observemos que las fuerzas cortantes no son las únicas fuerzas presentes dentro de un material; las capas también ejercen unas sobre las otras esfuerzos normales que actúan perpendicularmente a sus áreas (figura 2).

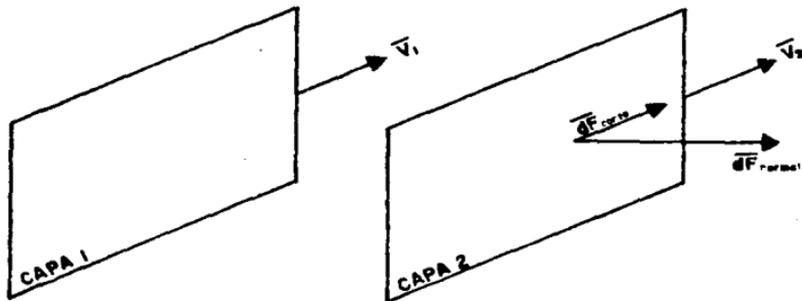


Figura (2)

Fuerzas ejercidas por la capa (1) sobre la capa (2)

En la mayoría de los casos, estos esfuerzos son fuerzas de presión que se encuentran normalmente en los fluidos. Notemos que para ciertos materiales como por ejemplo algunos polímeros, estas fuerzas normales son susceptibles de ejercerse en sentido opuesto, es decir, en tracción."

### 1.3 Ejemplos de movimientos laminares de deslizamiento. Hipótesis de la capa límite

Los movimientos laminares de deslizamiento, así como los esfuerzos cortantes que acabamos de definir, pueden ser reproducidos por los reómetros, aparatos que sirven para el estudio de las propiedades reológicas de las substancias.

Aunque el capítulo IV será consagrada a una presentación de los principales reómetros y a un análisis del procedimiento utilizado para producir movimientos laminares, nos pareció indispensable, antes de pasar a la definición de la deformación de deslizamiento, dar unos ejemplos de estos movimientos. Con este propósito expresaremos brevemente el principio de funcionamiento de una clase muy importante de reómetros: los reómetros tipo Couette.

"Despreciemos aquí la influencia de estas fuerzas sobre el comportamiento reológico; se debería saber que en el caso de deformaciones importantes, estas fuerzas normales podrán inducir efectos no lineales muy pronunciados

(efecto Weissenberg): el apéndice (I) ofrece una presentación rápida de los diferentes esfuerzos normales susceptibles de aparecer en un movimiento simple de deslizamiento.

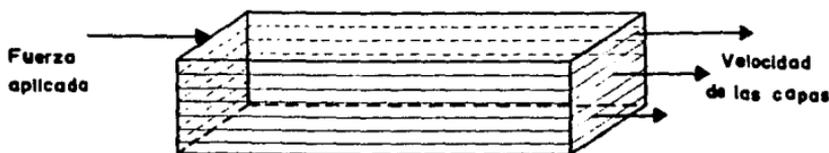


Figura (3)

En este tipo de reómetros, la sustancia es contenida entre dos superficies sólidas, una móvil y la otra inmóvil (figura 3). Se supone que la capa de material inmediatamente en contacto con la superficie sólida es influenciada por esta superficie, y se desplaza a la misma velocidad: esta es la hipótesis de la capa límite, que será siempre considerada y verificada.

En la frontera del material aparecerán dos capas límite: una dependiente de la superficie sólida móvil, y la otra inmóvil. Entre estas dos capas, se forma una infinidad de capas de diferentes velocidades, que varían continuamente en el intervalo definido por las velocidades de las capas límite.

En el contacto de los capas adyacentes, se forman esfuerzos cortantes.

## 2.- Deformación y velocidad de corte

En mecánica, es común encontrar y distinguir diferentes magnitudes físicas dentro de las que denotamos las siguientes:

- las magnitudes físicas dinámicas: fuerza, pares de fuerzas, etc., que generan movimiento.
- las magnitudes físicas cinemáticas: velocidad, aceleración, etc., que describen el movimiento de manera geométrica.

En el § (1.2) definimos la magnitud dinámica fundamental de la reología, el esfuerzo cortante  $\tau$ , que es responsable del movimiento laminar de deslizamiento

Toca ahora definir las dos magnitudes cinemáticas fundamentales, la deformación y la velocidad de corte, magnitudes que describen el movimiento del material en el espacio, a través del tiempo, independientemente de los esfuerzos que las han generado.

### 2.1 Deformación de corte $\epsilon$ (shear strain)

Para definir la deformación de corte, es necesario considerar el caso particular de un movimiento laminar que presenta la simetría plan: por ejemplo, el dispositivo experimental descrito en §(1.3) donde el material es cortado entre dos planos paralelos, uno móvil y otro inmóvil (figura 4).

Consideremos las partículas de materia que se encuentran en un tiempo dado (escogido arbitrariamente)  $t=0$  en una cierta sección recta. En un momento posterior  $t$ , cada partícula de materia

habrá recorrido la distancia  $u(x, t)$  donde  $x$ , representa la distancia que separa la partícula de materia del plano sólido inferior, y permite localizar las diferentes capas planas del material.

Definimos la deformación de corte en el caso de la simetría plana por la relación:

$$\epsilon(x, t) = \frac{du(x, t)}{dx} \quad (1.2)$$

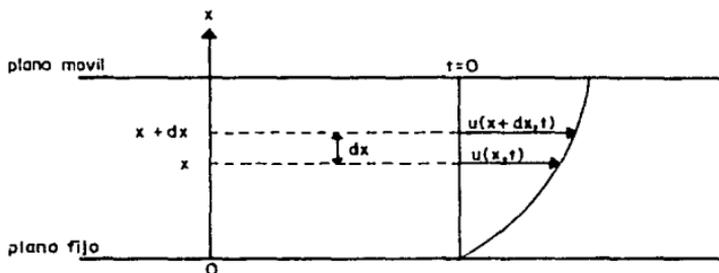


Figura (4)

Notemos que este parámetro no depende del desplazamiento  $u(x, t)$ , sino de la variación de dicho movimiento que se transmite entre las capas infinitamente vecinas: en efecto, es esta variación que caracteriza un movimiento de deslizamiento, mediante el cual las diferentes capas se desplazan relativamente entre sí.

La deformación de corte  $\epsilon(x, t)$ , así definida, es susceptible de una interpretación geométrica simple: de hecho, es claro que:

$$\epsilon(x, t) = \tau g \alpha(x, t) \quad (1.3)$$

donde  $\alpha(x, t)$  representa el ángulo que forma la tangente en  $X$  a la curva que une las extremidades de los vectores del desplazamiento  $u(x, t)$  y el eje  $x$  (Figura 5).

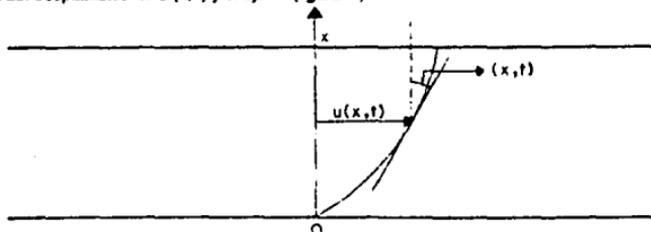


Figura (5)

Es obvio que en general  $\varepsilon(x, t)$  no depende solamente del tiempo  $t$  sino también de  $x$ , es decir de la capa considerada.

Existe un caso particularmente importante: donde la curva que une las extremidades de los vectores del desplazamiento  $u(x, t)$  es el segmento de una recta (figura 6).

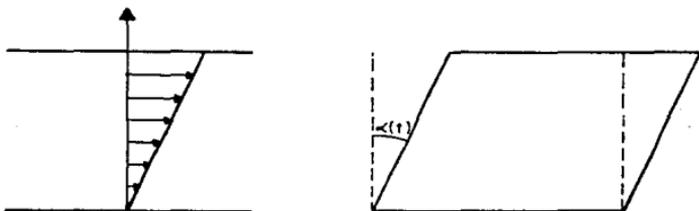


Figura 6)

Entonces  $\varepsilon = \text{tg } \alpha$ , donde  $\alpha$  representa el ángulo que forma este segmento de recta y el eje  $x$ ;  $\varepsilon$  ya no depende de la capa considerada sino únicamente del tiempo.

Si los desplazamientos  $u(x, t)$  quedan muy reducidos, se podrá escribir:

$$\varepsilon(t) = \alpha(t) \quad (1.4)$$

Notemos que contrariamente a lo que se podría suponer,  $\varepsilon$  no tiene las dimensiones de una longitud; como prueba su relación de definición (1.2), es un parámetro adimensional.

### 2.2 Velocidad de corte $\dot{\varepsilon}$ (shear rate)

Por definición, la velocidad de corte  $\dot{\varepsilon}$  es la derivada con respecto al tiempo de la deformación de corte  $\varepsilon$ ; es una velocidad de deformación:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (1.5)$$

Por consecuencia  $\dot{\varepsilon}$  tiene las dimensiones de la inversa del tiempo y se expresa en ( $\text{seg}^{-1}$ ).

Acordándose del caso de la simetría plana presentado en el punto precedente y utilizando la relación (1.2) tenemos:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d}{dt} \frac{du}{x} = \frac{d}{dx} \frac{du}{dt}$$

y dado que  $\frac{du(x, t)}{dt}$  representa la velocidad  $v(x, t)$  de la capa  $x$  en el momento  $t$ , se podrá escribir en el caso de la simetría plana como:

$$\dot{\varepsilon}(x, t) = \frac{dv(x, t)}{dx} \quad (1.6)$$

Notemos que la velocidad de corte  $\dot{\epsilon}$  es frecuentemente designada por la letra D y llamada gradiente de velocidad (lo que justifica su relación con la expresión (1.6))

Nota: Es preciso acentuar que las relaciones (1.2) y (1.6) de  $\epsilon$  y  $\dot{\epsilon}$  no se aplican al caso general y son totalmente válidas solamente en el caso de la simetría plana. Existe una definición de  $\epsilon$  y  $\dot{\epsilon}$ , que tiene un formalismo demasiado complejo para ser presentado aquí. Así que será necesario precisar las expresiones de  $\epsilon$  y  $\dot{\epsilon}$  en cada caso particular que no presente la simetría plana. Notemos que las relaciones (1.2) y (1.6) podrán ser utilizadas frecuentemente y ofrecerán una buena aproximación en un gran número de casos particulares que no presentan simetría plana.

### 3.- Ecuación reológica de estado, reogramas

#### 3.1 Ecuación reológica de estado

Cada sistema mecánico obedece a una ecuación fundamental que establece una relación entre las magnitudes dinámicas responsables del movimiento, y las magnitudes cinemáticas que describen este movimiento (ejemplo de la ley fundamental de la dinámica del punto material  $\vec{F} = m\vec{a}$ ).

De esa manera, es en la reología donde existe una relación entre la deformación de corte  $\epsilon$  y el esfuerzo cortante  $\tau$ , relación que depende de las propiedades y de la naturaleza del material. Señalaremos esta relación como:

$$\epsilon = f[\tau] \quad (1.7)$$

Que representa la ecuación reológica de estado de la sustancia. Su conocimiento profundo, dá las bases para la determinación de todas las propiedades reológicas del material y representa la meta de la reología en la determinación experimental (con la ayuda de reómetros) de la ecuación (1.7).

#### Notas:

- La ecuación reológica de estado no depende solamente de la naturaleza y las propiedades del material; depende también de la temperatura T y la presión P exteriores. Así es que será más correcto escribir:

$$\epsilon = f[\tau, P, T]$$

- Es natural que  $\epsilon$  en el tiempo t dependa del esfuerzo  $\tau$  en el mismo instante. Puede parecer más sorprendente que  $\epsilon(t)$  dependa igualmente de esfuerzos que han sido aplicados al material anteriormente al instante t. Este es el caso de un gran número de sustancias que se dice tienen recuperación. Estas sustancias se "acuerdan" de hecho, de esfuerzos a los cuales han sido sometidos en el pasado.

### 3.2 Reogramas

Las curvas que representan gráficamente la ecuación reológica de estado se denominan reogramas. Los reogramas más frecuentemente utilizados y de los cuales daremos ejemplos más adelante son:

- las gráficas  $\tau, \dot{\epsilon}$ , a presión y temperatura exterior constantes;
- las gráficas  $\tau, \dot{\epsilon}$ , a presión y temperatura exterior constantes;
- las gráficas  $\epsilon, t$ , representando la evolución de  $\epsilon$  a través del tiempo, a presión y temperatura exterior constantes, donde el esfuerzo es aplicado en el instante inicial  $t=0$  y mantenido constante (experimento de deformación).

- las gráficas  $\tau, t$ , representando la evolución de  $\tau$  a través del tiempo, a presión y temperatura exterior constantes, donde una deformación es impuesta en el instante inicial  $t=0$  y mantenida constante (experimento de relajación-recuperación).

## 4. Viscosidades.

Los coeficientes de viscosidad son magnitudes físicas que juegan un papel esencial en la reología. Su conocimiento es suficiente para caracterizar de manera casi precisa el comportamiento reológico del material. Se definirán diferentes coeficientes de viscosidad.

### 4.1 Viscosidad dinámica.

Se define por la relación

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\epsilon}} \quad (1.8)$$

se le conoce también como viscosidad aparente. Si hacemos un análisis en sus dimensiones se verá que:

$$[\mu] = [M] [L]^{-1} [T]^{-1}$$

Su unidad es el poise (P) en el sistema CGS, y el pascal por segundo (Pa · S) en el sistema MKS. Notemos que durante mucho tiempo las unidades del sistema MKS lo denominaron Poiseuille y es representado como PI.

$$1 \text{ Pa} \cdot \text{S} = 1 \text{ PI} = 10 \text{ P}$$

Queda claro que  $\mu$  es una función de la temperatura  $T$  y de la presión  $P$  exteriores, pero generalmente también al esfuerzo cortante  $\tau$ , e igualmente, desde un punto de vista equivalente, a la velocidad de corte  $\dot{\epsilon}$ .

$$\begin{aligned} \mu &= F[\tau, P, T] \\ \mu &= G[T, P, \dot{\epsilon}] \end{aligned} \quad (1.9)$$

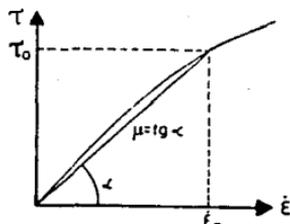


Figura (7)

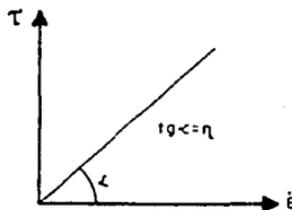


Figura (8)

Si nos referimos al reograma  $T, \dot{\epsilon}$  de la sustancia (figura 7) se observa que para un valor dado de  $T_0$  de  $\dot{\epsilon}$ ,  $\mu$  es igual a la pendiente normal que une el origen en el punto representativo considerado.

Existen ciertas sustancias para las cuales  $\mu$  no dependen del esfuerzo cortante: estos cuerpos se denominan Newtonianos. Su coeficiente de viscosidad dinámica es llamada viscosidad absoluta y se denota como  $\eta$ . La ecuación reológica de un cuerpo newtoniano (Ecuación de Newton) se escribe:

$$\dot{\epsilon} = \frac{T}{\eta} \quad (1.10)$$

donde  $\eta$  es función de la temperatura y de las presiones exteriores únicamente. El reograma que representa la ecuación de Newton es una recta con pendiente  $\eta$  (figura 8).

#### 4.2 Viscosidad cinemática

Este coeficiente está definido por la relación:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.11)$$

donde  $\rho$  es la masa volumétrica del material.

Las dimensiones de  $\nu$  son  $[L]^2 [T]^{-1}$ , su unidad es  $(cm^2 / seg)$  también llamada Stokes (St) en el sistema CGS, y en  $(m^2 / seg)$  en el sistema MKS.

#### 4.3 Viscosidad relativa, específica e intrínseca

En el estudio de las soluciones, a fin de determinar las influencias respectivas del soluto y del solvente, en el comportamiento reológico, se utilizan frecuentemente los siguientes coeficientes de viscosidad:

- Viscosidad relativa  $\mu_{rel} = \frac{\mu}{\mu_s} \quad (1.12)$

- Viscosidad específica  $\mu_{sp} = \frac{\mu - \mu_s}{\mu_s} = \mu_{rel} - 1 \quad (1.13)$

- Viscosidad intrínseca  $[\mu] = \lim_{c \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mu_{sp}}{c} \right\} \quad (1.14)$

donde  $\mu$  y  $\mu_{12}$  representan la viscosidad dinámica de la solución y del solvente, y  $c$  la concentración de la solución.  $\mu_{rel}$  y  $\mu_{sp}$  son parámetros adimensionales, y  $[\eta]$  es igual al inverso de la concentración.

## 5. Límites del régimen laminar - Numero de Reynolds

Consideremos un movimiento laminar de deslizamiento y aumentemos progresivamente la velocidad relativa del flujo de las capas en relación. Se observa que a partir de un cierto momento, el régimen laminar desaparece: las diferentes capas se juntan, se mezclan y terminan dispersándose. Se alcanza lo que se llama el régimen turbulento.

El límite entre el régimen laminar y el régimen turbulento, es caracterizado en cada situación experimental particularmente, por el valor que toma el número  $R$  denominado 'Número de Reynolds', y es definido de la siguiente manera:

$$R = \frac{V \cdot l}{\nu} \quad (1.15)$$

- $V$  representa la velocidad de flujo de la capa de material que presenta mayor velocidad.
- $l$  es la longitud característica del réomtro (por ejemplo, en caso de los réomtro de tipo Couette,  $l$  representa la distancia que separa las dos superficies sólidas.
- $\nu$  es la viscosidad cinemática del material.

Este número de Reynolds,  $R$ , presenta la propiedad de ser adimensional. En cada caso particular, el límite entre el régimen turbulento y el régimen laminar será definido por un cierto valor de  $R_0$  (que puede ser 10,000 ó 100,000 según el caso particular que se presente), de manera que:

si  $R > R_0$  régimen turbulento

si  $R < R_0$  régimen laminar

Conociendo el valor de  $R_0$ , es fácil determinar la velocidad límite de flujo  $V_{lim}$ , a fin de quedar siempre en un régimen laminar:

$$V_{lim} = \frac{R_0 \cdot \nu}{l} \quad (1.16)$$

## APENDICE I.

### A. Esfuerzos normales en un movimiento de deslizamiento simple.

Se han representado en la figura (I. A. 1) los diferentes esfuerzos que se ejercen sobre los lados de un cubo de un material sometido a un movimiento laminar de deslizamiento que se efectúa a lo largo del eje OY; las capas de material están constituidas por planos indefinidos paralelos al plano ZY.

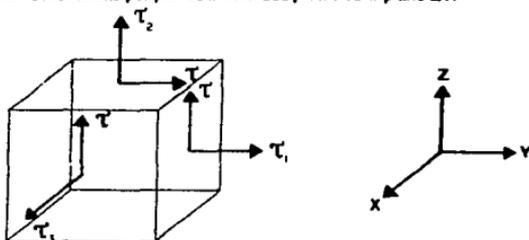


Figura (I. A. 1)

siendo  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  y  $\tau_3$  los esfuerzos normales que se ejercen sobre los lados de diferentes orientaciones del cubo. En la ausencia de un movimiento de deslizamiento los esfuerzos normales son, para un material homogéneo e isotrópico, independientes de la orientación de la superficie considerada:

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 \quad (I. A. 1)$$

La aplicación de un esfuerzo cortante  $\tau$  es susceptible de provocar una anisotropía de esfuerzos normales, que se presentan por las relaciones:

$$\begin{aligned} \tau_1 - \tau_2 &= \sigma_1(\tau) \\ \tau_2 - \tau_3 &= \sigma_2(\tau) \end{aligned} \quad (I. A. 2)$$

donde  $\sigma_1(\tau)$  y  $\sigma_2(\tau)$  son funciones del esfuerzo cortante que se anula siendo  $\tau=0$ .

Parece que para una clase muy importante de sustancias, la función  $\sigma_2(\tau)$  puede considerarse como nula (hipótesis de Weissenberg).

Esta diferencia entre los esfuerzos normales es conocido desde el punto de vista físico con el nombre 'efecto Weissenberg': en el caso de un movimiento de deslizamiento que presente la simetría cilíndrica, este efecto se manifiesta de manera similar por la tendencia del material de elevarse a pesar de la fuerza centrífuga, a lo largo del eje de rotación.

## II.

### Viscoelasticidad lineal

Todos los materiales presentan en diferentes grados, propiedades viscoelásticas: su comportamiento se parece al que exhiben los sólidos elásticos perfectos y el de los líquidos viscosos Newtonianos. El estudio de estas propiedades es entonces esencial, sin embargo, no se cuestiona tratar el problema en su totalidad dentro del marco de este trabajo. Nos limitaremos en esta parte, al estudio del comportamiento viscoelástico lineal, desde luego el más importante y el mejor descrito tanto teórica como experimentalmente.

El marco teórico presentado aquí es esencialmente fenomenológico, en la medida que reagrupa en el mismo formalismo, comportamientos cuyo origen molecular es muy diferente, o todavía poco claro y controvertido.

Notemos que éste capítulo, aunque consagrado más específicamente a los movimientos de deslizamiento simple, ofrece un marco muy general, susceptible de adaptarse más fácilmente a otros tipos de deformación.

#### 1. - Definiciones generales

Conviene desde el principio presentar un cierto número de definiciones generales comúnmente utilizables en el estudio de la viscoelasticidad lineal, como por ejemplo: comportamiento lineal, función de deformación y función de recuperación.

### 1.1 Comportamiento lineal, principio de superposición de Boltzmann

Por definición se dirá que un material tiene un comportamiento lineal o que satisface el principio de superposición de Boltzmann, si, sometido a un esfuerzo

$$\tau = \sum_i \tau_i$$

que sufre una deformación

$$\epsilon = \sum_i \epsilon_i$$

es igual a la suma de las deformaciones  $\epsilon_i$  que sufriría éste, si estuviera sometido aisladamente al esfuerzo  $\tau_i$ . Si el material posee la ecuación reológica de estado:

$$\epsilon = f(\tau) \quad (II. 1)$$

queda claro que esta propiedad de linealidad se representa matemáticamente por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} f(\tau + \tau) &= f(\tau) + f(\tau) & (II. 2) \\ f(\lambda \tau) &= \lambda f(\tau) \end{aligned}$$

donde  $\lambda$  es un número real cualquiera.

Matemáticamente las ecuaciones (II. 2) son las relaciones de definición de una función lineal. un material posee un comportamiento lineal si la función  $\epsilon = f(\tau)$  es lineal.

Por lo tanto, podría decirse que todos los materiales presentan un comportamiento lineal, con la condición de que los esfuerzos y las deformaciones a las cuales son sometidos, sean suficientemente débiles. En la práctica se admite que sí:

$$\epsilon \leq 10^{-2} \quad (II. 3)$$

casi todos los materiales pueden considerarse como lineales.

Notemos que todas las ecuaciones reológicas de materiales viscoelásticos que presentamos en este capítulo, son ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de la forma

$$a_n \frac{d^n \epsilon}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \epsilon}{dt} + a_0 = b_m \frac{d^m \tau}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{d \tau}{dt} + b_0 \tau \quad (II. 4)$$

donde los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$  son constantes.

La solución de la ecuación  $\epsilon = f(\tau)$ , es una función lineal de  $\tau$ . Los materiales descritos por las ecuaciones reológicas (II 4) presentan así, un comportamiento lineal.

Nota: El comportamiento lineal de las sustancias, se basa en la calidad de los materiales para soportar deformaciones sin modificación de su estructura microscópica: se puede considerar que el estudio de las propiedades viscoelásticas lineales permite caracterizar la estructura en reposo. Al contrario, el traspaso a un régimen no lineal (a partir de un cierto instante de deformación) es acompañada frecuentemente de una modificación estructurada.

### 1.2 Funciones de deformación y de recuperación

Las funciones de deformación y recuperación son componentes esenciales de la viscosidad lineal:

Por definición:

- La función de deformación  $f(t)$  es la deformación sufrida por un material, que ha impuesto a este último un esfuerzo de amplitud conocida a un instante inicial  $t = 0$ , esfuerzo que es mantenido constante a través del tiempo (figura 1).

- La función de recuperación  $g(t)$  es el esfuerzo que resulta de la aplicación de una deformación de amplitud conocida a un instante inicial  $t = 0$ , deformación que es mantenida constante a través del tiempo.



Figura (1)



Figura (2)

Supongamos ahora que el material se somete a partir de  $t=0$  a un esfuerzo  $\mathcal{T}(t)$  cualquiera. Utilizando el principio de superposición de Boltzmann y la definición de la función de deformación, se puede entonces mostrar que la deformación  $\varepsilon(t)$  correspondiente, es dada por la relación general:

$$\varepsilon(t) = \mathcal{T}(t) f(0) + \int_0^t f(t-t') \mathcal{T}(t') dt' \quad (II.5)$$

donde

$$f(u) = \frac{df}{du}(u)$$

Se muestra también que si el material experimenta una deformación cualquiera a partir de  $t=0$ , el esfuerzo  $\mathcal{E}(t)$  correspondiente estará dada por la relación general:

$$\mathcal{T}(t) = \varepsilon(t) g(0) + \int_0^t \dot{g}(t-t') \varepsilon(t') dt' \quad (II.6)$$

donde  $\dot{g}(u) = \frac{dg}{du}(u)$

El conocimiento de la función de deformación o de la función de recuperación de un material, permite determinar todas sus propiedades, cada una de estas funciones, por sí sola, es suficiente para describir el comportamiento viscoelástico del material, que constituye el interés fundamental de estas funciones. Es necesario obtenerlas directamente por experimentación, y dependiendo del reómetro que se use, se podrá determinar la función de deformación o la función de recuperación:

- Si se dispone de un reómetro capaz de imponer un esfuerzo constante, la deformación correspondiente  $\varepsilon(t)$  que se mide será igual a:

$$\varepsilon(t) = \mathcal{T} f(t) \quad (II.7)$$

Si además el reómetro es conectado a una instalación de registro, la gráfica de  $\varepsilon$  en función del tiempo es obtenida automáticamente, por lo tanto  $f(t)$  se deduce.

- Si se dispone de un reómetro capaz de imponer una deformación  $\varepsilon$  constante, el esfuerzo correspondiente  $\mathcal{T}(t)$  es igual a:

$$\mathcal{T}(t) = \varepsilon g(t) \quad (II.8)$$

El valor de  $\bar{T}(t)$  expone así, la función  $g(t)$ .

En este capítulo, insistiremos particularmente en la función de deformación  $f(t)$  que presenta una interpretación física más inmediata que la función  $g(t)$ .

### 1.3 Comportamiento sólido y líquido

En la reología, la frontera entre sólido y líquido frecuentemente no está bien definida. Se han adoptado las siguientes definiciones:

- Una sustancia es sólida si, sometida a un esfuerzo constante que no provoca la ruptura, tiende hacia un estado de equilibrio estático, por lo cual su deformación permanece constante.
- Una sustancia es líquida si, sometida a un esfuerzo constante, nunca alcanza un estado de equilibrio estático: su deformación aumenta infinitamente, es decir, la sustancia fluye.

## 2.- Modelos viscoelásticos elementales

El comportamiento de un cuerpo viscoelástico lineal que adopta un estado intermedio entre el comportamiento de un sólido elástico perfecto y el de un líquido viscoso newtoniano, es fácil de predecir. Es por tanto necesario acordar las propiedades de estos dos materiales ideales y sus límites, pudiendo así construir modelos de comportamientos intermedio.

### 2.1 Sólido elástico perfecto

La ecuación reológica del sólido elástico perfecto (ley de Hooke) se escribe:

$$\epsilon(t) = J \bar{T}(t) \quad (II. 9)$$

donde  $J$  es un coeficiente constante que depende de la naturaleza del sólido, llamado complacencia elástica. Notemos que se utiliza frecuentemente el coeficiente  $G = 1/J$ , llamado módulo de rigidez, módulo de deslizamiento elástico o módulo de Lamé.

$J$  es equivalente al inverso de un esfuerzo y se expresa en ( $\text{Pa}^{-1}$  o  $\text{m}^2 \cdot \text{N}^{-1}$ ) en el sistema MKS, o en ( $\text{cm}^2 \cdot \text{dynas}^{-1}$ ) en el sistema CGS;  $G$  es equivalente a un esfuerzo y se expresa en las unidades inversas.

La relación (II. 9) se aplica a un experimento de deslizamiento simple; hay que acentuar que para un sólido elástico perfecto, la deformación y el esfuerzo están siempre relacionados por una ecuación lineal (ley de Hooke) del tipo (II. 9), pero que el coeficiente de proporcionalidad depende del tipo de deformación impuesta: en el Apéndice II B, las deformaciones de tracción, de compresión, o de dilatación volumétrica

son introducidas; los coeficientes elásticos correspondientes (módulo de Young, E, el coeficiente de Poisson,  $\sigma'$ , el módulo de compresión uniforme, K) son definidos en relación al módulo de rigidez, G.

De la expresión de la ley de Hooke se obtiene la siguiente información:

- dado que se aplica un esfuerzo, instantáneamente se genera una deformación proporcional al esfuerzo; inversamente, si el esfuerzo es reducido a cero, la deformación se anula instantáneamente; se dice que la deformación elástica es instantánea y recuperable.

- Si el comportamiento es un comportamiento sólido: sometido a un esfuerzo constante, el material alcanza instantáneamente un estado de equilibrio.

- La función de deformación tiene como expresión:

$$f(t) = J \text{ para } t \geq 0 \text{ (figura 3).}$$

(II. 10)

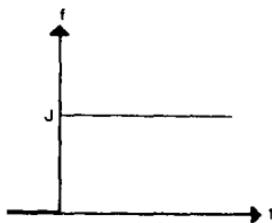


Figura (3)



Figura (4)

Un sólido elástico perfecto se simboliza en reología como un resorte de coeficiente de complacencia elástica J (figura 4).

La figura 4 representa esquemáticamente un sólido elástico perfecto de coeficiente J, sometido a un esfuerzo  $T$ .

## 2.2 Líquido viscoso newtoniano

La ecuación reológica del líquido viscoso newtoniano es la ecuación de Newton (ya presentada en el capítulo I, § 4.1, relación (I. 10):

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{\tau(t)}{\eta} \quad (\text{II. 11})$$

Tomando en cuenta las condiciones iniciales:

$$t < 0; \tau(t) = 0, \epsilon(t) = 0$$

la ecuación (II. 11) se integra inmediatamente:

$$\epsilon(t) = \frac{1}{\eta} \int_0^t \tau(t') dt' \quad (\text{II. 12})$$

Observamos que:

- el líquido viscoso newtoniano se "acuerda" de todos los esfuerzos que le han sido impuestos en el pasado: la expresión de  $\epsilon(t)$  depende de todos los valores que tenía el esfuerzo  $\tau$  de 0 a  $t$ ;
- si el esfuerzo es reducido a cero, en un cierto instante, la deformación permanece constante e igual al valor que tenía en este mismo instante; la deformación es irreparable;
- si el comportamiento es un comportamiento líquido: sometido a un esfuerzo constante  $\tau_0$ , la deformación:

$$\epsilon(t) = \frac{\tau_0}{\eta} t \quad (\text{II. 13})$$

crece con el tiempo: el material fluye indefinidamente.

La expresión de la función de deformación es obtenida reemplazando, en la ecuación (II. 13),  $\tau_0$  por la unidad (figura 5):

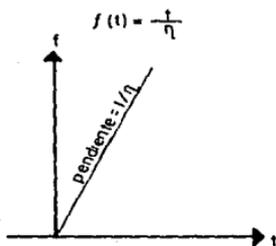


Figura (5)

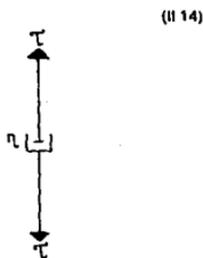


Figura (6)

El líquido viscoso newtoniano será simbolizado en la reología por un amortiguador con coeficiente de viscosidad  $\eta$  (figura 6).

Acabamos de presentar los dos comportamientos viscoelásticos lineales más elementales. El comportamiento viscoelástico lineal más general, es definido al construir un modelo formado por un sistema de resortes y amortiguadores. Se trata de un sistema análogo y simbólico: cada material será representado por una asociación, eventualmente muy compleja, de resortes y amortiguadores en serie y en paralelo; la ecuación reológica del material será obtenida utilizando las ecuaciones reológicas de los constituyentes elementales (resorte: sólido elástico perfecto; amortiguador: líquido viscoso newtoniano) y respetando las leyes de asociación en serie y en paralelo de los diferentes elementos.

Estas leyes de asociación, que presentamos en el § siguiente, han sido definidas de tal manera que todos los modelos susceptibles de ser construidos con la ayuda de resortes y amortiguadores correspondan a comportamientos viscoelásticos que se pueden observar experimentalmente.

Se deberá entender que los modelos construidos así, no constituyen sino un medio cómodo y muy utilizado de representar los diferentes comportamientos viscoelásticos lineales (por la ecuación reológica a la cual conducen); sobre todo, no deberá cometerse el error de establecer alguna relación entre la estructura real material y la estructura de su modelo representativo.

### 2.3 Leyes de asociación en serie y en paralelo

Por definición:

■ En una asociación en paralelo de la cual un caso particular es presentado en la figura 7:

- el esfuerzo impuesto al sistema es la suma de los esfuerzos impuestos a cada rama
- la deformación sufrida es idéntica en cada rama e igual a la deformación sufrida por todo el sistema.

■ En una asociación en serie de la cual un caso particular es presentado en la figura 8:

- la deformación total es la suma de las deformaciones sufridas por cada elemento.

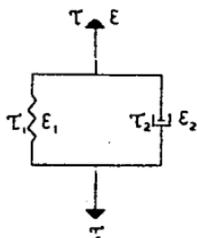


Figura (7)



Figura (8)

Vamos a utilizar ahora estas leyes de asociación relacionadas a dos modelos muy importantes sucesivamente: el sólido de Kelvin-Voigt y el líquido de Maxwell

#### 2.4 Sólido de Kelvin-Voigt

Es constituido por la asociación en paralelo de un resorte, de complacencia elástica  $J$ , y de un amortiguador de coeficiente de viscosidad  $\eta$  (figura 9).

Sean  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  las deformaciones,  $\tau_1$  y  $\tau_2$  los esfuerzos en el resorte y en el amortiguador respectivamente. Según las ecuaciones reológicas (II. 9) y (II. 11) tendremos:

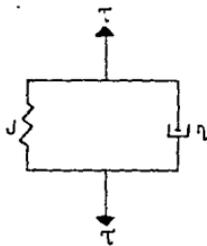


Figura (9)

así que:

$$\tau_1 = \frac{1}{J} \epsilon_1 \quad ; \quad \tau_2 = \frac{d\epsilon_2}{dt} \eta$$

Según las leyes de asociación en paralelo, la deformación y el esfuerzo totales  $\epsilon$  y  $\tau$  se escriben:

$$\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2$$

$$\tau = \tau_1 + \tau_2$$

$$\eta \frac{d\epsilon}{dt} + \frac{1}{J} \epsilon = \tau \quad (II. 15)$$

Esta es la ecuación reológica del sólido de Kelvin-Voigt

Para determinar la función de deformación  $f(t)$  de este modelo, es suficiente con reemplazar el esfuerzo  $\tau$  que aparece en la segunda parte de la ecuación (II. 15) por la unidad, y resolver la ecuación diferencial:

$$\eta \frac{df}{dt} + \frac{1}{J} f = 1 \quad (II. 16)$$

Despejando las variables, tenemos:

$$\eta J \frac{df}{J-f} = dt$$

$$\eta J \int_0^f \frac{df}{J-f} = \int_0^t dt$$

$$-\eta J \ln \frac{J-f}{J} = t$$

donde  $\ln$  designa el logaritmo neperiano

$$J - f = J e^{-t/\eta J}$$

así que:

$$f(t) = J (1 - e^{-t/\theta})$$

(II. 17)

con  $\theta = \eta J$ .

El coeficiente  $\theta = \eta J$ , que tiene la dimensión del tiempo, es llamado tiempo de retraso.

El origen de esta denominación se entiende comparando las gráficas de las funciones de deformación de un sólido elástico perfecto y de un sólido de Kelvin-Voigt con el mismo coeficiente de complacencia elástica (figura 10).

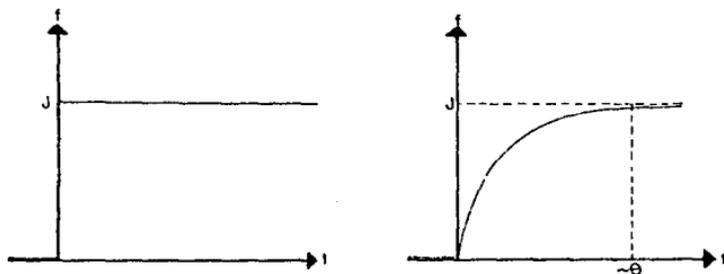


Figura (10)

La función de deformación del sólido de Kelvin-Voigt es representada por una exponencial creciente que posee una asíntota horizontal de amplitud  $J$ . Teóricamente, esta amplitud máxima  $J$  no es alcanzada sino al final de un tiempo infinito; prácticamente, tomando en cuenta las propiedades de decrecimiento rápido de la función  $e^{-t/\theta}$ , se puede considerar que esta amplitud es alcanzada al final de un tiempo del orden de  $\theta$ .

Se dedujo que  $\theta$  es el tiempo necesario para que el resorte acoplado con el amortiguador (modelo del sólido de Kelvin-Voigt) alcance la deformación que el resorte sólo (modelo del sólido elástico perfecto) alcanzaría instantáneamente.

Es obvio que el papel del amortiguador acoplado con el resorte es de frenar, de retrasar la deformación: se dice que un sólido de Kelvin-Voigt posee una elasticidad retardada, por oposición a la elasticidad instantánea del sólido elástico perfecto, también se emplea la expresión post-eléctico elástico (eléctico elástico posterior).

## 2.5 Líquido de Maxwell:

Es constituido por la asociación de un resorte de complacencia elástica  $J$  y de un amortiguador de coeficiente de viscosidad  $\eta$  (figura 11).

Sean  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  las deformaciones, y  $\tau_1$  y  $\tau_2$  los esfuerzos en el resorte y en el amortiguador respectivamente.

Según las ecuaciones (II. 9 y II. 11) tenemos:

$$\tau_1 = -\frac{1}{J} \epsilon_1$$

$$\tau_2 = \frac{d\epsilon_2}{dt} \eta$$



Figura (11)

Según las leyes de asociación en serie, la deformación y el esfuerzo totales,  $\epsilon$  y  $\tau$ , se escriben:

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

$$\tau = \tau_1 = \tau_2$$

así que:

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon}{dt} &= \frac{d\epsilon_1}{dt} + \frac{d\epsilon_2}{dt} = J \frac{d\tau}{dt} + \frac{1}{\eta} \tau \\ \frac{d\epsilon}{dt} &= J \frac{d\tau}{dt} + \frac{1}{\eta} \tau \end{aligned} \quad (\text{II. 18})$$

Esta es la evaluación reológica del líquido de Maxwell. Su solución es inmediata, tomando en cuenta las condiciones iniciales:

$$t < 0: \tau = 0, \epsilon = 0$$

$$\text{tenemos: } \int_0^t d\epsilon = J \int_0^t d\tau + \frac{1}{\eta} \int_0^t \tau(t) dt$$

$$\text{donde: } \epsilon(t) = J \tau(t) + \frac{1}{\eta} \int_0^t \tau(t) dt \quad (\text{II. 19})$$

deformación que conduce a la función de deformación:

$$f(t) = J + \frac{t}{\eta} \quad (\text{II. 20})$$

La gráfica de  $f(t)$  (figura 12) comprende dos partes:

- una variación instantánea a un instante  $t = 0$ , de amplitud  $J$ : esta describe una

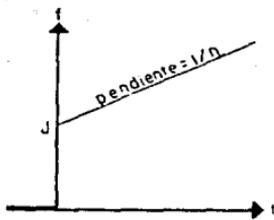


Figura (12)

Resumiendo, un líquido de Maxwell es un líquido viscoso que posee una elasticidad instantánea.

elasticidad instantánea del líquido de Maxwell (el resorte del modelo);

- esta variación instantánea es seguida por una variación lineal con una pendiente  $1/\eta$  que corresponde al comportamiento de líquido viscoso newtoniano del líquido de Maxwell (el amortiguador del modelo).

### 3. - Comportamiento viscoelástico general: modelo de Kelvin-Voigt y de Maxwell generalizados.

Todas las asociaciones de resortes y amortiguadores, tan complejas como sean, corresponden a un comportamiento viscoelástico lineal. En particular, el modelo de la figura 13 representa uno de los muchos materiales viscoelásticos.

A partir de las leyes de asociación en serie y en paralelo, se puede establecer la ecuación reológica de cada modelo y deducir las funciones de deformación y relajamiento en cada caso particular.

Esto no será necesario: de hecho se demuestra que todos los circuitos, tan complejos como sean, pueden ser representados por modelos con estructura bien definida; se distinguen el modelo de Kelvin-Voigt generalizado y el modelo de Maxwell generalizado.

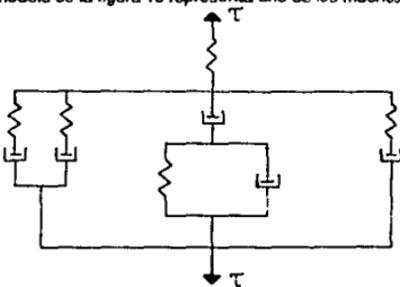


Figura (13)

#### 3.1- Modelo de Kelvin-Voigt generalizado

Esta constituido por la asociación en serie de un líquido de Maxwell y de un cierto número de sólidos de Kelvin-Voigt (figura 14).

El valor de los diferentes parámetro ( $\eta, \nu, \eta_1, J_1$ ) y el número de sólidos de Kelvin-Voigt presentes en el modelo dependen, claro está, de la naturaleza y de las propiedades del cuerpo viscoelástico lineal.

Se podría escribir la ecuación reológica de este modelo general, resolverla y deducir la función de deformación. Esta operación es inútil: de hecho se sabe que la función de flujo de una asociación en serie es igual a la suma de las funciones de deformación de los diferentes elementos; refiriéndonos a las expresiones (II. 17) y (II. 20) de las funciones de flujo del líquido de Maxwell y del sólido de Kelvin-Voigt, se

puede escribir inmediatamente la función de deformación del modelo general:

$$f(t) = J_0 + \frac{1}{\eta_0} + \sum_{i=1}^n J_i (1 - e^{-t/\theta_i})$$

(II. 21)

con  $\theta_i = \eta_i J_i$  tiempo de retraso del sólido de Kelvin-Voigt, y  $n$  = número de sólidos de Kelvin-Voigt. La gráfica de la función de deformación (figura 15) comprende tres partes:

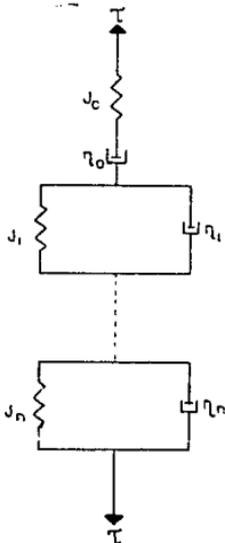


Figura (14)

- Una variación instantánea al tiempo  $t=0$ , de amplitud  $J_0$ : elasticidad instantánea (el resorte  $J_0$ ).
- Una variación bastante rápida a través del tiempo (la parte curva de la gráfica) correspondiente a la elasticidad retardada de los diferentes sólidos de Kelvin-Voigt.
- Una variación lineal con la pendiente  $1/\eta_0$  correspondiente a un régimen de flujo permanente newtoniano (el amortiguado  $\eta_0$ ).

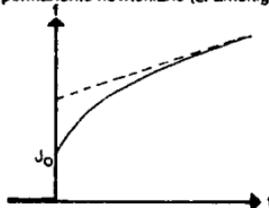


Figura (15)

Se debe notar que este modelo general y la función de deformación con la que se asocia es susceptible de describir un comportamiento sólido: para esto, es suficiente con asignar un valor infinito al coeficiente  $\eta_0$  esto es a suprimir el amortiguador  $\eta_0$  del modelo de la figura 14. La función de deformación correspondiente tiene entonces como expresión:

$$f(t) = J_0 - \sum_{i=1}^n J_i \left[ 1 - e^{-t/\theta_i} \right]$$

Su gráfica (figura 16) presenta una asíntota horizontal, característica del comportamiento sólido

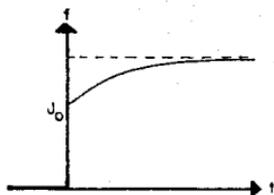


Figura (16)

**Nota:**

- Se vio que la función de deformación es accesible experimentalmente: ciertos reómetros ofrecen un registro gráfico. Mediante un análisis matemático se puede entonces deducir los valores de los diferentes parámetros  $J_0, \eta_0, J_1, \eta_1, \dots, J_n, \eta_n$  así como el número de sólidos de Kelvin-Voigt que constituyen el material. Este análisis matemático puede ser efectuado por medio del método de Inokuchi, cuyo principio es descrito a detalle en el Apéndice II. C.
- Si a partir de  $t = 0$  el material se somete a un esfuerzo de amplitud unitaria, la deformación correspondiente es descrita por la función de deformación  $f(t)$  cuya expresión está dada por la ecuación (II. 21). Supongamos ahora que a  $t = T$  el esfuerzo se reduce a cero.

Entonces es fácil de demostrar que la expresión de la deformación correspondiente llamada de "recuperación" es:

$$\epsilon_r(t) = \frac{1}{\eta_0} - \sum_{i=1}^n J_i \left[ e^{T/\theta} - 1 \right] e^{-t/\theta}$$

La figura 17 presenta una gráfica de la deformación suelta:

- cuando el esfuerzo es aplicado: deformación bajo esfuerzo ( $0 < t < T$ );
- cuando el esfuerzo es suprimido: deformación de recuperación ( $t > T$ ).

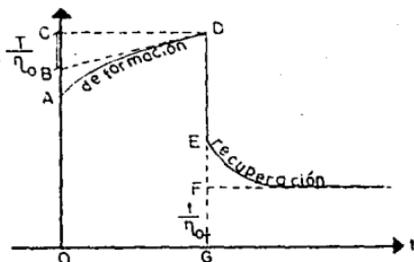
Se demuestra que la deformación de origen elástico se anula junto con la causa que la generó:

- instantáneamente para la deformación inicial:  $AO = DE = J_0$ ;
- con retraso para las deformaciones retrasadas:  $AB = EF = \sum_{i=1}^n J_i$ ;

es por esto que la deformación consecutiva al flujo viscoso newtoniano es "irrecuperable".

$$BC = FG = \frac{T}{\eta_0}$$

Figura (17)



### 3.2. Modelo de Maxwell generalizado

Todos los modelos viscoelásticos lineales pueden ser representados por modelos Kelvin-Voigt generalizados. Se debe de entender que el comportamiento más general puede ser descrito también por otros modelos equivalentes, de estructura diferente, pero que conducen a la misma ecuación reológica. Otra estructura equivalente que presenta un gran interés, es el modelo de Maxwell generalizado, siendo cada uno de estos caracterizado por un modelo de rigidez  $G_i$  y un coeficiente de viscosidad  $\eta_i$  (figura 18).

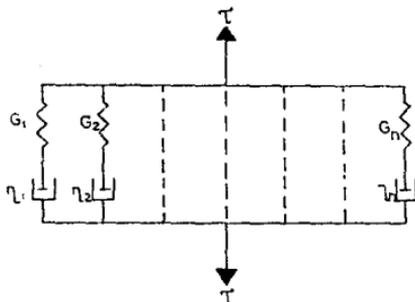


Figura (18)

Con la condición de que todos los parámetros  $G_i, \eta_i$  tengan valores finitos, el modelo precedente describe un comportamiento líquido con elasticidad instantánea y retrasada.

Si, al contrario, en una o varias ramas uno de los coeficientes  $G_i, \eta_i$  tiene un valor infinito, la rama correspondiente se reduce a un amortiguador o un resorte libre respectivamente, y el modelo

correspondiente describe otros tipos de comportamiento: líquido sin elasticidad instantánea, sólido con o sin elasticidad instantánea, etc.

Presentamos en las páginas 27 y 28 (figuras 19 a-d) los diferentes modelos que se pueden considerar en relación con los modelos de Kelvin-Voigt generalizados equivalentes; para no confundirlos, los parámetros de los dos modelos se han notado de diferente manera.

El modelo de Maxwell es adaptado particularmente al experimento de recuperación; la función de recuperación  $g(t)$  se expresa de manera muy simple, en función de los parámetros del modelo:

$$g(t) = \sum_{i=1}^n G_i e^{-t/\theta_i}$$

comportamiento líquido

$$g(t) = \sum_{i=1}^{n-1} G_i \bar{e}^{-(t/\theta_i)} + G_n \quad \text{comportamiento sólido}$$

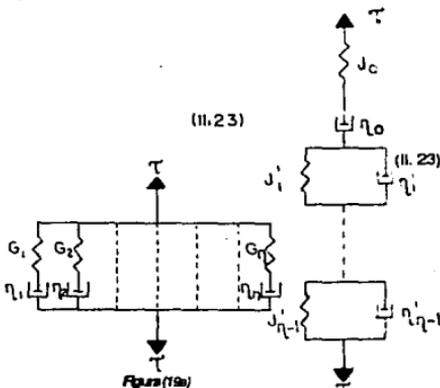
donde los coeficientes  $\theta_i = \frac{\eta_i}{G_i}$  son llamados tiempos de recuperación;  $\theta_i$  representa el tiempo necesario para que, en un experimento de recuperación, el esfuerzo en el borde de una rama  $i$  sea reducido en proporción de  $\frac{1}{e}$ . Las relaciones (II. 22), que son representados gráficamente en la figura 20, establecen que, después de un experimento de recuperación, los esfuerzos se relajan, decreciendo de manera exponencial con el tiempo hacia un valor límite, diferente de cero para un sólido, y cero para un líquido.

Puesto que cada elemento del modelo de Kelvin-Voigt es susceptible de una interpretación física muy clara, en términos de elasticidad instantánea, retrasada, o de flujo permanente newtoniano, para el modelo de Maxwell no vale lo mismo, por lo cual no es posible, en el caso general, atribuir a un elemento particular una función determinada. Es posible expresar los parámetros  $G_i, \eta_i$ , del modelo de Maxwell en función de los parámetros  $J_0, \eta_0, J_1, \eta_1$ , del modelo de Kelvin-Voigt equivalente, y reciprocamente. El cálculo, muy tardado, utiliza el método de la transformación de Laplace-Carson (método muy utilizado en la viscoelasticidad lineal y que permite transformar las ecuaciones reológicas, las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, en ecuaciones algebraicas) y no presenta ningún interés práctico en el caso general: sin embargo, puede ser interesante conocer las relaciones de correspondencia entre los dos modelos, en uno u otro caso particular: nosotros los damos como ejemplo, en caso del comportamiento líquido sin elasticidad instantánea, definido por los modelos equivalentes de la figura 21; las propiedades reológicas definidas así, son las de una solución diluida de macromoléculas lineales rígidas.

$$\eta_0 = \eta_1 + \eta_2$$

$$\eta_1' = (\eta_1 + \eta_2) \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

$$J_1' = \frac{1}{G_1} \frac{\eta_1^2}{(\eta_1 + \eta_2)^2}$$



Comportamiento líquido con elasticidad instantánea y retrasada

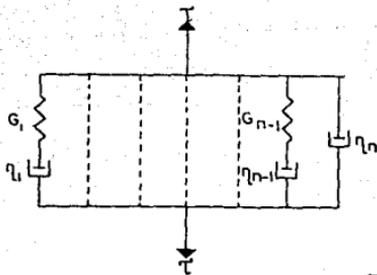


Figura (19b)

Comportamiento líquido sin elasticidad instantánea.

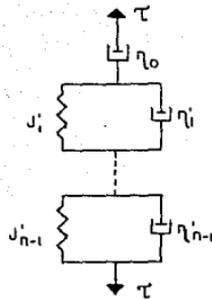


Figura (19c)

Comportamiento sólido con elasticidad instantánea y retrasada

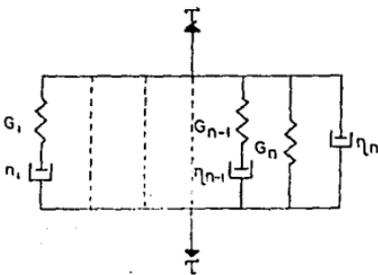
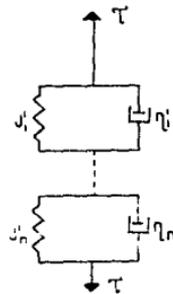


Figura (19d)

Comportamiento sólido sin elasticidad instantánea



Observemos que la primera de estas relaciones puede ser generalizada para todos los comportamientos líquidos:

$$\eta_0 = \sum \eta_i$$

donde  $\eta_0$  representa el coeficiente de viscosidad de flujo permanente (modelo de Kelvin-Voigt), y  $\sum \eta_i$  la suma de coeficientes de viscosidad de todos los amortiguadores del modelo de Maxwell asociado.

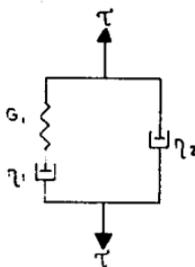
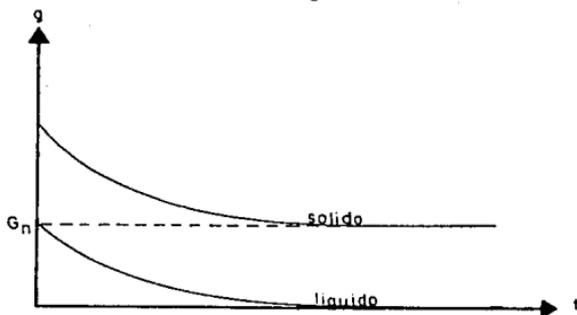


Figura (20)

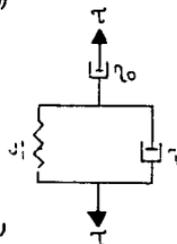


Figura (21)

Para concluir este párrafo, consagrado al comportamiento viscoelástico lineal general, acentuemos nuevamente que cada uno de los dos modelos presentados define sin ambigüedad las propiedades reológicas del material y es autosuficiente; el uso del uno o del otro modelo, depende de las condiciones experimentales.

- Con los reómetros que ofrecen directamente la función de deformación (reómetros de deformación) se aplicará de preferencia el modelo de Kelvin-Voigt que conduce a una expresión de la función de deformación particularmente simple [relación (II. 21)].

- Con los reómetros que ofrecen la función de recuperación (reómetros de recuperación) se utilizará de preferencia el modelo de Maxwell que posee una función de recuperación fácil de obtener [relación (II. 22)]. Finalmente, el principal interés de este modelo proviene de la utilización que se hace de él en el régimen sinusoidal.

#### 4.- Material viscoelástico lineal sometido a esfuerzos y deformación sinusoidales.

Además de los experimentos de deformación y de recuperación, existe en la viscoelasticidad lineal otro tipo de experimento que presenta un interés fundamental y que consiste en estudiar el material de manera dinámica, imponiéndole un esfuerzo (deformación) que varía sinusoidalmente a través del tiempo con una frecuencia  $N$ . La linealidad de las ecuaciones provoca que la deformación (esfuerzo) sea también sinusoidal y con la misma frecuencia.

Se tiene:

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \tau_0 \cos [wt + \delta] \\ \epsilon(t) &= \epsilon_0 \cos wt \end{aligned} \quad (\text{II. 25})$$

donde:

$\tau_0$ ,  $\epsilon_0$ , representan la amplitud máxima del esfuerzo y de la deformación  
 $w = 2\pi N$ , la pulsación  
 $\delta$ , defasamiento del esfuerzo con respecto a la deformación.

Para facilitar los cálculos se emplea el formalismo de los números complejos, utilizables en el tratamiento de fenómenos sinusoidales lineales; hay que hacer corresponder a las magnitudes reales  $\tau(t)$  y  $\epsilon(t)$ , con las magnitudes complejas:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(t) &= \tau_0 e^{i[wt - \delta]} \\ \bar{\epsilon}(t) &= \epsilon_0 e^{iwt} \end{aligned} \quad (\text{II. 26})$$

Las ecuaciones diferenciales lineales de la viscoelasticidad se transforman en ecuaciones algebraicas complejas que se pueden escribir de la forma:

$$\bar{T}(t) = \bar{G}(w) \bar{E}(t) \quad (II. 27)$$

$$\bar{E}(t) = \bar{J}(w) \bar{T}(t)$$

donde  $\bar{G}(w)$  y  $\bar{J}(w)$  son magnitudes complejas, funciones algebraicas de la pulsación  $w$ , pero independientes del tiempo, llamados módulo de rigidez compleja y complacencia compleja respectivamente. Sus expresiones dependen evidentemente de las propiedades del material, es decir de los valores de los parámetros del modelo representativo elegido (Maxwell o Kelvin-Voigt).

El conocimiento de una sola de estas funciones es suficiente para caracterizar completamente el material; frecuentemente usando en esto, la función que describe mejor el comportamiento es el módulo de rigidez compleja  $\bar{G}(w)$ . Como todas las magnitudes de este tipo, se puede descomponer en partes reales e imaginarias:

$$\bar{G}(w) = G'(w) + iG''(w) \quad (II. 28)$$

$G'(w)$  es llamado módulo de conservación, y  $G''(w)$ , módulo de pérdida; el origen de estas denominaciones será explicado en el § 5 de este capítulo.

Utilizando las ecuaciones reológicas (II. 9), (II. 11) y (II. 18) tenemos inmediatamente:

- Sólido elástico perfecto

$$\bar{G}(w) = \frac{\bar{T}(t)}{\bar{E}(t)} = \frac{1}{J} = G$$

así que:

$$G'(w) = G$$

(II. 29)

$$G''(w) = 0$$

- Líquido viscoso newtoniano

$$G(w) = \frac{\bar{T}(t)}{\bar{E}(t)} = \eta \frac{\dot{\bar{E}}(t)}{\bar{E}(t)} = i\omega\eta$$

así que:

$$G'(w) = 0$$

(II. 30)

$$G''(w) = \eta w$$

- Líquido de Maxwell

$$G(w) = \frac{\overline{\tau}(t)}{\overline{\epsilon}(t)} = \frac{iw}{\frac{1}{n} + i\frac{w}{G}} = \frac{iwn}{1 + iw\frac{n}{G}}$$

introduciendo el tiempo de relajamiento  $\theta = \frac{n}{G}$  del líquido de Maxwell:

$$\overline{G}(w) = \frac{w^2 n\theta + iw n}{1 + w^2 \theta^2}$$

así que:

$$G'(w) = G \frac{w^2 \theta^2}{1 + w^2 \theta^2} \quad (II. 31)$$

$$G''(w) = G \frac{w \theta}{1 + w^2 \theta^2}$$

Tomando en cuenta las leyes de asociación, es necesario aclarar que el módulo de rigidez compleja de una asociación en paralelo es la suma de los módulos de cada rama; así que la expresión  $\overline{G}(w)$  para un modelo de Maxwell generalizado constituido por  $n$  líquidos de Maxwell en paralelo, se escribe simplemente como  $w$ :

$$\overline{G}(w) = G'(w) + iG''(w)$$

$$G'(w) = \sum_{i=1}^n G_i \frac{w^2 \theta_i^2}{1 + w^2 \theta_i^2} \quad (II. 32)$$

$$G''(w) = \sum_{i=1}^n G_i \frac{w \theta_i}{1 + w^2 \theta_i^2}$$

donde  $\theta = \frac{n}{G_i}$  representa los diferentes tiempos de recuperación del modelo.

Notemos que el empleo del modelo de Kelvin-Voigt generalizado conducirá a expresiones de  $\overline{G}(w)$  mucho más complicadas y que por esta razón, prácticamente nunca se utiliza en el régimen dinámico.

Otra magnitud compleja utilizada frecuentemente es la viscosidad compleja, definida por la relación:

$$\overline{\mu}(w) = \frac{\overline{\tau}(t)}{\overline{\dot{\epsilon}}(t)} \quad (II. 33)$$

así que:

$$\overline{\mu}(w) = -\frac{i}{w} \frac{\overline{\tau}(\theta)}{\overline{\dot{\epsilon}}(\theta)} = -i \frac{\overline{G}(w)}{w} \quad (II. 34)$$

Introduciendo las partes reales e imaginarias de  $\bar{\mu}(w)$ :

$$\bar{\mu}(w) = \mu'(w) - i\mu''(w) \quad (II. 35)$$

tenemos:

$$\mu'(w) = \frac{G''(w)}{w} \quad (II. 36)$$

$$\mu''(w) = \frac{G'(w)}{w}$$

La parte real  $\mu'(w)$  es llamada frecuentemente, viscosidad dinámica (no se confunda con la viscosidad dinámica en régimen permanente).

Para caracterizar completamente el comportamiento viscoelástico lineal en régimen oscilatorio, numerosos autores utilizan el módulo de conservación  $G'(w)$  y la viscosidad dinámica  $\mu'(w)$ ; tenemos, según las ecuaciones (II. 32) y (II. 36):

$$G'(w) = \sum_{i=1}^n G_i \frac{w^2 \theta_i^2}{1 + w^2 \theta_i^2} \quad (II. 37)$$

$$\mu'(w) = \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{1 + w^2 \theta_i^2}$$

Las relaciones (II. 32) y (II. 37) corresponden al modelo Maxwell estándar, que representa un comportamiento líquido con elasticidad instantánea y retrasada. Los otros tipos de comportamiento pueden ser descritos, como vemos en el § 3.2, sustituyendo en una u otra rama del modelo, un resorte libre, un amortiguador libre, etc. Es muy fácil ver en que se transforma entonces las relaciones (II. 37);

- Líquidos sin elasticidad instantánea (figura 19b)

$$G'(w) = \sum_{i=1}^{n-1} G_i \frac{w^2 \theta_i^2}{1 + w^2 \theta_i^2} \quad (II. 38)$$

$$\mu'(w) = \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i \frac{1}{1 + w^2 \theta_i^2} + \eta_n$$

- Sólido con elasticidad instantánea y retrasada (figura 19c)

$$G'(w) = \sum_{i=1}^{n-1} G_i \frac{w^2 \theta_i^2}{1 + w^2 \theta_i^2} + G_n \quad (II. 39)$$

$$\mu'(w) = \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i \frac{1}{1 + w^2 \theta_i^2}$$

- Sólido sin elasticidad instantánea (figura 19 d).

$$G'(w) = \sum_{i=1}^{n-1} G_i \frac{w^2 \Theta_i^2}{1 + w^2 \Theta_i^2} + G_n$$

$$\mu'(w) = \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i \frac{1}{1 + w^2 \Theta_i^2} + \eta_n$$
(II. 40)

Los reómetros dinámicos u oscilatorios, cuya presentación se hará en el Capítulo IV, permiten realizar los experimentos de deformación sinusoidal: las mediciones efectuadas informan sobre las amplitudes máximas  $\tau_{00}$ ,  $\epsilon_0$  de los esfuerzos y deformaciones, así como sobre el desfase  $\delta$ ; estos, permiten la determinación de  $G'(w)$  y  $G''(w)$  o  $\mu'(w)$  por la aplicación de las relaciones (II. 27) y (II. 28) que se pueden escribir también como:

$$\sqrt{G''(w) + G'(w)} = \frac{\tau_{00}}{\epsilon_0}$$

$$\frac{G''(w)}{G'(w)} = \tan \delta$$
(II. 41)

Haciendo variar la pulsación  $w$  es posible determinar los diferentes parámetros del modelo de Maxwell.

Es interesante estudiar la respuesta del material cuando la frecuencia impuesta es muy alta o muy baja; se constata en particular que, para un comportamiento líquido, la parte imaginaria  $\mu''(w)$  de la viscosidad compleja tiende hacia cero; lo que provoca que la viscosidad compleja se reduzca en su parte real  $\mu'$ , pudiendo ser interpretado realmente como el coeficiente de viscosidad aparente habitual del material. Además, notamos que el régimen oscilatorio con frecuencia cero coincide, para un líquido, con un régimen de flujo permanente; de hecho se verifica, utilizando las relaciones (II. 37), (II. 38) y (II. 24), que:

$$\mu'(w=0) = \sum \eta_i = \eta_0$$
(II. 42)

### 5.- Potencia disipada y almacenada en un experimento oscilatorio

Durante la deformación, el esfuerzo exterior aplicado pone en juego una cierta potencia mecánica cuya expresión, por la unidad de volumen del material es dada por:

$$P = \tau \cdot \dot{\epsilon}$$
(II. 43)

Veremos que la energía suministrada así por el ambiente exterior, se puede descomponer en dos partes:

- una energía almacenada en el material bajo la forma de energía potencial elástica, y que puede ser

recuperada después de regresar al estado inicial;

- una energía disipada por las fricciones viscosas.

El análisis que presentamos se limita al caso de las deformaciones sinusoidales; aún cuando se puede extender sin dificultad a los experimentos de deformación y de recuperación. Utilizando las relaciones (II. 25) tendremos como expresión de la potencia suministrada a la unidad de volumen del material:

$$P(t) = -T_0 \epsilon_0 \omega \cos [wt + \delta] \sin wt \\ = -T_0 \epsilon_0 \omega \cos wt \sin wt \cos \delta + T_0 \epsilon_0 \omega \sin^2 wt \sin \delta$$

Las relaciones (II. 41) permiten escribir:

$$P(t) = -\frac{w \xi_1^2}{2} G'(w) \sin 2wt + w \xi_2^2 G''(w) \sin^2 wt \quad (\text{II. 44})$$

Si interesa la potencia promedio  $\bar{P}$  suministrada a través de un cuarto de período ( $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega}$ ), tenemos:

$$\bar{P} = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} P(t) dt \\ = \bar{P}_e + \bar{P}_d \quad (\text{II. 45})$$

Con:

$$\bar{P}_e = -\frac{w \xi_1^2}{11} G'(w)$$

$$\bar{P}_d = \frac{w \xi_2^2}{2} G''(w)$$

$|\bar{P}_e|$  representa la potencia elástica promedio almacenada en los resortes del modelo durante un cuarto de ciclo, después restituída durante el cuarto de ciclo siguiente y así sucesivamente (fases sucesivas de extensión y de compresión de los resortes): se verifica de hecho que  $\bar{P}_e$  cambia el signo cada cuarto de período, así que la potencia elástica promedio almacenada durante un ciclo es cero.

$\bar{P}_d$  es la potencia promedio disipada en los amortiguadores del modelo, debido a las fricciones viscosas, y que se transforma enteramente en energía calorífica: es siempre positiva, en cualquier cuarto de ciclo considerado. Si se relaciona con un ciclo entero, la potencia promedio suministrada por el exterior es igual precisamente a  $\bar{P}_d$ : es la energía necesaria para mantener un movimiento que tiende a amortiguarse.

Si nos referimos a las expresiones (II. 45), vemos que  $G'(w)$  y  $G''(w)$  representan en cierta manera una "medida" de energías almacenadas (módulo de conservación) y disipadas (módulo de pérdida). Por fin

notemos que según las relaciones (II. 45):

$$\tan \delta = \frac{G''(\omega)}{G'(\omega)} = \frac{\bar{F}_1}{|\bar{F}_e|} \quad (\text{II. 46})$$

La tangente de desfaseamiento  $\delta$  entre la deformación y esfuerzo, es proporcional al cociente de la potencia elástica entre la potencia disipada y almacenada;  $\tan \delta$  es llamada tangente de pérdida.

## APENDICE II

### A. Formas generales de la ecuación reológica de los materiales lineales

Sea un material lineal, aquel que obedece a los principios de superposición de Boltzmann, y que su ecuación reológica de estado  $\xi = f(\tau)$  satisface las relaciones:

$$f(\tau_1 + \tau_2) = f(\tau_1) + f(\tau_2) \quad (\text{II. A. 1})$$

$$f(\lambda \tau) = \lambda f(\tau)$$

Supongamos que el material se somete, a partir de un instante  $t = 0$ , a un esfuerzo  $\tau(t)$  como se muestra en la gráfica (figura II. A. 1).

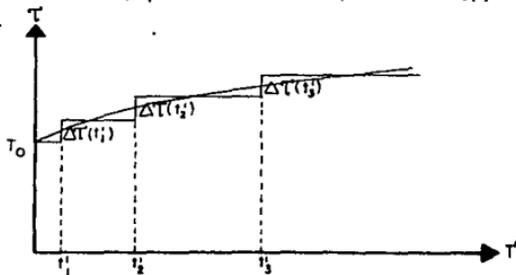


Figura II. A. 1

$\tau(t)$  se puede descomponer siempre en una serie de funciones de amplitudes infinitesimales  $\Delta$

Tomando en cuenta la definición de la función de deformación  $f(t)$ , y las relaciones (II. A. 1), tenemos:

$$\xi(t) = \tau_0 f(t) + \Delta\tau(t_1) f(t - t_1) + \Delta\tau(t_2) f(t - t_2) + \dots$$

Si hacemos que  $\Delta\tau(t)$  tienda hacia cero, de manera que la descomposición de la gráfica escalonada tienda hacia la función  $\tau(t)$  real, se obtiene:

$$\epsilon(t) = \tau_0 f(t) - \int_0^t f(t-t') \dot{\tau}(t') dt'$$

Introduciendo la derivada de  $\tau(t')$  con relación a  $t'$ :

$$\dot{\tau}(t') \equiv \frac{d\tau(t')}{dt'}$$

tenemos:

$$\epsilon(t) = \tau_0 f(t) - \int_0^t f(t-t') \dot{\tau}(t') dt' \quad (\text{II. A. 2})$$

ecuación que se puede escribir después de una integración por partes, como:

$$\epsilon(t) = f(0) \tau(t) + \int_0^t \dot{f}(t-t') \tau(t') dt' \quad (\text{II. A. 3})$$

donde:

$$\dot{f}(u) \equiv \frac{df(u)}{du}$$

Se demostrará también que un material lineal que sufre a partir de  $t=0$  una deformación conocida está sometido a un esfuerzo:

$$\tau(t) = \epsilon_0 g(t) - \int_0^t g(t-t') \dot{\epsilon}(t') dt' \quad (\text{II. A. 4})$$

donde:

$g(t)$ , función de relajamiento

$\epsilon_0$ , la deformación al tiempo  $t=0$

$$\dot{\epsilon}(t') \equiv \frac{d\epsilon(t')}{dt'}$$

Después de una integración por partes, la ecuación (II. A. 4) se puede escribir también:

$$\tau(t) = \epsilon(t) g(0) - \int_0^t \dot{\epsilon}(t-t') g(t') dt' \quad (\text{II. A. 5})$$

donde:

$$\dot{g}(u) \equiv \frac{dg(u)}{du}$$

## B. Deformación de tracción, de compresión o de dilatación volumétrica: ley de Hooke

Además de la deformación de deslizamiento simple, considerando en § 2.1, existen casos particulares de deformación, muy utilizados experimentalmente, para caracterizar las propiedades de ciertos materiales, en particular de los sólidos elásticos perfectos o asimilables.

### 1. "Extensión" simple (tracción o compresión)

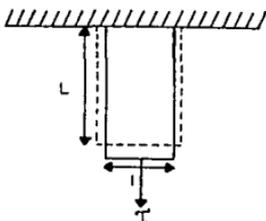


Figura II. B. 1

Es provocado por la aplicación de un esfuerzo uniaxial  $\tau$  (considerado positivo o negativo dependiendo de si se trata de una tracción o compresión); se realiza por la aparición de dos tipos de deformación (Figura II. B. 1):

- $\epsilon_1 = \frac{\Delta L}{L}$  que representa la deformación longitudinal: la variación relativa de la longitud del material, en la dirección de la aplicación del esfuerzo.

- $\epsilon_2 = \frac{\Delta l}{l}$ , que representa la deformación transversal: la variación relativa de una dimensión del material, perpendicular a la dirección del esfuerzo.

La ley de Hooke se expresa entonces por la relación:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} \tau$$

(II. B. 1)

$$\epsilon_2 = -\frac{\sigma}{E} \tau$$

donde  $E$  y  $\sigma$  representan el módulo de Young y el coeficiente de Poisson del material respectivamente;  $E$  tiene las dimensiones de un esfuerzo, mientras que  $\sigma$  es adimensional. Notemos que, para materiales elásticos con un coeficiente de Poisson  $\sigma = 0.5$ , la "extensión" se efectúa sin cambio de volumen.

### 2. Compresión o dilatación volumétrica uniforme

Se obtiene aplicando a muestra una presión uniforme, isotrope  $P$  (considerada positiva o negativa, dependiendo de si se trata de una compresión o de una dilatación); el esfuerzo isotrope correspondiente tiene como expresión:

$$\tau = -P$$

La deformación que resulta (figura II. B. 2) es definida por la variación relativa del volumen de la muestra:

$$\epsilon = \frac{\Delta V}{V}$$

La ley de Hooke se escribe:

$$\epsilon = K \tau$$

$$\frac{\Delta V}{V} = -K P$$

(II. B. 2)

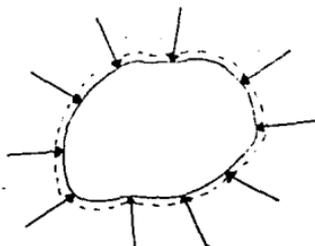


Figura II. B. 2

El coeficiente K es llamado módulo de compresión uniforme; tiene las dimensiones del inverso de un esfuerzo.

Entre los diferentes parámetros, G, E,  $\sigma$ , K, de un sólido elástico perfecto, existen relaciones; de manera general, el conocimiento de solamente dos de ellos es suficiente para determinar completamente las propiedades elásticas de la muestra; mostraremos abajo las diferentes expresiones del módulo de rigidez G; en función de E,  $\sigma$  y K:

$$G = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$$

$$G = \frac{3KE}{9K - E}$$

(II. B. 3)

$$G = \frac{3K(1 - 2\sigma)}{2(1 + \sigma)}$$

### C. Análisis matemático de Inokuchi:

Al hacer un análisis de la función de deformación del material viscoelástico más general, es necesario partir de la expresión:

$$f(t) = J_0 + \sum_{i=1}^n J_i (1 - e^{-t/\tau_i}) - \frac{1}{\eta_0} \quad (\text{II. C. 1})$$

Supongamos que disponemos de una gráfica registrada de esta función (Figura II. C. 1)

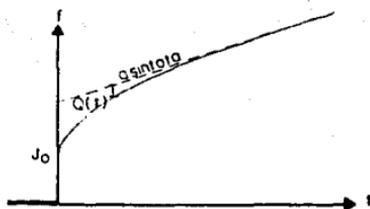


Figura II. C. 1

Si medimos  $J_0$  (ordenada al origen de la curva) y  $\eta_0$  (inversa de la pendiente de la asíntota a la curva).  
 Quedamos por determinar  $J_1, \theta_1, J_2, \theta_2, \dots$

Si  $Q(t)$  representa la distancia en el instante entre la asíntota a la curva y la curva:

$$Q(t) = \sum_i J_i e^{-t/\theta_i} \quad (\text{II. C. 2})$$

donde  $\theta_i = \eta_i J_i$  tiene un tiempo de retardo más grande que el presentado por el sólido de Kelvin-Voigt.

por lo tanto:  $Q(t) = J_i e^{-t/\theta_i}$

$$\ln Q(t) = \ln J_i - \frac{t}{\theta_i} \quad (\text{II. C. 3})$$

para un  $t$  suficientemente grande.

Si la gráfica de  $\ln Q(t)$  es trazada en función del tiempo, y marcamos los valores de  $Q(t)$  en los diferentes instantes de  $t$  (figura II. C. 1), se debe verificar consecuentemente que tiene un comportamiento asintóticamente lineal (figura II. C. 2).

Extrapolando la parte lineal hasta  $t = 0$ , se obtiene:

$\ln J_i$  : ordenada al origen.

$\theta = \eta J$  : inversa negativa de la pendiente de la asíntota.

Si  $\ln Q(t)$  es una recta, se sabe que el material viscoelástico no contiene más que un sólo sólido de Kelvin-Voigt, cuyos parámetros  $\eta$  y  $J$  se conocen.

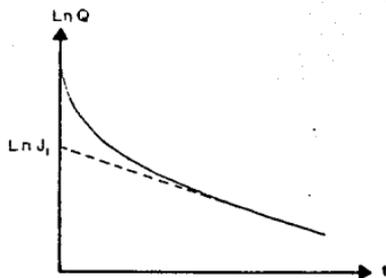


Figura II. C. 2

Si  $\text{Ln } Q(t)$  presenta una parte curvilínea (vea la figura II. C. 2), se debe seguir el siguiente razonamiento:

Sea  $\theta_2 = n_2 J_2$ , el tiempo de retraso del sólido de Kelvin-Voigt, inmediatamente inferior a  $\theta_1$  ( $\theta_1 > \theta_2 > \theta_3$ )

Entonces queda claro que:

$$Q(t) = J_1 e^{-t/\theta_1}$$

se comporta asintóticamente como  $J_2 e^{-t/\theta_2}$ ; así que:

$$\text{Ln} \{ Q(t) - J_1 e^{-t/\theta_1} \} = \text{Ln } J_2 - \frac{t}{\theta_2} \quad (\text{II. C. 4})$$

para una  $t$  suficientemente grande.

Trazando a la gráfica de  $\text{Ln} \{ Q(t) - J_1 e^{-t/\theta_1} \}$  en la función de  $t$ , se obtiene como anteriormente  $J_2$  y  $\theta_2 = n_2 J_2$  y así sucesivamente...

Procediendo la aplicación, se podrán analizar los materiales cuyos modelos tienen hasta cuatro o cinco sólidos de Kelvin-Voigt. Si el número de sólidos de Kelvin-Voigt es superior a cinco, es necesario recurrir a un análisis experimental diferente (reómetros dinámicos) y a otro análisis matemático (espectro continuo de tiempos de retraso) más complejos.

### III.

#### Tipología de los diferentes modelos de flujo

En este capítulo estableceremos una clasificación de los diferentes tipos de flujo: se trata de una descripción esencialmente cualitativa; y aún cuando veremos como son representados estos comportamientos por las relaciones matemáticas que, de poca utilidad para la comprensión teórica de los fenómenos, no tiene un interés histórico y pragmático menor.

Precisaremos que de manera constante, solo las deformaciones permanentes de flujo serán consideradas aquí, es decir, aquellos que se suponen ser totalmente irreversibles. Esto implica que los comportamientos descritos por el material, presentan un sometimiento a fuertes esfuerzos, tales que las deformaciones elásticas instantáneas y retrasadas pueden ser despreciadas en comparación con las deformaciones de flujo. Es decir, nos encontramos dentro del marco de la viscoelasticidad lineal (una excepción son aquellos líquidos newtonianos, estudiados en el § 1, que recuperan su estado lineal aún bajo fuertes esfuerzos).

Las deformaciones permanentes pueden existir tanto en los líquidos como en los sólidos. La única diferencia es que estas deformaciones sólidas no pueden ser muy grandes sin que aparezca el fenómeno de ruptura. Estudiaremos sucesivamente en este capítulo el flujo de líquidos lineales, flujos no lineales de líquidos y de sólidos, y finalmente, consideraremos el caso del flujo evolutivo a través del tiempo y el de la lixotropía.

### 1.- Los líquidos lineales

Son llamados también líquidos perfectos o líquidos de Newton, y presentan la ecuación reológica:

$$\tau = \eta \dot{\epsilon} \quad (\text{III } 1)$$

donde:

$\tau$ , esfuerzo cortante

$\dot{\epsilon}$ , derivada del tiempo con respecto a la deformación

$\eta$ , coeficiente de viscosidad.

Es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes y, consecuentemente, el líquido de Newton es lineal. Se podría imaginar que existen cuerpos líquidos cuya ecuación reológica diferencial  $\tau(\epsilon, \dot{\epsilon})$ , aunque lineal, sea diferente de la de Newton. Se demuestra fácilmente que estos no existen y que así, el líquido newtoniano es el único líquido lineal.

Demostración.

Vimos que todos los cuerpos lineales pueden ser descritos por un modelo de Kelvin-Voigt generalizado, cuya función de deformación es:

$$f(t) = J_0 + \sum_{i=1}^n J_i \left[ 1 - e^{-t/\theta_i} \right] + \frac{t}{\eta_0} \quad (\text{III } 2)$$

donde  $\theta_i = \eta_i J_i$  = tiempo de retraso del sólido  $i$  de Kelvin Voigt.

Si se conoce del cuerpo sólo un comportamiento líquido, es que los tiempos de retraso son cero o despreciables en comparación con los tiempos medidos. En estas condiciones:

$$f(t) \approx J_0 + \sum_{i=1}^n J_i + \frac{t}{\eta_0} \quad (\text{III } 3)$$

Por definición, la función de deformación representa la deformación por un esfuerzo aplicado igual a la unidad:

$$\text{si } \tau = 1, \quad \epsilon(t) = f(t)$$

Si se supone que el cuerpo es lineal; entonces, según el principio de superposición de Boltzmann:

$$\text{si } \tau = t \times \tau_0, \quad \epsilon(t) = f(t) \cdot \tau_0 = \left[ \sum_{i=0}^n J_i + \frac{t}{\eta_0} \right] \tau_0$$

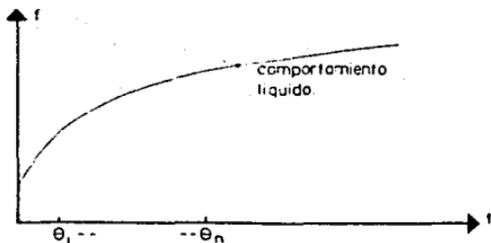


Figura (1)

Gráfica de la función de deformación asociado con un modelo de Kelvin-Voigt generalizado

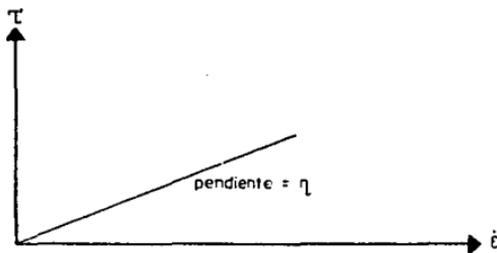


Figura (2)

Reograma de un liquido newtoniano

Derivando con relación al tiempo, obtenemos:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\tau_0}{\eta_0}$$

que es la ecuación de un líquido de Newton, de donde obtenemos la siguiente conclusión: los cuerpos líquidos lineales son necesariamente líquidos de Newton si la ecuación reológica de estado:

$$\tau = \eta \dot{\epsilon}$$

El coeficiente  $\eta$  es una "constante" llamada viscosidad absoluta del líquido. Es independiente del esfuerzo y del tiempo (depende de la temperatura y de la presión). El estudio experimental sobre los comportamientos reológicos de flujo se hace con reómetros que permiten alcanzar la medida del esfuerzo  $\tau$  y de la velocidad de corte  $\dot{\epsilon}$ . Se tiene la costumbre de trazar los reogramas  $(\tau, \dot{\epsilon})$  para representar gráficamente los comportamientos líquidos

estudiados. Según los reómetros que se utilicen, se impone  $\dot{\epsilon}$  y se mide  $\tau$ , o, al contrario, siendo aplicado  $\tau$ , se mide  $\dot{\epsilon}$ .

Así es como se encuentran, dependiendo de las condiciones experimentales, las dos formas de reogramas, ya sea  $\tau(\dot{\epsilon})$  o  $\dot{\epsilon}(\tau)$ . Existe una dualidad completa entre  $\tau$  y  $\dot{\epsilon}$ , y se pasa de un reograma del primer tipo a su correspondiente en el segundo, a través de una simetría con relación a la primera bisectriz. En este estudio escogeremos siempre la primera representación.

En estas condiciones, el reograma de un líquido newtoniano es una recta que pasa por el origen de la pendiente igual a la viscosidad (figura 2).

## Nota

No se debe confundir el reograma anterior con el reograma de tipo  $\xi(t)$  para un esfuerzo constante  $\tau_0$ , es decir, que para el mismo liquido newtoniano, la gráfica de la función,

$$\xi(t) = \frac{\tau_0}{\eta} t$$

Es también una recta pero con una pendiente diferente.

Entre los líquidos newtonianos se encuentran líquidos puros como el agua, soluciones y dispersiones muy diluidas en diluyentes newtonianos- que presenta restricciones severas a esfuerzos muy pronunciados.

## 2. - Los líquidos no-newtonianos (o no lineales)

### 2.1. Generalidades

Para estos líquidos la relación entre el esfuerzo cortante  $\tau$  y la velocidad de deformación  $\dot{\epsilon}$  varía con  $\tau_0$  o  $\dot{\epsilon}$  y con el tiempo. La dependencia del tiempo es el tema del § 4, y no lo consideramos en el presente.

En estas condiciones, no se puede definir la viscosidad absoluta. Se habla entonces de viscosidad aparente para  $\tau$  o  $\dot{\epsilon}$  dado; y se simboliza como  $\mu$ :

$$\mu = \left[ \frac{\tau}{\dot{\epsilon}} \right]_{\tau = \tau_0} \quad (\text{III } 4)$$

La elección arbitraria de  $\tau_0$  hace que un fluido no-newtoniano no sea caracterizado por su viscosidad aparente, sino por el sistema, es decir, la totalidad de sus reogramas.

### 2.2. Los líquidos plásticos de Bingham o de Casson

El reograma de un líquido de Bingham es una recta que no pasa por el origen. A partir de una determinada curva experimental, se pueden calcular dos parámetros fundamentales:

- $\tau_c$ , representa la ordenada al origen llamada punto cedente;
- $\alpha$ , la pendiente de la recta

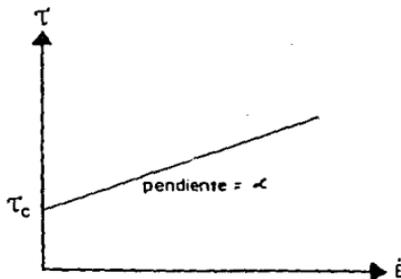


Figura (3)

Reograma de un cuerpo de Bingham

Podemos obtener entonces la ecuación reológica de estado, que representa un líquido de Bingham:

$$\tau = \tau_c + \kappa \dot{\epsilon} \quad (4.5)$$

donde  $\kappa$  es una constante llamada viscosidad plástica.

Una propiedad cualitativa que presenta el líquido de Bingham es: el cuerpo no empieza a fluir a menos que se le aplique un valor finito de esfuerzo llamado punto cedente; para esfuerzos menores no presenta deformación permanente. Una vez superado el punto cedente, se parece a un líquido newtoniano, es decir que cualquier aumento de  $\dot{\epsilon}$  provoca un aumento proporcional de  $\tau$ .

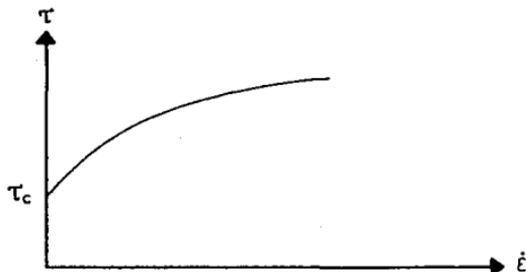


Figura ( 4 )  
Reograma de un cuerpo de Casson

Existen cuerpos que también exhiben punto cedente, pero que a partir de este no presentan un comportamiento newtoniano. Estos son llamados cuerpos de Casson. Se dice que son el opuesto al de los plásticos de Bingham. Es decir, tienen un comportamiento plástico no-ideal. Son caracterizados por rogramas del tipo de la figura 4.

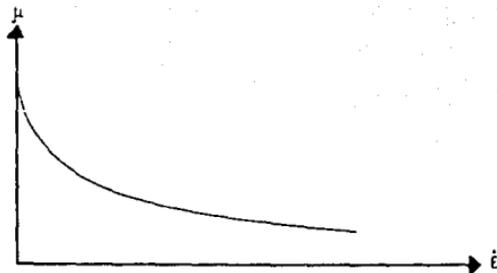


Figura (5)

Variación de la viscosidad aparente de un cuerpo plástico

Casson propuso la siguiente ecuación reológica:

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_c} + \sqrt{\beta \dot{\gamma}} \quad (\text{E.L. 6})$$

donde  $\beta$  es una constante llamada también viscosidad plástica.

Para un cuerpo elástico en general, sea el ideal o no, la viscosidad aparente decrece siempre en el deslizamiento (cuando  $\dot{\gamma}$  o  $\tau$  aumenta) (figura 5).

Se acostumbra presentar un cuerpo plástico como a un ensamble de partículas cohesionadas o floculadas, por lo tanto es el punto cedente el que corresponde a la fuerza necesaria para separarlas, vencer las fuerzas de cohesión de tipo Van der Waals, y provocar el flujo.

Un ejemplo conocido de cuerpos de Bingham es el de las pinturas de aceite, estudiadas precisamente por Bingham. Los aceites utilizados en la preparación, son líquidos viscoso newtonianos. Se podría entonces pensar que vale lo mismo para estas pinturas que son suspensiones. Los fabricantes presentaron composiciones que tienen la propiedad de aplicarse con facilidad y de no dejar huella de brocha (viscosidad inferior bajo esfuerzo), y por otro lado la de no escurrir (viscosidad alta en reposo). Estas pinturas tienen una viscosidad aparente que crece con el deslizamiento, como la de un cuerpo de Bingham. Se pueden citar también como cuerpos de Bingham los lodos, la pasta de dientes, la masa de pan, los materiales grasosos, las suspensiones de sulfato de cinc o de bario.

Los modelos analógicos comparables a los de la viscoelasticidad lineal pueden ejemplificar las deformaciones plásticas de flujo. El comportamiento, que no es lineal en sentido reológico, es susceptible de introducir en estos modelos un elemento no-lineal: el patín.

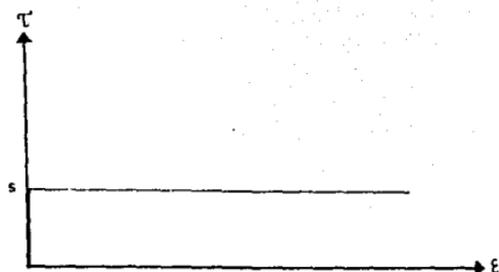


Figura (6)

Variación del esfuerzo junto con la deformación en las extremidades de un patin

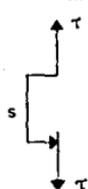


Figura (7)

Símbolo del patin

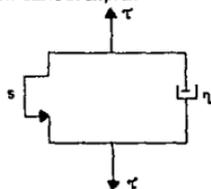


Figura (8)

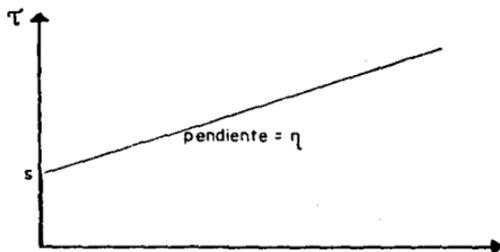


Figura (9)

Reograma  $\tau(\dot{\epsilon})$  del modelo patin-amortiguador en paralelo.

El patin es un limitador de esfuerzo. En tanto el esfuerzo que se le aplica permanece inferior a un cierto impulso,  $s$ , su deformación es cero. Más allá de este impulso, el patin resbala, el esfuerzo queda entonces constante e igual al valor de fuerza aplicada, es decir, la deformación puede ser tan grande como se quiera.

El patin simboliza la fricción sólida. La figura 6 muestra su diagrama  $\tau(\epsilon)$ .

Es conveniente observar la discontinuidad en la gráfica que está en relación con el caracter no-lineal del patin.

Consideremos el modelo representado en la figura 8.

Si aumentamos el esfuerzo  $\tau$  sin alcanzar el impulso,  $s$ , el patin se deforma, ya que en la otra rama, ocurre lo mismo según las leyes de asociación, es decir, la deformación es la misma en cada rama:  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ .

Cuando el patin resbala,  $\tau_1 = s$ , de donde tendremos:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = s + \eta \dot{\epsilon}$$

Deducimos el reograma de este modelo (figura 9).

Veremos que el cuerpo de Bingham es descrito por este modelo; el impulso del patin asociado -estando presente el punto cedente - representa la viscosidad del amortiguador que se deduce del comportamiento newtoniano del cuerpo de Bingham.

Una asociación en serie de varios de estos modelos podría representar un cuerpo de Casson.

### 2.3 Los cuerpos fluidificantes (shear softening, thinning)

Por definición, el ensamble de todos los cuerpos cuyos reogramas adopten la forma de la figura 10, se llamarán 'cuerpos fluidificantes'.

En este tipo de cuerpos no existe punto cedente, la curva pasa por el origen, igual que para los cuerpos newtonianos. La viscosidad aparente no es independiente de  $\dot{\epsilon}$  o de  $\tau$ ; es decir, disminuye junto con el deslizamiento (figura 11).

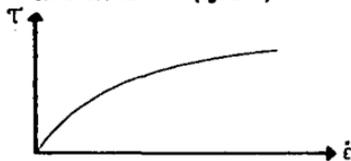


Figura (10)

Reograma de un cuerpo fluidificante

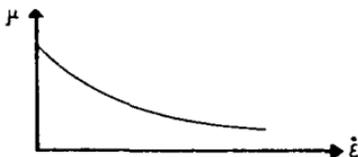


Figura (11)

Variación de la viscosidad aparente de un cuerpo fluidificante

### Ecuación reológica

No se han encontrado ecuaciones que representen exactamente el comportamiento fluidificante. Sin embargo, la ley empírica llamada 'ley de potencias' es muy utilizada y frecuentemente se aproxima a los reogramas reales, teniendo como resultados buenas optimizaciones.

Esta ley fue propuesta por primera vez por Ostwald en el año de 1925, y tiene como expresión:

$$\tau = K \dot{\epsilon}^n \quad (\text{III } 7)$$

donde 'n' es un exponente que se determina, y es siempre inferior a 1, y que representa para un comportamiento newtoniano  $n = 1$ .

K es un coeficiente que también se determina.

Cuando se hace referencia a la 'ley de potencias', se prefiere trazar los reogramas experimentales en coordenadas log-log si estos cuerpos corresponden a una ley de potencias, estos comportamientos asemejarán rectas.

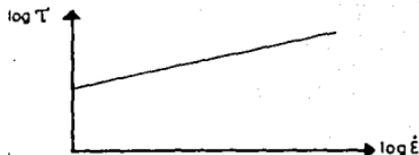


Figura (12)

Reograma de un cuerpo fluidificante en coordenadas log-log.

La ley de potencias nos permite escribir en efecto:

$$\log \tau = \log K + n \log \dot{\epsilon} \quad (\text{Eq. 8})$$

La pendiente de la recta experimental permite conocer directamente el exponente  $n$ , la ordenada al origen suministra la constante  $K$ .

Como ejemplos de buena interpretación del comportamiento fluidificante por la ley de potencias, podemos citar:

- Las soluciones de carboximetilcelulosa, en agua, en la siguiente región de velocidad de deformación:

$$10^2 \text{ s}^{-1} < \dot{\epsilon} < 10^4 \text{ s}^{-1}$$

solución de 1.5 %	$n = 0.4$	[1]
-------------------	-----------	-----

solución de 0.7%	$n = 0.5$	[2]
------------------	-----------	-----

- Solución de polisobutileno al 3%

$25 \text{ s}^{-1} < \dot{\epsilon} < 200 \text{ s}^{-1}$	$n = 0.77$	[3]
---	------------	-----

### Límites de la ley de potencias.

Los reogramas de numerosos cuerpos fluidificantes poseen una o dos regiones en donde la viscosidad aparente es independiente de  $\dot{\epsilon}$ , llamadas primera y segunda región newtoniana, en las cuales la ley de potencias no se aplica. Estos comportamientos se ponen fácilmente en evidencia con los reogramas reales, en coordenadas log-log (figura 13).

Frecuentemente se tiene un comportamiento newtoniano para los valores abajo de  $\dot{\epsilon} (10^{-2} \text{ s}^{-1})$  y para deslizamientos altos ( $\dot{\epsilon}$  superior a  $10^8 \text{ s}^{-1}$ ).

Citamos otras dos aproximaciones de comportamiento fluidificante, basados sobre el estudio analítico del reograma:

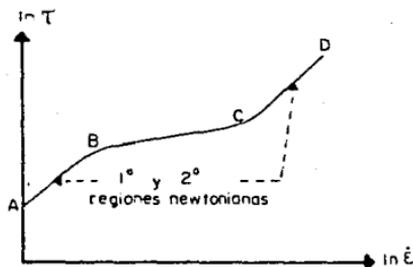


Figura (13)

Reograma log-log de ciertos cuerpos fluidificantes

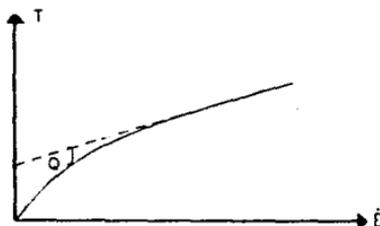


Figura (14)

#### - Shandraw

Admite que los reogramas fluidificantes tienen una asintota oblicua, y es el comportamiento de este tipo de cuerpos donde  $Q$  decrece exponencialmente.

Sea  $\tau_{0s} = \tau_0 + \mu_{\infty} \dot{\gamma}$ , la evaluación de esta asintota.

La disposición relativa del reograma real y del asintota está ilustrada en la figura 14.

Se tiene la relación:

$$\tau = \tau_0 + \mu_{\infty} \dot{\gamma} - Q$$

que se escribe, utilizando las hipótesis sobre  $Q$  y las condiciones límite, de tal manera que:

$$\tau = \tau_0 + \mu_{\infty} \dot{\gamma} - \tau_c e^{-b\dot{\gamma}} \quad (III 9)$$

$\tau_0$  y  $\mu_{\infty}$  se determinan directamente en el reograma experimental. Para obtener  $b$ , es necesario calcular  $Q$  punto por punto y trazar la gráfica  $\ln Q$  en función de  $\dot{\gamma}$ . La pendiente de la recta obtenida suministra la constante  $b$ .

#### - Steiger

Este método está más adaptado a la interpretación de los reogramas fluidificantes  $\dot{\gamma} \tau$  que tienen la forma indicada en la figura 15.

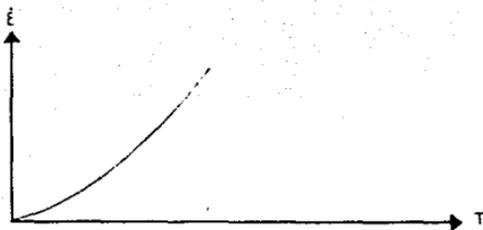


Figura (15)

Valoración de  $E$  en función del esfuerzo  
para un cuerpo fluidificante

$$\dot{\epsilon} = a\tau^3 + c\tau$$

(III. 10)

siendo  $a$  y  $c$  constantes que se tienen que determinar.

Cuando  $\tau$  se hace muy pequeño,  $\dot{\epsilon}/\tau$  tiende hacia 'c'. Así, se puede obtener 'c' determinando el inverso de la viscosidad aparente al origen. La constante 'a' se determina utilizando otro punto cualquiera de la curva.

Finalmente, citamos de memoria la fórmula de Eyring cuya expresión se comentará :

$$\tau = \sum_i \frac{x_i}{x_i} \text{Arg sh} (\beta_i \dot{\epsilon}) \quad (\text{III. 11})$$

$x_i, \alpha_i, \beta_i$ , constantes que se determinan.

$T$  representa el índice entero cuyos valores, generalmente tres, son suficientes para obtener una buena correlación con el experimento.

El tipo de cuerpo fluidificante que asemeja este comportamiento lo presentan los polímeros de cadena larga: gelatina, derivados de la celulosa, etc.

En reposo o bajo esfuerzos débiles, las cadenas moleculares están dispuestas al azar. Cuando el delizamiento aumenta, las cadenas se alinean en la dirección de la fuerza, de donde resulta una disminución de viscosidad.

Steiger intenta aproximarse a este reograma a través de un polinomio de grado limitado arbitrariamente a 3.

Por razones de simetría no pueden aparecer términos de grado impar, de donde resulta la expresión:

Nota:

Frecuentemente se encuentra en la literatura el término pseudoplástico en lugar de fluidificante. Aunque son sinónimos, es preferente el segundo término, que ha sido escogido por el grupo francés de reología.

Como lo hicimos para el comportamiento plástico, podemos utilizar el patin para representar el comportamiento fluidificante con un modelo. Sea el modelo representado en la figura 16.



Figura (16)

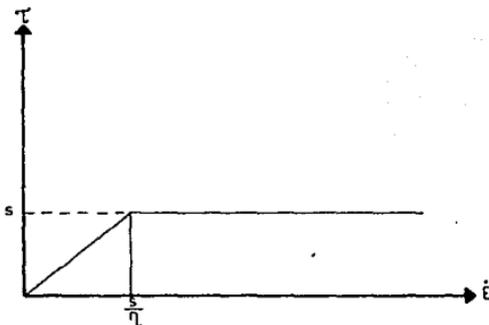


Figura (17)

Reograma  $\tau$ - $\dot{\epsilon}$  de la asociación en serie patin-amortiguador

Acordamos que en esta asociación, el esfuerzo impuesto al sistema es aplicado a cada uno de los elementos, y que la deformación total es la suma de las deformaciones individuales.

Mientras que el esfuerzo permanece inferior al impulso del patin, la deformación es debida unicamente a la acción del amortiguador. El patin sólo empieza a resbalar cuando  $\tau = s$ , es decir cuando  $\eta \dot{\epsilon} = s$ . Entonces el esfuerzo permanece constante a causa de la presencia del patin. Deducimos el reograma asociado a este modelo (figura 17), que representa el reograma de un cuerpo fluidificante un tanto particular (existencia de un quiebre). Una asociación en paralelo con  $n$ -ramas distintas de este tipo conducirá a un reograma fluidificante más cercano al real (ausencia de quiebre).

## 2.4 Los líquidos espesantes

Los reogramas de estos cuerpos tiene la forma indicada en la figura 18.

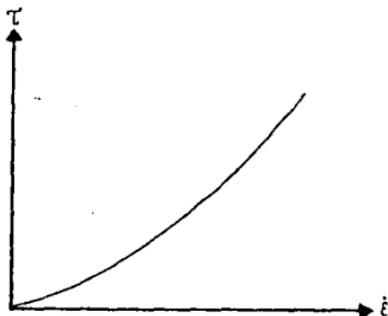


Figura (18)

Reograma de un cuerpo espesante

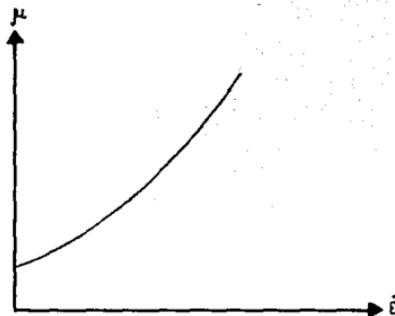


Figura (19)

Variación de la viscosidad de un cuerpo espesante

El cuerpo fluye desde el inicio. No hay punto cedente, pero la viscosidad aparente aumenta junto con el esfuerzo o la velocidad de deformación. Son en general líquidos de baja viscosidad en reposo que tienen la tendencia de solidificarse por agitación. Para describir el comportamiento espesante, también se utiliza una ley de potencias.

Ecuación empírica de estado de un líquido espesante:

$$\tau = K \dot{\epsilon}^n \quad ; \quad n < 1 \quad (\text{III. 12})$$

El parámetro  $n$  es en tanto más grande mientras el cuerpo no presenta un comportamiento newtoniano. Lo caracteriza, pues, el aspecto espesante.

La interpretación del fenómeno puede ser la siguiente: consideremos una suspensión cuyas moléculas se encuentran en gran número y muy cercanas unas a otras. Cada molécula está envuelta de una fina película diluyente que juega un papel de lubricante. Sin embargo este no es suficiente para llenar todos los espacios intermoleculares. La tensión de deslizamiento provoca poco a poco la ruptura de estas películas, lo que conduce a un aumento de la viscosidad.

El caso de arenas húmedas compactas: tienen la propiedad de ser dilatantes, es decir, que sometidas a una deformación, su volumen aumenta. Esta dilatación produce que la viscosidad del líquido aumente. En realidad, la dilatación no es sino una de las posibles causas del comportamiento espesante: no confundir estas dos definiciones.

Ejemplos de fluidos espesantes son: dispersiones muy concentradas, soluciones de almidón o ciertos polímeros llamados PVC (policloruro de vinilo).

### 2.5 Flujo generalizado

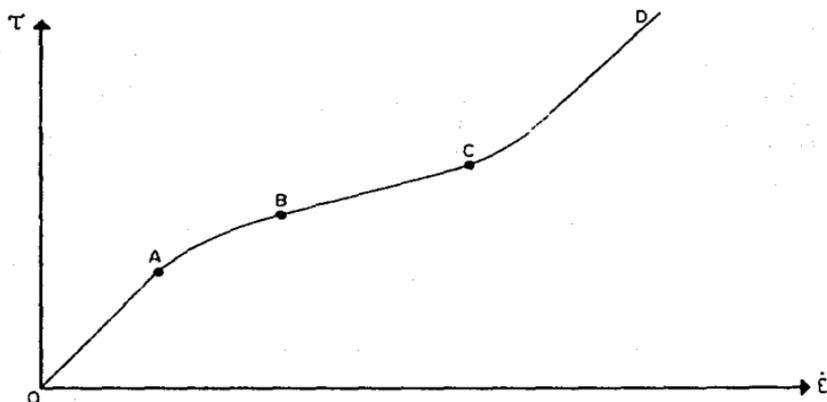


Figura (20)

Reograma complejo, presentando diferentes tipos de flujo

Sección OA: primera región newtoniana

Sección AB: comportamiento fluidificante

Sección BC: segunda región newtoniana

Sección CD: comportamiento espesante

Más allá de D: fin del flujo laminar, principio de flujo turbulento

Los diferentes tipos de comportamiento reológico no son siempre tan claramente distintos unos de otros. Se pueden encontrar para un mismo cuerpo varios comportamientos diferentes que corresponden cada uno a una región de esfuerzos. Un flujo laminar presentará, a veces, hasta cuatro diferentes comportamientos.

La existencia de la primera y segunda región newtoniana es conocida desde hace mucho tiempo. Este cambio de pendiente se hace evidente con el traspaso del comportamiento fluidificante a un comportamiento espesante con el aumento del esfuerzo. Esta transición se observó en el polietileno que era considerado hasta entonces, como un modelo de polímero fluidificante.

**Interpretación en este caso:**

- En la primera región newtoniana, las cadenas permanecen desordenadas.
- En la región fluidificante, las cadenas moleculares se alinean poco a poco.
- Se alcanzará la segunda región newtoniana cuando todas las cadenas estén alineadas.
- Aumentando el deslizamiento, aparecerán fricciones entre las cadenas, de donde resulta una viscosidad creciente: región espesante. El fenómeno puede conducir hasta la formación de paquetes. Se ha indicado por distracción X, una cristalización parcial de ciertos polímeros líquidos a causa de esfuerzos muy grandes.

Señalamos que ciertas regiones de este tipo de flujo generalizado pueden ser tan reducidas que se le escapan a la experimentación.

### **3. - Las deformaciones permanentes (de flujo) en los sólidos**

#### **3.1. Las deformaciones plásticas**

Las deformaciones de flujo para un sólido cualquiera se puede definir por oposición a las deformaciones elásticas. Estas últimas, ya sean instantáneas o retrasadas, son recuperables: desaparecen al suprimir el esfuerzo. Cualquier deformación no recuperable es entonces una deformación de flujo. Cuando se aplica un esfuerzo a un líquido, este generalmente fluye, es decir que su deformación crece continuamente a través del tiempo: flujo viscoso. Sometiendo un sólido a un esfuerzo superior a su umbral de elasticidad  $T_s$  (un esfuerzo más allá del cual las deformaciones dejan de ser totalmente recuperables), la deformación correspondiente puede ser instantánea y ya no evolucionar a través del tiempo ni siquiera si el esfuerzo se mantiene. Nos encontramos por definición, en la región de las deformaciones plásticas.

El reograma esfuerzo-deformación tiene en este caso la forma mostrada en la figura 21.

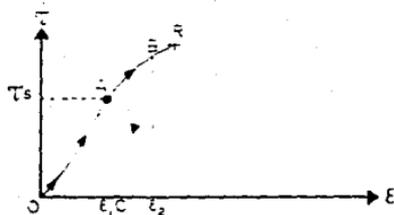


Figura (21)

Reograma  $T-\epsilon$  de un sólido plástico

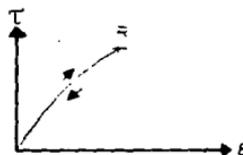
(para la comodidad de la figura la deformación elástica  $\epsilon_1$  está ampliada, pudiendo ser muy pequeña para sólidos cristalinos aproximadamente  $1/1000$ )

La sección lineal OA corresponde a la de elasticidad, la deformación correspondiente  $\epsilon_1$  es recuperable. Más allá, en un punto B, la deformación  $\epsilon_2$  no es totalmente recuperable, sólo lo es la fracción  $\epsilon_1$ , suprimiendo el esfuerzo, la deformación residual que queda es  $\epsilon_2 - \epsilon_1$ , representada en la abscisa con el punto C, el último punto en la curva de descarga. El punto R, con la cruz, representa la ruptura. Se debe notar que el umbral de elasticidad no está siempre tan claramente precisado como en el caso esquemático de la figura 21; su definición también puede ser convencional, en la metalurgia se toma frecuentemente como límite elástico el punto B de tal manera que la deformación residual OC será del orden de 2 1000 de la deformación total  $\epsilon_2$ .

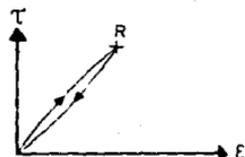
Los reogramas reales ( $T-\epsilon$ ) pueden distinguirse cualitativamente de los de la figura 21, los siguientes casos diferentes se pueden considerar:



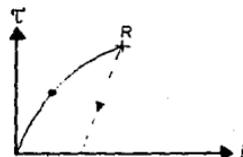
Sólido elástico lineal no plástico (quebradizo)



Sólido elástico no lineal



Sólido elástico con histéresis



Sólido plástico con histéresis

Figura (22)

### 3.2 Las deformaciones de los sólidos bajo la acción de esfuerzos

Los sólidos pueden presentar flujos viscosos como los líquidos, lo que corresponde a deformaciones proporcionales de tiempo, este fenómeno es llamado comúnmente "deformación sólida". Se trata de hecho de una deformación bajo un esfuerzo impuesto constantemente.

En un reograma ( $\tau$ - $\epsilon$ ), la deformación está representada por una sección horizontal de la curva: imponiendo un esfuerzo constante, la deformación puede tomar cualquier valor dentro de una cierta región. Generalmente, la gráfica se complica un poco antes de la ruptura, pues existen transformaciones importantes en las tensiones internas que le preceden a ésta.

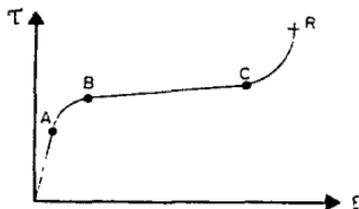


Figura (23)

Reograma de un sólido viscoplastico

OA: comportamiento elástico

AB: comportamiento plástico

BC: deformación viscosa

CR: fase de pre-ruptura

Se ve que la relación esfuerzo-deformación, adaptada al estudio de la elasticidad y de la plasticidad, no es de interés para la deformación bajo esfuerzo, donde  $\tau$  es independiente de  $\epsilon$ . El flujo viscoso en los sólidos es descrito por la relación  $\epsilon(t)$  llamada curva de deformación sólida. En ciertas condiciones, un sólido sometido a un esfuerzo más allá del umbral de elasticidad, sufre una deformación permanente que puede ser la suma de la deformación plástica (independiente del tiempo) y de la deformación bajo esfuerzo (que aumenta a través del tiempo). Este es el comportamiento viscoplastico.

Para ciertos autores, la noción de flujo se restringe a la "deformación bajo esfuerzo", esto es sólo una cuestión de definición; escogimos incluir la plasticidad y la deformación bajo esfuerzo dentro del flujo, pues estos dos fenómenos están relacionados con interpretaciones microscópicas muy cercanas, donde la plasticidad aparece como una deformación bloqueada.

#### 4.- Variación del comportamiento reológico de flujo a través del tiempo

##### 4.1 Caso de los líquidos: la tixotropía

Ciertos líquidos pueden tener un flujo cuyas características dependen de los tratamientos anteriores. En estas condiciones, la viscosidad aparente ya no se fija para un valor dado del esfuerzo o de la velocidad de deformación, sino depende también de otro parámetro: el tiempo. Si, por ejemplo, el flujo puede ser facilitado por una agitación previa. En estas condiciones, el método experimental adoptado para trazar la

curva de flujo asume gran importancia. Cuando se efectúa la determinación punto por punto de un reograma, se pueden considerar tres diferentes procedimientos:

- hacer mediciones de  $\tau$  y  $\dot{\epsilon}$  en una cronología cualquiera;
- proceder con valores crecientes de  $\tau$  y  $\dot{\epsilon}$ ;
- proceder con valores decrecientes de  $\tau$  y  $\dot{\epsilon}$ .

El primer procedimiento no es utilizado, pues es difícil de reproducir y suministra curvas difíciles de interpretar en el caso de los fenómenos que dependen del tiempo. En cambio, los otros dos lo son, y no son siempre comparables.

Los reogramas obtenidos por estos son unívocos, es decir que se obtendría siempre la misma curva, sea cual sea el tiempo propuesto, para alcanzar los diferentes esfuerzos o velocidades de deformación de la medición. Se dice que estos cuerpos no presentan histéresis.

En particular, estas curvas se pueden establecer muy bien con valores crecientes o decrecientes de  $\tau$  o de  $\dot{\epsilon}$ , siendo igual la duración del experimento. No es lo mismo para todos los cuerpos: unos presentan la histéresis y la medición depende de la manera en que se hace crecer o decrecer el esfuerzo. Si se quisiera caracterizar gráfica y totalmente estos cuerpos, se debería trazar un reograma tridimensional añadiendo una variable temporal. Esto se hace solamente raras veces. Frecuentemente, es solo necesario una información parcial, procediendo de la siguiente manera: se efectúa un experimento de carga (deslizamiento creciente) seguido por una descarga (deslizamiento decreciente), y se traza en un sistema de ejes los dos reogramas correspondientes de la manera acostumbrada. Se obtienen dos curvas: la curva de regreso no coincide con la curva de ida. Se dice que se ha trazado una hebrilla de histéresis, por ejemplo: estudio de un gel fluidificante que presenta histéresis.

#### Procedimiento:

Se hacen mediciones de valores crecientes de  $\tau$  o de  $\dot{\epsilon}$  en intervalos muy cortos de tiempo, de tal manera que el tiempo de carga  $t_c$  sea pequeño en comparación con todas las duraciones experimentales, y con los tiempos propios de la estructura estudiada por sus posibilidades a esfuerzo o a velocidad de deformación constante. Después se deja el cuerpo bajo un deslizamiento máximo durante un tiempo  $t_a$ , hasta que las propiedades reológicas ya no evolucionan; luego, se hace decrecer  $\tau$  o  $\dot{\epsilon}$  para mediciones en descarga, durante un tiempo total  $t_d$ .

Obtendríamos una curva que tendría la forma ilustrada en la figura 24, que nombramos curva de referencia. La sección OA de la curva es característica del comportamiento fluidificante.

Durante el tiempo de espera  $t_0$  bajo deslizamiento máximo, la viscosidad aparente disminuye progresivamente, lo que corresponde a un cambio de estructura. Es la transformación del estado de gel al estado de fluido.

En B, la estructura es completamente destruida, se mantiene una viscosidad constante durante toda la descarga, de donde resulta el retorno lineal. Si se efectúa el experimento en condiciones de tiempos diferentes, pueden resultar superposiciones de los diferentes efectos representados por los segmentos OA, AB y BO. Dado que los autores frecuentemente no precisan su procedimiento (lo que es muy importante en esta área), pueden resultar de un mismo estudio, curvas de histeresis de diferentes formas\* (figura 25)

\* Para una mejor entendimiento, dibujemos estas curvas con una línea punteada en la curva de referencia.

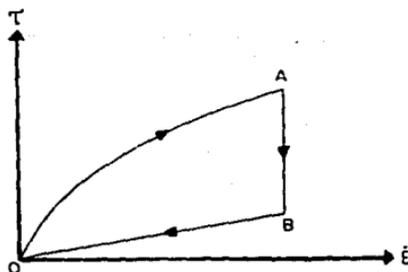
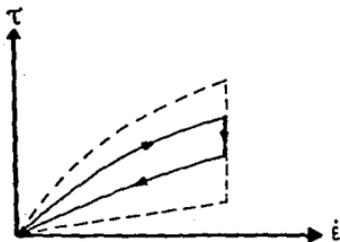
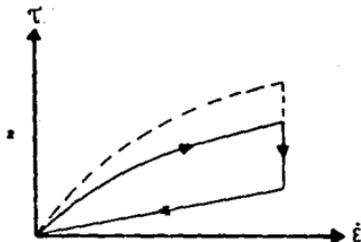


Figura (24)

Histeresis de referencia de un gel fluidificante



a)  $t_c$  largo  $t_0$  corto



b)  $t_c$  largo  $t_0$  largo

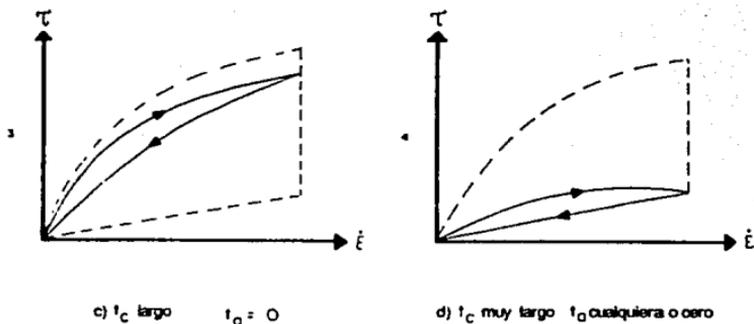


Figura (25)

Diferentes hebrillas de histéresis para métodos variables de procedimiento

Inicialmente, la tixotropía caracterizaba la propiedad de un cuerpo de transformarse reversible y gradualmente del estado de gel al estado de fluido. Generalizando, ahora se dice que un cuerpo es tixotrópico si proporciona una hebrilla de histéresis del tipo 1, 2, 3, o 4 (figura 25).

Aunque se puede discutir, parece que se debe reservar el término de tixotropía para evoluciones a través del tiempo, que acompañan cambios importantes de la estructura microscópica. Esto conduce lógicamente a que se clasifiquen como diferentes los comportamientos igualmente dependientes del tiempo, pero de origen viscoelástico. Esta diferenciación puede mostrarse difícil, pues los tiempos de retraso viscoelásticos no son pequeños en la escala de las duraciones experimentales.

Se debe recordar que la tixotropía hace difíciles las mediciones, y que por ejemplo, la viscosidad aparente, medida para un  $\dot{\epsilon}_0$  dado, puede tener un valor cualquiera, dependiendo de la experiencia, y comprendido entre límites diferentes  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , que se observan en los reogramas de referencia (figura 26).

En conclusión, una hebrilla cualquiera de histéresis no caracteriza completamente la tixotropía de un cuerpo. Para hacer esto, se podrían considerar solamente los reogramas hechos en condiciones experimentales fijas, como la hebrilla de referencia o la de tipo 4, que son fáciles de reproducir, o también

considerando cantidades como:  $(\mu_{\max} - \mu_{\min})$

$$\frac{\mu_{\max} - \mu_{\min}}{\mu_{\min}}$$

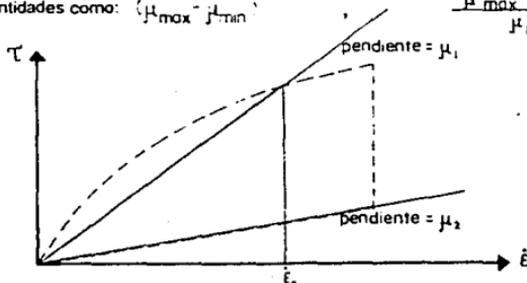


Figura (26)

Posibles variaciones de la medida de la viscosidad  $\mu$ .

**Nota:** La tixotropía no está siempre relacionada a la posible formación y destrucción de floculantes.

Tomemos el ejemplo de un polímero: su viscosidad decrece junto con  $\tau$  porque las cadenas se alinean. Es fluidificante, pero si se aplica un esfuerzo constante, la viscosidad puede disminuir a través del tiempo, porque los enlaces se pueden romper progresivamente. Será entonces fluidificante tixotrópico.

**Definición:** Un cuerpo cuya viscosidad aparente tiende a disminuir a través del tiempo cuando se le aplica un esfuerzo (o una velocidad de deslizamiento) constante, se llama tixotrópico; suponiendo que después de suspendido el deslizamiento un tiempo de reposo suficiente, su estructura inicial se regenera.

En estas condiciones, su hebrilla de histéresis es la sección correspondiente a la descarga situada debajo (en los reogramas  $\tau(\dot{\epsilon})$ ) de la sección correspondiente a la carga. Solamente los cuerpos fluidificantes pueden presentar tixotropía. Las figuras 27, 28, y 29 suministran otros ejemplos reales de hebrillas de tipo n° 4.

Ejemplos de cuerpos tixotrópicos son: ciertas soluciones oleosas, ciertos derivados de la celulosa, como las soluciones de metilcelulosa.

La antitixotropía es el fenómeno inverso: a un esfuerzo  $\tau$  (o  $\dot{\epsilon}$ ) dado, la viscosidad aparente aumenta a través del tiempo. Estas sustancias son raras. Este término es más frecuentemente utilizado que el de reopexia, que no está bien definido y que no es totalmente equivalente: se define como la propiedad de solidificarse progresivamente por agitación.

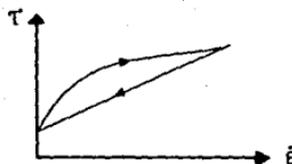


Figura (27)  
Cuerpo plástico (isotrópico sin  
modificación del esfuerzo umbral)

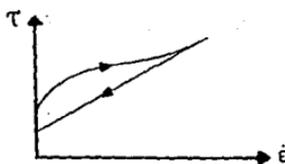


Figura (28)  
Cuerpo plástico (isotrópico con  
modificación de esfuerzo umbral)

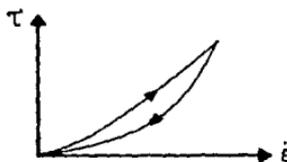


Figura (29)  
Cuerpo espesante (isotrópico)

#### 4.2. Caso de los sólidos

Generalmente, el tiempo modifica las características de deformación llamadas "deformación bajo esfuerzo" de los sólidos. Esta evolución está relacionada con un cambio de estructura, que a diferencia de la mayoría de los líquidos, estas modificaciones son irreversibles. En los mecanismos propios de las deformaciones se podrán encontrar las profundas razones de este comportamiento.

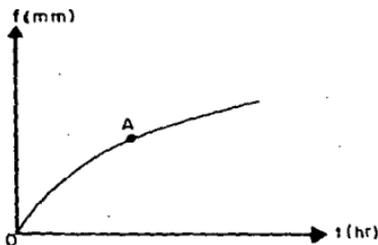


Figura 30  
Evolución de una taradura  $f$  de una viga de  
hormigón, a través del tiempo

Una modificación temporal de la estructura que provocan una resistencia creciente al flujo. Solamente se reconocen en las fases de ruptura. Así, la figura 30, análogamente a una curva de deformación bajo esfuerzo para una viga de hormigón, presenta una región (sección OA) en la cual la pendiente decrece constantemente. La modificación de la estructura correlativa es el endurecimiento químico de hormigón que provoca una disminución de la tendencia a deformarse.

Otro caso interesante es, ya que es susceptible de una interpretación microscópica, la "deformación

térmica" de los metales.

Al contrario de la plasticidad, la "deformación térmica" de los metales hace intervenir al tiempo, teniendo como consecuencia una dependencia directa de la temperatura. De hecho, todos los flujos viscosos son controlados por procesos de activación térmica de energía, en donde el tiempo y la temperatura tienen efectos equivalentes: la duración, así como el aumento de la temperatura, multiplican el número de los procesos térmicos elementales activados que son la base de la deformación. Las curvas experimentales de deformación de los metales dependerán entonces muy directamente de las condiciones de temperatura. Se distinguen principalmente dos tipos, que son representados en las figuras 31 y 32.

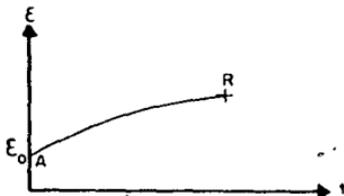


Figura (31)

Deformación  $\propto$  logarítmica de los metales

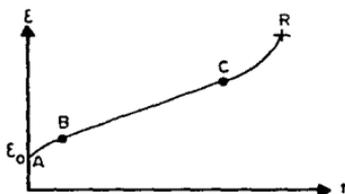


Figura (32)

Deformación de reestablecimiento de los metales

El primer tipo llamado deformación  $\propto$  o logarítmica, ocurre para esfuerzos y temperaturas menores:

$T < \propto T_f$ , donde  $T_f$  es la temperatura de fusión y  $\propto$  es un coeficiente del orden 0.3 para los metales y de valor entre 0.3 y 0.6 para aleaciones. La deformación  $\propto$  es caracterizada por una velocidad de deformación decreciente (concavidad hacia la base), y por pequeñas deformaciones.

El segundo tipo de deformación, la deformación de reestablecimiento es más importante: Se encuentra a altas temperaturas ( $T > \propto T_f$ ) y bajo fuertes esfuerzos. Generalmente aparece como sucesión de tres regímenes diferentes:

- la sección AB de la curva: deformación primaria caracterizada por una velocidad decreciente de deformación.
- la sección BC de la curva: deformación secundaria a velocidad constante;
- sección CR de la curva: deformación terciaria acelerada que precede la ruptura (R).

**Nota:**

No hay que confundir las curvas 31 y 32 con las curvas de deformación en viscoelasticidad como las de la figura 15 (capítulo II). En las curvas de deformación de los metales, todas las curvas, de A hasta R, describen un flujo y las deformaciones correspondientes son pues permanentes.

#### IV.

##### Principio y descripción de los reómetros

Este capítulo es dedicado a los diferentes reómetros utilizados para caracterizar el comportamiento reológico de los materiales. Dada la importancia del tema, esta presentación se hará de manera tan completa, sistemática y rigurosa, como sea posible. Para no alargar la exposición, insistiremos principalmente en los principios de funcionamiento, en las condiciones y límites de utilización, y no describiremos el material empleado, de tal manera que la descripción sea lo más sucinta posible. Presentaremos en los apéndices los desarrollos y las demostraciones matemáticas en la medida en que estas sean imprescindibles para la comprensión física de la exposición.

Distinguiremos tres grandes clases de reómetros:

- 1 - Los reómetros de régimen permanente, que funcionan principalmente como viscosímetros para determinar las viscosidades y los reogramas  $\tau - \dot{\epsilon}$  de las sustancias líquidas.
- 2 - Los reómetros de régimen transitorio, que permiten el estudio de las propiedades viscoelásticas de los materiales.
- 3 - Y finalmente, los reómetros dinámicos, que funcionan en régimen sinusoidal y suministran una descripción muy compleja de las propiedades reológicas de las sustancias.

Notaremos que ciertos reómetros, con la posible condición de adaptar equipos adicionales, son susceptibles de reproducir el régimen permanente así como el régimen transitorio o dinámico; por ejemplo la mayoría de los reómetros de tipo Couette. Decidimos introducir separadamente los tres tipos de funcionamiento posibles, a fin de presentar de manera clara y distinta los principios y las ecuaciones a utilizar.

Notemos también que la variedad de reómetros presentada aquí está lejos de agotar las posibilidades existentes: conforme avanza la idea de esta exposición, nos limitaremos voluntariamente sólo a los aparatos que realizan deslizamiento simple en una muestra.

En la región transitoria y dinámica en particular, existen otros reómetros, con principios diferentes (extensión, flexión, etc.), a los que a veces es necesario recurrir: por ejemplo, en el estudio de los materiales sólidos de gran rigidez ( $G \geq 10^9$  dinas/cm<sup>2</sup>).

#### IV. 1 - Reómetros de régimen permanente

En estos reómetros, la sustancia que se estudia está sometida a un movimiento laminar de deslizamiento independiente del tiempo: las diferentes capas fluyen sin que la velocidad y el esfuerzo de corte sufran alguna modificación a través del tiempo. El uso de estos reómetros se reduce entonces al estudio de sustancias que tienen un comportamiento líquido, capaces de seguir un proceso de flujo permanente, el objetivo experimental que se busca es la determinación de su reograma  $\tau - \dot{\gamma}$ .

Dentro de esta categoría distinguimos principalmente dos tipos de reómetros:

- Los reómetros de tipo Couette, en los cuales la sustancia que se estudia es deslizada entre dos superficies sólidas, una en reposo y la otra móvil (§ 1).

- Los reómetros de tipo Poiseuille, en los cuales el movimiento de deslizamiento es generado por la aplicación en las extremidades de un tubo que contiene la muestra, una diferencia de presión, o también por la acción de la gravedad.

Presentaremos el viscosímetro con caída de esfera, cuyas posibilidades son limitadas, pero que sin embargo es muy conocido y bastante utilizado.

## 1 - Reómetros de tipo Couette

### 1.1. Reómetros planos con traslación

#### 1.1.1. Principio de funcionamiento

La sustancia que se quiere estudiar deberá estar colocada entre dos planos sólidos paralelos y de superficies  $S$  iguales:  $P_1$  y  $P_2$ ; una fuerza  $\vec{F}$  constante es aplicada tangencialmente al plano móvil  $P_2$ , transmitiéndose un movimiento de traslación paralelo a él mismo, de velocidad  $\vec{V}_0$  mientras que el plano  $P_1$  permanece fijo (figura 1).

Es generado entonces un movimiento laminar de deslizamiento: si se supone que la distancia 'e' entre los planos es pequeña en comparación con las dimensiones lineales de la superficie  $S$  de los planos, se podrá admitir, despreciando los efectos de frontera, que el flujo posee simetría plana y que el material se descompone en planos paralelos a los superficies  $P_1$  y  $P_2$ , impulsadas a diferentes velocidades que se reparten continuamente desde  $\vec{V}_0$  (velocidad de la capa que está en contacto con  $P_2$ ) hasta 0 (velocidad de la capa que está en contacto con  $P_1$ ).

#### 1.1.2. Ecuación general para la determinación de $\tau$ y $\dot{\epsilon}$

El problema que se plantea, es el cálculo del esfuerzo cortante  $\tau$  y la velocidad de corte  $\dot{\epsilon}$  en cada punto de la muestra, a partir de dos magnitudes físicas accesibles por medio del experimento: la fuerza  $F$  aplicada al plano sólido  $P_2$  y la velocidad de traslación  $\vec{V}_0$  correspondientes.

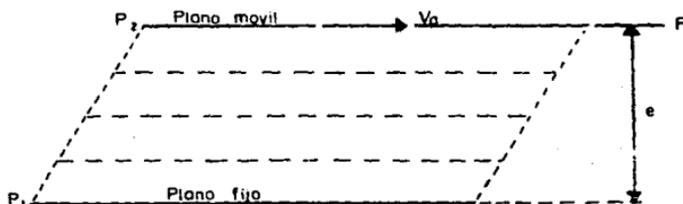


Figura (1)

Para esto, consideremos (figura 2) el fragmento de sustancia comprendido entre dos capas planas de

altura  $x$  y  $x'$  respectivamente; este está sometido.

- por parte de la capa superior, a la fuerza de arrastre  $\vec{f}(x')$ ;

- por parte de la capa inferior a la fuerza de freno  $-\vec{f}(x)$ .

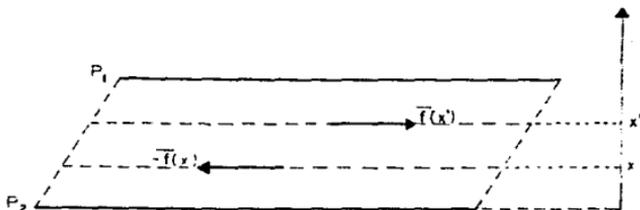


Figura (2)

Cuando es alcanzado el régimen permanente, sin que la sustancia sea sometida a ninguna aceleración, la suma de las fuerzas aplicadas debe ser cero, así que:

$$\vec{f}(x') = \vec{f}(x) \quad (\text{IV. 1})$$

El esfuerzo cortante que se ejerce entre dos capas es independiente de la posición de estas capas: esta se transmite de una capa a otra y es, por consecuencia, igual a la fuerza  $\vec{F}$  que se aplica al plano superior  $P_1$ .

$$\vec{f}(x) = \vec{F} \quad (\text{IV. 2})$$

El esfuerzo cortante  $\vec{\tau}$  es también constante en todas las puntos de la muestra:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{F}}{S} \quad (\text{IV. 3})$$

donde  $F$  representa la proyección algebraica de  $\vec{F}$  sobre un eje orientado paralelamente al movimiento, y donde  $S$  representa el área, constante, de diferentes capas, igual a la superficie de los planos sólidos  $P_1$  y  $P_2$ .

Referente a la medida de  $\dot{\xi}$ , vimos en el capítulo I que en el caso de un movimiento laminar que posee la simetría plana, la velocidad de corte tiene como expresión (relación I. 6):

$$\dot{\epsilon}(x) = \frac{dv(x)}{dx} \quad (\text{IV. 4})$$

Parece obvio que  $\epsilon(x)$  depende de la capa  $x$  considerada. Introduciendo la ecuación reológica, donde  $\epsilon$  y  $\dot{\epsilon}$  dependen de la única magnitud dinámica  $\tau$ , ya que demostramos que el esfuerzo cortante  $\tau$  es constante en toda la muestra como lo es consecuentemente para  $\dot{\epsilon}$ :

$$\dot{\epsilon} = \frac{dv}{dx} = K$$

Integrando esta ecuación entre el plano  $P_1$  y el plano  $P_2$ , tenemos:

$$\int_0^{v_0} dv = K \int_{P_1}^{P_2} dx$$

$$v_0 = Ke$$

donde  $e$  y  $v_0$  representan la distancia entre los planos  $P_1$  y  $P_2$ , y la velocidad del plano superior  $P_2$  respectivamente.

Por consiguiente, se obtiene:

$$\dot{\epsilon} = \frac{v_0}{e} \quad (\text{IV. 5})$$

las relaciones (IV. 3) y (IV. 5) permiten determinar experimentalmente, por la medida de  $\{\bar{F}\}$  y  $v_0$  (donde  $e$  y  $S$  son especificados por el fabricante) el par  $(\tau, \dot{\epsilon})$ .

Aplicando al plano superior  $P_2$  fuerzas  $F$  variables, es posible determinar diferentes pares  $(\tau, \dot{\epsilon})$  y deducir el programa  $\tau - \dot{\epsilon}$ .

### 1.1.3. Principales tipos de aparatos y campo de utilización

Los reómetros planos no son numerosos y frecuentemente poco precisos, por esto, son utilizados en controles aproximados, pudiéndose clasificar en dos categorías:

- aparatos laminares, que son utilizados para las mediciones de los viscosidades de  $1$  a  $3 \cdot 10^3 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .
- aparatos con placas, para la medición de viscosidades comprendidas entre  $10$  y  $10^{10} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .

## 1.2. Reómetros rotativos cilíndricos

Es la clase de reómetros que se utiliza más frecuentemente, por lo que trataremos de hacer una presentación tan completa como sea posible. De hecho, el funcionamiento de tales reómetros es frecuentemente automatizada, y por consecuencia, es bastante conocido que la mayoría de los manipuladores no conocen bien el principio, las ecuaciones y los límites de funcionamiento de este tipo particular de aparatos: esta falta de conocimiento puede provocar una utilización errónea o llenarnos a graves errores de interpretación.

### 1.2.1. Principio de funcionamiento

La sustancia que se quiere estudiar está encerrada entre dos cilindros de rotación coaxiales, de radios  $R_1$  y  $R_2$  y de altura  $h$  (figura 3)

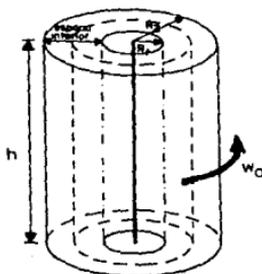


Figura (3)

El movimiento laminar de deslizamiento es obtenido, transmitiendo a uno de los cilindros un movimiento de rotación uniforme, con una velocidad angular  $\omega_0$ , mientras que el otro cilindro permanece inmóvil. Notemos que se encuentran reómetros cilíndricos en los cuales el cilindro móvil es el interior, o al contrario el exterior. Para definir lo que ocurre, escogimos para la descripción un reómetro con cilindro interior fijo, y cilindro exterior móvil.

La sustancia se descompone en capas cilíndricas concéntricas, impulsadas por velocidades angulares diferentes, que varían continuamente desde 0 (para la capa que está en contacto con el cilindro interior fijo) hasta  $\omega_0$  (para la capa que está en contacto con el cilindro exterior móvil). Como consecuencia del movimiento relativo de las capas, en relación intrínseca, aparece en cada punto de la muestra, una velocidad de corte  $\dot{\gamma}$  y un esfuerzo cortante  $\tau$ .

### 1.2.2. Ecuación general.

Localicemos las diferentes capas cilíndricas de la muestra a través de su distancia  $r$  al eje de rotación (figura 4). Por razones de simetría, el esfuerzo y la velocidad de corte son constantes en toda la superficie de una capa, dependiendo de su posición, los notaremos como  $\tau(r)$  y  $\dot{\gamma}(r)$ . El problema que se plantea es el de la determinación  $\tau(r)$  y  $\dot{\gamma}(r)$  a partir de los datos experimentales dados.

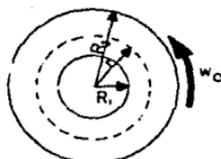


Figura (4)

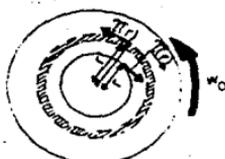


Figura (5)

- Determinación de  $\tau(r)$ : consideremos el fragmento de sustancia comprendido entre dos capas de radio  $r$  y  $r'$  y de superficies  $S$  y  $S'$  respectivamente ( figura 5).

- en la parte de la capa exterior  $r'$  a un par de rotación motriz cuyo momento relacionado al eje de rotación es igual a:

$$-M(r) = -r' \cdot \tau(r) \cdot s$$

Cuando el régimen permanente es alcanzado, y la sustancia no está sometida a ninguna aceleración angular, la suma de los momentos debe ser cero, así que:

$$M(r) = M(r') = \text{constante}$$

En particular, si se designan  $M_1$  y  $M_2$  los momentos de los pares aplicados a los cilindros interior y exterior, se tiene:

$$M(r) = M_1 = M_2 = M \quad (\text{IV. 6})$$

lo que trae consigo que:

$$M(r) = r \tau(r) S = 2 \pi r^2 h \tau(r)$$

$$\tau(r) = \frac{M}{2 \pi r^2 h} \quad (\text{IV. 7})$$

- Determinación de  $\hat{E}(r)$

Como vimos en el capítulo I, cuando la simetría del problema no es plana, no es posible utilizar la relación (I. 6).

Adaptando la representación intuitiva del § 2 del capítulo I al caso de la simetría cilíndrica, estableceremos la expresión de  $\dot{\epsilon}(r)$ .

Consideremos dos capas cilíndricas infinitamente cercanas de radios  $r$  y  $r + dr$ , de velocidades angulares de rotación  $w(r)$  y  $w(r + dr)$ , y situadas al instante  $t$  en A y B, en el mismo radio (figura 6). Al instante  $t + dt$ , la partícula que estaba en B alcanza el punto B', y la partícula que estaba en A alcanza el punto A'.

Prolongando el radio que pasa por A' hasta la capa  $r + dr$ , se observa que el punto B' está más allá de punto B'' (la velocidad angular de la capa  $r + dr$  siendo considerada más grande que la de la capa  $r$ ). Hay que señalar, que después de una rotación en conjunto (sin deformación) de las diferentes capas - a la manera de las espiras formadas por los surcos grabados en un disco - siendo la velocidad angular constante, las partículas A y B al instante  $t$  estarían en A' y B'' al instante  $t + dt$ . Es pues por relación con el punto B' que se debe detectar el desplazamiento relativo de la capa  $r + dr$  con relación a la capa  $r$ . Entonces tendremos como expresión de la velocidad de desplazamiento de la capa  $r + dr$  con relación a la capa  $r$ :

$$v_d(r) = \frac{B'B''}{dt} \quad (\text{IV. 8})$$

y, ya que:

$$\begin{aligned} B'B'' &= B'B + B''B \\ &= w(r+dr)(r+dr)dt - w(r)(r+dr)dt \end{aligned}$$

sea también, escribiendo:

$$w(r+dr) = w(r) + dw(r)$$

$$B'B'' = dw \cdot r \cdot dt$$

así que:

$$V_d(r) = r \cdot dw \quad (\text{IV. 9})$$

La expresión de la velocidad se obtiene relacionando la velocidad de desplazamiento con la distancia que separa las dos capas:

$$\dot{\epsilon}(r) = r \frac{dw}{dr} \quad (\text{IV. 10})$$

Esta es la expresión rigurosa de la velocidad de corte en un reómetro rotativo cilíndrico.

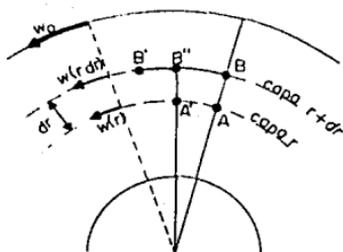


Figura (6)

Nota:

Si se hubiera tratado de generalizar la expresión (I. 6) o (IV. 4) de  $\dot{\epsilon}$  dada por la simetría plana, sustituyendo  $dx$  por  $dr$  (la distancia entre dos capas planas infinitamente cercanas), se hubiera obtenido la expresión  $dw/dr$ , que aunque represente un "gradiente de velocidad", no coincide con la expresión de  $\dot{\epsilon}$ . De hecho:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{d}{dr} (rw) = w + r \frac{dw}{dr} = w + \dot{\epsilon}$$

Hay que acentuar pues, que la denominación de gradiente de velocidad, para designar la velocidad de corte  $\dot{\epsilon}$ , puede conducir a graves errores si es utilizada sin precaución.

1.2.3. Estudio del comportamiento reológico de una sustancia

Para caracterizar el comportamiento reológico de un material, es necesario determinar su reograma  $\tau-\dot{\epsilon}$ , a partir de datos y mediciones experimentales, suministrados por el reómetro.

En la categoría de los reómetros rotativos cilíndricos, se encuentran dos procedimientos experimentales:

1. Imponiendo al cilindro exterior un par de rotación conocido  $M$  manteniendo fijo el cilindro interior, mientras se mide su velocidad angular  $W_0$ .
2. Impone al cilindro exterior una velocidad angular de rotación  $W_0$  conocida, se mide el par de resistencia  $M$  que se aplica al cilindro exterior con una velocidad angular conocida, para que éste permanezca inmóvil.

En ambos casos, la medición experimental de que disponemos es la velocidad de rotación impuesta  $M$ . Ya que estos valores experimentales son conocidos, queda claro que la aplicación de la relación (IV. 7)

permite calcular el valor  $\tau(r)$  en cualquier punto del espacio intermedio entre los dos cilindros.

Desafortunadamente, no es lo mismo para  $\dot{\epsilon}$ , cuya determinación tropieza con serias dificultades en cuanto al principio: si se hace referencia a la expresión (IV. 10), se observa que el conocimiento de  $w_0$  es insuficiente para calcular  $\dot{\epsilon}(r)$ . Además de este, hay que conocer la ley de repartición de la velocidad angular,  $w(r)$ , ya que esta repartición es función de las propiedades reológicas del material. Se tiene así un círculo vicioso: para determinar el comportamiento reológico sería necesario conocerlo previamente. Aquí está una de las grandes dificultades que se encuentran en la reología experimental. Como mostraremos en los párrafos siguientes (§ 1.2.3.1 hasta 1.2.3.3), es posible sin embargo dominar esta dificultad por la realización de ciertos procedimientos experimentales o de análisis matemáticos.

### 1.2.3.1. Utilización de un espacio intermedio estrecho entre los cilindros

Si el espacio intermedio es pequeño, es decir si la distancia entre los cilindros es pequeño comparado a sus radios:

$$\frac{R_2 - R_1}{R_1} = x \ll 1 \quad (\text{IV. 11})$$

relacionándola con la ecuación (IV. 7) observamos que el radio  $r$  varía poco, es decir, podemos admitir como primera aproximación que el esfuerzo cortante  $\tau$  permanece constante en el espacio intermedio. El valor constante del esfuerzo será tomado como:

$$\tau = \frac{\tau(R_1) + \tau(R_2)}{2}$$

o sea:

$$\tau = \frac{M}{4\pi h} \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 R_2^2} \quad (\text{IV. 12})$$

ya sea cual sea el comportamiento reológico del material, su velocidad de corte  $\dot{\epsilon}$  no dependerá de  $\tau$ , se deduce entonces que  $\dot{\epsilon}$  permanece constante en el espacio intermedio, así:

$$\dot{\epsilon} = r \frac{dw}{dr} = K$$

Integrado esta ecuación entre el cilindro interior y el cilindro exterior, se tiene:

$$\int_0^{w_0} dw = K \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$w_0 = K \ln \frac{R_2}{R_1}$$

así que:

$$\dot{\xi} = \frac{w_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

ecuación que se simplifica observando que:

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left( 1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right) = \ln (1 + x)$$

$$\ln (1 + x) \approx x \quad \text{si} \quad x \ll 1$$

Consecuentemente se obtiene:

$$\dot{\xi} = \frac{R_1 w_0}{R_2^2 - R_1^2} \quad (\text{IV. 13})$$

Las relaciones (IV. 12) y (IV. 13) son en tanto más justificadas en cuanto más pequeño sea  $x$  comparado a la unidad.

Se debe notar que ciertos autores y fabricantes de aparatos utilizan, en la hipótesis de un espacio intermedio estrecho, en lugar de la relación (IV. 13), una relación equivalente pero que presenta una forma distinta:

$$\dot{\xi} = \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} w_0 \quad (\text{IV. 14})$$

Se ve fácilmente que estas dos expresiones no difieren sino por una cantidad proporcional a  $x$ , que es por consiguiente, despreciable en la hipótesis en la cual nos encontramos.

Utilizando la relación (IV. 13) o la (IV. 14), es entonces posible determinar  $\dot{\xi}$ , sin hacer alguna hipótesis sobre las propiedades reológicas de la sustancia. Haciendo variar los parámetros experimentales  $M$  y  $W_0$  podemos determinar el par  $(\tau, \dot{\xi})$  correspondiente y deducir el reograma de la sustancia.

Nota: La mayoría de los reómetros cilíndricos son destinados a funcionar con espacio intermedio estrecho: las tablas de correlación  $\tau \leftrightarrow M$  y  $\dot{\xi} \leftrightarrow w_0$  dadas por los fabricantes usan simplemente las relaciones (IV. 12) y (IV. 13) o (IV. 14). Es decir que el operador deberá tener siempre el mayor cuidado cuando escoge los cilindros interior y exterior utilizados, y deberá asegurarse siempre que la relación  $R_2/R_1$  no exceda de ninguna manera 1.15; lo que corresponde a un valor 0.15 de  $x$ : este valor es reconocido convencionalmente como un límite que no se debe de pasar para que las relaciones (IV. 12), (IV. 13) y (IV. 14) sean válidas.

Observamos al mismo tiempo que este método no es riguroso y que introduce una incertidumbre acerca de los resultados, que no es despreciable a partir de  $x \approx 0.10$ . Ahora, es muy difícil disponer de

dispositivos para los cuales  $x$  es inferior a 0.10 con una precisión suficiente (dificultades de fabricación).

Es por esto necesario utilizar un espacio intermedio relativamente ancho en el estudio general, sea cual sea el ancho del espacio intermedio:

- En el § 1.2.3.2. mostramos como determinar completamente el comportamiento reológico de la sustancia, planteando la hipótesis que ésta obedece a la ley de Newton, a la ley de potencias, o a la ley de Bingham.

- En el § 1.2.3.3. indicamos brevemente el principio de ciertos métodos generales y damos las referencias bibliográficas: dado que su carácter matemático especializado y su descripción detallada sobrepasa de hecho, el marco general de esta exposición.

### 1.2.3.2. Solución general en el caso de un líquido descrito por la ley de Newton, por la ley de potencias y por la ley de Bingham

Se puede obtener una solución estricta del problema si se conoce previamente el tipo de ecuación reológica que se satisface por el tipo de sustancia que se estudia. A falta de esta información, muchas veces es útil hacer la hipótesis que el material obedece a determinada ecuación reológica, empezando por los tipos de ecuación más conocidos: esta hipótesis será corroborada o reprobada por la práctica.

#### a) Líquido newtoniano

Utilizando las relaciones (IV. 7) y (IV. 10), la ecuación de Newton se escribe:

$$r \frac{dw}{dr} = \frac{1}{\eta} \frac{M}{2 \pi r^2 h r^2}$$

donde  $\eta$  representa la viscosidad constante del líquido:

$$dw = \frac{M}{2 \pi r^2 h \eta} \frac{dr}{r^3}$$

ecuación que se integra, desde el cilindro interior al cilindro exterior:

$$\int_0^{w_0} dw = \frac{M}{2 \pi r^2 h \eta} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^3}$$

Se obtiene entonces:

$$w_0 = \frac{M}{4 \pi r^2 h \eta} \left[ \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right] \quad (\text{IV. 15})$$

Para verificar el comportamiento newtoniano, será necesario, variar  $W_0$  y midiendo  $M$  (o al revés, según el tipo de reómetro utilizado), asegurarse que la gráfica  $W_0 - M$  es lineal, así como lo prevee la relación (IV. 15). Se deduce entonces el coeficiente de viscosidad  $\eta$ :

$$\eta = \frac{M}{4\pi^2 h w_0} \left[ \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right] \quad (\text{IV. 16})$$

Señalamos que  $\eta$  también se puede escribir de la forma equivalente como:

$$\eta = \frac{M}{4\pi^2 h} \cdot \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 R_2^2} \cdot \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \cdot \frac{1}{w_0}$$

expresión que iguala la relación esfuerzo entre velocidad de corte cuando estas dos magnitudes son dadas por las relaciones (IV. 12) y (IV. 14); así es como el procedimiento experimental utilizado en el caso de un espacio intermedio estrecho -- (§ 1.2.3.1.) conduce a resultados absolutamente estrictos en el caso de un líquido newtoniano, con la condición de adoptar la relación (IV. 14) para expresar  $\dot{\epsilon}$ .

#### b) Líquido que obedece a la ley de potencias

Se vió en el capítulo III, (relaciones III. 7 y III. 12), que numerosos líquidos con un comportamiento fluidificante o espesante eran susceptibles de tener como ecuación reológica empírica una ley de potencias de la forma:

$$\tau = K \dot{\epsilon}^n \quad (\text{IV. 17})$$

siendo  $K$  y  $n$  dos parámetros constantes que caracterizan completamente el comportamiento reológico del líquido.

Si partimos de la hipótesis de que la sustancia que se estudia es representada por las ecuaciones (IV.7) y (IV.10) tenemos:

$$\dot{\epsilon} = r \frac{dw}{dr}$$

$$\tau = \frac{M}{2\pi^2 h r^2}$$

$$r \frac{dw}{dr} = \left[ \frac{\tau}{K} \right]^{\frac{1}{n}} = \frac{M}{2\pi^2 h K} \left[ \frac{1}{r^2} \right]^{\frac{1}{n}}$$

y por consiguiente:

$$dw = \left[ \frac{M}{2\pi^2 h K} \right]^{\frac{1}{n}} \frac{dr}{- \frac{2}{n} - 1}$$

O sea, integrando el cilindro interior y el cilindro exterior:

$$\int_0^{w_0} dw = \left[ \frac{M}{2 \pi h K} \right]^{\frac{1}{n}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^{\frac{n}{n} + 1}}$$

$$w_0 = \left[ \frac{M}{2 \pi h K} \right]^{\frac{1}{n}} \frac{n}{2} \left[ \frac{1}{R_1^{2/n}} - \frac{1}{R_2^{2/n}} \right] \quad (\text{IV. 18})$$

Tomando el logaritmo de dos miembros de esta relación, tenemos:

$$\log w_0 = \frac{1}{n} \log M + Y_0$$

con:

$$Y_0 = \log \left\{ \frac{n}{2} \left[ \frac{1}{R_1^{2/n}} - \frac{1}{R_2^{2/n}} \right] \right\} - \frac{1}{n} \log 2 \pi h K \quad (\text{IV. 19})$$

Las modalidades prácticas del estudio experimental son entonces las siguientes.

Haciendo variar la velocidad angular de rotación  $W_0$  y midiendo los pares  $M$  correspondientes (o al revés, según el procedimiento experimental), se colocan los valores  $\log W_0$  y  $\log M$  sobre dos ejes ortogonales (figura 7).

Se obtiene así un sistema de puntos. Se pueden presentar dos casos:

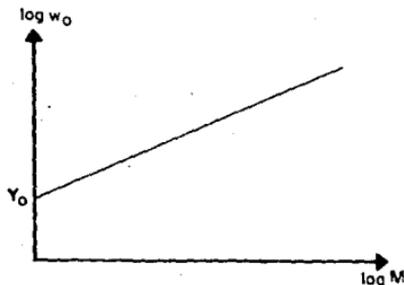


Figura (7)

— Si los puntos no están alineados en una recta: nuestra hipótesis fue injustificada.

— Si los puntos están alineados en una recta: el líquido sí obedece a la ley de potencias. Se obtiene entonces:

- el valor  $n$  determina la pendiente de la recta, igual a  $1/n$ .

- el valor  $K$  determina la ordenada al origen  $Y_0$ .

Nota: Queda claro que el líquido newtoniano es un caso particular de la ley de potencia, con  $n = 1$  y  $K = \eta$ : las ecuaciones (IV. 18 y IV. 15) coinciden entonces.

### c) Líquido de Bingham

Otro comportamiento reológico típico encontrado con frecuencia es el del líquido de Bingham [capítulo III, relación (III. 5)], cuya ecuación se escribe:

$$\tau = \tau_c + \alpha \dot{\epsilon} \quad (\text{IV. 20})$$

donde  $\tau_c$  y  $\alpha$  son coeficientes constantes que caracterizan completamente el comportamiento reológico del líquido.

Se sabe que un líquido de Bingham no fluye sino hasta que el esfuerzo que se le aplica sea superior a  $\tau_c$ . Según la relación (IV. 7) queda claro que, en el espacio intermedio del reómetro, para un par de rotación aplicado M, el esfuerzo decrece cuando pasa del cilindro interior al cilindro exterior. Introduzcamos entonces un radio ficticio  $R_c$  definido por:

$$\tau_c = \frac{M}{2\pi r h R_c^2} \iff R_c = \sqrt{\frac{M}{2\pi r h \tau_c}}$$

Como sabemos se pueden encontrar los tres tipos de funcionamiento siguiente:

- Primer caso:  $R_c < R_1$

entonces  $\tau_1 < \tau_c$ ; todos los esfuerzos en el espacio intermedio siendo inferiores a  $\tau_c$  no es posible ningún flujo.

- Segundo caso:  $R_1 < R_c < R_2$

La capa de líquido comprendida entre  $R_1$  y  $R_c$  fluye, mientras que la capa comprendida entre  $R_c$  y  $R_2$  permanece en masa, pegada al cilindro exterior y girando a la misma velocidad angular que  $W_0$  (figura 8).

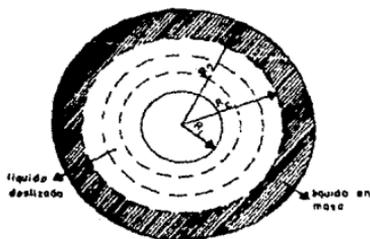


Figura (8)

- Tercer caso:  $R_2 < R_c$

La totalidad del líquido fluye en un movimiento laminar de deslizamiento.

Si  $R_c$  y  $M$  varían en la misma dirección, los tres casos descritos se encuentran sucesivamente, haciendo crecer  $M$  a partir de cero.

De manera muy general:

$$\dot{\epsilon} = r \frac{dw}{dr}$$

$$\tau = \frac{M}{2\pi r^2 h r^2}$$

$$r \frac{dw}{dr} = \frac{\tau - \tau_c}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{M}{2\pi r^2 h r^2} - \frac{\tau_c}{\alpha}$$

así que:

$$dw = \frac{M}{2\pi r^2 h \alpha} \frac{dr}{r^3} - \frac{\tau_c}{\alpha} \frac{dr}{r} \quad (\text{IV.22})$$

Integrando esta relación:

- De  $R_1$  a  $R_c$  en el segundo caso;

- De  $R_1$  a  $R_2$  en el tercer caso.

Finalmente se obtiene:  $w = 0$  para  $M < 2\pi r^2 h R_1^2 \tau_c$

$$w_0 = \frac{1}{4\pi r^2 h \alpha} \left[ \frac{1}{R_1^2} - \frac{2\pi r^2 h \tau_c}{M} \right] M - \frac{\tau_c}{2\alpha} \ln \frac{M}{2\pi r^2 h \tau_c R_1^2}$$

para  $2\pi h R_1^2 \tau_c < M < 2\pi r^2 h R_2^2 \tau_c$

$$w_0 = \frac{1}{4\pi r^2 h \alpha} \left[ \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right] M - \frac{\tau_c}{\alpha} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{IV.23})$$

para  $2\pi h R_2^2 \tau_c < M$

La gráfica  $W_0 - M$  correspondiente, está representada en la figura 9 y muestra una sección lineal para los valores de  $M$  superiores a  $2\pi h R_2^2 \tau_c$

Experimentalmente, se miden los diferentes valores del par  $(W_0, M)$ ; se traza la gráfica correspondiente:

- Si la curva no presenta el comportamiento asintótico lineal: el líquido no es un líquido de Bingham.
- Si la curva sí presenta la forma de la figura 9. Relacionándola, es fácil determinar  $\tau_c$  y  $\alpha$ , si se conocen las constantes del aparato:

$$\ln \frac{R_2}{R_1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{4\pi h} \left[ \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right]$$

Será posible seguir el método y aplicarlo a todos los casos particulares de la ecuación reológica que se encuentren (Steiger, Shandraw, etc.) También es posible utilizar métodos generales sin partir de ninguna hipótesis sobre el comportamiento reológico que se supone tiene el material.

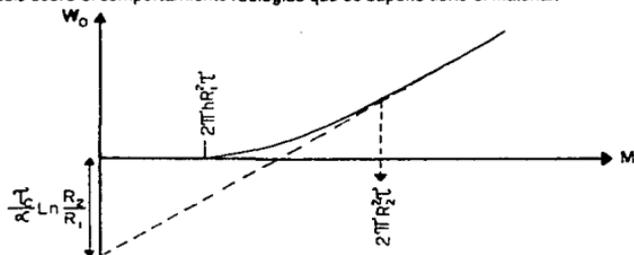


Figura (2)

### 1.2.3.3 Métodos de análisis que utilizan desarrollos en serie

Ya vimos que:

$$\dot{\epsilon} = r \frac{dw}{dr} \quad , \quad T = \frac{M}{2\pi hr^2}$$

puediendose escribir:

$$r \frac{dw}{dr} = r \frac{dw}{dT} \frac{dT}{dr} = -r \frac{dw}{dT} \frac{M}{\pi hr^3}$$

y por consiguiente:

$$\dot{\epsilon} = -2T \frac{dw}{dT}$$

O como:

$$\dot{\epsilon} = g(T)$$

la ecuación reológica de estado de la sustancia:

$$dw = -\frac{1}{2} g(T) \frac{dT}{T}$$

Integrando entre el cilindro interior y el cilindro exterior, se obtiene:

$$w_0 = -\frac{1}{2} \int_{T_1}^{T_2} \frac{g(T)}{T} dT$$

donde  $T_1$  y  $T_2$  representan los esfuerzos sobre el cilindro interior y exterior respectivamente.

Esta ecuación sirve de base para los métodos matemáticos analíticos, que consisten en efectuar un desarrollo en serie de la cantidad  $g(\tau)/\tau$ . Se han experimentado numerosos desarrollos en serie. Se recordarán

- Los desarrollos de convergencia rápida, en el caso de un espacio intermedio relativamente estrecho: así existen las soluciones propuestas por Mooney (1), Moore y Davies (2), Krieger y Elrod (3), Yang y Krieger (4).
- Los desarrollos de convergencia rápida para espacios intermedios anchos: solución de Thornton (5).

Mencionemos otra técnica propuesta por Krieger y Maron (6), que supone el uso de varios cilindros interiores de radios diferentes, de la misma altura y con el cilindro exterior sin cambios. El empleo de estas técnicas altamente especializadas es relativamente limitado: su interés es básicamente enfocado a estudios experimentales que piden una alta precisión.

Nota: Los métodos propuestos en los párrafos § 1.2.3.2 y 1.2.3.3 suponen que el material estudiado no tiene un flujo que depende de los tratamientos anteriores: de hecho se ha considerado que  $\dot{\epsilon}$  era una función del único esfuerzo aplicado al mismo instante  $\tau$ , y no dependía de la historia anterior del material.

Si este no es el caso, la técnica consiste en utilizar espacios intermedios tan estrechos como sea posible, según el método del párrafo § 1.2.3.1; el esfuerzo aplicado es sensiblemente constante en el espacio intermedio, se puede considerar entonces, que todas las capas del material han sido sometidas a los mismos tratamientos mecánicos anteriores.

#### 1.2.3.4. Principales tipos de aparatos y su campo de utilización.

Los reómetros rotativos cilíndricos son muy numerosos. Se distinguen:

- los aparatos con velocidad de rotación  $W_0$  impuesto (los más utilizados);
- los aparatos con par de fuerzas  $M$  impuesto.

Los reómetros también se clasifican según el cilindro móvil, el exterior o el interior: notemos que las fórmulas establecidas se aplican de la misma manera si es el cilindro interior el que gira, o si giran ambos cilindros, con la condición que  $W_0$  se tome como velocidad angular de rotación de los cilindros. La mayoría de los reómetros utilizados en los laboratorios presentan un funcionamiento automatizado que permite un registro gráfico directo de los reogramas  $\tau - \dot{\epsilon}$ . Se debe insistir en el hecho de que las fórmulas utilizadas por el fabricante (§ 1.2.3.1) suponen que el espacio intermedio es ancho. Los reogramas registrados no

tendrán pues significado, sino en la medida en que esta condición se a verificada. Si ocurre que se trabaje con un espacio intermedio ancho, el registro gráfico y las tablas de correlación sumistradas por el fabricante no se pueden utilizar: hay que recurrir a los métodos descritos en § 1.2.3.2 y 1.2.3.3.

Según las características de los reómetros cilíndricos utilizados, se pueden estudiar sustancias con viscosidades muy diferentes: la gama de viscosidades se puede extender, según los aparatos, de  $10^{-3}$  (Pa · s) a  $10^6$  (Pa · s) y de  $10^{-3}$  (pa · s) a  $10^7$  (pa · s).

La precisión de las mediciones es buena, y puede ser todavía mejorada, por ejemplo disminuyendo los efectos de las extremidades que perturban el flujo en capas cilíndricas coaxiales que introducen desviaciones con relación a las expectativas teóricas. Esto se alcanza adoptando diversas técnicas: utilización de cilindros con guarnición, o de cilindros largos que terminan en conos que tienen la misma cúspide, etc...

En cuanto a las desventajas de este tipo de reómetros, recordemos dos que frecuentemente observamos:

- la necesidad de disponer de un volumen de muestra relativamente grande;
- la imposibilidad de estudiar las sustancias con muy alta viscosidad (a partir de  $10^7$  Pc · s)

### 1.3. Reómetros rotativos con cono/disco

Aunque menos difundido que los reómetros cilíndricos, este tipo de reómetros poseen cualidades significativas que lo hacen ser un competidor y un complemento indispensable del reómetro cilíndrico.

#### 1.3.1. Principio de funcionamiento

La sustancia que se quiere estudiar está encerrada entre un disco y un cono rotativo de radio R, cuyo eje es perpendicular al plano del disco y cuya punta está situada sobre el disco. El ángulo  $\gamma$  que forma la generatriz del cono y el disco es pequeño: es siempre menor de  $5^\circ$  y puede cerrarse a hasta  $0.3^\circ$  (figura 10).

El movimiento laminar de deslizamiento se obtiene transmitiéndole al cono una velocidad de rotación constante  $W_0$ , mientras que el disco permanece fijo. La sustancia se descompone entonces en capas que son constituidas por conos rotativos que tienen la misma cúspide y el mismo eje que el cono sólido, impulsadas por velocidad angular de rotación diferente, que varían continuamente de 0 (para la capa que está en contacto con el disco) a  $W_0$  (para la capa que está en contacto con el cono sólido). Debido al movimiento relativo de las capas, unas con relación a las otras, aparece en cada punto de la muestra una velocidad de corte  $\dot{\gamma}$  y un esfuerzo cortante  $\tau$ .

Se encuentran sin distinción, dos procedimientos

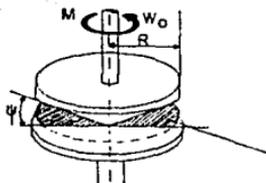


Figura (10)

experimentales en donde al cono se le impone:

- Un par de rotación conocido  $M$  y se mide la velocidad angular  $w_0$  correspondiente.
- Una velocidad angular de rotación  $W_0$  determinado y se mide entonces el par de rotación  $M$  correspondiente.

Es necesario conocer las relaciones que existen entre  $\dot{\epsilon}$ ,  $\tau$  y las cantidades experimentalmente accesibles, es decir  $W_0$  y  $M$ .

### 1.3.2. Ecuaciones generales para determinar $\tau$ y $\dot{\epsilon}$ .

La deducción de las ecuaciones generales que se satisfacen con la determinación de  $\tau$  y  $\dot{\epsilon}$ , presentan ciertas dificultades matemáticas: el método empleado es estrictamente idéntico al que se utilizó en el estudio de los reómetros planos y cilíndricos. Sin embargo, la simetría cónica requiere un tratamiento matemático algo más delicado. Es por esto que, para no sobrecargar la exposición, reproduciremos en un apéndice (Apéndice IV A) las demostraciones y los cálculos formales.

Se demuestra que, para ángulos cono/disco  $\psi$  muy pequeños ( $\leq 5^\circ$ ), se puede considerar con buena precisión que el esfuerzo  $\tau$  y la velocidad de corte  $\dot{\epsilon}$  son constantes en todo el espacio ocupado por la muestra, entre el cono y el disco, y que se expresan por las relaciones:

$$\tau = \frac{3M}{2\pi R^3} \quad (IV. 28)$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{W_0}{\psi} \quad (IV. 29)$$

donde  $\psi$  se expresa obviamente, en radianes.

Las relaciones (IV. 28) y (IV. 29) permiten determinar con facilidad, a través de la medida de  $M$  y  $W_0$  ( $\psi$  y  $R$  siendo especificados por el fabricante), los valores de  $\tau$  y  $\dot{\epsilon}$  correspondientes. Haciendo variar a  $M$  y  $W_0$ , es fácil deducir el programa  $\tau, \dot{\epsilon}$ .

### 1.3.3. Ventajas y límites del reómetro cono/disco

Una gran ventaja adicional que presenta el reómetro cono/disco sobre otros tipos de aparatos, consiste en el hecho que en la medida que  $\psi \leq 5^\circ$  (condición verificada por el fabricante), se puede considerar por una buena precisión, que  $\tau$  y  $\dot{\epsilon}$  son constantes en todas los puntos de la muestra.

Las relaciones (IV. 28) y (IV. 29) se pueden utilizar por consiguiente, sea cual sea el comportamiento reológico del material que se estudia. Notemos a ese respecto que este reómetro es adaptado particularmente al estudio de sustancias cuyo flujo depende en un cierto instante  $t$ , de la historia

mecánica anterior, es decir, del sistema de esfuerzos aplicados antes del instante  $t$  (líquidos tixotrópicos, antitixotrópicos, etc.): debido a la constancia de  $\tau$ , la historia mecánica es la misma para todas las capas del material.

Nota: El reómetro cilíndrico tendría las mismas cualidades si fuera posible utilizar espacios muy pequeños. Por razones de construcción mecánica ya acentadas, es muy difícil realizar con precisión espacios intermedios muy pequeños. Si en la medición se requiere una alta precisión, el reómetro cono/disco se debe pues preferir en general al reómetro cilíndrico.

Notemos también, que entre las ventajas de este tipo de reómetro existen:

- que su manejo no requiere más que un pequeño volumen de muestra;
- que permite alcanzar velocidades de corte elevadas.

De las desventajas podemos citar las siguientes:

- que la simetría cónica del flujo laminar es muy sensible, en particular cuando la posición de la punta del cono se encuentra sobre el disco;
- que este aparato no conviene para el estudio de los materiales cuya estructura es compleja y frágil, ya que pueden ser destruidas (las propiedades) en el pequeño volumen entre el cono y el disco.

La gama de viscosidades susceptibles de ser medidas es generalmente cercana a la de los reómetros cilíndricos. Notemos que la mayoría de los reómetros rotativos están contruidos de tal manera que se les puede sustituir fácilmente el sistema cilíndrico por un sistema cono/disco, y viceversa. Existen otros reómetros rotativos, con un concepto parecido: reómetros con doble cono/disco, con doble cono, con disco/disco, etc. Su uso es muy especializado y relativamente limitado.

## 2.- Reómetros de tipo Poiseuille.

Esta clase de reómetros, de aplicación relativamente simple, es utilizada como "viscosímetros" para mediciones rápidas de la "viscosidad absoluta" de los líquidos newtonianos.

### 2.1. Principios de funcionamiento

En este tipo de reómetros, el movimiento de deslizamiento es generado al imponer una diferencia de presión entre las extremidades de un tubo cilíndrico con una sección circular débil, que contiene la sustancia (figura 11).

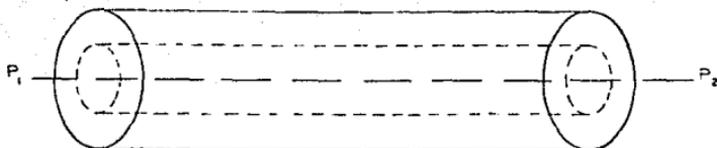


Figura (11)

La diferencia de presión tiende a provocar un movimiento de ensamble en el material, en la dirección decreciente de la presión. A este movimiento de ensamble se le opone la fricción ejercida por las paredes del tubo sobre la capa que está directamente en contacto, así que el material se descompone en capas cilíndricas coaxiales (con el mismo eje que el tubo), impulsadas por diferentes velocidades, mientras que la capa límite permanece en reposo.

## 2.2 Ecuaciones generales

Los reómetros tipo Poiseuille funcionan en posición vertical. A la fuerza de gravedad que es suficiente para provocar el flujo, se puede añadir sin embargo una diferencia de presión en las extremidades del tubo: estableceremos las ecuaciones de funcionamiento en este caso muy general, en el cual el flujo 'vortical' se obtiene a través de la reunión de la acción de la gravedad y de un gradiente de presión.

Distinguiremos las diferentes capas cilíndricas del material por su distancia  $r$ , al eje del cilindro. Anotaremos con  $\tau(r)$  y  $\dot{\epsilon}(r)$  el esfuerzo y la velocidad de corte y utilizaremos un eje vertical  $Oz$ , orientado paralelamente a la altura, para localizar las alturas en el tubo cilíndrico (figura 12).

Consideremos la sección de sustancia contenida en un cilindro de radio  $r$ , limitado por los planos  $z + dz$ ,  $z$ . Esta será sometida a:

- La resultante de fuerzas de presión:  $\{P(z) - P(z + dz)\} \pi r^2$

- La fuerza de gravedad:  $- \rho g \pi r^2 dz$

(donde  $\rho$  y  $g$  representan la masa volumétrica de la muestra y la aceleración gravitacional respectivamente)

- A la fuerza de deslizamiento:  $\tau(r) 2 \pi r dz$

donde cada una de las fuerzas se ejerce verticalmente y se toma como positiva o negativa según se oriente hacia las Z positivas o negativas.

Una vez alcanzando el régimen permanente, la suma algebraica de las fuerzas es cero:

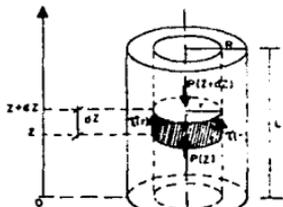


Figura (12)

$$\{P(z) - P(z + dz)\}\pi r^2 - pg\pi r^2 dz + \tau(r)2\pi r dz = 0$$

o bien:

$$P(z + dz) = P(z) + \frac{dp}{dz} dz$$

$$\frac{2\tau(r)}{r} = pg + \frac{dp}{dr} \quad (\text{IV. 30})$$

Ya que los miembros izquierdo y derecho de la ecuación (IV. 30) son función directa de las variables r y z respectivamente, la ecuación se satisface solamente si cada uno de sus miembros es igual a una constante:

$$\frac{2\tau(r)}{r} = pg + \frac{dp}{dz} = A$$

Se deduce que el gradiente de presión es también constante y, por consiguiente:

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\Delta P}{L}$$

donde  $\Delta P$  es la diferencia de presión aplicada en las extremidades del tubo de longitud L.

Se puede escribir la ecuación (IV. 30) de la forma:

$$\frac{2\tau(r)}{r} = A \quad A = pg + \frac{\Delta P}{L}$$

Para la generalización inmediata de la expresión (I. 6) a partir de la velocidad de corte dada para el flujo plano, se obtiene para el flujo cilíndrico:

$$\dot{\epsilon} = - \frac{dv(r)}{dr}$$

introduciendo el signo - (menos) para obtener una velocidad de corte  $\dot{\epsilon}$  positiva; v es, de hecho, una función decreciente de r, así que:

$$\frac{dv}{dr} < 0$$

Podemos decir que nos encontramos frente a condiciones específicas: la ecuación (IV. 33) nos

permite determinar  $\tau(r)$  en cada punto, a través de la medida  $\Delta P / L$ , aun cuando no es posible determinar  $\dot{\epsilon}(r)$  sin conocer previamente el comportamiento reológico del material.

Ya acentuamos que los réomros de tipo Poiseuille se utilizan principalmente en el caso de los líquidos newtonianos. Es por esto que nos limitaremos dentro del marco de esta exposición, al estudio de tales líquidos, presentando en un apéndice (Apéndice IV. B) con una exposición sobre los métodos utilizados en el caso de modelos reológicos conocidos, como el del líquido que obedece a la 'ley de potencias', o bien al líquido de Bingham.

### 2.3. Líquido newtoniano, ley de Poiseuille, aplicaciones

Por definición del coeficiente de viscosidad newtoniana (relación I. 10):

$$\tau(r) = \eta \dot{\epsilon}(r)$$

Tenemos entonces, a partir de las relaciones (IV. 33) y (IV. 34):

$$\frac{dv}{dr} = - \frac{Ar}{2\eta}$$

ecuación que se integra fácilmente, de la superficie del tubo, definida por el radio  $R$ , a la superficie de una capa, determinada por el radio  $r$ :

$$\int_0^v dv = - \frac{A}{2\eta} \int_R^r r dr$$

$$v(r) = \frac{A}{4\eta} (R^2 - r^2) \quad A = \rho g + \frac{\Delta P}{L} \quad (\text{IV. 36})$$

La distribución de las velocidades es entonces parabólica: la velocidad es máxima sobre el eje del tubo; en cuanto uno se aleja del eje, la velocidad decrece proporcionalmente al cuadrado del radio (figura 13).

Será entonces posible (al menos teóricamente) partir de las relaciones (IV. 33) y (IV. 35), y deducir  $\dot{\epsilon}(r)$  a través de la medida de  $\Delta P / L$ . Se produce de diferente manera para medir la capacidad volumétrica  $Q$  a través del tubo:

$$Q = \frac{V}{t}$$

donde  $V$  representa el volumen de líquido que atraviesa una sección recta cualquiera del tubo a través del tiempo  $t$ .

La capacidad volumétrica también se puede expresar por la relación siguiente:

$$Q = \int dQ = \int_0^R v(r) dS$$

donde  $dQ = v(r) dS$  y representa la capacidad elemental a través de la superficie infinitesimal  $dS$ , comprendida entre el radio  $r$  y el radio  $r + dr$  (figura 14).



Figura (13)

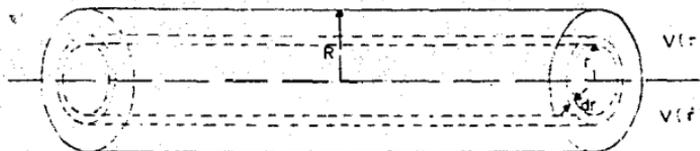


Figura (14)

Ya que  $dS = 2\pi r dr$ , tenemos:

$$Q = 2\pi \int_0^R r v(r) dr = \frac{A\Delta P}{2\eta} \int_0^R r(R^2 - r^2) dr$$

así que:

$$Q = \frac{A\Delta P R^4}{8\eta}$$

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \left( \rho g + \frac{\Delta P}{L} \right) \quad (\text{ley de poiseuille}) \quad (\text{IV. 38})$$

Se observa que a medida que una sustancia es newtoniana, la capacidad volumétrica  $Q$  es una función lineal de la diferencia de presión  $\Delta P$  aplicada a las extremidades del tubo (para una longitud  $dL$  dada). Es posible controlar el comportamiento newtoniano del líquido estudiado, haciendo variar  $\Delta P$ , midiendo las capacidades correspondientes  $Q$  y verificando que la gráfica  $Q - \Delta P$  sea una recta.

Si se está seguro del carácter newtoniano del líquido estudiado, una sola medición es suficiente para satisfacer dicho requisito. Entonces es práctico y frecuentemente utilizado un reómetro en el cual la gravedad es responsable del flujo ( $\Delta P = 0$ ). Se mide la capacidad  $Q$ , anotando el intervalo de tiempo  $t$  necesario para el flujo de un volumen dado  $V$ , y se deduce la viscosidad  $\eta$ :

$$\eta = \frac{\pi R^4}{8Q} \rho g$$

$$\eta = \frac{V}{8V} \rho g t$$

Es necesario para mejorar la precisión de la medición, utilizar un líquido newtoniano de referencia, con viscosidad y masa volumétrica conocidas,  $\eta_0, \rho_0$ .

Si  $t_c$  representa el tiempo necesario para el flujo del mismo volumen  $V$ , aplicando la fórmula (IV. 39) se obtiene:

$$\nu = \nu_c \frac{F}{F_c} = \frac{t}{t_c}$$

relación que se puede escribir introduciendo la viscosidad cinemática  $\nu$  (relación I. 11)

$$\nu = \nu_c \frac{t}{t_0}$$

Conociendo  $\nu_0$ , es suficiente con determinar los tiempos de flujo  $t$  y  $t_0$  de un mismo volumen igual  $V$ , para deducir  $\nu$ . Esta técnica es utilizada frecuentemente, además condujo a la introducción de una magnitud adimensional llamada, Grado Engler.

Por definición, el grado Engler,  $E$ , de un líquido es la relación del tiempo de flujo de un cierto volumen de líquido al tiempo de flujo del mismo volumen de agua, en las mismas condiciones de temperatura y presión:

$$E = \frac{t}{t_c}$$

Queda claro que se tiene:

$$\nu = \nu_0 E$$

donde  $\nu_0$  representa la viscosidad cinemática del agua que se le asimila a un líquido perfectamente newtoniano. Recordemos que todos los desarrollos de este párrafo son válidos solo para los líquidos newtonianos.

#### 2.4. Campo de utilización

Ya indicamos que la utilización de este tipo de reómetros es generalmente limitado al estudio de los líquidos cuyo comportamiento es newtoniano o muy parecido a éste. Su utilización es posible sin diferencia alguna, según los cálculos del Apéndice IV. B, en el caso de los modelos reológicos estándar.

Sin embargo, ya que la ecuación reológica del material no corresponde a ninguno de estos modelos, en particular para las sustancias cuyo flujo depende de la historia mecánica anterior, su empleo es inapropiado: se deben preferir los reómetros rotativos.

En líneas muy generales, se distinguen dos categorías de reómetros de poiseuille:

- Los reómetros capilares verticales de tipo Ostwald, en los cuales únicamente la gravedad es responsable del flujo; se utilizan principalmente para el estudio de los líquidos newtonianos de baja viscosidad.
- Los reómetros verticales y horizontales, en los cuales una presión moltrix susceptible de variación se aplica a la muestra (por medio de un gas, de un pistón, de una bomba, etc.); se

utilizan para el estudio de los líquidos más viscosos. su gama se extiende de  $10^{-1}$  Pa·s a  $10^7$  (Pa·s).

Notemos también que la precisión de las mediciones puede mejorarse utilizando un cierto número de correcciones introducidas para tomar en consideración los efectos de extremidad, corrección de energía cinética, corrección de entrada, etc.

### 3. Viscosímetros con caída de bola

Es sin duda necesario concluir esta primera parte dedicada al estudio de los reómetros permanentes, con una presentación rápida del funcionamiento del viscosímetro con caída de bola, cuyo empleo es cómodo y rápido, ya que de hecho no permite más que el estudio de líquidos estrictamente newtonianos

Su principio de funcionamiento es muy simple: una esfera sólida y rígida, de radio  $R$  y con masa volumétrica  $\rho_s$ , es sometida a un efecto de la gravedad en el líquido newtoniano que se estudia con masa volumétrica  $\rho$  y con coeficiente de viscosidad  $\eta$  (figura 15).

1.- A la fuerza de gravedad:

$$F_g = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_s g$$

siendo  $g$  la aceleración gravitacional.

2.- Al principio de Arquímedes:

$$F_c = -\frac{4}{3} \pi R^3 \rho g$$

3.- A una fuerza de deslizamiento  $F_c$  provocada por el líquido sobre la superficie de la esfera; la expresión de esta fuerza está dada por la ley de Stokes (una ley que para establecerla necesita desarrollos matemáticos bastante complejos y que no demostraremos aquí):

$$F_c = -6\pi R \eta v$$

(IV. 44)

siendo  $v$  la velocidad de la esfera sólida.

Cada una de estas fuerzas se ejerce verticalmente, y se toma como positiva o negativa, según estén orientadas las  $Z$ 's positivas o negativas.

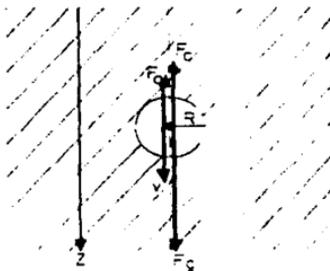


Figura (15);

Después de alcanzado el régimen permanente, la esfera adquiere una velocidad límite constante y la suma algebraica de las fuerzas es cero

$$6 \pi \eta R v = \frac{4}{3} \pi R^3 (\rho_s - \rho) g$$

o bien:

$$\eta = \frac{2}{9v} g R^2 (\rho_s - \rho)$$

Se ve, según esta relación, que para determinar  $\eta$  es suficiente con medir la velocidad límite de caída de la esfera. Este método, bastante impreciso, puede sin embargo ser mejorado efectuando mediciones relativas y utilizando cálculos de corrección.

Para abreviar, los reómetros con régimen permanente constituyen la clase de reómetros más conocida y más difundida. Permiten, como hemos visto, la determinación de reogramas  $\tau-\dot{\epsilon}$  con una gran precisión (principalmente los reómetros rotativos). Su campo de aplicación es sin embargo limitado ya que debido a su funcionamiento (necesita un régimen de flujo permanente), su campo de aplicación se reduce al estudio de sustancias que poseen un comportamiento líquido; es necesario añadir que este tipo de reómetros no puede caracterizar las propiedades elásticas que presentan ciertos líquidos, que se manifiestan en el régimen transitorio periódico; la segunda y tercera parte del capítulo IV presentarán sucesivamente los reómetros que funcionan en régimen transitorio y periódico, y que permiten el estudio de las propiedades viscoelásticas de sustancias con comportamiento tanto líquido como sólido.

#### IV. 2. Reómetros de régimen transitorio

Los reómetros de régimen transitorio son utilizados principalmente para el estudio y determinación del comportamiento viscoelástico de los materiales lineales, tanto sólido como líquido. En estos reómetros, la muestra se somete a una sollicitación instantánea (con frecuencia a un esfuerzo), que se mantiene constante. Durante un cierto intervalo de tiempo que precede al establecimiento del régimen permanente, el material manifiesta un comportamiento que depende del tiempo: el estudio de este régimen transitorio permite determinar las propiedades viscoelásticas del material.

Existen dos tipos de reómetros transitorios\*: los reómetros de deformación bajo esfuerzo y los reómetros de relajamiento.

\* Ver capítulo II, párrafo § 1.2.

## 1. Reómetros de deformación bajo esfuerzo

### 1.1- Definición

Como expusimos en el capítulo II §(1.2), el experimento de deformación bajo esfuerzo es un proceso durante el cual un esfuerzo de amplitud constante  $\tau$  se aplica a la muestra estudiada, a partir de un instante inicial  $t=0$ . La deformación de deslizamiento correspondiente  $\epsilon(t)$  se mide. Para un material lineal, se puede deducir entonces la función de deformación bajo esfuerzo  $f(t)$ :

$$f(t) = \frac{\epsilon(t)}{\tau}$$

El conocimiento de esta función de deformación permite determinar las propiedades viscoelásticas del material, con los métodos indicados en el capítulo II (método de Inokuchi, Apéndice II.C). Un reómetro con esta función de deformación es entonces capaz:

- de imponer en un instante dado, un esfuerzo constante  $\tau$ , conocido;
- de medir la deformación de deslizamiento correspondiente  $\epsilon(t)$  y de seguir la evolución a través del tiempo

### 1.2 Principio y ecuaciones de funcionamiento

Nos limitaremos a la presentación de los reómetros de deformación más utilizados, los reómetros rotativos: cilíndricos, cono/disco, y disco/disco.

Su funcionamiento es el siguiente: en un instante inicial  $t=0$  se aplica un par constante  $M$  al cilindro exterior, al cono o al disco superior, y se registra gráficamente la variación correspondiente del ángulo de rotación  $\phi(t)$  del cilindro, del cono o del disco a través del tiempo.  $M$  y  $\phi(t)$  son entonces los datos experimentales dados.

Mostraremos como se determina  $M$  y  $\phi(t)$  a partir de los datos anteriormente mencionados. Consideremos sucesivamente el caso de los reómetros cilíndricos y cono/disco § (1.2.1), y el caso del reómetro disco/disco § (1.2.2).

#### 1.2.1. Reómetros de deformación cilíndrica y cono/disco

Aunque incluyen cierto equipo accesorio, no difieren en nada en su estructura al de los reómetros rotativos utilizados en el régimen permanente, que son descritos en la primera parte de este capítulo.

En régimen transitorio, los espacios intermedios utilizados son siempre pequeños, tanto para el cono/disco como para el cilindro y siendo el volumen de la muestra muy pequeño, es posible entonces despreciar las fuerzas de inercia que aparecen en el régimen transitorio dentro de la materia, comparadas con las fuerzas de deslizamiento. De manera que el balance de fuerzas es idéntico al del régimen permanente, y que las relaciones (IV 12) y (IV. 28) se comprueban también en el régimen transitorio, entonces:

$$\tau = \tau_c M$$

donde  $\kappa$  es una constante del aparato y se representa como

$$\kappa = \frac{1}{4\pi h} \frac{R_1^2 + h^2}{R_1^2 R_2^2} \quad \text{para reómetros cilíndricos} \quad (\text{IV.46})$$

$$\kappa = \frac{3}{2\pi R^3} \quad \text{para reómetros cono/disco}$$

\*Ver capítulo II, párrafo § (1.2).

Por otro lado, es claro que la expresión de la velocidad de corte  $\dot{\epsilon}$ , representada en el caso de un espacio intermedio estrecho por las relaciones (IV.13) y (IV.29), es entonces válida:

$$\dot{\epsilon} = \beta \omega_0$$

donde  $\beta$  es una constante del aparato.

$$\beta = \frac{R_1}{R_2 - R_1} \quad \text{para reómetros cilíndricos} \quad (\text{IV.47})$$

$$\beta = \frac{1}{\psi} \quad \text{para reómetros cono/disco}$$

donde  $\omega_0$  representa la velocidad angular del cilindro exterior o del cono, y por definición igual a  $d\phi/dt$ ,  $\phi(t)$  representa el ángulo de rotación del cilindro o del cono en el instante  $t$ :

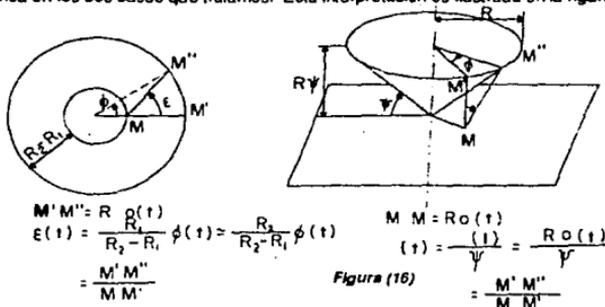
$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \beta$$

relación que se integre inmediatamente y suministra la expresión de la deformación de deslizamiento

$\epsilon(t)$ :

$$\epsilon(t) = \beta \phi(t)$$

Con la condición que  $\epsilon(t)$  permanezca pequeño ( $\leq 0.1$ ), es posible hacer una interpretación geométrica en los dos casos que tratamos. Esta interpretación es ilustrada en la figura 16.



$$M'M'' = R \frac{R_1}{R_2 - R_1} \phi(t) = \frac{R_2}{R_2 - R_1} \phi(t)$$

$$\epsilon(t) = \frac{M'M''}{M'M} = \frac{R_2}{R_2 - R_1} \phi(t)$$

$$M'M'' = R \phi(t)$$

$$\epsilon(t) = \frac{M'M''}{M'M} = \frac{R \phi(t)}{R \psi} = \frac{\phi(t)}{\psi}$$

Figura (16)

Resumiendo, tenemos:

$$\tau = \alpha M \quad \epsilon(t) = \beta \phi(t)$$

Reómetro cilíndrico:

$$\alpha = \frac{1}{4\pi r} \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 R_2^2} \quad \beta = \frac{R_1}{R_2 - R_1}$$

Reómetros cono/disco:

$$\alpha = \frac{3}{2\pi R^3} \quad \beta = \frac{1}{\psi} \quad (\text{IV.49})$$

Se nota que el conocimiento de los datos experimentales dados  $M$  y  $\phi(t)$  permite fácilmente el cálculo de  $\tau$  y  $\epsilon(t)$ , por aplicación de las relaciones (IV.49); la función de deformación se deduce entonces con más facilidad, aplicando:

$$f(t) = \frac{\epsilon(t)}{\tau} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\phi(t)}{M} \quad (\text{IV.50})$$

### 1.2.2. Reómetro de deformación disco/disco (relativo)

Este tipo de reómetros, también llamados reómetro de torsión, está constituido por dos discos paralelos que tienen un mismo eje OZ, con radio  $R$  y que se encuentran a una distancia  $L$  uno del otro; uno de los discos se mantiene en reposo, mientras que el otro se somete a un par de fuerzas  $M$  (figura 17).

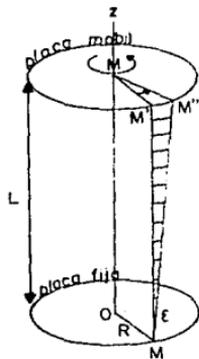


Figura (17)

Bajo el efecto del par de fuerzas, las sustancias se descomponen en capas circulares, paralelas a los discos sólidos.

Se demuestra (Apéndice IV.C) que, para un material lineal, es el esfuerzo y la deformación de deslizamiento no dependen de la altura  $Z$  de la capa considerada; en cambio depende de la distancia  $r$  al eje de rotación:

$$\tau(r) = \frac{2r}{\pi R} M$$

$$\epsilon(r, t) = \frac{r}{L} \phi(t)$$

La figura 17 presenta una representación simple de la deformación  $\epsilon(r, t)$  para  $r = R$ . La relación  $\frac{\epsilon(r, t)}{\tau(r)}$  sin embargo es independiente de  $r$ , así que la función de deformación tiene como expresión:

$$f(t) = \frac{\pi R}{2L} \frac{f(t)}{M} \quad (\text{IV.52})$$

Hay que acentuar que las relaciones precedentes son válidas, sea cual sea la altura  $L$  del espacio intermedio entre los dos discos.

**Nota:** Ya que la función de deformación determinada así tiene un significado físico, es indispensable que el material estudiado presente un comportamiento lineal; como vimos en el Capítulo II, prácticamente todas las sustancias tienen un comportamiento lineal en la medida que están sometidas a esfuerzos suficientemente pequeños. Es pues necesario controlar previamente la linealidad del material, sometido a pares de fuerzas  $M$  crecientes y verificando si el ángulo de rotación  $\theta(t)$  es proporcional a  $M$  (efecto proporcional a la causa). Si no es así, se deberá disminuir el valor del par de fuerzas  $M$  hasta que se identifique la región lineal. Es entonces esta condición la que definirá la función de deformación  $f(t)$ .

### 1.3. Ventajas y límites de los reómetros de deformación

Como acabamos de ver, un reómetro transitorio de deformación debe ser capaz de imponer al material esfuerzos suficientemente pequeños para que éste tenga un comportamiento lineal. Por consiguiente, debe ser capaz de medir ángulos de rotación  $\theta(t)$  extremadamente pequeños: los aparatos perfeccionados provistos con un registro gráfico suficientemente sensible, son capaces de apreciar una rotación angular de  $10^{-4}$  radianes (lo que corresponde a una rotación de aproximadamente un segundo). Esto supone un dispositivo de medición altamente sofisticado y por consiguiente muy costoso.

Este tipo de reómetros es destinados principalmente para el estudio del comportamiento viscoelástico lineal y el análisis de su función de deformación  $f(t)$ , y de la deducción de los parámetros  $J_0$ ,  $J_1$ ,  $\eta_1$  que caracterizan su elasticidad instantánea y retrasada (Capítulo II). Notemos también que permite:

- la medición de los coeficientes de viscosidad  $\eta_0$  extremadamente altos (que pueden alcanzar  $10^{10}$  (Pa·s), que son inaccesibles a la mayoría de los reómetros permanentes;
- la determinación de los límites de flujo  $\dot{\gamma}_c$  con una precisión incomparablemente mayor que la de los reómetros permanentes utilizados: para esto es suficiente identificar el esfuerzo límite que separa el comportamiento sólido (el módulo de Kelvin-Voigt generalizado sin amortiguador en serie) del comportamiento líquido (el módulo de Kelvin-Voigt generalizado con amortiguador en serie).

La figura 18 presenta las dos gráficas  $\theta = \theta(t)$  observadas hasta el límite de flujo  $\dot{\gamma}_c$  y más allá de él. Para el estudio de los materiales muy consistentes (líquidos muy pesados y sólidos) se recomienda el uso de reómetros disco/disco, principalmente por la posibilidad de variar continuamente el espacio

- intermedio, que permite resultados más extensos y adaptados a las dimensiones de la muestra. En el caso de materiales más fluidificantes el reómetro cono/disco se debe preferir al reómetro cilíndrico en la mayoría de los casos, por su espacio intermedio generalmente más pequeño que el del reómetro cilíndrico, asegurando una mejor constancia del esfuerzo cortante  $\tau$  en el espacio.

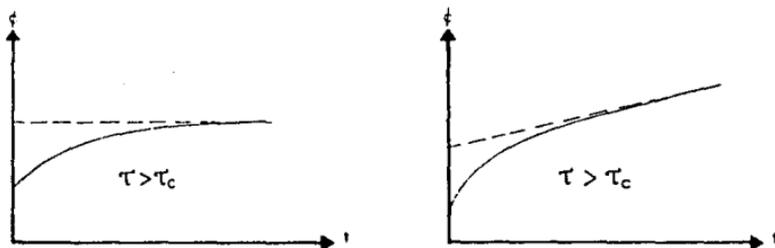


Figura (18)

Al mencionar las desventajas, se debe señalar que la inercia del reómetro y de su registrador no permiten la medición precisa del coeficiente de elasticidad instantánea  $J_0$ : solamente los reómetros dinámicos (de régimen periódico) son capaces de esto.

## 2. Reómetros de relajamiento

Tradicionalmente, un experimento de relajamiento consiste en someter la muestra antes del reposo a una deformación instantánea, que es mantenida constante, al estudiar la deformación de los esfuerzos (Capítulo II). Sin embargo, para la mayoría de las sustancias viscoelásticas, este tipo de experimentos provoca esfuerzos generalmente débiles y difíciles de medir: los reómetros correspondientes son muy poco usados y por lo tanto no hablaremos de ellos.

Sin embargo, existe un experimento de "relajamiento generalizado", durante el cual la evolución de los esfuerzos se puede medir fácilmente: Este consiste en el estudio, estando el material en un estado de flujo permanente caracterizado por una velocidad y un esfuerzo de corte constante, reduciendo esta velocidad instantánea a cero y midiendo la evolución del esfuerzo a través del tiempo. Este tipo de experimento puede ser realizado muy fácilmente en la mayoría de los reómetros rotativos. Es suficiente que estos puedan hacer variar "instantáneamente" la velocidad de rotación del móvil, de  $\omega_0$  a 0, para que puedan ser utilizados. Se aplica a sustancias con un comportamiento líquido (puesto que requieren la existencia de un régimen inicial de flujo). Analizando la gráfica registrada  $\tau - t$ , que presenta el relajamiento del esfuerzo a través del tiempo, se pueden determinar ciertas propiedades viscoelásticas del material.

Mostraremos el experimento en el caso del líquido viscoelástico lineal más simple, el líquido de

Maxwell. Su ecuación reológica se escribe (ecuación II.18): 
$$J \frac{d\tau}{dt} - \frac{1}{\eta} \tau = \epsilon$$

Después que la velocidad de corte  $\dot{\epsilon}$  es reducida bruscamente a cero, el esfuerzo  $\tau$  satisface la ecuación:

$$J \frac{d}{dt} + \frac{1}{\eta} \tau = 0 \quad (IV.53)$$

o sea, 
$$\frac{d\tau}{\tau} = - \frac{dt}{\theta}$$

donde  $\theta = \eta J$  es el tiempo de relajamiento de líquido de Maxwell.

Esta ecuación se integra fácilmente entre el instante  $t = 0$  en el cual el esfuerzo es igual al esfuerzo inicial  $\tau_0$ , y el instante  $t$  en el cual el esfuerzo es  $\tau$ :

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\tau} = - \int_0^t \frac{dt}{\theta} \quad , \quad \tau = \tau_0 e^{-t/\theta} \quad (IV.54)$$

El esfuerzo decrece entonces exponencialmente a través del tiempo, a partir de su valor inicial  $\tau_0$  (figura 19).



Figura (19)

Es fácil calcular, a partir de la gráfica  $\tau-t$ , el tiempo de relajamiento  $\theta$  del líquido de Maxwell, por ejemplo, determinando el tiempo  $t = \theta$  al fin del cual el esfuerzo inicial  $\tau_0$  es reducido a  $\tau_0/e$ . Conociendo el coeficiente de viscosidad  $\eta$  por medio de mediciones en régimen permanente, es entonces posible reducir el coeficiente de complacencia elástica  $J$  del modelo.

Se debe notar que el reómetro no mide directamente el esfuerzo  $\tau$ , sino el par de fuerzas  $M$  que es proporcional a éste (relaciones IV.49 y IV.51), con la condición de despreciar las fuerzas de inercia una aproximación en tanto más sofisticada en cuanto el espacio intermedio sea más pequeño).

Parece que éste método puede ser adaptado a un líquido viscoelástico lineal más complejo que el líquido de Maxwell; sin embargo, tomando en cuenta la imprecisión del dispositivo experimental, tal estudio no tendría casi significado. el experimento descrito aquí es solamente susceptible de suministrar el orden de magnitud de los parámetros  $\eta$  y  $J$  del módulo que describe un comportamiento muy cercano al líquido de Maxwell. Para un análisis más exacto de las propiedades viscoelásticas es necesario utilizar un reómetro más perfeccionado (reómetros de deformación o dinámicos).

Notemos sin embargo que el experimento de relajamiento es utilizado algunas veces para suministrar una descripción cualitativa de los líquidos no-lineales.

#### IV. 3. Reómetros dinámicos (u oscilatorios)

En los reómetros dinámicos, las muestras estudiadas estarán sometidas a movimientos laminares y velocidades de corte con un amplitud que varía sinusoidalmente a través del tiempo. Se pueden distinguir dos tipos de aparatos, según si el movimiento es mantenido o no:

- Los reómetros de oscilación forzada que pueden funcionar en una gama amplia de frecuencias o en una frecuencia particular (reómetros de resonancia).
- Los reómetros de oscilación libre que permiten medir viscosidades menores para el estudio de la amortiguación.

Para simplificar las cosas, presentamos estos reómetros en el cual las fuerzas aplicadas imponen movimientos de traslación. En la práctica se encuentran muy frecuentemente el caso en el cual un par de fuerzas induce un movimiento de rotación. Comparando unicamente la teoría, daremos solo los resultados.

##### 1. Los reómetros de oscilación forzada

###### 1.1. El caso en el que se miden fuerzas y desplazamientos

###### 1.1.1. La fuerza es medida sobre una superficie inmóvil

Presentamos a continuación el ejemplo de un reómetro plano-plano en traslación con un espacio intermedio pequeño.

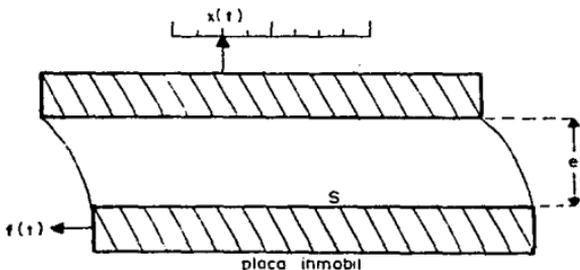


Figura (20)  
Reómetro plano-plano en traslación

El desplazamiento periódico de traslación:  $x(t) = x \cos \omega t$  es impuesto y localizado sobre un lado del espacio intermedio y se mide la fuerza resultante  $f(t)$  al otro lado del desplazamiento, que se supone tiene un movimiento despreciable. Este lado del espacio intermedio no sufre una fuerza de inercia (no hay aceleración), ni una fuerza de rebote (no hay relación mecánica de la placa con un resorte). La fuerza medida es entonces solamente la fuerza de fricción viscosa.

Para un espacio intermedio pequeño, la deformación es proporcional al desplazamiento:  $\xi(t) = -\frac{x(t)}{c}$  el esfuerzo constante es proporcional a la fuerza medida  $T(t) = \frac{f(t)}{S}$  donde,  $S$  representa el área de la placa.

De aquí resulta la relación de proporcionalidad:

$$\frac{\xi(t)}{T(t)} = D \frac{x(t)}{f(t)} \quad (\text{IV.55})$$

ecuación que define la constante del aparato,  $b$ .

En régimen sinusoidal las relaciones (II.26 y II.27) dan la definición del módulo de rigidez completa que permiten escribir:  $\vec{G} = \frac{\vec{f}}{x} = \frac{\vec{f}_0}{x_0} e^{i\delta}$  separando los términos reales e imaginarios, e introduciendo la constante del aparato, se obtiene:

$$G' = \frac{f_0}{x_0 b} \cos \delta$$

$$G'' = \frac{f_0}{x_0 b} \sin \delta \quad (\text{IV.56})$$

donde  $x$  y  $f$  son las amplitudes del desplazamiento y de la fuerza medida, y  $\delta$  su defasamiento.

### Los aparatos

#### - Reómetro de placas (figura 21)

La muestra es mantenida entre dos placas por capilaridad. Una de las capas soporta una gran masa que la inmoviliza. La fuerza y el desplazamiento son transformados en tensión por conductores electromagnéticos (T.E.M.). El defasamiento se lee en el osciloscopio. Las frecuencias se pueden hacer variar más frecuentemente en la región de 10 a 1000 Hz. La constante del aparato es

$$b = \frac{S}{c}$$

#### - Reómetros cilíndricos en traslación (figura 22).

Se basan en el mismo principio pero utilizan una geometría diferente: los lados del espacio intermedio son dos cilindros concéntricos, uno fijo, mientras que el otro tiene un movimiento sinusoidal alrededor del eje.

### Cálculo de la constante del aparato

Sea una capa de fluido, comprendido entre los cilindros de radio  $r$  y  $r + dr$  ( $R_1 < r < R_2$ ). Cuando el cilindro móvil tiene un desplazamiento  $X_0$ , las superficies límite de esta capa tienen los desplazamientos paralelos  $x$  y  $x+dx$  respectivamente ( $0 < x < x_0$ )

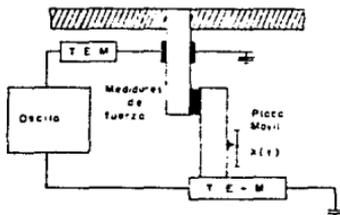


Figura (21)

Esquema del reómetro con placas

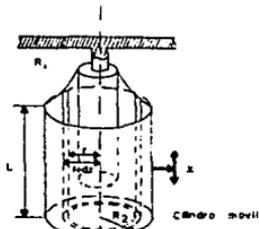


Figura (22)

Esquema del reómetro cilíndrico en traslación

La deformación de esta capa es entonces:

$$\epsilon = \frac{dx}{dr} \quad (IV.57)$$

Aplicando el principio de la acción y la reacción, las fuerzas de velocidad sobre todas las capas son idénticas, e iguales a la fuerza  $f_0$  medida en el cilindro fijo.

El esfuerzo aplicado sobre la capa considerada es:

$$\tau = \frac{f_0}{S} = \frac{f_0}{2\pi r L}$$

donde:  $L$ , representa la altura de los cilindros

Ahora bien, por definición la constante del aparato  $b$  (relación IV.55), se tiene:

$$\epsilon = \tau b \frac{x_0}{f_0}$$

de donde resulta:

$$\epsilon = \frac{b x_0}{2\pi r L}$$

La integración de la ecuación (IV.57) en todo el espacio intermedio nos proporciona:

$$x_{R_2} - x_{R_1} = \int_{R_1}^{R_2} dr = \frac{b x_0}{2\pi L} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

donde:  $x_{R_2} = x_0$  y  $x_{R_1} = 0$

Se obtiene así la expresión de la constante del aparato de los reómetros cilíndricos en traslación sinusoidal:

$$b = \frac{2\pi L}{L_n \frac{R_2}{R_1}}$$

#### Eficiencia de esta clase de aparatos

Estos reómetros son menos precisos. La imprecisión resulta de la determinación experimental del esfuerzo sobre el estator y la aproximación hecha: estator inmóvil.

#### 1.1.2. La fuerza y el desplazamiento se miden sobre el mismo lado móvil

Para este tipo de aparatos volveremos a tomar el ejemplo de un reómetro plano-plano en traslación. En este caso se impone una fuerza sinusoidal  $f_1(t)$  a una de las placas, que adquiere un desplazamiento sinusoidal retrasado  $x(t)$ . La fuerza y el desplazamiento se miden entonces sobre la placa móvil. A la placa móvil se le impone también una relación mecánica con la ayuda de un resorte con una constante elástica  $K$ .

La fuerza y el desplazamiento son retrasados, así que para escribir las relaciones de proporcionalidad entre las fuerzas y el desplazamiento se utilizarán las magnitudes complejas asociadas:

- El desplazamiento de la placa:  $x(t) = x \cos \omega t$  está asociado al desplazamiento complejo:

$$\bar{x} = x_0 e^{i\omega t}$$

- La fuerza impuesta  $f_1(t) = f_0 \cos(\omega t + \delta)$  está asociada con:

$$\bar{f}_1 = f_0 e^{i(\omega t + \delta)}$$

donde:  $\delta$  representa pues, el retrasamiento entre la fuerza impuesta y el desplazamiento. Debemos considerar la fuerza compleja de rebote del resorte:

$$\bar{f}_r = K\bar{x}$$

y la fuerza compleja de fricción viscosa:

$$\bar{f}_f = S\bar{x}$$

( $\bar{x}$  es el esfuerzo complejo de corte).

En notación compleja, escribiremos que la suma algebraica de las fuerzas es igual al producto de la masa  $M$  de la placa inmóvil por su aceleración. Como las fuerzas  $f_r$  y  $f_f$  se oponen al movimiento, tienen una dirección opuesta a la dirección de la fuerza motriz  $f_1$ ; debemos entonces escribir:

$$\bar{f}_1 - \bar{f}_r - \bar{f}_f = M\bar{x}$$

Cambiando la relación general  $\bar{T} = \bar{\sigma}\bar{E}$  y las propiedades particulares de nuestro ejemplo:

$$\bar{E} = \frac{x}{e} \quad \text{y} \quad b = -\frac{S}{e}$$

se obtiene la expresión

$$\bar{f}_1 = b\bar{G}\bar{x}$$

$\bar{x}$  se obtiene derivando  $\bar{x}$ :

$$\bar{x} = -w^2\bar{x}$$

de donde resulta la desigualdad:

$$\bar{f}_1 - K\bar{x} - b\bar{G}\bar{x} = -Mw^2\bar{x}$$

o bien:

$$\bar{f}_1 = (K + b\bar{G} - Mw^2)\bar{x}$$

Sustituyendo  $f_1$  y  $x$  por sus expresiones y simplificando por  $e^{i\omega t}$ , tenemos:

$$f_0(\cos \delta + i \operatorname{sen} \delta) = (K + b(G' + iG'') - Mw^2)x_0$$

Iguando las partes reales y las partes imaginarias, obtenemos:

$$\frac{f_0}{x_0} \cos \delta = K + bG' - Mw^2 \quad (IV.58)$$

$$\frac{f_0}{x_0} \operatorname{sen} \delta = bG''$$

Midiendo  $x_0$ ,  $f_0$  y  $\delta$  y aplicando las fórmulas (IV.58) se determinan  $G'$  y  $G''$ :

$$G' = \frac{f_0}{x_0 b} \cos \delta + \frac{Mw^2}{b} - \frac{K}{b} \quad (IV.59)$$

$$G'' = \frac{f_0}{x_0 b} \operatorname{sen} \delta$$

**Nota:** Convencionalmente, el ángulo  $\delta$  representa en general el defasamiento entre el esfuerzo y la deformación de corte; no es lo mismo aquí, donde la fuerza impuesta es defasada en relación con el esfuerzo cortante (influencia de las fuerzas de inercia, de la placa y de las fuerzas de rebote). Continuaremos anotando como los defasamientos entre las dos magnitudes físicas medidas (fuerza y desplazamiento, desplazamiento y desplazamiento, ...), sea cual sea el procedimiento dinámico utilizado.

#### Los aparatos

De hecho son reómetros rotativos clásicos adaptados a mediciones periódicas: con la ayuda de un motor, el rotor es animado por un movimiento sinusoidal de rotación, se mide el desplazamiento (ángulo de rotación) y la fuerza (par), sobre el antiguo "estator" rebotado por un hilo-torsión con una constante de rebote  $C$ . En este caso de rotación, las formulas (IV.58) obtenidas para la traslación se transforman

fácilmente sustituyendo la masa  $M$  por el momento de inercia  $I$  del estator, y la constante  $k$  por la constante  $C$ . Conviene también tomar la constante del aparato

- Reómetros cilíndricos oscilantes. Son reómetros cilíndricos en los cuales se le pueden imprimir al rotor movimientos oscilatorios de frecuencia comprendida generalmente entre un décimo y una decena de Hertz con amplitud de una centésima de radian (Para la constante del aparato vease el estudio anterior de este reómetro).

Para un espacio intermedio pequeño:

$$b = \frac{4\pi^2 L}{\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}}$$

donde:  $L$  representa la altura del cilindro móvil  
 $R_1$  y  $R_2$ , los radios del rotor y del estator respectivamente.

- Reómetro de Weissenerg (reómetro cono/disco oscilatorio). Es un reómetro cono/disco que puede funcionar dinámicamente para frecuencias de  $3 \cdot 10^{-4}$  Hz. a 50 Hz. y amplitudes de oscilación de 0.002 radianes a 0.03 radianes.

La constante del aparato es aquí:

$$b = \frac{2\pi^2 R^3}{3\psi}$$

donde:  $R$  representa el radio de la base del cono;  $\psi$ , el complemento del medio-ángulo en la cúspide del cono.

- Reómetro disco/disco en rotación. Esta geometría se utiliza también en pruebas dinámicas ya que presenta la ventaja, en comparación con los presentados anteriormente, el poder hacer variar con mucha facilidad la distancia entre los dos discos.

La constante del aparato tiene el siguiente valor:

$$b = \frac{\pi^2 R^4}{2L}$$

donde:  $R$  es el radio y  $L$  la distancia entre los discos.

### Eficiencia

Estos son los reómetros de frecuencia variable más precisos. Sin embargo, esta precisión decrece con la frecuencia, lo que limita su campo de utilización. De hecho, si  $\omega$  es grande el término  $\omega^2 \tau_0$  se vuelve preponderante en la fórmula (IV.59), así que las magnitudes medidas ya no son significativas para  $G'$  cuyos valores ya no son muy característicos para la muestra utilizada. Fuera de esta limitación, estos reómetros permiten obtener de manera conveniente las curvas  $G'(\omega)$  y  $G''(\omega)$ , que se utilizan mucho en la interpretación del comportamiento viscoelástico.

Observemos que, mediante la modificación de algunos detalles, podremos mejorar la precisión de estos aparatos, conservando su principio de funcionamiento: para esto es suficiente prescindir de la medición escrupulosa de la fuerza, midiendo solamente los desplazamientos de los discos (párrafo siguiente).

### 1.2. Caso en el cual se miden los desplazamientos

En numerosos reómetros se le impone un movimiento oscilatorio a uno de los lados y se registra el movimiento que resulta en el otro lado. Esta técnica generalmente mejora la precisión de las mediciones.

Para un reómetro plano-plano en translación, el esquema se presenta en la figura 24.

Las ecuaciones de movimiento aplicadas al disco superior permiten la obtención de las siguientes fórmulas.

$$G' = \frac{K - M\omega^2}{b} \cdot \frac{r(\cos \delta - r)}{r^2 - 2r \cos \delta + 1}$$

$$G'' = \frac{K - M\omega^2}{b} \cdot \frac{r \sin \delta}{r^2 - 2r \cos \delta + 1} \quad (IV.60)$$

donde:  $r = \frac{x_2}{x_1}$ , es la razón de las amplitudes de desplazamiento de los discos;

$\delta$ , es el defasamiento entre los desplazamientos de los discos;

$b$ , es la constante del aparato (aquí,  $b = S/e$ ).

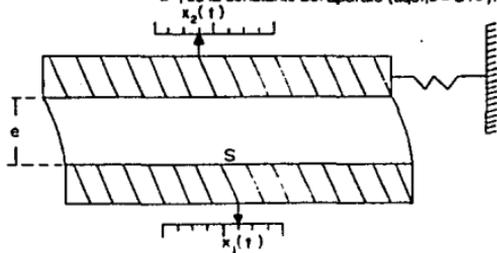


Figura (24)

Las fórmulas (IV.60) se adaptan fácilmente a otras geometrías, cambiando el valor de la constante del aparato, y sustituyendo  $k$  y  $M$  por la constante de rebote  $C$  del hilo de torsión y por el momento de inercia  $I$  del lado correspondiente respectivamente, en el caso de la rotación.

### 2. Reómetros de resonancia

Ciertos reómetros, cuyo principio es también el de los oscilatorios, no permiten mediciones sino a una sólo frecuencia: a la frecuencia de resonancia. Se ve en las fórmulas (IV.58) que existe un valor de  $\omega$  para el cual  $\cos \delta = 0$ , es decir  $\delta = \pi/2$ : la fuerza está en cuadratura con el desplazamiento, esta es la resonancia.

En este caso, las condiciones:  $K + bG' - M\omega^2 = 0$

$$\text{sen } \delta = 1$$

permiten obtener unas determinaciones más sencillas  $G'$  y  $G''$  :

$$G' = \frac{M\omega - K}{b}$$

$$G'' = \frac{f_0}{x_0} b$$

(IV.61)

Estos aparatos tienen una tecnología más sencilla, ya que basta medir la amplitud de la fuerza y la del desplazamiento para una sola frecuencia.

-Reómetros cilíndricos resonantes. En la práctica se utilizan en la mayoría de las veces reómetros cilíndricos que oscilan utilizando un marco a través del cual pasa una corriente alterna de frecuencia variable y localizada en un campo magnético. El cilindro móvil se sumerge en el líquido estudiado que se encuentra en un recipiente cilíndrico. Es suficiente, con investigar experimentalmente la frecuencia de la corriente en la resonancia.

#### Eficiencia

Estos aparatos son sencillos, precisos (generalmente, la resonancia se determina con alta precisión), pero no funcionan a frecuencia variable, no sirven para el estudio completo de la viscoelasticidad.

### 3 Los aparatos con oscilación libre

#### 3.1. Principio y ecuaciones

Las magnitudes como  $\bar{G}$ ,  $\bar{J}$  y  $\bar{\mu}$  son definidas solamente en un régimen sinusoidal permanente (experimentos con oscilación forzada). Así que estas magnitudes no se pueden obtener con oscilaciones libres. Este método se puede utilizar en cambio, para determinar la viscosidad de un cuerpo newtoniano o casi newtoniano. Los aparatos cuyo estudio se presenta a continuación son de hecho los llamados viscosímetros.

Volvamos a tomar el ejemplo del reómetro plano-plano en translación (figura 23). Se supone que el espesor  $e$  del espacio intermedio es pequeño.

La placa rebotada por el resorte de rigidez  $k$  se desvía de su posición de equilibrio en el instante  $t = 0$  y se suelta sin velocidad inicial. Se registra el desplazamiento  $x(t)$  de la placa. Hagamos el balance de las fuerzas que se ejercen sobre la placa:

- fuerza de resorte del resorte:  $|f_r| = |k_x|$ ;

- fuerza de fricción viscosa:  $|f_f| = |S\dot{x}|$ .

Suponiendo que el cuerpo es newtoniano, el esfuerzo cortante  $\tau$  es proporcional a la velocidad de deformación  $\dot{\epsilon}$ :

$$\tau = \eta \dot{\epsilon}$$

Ahora, en nuestro ejemplo, la deformación  $\epsilon$  para un desplazamiento  $x$  de la placa es dada por:

$$\epsilon = -\frac{x}{e}$$

de donde finalmente resulta la expresión de  $f_f$ :

$$|f_f| = -\frac{S}{e} \eta |\dot{x}| = b\eta |\dot{x}|$$

suponiendo  $b$  (constante del aparato) =  $S/e$  para nuestro ejemplo.

Ecuación del movimiento: el producto de la masa  $M$  de la placa por su aceleración es igual a la suma algebraica de las fuerzas. Las dos fuerzas  $f_r$  y  $f_f$  se oponen al movimiento; entonces conviene usarlos con signo negativo, para obtener finalmente:

$$M\ddot{x} = -Kx - b\eta\dot{x}$$

es decir, acomodando términos:

$$M\ddot{x} + b\eta\dot{x} + Kx = 0 \quad (\text{IV.62})$$

Se trata de ecuación diferencial de segundo grado, con coeficientes constantes y con el segundo miembro igual a cero. La solución  $x(t)$  es una combinación lineal de dos soluciones particulares exponenciales:

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad (\text{IV.63})$$

donde:  $A$  y  $B$  son constantes determinadas por las condiciones iniciales.  $r_1$  y  $r_2$  son las soluciones de la ecuación característica asociada a la relación (IV.62):

$$Mr^2 + b\eta r + K = 0 \quad (\text{IV.64})$$

Se sabe que las soluciones  $r_1$  y  $r_2$  que corresponden al régimen oscilatorio amortiguado son complejas: el caso en el cual  $\Delta$  de la ecuación (IV.64) es negativo:

$$\Delta = b^2 \eta^2 - 4KM < 0$$

de donde resulta: 
$$r = \frac{-b\eta \pm \sqrt{4KM - b^2\eta^2}}{2M} = \frac{-b\eta}{2M} \pm i\omega$$

tenemos:

$$\omega = \frac{\sqrt{4KM - b^2\eta^2}}{2M} = \text{pseudo-pulsación}$$

Las condiciones iniciales  $x(0) = x_0$  y  $\dot{x}(0) = 0$  fijan los valores de A y B.

$$A = B = \frac{x_0}{2}$$

Volviendo a la ecuación (IV.63), se obtiene:

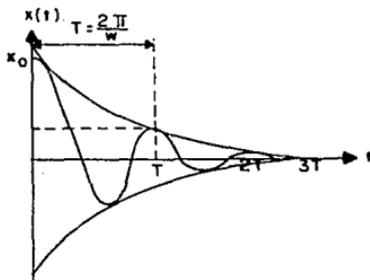
$$x(t) = \frac{x_0}{2} e^{-\frac{b\eta}{2M}t} e^{i\omega t} + \frac{x_0}{2} e^{-\frac{b\eta}{2M}t} e^{-i\omega t}$$

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{b\eta}{2M}t} \left[ \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right]$$

Desarrollando las expresiones complejas, se tiene finalmente:

(IV.65)

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{b\eta}{2M}t} \cos \omega t$$



**Figura (25)**

Registro de las oscilaciones amortiguadas.

La gráfica de esta función se identifica en el registro hecho por el desplazamiento de la placa. Se mide en el registro el pseudo-periodo  $T = 2\pi / \omega$  y el decremento logarítmico  $d$  que por definición es:

$$d = \ln \frac{x_0}{x(T)} \quad (\text{IV.66})$$

es decir, la razón de las alturas de dos máximos consecutivos del registro.

Según la relación (IV.65) se ve que:

$$x(T) = x_0 e^{-\frac{b\eta}{2M}T}$$

de donde resulta:

$$d = \frac{b \eta}{2M} T$$

lo que proporciona la expresión definitiva de la viscosidad:

$$\eta = \frac{2 \pi d}{b T} \quad (\text{IV.67})$$

### 3.2. Los aparatos y su utilización

En la práctica, los aparatos de este tipo son reómetros cilíndricos, el cilindro interior es rebotado por un hilo de torsión del cual está suspendido. Se registran los desplazamientos angulares  $\theta(t)$  de éste cilindro.

Para aplicar la fórmula (IV.67) en este caso, es obviamente conveniente hacer las siguientes sustituciones:

- sustituir  $M$  por  $I$ , el momento de inercia del cilindro móvil;

- y sustituir  $b = \frac{4 \pi L^4}{17 R_1^2 - 17 R_2^2}$  en el caso de un espacio intermedio pequeño, donde  $L$  representa la altura del cilindro móvil, y  $R_1$  y  $R_2$  los radios del cilindro interior y exterior respectivamente.

Estos reómetros se utilizan para cuerpos newtonianos de baja viscosidad (ciertos líquidos y gases), para los cuales es más fácil medir una amortiguación de un par de fuerzas.

### 4. Ventajas y límites de los reómetros dinámicos

Los reómetros de frecuencia variable de gran precisión son adaptados particularmente al estudio reológico de la viscoelasticidad cuya teoría microscópica, que será tema de otro capítulo, suministra predicciones simples en el caso de las pruebas dinámicas. Sin embargo, aun cuando la gama de frecuencias cubierta por los reómetros dinámicos es bastante extensa (de  $10^{-3}$  Hz. a unos cientos de Hz.), generalmente, un sólo aparato puede trabajar solamente dentro de una región de unas decenas. Es entonces conveniente poder trabajar a temperaturas variables aplicando el principio tiempo-temperatura. Finalmente señalamos que el empleo de los reómetros dinámicos es simple, solamente si la inercia de la muestra puede ser despreciada, como admitimos siempre hasta ahora. Así, en el caso del reómetro disco/disco se muestra que esta aproximación es válida si la constante de propagación  $\Gamma$  de la onda de desplazamiento, definida por:

$$\Gamma = \frac{\rho w^2}{|G|}$$

donde:  $\rho$  es la masa volumétrica de la prueba, de tal manera que  $\Gamma \ll l$  (siendo  $l$  la distancia entre las placas).

De manera general, puede ser útil disminuir el espacio intermedio para minimizar los efectos de la inercia.

## APENDICE

### A. Esfuerzo y velocidad de corte en un reómetro cono/disco

Sobre una sola capa cónica definida por el ángulo  $\theta$ , se identifican diferentes puntos por medio de (figura IV.A.1):

- $r$ , representa la distancia del punto a la cúspide del cono  $O$  tomado desde el origen;
- $\sigma$ , representa el ángulo entre un eje plano horizontal (escogido arbitrariamente) y la proyección de la recta que une el origen con el punto considerado, sobre este plano.

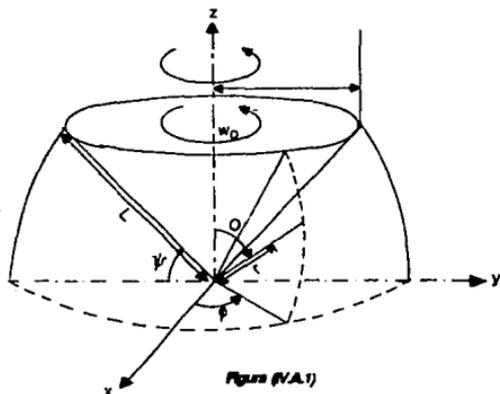


Figura (IV.A.1)

Se supone que el material deslizado entre el cono y el disco tiene una superficie libre esférica, concentrada en el origen, de radio:

$$L = \frac{R}{\cos \psi} \quad (\text{IV.A.1})$$

Es fácil observar, adoptando el punto de vista intuitivo descrito en el Capítulo I (§2), donde la velocidad de corte, para el ángulo  $\psi$  suficientemente pequeño ( $\leq 5^\circ$ ), está dada por la ecuación:

$$\dot{\xi} = - \frac{d\omega}{d\theta}$$

(IV.A.2)

donde:  $d\omega$ , representa la variación de la velocidad angular de rotación cuando pasa de la capa  $\theta$  a la capa  $\theta + d\theta$ . Se hace constar que  $\xi$  no depende de  $r$  y de  $\phi$ ; se deduce que es lo mismo para el esfuerzo cortante:  $\tau$  y  $\dot{\xi}$  son constantes en cada punto de una sola capa, pero diferentes, a priori, de una capa a la otra; los notaremos como  $\tau(\theta)$  y  $\dot{\xi}(\theta)$ .

Consideremos entonces sobre la capa  $\theta$ , la superficie infinitesimal  $dS$  comprendida entre  $r$  y  $r + dr$ , y  $\phi$  y  $\phi + d\phi$ . Los esfuerzos cortantes  $\tau(\theta)$  que ejercen sobre esta superficie provocan un par de rotación - cuyo momento en relación al eje de rotación  $OZ$  se escribe:

$$\begin{aligned} \delta M &= \tau(\theta) dS r \sin \theta \\ &= \tau(\theta) r \sin^2 \theta dr d\phi \end{aligned}$$

Integrando sobre toda la superficie de la capa, tenemos como expresión del momento resultante:

$$\begin{aligned} M &= \tau(\theta) \sin^2 \theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L r^2 dr \\ M &= \frac{2\pi}{3} \tau(\theta) \sin^2 \theta L^3 \end{aligned} \quad \text{(IV.A.3)}$$

Si se considera el pequeño volumen comprendido entre los conos de ángulos  $\theta$  y  $\theta + d\theta$ , se observa que está sometido a un par total cuyo momento resultante está dado por:

$$\begin{aligned} dM &= \frac{2\pi}{3} L^3 \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau(\theta) \sin^2 \theta) d\theta \\ dM &= \frac{2\pi}{3} L^3 \sin^2 \theta d\theta \left( \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + 2\tau \cot \theta \right) \end{aligned} \quad \text{(IV.A.4)}$$

Cuando se alcanza el régimen permanente, el momento resultante  $dM$  es cero, así que:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \theta} + 2\tau \cot \theta = 0 \quad \text{(IV.A.5)}$$

Prácticamente el ángulo  $\theta$  esta siempre muy cerca de :

$$\frac{\pi}{2}, \quad (\psi \ll 5^\circ)$$

así que, para niveles de esfuerzo  $\tau$  no muy altos,  $2\tau \cot \theta$  es un término despreciable. La ecuación

(IV.A.5) se puede escribir entonces con una buena aproximación

$$\frac{\partial \tau}{\partial \theta} = 0 \quad (IV.A.6)$$

así que el esfuerzo  $\tau$  puede considerarse como constante en todo el espacio intermedio.

El par de rotación  $M$  se expresa como función de  $R$  y de  $\tau$ ; de hecho, según las relaciones (IV.A.1 y IV.A.3):

$$M = \frac{2\pi}{3} R^3 \tau \frac{\sin^2 \theta}{\cos^3 \psi}$$

relación que se transforma, para ángulos  $\psi$  muy pequeños, en:

$$M = \frac{2\pi}{3} R^3 \tau \quad (IV.A.7)$$

Por otro lado, la constancia de  $\tau$  trae consigo la constancia de  $\dot{\xi}$ . Podemos entonces establecer:

$$\dot{\xi} = -\frac{dw}{d\theta} = K$$

o sea:

$$dw = -K d\theta$$

ecuación que integramos entre la superficie del cono sólido (identificado por el ángulo  $\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$ ) y la superficie del disco (identificado por el ángulo  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ):

$$\int_{w_0}^0 dw = -K \int_{\pi/2 - \psi}^{\pi/2} d\theta \quad ; \quad w_0 = K \psi$$

así que:

$$\dot{\xi} = \frac{w_0}{\psi} \quad (IV.A.8)$$

### B. Reómetros del tipo Poiseuille

Estudio de líquidos descrito por modelos reológicos estándar (ley de potencias, ley de Bingham, etc.) Presentaremos aquí un método de R.H. Whorlow (7), que permite deducir la ecuación del caudal  $Q$  a través del tubo cilíndrico de manera general; esta ecuación se puede utilizar fácilmente en todos los casos particulares de los líquidos descritos por las ecuaciones reológicas estándar.

Vimos en el Capítulo IV 1 (§2.3) que el caudal volumétrico  $Q$  se definía por la relación

$$Q = 2\pi \int_0^R r v(r) dr \quad (\text{IV.B.1})$$

Por otro lado establecimos una relación sumamente general (relación IV.33), que es válida, sea cual sea el comportamiento reológico del líquido estudiado:

$$\frac{2\tau}{r} = A \quad A = \rho g \frac{\Delta p}{L} \quad (\text{IV.B.2})$$

Esta relación establece una correspondencia biunívoca entre  $r$  y  $\tau$ , así que es posible expresar todas las magnitudes que aparecen bajo la integral (IV.B.1) como funciones no de  $r$  sino de  $\tau$ :

$$r = \frac{2\tau}{A}$$

$$v(r) = v(\tau)$$

$$dr = \frac{dr}{d\tau} d\tau = \frac{2}{A} d\tau$$

tenemos entonces:

$$Q = \frac{8\pi}{A^2} \int_0^{AR/2} \tau^2 v(\tau) d\tau$$

Integrando por partes y tomando en cuenta las condiciones en los límites, se obtiene:

$$Q = -\frac{4\pi}{A} \int_0^{AR/2} \tau \frac{dv}{d\tau} d\tau \quad (\text{IV.B.3})$$

Sea  $\dot{\epsilon} = g(\tau)$  la ecuación reológica del líquido estudiado. Según la expresión de  $\dot{\epsilon}$  (relación IV.34) tenemos:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{dv}{d\tau} \frac{d\tau}{dr} = -g(\tau)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = -g(\tau) \frac{dr}{d\tau} = -\frac{2}{A} g(\tau)$$

Sustituyendo esta relación en la fórmula (IV.B.3) se obtiene:

$$Q = \frac{8\pi}{A^3} \int_0^{AR/2} \tau^2 g(\tau) d\tau \quad (\text{IV.B.4})$$

Esta fórmula es muy general y cubre todos los modelos líquidos conocidos.

### 1. Líquido que obedece a una ley de potencias.

Su ecuación reológica se escribe:

$$\dot{\epsilon} = g(\tau) = K \tau^n \quad (\text{IV.B.5})$$

Aplicando la relación (IV.B.4) tenemos entonces:

$$\frac{Q}{\pi R^3} = K \frac{A^n R^n}{(n+3) 2^n}$$

así que:

$$\log \left[ \frac{Q}{\pi R^3} \right] = n \log A + B$$

donde:  $B = \log K + \log \left[ \frac{R^n}{(n+3) 2^n} \right]$

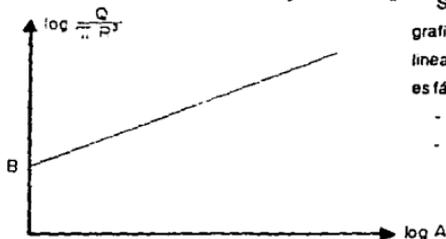


Figura (IV.B.1)

Se ve que si el líquido sigue una ley de potencias la gráfica  $\log (Q / \pi R^3) = f(\log A)$  es necesariamente lineal. Haciendo variar el gradiente de presión  $\Delta P / L$ , es fácil trazar esta gráfica (figura IV.B.1) y deducir:

- n, determinando su pendiente.
- K, determinando su ordenada al origen B.

### 2. Líquido de Bingham.

Su ecuación reológica se escribe:

$$\tau = \tau_c + \alpha \dot{\epsilon}$$

así que tenemos  $\dot{\epsilon} = g(\tau) = \frac{\tau - \tau_c}{\alpha}$  s:  $\tau > \tau_c$

$\dot{\epsilon} = g(\tau) = 0$  s:  $\tau < \tau_c$

El movimiento laminar de deslizamiento aparece solamente para esfuerzos  $\tau \geq \tau_c$ ; recordando la relación (IV.B.2) se ve que ésta solamente interviene si:

$$r \geq R_c = \frac{2\tau_c}{A}$$

si  $r \leq R_c$ , el líquido fluye en bloque.

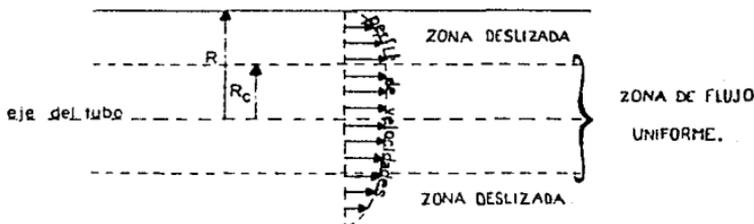


Figura (IV.B.2)

Sustituyendo la expresión de  $q(\tau)$  en la relación (IV.B.4), se obtiene:

$$Q = \frac{8\pi}{A^3} \int_{\tau_c}^{AR/2} \tau^2 \frac{\tau - \tau_c}{\tau} d\tau$$

o sea:

$$\frac{Q}{\pi R^4} = \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{AR}{8} - \frac{\tau_c}{3} \left[ 1 - 2 \left( \frac{\tau_c}{AR} \right)^3 \right] \right\} \quad (IV.B.8)$$

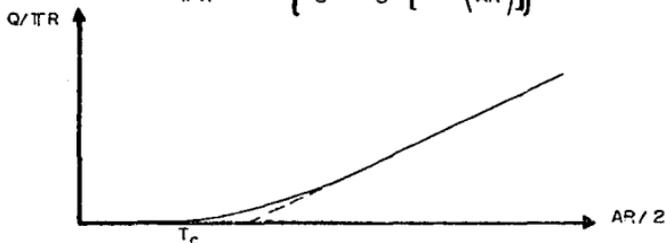


Figura (IV.B.3)

Haciendo variar el gradiente de presión  $\Delta P / L$ , se puede trazar la gráfica  $Q / \pi R^3 = f(\Delta P / 2)$ ; es entonces fácil deducir:

-  $\tau_c$ , determinando el punto de concurrencia de la curva con el eje de las abscisas.

-  $\kappa$ , determinando la pendiente de la asíntota a la curva

### C. Deformación y esfuerzo de corte de un material en un reómetro disco-disco.

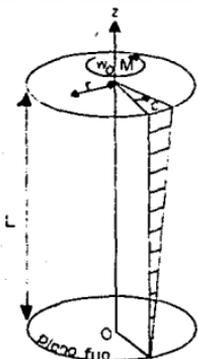


Figura (IV.C.1)

Sea  $w(z)$  la velocidad angular de la capa de altura  $Z$ . Queda claro que la velocidad de corte en un punto  $(r, Z)$  está dada por la expresión:

$$\dot{\epsilon} = r \frac{\partial w}{\partial z}$$

Si se escribe la ecuación fundamental de la dinámica, relativamente a un volumen comprendido entre  $r$  y  $r + dr$  y  $Z$  y  $Z + dz$ , se obtiene, despreciando las fuerzas de inercia:

$$\tau(r, z + dz) = \tau(r, z)$$

o bien:

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 \quad (\text{IV.C.2})$$

El esfuerzo no depende de  $Z$ ; es lo mismo para  $\dot{\epsilon}$ , así que se puede escribir:

$$\dot{\epsilon}(r, t) = r \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{r}{L} w_0(t)$$

donde:  $w_0(t)$  es la velocidad angular del disco superior.

Por consiguiente, tenemos

$$\epsilon(r, t) = -\frac{r}{L} \phi(t) \quad (\text{IV.C.3})$$

La expresión explícita de  $\tau$  en función del par aplicado  $M$  se obtiene utilizando la hipótesis de linealidad, según la relación (II.6):

$$\tau(r, t) = \epsilon(r, t) g(0) + \int_0^t g(t-t') \epsilon(r, t') dt'$$

relación que se puede escribir también según (IV.C.3)

$$\tau(r, t) = \frac{r}{L} h(t) \quad (\text{IV.C.4})$$

donde:

$$h(t) = g(0) \phi(t) + \int_0^t g(t-t') \phi(t') dt'$$

Para el par impuesto  $M$  tenemos entonces:

$$\begin{aligned} M(t) &= 2\pi r \tau(r, t) r dr \\ &= \frac{2\pi r^2}{L} h(t) \int_0^R dr \\ &= \frac{\pi r^2}{2} \frac{R^4}{L} h(t) \end{aligned}$$

Por comparación con la relación (IV.C.4) se obtiene finalmente:

$$\tau(r, t) = \frac{2r}{\pi r^2 R^4} M(t) \quad (\text{IV.C.5})$$

Acentuamos que mientras la relación (IV.C.3) es siempre válida, la relación (IV.C.5) se satisface solamente en el caso de los materiales lineales.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- (1) MOONEY M.  
J.Rheol., 2, 210, 1931.
- (2) MOORE F. and DAVIES L.S.  
Trans. Brit. Ceram. Soc., 55, 313-338, 1956.
- (3) KRIEGER I.M. and ELROD H  
J. Appl. Phys., 24, 134, 1953.
- (4) YANG T.M.T. and KRIEGER I.M.  
J. Rheol., 22, 413-421, 1978.
- (5) THORTON S.  
Proc. Phys. soc., 66B, 115-119. 1953.
- (6) KRIEGER I.M. and MARON S.H.  
J. Appl. Phys., 25, 72-75, 1954.

## V

### Conclusiones

A continuación, se enumeran las conclusiones a las que se llegó, luego de realizar el presente trabajo de tesis:

1. Un fluido lo definiremos simplemente, como una sustancia la cuál tiende a fluir bajo la acción de un esfuerzo, no importando la consistencia de este. En un fluido los esfuerzos entre las partículas adyacentes son proporcionales al ritmo de deformación y tiende a desaparecer cuando cesa el movimiento.

2. Independientemente de la geometría del cuerpo y de la deformación, un fluido siempre fluirá en una forma de corte laminar.

3. Los fluidos son clasificados de acuerdo con su comportamiento, al ser sometidos a la acción de un esfuerzo cortante y a la velocidad de corte inducida por dicho esfuerzo en:

Flujo Newtoniano

Flujo No-Newtoniano

4. Desde el punto de vista reológico, la deformación de los materiales pueden ser, arbitrariamente divididos en dos tipos generales:

Deformación espontanea reversible

Deformación irreversible "flujo"

5. Los fluidos Newtonianos son aquellos cuyo comportamiento reológico, pueden ser descritos de acuerdo con las leyes de Newton, es decir, aquellos que presentan una proporción directa entre el esfuerzo cortante y la velocidad de flujo .

6. Los fluidos No-Newtonianos son aquellos cuyo comportamiento no presentan una relación directa entre el esfuerzo cortante y la velocidad de corte y se dividen en dos grupos:

Los fluidos independientes del tiempo: Plásticos de Bingham, Pseudoplásticos, Dilatantes y Pseudoplásticos y Dilatantes con punto cedente.

Los fluidos dependientes del tiempo: Tixotropicos y Reopecticos.

7. El conocimiento de la función de deformación  $f(t)$  o de la función  $g(t)$ ; por supuesto con la ayuda de los reómetros, permite determinar todas las propiedades de flujo.

Cada una de estas funciones, por sí sola, es suficiente para describir el comportamiento viscoelástico del material.

8. Desde el punto de vista reológico, la frontera entre sólido y líquido lo definimos como:

Una sustancia es sólida si, sometida a un esfuerzo constante que no provoca la ruptura, tiende hacia un estado de equilibrio estático, por lo cual su deformación permanece constante.

Una sustancia es líquida si, sometida a un esfuerzo constante, nunca alcanza un estado de equilibrio estático, su deformación aumenta infinitamente, es decir, la sustancia fluye.

9. Los reómetros, son aparatos sofisticados, utilizados para caracterizar la relación funcional entre el esfuerzo cortante y la velocidad de flujo, es decir, el comportamiento reológico de los materiales, y se entiende que el viscosímetro (Fann 35-VG ) no es sino un instrumento, que entra como una subclasificación de los reómetros.

## GLOSARIO BRITANICO ESTANDAR DE TERMINOS REOLOGICOS

<i>Término</i>	<i>Definición</i>
<b>Ablandamiento por trabajo</b>	Un decremento en la resistencia a la deformación adicional, que resulta de la deformación plástica.
<b>Adhesión</b>	La fuerza que se opone a la separación de dos cuerpos en contacto.
<b>Adhesividad</b>	1. Una leve adherencia en la superficie de un material. 2. El fenómeno de formación de fibras de alguna sustancia entre dos superficies al separarlas.
<b>Agregado</b>	Un grupo de partículas unidas en una masa compacta.
<b>Alta elasticidad</b>	La habilidad de un material de someterse a deformaciones elásticas mayores.
<b>Amortiguador</b>	Un modelo de flujo viscoso, normalmente representado por un pistón que se mueve en un cilindro que contiene líquido, y que representa el comportamiento del 'modelo de fluido newtoniano'.
<b>Anelastividad</b>	Vea 'elasticidad retardada'.
<b>Angulo de extinción</b>	El más pequeño ángulo entre las líneas de flujo y el eje óptico de un líquido birefringente (vea 'birefringencia de flujo'). El eje óptico es determinado por la extinción de luz máxima.
<b>Angulo de pérdida</b>	La diferencia de fase entre la variable dependiente y la independiente en un sistema oscilatorio, por ejemplo entre el esfuerzo y la deformación.
<b>Angulo de talud natural</b>	1. El ángulo máximo entre la superficie de un material y la horizontal. 2. El ángulo máximo en que se puede inclinar un plano sin que un cuerpo sólido que se encuentra sobre él en reposo empiece a desplazarse, ya sea rodando o deslizándose.
<b>Angulo isocliño</b>	Un ángulo recto (90°) menos el ángulo de extinción.
<b>Anisotrópico</b>	Que no tiene las mismas propiedades en todas las direcciones.
<b>Anti-tixotropía</b>	Vea 'tixotropía negativa'.
<b>Arrastre primario</b>	Un arrastre desacelerante.
<b>Birefringencia de flujo</b>	La anisotropía óptica causada por el flujo.
<b>Blandura</b>	La tendencia a deformarse con facilidad.
<b>Caída de cedencia</b>	La magnitud de la caída abrupta en el esfuerzo, hasta el

punto cedente inferior que sigue después de alcanzado el punto cedente (superior) sobre la curva de esfuerzo/deformación.

<b>Círculo de esfuerzo</b>	Veá círculo de Mohr.
<b>Círculo de Mohr</b>	Un nomograma que facilita el cálculo de la deformación de deslizamiento y de los esfuerzos de tracción que accionan en cualquier sección plana en un cuerpo elástico sometido a un esfuerzo normal no axial, por ejemplo un cilindro en elongación.
<b>Coefficiente de Interacción</b>	Una serie de coeficientes en una ecuación que relaciona la viscosidad intrínseca con diferentes valores de concentración, de las cuales la constante de Huggins es la primera.
<b>Coefficiente de fluidéz</b>	El recíproco del coeficiente de viscosidad dinámica (1).
<b>Coefficiente de fricción</b>	La relación entre la fuerza de fricción y el trabajo normal entre dos cuerpos sólidos.
<b>Coefficiente de tracción viscosa</b>	El valor constante del cociente de esfuerzo de extensión, dividido entre el gasto de extensión, aplicado al comportamiento del modelo de fluido newtoniano.
<b>Coefficiente de viscosidad</b>	El valor constante del cociente del esfuerzo de cizallamiento dividido entre el gasto de cizallamiento, para las características del flujo constante del comportamiento del modelo de fluido newtoniano (generalmente se refiere a una viscosidad (2), o a una viscosidad dinámica (1), compare 'viscosidad aparente').
<b>Coefficiente de viscosidad interfacial</b>	El valor constante del coeficiente de la fuerza por unidad de área que acciona a lo largo de una línea existente en el plano de la interfaz, dividido entre el gasto de cizallamiento existente en el plano de la interfaz del flujo continuo. Sus dimensiones son las mismas que las de la viscosidad, multiplicada por la longitud.
<b>Coefficiente de viscosidad transversal</b>	El coeficiente de esfuerzo normal de segundo orden del modelo de flujo de Reiner-Rivlin. Estrictamente hablando, no es una viscosidad.
<b>Cohesión</b>	La atracción entre las moléculas que forman la masa de un líquido o de un sólido.
<b>Complacencia</b>	El cociente de deformación dividido entre el esfuerzo que le corresponde. El recíproco del módulo elástico.
<b>Complacencia compleja</b>	La representación matemática de la complacencia, como la suma de una parte real y una parte imaginaria. La parte real es llamada complacencia de conservación, y la parte imaginaria complacencia de pérdida.
<b>Comportamiento elástico ideal</b>	Comportamiento elástico sin histéresis.
<b>Complacencia de almacenamiento</b>	El cociente de la parte de la deformación que está en fase con el esfuerzo, dividido entre el esfuerzo bajo

condiciones sinusoidales.

<b>Compresibilidad</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. La reducción relativa del volumen causada por un aumento de la presión.</li><li>2. El recíproco del módulo volumétrico.</li></ol>
<b>Consistencia</b>	Un término general para la propiedad de un material por el cual éste resiste al cambio permanente de forma.
<b>Constante de Huggins</b>	La pendiente a concentración cero de una gráfica de viscosidad reducida contra concentración, dividida entre el cuadrado de la viscosidad intrínseca.
<b>Constante de Lamé</b>	Dos constantes elásticas relacionadas al módulo volumétrico, al módulo de deslizamiento y a la relación de Poisson.
<b>Criterio de Hencky-von Mises</b>	La afirmación de que el flujo plástico, empieza cuando la suma de los cuadrados de los esfuerzos cortantes principales, alcanza en un punto, un valor crítico.
<b>C</b>	La aparición en la superficie, de partículas de una fase dispersa en un líquido.
<b>Cuerpo</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Una evaluación subjetiva de la consistencia.</li><li>2. Vea 'modelo'; éste término ya no es usual, como por ejemplo 'cuerpo Bingham'.</li></ol>
<b>Curva de flujo</b>	Una curva que relaciona 'el esfuerzo' con la 'velocidad de corte'.
<b>Curvas S/N</b>	Vea 'curvas Wohler'.
<b>Curva Wohler, curva S/N</b>	La curva que relaciona la amplitud del esfuerzo con el logaritmo del número de ciclos que conduce a la fractura de una muestra en una prueba de fatiga.
<b>Deformación</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. La medida de la deformación relativa a la configuración de referencia de longitud, área o volumen. Se llama también deformación relativa.</li><li>2. Un cambio de la forma del volumen, o de ambos.</li></ol>
<b>Deformación Cauchy</b>	La relación entre la extensión lineal y la longitud original.
<b>Deformación de deslizamiento</b>	Una deformación relativa en el deslizamiento (1); el término se abrevia frecuentemente con deslizamiento(2).
<b>Deformación Hencky</b>	El logaritmo natural de la relación entre la longitud final y la inicial, en la tensión o en la compresión.
<b>Deformación logarítmica</b>	Vea 'deformación Hencky'.
<b>Deformación natural</b>	Vea 'deformación Hencky'.
<b>Deformación permanente</b>	Una deformación que siempre queda después de cesar el esfuerzo que la produce.
<b>Deformación progresiva</b>	Una deformación progresiva acelerada.

<b>terciaria</b>	
<b>Deformación relativa</b>	La medida de la deformación relativa a la configuración de referencia de longitud, área o volumen. También llamada deformación.
<b>Deformación residual</b>	La deformación conservada después de cesar el esfuerzo externo.
<b>Deformación técnica</b>	Vea 'deformación de Cauchy'.
<b>Deformación volumétrica</b>	El cambio de volumen relativo al volumen original.
<b>Desgarramiento</b>	Una tendencia a romperse en la deformación plástica leve.
<b>Deslizamiento</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. El movimiento relativo de una capa con respecto a capas paralelas adyacentes.</li> <li>2. La abreviación de la deformación de deslizamiento.</li> </ol>
<b>Deslizamiento puro</b>	Un deslizamiento que no es acompañado por la rotación del elemento al que se aplica, con respecto al cuerpo del material.
<b>Deslizamiento simple</b>	Un deslizamiento (1) causado por el desplazamiento relativo paralelo de planos igualmente paralelos (vea flujo viscosimétrico).
<b>Desviador</b>	Vea 'tensor de esfuerzo adicional'.
<b>Dilatancia</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. El incremento del volumen causado por el cizallamiento (1).</li> <li>2. A veces es usado como sinónimo de 'espesura de cizallamiento'.</li> </ol>
<b>Disolución</b>	La unión compacta de las moléculas o de los iones de una fase continua con las moléculas o los iones o el material disperso soluble.
<b>Docilidad de pérdida</b>	La parte imaginaria de la docilidad compleja.
<b>Ductibilidad</b>	La extensión de la deformación plástica irreversible en caso de una ruptura.
<b>Durabilidad</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. El número de ciclos de esfuerzo, sea con amplitudes de esfuerzo constantes, o amplitudes de deformación constantes, que conducen a una falla.</li> <li>2. Vea 'vida de fatiga'.</li> </ol>
<b>Dureza</b>	La resistencia de un material contra incisiones o rayaduras.
<b>Ecuación constitutiva</b>	Una ecuación que relaciona el esfuerzo, la deformación, el tiempo y a veces otras variables como la temperatura. Es llamada también ecuación reológica de estado.
<b>Ecuación de estado</b>	Vea 'ecuación constitutiva' y 'ecuación reológica de estado'.
<b>Ecuación Navier-Stokes</b>	Una ecuación de movimiento para el modelo de fluido

	newtoniano que describe el balance entre la fuerza de inercia, la fuerza de presión, la fuerza viscosa y cualquier otra fuerza del cuerpo.
<b>Ecuación reologica de estado</b>	Una ecuación que relaciona el esfuerzo, la deformación, el tiempo, y a veces otras variables como la temperatura. Es llamada también ecuación constitutiva.
<b>Efecto Barus (efecto Merrington).</b>	Un hinchamiento posterior a la extrusión.
<b>Efecto Bauschinger</b>	El abatimiento del módulo de elasticidad en una prueba de histéresis subsecuente al inverso del esfuerzo aplicado que produjo una deformación plástica.
<b>Efecto de fuerza normal</b>	Un efecto causado por los componentes de la fuerza normal generada por el desplazamiento (1) disparatejo, por ejemplo el efecto Weissenberg.
<b>Efecto elástico posterior</b>	El retraso -causado por las fuerzas 'viscosas'- en el establecimiento de la recuperación de una deformación elástica.
<b>Efecto elástico previo</b>	Una deformación elástica retardada, bajo un esfuerzo.
<b>Efecto electroviscoso</b>	Efectos eléctricos que influyen la viscosidad: (a) causados por partículas cargadas, en suspensión; (b) causados por la aplicación de un campo eléctrico externo.
<b>Efecto sigma</b>	Un decremento en la viscosidad aparente en zonas estrechas de delizamiento, producido por un perfil de velocidad discontinuo y que no incluye flujo tapón.
<b>Efecto Weissenberg</b>	Un efecto que se encuentra en algunos fluidos no newtonianos que se manifiesta por ejemplo en la subida del fluido a lo largo de una barra al girar esta (vea efecto Weissenberg negativo).
<b>Efecto Weissenberg negativo</b>	La reducción del nivel de un fluido alrededor de una barra en rotación; sin ser el origen de la inercia.
<b>Efecto Weissenberg positivo</b>	Vea 'efecto Wessenberg'.
<b>Elasticidad</b>	Un comportamiento 'esfuerzo/deformación' reversible.
<b>Elasticidad del flujo</b>	La habilidad de un líquido de recuperar una parte de su deformación inducida por el flujo.
<b>Elasticidad retardada</b>	Una deformación reversible dependiente del tiempo.
<b>Elasticidad volumétrica</b>	La respuesta elástica al cambio de volumen.
<b>Elástico</b>	El adjetivo de 'elasticidad'.
<b>Elastoviscoso</b>	Un término descriptivo para un líquido que tiene tanto la propiedad de viscosidad como de elasticidad.
<b>Elongación por punto cedente</b>	La elongación del material representada por la parte de la

curva esfuerzo/deformación que es casi paralela al eje de la deformación, observada después del punto cedente inferior.

<b>Endurecimiento por deformación</b>	Vea endurecimiento por trabajo.
<b>Endurecimiento por trabajo</b>	Un incremento en la resistencia a la deformación plástica, debido a los cambios estructurales en un material inducido por deformación previa
<b>Energía elástica</b>	Vea 'energía de deformación'.
<b>Energía de activación</b>	La energía cinética promedio, más una cierta cantidad de energía adicional que requieren las moléculas, para permitir que se realice un cierto proceso.
<b>Energía por deformación</b>	La energía acumulada en un material por la deformación elástica.
<b>Esfuerzo</b>	La fuerza por unidad de área.
<b>Esfuerzo cedente</b>	El esfuerzo que corresponde al punto cedente.
<b>Esfuerzo cortante</b>	La componente del esfuerzo, paralela (tangencial) al área considerada.
<b>Esfuerzo de cizallamiento extrapolado</b>	La intersección de la extrapolación, de la parte superior lineal de una curva de flujo, con el eje de esfuerzo.
<b>Esfuerzo de flujo</b>	El esfuerzo mínimo (más bajo) en tensión o cizallamiento (1), necesario para inducir el 'flujo plástico' en un material.
<b>Esfuerzo de prueba</b>	El esfuerzo requerido para producir una estabilidad permanente especificada.
<b>Esfuerzo enfriado</b>	Vea 'esfuerzo residual'.
<b>Esfuerzo hidrostático</b>	Vea 'esfuerzo isotrópico'.
<b>Esfuerzo isotrópico</b>	Un sistema de esfuerzos en el cual las tres componentes normales son iguales.
<b>Esfuerzo normal</b>	La componente del esfuerzo en ángulo recto a la superficie
<b>Esfuerzo residual</b>	El esfuerzo interno que no desaparece después de cesar el esfuerzo externo.
<b>Esfuerzo tangencial</b>	Vea 'esfuerzo cortante'.
<b>Espesamiento por deslizamiento</b>	El aumento de viscosidad que aparece con el aumento de la velocidad de corte en el flujo estable (vea 'reopexia', 'dilatancia', y 'tixotropía negativa').
<b>Estabilidad (Set)</b>	Vea 'deformación permanente', 'estabilidad permanente'.
<b>Estrangulación</b>	La reducción local no uniforme de la sección transversal de una probeta bajo extensión.

<b>Factor de fricción</b>	En el flujo a través de un tubo, el esfuerzo de cizallamiento en la pared dividido entre la energía cinética del flujo por unidad de volumen. En el flujo laminar es igual a $64/Re$ , si el número de Reynolds se relaciona con el radio real del tubo (factor de fricción de Fanning).
<b>Factor de fricción de Darcy</b>	Vea 'factor de fricción'.
<b>Factor de fricción de Fanning</b>	Vea 'factor de fricción'.
<b>Fatiga estática</b>	Un estado causado por una carga estática prolongada que conduce por último a la fractura.
<b>Fluencia</b>	La deformación lenta de un material; generalmente medida bajo un esfuerzo constante. (vea también 'flujo primario, flujo secundario y flujo terciario').
<b>Fluidéz</b>	El recíproco de la viscosidad dinámica (1).
<b>Fluido</b>	Un líquido o un gas.
<b>Fluido Ideal</b>	Un líquido idealizado, tratado como incompresible y no viscoso.
<b>Fluido Inviscido</b>	Un fluido idealizado cuya viscosidad no tiene significado para el problema que se considera.
<b>Flujo</b>	Una 'deformación' de la cuál, una parte es irre recuperable (se trata del empleo reológico del término).
<b>Flujo Couette</b>	El flujo de cizallamiento en el espacio anular entre dos cilindros co-axiales en rotación relativa. Es llamado también 'flujo Couette circular'. (ver flujo Couette plano).
<b>Flujo Couette circular</b>	El flujo cizallante en el espacio anular entre dos cilindros coaxiales en movimiento, de rotación relativa; frecuentemente se usa sin el adjetivo circular (vea 'flujo Couette' y 'flujo Couette plano').
<b>Flujo Couette plano</b>	Deslizamiento simple entre planos paralelos en movimiento relativo (vea flujo Couette circular).
<b>Flujo estable</b>	Un flujo en el cual la velocidad en cada punto no varía con el tiempo.
<b>Flujo laminar</b>	Flujo sin turbulencia.
<b>Flujo no-newtoniano</b>	Cualquier flujo laminar que no es caracterizado por la ecuación Navier-Stokes.
<b>Flujo plástico</b>	Un flujo más allá del esfuerzo.
<b>Flujo Poiseuille</b>	Flujo laminar en una tubería con sección transversal circular bajo gradiente constante de presión.
<b>Flujo secundario</b>	Los componentes de flujo en plano ortogonal a la dirección

	principal de flujo.
<b>Flujo tapon</b>	El movimiento de un material cuyo centro tiene un gradiente de velocidad igual a cero a través de una tubería.
<b>Flujo telescópico</b>	Término descriptivo para el flujo laminar de un fluido en un tubo cilíndrico.
<b>Flujo viscosimétrico</b>	Un flujo laminar en el cual la historia de la velocidad de corte ha sido constante por largo tiempo. Un determinado flujo puede ser descrito completamente por un máximo de tres funciones del material: la función de viscosidad y dos funciones de esfuerzo normal.
<b>Fractura por delgazamiento</b>	Una fractura que resulta del deslizamiento (1).
<b>Fractura por derretimiento</b>	La distorsión irregular de un polímero después de pasar por una matriz.
<b>Fricción</b>	Vea 'coeficiente de fricción'.
<b>Fricción interna</b>	La pérdida de energía debida a la componente no-elástica de la deformación, por ejemplo la viscosidad.
<b>Fuerza del cuerpo</b>	Una fuerza que actúa a través de todo el volumen de un sistema.
<b>Fuerza normal</b>	1. Una fuerza que actúa en ángulo recto a una superficie especificada. 2. En la reología, una fuerza que actúa en ángulo recto al esfuerzo cortante aplicado.
<b>Función de energía almacenada</b>	1. Vea función de energía por deformación.
<b>Función de energía deformación</b>	La energía elástica acumulada en un cuerpo, en términos por de deformación de esfuerzo.
<b>Función de fluencia</b>	Una función que relaciona la deformación con el tiempo, cuando una unidad de esfuerzo es aplicada instantáneamente a un tiempo cero y mantenida después constante.
<b>Función de relajamiento</b>	El esfuerzo como función del tiempo en un sistema deformado: es la función $f$ en la expresión de la función de memoria solo donde $\sigma$ es el esfuerzo y $t$ es la medida de la deformación.
<b>Gradiente de velocidad</b>	La derivada de la velocidad del elemento de un fluido, con respecto a una coordenada de espacio.
<b>Hemereología</b>	La reología de la sangre, de sus componentes y de los vasos sanguíneos.
<b>Hesión</b>	Una combinación entre adhesión y cohesión.
<b>Hilabilidad (Thinning)</b>	La capacidad del líquido de formar fibras extensas estables.

<b>Histéresis</b>	La propiedad de un material o de un cuerpo, por el cual se producen diferentes valores de la respuesta para el mismo valor del estímulo correspondiente, de acuerdo al valor alcanzado por un cambio decreciente continuo o por un cambio creciente continuo del estímulo. Nota: En el campo de la reología es generalmente aplicado a funciones de 'esfuerzo/deformación' o de 'esfuerzo/velocidad de deformación'.
<b>Incremento de viscosidad</b>	Vea 'viscosidad específica'.
<b>Índice de viscosidad</b>	Un valor en una escala arbitraria usado para indicar la magnitud de los cambios de viscosidad en los aceites lubricantes con el cambio de la temperatura. Un valor alto indica una curva de viscosidad-temperatura plana, y un valor inferior indica una curva de viscosidad-temperatura inclinada.
<b>Isotrópico</b>	Que tiene las mismas propiedades en todas las direcciones.
<b>Límite de durabilidad</b>	Vea 'resistencia a la fatiga'.
<b>Límite de fatiga</b>	El mayor valor de la amplitud tanto del esfuerzo como de la deformación que, aplicada a un lugar determinado (de 1 a 5 millones de ciclos en la práctica), no conducirá a una falla.
<b>Límite elástico</b>	El punto de la curva 'Esfuerzo/deformación' donde empieza la deformación plástica; especificable en términos de 'esfuerzo o deformación'.
<b>Línea de flujo</b>	Una curva cuyas tangentes son formadas por la dirección de la velocidad en el flujo estable.
<b>Líquido</b>	La fase de la materia que fluye incluso bajo 'esfuerzos cortantes' infinitamente pequeños para tomar finalmente la forma del recipiente que lo contiene.
<b>Líquido elastoviscoso</b>	1. Vea 'líquido elástico'. 2. Un líquido que muestra en cizallamiento, tanto propiedades elásticas como viscosas (vea 'elastoviscoso' y 'viscoelasticidad').
<b>Macroreología</b>	La reología que trata el material como un continuo, sin consideración explícita de la microestructura. Llamada también reología del continuo y reología fenomenológica.
<b>Material elastoplástico</b>	Un material plástico que muestra algo de elasticidad.
<b>Microreología</b>	La reología en la cual se toma en cuenta la microestructura de los materiales.
<b>Metro cuadrado por segundo</b>	La unidad del 'sistema inglés' (SI) de la viscosidad cinemática (vea Stokes).
<b>Modelo</b>	La relación idealizada de un comportamiento reológico que se puede expresar en términos matemáticos, mecánicos o eléctricos (vea la nota).

NOTA: Se han definido los siguientes modelos:

Modelo Bingham

Modelo Burgers

Modelo retardador

Modelo de fluido Green-Rivlin

Modelo Hooke

Modelo Kelvin

Modelo Maxwell

Modelo de fluido newtoniano

Modelo de fluido de la ley de potencias

Modelo de fluido Reiner-Rivlin

Modelo de fluido Rivlin-Ericksen

Modelo St. Venant

Modelo de fluido simple

Modelo de sólido lineal estándar

Modelo de Voigt, término adicional (modelo de Kelvin)

<b>Modelo de fluido Green-Rivlin</b>	Una ecuación constitutiva integral general, para la viscoelasticidad.
<b>Modelo del fluido newtoniano</b>	Un modelo caracterizado por el valor constante del cociente del esfuerzo cortante dividido entre la velocidad de corte en flujo de deslizamiento simple y con diferencias de esfuerzo normal iguales a cero (vea retardador).
<b>Modelo de fluido Reiner-</b>	Un modelo matemático de fluido no-elástico en el cual el Rivlin
	esfuerzo es una función no-lineal de la velocidad de deformación.
<b>Modelo de Hooke</b>	Un modelo que representa la ley de elasticidad de Hooke, por ejemplo un resorte.
<b>Modelo de Kelvin-Voigt</b>	Consiste de un modelo de Hooke y un modelo de flujo newtoniano en paralelo.
<b>Modelo de Maxwell</b>	Un modelo de Hooke y un modelo de fluido newtoniano en serie.
<b>Modelo estándar de sólido lineal</b>	Un modelo viscoelástico que consiste de un modelo Kelvin en serie con un modelo Hooke o, como alternativa, de un modelo Maxwell en paralelo con un modelo Hooke.
<b>Modelo de fluido de la ley de potencias</b>	Un modelo caracterizado por la relación lineal entre el logaritmo del esfuerzo cortante y el logaritmo de la velocidad de corte en el flujo de deslizamiento simple.
<b>Modelo de fluido Rivlin-Ericksen</b>	Un modelo caracterizado por una ecuación constitutiva diferencial general que representa el comportamiento viscoelástico.
<b>Modelo de Voigt</b>	Vea 'modelo de Kelvin'.
<b>Modelo St. Venant</b>	Un modelo que describe un material que es rígido para esfuerzos menores que un cierto valor al cual fluye; es frecuentemente representado por un cuerpo sólido sobre una superficie lisa (cursor, resbalador).

<b>Modelo simple de fluido</b>	Un modelo de fluido para el cual el esfuerzo en cualquier instante es determinado por la historia de la deformación.
<b>Módulo</b>	En la reología, la relación entre una componente de esfuerzo y una componente de deformación (vea la nota). NOTA: Se han definido los siguientes módulos: Módulo volumétrico Módulo complejo Módulo dinámico, término adicional (vea módulo complejo) Módulo elástico Módulo de pérdida Módulo secante Módulo de deslizamiento Módulo de almacenamiento Módulo tangencial Módulo de Young.
<b>Módulo complejo (módulo dinámico)</b>	La representación matemática de un módulo como la suma de una parte real y una imaginaria. La parte real es llamada módulo de conservación, y la parte imaginaria módulo de pérdida.
<b>Módulo de almacenamiento</b>	El cociente de la parte del esfuerzo que está en fase con la deformación, dividido entre la deformación bajo condiciones sinusoidales.
<b>Módulo de Bingham</b>	El modelo de comportamiento de un sólido elástico hasta el esfuerzo máximo, el gasto de cizallamiento es directamente proporcional al esfuerzo de cizallamiento menos el esfuerzo máximo.
<b>Módulo de Burges</b>	Una combinación del modelo de Kelvin y del modelo de Maxwell en serie.
<b>Módulo de elasticidad</b>	1. El cociente de un esfuerzo dividido entre la 'deformación elástica' correspondiente (vea 'módulo volumétrico', 'módulo de cizallamiento' y 'módulo de Young'). El recíproco de la 'compliance'. 2. Vea 'módulo elástico'.
<b>Módulo de pérdida</b>	La parte imaginaria del módulo complejo.
<b>Módulo de rigidez</b>	1. El cociente del esfuerzo cortante dividido entre la deformación elástica de deslizamiento correspondiente. 2. Vea 'módulo de deslizamiento'.
<b>Módulo de Young</b>	El cociente del esfuerzo de tracción dividido entre la deformación de tracción correspondiente de un material elástico medidos en deformaciones no axiales.
<b>Módulo dinámico</b>	Vea 'módulo complejo'.
<b>Módulo secante</b>	La pendiente de la línea recta trazada desde el origen hasta cualquier punto dado sobre la curva esfuerzo/deformación.

<b>Módulo tangente</b>	La pendiente de la función esfuerzo/deformación. Compare con 'módulo secante'.
<b>Módulo volumétrico</b>	El coeficiente del esfuerzo isotrópico dividido entre el alargamiento elástico volumétrico. El recíproco de la compresibilidad (2).
<b>Movilidad</b>	El recíproco de la viscosidad plástica.
<b>Número de Deborah</b>	1. La relación entre el 'tiempo de recuperación' de un material y la duración de la observación. 2. La relación entre una característica de tiempo de un material y el tiempo característico de observación.
<b>Número de Reynolds</b>	El producto entre una longitud típica y una velocidad de flujo típica, dividido entre la viscosidad cinemática del fluido. Expresa la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas.
<b>Número de Taylor</b>	Un grupo adimensional de parámetros asociados con inestabilidades viscosas en el flujo Couette circular, cuyo valor depende de la viscosidad cinemática del fluido y de las velocidades radiales y angulares de los cilindros.
<b>Número de viscosidad</b>	Vea 'viscosidad reducida'.
<b>Número de Weissenberg</b>	El producto del tiempo de relajamiento o de otro tiempo característico de un material y la velocidad de corte del flujo.
<b>Número límite de viscosidad</b>	Vea 'viscosidad intrínseca'.
<b>Número logarítmico de viscosidad</b>	1. El cociente del logaritmo natural de la viscosidad relativa dividido entre la concentración de la fase soluble o dispersa. 2. Vea 'viscosidad inherente'.
<b>Pérdida permanente de viscosidad</b>	El decremento irreversible de la viscosidad inducida por un esfuerzo cortante. Compare con reomaiáxis.
<b>Perfil de velocidad</b>	La distribución de la velocidad sobre una sección transversal normal a la dirección de flujo.
<b>Plasticidad</b>	La capacidad de ser remodelado además de guardar la forma bajo fuerzas finitas; presentando flujo por encima de un esfuerzo o punto cedente.
<b>Plástico</b>	El adjetivo de 'plasticidad'.
<b>Plasto deformación progresiva secundaria</b>	Una plasto deformación progresiva con respecto a la velocidad constante
<b>Polse (P)</b>	La unidad 'CGS' de la viscosidad ( $1 P = 10 \text{ Pa s}$ ).
<b>Principio de la superposición tiempo-temperatura</b>	El principio de igualar los resultados de los experimentos de deformación de deslizamiento ejecutados a diferentes temperaturas para que se ordenen en una sola curva.
<b>Principio de superposición</b>	Supone que las respuestas son aditivas; por ejemplo, que

<b>Índice de Boltzmann</b>	el esfuerzo que resulta de la suma de las deformaciones, cada una de ellas siendo una función del tiempo, es la suma de los esfuerzos que resultan de cada una de éstas.
<b>Principio St. Venant</b>	El efecto del esfuerzo se vuelve despreciable a distancias comparables con la dimensión del lugar sobre el cual actúa.
<b>Pseudocuerpo</b>	Un término descriptivo utilizado para: (a) pseudoplasticidad; (b) tixotropía.
<b>Pseudoplasticidad</b>	Una reducción de deslizamiento independiente del tiempo sin esfuerzo a punto cedente.
<b>Punto cedente</b>	El punto sobre la curva de 'esfuerzo/deformación' o 'esfuerzo/velocidad de deformación' que corresponde a la transición de la deformación elástica a la plástica (vea 'punto cedente inferior').
<b>Punto cedente inferior</b>	1. Para no-metales que se comportan aproximadamente como un modelo de Bingham, es el punto en el cual la curva que relaciona el esfuerzo con la velocidad de corte encuentra el eje del esfuerzo. 2. Para metales, el punto cedente observado después de la caída de presión en la deformación plástica.
<b>Punto cedente superior</b>	Vea 'punto cedente'.
<b>Radio hidráulico</b>	El área transversal del flujo de un material, dividido entre el perímetro mojado.
<b>Recocido</b>	Tratamiento con calor que tiene como objetivo la reducción de los esfuerzos internos.
<b>Recuperación</b>	El regreso a la condición reológica normal, comunmente al cesar el esfuerzo.
<b>Recuperación dinámica</b>	La recuperación de un esfuerzo interno.
<b>Reducción temporal de viscosidad</b>	1. Una reducción de la viscosidad que ocurre con el aumento de la velocidad de corte en el flujo estable (vea pseudoplasticidad y tixotropía). 2. Vea 'thinning (hilamiento) por deslizamiento'.
<b>Relación de Poisson</b>	La relación de la formación transversal y la deformación axial en la elongación o en la compresión.
<b>Relacion de viscosidad</b>	Vea 'viscosidad relativa'.
<b>Relacion viscosidad/densidad</b>	Vea 'viscosidad cinemática'.
<b>Relajamiento de esfuerzo</b>	El decremento del esfuerzo con el tiempo en un material deformado.
<b>Resbalamiento</b>	Una 'deformación plástica' en los cristales, generalmente destinada a limitar los planos cristalográficos.
<b>Reedestrucción</b>	Vea 'roomalaxis'.

<b>Reodcronismo</b>	Una absorción diferencial de la luz, paralela y perpendicular a la dirección del flujo proyectándola o pasándola en un sistema de dos fases.
<b>Reogontómetro</b>	Un reómetro diseñado para la medición de las componentes normales y deformación de deslizamiento del tensor de esfuerzo.
<b>Reograma</b>	La grafica de una relación reológica.
<b>Reología</b>	La ciencia de la deformación y el flujo de la materia.
<b>Reología de lo continuo</b>	La reología que trata los materiales como cuerpos continuos, sin una consideración explícita de la microestructura. Es llamada también macroreología o reología fenomenológica.
<b>Reología fenomenológica</b>	La reología que trata el material como si fuera un continuo, sin considerar explícitamente la microestructura. También es llamada reología de lo continuo y macroreología.
<b>Reología Interfacial</b>	La reología bidimensional en la interfase.
<b>Reología química</b>	El estudio de los fenómenos independientes del tiempo en el comportamiento del flujo que resultan de los cambios químicos. Algunos ejemplos los encontramos en la degradación de cizallamiento (1) y en los enlaces cruzados de los polímeros.
<b>Reomalaxis</b>	Una pérdida irreversible de consistencia en el deslizamiento de un material, inducida por la deformación.
<b>Reómetro</b>	Un instrumento para la medición de las propiedades reológicas.
<b>Reopexia</b>	1. La aceleración de la solidificación de un material tixotropico por movimientos leves y regulares. 2. Ven tixotropía negativa. NOTA: En 1936 la definición (1) fue dada por los descubridores del fenómeno, pero desde mediados de los años de 50's el término adoptó la definición principal (2).
<b>Resiliencia</b>	1. La habilidad de un cuerpo de almacenar energía por deformación elástica. 2. La cantidad de energía almacenada por deformación elástica por unidad de volumen.
<b>Resistencia (Strength)</b>	La resistencia al flujo plástico o a la fractura (vea 'resistencia a la fatiga' y 'resistencia máxima a la tracción').
<b>Resistencia a la fatiga</b>	El valor de la amplitud tanto del esfuerzo como de la deformación en el cual, el objeto de prueba, tendría una vida que equivale a un número determinado de ciclos.
<b>Resistencia máxima a la tracción</b>	La máxima carga alcanzable que actúa sobre una muestra en una prueba de tracción, dividida entre el área original

		de la sección transversal de la muestra
<b>Restablecimiento</b>		La recuperación de una deformación elástica producida por estímulos externos, por ejemplo calor, vibración, etc.
<b>Ruptura por fragilidad</b>		Una ruptura bajo condiciones reducidas sin ninguna deformación plástica previa.
<b>Segundo de Pascal (Pa·s)</b>		La unidad del 'sistema inglés' (SI) de la viscosidad dinámica (vea poise). 1 Pa·s = 1 N·s / m <sup>2</sup> == 1 Kg / (m·s)
<b>Sicorreología</b>		El estudio de la relación entre las apreciaciones subjetivas y las mediciones reológicas.
<b>Sineresis</b>		La expulsión espontánea de líquido de un gel durante el almacenamiento.
<b>Sobreimpulso</b>		El surgimiento transitorio de un esfuerzo por encima del valor de equilibrio en las etapas iniciales del flujo a velocidad constante.
<b>Sólido</b>		Un material que no fluye bajo esfuerzos infinitos.
<b>Stokes (st)</b>		1. La unidad GCS de la viscosidad cinemática: 1 (St) = 10 <sup>-4</sup> (m <sup>2</sup> / s). 2. Flujo con Número de Reynolds pequeño. Flujo caracterizado por fuerzas de inercia despreciables en comparación con las fuerzas de viscosidad, y por ser, estacionario y no turbulento.
<b>Superelasticidad</b>		Una ductividad fuera de lo común, manifiesta generalmente en ciertas aleaciones, por deformaciones de tracción pronunciadas hasta la fractura.
<b>Superfluidez</b>		El flujo sin fricción de ciertos materiales, por ejemplo Helio líquido II por abajo de 2.2 K.
<b>Tectonitas</b>		Material que tiende a formar tubos cuando son envueltos en moldes de barra.
<b>Tensor de esfuerzo</b>	Una	matriz de las componentes de la deformación de deslizamiento y del esfuerzo normal que representa el estado de esfuerzo en un punto de un cuerpo.
<b>Tensor de esfuerzo adicional</b>		La diferencia entre el tensor de esfuerzo y la contribución de la presión isotrópica; se usa para materiales incompresibles.
<b>Termoendurecible</b>		Que tiene la propiedad de volverse termoendurecido al aplicarse suficiente calor (curación).
<b>Termoendurecido</b>		Un material plástico que no se ablanda considerablemente al ser calentado a temperaturas por abajo de su temperatura de decomposición.
<b>Termoplástico</b>		Un material plástico capaz de ser ablandado por

	calentamiento y endurecido por enfriamiento, estos fenómenos se pueden repetir.
<b>Tiempo de relajamiento</b>	El tiempo que necesita el esfuerzo en un modelo Maxwell para decrecer a $e^{-1}$ de su valor inicial bajo deformación constante. Muchos materiales tienen una multiplicidad de tiempos de relajamiento.
<b>Tiempo de retardo</b>	El tiempo que necesita el esfuerzo en un modelo Kelvin para decrecer a $e^{-1}$ de su valor original después de cesar el esfuerzo. Muchos materiales tienen una multiplicidad de tiempos de retardo.
<b>Tixotropía</b>	Un decremento de la viscosidad aparente bajo esfuerzo cortante, seguido por una recuperación gradual al cesar el esfuerzo. El efecto es dependiente del tiempo (vea sudaoplasticidad).
<b>Tixotropía negativa</b>	Un aumento de la viscosidad aparente bajo esfuerzo cortante, seguida por una recuperación gradual cuando el esfuerzo cesa. El efecto es dependiente del tiempo (vea 'dilatación'(1)).
<b>Tiracción</b>	Una fuerza normal a la superficie sobre la cual actúa, y dirigida hacia afuera del cuerpo.
<b>Tribología</b>	La ciencia y la tecnología de las superficies en interacción en el movimiento relativo, y de los sujetos y prácticas relacionadas.
<b>Turbulencia</b>	Un estado de flujo en el cual la velocidad de las componentes presenta variaciones casuales.
<b>Turbulencia elástica</b>	Un disturbio que es resultado del comportamiento 'elástico-viscoso'. Un ejemplo lo encontramos en la 'ruptura de fundición'.
<b>Turbulencia estructural</b>	Una turbulencia local inducida por partículas en suspensión o por moléculas en solución cuando el flujo global es la línea de flujo.
<b>Valor cedente</b>	Vea 'esfuerzo cedente'.
<b>Vena contracta</b>	La contracción de la sección transversal de un chorro que sale de un orificio.
<b>Velocidad de corte</b>	El cambio de la deformación de corte por unidad de tiempo.
<b>Velocidad de deformación</b>	El cambio de la deformación por unidad de tiempo.
<b>Velocidad de flujo de volumen</b>	La velocidad de los cambios continuos de volumen, ocurridos bajo esfuerzos isotrópicos.
<b>Velocidad volumétrica de flujo</b>	El volumen de fluido que pasa a través de cualquier área de sección transversal de una tubería por unidad de tiempo.
<b>Viscoelasticidad</b>	Que tiene tanto propiedades viscosas como elásticas. Este

término se limita a veces a los sólidos

## Viscoelasticidad lineal

La viscoelasticidad caracterizada por la relación entre el esfuerzo, la deformación y la derivada con respecto al tiempo de la deformación.

## Viscosidad

1. Cualitativamente, la propiedad de un material que resiste progresivamente a la deformación con velocidad de deformación creciente.

2. Cuantitativamente, una medida de esta propiedad, definida como el cociente del esfuerzo cortante dividido entre la velocidad de corte en el flujo estable. Frecuentemente se usa como sinónimo de la viscosidad aparente o del coeficiente de viscosidad, (vea la nota).

NOTA: Se han definido los siguientes términos de viscosidad:

Viscosidad aparente

Viscosidad areal (adjetivo de área)

Viscosidad volumétrica

Coefficiente de viscosidad transversal

Coefficiente de viscosidad interfacial

Coefficiente de viscosidad

Coefficiente de tracción viscosa

Viscosidad compleja

Viscosidad transversal (vea 'coeficiente de viscosidad transversal')

Viscosidad diferencial

Viscosidad dinámica

Elástico-viscoso

Líquido elástico-viscoso (vea 'líquido elástico')

Viscosidad de elongación

Viscosidad inherente

Viscosidad interfacial

Viscosidad intrínseca (IV)

Viscosidad cinemática

Número límite de viscosidad (vea 'viscosidad intrínseca')

Número logarítmico de viscosidad (vea 'viscosidad inherente')

Pérdida permanente de viscosidad

Viscosidad plástica

Viscosidad reducida

Viscosidad relativa

Viscosidad específica

Viscosidad estructural (vea 'viscosidad interfacial')

Reducción temporal de viscosidad ('vea deslizamiento')

Viscosidad Trouton (vea 'viscosidad de elongación')

Viscoelasticidad

Relación viscosidad/densidad (vea viscosidad cinemática)

Incremento de viscosidad (vea 'viscosidad específica')

Índice de viscosidad (VI)

Número de viscosidad (vea 'viscosidad reducida')

Relación de viscosidad (vea 'viscosidad relativa')

Viscosidad de volumen (vea 'viscosidad volumétrica').

## Viscosidad aparente

El cociente del esfuerzo de cizallamiento dividido entre el gasto de cizallamiento, cuando éste cociente depende del gasto de cizallamiento.

<b>Viscosidad cinemática</b>	El cociente de la viscosidad dinámica (1) dividida entre la densidad del material, estando ambas medidas a la misma temperatura.
<b>Viscosidad compleja</b>	La representación matemática de una viscosidad como la suma de una parte real y una imaginaria. La parte real se llama comunmente viscosidad dinámica (2), y la parte imaginaria se denomina módulo complejo (módulo de rigidez compleja).
<b>Viscosidad de elongación</b>	El cociente del esfuerzo de extensión dividido entre el gasto de extensión.
<b>Viscosidad de superficie</b>	La propiedad de una interfaz de resistir progresivamente a un cambio tixotrópico del área con un ritmo creciente de cambio.
<b>Viscosidad de volumen</b>	Vea 'viscosidad volumétrica'.
<b>Viscosidad diferencial</b>	La derivada del esfuerzo con respecto al gasto de deformación en el cizallamiento simple.
<b>Viscosidad dinámica</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Un sinónimo del coeficiente de viscosidad utilizado para distinguir éste número, de la viscosidad cinemática. El recíproco de la 'fluidéz'.</li> <li>2. El cociente de la parte del esfuerzo que se encuentra en fase con el gasto de deformación, dividida entre el gasto de deformación bajo deformación senoidal.</li> </ol>
<b>Viscosidad específica</b>	La diferencia entre la viscosidad dinámica (1) de una solución o dispersión y la del solvente o de la fase continua, dividida entre la viscosidad dinámica del solvente o de la fase continua medidas a la misma temperatura.
<b>Viscosidad estructural</b>	Vea 'habilidad por deslizamiento'.
<b>Viscosidad inherente</b>	Vea 'número logarítmico de viscosidad'.
<b>Viscosidad interfacial</b>	La propiedad de una interface de resistir progresivamente la deformación de deslizamiento en el plano de la nterface con la creciente velocidad de deformación. Se utiliza frecuentemente para denominar la dimensión de esta propiedad.
<b>Viscosidad intrínseca (IV)</b>	El valor límite de la viscosidad reducida cuando la concentración se acerca a cero.
<b>Viscosidad plástica</b>	Para un modelo de Bingham, el exceso del esfuerzo cortante sobre el esfuerzo a punto cedente, dividido entre la velocidad de corte. El recíproco de la movilidad.
<b>Viscosidad reducida</b>	La viscosidad específica por unidad de concentración de la fase soluble o dispersa.
<b>Viscosidad relativa</b>	La relación entre la viscosidad dinámica (1) de una solución y la del solvente, o entre la de una dispersión y la de su fase continua, cada una medida a la misma temperatura.

<b>Viscosidad superficial</b>	Vea 'viscosidad interfacial'.
<b>Viscosidad transversal</b>	Vea 'coeficiente de viscosidad transversal'.
<b>Viscosidad Trouton</b>	Vea 'viscosidad de elongación'.
<b>Viscosidad volumétrica</b>	La viscosidad (2) asociada a los cambios de volumen, es decir, el cociente del esfuerzo isotrópico dividido entre el gasto de deformación volumétrica.
<b>Viscosímetro</b>	Un instrumento para la medición de la viscosidad.
<b>Viscoso</b>	El adjetivo de viscosidad.
<b>Vórtices de Taylor</b>	El flujo secundario que consiste de vórtices similares a anillos asociados con una inestabilidad en el flujo Couette circular cuando el número de Taylor rebasa un cierto valor.
<b>Vorticidad (régimen turbilionario)</b>	Un movimiento giratorio en un fluido.

## BIBLIOGRAFIA

---

- BRUN E.A., MARTINOT - LAGARDE A., MATHIEU J.  
Mecanique des fluides. Tomes 1 et 2 Dunod, Paris, 1968.
- LANDAU L. et LIFCHITZ E.  
Mecanique des fluides Editions Mir. Moscou, 1971.
- SHERMAN P.  
Industrial rheology. Academic Press. Londres, 1970.
- WILLIAMS J.G.  
Stress analysis of polymers Ellis Horwood Limited, 1980.
- PERSOZ B.  
La Rheologia, Masson et Cie, Paris, 1969,
- MENDEL J.  
Theorie generale de la viscoelasticite lineaire Cahiers du Groupe  
Francois de Rheologie, n° 4, 21, 1958.
- SCOTT BLAIR G.W.  
Elementary rheology. Academic Press, Londres et New York, 1969.
- CHRISTENSEN R.M.  
Theory of viscoelasticity. Academic Press, New York, 1971.
- BAUER W.H., COLLINS E.A.  
"Thixotropy and dilatancy" in Rheology, Chap 8, Tome IV, edited by  
EIRICH F.R. Academic Press, New York, 1967
- HARRIS J  
Rheology and non newtonian flow Longman, Londres, 1977.
- HOUWINK R.H., DE DECKER H.K.  
Elasticity, plasticity and structure of matter. University Press,  
Cambridge, 1971.
- SCHÖWALTER W.R  
Mechanics of non-newtonian fluids Pergamon Press, Oxford, 1978

SCOTT BLAIR G W

Elementary rheology Academic Press. Londres, 1969.

BENITEZ HERNANDEZ M A , GARACOCHEA PETIRENA F , REYES A C  
Fluidos de Perforacion, UNAM, Mexico D F 1979.

SHERMAN P.

Industrial rheology, Academic Press, Londres, 1970