UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

# 40 PROBLEMAS PARA OLIMPIADAS DE MATEMATICAS

T E S I S

Q U E P R E S E N T A:

**JULIO CESAR GUEVARA BRAVO**

PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

Mexico D.F. Noviembre, 1989

# INDICE

# INTRODUCCION

Para participar en las olimpiadas, los estudiantes deben enfrentarse a dos tipos de problemas: los que requieren un conocimiento de matemáticas mas avanzado que el impartido en los cursos de bachillerato, y los que necesitan sólo de alementos matemáticos elementales, pero que requieren de mucha habilidad para encontrar la solución.

Este trabajo tiene como finalidad, el de presentar problemas de los dos tipos y principalmente, está dirigido a todos los estudiantes que pretenden participar en la olimpiada.

Estos 40 problemas no pretenden dar al lector una exposición ordenada ni por temas, ya que entre un problema y otro no hay relación. Son simplemente una colección que puede ayudar a prepararse para participar en las olimpiadas.

Hemos querido incluir todos los temas que se usan en las Olimpiadas Internacionales, pero por supuesto que nuestro gusto y capacidad personales han influido para que algunos temas queden más representados que otros.

Todos los problemas son originales. Todos ellos han sido inventados por mi o por el Profesor Alejandro Illanes Mejia quien dirigio este trabajo.

Algunos de estos problemas ya han sido usados en las

Olimpiadas Mexicanas de Matemáticas o en los examenes con los que se seleccionaron a los alumnos que representaron a México en las Olimpiadas Internacionales y ademas han aparecido en los folletos de preparación para las olimpiadas. Esto se debe a que el Profesor Illanes ha sido miembro del Comite Organizador de las Olimpiadas Mexicanas de Matemáticas y a propuesto estos problemas a dicho comite.

# PREGUNTAS

1) Supongamos que la última cifra del número 3n + 4m es 2, donde n y m son numeros enteros. Probar que entonces la última cifra de 8n + 4m es también 2.

2) Demostrar la siguiente desigualdad:

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \dots + \sqrt[n]{n} \leq n + \sqrt{2}(\sqrt{2} - n)$$

3) Sean p y q dos puntos en el interior de una circunferencia, construir un triángulo equilátero ΔABC, tal que p y q estén en AB y BC respectivamente y B esté en la circunferencia. Discutir para qué casos es posible la construcción.

4) Probar que si a es un entero entre 1 y 9, entonces

$$(a)^2 + (aa)^2 + (aaa)^2 + \dots + (\underbrace{aaa\cdots aaa}_{r\text{-voces}})^2 =$$

$$\frac{a^2}{9^2}\left[\frac{10^2}{99}(10^{2r}-1) - \frac{20}{9}(10^r - 1) + r\right]$$

donde aa no es producto, aa es el número a10 + a, aaa = a10$^2$ + a10 + a, etc.

14) Calcular la cantidad de numeros enteros mayores o iguales que cero y menores que 1 000 000 que tienen entre sus digitos al menos dos unos consecutivos.

15) Calcular la suma de todos los números que constan de 9 cifras, todas ellas diferentes entre si y diferentes de cero.

16) Demostrar que si X, Y, Z y W son números reales positivos y $X + Y = 1$, $Z + W = 1$, entonces

$X^3 + Y^3 + Z^3 + W^3 \geq 1/2$ y $X^3 + Y^3 + Z^3 + W^3 \geq XY + ZW$

17) Entre los números del 10 al 1000, encontrar cinco subconjuntos ajenos dos a dos $A_1, A_2, A_3, A_4$ y $A_5$ (es decir, 2 conjuntos entre $A_1$ y $A_5$, no tienen elementos en comun), tales que la suma de los elementos de $A_i$ es igual a la suma de los elementos de $A_j$ para toda i y toda j.

18) Considerar a todos los números formados por cuatro cifras diferentes tomadas en el conjunto {1,2,...,9}. Cuántos de ellos son divisibles por 9 ?

19) Cuantas soluciones en los enteros tiene el sistema

$$|X| + |Y| \leq 1000$$
$$|X| - |Y| \leq 0$$
$$3|X| - |Y| \geq 0$$

20) De un costal de sopa de números, se hace una numeración 0,1,2,3,4,...... Se sabe que se ocuparon 1 000 000 de unos. ¿Cuál fue el último número que se escribió?

21) Dado el triángulo $\Delta ABC$, sean I y H los puntos de intersección de las bisectrices y las medianas respectivamente. Demostrar que si un vértice y los puntos I y H estan alineados, entonces el triángulo $\Delta ABC$ es isósceles.

22) De cuántas formas se puede cubrir un tablero de ajedrez con cuatro rectángulos diferentes, entre si. Sin que importe el orden. Es decir, si los rectángulos $R_1$, $R_2$, $R_3$ y $R_4$ son diferentes y cubren al tablero, entonces el conjunto $\{R_1, R_2, R_3, R_4\}$ se cuenta sólo una vez, no importa que el tablero se pueda cubrir de diferentes formas por estos mismos rectángulos.

23) Consideremos un cuadrilátero convexo ABCD. Demostrar que la linea que une los puntos medios de las diagonales y las lineas que unen los puntos medios de los lados opuestos, se

5) Sean A, B y C los ángulos de un triángulo cualquiera, con a, b y c sus respectivos lados opuestos. Demostrar que

a) $\operatorname{sen}(A/2)\cos(A/2) + \operatorname{sen}(B/2)\cos(B/2) =$

$\cos(C/2)[\cos(A/2)\cos(B/2) + \operatorname{sen}(A/2)\operatorname{sen}(B/2)]$

b) $\cos A + \operatorname{sen} A \cot(C/2) = \cos B + \operatorname{sen} B \cot(C/2) =$

$$\frac{a+b}{c}$$

6) Sea f(x) un polinomio con coeficientes enteros

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

tal que su gráfica es simétrica con respecto al eje Y. Demostrar que si p/q es una raíz con p y q primos relativos, entonces $p^2 - q^2$ divide a $(f(1))^2$.

7) Sea un polígono regular de n lados de longitud a, con n par, y vértices $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$. Tracemos los segmentos $A_1A_3$, $A_3A_5$, $A_5A_7$, ..., $A_{n-1}A_1$ y también tracemos los segmentos $A_2A_4$, $A_4A_6$, $A_6A_8$, ..., $A_nA_2$. En el interior se forma otro polígono regular de n lados al que llamamos H. Demostrar que el área de H es $\left(\frac{\cos(\pi/n)}{\cos(2\pi/n)}\right)^2$ veces el área del polígono original.

8) Sea N en los naturales, demostrar que $N^M$ es igual al producto de los divisores positivos de N, donde M es la mitad del número de divisores de N.

9) Supongamos que un hexágono regular tiene como vértices $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Sea $B_1$ el punto medio de $A_1A_2$, $B_2$ el de $A_2A_3$, ..., $B_6$ el de $A_6A_1$. Tracemos los segmentos $A_1B_4$, $A_2B_5$, $A_3B_6$, $A_4B_1$, $A_5B_2$ y $A_6B_3$. Llamemos H al hexágono pequeño que se forma en el interior. Demostrar que el área de H es un treceavo del área del hexágono original.

10) Si en un triángulo rectángulo, sus lados a,b y c son números enteros, entonces el producto de sus lados $a \cdot b \cdot c$ es divisible por 30.

11) Sean $A_1, A_2, \ldots, A_6$ los vértices consecutivos de un hexágono H convexo. Supongamos que los lados opuestos de H son iguales y paralelos. Probar que el triángulo $\Delta A_2A_4A_6$ tiene la mitad de área de H.

12) Demostrar que entre los números de 1 al n, la cantidad de ternas que están en progresión geométrica con razón entera, es menor o igual que n.

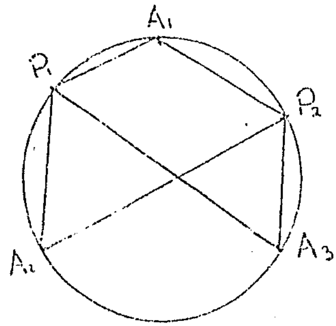
13) Demostrar que si $(n-1)^2 | (n^7 - 1)$ entonces $(n-1) | (n^7 + 6)$ y $(n-1) | (n^7 - 8)$.

Diga para qué valores enteros de n mayores de 2 se cumple.

intersectan en sus puntos medios.

24) Sea el triangulo $\Delta ABC$ no degenerado en donde la medida de sus lados son números enteros primos relativos dos a dos. Suponga que existe un numero entero m tal que el ángulo en B es m veces el ángulo en A. Probar que el triángulo $\Delta ABC$ es equilátero y de lado uno.

25) Sean $\Delta A_1A_2A_3$ un triángulo equilátero y $\mathscr{C}$ su circulo circuncrito. Dados dos puntos $A_i$ y $A_j$ éstos dividen al círculo $\mathscr{C}$ en dos arcos. Denotemos por $A_iA_j$ al arco más pequeño. Sean $P_1$ y $P_2$ puntos cualesquiera de los arcos $A_1A_2$ y $A_1A_3$ respectivamente. Demostrar que la diferencia del perimetro de los cuadriláteros $A_1P_2A_2P_1$ y $P_1A_1P_2A_3$ es igual a $|P_1A_1 - P_2A_1|$.




26) Sea $F:\{1,2,3,\ldots,10^6-1\} \longrightarrow \{0,1,2,\ldots,10^6-1\}$ una función tal que para todo n, $F(n + F(n)) = 0$ y (la suma de las cifras de n) + (la suma de las cifras de $F(n)$) = $9(F(F(\text{número de las cifras de } n)))$. Encontrar $F(1987)$.

27) Sea $P(X)$ un polinomio de coeficientes racionales, tal que $P(m)$ es un entero para cualquier entero $m$.

Demostrar que existe un entero $q$ tal que para todo entero $s$ $P(qs)$ siempre deja el mismo resto, al dividirlo por $q$.

28) Sea $P(X)$ un polinomio de coeficientes enteros. Sea $m$ un entero fijo, y $r \geq 2$ un entero. Demostrar que si existen enteros $n_1, n_2, \ldots, n_{2r}$ diferentes entre sí tales que $P(n_i) = m$ para toda $i$, entonces $P(s)$ no puede ser igual a $(m \pm 1)$, $(m \pm 2)$, ... , $(m \pm r)$ para ningún entero $s$.

29) Demostrar que la diferencia de los números

$$\underbrace{111\cdots\cdots1}_{2r-cifras} - \underbrace{222\cdots\cdots2}_{r-cifras}$$

donde $r$ es un entero, es un cuadrado perfecto.

30) Sea $\Delta ABC$ un triángulo acutangulo. Para cada punto $P$ dentro o el la orilla de $\Delta ABC$, tracemos las perpendiculares $X_P$, $Y_P$ y $Z_P$ a los lados $BC$, $AC$ y $AB$ respectivamente. En que punto $P$ la suma $X_P + Y_P + Z_P$ alcanza su máximo.

31) Demostrar que no existe un número de 1989 cifras que la suma de sus cifras sea igual al producto de ellas y

que al menos tres de sus cifras sean cinco.

32) Considere un cuadrado ABCD, sea O un punto cualquiera en su interior. Supongamos que las distancias de O a los vértices son: OA = a, OB = b, OC = c y OD = d.

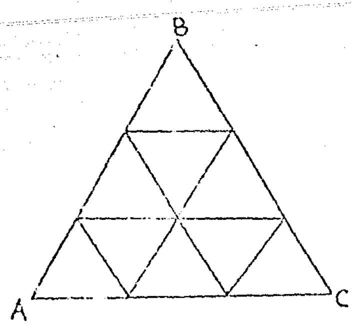
Demostrar que el área del cuadrado ABCD se puede expresar solo en términos de a, b, c y d.

33) Sea ΔABC un triángulo cualquiera. Probar que no existe un punto P en el interior del triángulo ΔABC tal que todas las rectas que pasan por P dividen al triángulo en dos figuras con la misma área.

34) Para cada $i = 1,2,3,\ldots,32$, definimos $A_i$ igual al producto de los múltiplos positivos de $i$, menores o iguales que mil. ¿Cuál es el máximo común divisor de $A_1$, $A_2$, $A_3,\ldots,A_{32}$?.

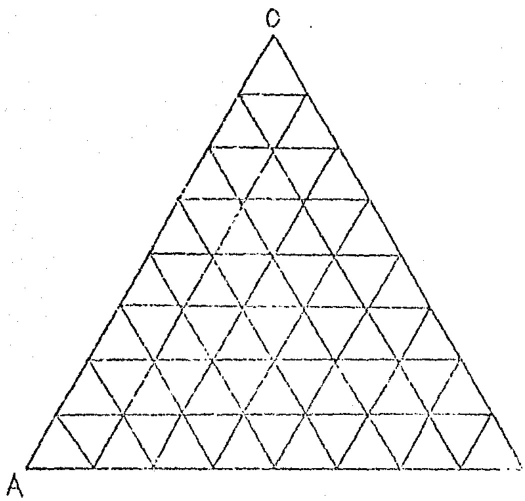
35) De los numeros enteros entre 1 y 1989, encuentre una progresión aritmética, con 50 términos de los cuales 13 sean producto de cuatro primos diferentes.

36) En la siguiente figura:




¿Cuántos caminos hay de A a B pasando por C? (Un camino no puede pasar más de una vez por un mismo punto).

37) En la siguiente figura:




¿Cuántos caminos hay para ir del punto O al punto A?. Un camino puede seguir una dirección lateral, pero no puede pasar más de una vez por un mismo punto, ni subir.

38) Sean P y Q dos puntos fijos en un plano. Cuál es el lugar geométrico de los puntos A tales que existen otros dos puntos B y C con las propiedades de que el triángulo $\Delta ABC$ es equilátero, el punto P está en el segmento AB y el punto Q está en el segmento BC?.

39) Dado n, un número entero mayor o igual que cero, definimos P(n) igual al producto de las cifras de n (cuando n es de una sola cifra P(n) es igual a n).

a) Probar que si n es un número del conjunto {0,1,2,..., 100 000 000}, entonces P(P(P(P(P(n))))) es un número de una cifra.

b) Para qué número $i$ del conjunto {0,1,...,9} existen mas n's en {0,1,2,...,100 000 000} tales que P(P(P(P(P(n))))) = $i$ ?.

c) Contestar lo mismo que en b) pero diciendo menos n's en lugar de más n's.

40) Encontrar el menor número entero m, con la característica de que al pasar sus dos últimas cifras al principio y multiplicarlo por diez, obtenemos 2m.

# SUGERENCIAS

1) Pruebe que si $3n + 4m \equiv 2 \mod(10)$, entonces $3n$ debe ser un número par y esto implica que $n$ también lo es.

2) Desarrollando el binomio $(1 + \sqrt{2/n})^n$ se obtiene que $(1 + \sqrt{2/n})^n > n$, por tanto $(1 + \sqrt{2/n}) > \sqrt[n]{n}$.

Demuestre que $2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$, es igual a $\dfrac{2}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}$, y como $\sqrt{n} > \sqrt{n-1}$ entonces

$$\frac{2}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} > \frac{2}{2(\sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

3) Construya triángulos equiláteros tales que pq, sea un lado de los triángulos, y analice los círculos circunscritos y su intersección con la circunferencia dada.

4) De la suma $(a)^2 + (aa)^2 + (aaa)^2 + \ldots + (\underbrace{aaa\cdots aaa}_{r\text{-veces}})^2$ factorizar $a^2$, obteniendo así:

$$a^2 + a^2\cdot(11)^2 + a^2\cdot(111)^2 + \ldots + a^2\cdot(111\cdots111)^2$$

y descomponga los segundos factores de esta forma:

$(11\cdots11)^2 = (1 + 10 + 100 + \ldots + 100\cdots00)^2$.

5)

a) De $A + B + C = \pi$, se tiene que

$$\cos(C/2) = \mathrm{sen}(A/2 + B/2)$$

y posteriormente sustituya en

$$\cos(C/2)\left(\cos(A/2)\cos(B/2) + \mathrm{sen}(A/2)\mathrm{sen}(B/2)\right)$$

b) Considerando la ley de los senos tenemos que

$$\frac{\mathrm{sen}\ A + \mathrm{sen}\ B}{\mathrm{sen}\ C} = \frac{a + b}{c}.$$

desarrollando $\dfrac{\mathrm{sen}\ A + \mathrm{sen}\ B}{\mathrm{sen}\ C}$ obtenemos:

$$\frac{\mathrm{sen}\ A + \mathrm{sen}\ B}{\mathrm{sen}\ C} = \frac{\mathrm{sen}(A/2 + A/2) + \mathrm{sen}(B/2 + B/2)}{\mathrm{sen}(C/2 + C/2)}$$

6) Sea $m$ un entero cualquiera. Desarrolle $f(x)$ en términos de las potencias de $(x - m)$ y evaluar $x = p/q$, para obtener que $(p - mq) \mid a_0 q^n$.

7) Cada ángulo interior del polígono original vale $\frac{\pi(n-2)}{n}$, la recta $A_1A_{n-1}$ se intersecta con $A_nA_2$ en un punto que llamamos $B_1$. Calcule la longitud de $A_nB_1$ y considere que es la misma que $P_1A_1$. Use la longitud de $A_nA_2$ para calcular $A_nP_1$.

8) Pruebe que los divisores de $N$ en el intervalo $(\sqrt{N}, N]$ son todos los números de la forma $\frac{N}{d}$ donde $d$ es un divisor de $N$ en el intervalo $[1, \sqrt{N})$.

9) El apotema del hexágono H es la proyección del centro O sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo $\Delta A_1B_1B_4$.

10) Para ver que uno de los tres números es múltiplo de 5, analice los posibles valores para $a^2$, $b^2$ y $a^2 + b^2$ módulo 5.

12) Las ternas que tienen razón p sólo pueden ser:

$$1, p \text{ y } p^2;\ 2, 2p \text{ y } 2p^2;\ \ldots\ ; m, mp \text{ y } mp^2$$

donde m es el entero mas grande que menor o igual que $n/p^2$. Por tanto tenemos a lo mas $n/p^2$ ternas cuya razón es p.

13) Considerar que $n^7 = ((n - 1) + 1)^7$, y desarrollar el binomio $((n - 1) + 1)^7$.

14) Calcule, los números de a lo más 6 cifras que no tienen dos unos seguidos

16) Desarrolle $(X + Y)^3 = 1$ y $(Z + W)^3 = 1$ y factorizar XY y ZW respectivamente

17) Tómense diez números consecutivos n, n+1, n+2,...,n+9, nótese que $n + (n+9) = (n+1) + (n+8) = (n+2) + (n+7) = (n+3) + (n+6) = (n+4) + (n+5)$.

18) Use el hecho de que un número es divisible por nueve si y sólo si la suma de sus cifras es divisible por nueve.

19) Calcule las soluciones que hay para los sistemas:

$$\begin{array}{lcl} Y \le 3X & \qquad & Y \le X \\ Y \le 1000 - X & & Y \le 1000 - X \\ \text{con } X \text{ y } Y \ge 0 & & \text{con } X \text{ y } Y \ge 0 \end{array}$$

20) Cuente cuantos unos se necesitan cuando se hacen las siguientes numeraciones:

a) 0,1,2,...,9

b) 0,1,2,...,99

c) 0,1,2,...,999, etc.

Nótese que para hacer cualquiera de esas numeraciones se ocupa la misma cantidad de unos que de dos, tres, cuatro, etc.

21) Suponga que el vértice alineado con I y H es B, P es el punto medio de AC, y use la ley de los senos para los triángulos $\Delta ABP$ y $\Delta BPC$.

22) Cuente las formas en que se puede cubrir el tablero usando sólo un rectángulo de altura 8, usando sólo dos y sin usar rectángulos de altura 8.

23) Busque triángulos semejantes que están en proporcion 2 a 1

24) Sean a, b y c los lados del triángulo $\Delta ABC$. Analice los casos cuando $m = 2$, $m = 3$, $m = 4$, etc. y en cada uno se obtiene una la relación del tipo: $aw = b^{s}(b^2 - a^2)^{\ell}$, donde $w$, $\ell$ y $s$ son enteros, $\ell \geq 1$, $s \geq 0$, $w \geq 1$.

25) Supongase que $P_1$ esta en el arco $A_1A_2$, denotemos por $n_1 = P_1A_1$, $n_2 = P_1A_2$ y $n_3 = P_1A_3$. Demuestre que $n_3 = n_1 + n_2$.

26) Pruebe los siguientes hechos:

a) $r \leq F(F(r))$ para toda $r \in \{1,2,\ldots,8\}$

b) si $F(n) = 0$ y $n$ tiene $r$ cifras entonces $r = F(F(r))$

c) Si $F(n) = 0$, entonces $n$ es de la forma $n = \underbrace{99\cdots\cdots99}_{r\text{-cifras}}$

d) Calcular $F(1)$, $F(2)$, ..., $F(9)$

27) Tóme un entero q que no divida al producto de los denominadores de los coeficientes.

28) Considere que $P(x) - m$ tiene como raices a $n_1, n_2, \ldots, n_{2r}$

y busque los valores mínimos de los factores $(x - ni)$ para $i = 1,2,\dots,2r$

29) Nóte que

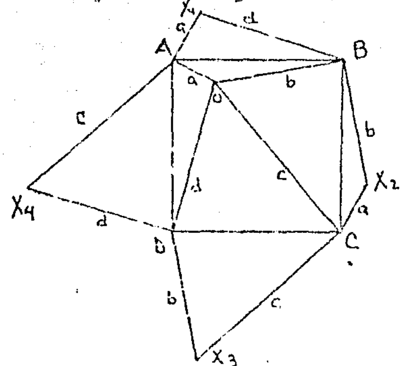
$$\underbrace{111\cdots1}_{2r\text{-cifras}} - \underbrace{222\cdots2}_{r\text{-cifras}} = \underbrace{111\cdots1}_{r\text{-cifras}}\underbrace{00\cdots000}_{r\text{-cifras}} - \underbrace{111\cdots1}_{r\text{-cifras}}$$

30) Exprese el área del triángulo ΔABC como la suma de las áreas de los triángulos ΔBPC, ΔCPA, ΔAPB. Compare altura del triángulo ΔABC con la suma de las 3 alturas de los triángulos ΔBOC, ΔCOA, ΔAOB.

31) Calcule cuales son el valor maximo y el valor minimo que puede tener la suma de las cifras.

32) Realice las siguientes construcciones auxiliares:

Tome el triángulo ΔAOD y construímos uno igual sobre el lado AB del cuadrado (fig. 1), de tal forma que el lado AD del triángulo ΔAOD coincida con AB, obteniendo asi el triángulo $\Delta ABX_1$, donde el ángulo $X_1AB$ es igual al ángulo OAD. De igual forma construya un triángulo igual al triángulo ΔABO sobre BC, obteniendo el triángulo $\Delta BCX_2$ donde el ángulo $X_2BC$ el igual al ángulo OBA, otro igual al triángulo ΔBCO sobre DC obteniendo el triángulo $\Delta DCX_3$, con el ángulo OCB igual al ángulo $X_3CD$ y finalmente uno igual al triángulo $\Delta DCO$ sobre AD obteniendo el triángulo $\Delta DAX_4$, donde el ángulo ODC es igual al ángulo $X_4DA$.




33) Suponga que de existir un punto P con las propiedades mencionadas, P tiene que ser el centroide (punto de intersección de las medianas). Finalmente tome una linea paralela a uno de los lados y pruebe que el centroide no tiene la propiedad requerida.

34) Nótese que:

$A_2 = (2\cdot1)\cdot(2\cdot2)\cdot(2\cdot3)\cdots\cdots(2\cdot500) = 2^{500}\cdot(500!)$

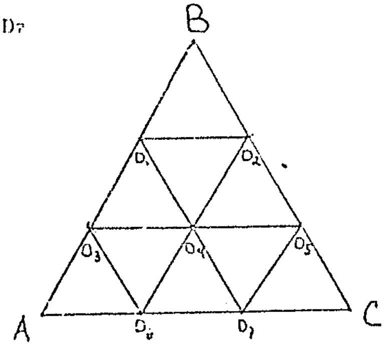
$A_3 = (3\cdot1)\cdot(3\cdot2)\cdot(3\cdot3)\cdots\cdots(3\cdot333) = 3^{333}\cdot(333!)$, etc.

35) Constrúya una d apropiada para que la progresión $2\cdot3\cdot5\cdot7$, $2\cdot3\cdot5\cdot7 + d$, $2\cdot3\cdot5\cdot7 + 2d$, ... ,$2\cdot3\cdot5\cdot7 + 49d$ sea útil.

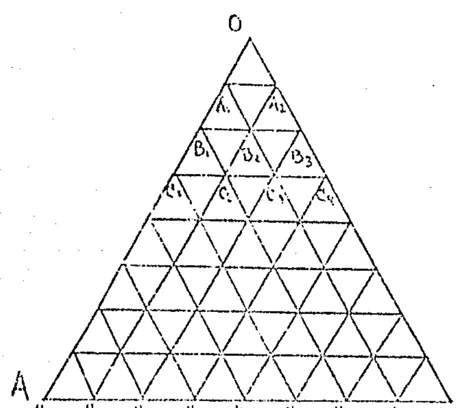
36) Sean $D_1$, $D_2$, ... , $D_7$ los puntos de intersección que se

muestran en la figura.

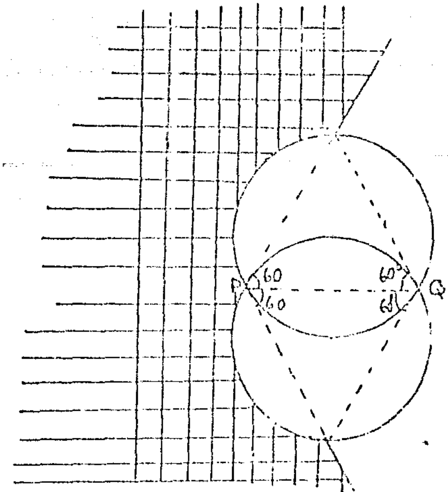
Nóte que para llegar a C no se debe pasar por $D_2$ y $D_5$ ya que el camino de C a B pasaría por un punto por el que ya se paso antes. Entonces se tiene que llegar a C por $D_7$. Por tanto primero hay que contar los caminos que hay de A a $d_7$ en triángulo $\Delta AD_1D_7$




37) Pruebe que el número de caminos que empiezan en O y acaban en $A_1$ o en $A_2$ es igual a $2\cdot 2$, usando esto, muestre que el número de caminos que empiezan en O y acaban en alguno de los $B_i$'s es igual a $3\cdot 2\cdot 2^2$. (ver figura)




38) Pruebe que el lugar geométrico que se pide es la región sombreada en la siguiente figura:




39) Pruebe que $F(n) \leq 72$ para toda $n$ en $\{0,1,2,\ldots,10^8\}$. Prubar que 1 viene de menos n's y 0 viene de mas n's. para el cero basta contar cuantos números en $\{0,1,2,\ldots,10^8\}$ tienen al menos un cero.

40) Los números que cumplen con las características indicadas deben tener al número 0 o 5 en su última cifra.

Si la última cifra es el 0, suponga después que la penúltima cifra es el 1, entonces la antepenúltima cifra tiene que ser el 2.

# RESPUESTAS

1) Ya que el número $3n + 4m$ tiene como última cifra al 2, entonces

$$3n + 4m \equiv 2 \pmod{10} \text{ ——————— } (1)$$

Esto implica que $3n + 4m$ es un número par, ya que $4m$ lo es entonces $3n$ tiene que ser par también. Por tanto $n$ es múltiplo de 2, entonces

$$5n \equiv 0 \pmod{10} \text{ ——————— } (2)$$

Sumando (1) y (2) obtenemos:

$5n + 3n + 4m \equiv 2 \pmod{10}$, de aquí que $8n + 4m \equiv 2 \pmod{10}$

Por tanto, 2 es la última cifra de $8n + 4m$.

2) Por el desarrollo del binomio $(1 + \sqrt{2/n})^n$ obtenemos:

$(1 + \sqrt{2/n})^n = 1 + n\sqrt{2/n} + (n(n-1)/2)(2/n) + \dots$

$\dots + (\sqrt{2/n})^n > 1 + (n(n-1)/2)(2/n) = n$

entonces $(1 + \sqrt{2/n})^n > n$

esto implica que $1 + \sqrt{2/n} > \sqrt[n]{n}$

Por tanto para los números $1,2,3,\dots,n$ tenemos lo siguiente

$1 < 1 + \sqrt{2}$, $\sqrt{2} < 1 + \sqrt{2/2}$, $\sqrt[3]{3} < 1 + \sqrt{2/3}$, ...,

$\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{2/n}$

Sumando:

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n} < n + \sqrt{2}\,( 1 + 1/\sqrt{2} +$$

$$+ 1/\sqrt{3} + \ldots + 1/\sqrt{n}\,) \text{ ——————————— } (*)$$

Nótese que $2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\,)$ es igual a:

$$\frac{2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\,)(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\,)}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\,)} = \frac{2}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\,)}$$

como $\sqrt{n-1} < \sqrt{n}$

tenemos $\dfrac{2}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\,)} > \dfrac{2}{2\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

entonces $1/\sqrt{n} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$

Por tanto para los números $1,2,3,\ldots,n$ tenemos lo siguiente

$1 < 2$, $1/\sqrt{2} < 2\sqrt{2} - 2$, $1/\sqrt{3} < 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$,

$1/\sqrt{4} < 2\sqrt{4} - 2\sqrt{3}$, $\ldots$, $1/\sqrt{n} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$

Sumando obtenemos:

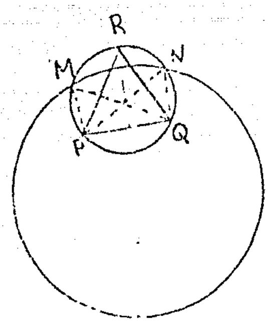
$$1 + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + \ldots + 1/\sqrt{n} < 2\sqrt{n}$$

(*) implica entonces que:

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n} < n + \sqrt{2}\,(2\sqrt{n}\,)$$

3) Construyamos puntos R y R' tales que $\Delta PQR$ y $\Delta PQR'$ sean equiláteros y $R \neq R'$.

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ los círculos circunscritos a los triángulos $\Delta PQR$ y $\Delta PQR'$ respectivamente. Si $\mathcal{C}$ o $\mathcal{C}'$ intersectan a la circunferencia inicial en uno o dos puntos, el problema tendrá solución. Analicemos tres casos




a) Si $\mathcal{E}$ corta a la circunferencia en dos puntos M y N, entonces los ángulos PMQ y PNQ son de $60^\circ$. Prolongando con igual longitud los lados MP y MQ construimos el triángulo equilátero. De igual forma se obtiene el otro triángulo usando los lados NP y NQ.

b) Si $\mathcal{E}$ corta en un punto a la circunferencia inicial, la diferencia es que sólo obtenemos un triángulo.

c) Si $\mathcal{E}$ no corta a la circunferencia inicial, entonces con cualquier punto S externo a $\mathcal{E}$ que este sobre la circunferencia inicial, obtenemos el ángulo PSQ que es menor de $60^\circ$. Por tanto no podemos contruir un triángulo con las caractaeristicas indicadas.

Con $\mathcal{E}'$ se hace un análisis semejante

4) La suma

$$(a)^2 + (aa)^2 + (aaa)^2 + \dots + (\underbrace{aaa\cdots\cdots aaa}_{r\text{-veces}})^2$$

es igual a

$$a^2 + a^2\cdot(11)^2 + a^2\cdot(111)^2 + \dots + a^2\cdot(111\cdots\cdots 111)^2$$

factorizando $a^2$ y desarrollando los segundos factores

$a^2[1+(1+10)^2+(1+10+100)^2 + \ldots + (1+10+100+\ldots+100\ldots00)^2]$

calculando las sumas de las potencias de 10

$$a^2 \left[1 + \left(\frac{10^2 - 1}{10-1}\right)^2 + \left(\frac{10^3 - 1}{10-1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{10^r - 1}{10-1}\right)^2 \right]$$

factorizando $1/(10 - 1)^2$, desarrollando los numeradores y agrupando

$$\frac{a^2}{(10-1)^2}\left[10^2[1+10^2+(10^2)^2+\ldots+(10^2)^{r-1}]-20[1+10+10^2+\ldots+10^{r-1}]+r\right]$$

sumando las potencias de $10^2$ y 10:

$$\frac{a^2}{(10-1)^2}\left[10^2\left(\frac{10^{2r} - 1}{10^2 - 1}\right) - 20\left(\frac{10^r - 1}{10 - 1}\right) + r\right]$$

simplificando obtenemos finalmente la suma:

$$\frac{a^2}{9^2} \left[ \frac{10^2}{99} ( 10^{2r} - 1 ) - \frac{20}{9} ( 10^r - 1 ) + r \right]$$

5)

a) Como $A + B = \pi - C$, entonces:

$\cos(C/2) \left(\cos(A/2)\cos(B/2) + \operatorname{sen}(A/2)\operatorname{sen}(B/2) \right) =$

$\operatorname{sen}(A/2 + B/2) \left(\cos(A/2)\cos(B/2) + \operatorname{sen}(A/2)\operatorname{sen}(B/2)\right)$,

desarrollando $\operatorname{sen}(A/2 + B/2)$ y multiplicando obtenemos

$\operatorname{sen}(A/2)\operatorname{sen}(B/2) \left(\cos(A/2)\operatorname{sen}(B/2) + \operatorname{sen}(A/2)\cos(B/2)\right) +$

$\cos(A/2)\cos(B/2) \left(\cos(A/2)\operatorname{sen}(B/2) + \operatorname{sen}(A/2)\cos(B/2)\right)$,

multiplicando y factorizando tenemos

$\left(\operatorname{sen}(A/2)\cos(A/2)\right)\operatorname{sen}^2(B/2) +$

$\left(\operatorname{sen}(A/2)\cos(A/2)\right)\cos^2(B/2) +$

$\left(\operatorname{sen}(B/2)\cos(B/2)\right)\operatorname{sen}^2(A/2) +$

$\left(\operatorname{sen}(B/2)\cos(B/2)\right)\cos^2(A/2)$,

factorizando $\left(\operatorname{sen}(A/2)\cos(A/2)\right)$ y $\left(\operatorname{sen}(B/2)\cos(B/2)\right)$

$\left(\operatorname{sen}(A/2)\cos(A/2)\right) \left(\operatorname{sen}^2(B/2)+\cos^2(B/2)\right) +$

$\left(\mathrm{sen}(B/2)\cos(B/2)\right)\left(\mathrm{sen}^2(A/2)+\cos^2(A/2)\right)$.

Como $\mathrm{sen}^2(A/2)+\cos^2(A/2) = 1$, lo anterior es igual a:

$\mathrm{sen}(A/2)\cos(A/2) + \mathrm{sen}(B/2)\cos(B/2)$.

b) Por la ley de los senos tenemos

$$\frac{\mathrm{sen}\ A + \mathrm{sen}\ B}{\mathrm{sen}\ C} = \frac{a + b}{c}$$

Desarrollando

$$\frac{\mathrm{sen}\ A + \mathrm{sen}\ B}{\mathrm{sen}\ C} = \frac{\mathrm{sen}(A/2 + A/2) + \mathrm{sen}(B/2 + B/2)}{\mathrm{sen}(C/2 + C/2)} =$$

$$\frac{\mathrm{sen}(A/2)\cos(A/2) + \mathrm{sen}(B/2)\cos(B/2)}{\mathrm{sen}(c/2)\cos(c/2)} \text{ ——— } (1)$$

del problema a) tenemos que

$\mathrm{sen}(A/2)\cos(A/2) + \mathrm{sen}(B/2)\cos(B/2) =$

$\mathrm{sen}(A/2 + B/2)[\cos(A/2)\cos(B/2) + \mathrm{sen}(A/2)\mathrm{sen}(B/2)] =$

$\cos(C/2)[\cos(A/2)\cos(B/2) + \mathrm{sen}(A/2)\mathrm{sen}(B/2)$

sustituyendo en (1)

$$\frac{\mathrm{sen}\ A + \mathrm{sen}\ B}{\mathrm{sen}\ C} = \frac{\cos(A/2)\cos(B/2) + \mathrm{sen}(A/2)\mathrm{sen}(B/2)}{\mathrm{sen}(C/2)} =$$

$$\frac{\cos(A/2 - B/2)}{\mathrm{sen}(C/2)}.$$

De la igualdad $\cos(A/2 - B/2) = \cos(A - (A+B)/2)$ —— (2)

tenemos que: $\dfrac{\cos(A/2 - B/2)}{\mathrm{sen}(C/2)} =$

$$= \frac{\cos(A)\cos((A+B)/2) + \mathrm{sen}(A)\mathrm{sen}((A+B)/2)}{\mathrm{sen}(C/2)}.$$

Se sabe que $\cos((A+B)/2) = \cos((\pi-c)/2) = \mathrm{sen}(C/2)$
$\mathrm{sen}((A+B)/2) = \mathrm{sen}((\pi-c)/2) = \cos(C/2)$

Por tanto $\dfrac{\cos(A/2 - B/2)}{\mathrm{sen}(C/2)} =$

$$\frac{\cos(A)\mathrm{sen}(C/2) + \mathrm{sen}(A)\cos(C/2)}{\mathrm{sen}(C/2)} =$$

$\cos A + (\mathrm{sen}\ A)(\cot C/2)$.

Esto prueba que $\dfrac{a + b}{c} = \cos A + (\mathrm{sen}\ A)(\cot C/2)$

para obtener la otra igualdad, de (2) se tiene que:

$\cos(A/2-B/2) = \cos((A+B)/2-B)$, y haciendo un análisis semejante obtenemos:

$$\frac{\cos(A/2 - B/2)}{\operatorname{sen}(C/2)} = \cos B + (\operatorname{sen} B)(\cot C/2).$$

6) Sea m un entero cualquiera. Considerando el polinomio f(x) desarrollado en términos de las potencias de (x−m) tenemos:

$$f(x) = a_n(x-m)^n + a_{n-1}(x-m)^{n-1} + \dots + a_1(x-m) + a_0$$

sustituyendo $x = \frac{p}{q}$ obtenemos:

$$a_n\left(\frac{p}{q} - m\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q} - m\right)^{n-1} + \dots + a_1\left(\frac{p}{q} - m\right) + a_0 = 0$$

simplificando:

$$a_n(p-mq)^n + a_{n-1}q(p-mq)^{n-1} + \dots + a_1q^{n-1}(p-mq) + q^n a_0 = 0$$

factorizando (p−mq):

$$(p-mq)\left( a_n(p-mq)^{n-1} + a_{n-1}q(p-mq)^{n-2} + \dots + a_1q^{n-1} \right) +$$
$$+ a_0q^n = 0$$

Por tanto (p−mq) divide a $a_0q^n$ y $\frac{a_0q^n}{(p-mq)}$ es un entero.

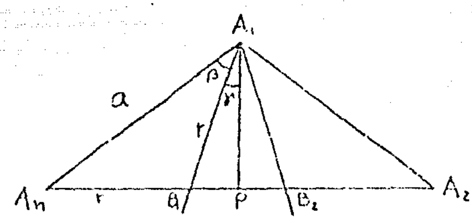
Como p y q son primos relativos, se sigue que p−mq y $q^n$ son también primos relativos. Lo anterior implica que $f(m) = a_0$ es divisible por (p−mq).

Si m = 1 entonces p−q divide a f(1), de igual forma si m = −1, tenemos que p + q divide a f(−1).

Por tanto (p + q)(p − q) divide a f(1)f(−1), pero considerando la simétria de f(x), $f(1)f(-1) = (f(1))^2$, y esto implica que $(p^2 - q^2)$ divide a $(f(1))^2$.

7) Llamemos $B_1$ a la intersección de $A_1A_{n-1}$ y análogamente

obtenemos $B_2$, denotemos a $P$ como el punto medio $A_nA_2$.




El ángulo $A_nA_1A_2$ denotado por $\alpha$ vale $\pi(n-2)/n$, entonces del triángulo $\Delta A_nA_1B_1$ tenemos que el ángulo $A_nB_1A_1$ vale también $\alpha$. Por tanto el ángulo $A_nA_1B_1$ denotado por $\beta$ vale $\beta = 1/2(\pi-\pi(n-2)/n) = \pi/n$, el angulo $B_1A_1P$ denotado por $\gamma$ vale $\gamma = 1/2(\alpha - 2\beta) = 1/2(\pi(n-2)/n - 2\pi/n) = \pi/2n(n-4)$.

Por la ley de los senos en el triángulo $\Delta B_1A_1P$, el segmento $B_1A_1$ denotado por $r$ vale:

$$r = \frac{B_1P}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{B_1P}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}(n-4)\right)} \text{ entonces } B_1B_2 =$$

$$= 2r\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}(n-4)\right) \text{ ——————— } (1)$$

Como los triángulos $\Delta A_1A_2A_n$ y $\Delta B_1A_1A_n$ son semejantes entonces $\frac{r}{a} = \frac{a}{A_nA_2}$, despejando r:

$$r = \frac{a^2}{A_nA_2} \text{ ———— } (2)$$

Calculando $A_nA_2$ por la ley de los senos en el triángulo $\Delta A_nA_1P$:

$$a = \frac{A_nP}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}(n-2)\right)}, \text{ entonces } A_nA_2 = 2a\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}(n-2)\right) \text{ ——— } (3)$$

Sustituyendo (3) en (2):

$$r = \frac{a^2}{2a\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}(n-2)\right)}$$

. Y sustituyendo r en (1):

$$B_1B_2 = \frac{a\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}(n-4)\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}(n-2)\right)}$$

Como la proporción entre las áreas es $a^2/(B_1B_2)^2 = k^2$ entonces

$$a^2 \text{ entre } \frac{a^2 sen^2\left(\frac{\pi}{2n}(n-4)\right)}{sen^2\left(\frac{\pi}{2n}(n-2)\right)} = \frac{sen^2\left(\frac{\pi}{2n}(n-2)\right)}{sen^2\left(\frac{\pi}{2n}(n-4)\right)} = \frac{sen^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)}{sen^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{n}\right)}$$

desarrollando $sen^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)$ y $sen^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2r}{r}\right)$

obtenemos finalmente que la proporción de las áreas es

$$\left(\frac{\cos(\pi/n)}{\cos(2\pi/n)}\right)^2$$

8) Supongamos primero que N no es un cuadrado perfecto. Sean $d_1, d_2, \ldots, d_r$ los divisores de N en el intervalo $(1, \sqrt{N})$, tenemos que $1 \leq d_i < \sqrt{N}$ para $i = 1,2,3,\ldots,r$. Como $d_i < \sqrt{N}$, entonces $\sqrt{N}\, d_i < N$. por tanto $\sqrt{N} < \frac{N}{d_i}$, y como $\frac{N}{d_i} \leq N$, entonces $\frac{N}{d_i}$ esta en el intervalo $(\sqrt{N}, N]$. Además observemos que $\frac{N}{d_i}$ es divisor de N también.

De esta manera, a cada $d_i$ le estamos asociando un divisor $\frac{N}{d_i}$ que cumple las desigualdades $\sqrt{N} < \frac{N}{d_i} \leq N$. Observemos que si $d_i \neq d_j$, entonces $\frac{N}{d_i} \neq \frac{N}{d_j}$, y que si d es un divisor de N con $\sqrt{N} < d \leq N$, entonces d tiene que ser de la forma $d = \frac{N}{d_i}$ pues $1 \leq \frac{N}{d} < \sqrt{N}$. Esto prueba que los divisores positivos de N son los números:

$$d_1, d_2, \ldots, d_r, \frac{N}{d_1}, \ldots, \frac{N}{d_r}$$

ademas $r = M/2$ y el producto de ellos es $N^r = N^{M/2}$.

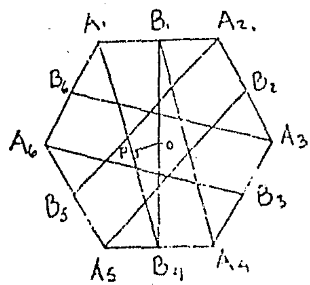
Ahora supongamos que $\sqrt{N}$ es un entero. Razonando como antes, tenemos que los divisores de N son:

$$d_1, d_2, \ldots, d_r, \sqrt{N}, \frac{N}{d_1}, \ldots, \frac{N}{d_r}$$

donde $d_1, \ldots, d_r$ son los divisores de N en el intervalo

[1,$\sqrt{N}$ ). De modo que $M = 2r + 1$ y el producto de los divisores de N da $N^{r}\sqrt{N} = N^{(2r+1)/2}$ $N^{M/2}$.

9) El área de un hexágono regular es (perímetro)(apotema)/2, en un hexágono regular de lado b obtenemos que su área es




$$(6b)\circ(b\sqrt{3}/2)/2 = 2\sqrt{3}(b\sqrt{3}/2)^2 = 2\sqrt{3}(\text{apotema})^2$$

Supongamos que $a = A_1A_2$ si O es el centro del hexágono original, denotemos por P la proyección de O sobre $A_1B_4$.

De la semejanza de los triángulos $\Delta A_1B_1B_4$ y $\Delta OPB_4$ tenemos que $\frac{OP}{A_1B_1} = \frac{OB_4}{A_1B_4}$, como $A_1B_1 = a/2$ y $B_1B_4 = a\sqrt{3}$ entonces $A_1B_4 = a\sqrt{13}/2$, obteniendo que $\frac{OP}{a/2} = \frac{a\sqrt{3}/2}{a\sqrt{13}/2}$.

entonces $OP = \frac{a\sqrt{3}/2}{\sqrt{13}}$ es el apotema del hexágono H.

Por tanto la proporción de las áreas es:

$$\frac{2\sqrt{3}\ (\text{apotema del hexágono original})^2}{2\sqrt{3}\ (\text{apotema de H})^2} = \frac{(a\sqrt{3}/2)^2}{\left(\frac{a\sqrt{3}/2}{\sqrt{13}}\right)^2} = 13$$

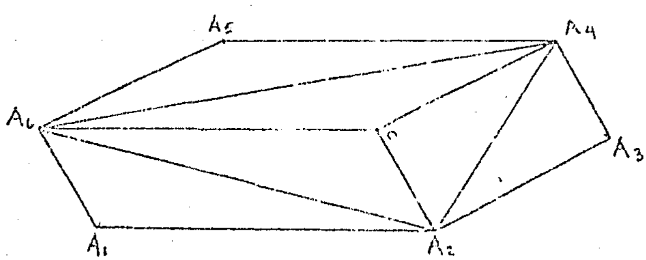
10) Por el teorema de Pitágoras se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$. Un entero cualquiera $x$ debe cumplir que $x \equiv 0 \pmod 3$, $x \equiv 1 \pmod 3$ o $x \equiv 2 \pmod 3$. De manera que $x^2 \equiv 0 \pmod 3$ o $x^2 \equiv 1 \pmod 3$. Si a y b no son múltiplos de tres entonces $a^2, b^2 \equiv 1 \pmod 3$. A sí que $c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod 3$. Este absurdo prueba que a o b es múltiplo de 3.

Nótese que un entero cualquiera $x$ debe cumplir $x^2 \equiv 0 \pmod 5$ o $x^2 \equiv 1 \pmod 5$ o $x^2 \equiv 4 \pmod 5$. Si a y b no son múltiplos de 5, entonces $c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2, 3$ o $0 \pmod 5$. De manera que $c^2 \equiv 0 \pmod 5$ por tanto 5 divide a c.

Ahora supongamos que a y b no son pares, entonces $a^2$ y $b^2$ son impares y su suma, que es igual a $c^2$, tiene que ser par. De aquí que c es par.

Como en los lados a, b y c hay múltiplos de 2, 3 y 5 entonces el producto $a \cdot b \cdot c$ es divisible por 30.

11) Tracemos el segmento $A_2O$ paralelo y con la misma longitud que $A_1A_6$ y $A_3A_4$, entonces $OA_6$ es de igual longitud y paralelo a $A_1A_2$, por tanto obtenemos el paralelogramo $A_1A_2OA_6$ donde $A_2A_6$ es una de sus diagonales,



esto implica que el área del triángulo $\Delta A_1A_2A_6$ es igual a la del triángulo $\Delta OA_6A_2$, similarmente el área del triángulo $\Delta A_3A_2A_4$ es igual a la del triángulo $\Delta OA_4A_2$, y el área del triángulo $\Delta A_5A_6A_4$ es igual a la del triángulo $\Delta OA_4A_6$.

Por lo anterior el área del hexágono $A_1, A_2, \ldots, A_6$ es:

$2\cdot\left[(\text{área } \Delta OA_6A_2) + (\text{área } \Delta OA_2A_4) + (\text{área } \Delta OA_4A_6)\right] =$

$2\cdot(\text{área } \Delta A_2A_4A_6)$

entonces. Area del Hexágono = 2·(Area del triángulo).

12) Una progresión geométrica con tres términos es una terna de la forma $m$, $pm$ y $p^2m$, donde $p$ se llama razón de la progresión y si queremos que sea una terna del conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$, debemos tener que $p^2m \le n$. De modo que $m \le n/p^2$. Por tanto las ternas que tienen razón $p$ sólo podrían ser $1$, $p$ y $p^2$ ; $2$, $2p$ y $2p^2$ ;...; $m$, $mp$ y $mp^2$ donde $m$ es el entero mas grande que es menor o igual que $n/p^2$. Por tanto tenemos a lo más $n/p^2$ ternas cuya razón es $p$.

Sea $q$ el mayor entero positivo tal que $q^2 \le n$, si $p > q$ entonces $n/p^2 < 1$, así que ya no hay ternas en progresión geométrica con razón $p$ en el conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$.

De manera que para contar las cantidades de ternas en progresión geométrica en el conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$ sólo tenemos que contar las que tienen razón $2,3,\ldots,q$ cuyo número total es menor o igual a:

$$n/2^2 + \ldots + n/q^2 = n(1/2^2 + \ldots + 1/q^2)$$

de las desigualdades

$1/2^2 < 1/1\cdot2 = 1-1/2, \quad 1/3^2 < 1/2\cdot3 = 1/2-1/3, \ldots,$

$1/q^2 < 1/(q-1)\cdot q = 1/(q-1)-1/q$

sumando tenemos que:

$$1/2^2 + 1/3^2 + \dots +1/q^2 < n\left(\frac{q-1}{q}\right) < n$$

13) Sea $n^7 = ((n-1)+1)^7$, y desarrollando el binomio:

$$((n-1)+1)^7 = (n-1)^7 + 7(n-1)^{7-1} + \frac{7(7-1)}{2}(n-1)^{7-2} +$$
$$+ \dots + 7(n-1) + 1$$

restando 1:

$$n^7 - 1 = (n-1)^7 + 7(n-1)^{7-1} + \frac{7(7-1)}{2}(n-1)^{7-2} +$$
$$+ \dots + 7(n-1).$$

factorizando $(n-1)^2$ :

$$n^7 - 1 = (n-1)^2\Big((n-1)^{7-2} + 7(n-1)^{7-3} + \frac{7(7-1)}{2}(n-1)^{7-4} +$$
$$+ \dots + \frac{7}{(n-1)}\Big)$$

como $(n-1)^2 \mid (n^7-1)$, entonces $(n-1) \mid 7$ y como $(n-1) \mid (n^7-1)$, por tanto $(n-1) \mid (n^7 - 1 + 7) = n^7 + 6$ y $(n-1) \mid (n^7 - 1 - 7) = n^7 - 8$.

Finalmente como $(n-1) \mid 7$, entonces $n = 8$.

14) Es más fácil contar los números menores que 1 000 000 que no tienen dos unos seguidos.

Analizamos casos:

a) Los números que no tienen unos. En este caso tenemos que contar cuantos números menores que $10^d$ se pueden formar con las nueve cifras restantes 0,2,3,...,9. Como estamos contando números de 6 cifras y en cada cifra podemos poner 9 cifras, tenemos $9^6 - 1$ posibilidades (hay que quitar al 000 000).

b) Los números que tienen exactamente un uno. Este uno puede ocupar 6 lugares y los demás lugares pueden ser ocupados en nueve formas diferentes. De manera que hay $6 \cdot 9^5$ números de estos.

c) Los números que tienen exactamente dos unos. Estos dos unos tienen que estar separados. Las posibilidades para ellos es que ocupen los lugares:

1 _ 1 _ _ _ , 1 _ _ 1 _ _ , 1 _ _ _ 1 _ , 1 _ _ _ _ 1 , _ 1 _ 1 _ _ , _ 1 _ _ 1 _ , _ 1 _ _ _ 1 , _ _ 1 _ 1 _ , _ _ 1 _ _ 1 , _ _ _ 1 _ 1. Los otros cuatro lugares pueden ser llenados con 9 cifras diferentes así que hay $10 \cdot 9^4$ de estos

d) Los números que tienen exactamente tres unos. Las posibilidades para los tres unos son:

1 _ 1 _ 1 _ , 1 _ 1 _ _ 1 , 1 _ _ 1 _ 1 , _ 1 _ 1 _ 1. De modo que en este caso obtenemos $4 \cdot 9^3$.

Ya no se pueden poner cuatro unos porque quedarían dos juntos.

Por tanto los números que no tienen dos unos seguidos son:

$9^6 - 1 + 6 \cdot 9^5 + 10 \cdot 9^4 + 4 \cdot 9^3 = 9^3(9^3 + 6 \cdot 9^2 + 10 \cdot 9 + 4) - 1 =$
$729(729 + 486 + 94) - 1 = 729(1309) - 1 = 954\ 260.$

De manera que hay $999\ 999 - 954\ 260 = 45739$ números menores que $10^6$ con dos unos seguidos.

15) A todos los números de nueve cifras los podemos representar como $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$, y a cada uno se le puede asociar el número $(10-A_1)(10-A_2)\ldots(10-A_9)$ que lo llamamos el complemento, a su vez el complemento del número $(10-A_1)(10-A_2)\ldots(10-A_9)$ es $A_1A_2A_3\ldots A_9$. Notemos que un número más su complemento da el número 1111111110.

El total de números de nueve cifras diferentes es 9! y tenemos 9!/2 parejas de números complementarios, y como la suma de cada pareja es 1111111110, entonces $(9!/2)(1111111110) = 9!\cdot 5(111111111)$ es la suma buscada.

16) Como $X + Y = 1$, entonces $(X + Y)^3 = 1$ y desarrollando:

$X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3 = 1$

factorizando: $X^3 + Y^3 + 3XY(X + Y) = 1$, y como $X + Y = 1$ entonces $X^3 + Y^3 + 3XY = 1$ y $X^3 + Y^3 = 1 - 3XY$. De igual forma llegamos a que $Z^3 + W^3 = 1 - 3ZW$.

Por tanto $X^3 + Y^3 + Z^3 + W^3 = 2 - 3(XY + ZW)$, pero como $XY \leq \left(\dfrac{X + Y}{2}\right)^2 = 1/4$ y de igual forma $ZW \leq 1/4$, entonces:

$$X^3 + Y^3 + Z^5 + W^3 > 2 - 3\cdot 1/2 = 1/2$$

Como $(X - Y)^2 > 0$ entonces $X^2 - 2XY + Y^2 > 0$

descomponiendo:

$X^2 - XY + Y^2 > XY$, y multiplicando ambos lados por $(X + Y)$ obtenemos: $(X^3 + Y^3) > X^2Y + XY^2$, análogamente para $(Z - W)^2$ se tiene $(Z^3 + W^3) > Z^2W + ZW^2$, y sumando ambas desigualdades obtenemos:

$X^3 + Y^3 + Z^3 + W^3 > X^2Y + XY^2 + Z^2W + ZW^2$

factorizando el segundo miembro:

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + W^3 > XY(X + Y) + ZW(Z + W)$$

como $X + Y = 1$, $Z + W = 1$, entonces

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + W^3 > XY + ZW$$

17) Dados diez números consecutivos $n, n+1, \ldots, n+9$, siempre podemos agrupar a $n$ con $n+9$, $n+1$ con $n+8, \ldots, n+4$ con $n+6$, y con esto la suma en cada pareja da el mismo número.

Los números entre $11, 12, \ldots, 20$ se pueden ordenar en dos renglones

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |

y la suma de cada columna es la misma, nótese que con cada decena de números se puede hacer lo mismo. En particular con las decenas de 21 a 30, 31 a 40, ... ,991 a 1000, obteniendo un arreglo tabular donde $A_1, A_2, \ldots, A_5$ son las columnas respectivamente:

| $A_1$ | $A_2$ | $A_2$ | $A_2$ | $A_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 30 | 29 | 28 | 27 | 26 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 991 | 992 | 993 | 994 | 995 |
| 1000 | 999 | 998 | 997 | 996 |

de esta tabla se obtiene que $A_1$, $A_2, \ldots, A_5$ son casi como los cinco subconjuntos buscados, pero aún nos sobra el número 10. Para colocarlo, vamos a reordenar los primeros dos renglones. Haciéndolo obtenemos:

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 10 | | | | |
| 11 | 20 | 19 | 18 | 17 |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 30 | 29 | 28 | 27 | 26 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 991 | 992 | 993 | 994 | 995 |
| 1000 | 999 | 998 | 997 | 996 |

Entonces $A_1,\ldots,A_5$ cubren a todos los números del 10 al 1000 y la suman de los elementos de cada $A_i$ es la misma.

18) Como un número es divisible por 9 si y sólo si, la suma de sus cifras es divisible por 9 entonces cualquier número que sea generado por una permutación de las cifras de uno que es divisible por 9, tambien es divisible por 9.

Si calculamos los números en los que la primera cifra sea mayor que la segunda, la segunda que la tercera y ésta que la cuarta, obtendremos los que generan a los demás multiplicando por el número de permutaciones posibles que son 4!.

Si la primera cifra es 9 se obtienen los números:

9873, 9864, 9765, 9621, 9531 y 9432

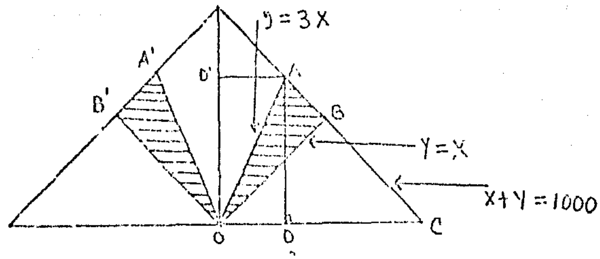
si es 8: 8721, 8631, 8541 y 8532

si es 7: 7641, 7632 y 7542

si es 6: 6543

entonces obtenemos 14 números. Por tanto el número buscado es $14 \cdot 4! = 336$.

19) Si $a$ es un subconjunto del plano, denotaremos por $P(a)$ al número de parejas de números enteros que contiene $a$. Entonces tenemos que calcular $P(\Delta AOB)$ y $P(\Delta A'OB')$.




Primero calcularemos $P(\Delta OAC)$

Notemos que $P(\Delta OAC) = P(\Delta OAD) + P(\Delta DAC) - P(AD)$ (por que las parejas del segmento $AD$ están contadas dos veces en la suma $P(\Delta OAD) + P(\Delta DAC)$). Como $P(\square ODAD') = P(\Delta OAD) + P(\Delta OAD') - P(AO) = 2P(\Delta OAD) - P(AO)$ (pues $P(\Delta OAD) = P(\Delta OAD')$), tenemos que $P(\Delta OAD) = \frac{P(\square ODAD') + P(AO)}{2} = \frac{251 \cdot 751 + 251}{2} = 94376$.

Para calcular $P(\Delta DAC)$, notemos que para $X = 1000$, sólo hay una pareja de enteros en el triángulo $\Delta DAC$ a saber $(1000, 0)$. Para $X = 999$, hay dos parejas, para $X = 998$, hay tres y así sucesivamente hasta llegar a $X = 250$ para la que hay 751. Por tanto $P(\Delta DAC) = 1 + 2 + 3 + \ldots + 751 = 282376$, entonces $P(\Delta OAC) = P(\Delta OAD) + P(\Delta DAC) - P(AD) = 94376 + 282376 - 751 = 376001$.

Para $X = 0$, hay una pareja de enteros en el triángulo $\Delta OBC$, a saber la $(0,0)$, para $X = 1$ hay dos parejas y así sucesivamente hasta llegar a $X = 500$ donde hay 501 parejas. Para $X = 499$ hay 500 parejas y ahí en adelante el número de parejas decrece de 1 en 1. Por tanto $P(\Delta OBC) = 1 + 2 + 3$

$+\ldots+ 501 + 500 + 499 + \ldots + 2 + 1 = \frac{2(500\cdot 501)}{2} + 501$ $= 251001$.

De aquí que $P(\Delta A \cap B) = P(\Delta OAC) - P(\Delta OBC) + P(OB) =$ $376001 - 251001 + 501 = 125501$. Por simetría $P(\Delta A'OB') =$ $125501$. Por tanto el número buscado es $125501 + 125501 - 1$ (pues la pareja (0, 0) es contada dos veces) = 251001

20) Vamos a ver primero cuantos unos se ocupan para hacer la numeración 0, 1, 2, ... , 999 999. Escribámoslos en la forma 000 000, 000 001, 000 002, ... , 999 999. De esta manera estamos formando todas las posibles sextetas usando los dígitos 0,1,2,3,4,5,6,7,8 y 9. Notemos que en esta escritura se usa el mismo número de ceros que de unos, de dos, de tres, de cuatro, etc. Además escribimos 1 000 000 de números usando 6 dígitos para cada uno, entonces ocupamos 6 000 000 de dígitos. Por tanto ocupamos 600 000 unos ( y 600 000 ceros , etc.).

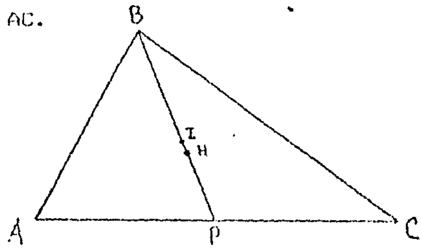
Pero del costal sacamos 1 000 000 de uno, de manera que cuando llegamos a 999 999 todavía nos sobraban 400 000 unos.

Por un razonamiento similar al anterior obtenemos que para escribir del 1 000 000 al 1 099 999 se ocupan 100 000 + 50 000 = 150 000 unos (los 100 000 son por que todos estos números llevan un uno al principio y los 50 000 son los unos que se ocuparos al escribir la numeración 0,1,2,...,99 999).

Análogamente la cantidad de números usada para escribir del 1 100 000 al 1 199 999 es 100 000 + 100 000 + 50 000 = 250 000.

Juntando los tres resultados obtenemos que cuando se escribe la numeración 1,2,...,1 199 999, se han ocupado 1 000 000 de unos. Entonces el último número que se escribió es precisamente 1 199 999.

21) Supongamos que el vértice B, es el que está alineado con I y H. Entonces la recta BI pasa por el punto medio P en el segmento AC.




Aplicando la ley de los senos al triángulo $\Delta ABP$ obtenemos:

$$\frac{AB}{\text{sen } APB} = \frac{AP}{\text{sen } ABP}$$

análogamente para el triángulo $\Delta BPC$ obtenemos:

$$\frac{BC}{\text{sen } BPC} = \frac{PC}{\text{sen } PBC}$$

dividiendo miembro a miembro las dos igualdades anteriores:

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{\text{sen } BPC}{\text{sen } APB} = \frac{AP}{PC} \cdot \frac{\text{sen } PBC}{\text{sen } ABP}$$

ya que $\text{sen } BPC = \text{sen}(180^\circ - APB) = \text{sen } APB$

entonces $\frac{\text{sen } BPC}{\text{sen } APB} = 1$, y como $\text{sen } PBC = \text{sen } ABP$, entonces $\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PC}$ ; ya que P es el punto medio de AC entonces AB = BC, concluyéndose que el triángulo $\Delta ABC$ es isósceles.

22) En principio no podemos cubrir el tablero con cuatro

rectángulos diferentes de altura 8, por que el número más pequeño que se puede escribir como la suma de cuatro naturales diferentes es 1+2+3+4 = 10. No puede haber 3 rectángulos de altura 8 porque el cuarto también tendría altura 8 y este caso ya lo descartamos. Entonces analizaremos los casos: En que hay a) dos rectángulo de altura 8, b) sólo hay un rectángulo de altura 8 y, c) no hay rectángulos de altura 8.

a) Supongamos que hay dos rectángulò de altura 8 y que sus anchos miden $a_1$ y $a_2$ respectivamente. La parte restante se podrá cubrir con dos rectángulos en posición horizontal (fig. 1). Para los anchos de los dos verticales tenemos las siguientes posibilidades:

(1,2); (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3) (2,4), (2,5) y (3,4)

y los dos horizontales pueden tener las siguientes alturas (1,7), (2,6) y (3,5). Por tanto hay 27 formas de cubrir el tablero usando dos rectangulos de altura 8.

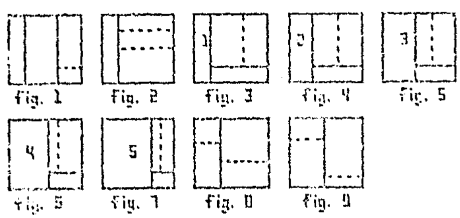


fig. 1 fig. 2 fig. 3 fig. 4 fig. 5
fig. 6 fig. 7 fig. 8 fig. 9

b) Colocando un rectángulo vertical de altura 8, podemos cubrir lo que resta con: i) 3 ractángulos horizontales (fig. 2): que podemos escoger de alturas (1,2,5) y (1,3,4), y como el vertical se puede escoger de 7 anchos diferentes (1,2,3,4,5,6,7), entonces hay 14 formas para el caso i).

ii) Ahora contaremos el caso en que hay uno vertical de ancho entre 1 y 5, uno horizontal de altura variable, y el espacio restante se cubre con dos rectángulos verticales (fig. 3 - fig. 7). No se puede dar el caso en que el vertical de altura 8 es de ancho 6 por que los dos verticales quedarían iguales.

En los cinco casos se tiene que eliminar la posibilidad de que el ancho del vertical de altura 8 sea igual a la altura del horizontal, pues en este caso, lo que falta por cubrir es un cuadrado y si se pusieran los dos verticales restantes, estos verticales se podrían acostar y obtendríamos un caso que ya contamos en i).

Análisis de los cinco casos:

1) Cuando el vertical es de ancho 1 (fig. 3), entonces para el horizontal hay 6 formas de colocarlo. Por que su altura puede ser de: 2,...,7, el espacio restante se cubre con los dos horizontales que deben sumar un ancho de 7, entonces las formas de colocarlos son: (1,6),(2,5) y (3,4), obteniendo así 18 formas.

2) Cuando el vertical es de ancho 2 (fig. 4) el horizontal se puede tomar con 6 alturas diferentes (1,3,4,5,6 y 7) y los dos verticales que restan deben cubrir una anchura de 6. Sus posibilidades son entonces (1,5) y (2,4) obteniendo así 12 formas.

Para los casos 3), 4) y 5) el proceso es análogo, y se obtienen 12, 6 y 6 formas respectivamente.

Solamente resta contar cuando no hay verticales de de altura 8.

En este caso, el tablero quedará partido en dos rectángulos de altura 8 y cada uno de ellos es unión de dos de nuestros rectángulos (ver fig. 8 y 9).

La división vertical en dos rectángulos de altura 8 tiene las siguientes posibilidades (1,7),(2,6),(3,5) y (4,4), no contamos (5,3),(6,2) y (7,1) por que estas particiones ya están contadas en (3,5),(2,6) y (1,7) respectivamente.

Para la división (1,7) el rectángulo de 8 por 1 puede ser partido en tres formas diferentes ((1,7),(2,6) y (3,5)) y el otro rectángulo de altura 8 (el de 8 por 7) puede ser partido también en las mismas 3 formas, pero se tiene que suprimir la partición, en la que se repite la división (1,7) para los rectángulos de 8 por 1, y para el rectángulo 8 por 7, ya que obtendriamos dos rectángulos iguales de 6 por 1. Por tanto hay 8 formas para la división (1,7). Similarmente, hay 8 formas para las diviciones (2,6) y (3,5).

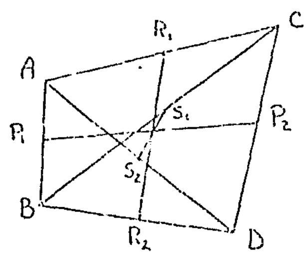
Finalmente la división (4,4) debe ser contada de manera diferente, pues el primer rectangulo de 8 por 4 no puede ser partido igual que el segundo, pues los cuatro rectángulos deben ser diferentes.

Entonces, cuando partimos el primero de 8 por 4 en dos horizontales de altura 1 y 7 el segundo de 8 por 4 sólo puede ser partido en dos horizontales con alturas (2,6) y (3,5). Cuando el primero de 8 por 4 se parte en dos rectángulos de altura 2 y 6, el segundo sólo puede partirse en (3,5). Y el segundo de 8 por 4 ya no se puede en más formas.

Por tanto para la división (4,4), tenemos solamente 3 formas. Entonces para el caso c) hay 30 formas.

Sumando las formas de los casos a), b) y c) obtenemos finalmente 24 + (14 + 18 + 12 + 12 + 6 + 6) + 30 = 122 formas de cubrir el tablero.

23) Sean $P_1$ el punto medio de AB, $P_2$ el de CD, $R_1$ el de AC, $R_2$ el de BD, $S_1$ el de BC y $S_2$ el de AD. Del triángulo $\Delta ABD$, $P_1R_2$ es paralelo a AD y mide la mitad de su longitud, además para el triángulo $\Delta ACD$, $R_1P_2$ es paralelo y mide 1/2 de la longitud de AD. Por tanto $P_1R_2$ es paralelo y de igual longitud a $R_1P_2$, análogamente $P_1R_1$ es paralelo y mide lo mismo que $R_2P_2$, por tanto se tiene que el cuadrilátero $P_1R_1R_2P_2$ es un paralelogramo que tiene como diagonales a $P_1P_2$ y $R_1R_2$. Entonces estos segmentos se cortan en su punto medio.




En el triángulo $\Delta ACB$, $R_1S_1$ es paralelo y tiene la mitad de la longitud de AB. Del triángulo $\Delta ABD$ para $S_2R_2$ se concluye lo mismo con respecto a AB. Por tanto $R_1S_1$ y $R_2S_2$ son paralelos y de igual longitud, entonces el cuadrilátero $R_1S_1R_2S_2$ es un paralelogramo, de aquí se tiene que $R_1R_2$ y $S_1S_2$ se cortan en su punto medio y como $R_1R_2$ y $P_1P_2$ se cortan en el punto medio, entonces $P_1P_2$, $R_1R_2$ y $S_1S_2$ se intersectan en sus puntos medios.

24) Supongamos que los lados del triángulo son a, b y c

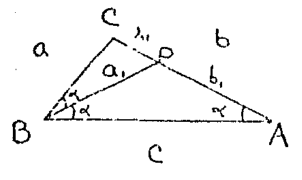



Fig. 1

Si m = 2, hacemos (fig. 1) $b_1 = PA$, $\lambda_1 = CP$ y $a_1 = BP$ por la semejanza de los triángulos ΔBCP y ΔABC:

$$\frac{\lambda_1}{a} = \frac{a}{b}, \quad \frac{a_1}{a} = \frac{c}{b} \quad \text{entonces} \quad \lambda_1 = \frac{a^2}{b} \quad \text{y} \quad a_1 = \frac{ac}{b}$$

en este caso $a_1 = b_1$ y como $\lambda_1 + b_1 = b$, sustituyendo se tiene que $\frac{a^2}{b} + \frac{ac}{b} = b$, simplificando y despejando ac:

$$ac = (b^2 - a^2)$$

entonces a divide a b, pero como son primos relativos entonces a = 1. Ahora supongamos que $b > c$, entonces $b \geq c + 1 = c + a \geq b$ entonces $b = c + a$ pero esto sólo puede ocurrir si el triángulo ΔABC es degenerado. Por tanto $b \leq c$, similarmente, $b \geq c$. Por tanto $b = c$, y como b y c son primos relativos entonces $b = c = 1$.

Si m = 3, aplicando el caso anterior al triángulo ABPA tenemos que (fig. 2) $a_2c = (b_2^2 - a_2^2)$ ———————— (1)

(donde $b_2 = PA$ y $a_2 = BP$).

Por la semejanza de los triangulos ΔBPC y ΔABC:

$$\frac{\lambda_2}{a} = \frac{a}{b}, \quad \frac{a_2}{a} = \frac{c}{b} \quad \text{entonces} \quad \lambda_2 = \frac{a^2}{b} \quad \text{y} \quad a_2 = \frac{ac}{b}$$

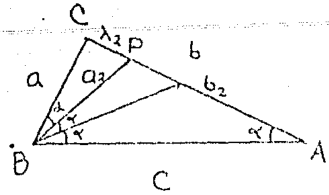



Fig. 2

y como $\lambda_2 + b_2 = b$, por tanto $b_2 = b - \lambda_2$, sustituyendo $\lambda_2$ obtenemos: $$b_2 = b - \frac{a^2}{b} = \frac{(b^2 - a^2)}{b}$$

sustituyendo $a_2$ y $b_2$ en (1): $$\left(\frac{a\ c}{b}\right)c = \left( \frac{(b^2 - a^2)^2}{b^2} - \frac{(ac)^2}{b^2} \right)$$

simplificando tenemos que:

$$a(c^2+(a^2 - b^2)) = b(b^2 - a^2)$$

análogamente al caso anterior se deduce que $c = b = 1$.

Vamos a probar por inducción que, para cualquier entero positivo m, si en el triángulo $\triangle ABC$ el ángulo en B es m veces el ángulo en A, entonces los lados $a_m$ y $b_m$ cumplen una relación del tipo $a_m w = b_m^2(b_m^2 + a_m^2)^\ell$. Donde $s \geq 0$ y $w, \ell \geq 1$. Ya comprobamos esta afirmación para $m = 2$ y $3$.

Supongamos que esta relación se cumple para m, es decir: $$a_m w = b_m^s(b_m^2 - a_m^2)^\ell \quad \text{———————} \quad (M)$$

Tomemos ahora un triángulo $\triangle ABC$ de tal manera que el ángulo en B es $(m + 1)$ veces el ángulo en A (fig. 3).

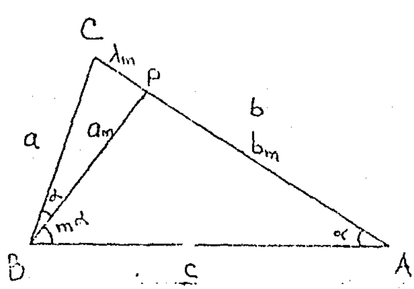



fig. 3

De los triángulos semejantes $\Delta BPC$ y $\Delta ABC$ tenemos que:

$$\frac{\lambda_m}{a} = \frac{a}{b}, \quad \frac{a_m}{a} = \frac{c}{b} \quad \text{entonces} \quad \lambda_m = \frac{a^2}{b} \quad \text{y} \quad a_m = \frac{ac}{b}$$

y como $\lambda_m + b_m = b$, entonces $b_m = b - \lambda_m$, sustituyendo $\lambda_m$ se obtiene

$$b_m = \frac{(b^2 - a^2)}{b}$$

sustituyendo en (M)

$$\frac{acw}{b} = \left( \frac{(b^2 - a^2)^2}{b^2} - \frac{(ac)^2}{b^2} \right)^{\ell} \left(\frac{(b^2 - a^2)}{b}\right)^{s}$$

simplificando:

$$acwb^{2\ell+s-1} = ((b^2 - a^2)^2 - (ac)^2)^{\ell}(b^2 - a^2)^{s} \quad \text{————} \quad (*)$$

desarrollando los binomios y factorizando en cada uno a a obtenemos:

$$acwb^{2\ell+s-1} = ((b^2 - a^2)^{2\ell} + aX)(b^{2s} + aY)$$

donde X y Y expresan los $\ell$ y $s$ términos restantes respectivamente de binomio en los que se ha factorizado a.

Entonces

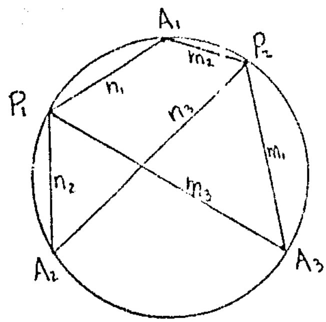
$$a(cwb^{2\ell+s-1} - Y(b^2 - a^2) - Xb^{2s} - aXb^{2\ell+s}) = b^{2s}(b^2 - a^2)^{2\ell}$$

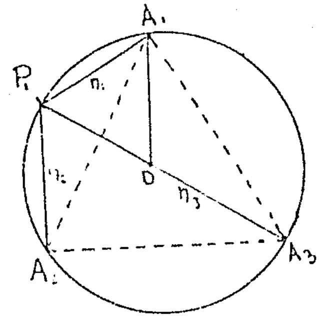
que es una expresión como la buscábamos. Es decir, tenemos una expresión del tipo: $az = b^{r}(b^2 - a^2)^{t}$

esto termina la inducción.

Una vez que se sabe que, para cualquier $m$, los lados del triángulo satisfacen una igualdad del tipo $az = b^{r}(b^2 - a^2)^{t}$, se puede hacer un razonamiento como el que hicimos en el caso $m = 1$ y 2 para concluir que $a = b = c = 1$.

25) Como $P_1$ esta en el arco $A_2A_3$, $P_2$ en $A_1A_3$, denotemos a $n_1 = P_1A_1$, $n_2 = P_1A_2$, $n_3 = P_1A_3$, $m_1 = P_2A_3$, $m_2 = P_2A_1$ y $m_3 = P_2A_2$ (fig. 1).




Tracemos $P_1D = n_1$ sobre $P_1A_3$, (fig. 2), como el ángulo $A_1A_2A_3$ es de $60^\circ$ entonces el ángulo $A_1P_1A_3$ también lo es, por tanto el triángulo $\Delta P_1DA_1$ es equilátero, entonces el ángulo $P_1A_1A_2$ es igual al ángulo $DA_1A_3$ y como $A_1A_2 = A_1A_3$ y $A_1P_1 = A_1D$ entonces los triángulos $\Delta P_1A_1A_2$ y= $\Delta DA_1A_3$, son iguales, de aqui obtenemos que $DA_3 = n_2$ y como $P_1D = n_1$, entonces $n_1 + n_2 = n_3$ y análogamente para el punto $P_2$ $m_1 + m_2 = m_3$

Sumando ambas igualdades

$n_1 + n_2 + m_3 = m_1 + m_2 + n_3$

entonces en los cuadrilateros $P_1A_1P_2A_3$ y $P_1A_1P_2A_2$, la suma de la longitud de 3 de sus lados es igual. Por tanto la única diferencia del perímetro de los dos cuadriláteros es $|n_1 - m_2|$.

26) Hagamos $\delta(n)$ = suma de las cifras de n, $\lambda(n)$ = suma de las cifras de $F(n)$ y $\omega(n)$ = número de las cifras de n.

Entonces las condiciones para F pueden escribirse asi:

$$F(n + F(n)) = 0 \qquad \text{———} \quad (1)$$

$$\delta(n) + \lambda(n) = 9(F(F(\omega(n)))) \qquad \text{———} \quad (2)$$

Vamos a probar una serie de propiedades de F.

a) $r \leq F(F(r))$ para toda $r \in \{1,2,...,8\}$

Para probar esto, consideremos el número $n = \underbrace{99\cdots\cdots9}_{r\text{-cifras}}$,

aplicando (2) tenemos : $9r \leq 9r + \lambda(n) = \delta(n) + \lambda(n) = 9(F(F(r)))$. Por tanto $r \leq F(F(r))$ para toda $r \in \{1,2,...,8\}$.

b) Supongamos que $F(n) = 0$ y que $n$ tiene $r$ cifras. Mostraremos que $r = F(F(r))$.

Por (2), $9r \geq \delta(n) = \delta(n) + \lambda(n) = 9(F(F(r)))$, llegando así a que $r \geq F(F(r))$ y por (a):

$$r = F(F(r)) \qquad (3)$$

c) Supongamos que $F(n) = 0$. Probaremos que $n$ es de la forma $n = \underbrace{99\cdots\cdots9}_{r\text{-cifras}}$.

Sea $r = \omega(n)$, entonces $\delta(n) + 0 = 9(F(F(r)))$, y por (b), $\delta(n) = 9r = 9\omega(n)$. Es decir la suma de las cifras de $n$ es igual a 9 veces el número de sus cifras. Esto sólo puede ocurrir si $n$ es de la forma $n = \underbrace{99\cdots\cdots9}_{r\text{-cifras}}$.

d) Calculamos $F(1)$, $F(8)$ y $F(9)$

Sea $n = 1 + F(1)$, como $F(1 + F(1)) = 0$, entonces $n$ es de la forma $n = \underbrace{99\cdots\cdots99}_{r\text{-cifras}}$. Así que $F(1) = \underbrace{99\cdots\cdots98}_{r\text{-cifras}}$.

Aplicando (2) al número 1 tenemos que:

$1 + (9(r-1) + 8) = 9(F(\underbrace{99\cdots\cdots998}_{r\text{-cifras}}))$, por tanto $r = F(\underbrace{99\cdots\cdots98}_{r\text{-cifras}})$.

Ahora aplicamos (2) al número $99\cdots\cdots998$ y obtenemos:

$9(r-1) + 8) + r = 9(F(F(r)))$ entonces 9 divide a $(8+r)$ recordemos que $r \in \{1,2,...,8\}$, pues es el número de cifras de $F(1)$. Por tanto $r = 1$ (es decir $n$ sólo tiene una cifra) así es que $(1 + F(1)) = 9$ y $F(1) = 8$. Sustituyendo en (2):

$1 + 8 = 9(F(F(1)))$, entonces $F(F(1)) = 1$ y $F(8) = 1$. Como $F(1 + F(1)) = 9$ y $F(1) = 8$, entonces $F(9) = 0$.

e) Ahora calcularemos $F(2)$. De (2) tenemos que $2 + \lambda(2) = 9(F(F(1))) = 9(1)$

entonces $\lambda(2) = 7$ (es decir, la suma de las cifras de $F(2)$ es 7). Por c) $(2 + F(2))$ es de la forma $\underbrace{99\cdots\cdots999}_{s-\text{cifras}}$. Por tanto $F(2) = \underbrace{99\cdots\cdots97}_{s-\text{cifras}}$ pero la suma de las cifras de $F(2)$ es 7, entonces $F(2) = 7$.

f) Análogamente se puede probar que $F(7) = 2$, $F(6) = 3$, $F(5) = 4$, $F(4) = 5$, $F(5) = 4$.

g) Ahora si podemos calcular $F(1989)$. Por (2) tenemos que $27 + \lambda(1989) = 9(F(F(4)))$. Como $F(4) = 5$ y $F(5) = 4$, entonces $27 + \lambda(1989) = 36$. Así que $\lambda(1989) = 9$ (es decir, la suma de las cifras de $F(1989)$ es 9).

Por c), $(1989 + F(1989)) = \underbrace{99\cdots\cdots\cdots99}_{t-\text{cifras}}$, de modo que $F(1989)$ es de la forma $F(1989) = \underbrace{99\cdots\cdots\cdots\cdots999}_{(t-4)-\text{cifras}}8010$, pero como la suma de las cifras de $F(1989)$ es 9, entonces $F(1989) = 8010$.

27) Como $P(x)$ tiene coeficientes racionales entonces se puede escribir de esta forma:

$P(x) = \frac{b_n}{c_n}x^n + \frac{b_{n-1}}{c_{n-1}}x^{n-1} + \ldots + \frac{b_1}{c_1}x + a_0$ con $b_i$ y $c_i$ enteros

Sea $q$ un primo que no divida a $(c_n c_{n-1} \cdots\cdots c_1)$, evaluando a $P(x)$ en un múltiplo de $q$, es decir en un número de la forma $qs$ con $s$ entero tenemos:

$$P(qs) = \frac{b_n}{c_n}(qs)^n + \frac{b_{n-1}}{c_{n-1}}(qs)^{n-1} + \ldots + \frac{b_1}{c_1}(qs) + a_0 = k$$

donde $k$ es un número entero.

multiplicando ambos lados por $c_1c_2\cdots c_n$ obtenemos una expresión del tipo:

$P(qs) = d_nb_n(qs)^n + d_{n-1}b_{n-1}(qs)^{n-1} + \ldots + d_1b_1(qs) +$

$(c_1c_2\cdots c_n)a_0 = (c_1c_2\cdots c_n)k$

de aquí obtenemos una igualdad del tipo:

$qs(u) = (k - a_0)(c_1c_2\cdots c_n)$ donde u es un entero.

Por tanto q divide a $(k - a_0)(c_1c_2\cdots c_n)$ pero q es primo relativo con $c_1c_2\cdots c_n$. De manera que q divide a $(k - a_0)$. Es decir q divide a $P(qs) - a_0$. Por tanto $P(qs)$ y $a_0$ dejan el mismo residuo al dividirlo por q y esto ocurre para cualquier entero s.

28) Por hipótesis $n_1, n_2, \ldots n_{2r}$ son raices de $P(X) - m$, entonces $P(X) - m$ se puede escribir como: $P(X) - m = (X - n_1)(X - n_2)\cdots(X - n_{2r})g(X)$ donde $g(X)$ es un polinomio. Ahora demostraremos que $g(X)$ tiene coeficientes enteros.

Para hacer ésto es suficiente probar que si $q(X) = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$ es un polinomio de coeficientes enteros y c es una raíz entera de $q(X)$, entonces $s(X) = \frac{q(X)}{X-c}$ es un polinomio de coeficientes enteros. Para probar esta afirmación es suficiente hacer la división de $\frac{q(X)}{X-c}$ y observar que los coeficientes que se obtienen para $s(X)$ son los números:

| | |
|---|---|
| $a_n$ | para $X^{n-1}$ |
| $a_nC + a_{n-1}$ | para $X^{n-2}$ |
| $a_nC^2 - a_{n-1}C + a_{n-2}$ | para $X^{n-3}$ |
| $\vdots \quad \vdots \quad \vdots$ | |
| $a_nC^{n-2} - a_{n-1}C^{n-3} + \ldots + a_{n-(n-3)}C + a_{n-(n-2)}$ | para $X$ |

claramente, todos estos coeficientes son enteros. Por tanto $q(X) = (X - C)s(X)$ donde $s(X)$ es un polinomio de coeficientes enteros.

Haciendo una inducción sencilla tendríamos que:

$$P(X) - m = (X-n_1)(X-n_2)\cdots\cdots(X-n_{2r})g(X)$$

donde $g(X)$ es un polinomio de coeficientes enteros.

Tomemos un $s$ en los enteros. $P(s) - m$ se puede escribir como $(s-n_1)\cdots\cdots(s-n_{2r})g(s)$.

Probaremos que $P(s) \neq (m \pm 1), (m \pm 2), \ldots, (m \pm r)$. Si $s = n_i$ para alguna $i$ entonces $P(s) = m \neq (m \pm 1), (m \pm 2), \ldots, (m \pm r)$. Si $g(s) = 0$ entonces $p(s) = m \neq (m \pm 1), (m \pm 2), \ldots, (m \pm r)$.

Supongamos pues que $s \neq n_i$ para toda $i$, $g(s) \neq 0$ y que $n_1 < n_2 < \ldots < n_{2r}$ (si no estuvieran ordenadas, las podemos ordenar y no cambia la hipótesis del problema).

Supongamos que $n_1 < \ldots < n_t < s < n_{t+1} < \ldots < n_{2r}$ entonces $|p(s) - m| = |s-n_1| \cdot \ldots \cdot |s-n_{2r}||g(s)|$

$|p(s) - m| \geq |s-n_1| \cdot \ldots \cdot |s-n_{2r}|$ (por que $|g(s)|$ es un entero diferente de 0 pues $g(s)$ tiene coeficientes enteros), entonces $|s-n_1| \cdot \ldots \cdot |s-n_{2r}|$ es igual a:

$|s - n_t||s - n_{t-1}|\cdots\cdots|s - n_1||s - n_{t+1}|\cdots\cdots|s - n_{2r}|$ ——— $(*)$

Como $s > n_t$, entonces $|s - n_t| \geq 1$

Como $s > n_t > n_{t-1}$, entonces $|s - n_{t-1}| \geq 2$. Siguiendo este proceso, llegamos a que:

$(*) \geq (1 \circ 2 \circ \cdots \circ t)(1 \circ 2 \circ \cdots \circ (2r-t)) = (1 \circ 1)(2 \circ 2)\cdots\cdots(t \circ t)$ $(t+1)(t+2)\cdots\cdots(2r-t)$, se esta suponiendo que $t \leq 2r-t$, el otro caso es similar. También se esta suponiendo que s esta entre $n_1$ y $n_{2r}$. Pero en el caso en que $s < n_1$ o $s > n_{2r}$ el razonamiento es análogo.

Por tanto $|P(s) - m| \geq (r!)^2$ y en consecuencia $P(s)$ no puede ser igual a $(m \pm 1), (m \pm 2), \ldots, (m \pm ((r!)^2-1))$, y como $r \leq (r!)^2-1$ para toda $r \geq 2$, entonces $P(s)$ no puede ser igual a $(m \pm 1), \ldots, (m \pm r)$

29) El número $\underbrace{222\cdots2}_{r\text{-cifras}}$ es igual a $\underbrace{111\cdots1}_{r\text{-cifras}} + \underbrace{111\cdots1}_{r\text{-cifras}}$

entonces $\underbrace{111\cdots1}_{2r\text{-cifras}} - \underbrace{222\cdots2}_{r\text{-cifras}} = \underbrace{111\cdots1}_{2r\text{-cifras}} - \underbrace{111\cdots1}_{r\text{-cifras}} - \underbrace{111\cdots1}_{r\text{-cifras}}$

en el segundo miembro, restemos al primer sumando el segundo obteniendo:

$\underbrace{111\cdots1}_{r\text{-cifras}}\underbrace{000\cdots0}_{r\text{-cifras}} - \underbrace{111\cdots1}_{r\text{-cifras}}$

como $\underbrace{111\cdots1}_{r\text{-cifras}}\underbrace{000\cdots0}_{r\text{-cifras}} = \underbrace{111\cdots1}_{r\text{-cifras}} \cdot 10^r$

entonces $\underbrace{111\cdots1}_{r\text{-cifras}}\underbrace{000\cdots0}_{r\text{-cifras}} - \underbrace{111\cdots1}_{r\text{-cifras}}$ es igual a:

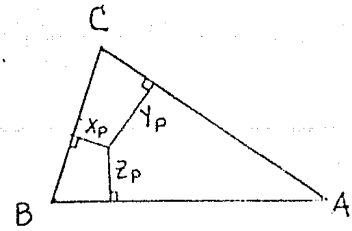
$\underbrace{111\cdots1}_{r\text{-cifras}} \cdot 10^r - \underbrace{111\cdots1}_{r\text{-cifras}}$

factorizando $\underbrace{111\cdots1}_{r\text{-cifras}}$ obtenemos lo siguiente:

$$\underbrace{111\cdots1}_{r\text{-cifras}} \cdot (10^r - 1) = \underbrace{111\cdots1}_{r\text{-cifras}} \cdot (\underbrace{999\cdots9}_{r\text{-cifras}}) = 9 \cdot (\underbrace{111\cdots1}_{r\text{-cifras}})^2$$

$= (\underbrace{333\cdots3}_{r\text{-cifras}})^2$, que claramente es un cuadrado perfecto.

30) Como el Área $(\Delta ABC)$ = Área $(\Delta ABP)$ + Área $(\Delta BCP)$ + Área $(\Delta ACP)$, tenemos que $(CB)h_A = Z_P(AB) + X_P(BC) + Y_P(AC)$ ($h_A$ es la altura por A).




Supongamos que CB es el lado más pequeño del triángulo, entonces $(CB)h_A = Z_p(AB) + X_p(BC) + Y_p(AC) \geq Z_p(CB) + X_p(CB) + Y_p(CB)$.

De manera que $(CB)h_A \geq (CB)(X_p + Y_p + Z_p)$ de aquí que $h_A \geq X_p + Y_p + Z_p$.

Cuando el punto que tomamos para trazar las perpendiculares en el vértice A, tenemos que $X_A = h_A$, $Y_A = 0$ y $Z_A = 0$. De manera que $X_A + Y_A + Z_A = h_A + 0 + 0 \geq X_p + Y_p + Z_p$. Por tanto, en A la suma es mayor o igual que en cualquier otro punto.

Por tanto el punto en el que se alcanza el máximo de la suma es el vértice opuesto al lado más pequeño del triángulo.

31) Supongamos que n es un número con tales características. Denotemos por $\Sigma$ a la suma de las cifras de n, y a $\Pi$ como el producto de las cifras de n.

Lo más grande que puede ser cada cifra de n es 9, entonces $\Sigma \leq 9 \cdot 1989 = 17901$ y como $\Sigma = \Pi$, entonces $\Sigma = \Pi \leq 17901$.

Notamos que n no puede tener cifras iguales a cero.

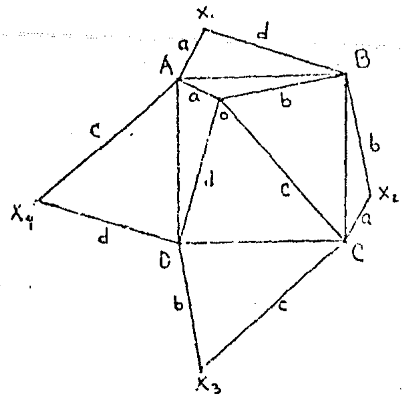
Supongamos que n tiene r cifras diferentes de 1, entonces cada una de ellas es mayor o igual que 2 por lo que $\Pi \geq 2^r$. Pero $\Pi \leq 17901$. A sí que $2^r \leq 17901$. Como $2^{15} = 32768$ tenemos que $r \leq 14$. Por tanto el número buscado puede tener a lo más 14 cifras diferentes de 1.

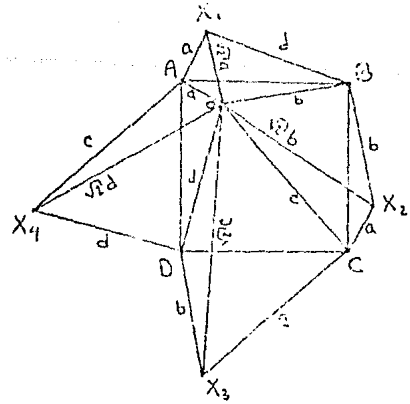
Como al menos 3 de las cifras son cinco, y n no tiene ceros, entonces $\Sigma \geq 1986 + 15 = 2001$. Por otra parte, como hay a lo m s 14 cifras diferentes de 1 y el valor máximo para estas cifras es 9, tenemos que $\Sigma \leq 1975 + 11 \circ 9 + 3 \circ 5 = 2089$. Por tanto $2001 \leq \Sigma \leq 2089$. De aquí que $2001 \leq \Pi \leq 2089$. Pero tres de las cifras son cincos así que $5^3 = 125$ divide a $\Pi$. Esta es una contradicción pues entre 2001 y 2089 no hay múltiplos de 125.

Esto prueba que no existen números de 1989 cifras con las caracteristicas deseadas.

32) Realizaremos las siguientes construcciones auxiliares:

Tomamos el triángulo $\Delta AOD$ y construímos uno igual sobre el lado AB del cuadrado (fig. 1), de tal forma que el lado AD del triángulo $\Delta AOD$ coincida con AB, obteniendo así el triángulo $\Delta ABX_1$ donde el ángulo $X_1AB$ es igual al ángulo OAD. De igual forma construímos un triángulo igual al triángulo $\Delta ABO$ sobre BC, obteniendo el triángulo $\Delta BCX_2$ donde el ángulo $X_2BC$ el igual al ángulo OBA, otro igual al triángulo $\Delta BCO$ sobre DC obteniendo el triángulo $\Delta DCX_3$, con el ángulo OCB igual al ángulo $X_3CD$ y finalmente uno igual al triángulo $\Delta DCO$ sobre AD obteniendo el triángulo $\Delta DAX_4$, donde el ángulo ODC es igual al ángulo $X_4DA$.




Por la construcción tenemos que la suma de las áreas de los cuadriláteros $AX_1BO$, $BX_2CO$, $CX_3DO$ y $DX_4AO$ es el doble del área del cuadrado $ABCD$ y los ángulos $OAX_1$, $OBX_2$, $OCX_3$ y $ODX_4$ son rectos.

Cada uno de los cuadriláteros antes mencionados se puede dividir en dos triángulos (fig. 2) trazando su diagonal que pasa por O, obteniendo así que en cada cuadrilátero hay un triángulo rectángulo de catetos iguales, entonces las diagonales consideradas miden $\sqrt{2}\,a$, $\sqrt{2}\,b$, $\sqrt{2}\,c$ o $\sqrt{2}\,d$ según sea el valor de los catetos del triángulo rectángulo correspondiente.

Por tanto la suma de las áreas de los 4 triángulos rectángulos es:

$$1/2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \text{ ---------- } (1)$$

entonces sólo tenemos que calcular la suma de las áreas de los triángulos $\Delta X_1OB$, $\Delta X_2OC$, $\Delta X_3OD$ y $\Delta X_4OA$, pero como en cada triángulo conocemos sus 3 lados, y estos están en términos de a, b, c y d, entonces por la fórmula de Herón tenemos que las áreas son las siguientes:

para $\Delta X_1OB$ es $\sqrt{(P_1-d)(P_1-b)(P_1-\sqrt{2}\,a)}$

para $\Delta X_2OC$ es $\sqrt{(P_2-a)(P_2-c)(P_2-\sqrt{2}\,b)}$

para $\Delta X_3OD$ es $\sqrt{(P_3-b)(P_3-d)(P_3-\sqrt{2}\,c)}$

para $\Delta X_4OA$ es $\sqrt{(P_4-c)(P_4-a)(P_4-\sqrt{2}\,d)}$

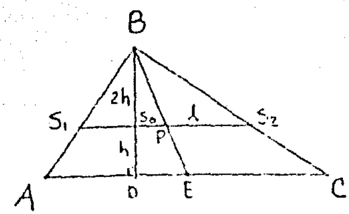
donde $P_1$, $P_2$, $P_3$ y $P_4$ es el semiperimetro correspondiente a cada triángulo. Nótese que cada $P_i$ se escribe en términos de a, b, c y d

Por tanto la suma de las áreas queda expresada en términos de a, b, c y d, y como (1) esta en términos de a, b, c y d, tenemos que el área del cuadrado ABCD se puede expresar en términos de a, b, c y d

33) Supongamos que existe un punto P con la propiedad mencionada. Sea M el punto de intersección de la recta AP con el lado BC. Por hipotesis los triangulos $\Delta ABM$ y $\Delta AMC$ tienen la misma área. Las alturas por A de ambos triángulos coinciden y como tienen la misma área, sus bases deben ser iguales, de manera que BM = MC. Esto prueba que P está en la mediana por A. Similarmente P esta en la mediana por B y por C. Por tanto P es el centroide del triángulo $\Delta ABC$.

Consideremos la linea $\ell$ paralela a AC que pasa por P. Supongamos que $\ell$ intersecta a AB en $S_1$ y a BC en $S_2$. Por hipotesis $S_1S_2$ tiene que dividir al triángulo $\Delta ABC$ en dos partes de igual área, entonces el área del triángulo $\Delta ABC$ tiene que ser el doble del área del triángulo $\Delta S_1BS_2$. Sea D el punto de intersección de la altura desde B hasta la base

AC del triángulo $\Delta ABC$, $S_0$ el punto de intersección con la linea $S_1S_2$ y E el punto medio de AC.




Como P divide a BE en razón de 2 a 1 y por ser los triángulos $\Delta DBE$ y $\Delta S_0PB$ semejantes, entonces $S_0$ divide a BD en la misma proporción. Ahora hagamosmos $h = S_0D$, entonces $S_0B = 2h$. Sea $b = AC$ entonces $S_1S_2 = 2/3b$, así es que el área del triángulo $\Delta S_1S_2B$ es $1/2(2/3b)(2h)$ y la del triángulo $\Delta ABC$ es $1/2b(3h)$. Pero $2(\text{área } \Delta S_1S_2B) = (\text{área } \Delta ABC)$. Sustituyendo, obtenemos que $8 = 9$, esta contradicción prueba que $S_1S_2$ no divide al triángulo $\Delta ABC$ en dos partes de igual área. Por tanto P no cumple con lo requerido. De manera que no puede existir un punto con la propiedad del enunciado.

34) Nótese que los números $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..., $A_{32}$ se pueden escribir de la siguiente forma:

$A_1 = 1\cdot 2\cdot 3 \cdots\cdots 1000 = 1000!$

$A_2 = 2\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 3) \cdots\cdots (2\cdot 500) = 2^{500}\cdot 500!$

$A_3 = 3\cdot(3\cdot 2)\cdot(3\cdot 3) \cdots\cdots (3\cdot 333) = 3^{333}\cdot 333!$

$A_4 = 4\cdot(4\cdot 2)\cdot(4\cdot 3) \cdots\cdots (4\cdot 250) = 4^{250}\cdot 250!$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$

$A_{31} = 31\cdot(31\cdot2)\cdot(31\cdot3)\cdots\cdots(31\cdot32) = 31^{32}\cdot32!$

$A_{32} = 32\cdot(32\cdot2)\cdot(32\cdot3)\cdots\cdots(32\cdot32) = 32^{31}\cdot31!$

Observemos que $A_1, A_2, \ldots, A_{32}$ tienen al $31!$ como factor común. Ademas $A_{32} = 32^{31}\cdot31!$ se puede escribir también como $A_{32} = 32^{30}\cdot32!$ (Agrupando un 32 de $32^{31}$ con $31!$). De esta manera obtenemos que $32!$ también es factor comun de los números $A_1, A_2, \ldots A_{32}$.

Si eliminamos el $32!$ de $A_{31}$ y $A_{32}$, sólo queda en $A_{31}$ el número $31^{32}$ y en $A_{32}$ el número $32^{30} = 2^{150}$. En estos dos números no hay un divisor común, por que son potencias de primos distintos. Por tanto el $32!$ es el máximo común divisor de $A_{31}$ y $A_{32}$. Como cualquier divisor comun $d$ de los números $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ tiene que dividir a $A_{31}$ y $A_{32}$, entonces $d$ debe ser menor o igual que el máximo común divisor de $A_{31}$ y $A_{32}$ que es $32!$. Por tanto para $A_1, A_2, \ldots, A_{32}$ el máximo común divisor es $32!$.

35) De los números que son producto de cuatro primos diferentes, el menor es $2\cdot3\cdot5\cdot7$, el siguiente es $2\cdot3\cdot5\cdot11$, èl siguiente es $2\cdot3\cdot5\cdot13$, etc.

Para que quepan en la progresión 13 números como los que buscamos, es mejor empezar con el más pequeño de lo posible. Tratemos de empezar entonces la progresión con el número $210 = 2\cdot3\cdot5\cdot7$.

La progresión debe ser de la forma $210, 210 + d, 210 + 2d, \ldots, 210 + 49d$ donde $d$ es un entero positivo.

Para tener más control sobre el número de divisores que tienen los números de la forma $2\cdot3\cdot5\cdot7 + kd$, es conveniente que d comparta divisores con el número $2\cdot3\cdot5\cdot7$ pues así estos divisores se pueden factorizar. Y de nuevo, para que quepan 13 con las características mencionadas es mejor empezar con una d pequeña. Entonces veamos que sucede con $d = 2\cdot3\cdot5$. De esta manera la progresión que se obtiene es

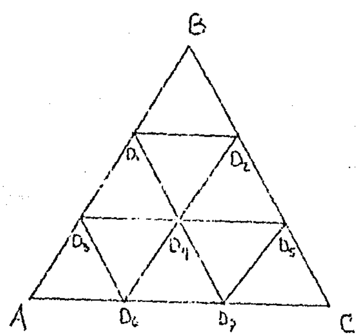
$2\cdot3\cdot5\cdot7,\ 2\cdot3\cdot5\cdot7 + (2\cdot3\cdot5),\ 2\cdot3\cdot5\cdot7 + 2(2\cdot3\cdot5),\ 2\cdot3\cdot5\cdot7 + 3(2\cdot3\cdot5),\ \ldots\ ,2\cdot3\cdot5\cdot7 + 49(2\cdot3\cdot5)$.

Es decir

$2\cdot3\cdot5\cdot7,\ 2\cdot3\cdot5\cdot(8),\ 2\cdot3\cdot5\cdot(9),\ \ldots\ ,2\cdot3\cdot5\cdot(56)$.

Ya que entre 7 y 56 hay 13 números primos (11,13,17,19,23, 29,31,37,41,43,47,53), entonces en la progresión aparecen 13 números que son producto de 4 primos distintos

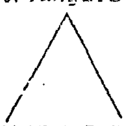
36) Sean $D_1, D_2, \ldots, D_7$ los puntos de intersección que se muestran en la figura.




Como tenemos que pasar por C antes de llegar a B, entonces no debemos pasar por $D_2$ ni por $D_5$ antes de llegar a C, ya que de suceder esto tendríamos que pasar dos veces por un mismo punto, cuando caminamos de C a B tenemos que llegar a C pasando por $D_7$. Entonces tenemos que contar en el triángulo $\Delta AD_1D_7$ las formas de llegar de A a $D_7$.

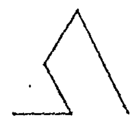
Cada camino de A a $D_7$ será denotado por una sucesión de letras. Por ejemplo la expresión $AD_3D_6D_4D_7$ denotará al camino que empieza en A, pasa a $D_3$, despues pasa a $D_6$, sigue por $D_4$ y termina en $D_7$.

Entonces los caminos de A a $D_7$ contenidos en el triángulo $\Delta AD_1D_7$ son



1) $AD_3D_1D_4D_7$

2) $AD_3D_1D_4D_6D_7$



3) $AD_6D_3D_1D_4D_7$

4) $AD_3D_6D_4D_7$

5) $AD_3D_4D_7$

6) $AD_3D_4D_6D_7$

7) $AD_6D_3D_4D_7$

8) $AD_6D_4D_7$

9) $AD_3D_6D_7$



10) $AD_7$

una vez que llegamos a B tenemos que contar las formas en que se puede prolongar cada uno de los diez caminos anteriores.

Nótese que los caminos 1), 2) y 3) sólo se pueden prolongar caminando en linea recta de C a B. Los caminos 4), 5), 6), 7) y 9) se pueden prolongar de 2 formas para cada uno y éstas son: $CD_5D_2B$ y $CD_5D_2D_1B$.

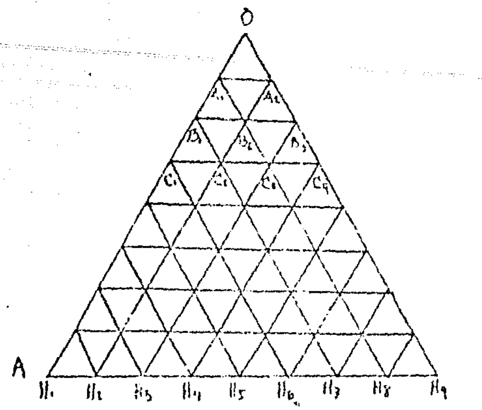
Para contar las formas en que se pueden prolongar los caminos 9) y 10), notemos que a) llegamos a C por $D_7$, b) tenemos que salir de C por $D_5$.

En el caso de 9) tenemos que construir caminos de $D_5$ a B contenidos en el cuadrilátero $D_5D_4D_1B$. Esta es una situación similar a los caminos que contamos primero contenidos en el triángulo $\Delta AD_1D_7$. Es como si contaramos cúantos caminos hay para ir de A a $D_7$ en el triángulo $\Delta AD_1D_7$ y que no pasen por $D_1$. Observando los caminos del 1) al 10) notaremos que 4), 5), ... ,10) tienen esa propiedad. Por tanto el camino 9) se puede prolongar de 7 formas.

En el caso de 10), tenemos que construir caminos de $D_5$ a B contenidos en el triángulo $\Delta D_5D_3B$. Esta es una situacion análoga a la que teniamos cuando contamos los caminos de A a $D_7$ contenidos en el triágulo $\Delta AD_1D_7$, Ya sabemos que en este caso salieron diez caminos. Por tanto hay 10 formas de prolongar el camino 10).

Sumando las posibles prolongaciones para cada uno de los caminos 1), 2),...,10) obtenemos que hay 30 caminos de A a B pasando por C.

37) Sea O el vértice superior del triángulo, de la figura tenemos 8 lineas paralelas a la base, (contando la base) a las que llamamos primer nivel, segundo nivel,...,octavo nivel.




Llamemos $A_1$ y $A_2$ a los puntos del primer nivel, $B_1$, $B_2$ y $B_3$ a los puntos del segundo nivel y así sucesivamente hasta que llamamos $H_1, H_2, \ldots, H_9$ los puntos del octavo nivel.

Los caminos que empiezan en O y terminan en un punto del primer nivel son: $OA_1$, $OA_1A_2$, $OA_2$ y $OA_2A_1$, donde el orden que tienen las letras en cada uno de los caminos indica el recorrido que sigue el camino. Entonces el número de caminos que van de O a un punto del primer nivel es $4 = 2\cdot2$.

Ahora vamos a contar el número de caminos de O a $B_1$. Tomemos un camino de éstos. El último punto que tiene del primer nivel es $A_1$ o $A_2$. Veamos cuantos caminos tienen a $A_1$ como último punto del primer nivel. Como $A_1$ es el último, una vez que el camino pasa por $A_1$, estea tiene que bajar y hay dos bajadas posibles ($A_1B_2B_1$ y $A_1B_1$).

Cuando el último punto del primer nivel es $A_2$, también hay dos posibles formas de caminar hacia $B_1$ a saber $A_2B_2B_1$ y $A_2B_3B_2B_1$. Por tanto para ir de O a $B_1$ hay 2(número de caminos que empiezan en O y terminan en un punto del primer nivel), por que cada uno de esos caminos lo podemos complementar en dos formas para llegar a $B_1$. Es decir, para ir de O a $B_1$ hay $2 \circ 4 = 8$ caminos. El mismo argumento sirve para mostrar que de O a $B_2$ hay $2 \circ 4 = 8$ caminos y que de O a $B_3$ hay $2 \circ 4 = 8$ caminos.

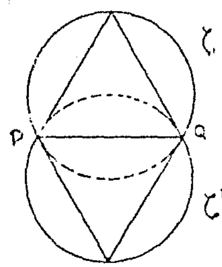
Por tanto hay $24 = 3 \circ 8 = 3!2^2$ caminos que empiezas en O y terminan en algún $B_i$. Similarmente para ir de O a $C_1$ hay 2(número de caminos que empiezan en O y terminan en $B_i$) $= 2(3! \circ 2^2) = 3! \circ 2^3$ y para cada $i = 2,3,4$ hay $2(3! \circ 2^2) = 3! \circ 2^3$ caminos para ir de O a $C_i$. Por tanto hay $4(3! \circ 2^3) = 4! \circ 2^3$ caminos que empiezan en O y terminan en un punto del tercer nivel.

Siguiendo este proceso tenemos que hay $8! \circ 2^7$ caminos que empiezan en O y terminan en un $G_i$. Y como da cada $G_i$ hay dos maneras de bajar al último nivel tenemos que hay $8!2^8$ caminos de O a $H_1$.

38) Llamemos $\mathscr{L}$ al lugar geométrico que buscamos. Como primer paso diremos cual es el conjunto $\mathscr{S}$ de puntos E en el plano tales que el ángulo $PEQ = 60^\circ$. Un punto E en el plano subtiende hacia P y Q un ángulo de $60^\circ$. Entonces estos puntos tienen que estar, en el arco mayor de alguna de las dos circunferencias circunscritas a los triángulos equiláteros, que tienen al segmento PQ como lado. Y claramente todo punto de la unión de esos dos arcos está en $\mathscr{S}$. Por tanto $\mathscr{S}$ es precisamente la unión de los dos arcos

(fig. 1)

llamenos $\gamma$ y $\gamma'$ a los dos arcos

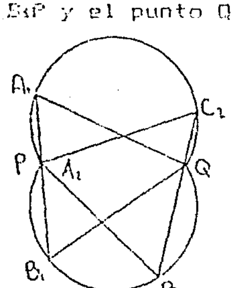



Dado un triángulo equilátero $\Delta ABC$ con P en AB y Q en BC, el ángulo PBQ = 60°. De manera que B está en $\gamma$. Además el ángulo PAQ es menor o igual a 60°. Entonces A no puede star en el interior de la curva $\gamma$ (pues si D es un punto del interior de la curva $\gamma$ n entonces el ángulo PDQ > 60°). Esto prueba que ningún punto de $\mathcal{L}$ puede estar en el interior de la curva $\gamma$.

Ahora tomemos un punto $B_1$ en $\gamma'$ y construimos a $A_1$ de la siguiente manera:

Si la linea $B_1P$ intersecta en dos puntos a $\gamma$, entonces $A_1$ es el punto de esta intersección que es diferente de P y, si la linea $B_1P$ intersecta a $\gamma$ sólo en P, hacemos $A_1 = P$. Notemos que en el primer caso, el ángulo $PA_1Q$ vale 60°.

De manera similar se construye $C_1$ tomando $B_1P$ y tomando la recta $B_1Q$ en lugar de $B_1P$ y el punto Q en lugar de P.

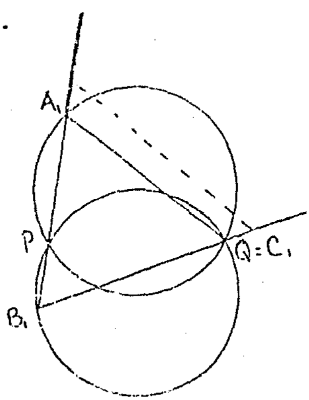


Observemos que si $C_1$ es diferente de Q, entonces el ángulo $PC_1Q = 60^\circ$.

Nada más hay un caso en que $A_1 = P$ y $C_1 = Q$ que es precisamente cuando el triángulo $\Delta PB_1Q$ es equilátero. Cuando no estamos en este caso, el triángulo $\Delta A_1B_1C_1$ tiene dos ángulos de 60°, así que es equilátero.

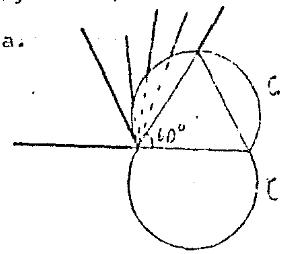
Por tanto $\Delta A_1B_1C_1$ siempre es equilátero, P está en $A_1B_1$ y Q está en $B_1C_1$. Esto prueba que los puntos $A_1$ construidos de esta manera siempre están en $\mathcal{L}$.

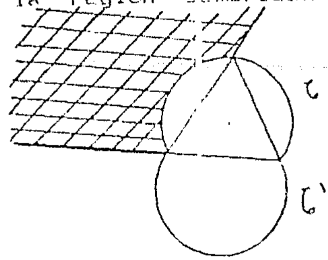
Es más prolongando el segmento $B_1A_1$ por $A_1$ y $B_1C_1$ por $C_1$. Podemos conseguir triángulos equiláteros cada vez mayores. de aqui que cada punto del rayo que parte de $A_1$ que no tiene a $B_1$ y que está contenido en la línea $A_1B_1$, pertenece también a $\mathcal{L}$.



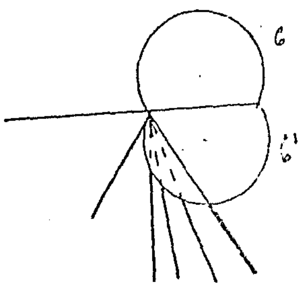

En resumen: si A es un punto de $\mathcal{L}_1$ y B y C son los puntos tales que el triángulo ΔABC es equilátero, P en AB y Q en BC, entonces B pertenece a $\mathcal{B}$. Para cada B del conjunto $\mathcal{B}'$, podemos construir todo un rayo de puntos que pertenecen a $\mathcal{L}$.

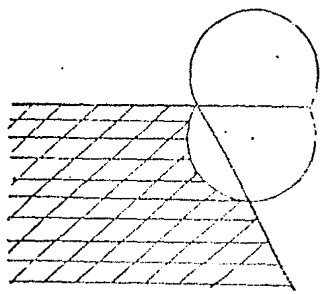
Si consideramos todos los puntos B's de $\mathcal{B}'$, la unión de los rayos respectivos nos dan la región sombreada de la figura.



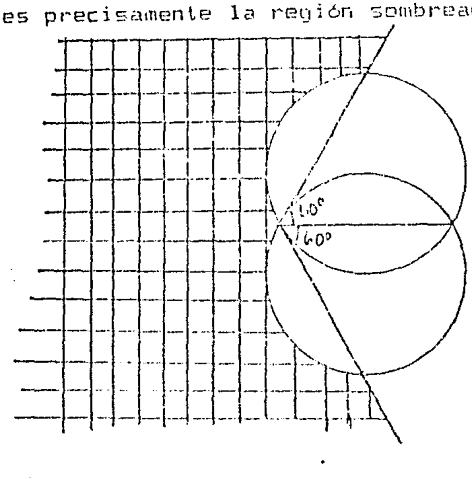




Ahora hacemos que B corra a lo largo del arco $\mathcal{C}$ entonces, por simetría obtenemos que todos los puntos de la región sombreada de la siguiente figura, también pertenecen a $\mathcal{L}$.



Finalmente como el punto B sólo pude estar en $\mathcal{C}$ o en $\mathcal{C}'$, $\mathcal{L}$ es precisamente la región sombreada de la siguiente figura




39)

a) Si n es un número entre 0 y $10^8-1 = 99\ 999\ 999$, entonces n tiene a lo más 8 cifras. Cada cifra vale a lo más 9. Por tanto el producto de las cifras de n es menor o igual a $8 \cdot 9 = 72$. Es decir $P(n) \leq 72$.

El número entre 0 y 72 para el que el producto de sus cifras es más grande es el 69. De manera que $P(P(n)) \leq 6 \cdot 9 = 54$.

El número entre 0 y 54 que tiene su producto de cifras más grande es el 49. Así es que $P(P(P(n))) \leq 4 \cdot 9 = 36$. Similarmente $P(P(P(P(n)))) \leq 3 \cdot 6 = 18$ y $P(P(P(P(P(n))))) \leq 9$.

b) Denotemos por $Q(n)$ a $P(P(P(P(P(n)))))$. Aseguramos que el 0 es el número de $\{0,1,2,...9\}$ para el que existen más n's tales que $Q(n) = 0$. Para probar ésto, bastará con que chequemos que más de la mitad de los números en $\{0,1,2,...,10^8\}$ cumplen que $Q(n) = 0$. Notemos que si n tiene un 0 en su expresión decimal, entonces $P(n) = 0$, $P(P(n)) = 0$ y $Q(n) = 0$. Por tanto si vemos que más de la mitad de los números en $\{0,1,2,...,10^8\}$ tiene algun 0 en su expresión decimal, habremos terminado. Es decir, tenemos que ver que al menos $(10^8 + 2)/2 = 5 \cdot 10^7 + 1$ números de $\{0,1,2,...,10^8\}$ tienen algún 0. O dicho de otra manera, a lo más $5 \cdot 10^7 - 1$ números de $\{0,1,2,...,10^8\}$ no tienen ningún 0.

Contaremos pues cuántos elementos del conjunto $\{0,1,2,...,10^8\}$ no tienen ningún 0.

Desde 0 a 9 hay 9 números sin 0

Desde 10 a 99 hay $81 = 9^2$ números sin 0 (hay que poner dos cifras y tenemos 9 opciones para cada una).

Desde 100 a 999 hay $9^3 = 729$ números sin 0

Desde 1000 a 9999 hay $9^4 = 6561$ números sin 0

Desde 10 000 a 99 999 hay $9^5 = 59\,049$ números sin 0

Desde 100 000 a 999 999 hay $9^6 = 531\,441$ números sin 0

Desde 1 000 000 a 9 999 999 hay $9^7 = 4\,782\,969$ números sin 0

Desde 10 000 000 a 99 999 999 hay $9^8 = 43\,046\,721$ números sin 0.

Sumando estas potencias de 9 obtenemos

$9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + 9^6 + 9^7 + 9^8 = 48\,427\,560$

entonces el número de números que no tienen ningún cero son 48 427 560, que son menos de la mitad de los números del conjunto $\{0,1,2,\ldots,10^8\}$. Por tanto los números del conjunto $\{0,1,2,\ldots,10^8\}$ que tienen al menos un cero en sus cifras es mayor que la mitad de todos los elementos del conjunto. Entonces de los elementos del conjunto $\{0,1,2,\ldots,9\}$, el cero es aquel para el que existen más n's en el conjunto $\{0,1,2,\ldots,10^8\}$ tales que $Q(n) = 0$.

c) Notemos que si $P(n) = 1$, entonces n es de la forma $n = \underbrace{11.......1}_{r\text{-veces}}$, por que si n tiene un digito que no sea 1, entonces este digito debería ser divisor de $P(n)$, pero $P(n) = 1$ no tiene divisores.

Si m es tal que $P(P(n)) = 1$, entonces $P(m)$ es de la forma $P(m) = \underbrace{11.......1}_{r\text{-veces}}$. Pero por lo que vimos en a) $P(m) \leq 72$. De manera que $P(m) = 1$ o $P(m) = 11$. No es posible que $P(m) = 11$ porque 11 es un número primo y $P(m)$ es producto de numeros menores que 10. Por tanto $P(m) = 1$.

Esto que probamos nos va a servir para determinar para cuáles n's, $Q(n) = 1$. Tomemos pues una n tal que $Q(n) = 1$. Entonces $P(P(P(P(P(n))))) = 1$. Por lo que probamos antes, aplicado a $m_1 = P(P(P(n)))$, tenemos que $P(P(m_1)) = 1$ implica que $P(m_1) = 1$. Es decir $P(P(P(P(n)))) = 1$. Aplicado otra vez lo del párrafo anterior con $m_2 = P(P(n))$, tenemos que $P(P(m_2)) = 1$ implica que $P(m_2) = 1$. Es decir $P(P(P(n))) = 1$ y, en consecuencia, $P(n) = 1$. Por tanto n es de la forma $n = \underbrace{11\ldots\ldots1}_{q\text{-vocos}}$.

Por tanto los únicos n's tales que $Q(n) = 1$ son 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111. Por tanto el 1 sólo proviene de 8 números a los que se les aplica Q.

Cualquier otro número, por ejemplo el 2, provine de al menos los siguientes números:

2, 12, 21, 121, 211, 112, 2111, 1211, 1121, etc.

que son más de 8.

Por tanto 1 es el número que proviene de menos n's cuando se aplica Q.

40) Como el número buscado debe cumplir que al pasar sus últimas dos cifras al principio y multiplicarlo por 10, el número se duplica, entonces el número que cumple con ésto, debe tener al número 0 o 5 en su ultima cifra.

Primero analizaremos el caso en que la última cifra es 0. Veamos que pasa si la penúltima cifra es 1.

$$\begin{array}{rr} m = & \cdots\cdots\cdots\cdots a10 \\ & \times \quad 2 \\ \hline 2m = & \cdots\cdots\cdots\cdots 20 \end{array}$$

Como 2m se obtiene quitándole las dos últimas a m, pasándolas al principio y aumentándo un 0, entonces $2m = 10\cdots\cdots\cdots a0$, De aquí que $a = 2$. Entonces

$$\begin{array}{rr} m = & \cdots\cdots\cdots\cdots b210 \\ & \times \quad 2 \\ \hline 2m = & \cdots\cdots\cdots\cdots 420 \end{array}$$

Por la misma razón, $b = 4$. Si continuamos este proceso, obtenemos el numero:

$$\begin{array}{r} 526\ 315\ 789\ 473\ 684\ 210 \\ \times \quad 2 \\ \hline 1052\ 631\ 578\ 947\ 368\ 420 \end{array}$$

La primera vez que podemos detenernos es cuando arriba aparece un 5 pero sin que "llevemos" nada porque 2m tiene que empezar con 10.

Si las últimas dos cifras son 2 y 0 es decir si terminan en 20, entonces siguiendo el mismo proceso que en el caso anterior, tendriamos que terminar cuando al multiplicar por dos la última cifra obtenida y sumar a lo mas 1 (el que posiblemente "llevemos"), llegamos al número 20. Pero ésto nunca va a ocurrir por que al multiplicar un digito por 2 y sumar uno, lo mas que podemos obtener es el número 19. Por tanto no es posible encontrar un número con las caracteristicas deseadas que tenga en sus últimas dos cifras al número 20.

De forma similar se concluye que tampoco es posible encontrar números con las caracteristicas del enunciado, que terminen en los números 30,40,...,90. Por tanto de los números terminados en 0 el número

526 315 789 473 684 210 ———————— (1)

es el menor.

Si la última cifra es el 5, supongamos ahora que la penúltima es el 0. Siguiendo el mismo proceso iterativo que en el caso anterior obtenemos el número

263 157 894 736 842 105 ———— (2)

Si la penúltima cifra es el 1, entonces por un proceso análogo obtenemos el número

789 473 684 210 526 315 ———— (3)

Razonando como antes es posible mostrar que no hay m's con las características deseadas que terminen en 25, 35, ..., 95.

Por tanto, los números más pequeños que cumplen las condiciones son (1), (2) y (3). Y como

263 157 894 736 842 105

es el menor de ellos, este número es el buscado.