

20133



# Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA DEMOSTRACION ELEMENTAL DE LA PROPIEDAD  
MEZCLANTE DE LA TRANSFORMACION LOGISTICA

T E S I S

Que para obtener el Titulo de

A C T U A R I O

P r e s e n t a

LUIS ANTONIO RINCON SOLIS

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

México, D. F.

1989



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# CONTENIDO

## 0 INTRODUCCION

## 1 PROPIEDAD MEZCLANTE Y ERGODICIDAD

- 1.1 *Algunos resultados de Probabilidad*
- 1.2 *Preservación de medida*
- 1.3 *Ergodicidad*
- 1.4 *Propiedad Mezclante*
- 1.5 *Intervalos y conjuntos diádicos*

## 2 DEMOSTRACION DE LA PROPIEDAD MEZCLANTE DE LA TRANSFORMACION $\triangle$

- 2.1 *Introducción*
- 2.2 *Primera demostración*
- 2.3 *Segunda demostración*

## 3 LA TRANSFORMACION LOGISTICA

- 3.1 *Introducción*
- 3.2 *La propiedad mezclante de la transformación logística*
- 3.3 *Aplicaciones*

## 4 CONCLUSION

## 0 INTRODUCCION

*El objetivo esencial del presente trabajo es presentar una demostración lo más sencilla y directa posible de la propiedad mezclante de la transformación logística.*

*La logística es una transformación continua del intervalo unitario en si mismo, con una representación analítica bastante simple pero que sin embargo es usada ampliamente en sistemas dinámicos para ejemplificar situaciones caóticas.*

*Caos en el sentido de movimiento irregular en sistemas determinísticos ha sido observado en una gran variedad de sistemas físicos y especial atención se le ha dado a sistemas en los cuales mediante la variación de un parámetro se obtienen rutas que llevan a estados caóticos. Como ejemplo podemos citar el ya famoso artículo de May (1976), en donde se analiza la transformación  $T_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$  y se obtienen regímenes caóticos cuando se hace variar el parámetro  $\lambda$ .*

*En general, las transformaciones continuas que van de un intervalo en si mismo estan siendo objeto de investigación en la actualidad ( véase por ejemplo el trabajo de Collet y Eckmann [5] ) debido a que las iteraciones de éstos mapeos son los ejemplos más simples y más ricos de sistemas dinámicos y en donde destaca notablemente la transformación logística.*

*El hecho de estudiar mapeos como el logístico se debe en buena parte al querer aislar y simplificar, para su mayor comprensión, las características y comportamientos*

de sistemas dinámicos más complejos.

Por otro lado, se han dado algunas pruebas de la propiedad que se demuestra aquí ( como en el artículo de Adler y Rivlin [1] sobre propiedades ergódicas de los polinomios de Chebyshev ) pero en general son complicadas y se dan en forma indirecta o bien como caso particular de transformaciones más complicadas y en contextos más generales. La demostración que se presenta en éste trabajo, en cambio, es directa, sencilla y sólo requiere el conocimiento de conceptos básicos de Teoría Ergódica.

Para un mejor entendimiento del trabajo se presenta a continuación el proceso de la prueba :

(a) Objetivo : Demostrar que el mapeo logístico

$$S(x) = 4x(1-x)$$

$$S(x) : [0,1] \rightarrow [0,1]$$



es mezclante respecto a la medida arcoseno, es decir, respecto a  $P(dx) = dx / \pi \sqrt{x(1-x)}$ .

(b) Se verifica primero que la transformación

$$T(x) = 1 - |1 - 2x|$$

$$T(x) : [0,1] \rightarrow [0,1]$$



es mezclante respecto a la medida de Lebesgue. Lo anterior se expone en el capítulo 2 y de hecho se dan dos pruebas.

(c) Después, en el capítulo 3 se demuestra un resul-

tado que dice que si  $T$  es mezclante respecto a  $P_T$  y  $\varrho$  es una función uno a uno, sobre y medible, entonces  $\varrho T \varrho^{-1}$  es mezclante respecto a la medida  $P_T \varrho^{-1}$ .

(d) La prueba concluye verificando que al tomar  $T(x) = 1 - |1 - 2x|$  y  $\varrho(x) = \sin^2(\frac{\pi}{2}x)$  entonces la composición  $\varrho T \varrho^{-1}$  resulta tener la expresión  $4x(1-x)$ , i.e. la transformación logística y  $P_T \varrho^{-1}$  resulta ser la medida arco-seno.

El objetivo ha sido también el entender la geometría de la transformación y el mecanismo de mezclado que ésta presenta, intentando con esto esclarecer la dinámica del mapeo logístico.

Finalmente, es necesario mencionar que debido a que la parte fundamental del trabajo es la presentación de la demostración, el material que se presenta en las primeras secciones es breve y solo tiene el propósito de determinar la notación y establecer las definiciones y resultados necesarios.

# 1 PROPIEDAD MEZCLANTE Y ERGODICIDAD

## 1.1 ALGUNOS RESULTADOS DE PROBABILIDAD

Se presentan a continuación algunos resultados de probabilidad a los que se hará referencia más adelante.

A.1 Definición. Sean  $(\Omega_1, \Sigma_1)$  y  $(\Omega_2, \Sigma_2)$  dos espacios medibles,  $T: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  es medible (medible  $\Sigma_1$ - $\Sigma_2$ ) si y sólo si  $T^{-1}A \in \Sigma_1$  para todo  $A \in \Sigma_2$ .

A.2 Proposición. Sea  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida en donde  $\Sigma = \sigma(\mathcal{C})$  con  $\mathcal{C}$  una clase de subconjuntos de  $\Omega$  y  $T: \Omega \rightarrow \Omega$  una transformación tal que  $T^{-1}A \in \Sigma$  para todo  $A \in \mathcal{C}$ , entonces  $T$  es medible.

Demostración.

Sea  $\mathcal{D} = \{D \in \Sigma : T^{-1}D \in \Sigma\}$ . Afirmación:  $\mathcal{D}$  es campo  $\sigma$ .

i)  $T^{-1}\Omega = \Omega \therefore \Omega \in \mathcal{D}$ .

ii)  $T^{-1}D \in \Sigma \Rightarrow (T^{-1}D)^c \in \Sigma \therefore T^{-1}D^c \in \Sigma$ .

iii)  $T^{-1}D_i \in \Sigma, i=1,2,\dots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} T^{-1}D_i \in \Sigma \therefore T^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i) \in \Sigma$ .

como  $\mathcal{D}$  es campo  $\sigma$  que contiene a  $\mathcal{C}$  y  $\Sigma = \sigma(\mathcal{C}) \Rightarrow \Sigma \subset \mathcal{D}$   
y por definición  $\mathcal{D} \subset \Sigma \therefore \mathcal{D} = \Sigma //$

A.3 Proposición. Sea  $(\Omega, \Sigma, P)$  un espacio de probabilidad, entonces para todo  $M, N, M_0, N_0 \in \Sigma$   
 $P((MN)^A (M_0 N_0)) \leq P(M^A M_0) + P(N^A N_0)$

Demostración.

Por definición  $A^A B = AB^c + A^c B$ , entonces

$MN^A M_0 N_0 = (M N M_0^c \cup M N^c M_0) \cup (M_0 N_0 M^c \cup M_0 N_0 N^c)$

término a término la siguiente contención es válida :

$$\in MM_0^c \cup NN_0^c \cup M_0M^c \cup N_0N^c$$

con lo cual se construye la desigualdad requerida. //

A.4 Proposición. Sea  $(\Omega, \Sigma, P)$  un espacio de probabilidad con  $\Sigma = \sigma(\mathcal{F}_0)$  y  $\mathcal{F}_0$  un campo de subconjuntos de  $\Omega$ , entonces para todo  $A \in \Sigma$  y  $\epsilon > 0$ , existe  $A_0 \in \mathcal{F}_0$  tal que  $P(A \Delta A_0) < \epsilon$ .

Demostración.

Sea  $\mathcal{D} = \{A \in \Sigma : \forall \epsilon > 0 \exists A_0 \in \mathcal{F}_0 \text{ tal que } P(A \Delta A_0) < \epsilon\}$ .

Afirmación :  $\mathcal{D}$  es una clase monótona.

Sea  $\{A_n\}$  una sucesión creciente en  $\mathcal{D}$ , entonces  $\lim_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

sea  $\epsilon > 0$  arbitraria, por hipótesis  $P(A_n \Delta A_n^0) < \frac{\epsilon}{2^n}$   $n = 1, 2, 3, \dots$

sea  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  y  $A_0 = \bigcup_{n=1}^N A_n^0$  y escójase  $N = N(A, \epsilon) \in \mathbb{N}$  tal que  $P(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) < \epsilon/2$ , entonces

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Delta \bigcup_{n=1}^N A_n^0) &= P\left[\left(\bigcup_{n=1}^N A_n \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n\right) \Delta \left(\bigcup_{n=1}^N A_n^0 \cup \emptyset\right)\right] \\ &\leq P\left(\bigcup_{n=1}^N A_n \Delta \bigcup_{n=1}^N A_n^0\right) + P\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n\right) < \sum_{n=1}^N P(A_n \Delta A_n^0) + \epsilon/2 \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \end{aligned}$$

$\therefore \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$  pues  $\bigcup_{n=1}^N A_n^0 \in \mathcal{F}_0$  y  $\epsilon > 0$  es arbitraria

$\therefore \mathcal{D}$  es una clase monótona que contiene a  $\mathcal{F}_0$ , por lo tanto,  $\sigma(\mathcal{F}_0) = \Sigma \subset \mathcal{D}$ , pero por definición de  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D} \subset \Sigma$

i.e.  $\Sigma = \mathcal{D}$ . //



## 1.2 PRESERVACION DE MEDIDA

A.5 Definición. Sea  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida, una transformación medible  $T: \Omega \rightarrow \Omega$  se dice que preserva la medida  $\mu$  si y sólo si  $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$  para todo  $A \in \Sigma$ .

La proposición (A.2) y el siguiente resultado establecen que para que una transformación preserve la medida es suficiente que la condición  $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$  se verifique sólo en un campo generador.

A.6 Proposición. Sea  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida tal que  $\Sigma = \sigma(\mathcal{F})$  con  $\mathcal{F}$  un campo de subconjuntos de  $\Omega$  y  $T: \Omega \rightarrow \Omega$  una transformación medible, si  $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$  para todo  $A \in \mathcal{F}$  entonces  $T$  preserva la medida  $\mu$ .

*Demostración.*

Sea  $\mathcal{D} = \{A \in \Sigma : \mu(T^{-1}A) = \mu(A)\}$ . Afirmación:  $\mathcal{D}$  es una clase monótona. Sea  $\{A_n\}$  una sucesión monótona en  $\mathcal{D}$ , supongamos creciente (analogamente decreciente), entonces  $\lim_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  y por lo tanto

$$\mu(T^{-1} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}A_n) = \lim_n \mu(T^{-1}A_n) = \lim_n \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

entonces como  $\mathcal{D}$  es una clase monótona que contiene a  $\mathcal{F}$ ,  $\sigma(\mathcal{F}) = \Sigma \subset \mathcal{D}$ , pero por definición  $\mathcal{D} \subset \Sigma$ , por lo tanto  $\Sigma = \mathcal{D}$ . //

En general se trabaja con transformaciones medibles y preservadoras de alguna medida  $\mu$  aunque se estudian también problemas concernientes a la existencia de medidas invariantes, sus características y la búsqueda de medidas equivalentes a una ya existente.

### 1.3 ERGODICIDAD

A.7 Definición. Sea  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida y  $T: \Omega \rightarrow \Omega$  una transformación que preserva la medida  $\mu$ ; un conjunto  $A \in \Sigma$  es invariante (estrictamente) si y sólo si  $T^{-1}A = A$ .

A.8 Definición. Sea  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida y  $T: \Omega \rightarrow \Omega$  una transformación que preserva la medida  $\mu$ ;  $T$  es ergódica si y sólo si para todo  $A \in \Sigma$  invariante  $\mu(A) = 0$  ó  $\mu(A) = 1$ .

Cuando se trabaje sobre un espacio de probabilidad ( $\mu(\Omega) = 1$ ), la condición  $\mu(A) = \mu^2(A)$  con  $A$  invariante, equivale a la ergodicidad y puede verse desde el punto de vista de independencia como el hecho de que  $T$  es ergódica si todo conjunto invariante es independiente consigo mismo.

El que una transformación sea ergódica significa que bajo una aplicación de ésta, casi todo el espacio cambia, es decir, casi nada permanece en su lugar de origen. Lo anterior se obtiene directamente de la definición considerando que si  $A$  es invariante, es decir, que si  $A$  es un conjunto que no cambia bajo la aplicación de  $T$ , entonces, según la definición,  $A$  no representa nada en medida, es decir,  $\mu(A) = 0$ , o bien es casi el total,  $\mu(A) = 1$ . Por lo tanto, la definición indica que no existen subsistemas propios mas pequeños, pues la trayectoria de todo conjunto  $A$  en  $\Sigma$  tal que  $\mu(A) > 0$  es igual a todo el espacio  $\Omega$ , salvo un conjunto de medida cero.

La ergodicidad es un concepto muy importante desde el punto de vista de la física y tiene su origen en la así llamada "hipótesis ergódica" de Boltzmann. El concepto está relacionado con la creación de la teoría molecular de los gases e inspirado por el problema del movimiento de un gas en una región cerrada.

## 1.4 PROPIEDAD MEZCLANTE

**A.9 Definición.** Sea  $(\Omega, \Sigma, P)$  un espacio de probabilidad y  $T: \Omega \rightarrow \Omega$  una transformación medible y preservadora de medida,  $T$  es mezclante (fuertemente) si y sólo si para todo  $A, B \in \Sigma$ ,  $\lim_n P(A \cap T^{-n}B) = P(A)P(B)$ .

Es importante señalar en la definición anterior, que la propiedad mezclante se define solo en espacios de probabilidad, pues en el caso  $\mu(\Omega) = +\infty$ , se llega a una contradicción tomando a  $A$  como un conjunto de medida positiva pero finita y a  $B = \Omega$ , con lo cual se obtiene  $\mu(A)\mu(B) = +\infty$  y  $\mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A) < +\infty$ .

La siguiente proposición establece que la propiedad mezclante es más fuerte que la ergodicidad.

**A.10 Proposición.**  $T$  mezclante  $\Rightarrow T$  ergódica.

*Demostración.*

Sea  $A$  invariante, como  $T$  es mezclante  $\lim_n P(A \cap T^{-n}A) = P(A)P(A)$ , por lo tanto  $P(A) = P^2(A)$ . //

Entonces,  $T$  mezclante implica que  $T$  es ergódica y es válido el sentido físico que se le había dado a las transformaciones ergódicas, es decir, hay un movimiento en el que casi nada queda en su lugar de origen, pero si además  $T$  es mezclante, este movimiento tenderá a ser uniforme, en el sentido de que el movimiento o cambio se dará por igual por todo el espacio.

Un sistema dinámico mezclante aunque totalmente determinístico en teoría, es imprevisible en la práctica, pues si se considera una región  $A$  de  $\Omega$  tan pequeña como se desee pero de medida positiva y  $B_1, B_2$  regiones arbitrarias del espacio, también con medida positiva, entonces se tendrá que:

$$\lim_n P(A \cap T^{-n} B_1) = P(A)P(B_1) > 0$$

$$\lim_n P(A \cap T^{-n} B_2) = P(A)P(B_2) > 0$$

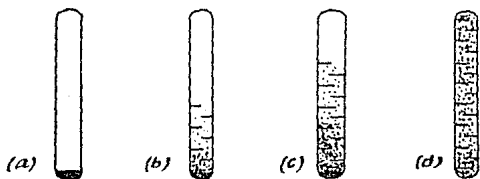
el evento  $A \cap T^{-n} B_i$  se interpreta como aquellos elementos de  $A$  tales que bajo  $n$  aplicaciones de  $T$ , estarán contenidos en el conjunto  $B_i$ , de esta forma siempre existirá un subconjunto de  $A$  (de medida positiva) tal que bajo  $n$  aplicaciones de  $T$  ( $n$  suficientemente grande) estará contenido en  $B_1$ , y también existirá otro subconjunto de  $A$  (también de medida positiva) tal que viajará a  $B_2$  al aplicarle  $T^n$ , sin importar el lugar donde se encuentren los conjuntos  $B_1$  y  $B_2$  en el espacio.

Así, tomando a  $A$  muy pequeña (i.e. todos los puntos de  $A$  están cercanos en algún sentido) se encontrará que existirán subconjuntos de  $A$  (de medida positiva) tales que viajarán casi a cualquier región del espacio que uno desee, imposibilitando de esta forma poder predecir si dos puntos de  $A$  continuarán estando juntos o se separarán.

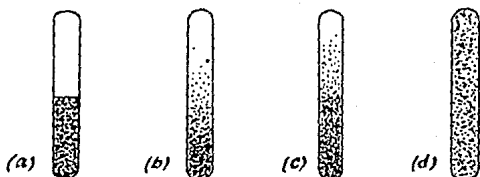
Los procesos de difusión en física, como los siguientes, proporcionan ejemplos de procesos mezclantes.

En un tubo de vidrio sellado se coloca un poco de bromo (gráficas siguientes), la primera gráfica muestra el tubo tomado inmediatamente después de retirarlo

de una mezcla de hielo seco y alcohol, el bromo se halla en su totalidad en el fondo del tubo en forma de sólido. A medida que el tubo se calienta, el bromo se licúa y evapora. El bromo, gas pardo, se desplaza lentamente hacia arriba, oscureciendo progresivamente el tubo hasta que la coloración se distribuye uniformemente.



Las siguientes cuatro gráficas muestran también un proceso mezclante, la difusión de una solución de sulfato de cobre en agua, al comenzar el experimento, primera gráfica, la solución de sulfato de cobre y agua forman dos capas bien diferenciadas, la segunda gráfica muestra el proceso 5 días más tarde, las dos restantes corresponden al experimento a los 37 días y 134 días después.



En el ejemplo anterior si consideramos que el volumen del sulfato de cobre y el agua es la unidad, entonces si  $A$  es el agua y  $B$  una región arbitraria del tubo, la proporción de moléculas de agua que estén en  $B$  bajo  $n$  aplicaciones de  $T$  (en este caso una aplicación de  $T$  correspondería a dejar transcurrir una unidad de tiempo) tenderá a ser la misma que la proporción de agua en todo el tubo, es decir

$$\frac{P(A \cap T^{-n}B)}{P(B)} \approx \frac{P(A)}{P(\Omega)} = P(A)$$

El ejemplo funcionaría igualmente si se pone una gota de tinta en un vaso con agua, dejando transcurrir un tiempo suficientemente grande, la tinta se mezclará uniformemente con el agua, dando a cada región del vaso una proporción uniforme del total de la tinta. Son ejemplos también de éste fenómeno la difusión de los olores en el aire o la mezcla de pinturas de colores diferentes. La explicación de todo esto la proporciona la teoría cinético-molecular de la materia al establecer el movimiento entre las moléculas.

La siguiente proposición es útil cuando se desea comprobar que una transformación es mezclante.

**A.11 Proposición.** Sea  $(\Omega, \Sigma, P)$  un espacio de probabilidad tal que  $\Sigma = \sigma(\mathcal{F})$  con  $\mathcal{F}$  un campo de subconjuntos de  $\Omega$ ,  $T: \Omega \rightarrow \Omega$  medible y preservadora de medida y tal que para todo  $A_0, B_0 \in \mathcal{F}$ ,  $\lim_n P(A_0 \cap T^{-n}B_0) = P(A_0)P(B_0)$  entonces  $T$  es mezclante.

*Demostración.*

Sean  $A, B \in \Sigma$  y  $\epsilon > 0$  arbitraria, por la prop. (A.4) existen  $A_0, B_0 \in \mathcal{F}$  tales que  $P(A \Delta A_0) < \epsilon$  y  $P(B \Delta B_0) < \epsilon$  por otro lado  $P(\bar{A} \Delta \bar{A}_0) = P(\bar{A} \Delta \bar{A}_0) = P(A \Delta A_0) < \epsilon$  y por la prop. (A.3)  $P((MN) \Delta (M_0 N_0)) \leq P(M \Delta M_0) + P(N \Delta N_0)$  para todo  $M, N, M_0, N_0 \in \Sigma$ ; además son válidas las siguientes relaciones:  $|P(E) - P(F)| \leq P(E \Delta F)$  y  $|P(A_0)P(B_0) - P(A)P(B)| < \epsilon$ , entonces

$$\begin{aligned} |P(A \cap \bar{A}_0 \cap \bar{B}) - P(A_0 \cap \bar{A}_0 \cap \bar{B}_0)| &\leq P((A \cap \bar{A}_0 \cap \bar{B}) \Delta (A_0 \cap \bar{A}_0 \cap \bar{B}_0)) \\ &\leq P(A \Delta A_0) + P(B \Delta B_0) < 2\epsilon \end{aligned}$$

y por hipótesis  $|P(A_0 \cap \bar{A}_0 \cap \bar{B}_0) - P(A_0)P(B_0)| < \epsilon$  para  $n > N \in \mathbb{N}$ . Resumiendo

$$\begin{aligned} |P(A \cap \bar{A} \cap \bar{B}) - P(A)P(B)| &\leq |P(A \cap \bar{A} \cap \bar{B}) - P(A_0 \cap \bar{A}_0 \cap \bar{B}_0)| \\ &\quad + |P(A_0 \cap \bar{A}_0 \cap \bar{B}_0) - P(A_0)P(B_0)| \\ &\quad + |P(A_0)P(B_0) - P(A)P(B)| \\ &< 2\epsilon + \epsilon + \epsilon = 4\epsilon. // \end{aligned}$$



## 1.5 INTERVALOS Y CONJUNTOS DIÁDICOS

La primera demostración de la propiedad mezclante de la transformación  $\Delta$  que se da en el siguiente capítulo supone conocidas las siguientes definiciones y proposiciones.

Sea  $\Omega = [0, 1)$  y  $w \in \Omega$ ,  $w$  puede ser expresado mediante su expansión binaria como  $w = \sum_{i=1}^{\infty} w_i/2^i$  con  $w_i = 0, 1$  también se escribirá  $w = 0.w_1w_2\dots$ . Esta representación no es única para los racionales con representación finita, pues para éstos existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $w = 0.w_1w_2\dots w_n$  y  $w_i = 0$  para  $i > n$ , por lo tanto sus dos representaciones son:

$$\begin{cases} 0.w_1w_2\dots w_n000\dots \\ 0.w_1w_2\dots 0111\dots \end{cases}$$

sin embargo como los racionales son un conjunto numerable, si se usa la medida de Lebesgue, su medida es cero.

**A.12 Definición.** Considerando la expresión  $w = 0.w_1w_2w_3\dots$  con  $w_i = 0, 1$  se define un intervalo diádico de orden  $m$  como un conjunto de la forma  $D_{j,m} = \{w: w_1 = w_1^j, \dots, w_m = w_m^j\}$  con  $w_i^j = 0, 1$  para  $i = 1, 2, \dots, m$  y  $m < +\infty$

El índice  $m$  indica el número de coordenadas que están "sujetas" en la expansión binaria, es decir,  $w \in D_{j,m}$  si su primera coordenada  $w_1$  es  $w_1^j$ , su segunda coordenada  $w_2$  es  $w_2^j$ , etc. Como se considerarán uniones de intervalos diádicos, el índice  $j$  distinguirá los intervalos, así,  $D_{i,n} = \{w: w_1 = w_1^i, \dots, w_n = w_n^i\}$  será el  $i$ -ésimo intervalo diádico y será de orden  $n$ .

Estrictamente hablando, el intervalo  $D_{i,n}$  es un conjunto de la forma  $[0.w_1^i \dots w_n^i 000 \dots, 0.w_1^i \dots w_n^i 111 \dots]$  pero por cuestiones técnicas se le considerará sin el extremo derecho.

**A.13** Definición. Se define un conjunto diádico como la unión finita de intervalos diádicos, es decir,  $D$  es un conjunto diádico si  $D = \bigcup_{i=1}^n D_{i,m_i}$  con  $D_{i,m_i}$  el  $i$ -ésimo intervalo diádico de orden  $m_i$ .

Se siguen a continuación tres proposiciones sencillas de verificar y que serán de utilidad en la parte siguiente.

**A.14** Proposición. Para todo conjunto diádico  $D$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $D$  es la unión finita de intervalos diádicos todos de orden  $m$ .

**A.15** Proposición. La clase de subconjuntos formada por uniones finitas de intervalos diádicos, denotada por  $\mathcal{D}$ , es campo.

**A.16** Proposición.  $\sigma(\mathcal{D}) = \delta\mathcal{B}_{[0,1]}$ .

## 2 DEMOSTRACION DE LA PROPIEDAD MEZCLANTE DE LA TRANSFORMACION

### 2.1 INTRODUCCION

**8.1** Proposición. Sean  $\Omega = [0, 1)$ ,  $\Sigma = \mathcal{B}[0, 1)$  y  $\rho(dx) = dx$  la medida de Lebesgue; se define  $T: \Omega \rightarrow \Omega$  como sigue:

$$T w = \begin{cases} 2w & 0 \leq w < 1/2 \\ 2(1-w) & 1/2 < w < 1 \end{cases}$$

Entonces  $T$  es mezclante.



Se dan en este capítulo dos demostraciones de la proposición anterior. La primera de ellas se basa en una idea tomada de las notas sobre "Teoría Ergódica y Entropía" de Mier Smorodinsky que aparece en la bibliografía [16], en éste libro se da la prueba para la transformación diádica y fácilmente puede modificarse para ser aplicada a la transformación que nos interesa. La demostración es bastante sencilla, analíticamente es muy clara, pero se pierde el sentido geométrico de la transformación.

La segunda prueba se ha desarrollado precisamente tratando de hacer ver la geometría de la transformación, se toma un intervalo  $A$  y se analiza la forma en que el conjunto  $T^n A$  se reparte en todo el espacio.

En términos de puntos, aplicar una vez esta transformación a  $w = 0.w_1 w_2 \dots$  equivale de manera general a multiplicar por 2 y por lo tanto a eliminar el primer dígito de  $w$ . De modo que si aplicamos  $n$  veces  $T$ , se perderán los primeros  $n$  dígitos. Así, si  $w$  es un número racional, el conjunto  $\{w, T w, T^2 w, \dots\}$  será finito y si  $w$  es irracional, la órbita de  $w$  será un conjunto denso en  $[0, 1)$ .

## 2.2 PRIMERA DEMOSTRACION

Primera mente,  $T$  preserva la medida ya que si  $w = 0.w_1w_2\dots$  entonces

$$T^{-1}w = \begin{cases} 0.0w_1w_2\dots \\ 0.1(1-w_1)(1-w_2)\dots \end{cases}$$

y en general por medio de inducción sobre  $n$ , se puede demostrar que si  $D_{j,m}$  es un intervalo diádico, entonces

$$T^{-n}D_{j,m} = \{w: w_n = 0, w_{n+1} = w_1^j, \dots, w_{n+m} = w_m^j\} \\ + \{w: w_n = 1, w_{n+1} = 1-w_1^j, \dots, w_{n+m} = 1-w_m^j\}$$

y por lo tanto  $P(T^{-n}D_{j,m}) = (\frac{1}{2})^{m+n} + (\frac{1}{2})^{m+n} = (\frac{1}{2})^m = P(D_{j,m})$ .

Si ahora se toma a  $D$  un elemento de  $\mathcal{D}$  (el campo de conjuntos diádicos), éste puede ser expresado como una unión finita y ajena de intervalos diádicos, entonces

$$P(T^{-n}D) = P(T^{-n}\sum_j D_{j,m_j}) = P(\sum_j T^{-n}D_{j,m_j}) = \sum_j P(D_{j,m_j}) = P(D)$$

Resumiendo,  $T$  preserva la medida en el campo  $\mathcal{D}$  y además  $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{B}_{[0,1]}$ , entonces por la proposición (A.6),  $T$  preserva la medida.

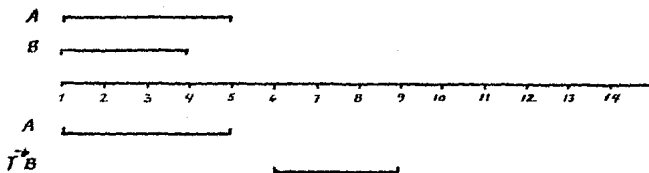
Análogamente se procede en la demostración de la propiedad mezclante, primero se verifica la validez sobre el campo  $\mathcal{D}$  y luego se extiende a  $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{B}_{[0,1]}$ .

Como se observó anteriormente, si el intervalo diádico  $D_{j,m}$  tiene "sujetas" o "amarradas" las primeras  $m$  coordenadas de un número en expansión binaria, entonces  $T^{-n}D_{j,m}$  es una unión ajena de dos clases de conjuntos que tienen  $(m+n)$

Coordenadas "sujetas" pero recorridas  $(n-1)$  posiciones. De esta forma, si se tienen dos intervalos diádicos  $D_{1,m_1}$  y  $D_{2,m_2}$ , y si se toma un número natural  $n$  tal que  $n > m_1$ .  $D_{1,m_1}$  tendrá las primeras  $m_1$  coordenadas "sujetas" y  $T^n D_{2,m_2}$  tendrá  $(m_2+1)$  coordenadas "sujetas" pero recorridas  $(n-1)$  posiciones,  $n-1 > m_2$ , así, los conjuntos  $D_{1,m_1}$  y  $T^n D_{2,m_2}$  no tendrán coordenadas "sujetas" comunes y por lo tanto serán independientes.

$$P(D_{1,m_1} \cap T^n D_{2,m_2}) = (1/2)^{m_1} (1/2)^{m_2} = P(D_{1,m_1}) \cdot P(D_{2,m_2})$$

El siguiente esquema muestra el caso  $m_1=5$ ,  $m_2=4$  y  $n=6 > m_1$ .



De esta misma forma, si se tienen dos conjuntos que son cada uno de ellos, uniones finitas de intervalos diádicos, por la proposición (A.14), éstos pueden escribirse como una unión finita de intervalos de un mismo orden, digamos  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente; entonces, siguiendo el mismo razonamiento:

$$P(\cup_i D_{i,m_1} \cap T^n \cup_j D_{j,m_2}) = P(\cup_i D_{i,m_1}) \cdot P(\cup_j D_{j,m_2}) \quad n > m_1$$

por lo tanto,  $T$  es mezclante en el campo  $\mathbb{D}$  y  $\sigma(\mathbb{D}) = \mathcal{B}_{[0,1]}$ , por la proposición (A.11) finalmente  $T$  es mezclante.

## 2.3 SEGUNDA DEMOSTRACION

Primero se parte a  $\Omega = [0,1)$  de la siguiente forma

$$[0,1) = \sum_{m=0}^{2^n-1} \left[ \frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n} \right) \quad n=0,1,2,\dots$$

Esta partición consta de  $2^n$  elementos cada uno de longitud  $1/2^n$ .

Si  $B = [a,b) \neq \emptyset$  está contenido en  $[0,1)$ ,  $T^n B$  intersectado con cualquier conjunto de la partición es distinta del vacío; más aún, dicha intersección es de la misma longitud para cada intervalo de la partición, a saber

$$P(T^n B \cap \left[ \frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n} \right)) = \frac{P(B)}{2^n} \quad m=0,1,2,\dots,2^n-1$$

Esta igualdad ya expresa por sí misma la propiedad mezclante de la transformación y puede interpretarse al menos desde dos puntos de vista:

a) La igualdad dice que  $T^n B$  es independiente con cualquier elemento de la partición, lo cual equivale a decir que  $T$  es mezclante para el tipo de conjuntos que forman la partición, pero como se verá más adelante, con esto es suficiente, es decir,  $T$  es mezclante.

b) Un segundo punto de vista interpretaría a dicha igualdad como el hecho de que  $T^n$  reparte a  $B$  por todo el espacio en forma uniforme, es decir,  $T^n B$  se reparte equitativamente entre los  $2^n$  conjuntos de la partición. Por lo tanto, como  $T$  reparte,  $P(A \cap T^n B)$  será una proporción de  $P(T^n B) = P(B)$ , es decir, aquellos elementos de  $T^n B$  que tienen como origen el conjunto  $A$ , pero como la repartición es uniforme, la proporción será  $P(A)$ , es decir,  $P(A)P(B)$ .

A continuación se verifica la validez de la igualdad.

Sea  $B = [a, b] \subset [0, 1]$  con  $a = 0.a_1 a_2 \dots$  y  $b = 0.b_1 b_2 \dots$ ,  $a < b$ , entonces  $\bar{T}^n B$  se expresa como la siguiente unión disjunta de intervalos (no considerando la inclusión o exclusión de los extremos):

$$\begin{aligned} \bar{T}^n B = & \sum_{\substack{x_i = 0, 1 \\ i = 1, \dots, n-1}} (0.x_1 \dots x_{n-1} 0 a_1 a_2 \dots, 0.x_1 \dots x_{n-1} 0 b_1 b_2 \dots) \\ & + \sum_{\substack{x_i = 0, 1 \\ i = 1, \dots, n-1}} (0.x_1 \dots x_{n-1} 1 (1-b_1)(1-b_2) \dots, 0.x_1 \dots x_{n-1} 1 (1-a_1)(1-a_2) \dots) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\bar{T}^n B$  consta de  $2(2^{n-1}) = 2^n$  intervalos disjuntos, cada uno de ellos de longitud  $(b-a)/2^n = P(B)/2^n$ . Más aún, todo conjunto de la partición de  $[0, 1]$  contiene uno y sólo un intervalo de la forma anterior. La razón es la siguiente: como en la posición  $n$ , un tipo de intervalo tiene un cero y el otro tipo de intervalo tiene un uno, se puede hacer una generalización de los dos tipos de intervalos y considerarlos de la forma  $(0.x_1 \dots x_n a_1 a_2 \dots, 0.x_1 \dots x_n b_1 b_2 \dots)$  y para poder comparar éstos intervalos con los de la partición es necesario llevarlos al sistema decimal.

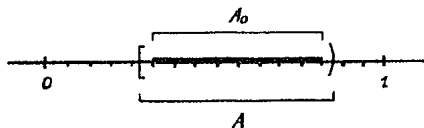
Si se transforman las  $n$  primeras coordenadas al sistema decimal se obtiene un número de la forma  $m/2^n$  para alguna  $m = 0, 1, \dots, 2^n - 1$  y la razón es que existe una relación biunívoca entre éstos números y las posibles combinaciones de ceros y unos en  $n$  lugares. Al transformar las coordenadas restantes, es decir, a partir de la  $(n+1)$ , el número que se obtiene es mayor o igual a cero pero a lo sumo  $1/2^n$ , por lo tanto

$$(0.x_1 \dots x_n a_1 a_2 \dots, 0.x_1 \dots x_n b_1 b_2 \dots) \subset \left[ \frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n} \right)$$

De esta forma,  $\bar{T}_B^n$  consta de  $2^n$  intervalos, cada uno de ellos contenido en uno y sólo uno de los elementos de la partición de  $[0,1)$  y todos de la misma longitud, de donde se sigue que

$$P(\bar{T}_B^n \cap [\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n})) = P(B)/2^n$$

Sea ahora  $A = [\alpha, \beta) \subset [0,1)$  con  $\alpha < \beta$  y  $[0,1) = \sum_{m=0}^{2^n-1} [\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n})$ ,  $A$  puede ser aproximado tanto como se quiera por aquellos intervalos de la partición de  $[0,1)$  que están contenidos en  $A$ ; esta aproximación puede ser tan exacta como se desee haciendo  $n$  suficientemente grande. Sea  $A_0$  la aproximación de  $A$  y sea  $a_0 = a_0(A, n) \in \mathbb{N}$  el número de intervalos de la partición que aproximan a  $A$ .



Entonces  $|P(A) - P(A_0)| < \epsilon$  para  $n \geq N \in \mathbb{N}$  con  $P(A_0) = a_0/2^n$  y además  $P(A_0 \cap \bar{T}_B^n) = \frac{a_0}{2^n} P(B)$ , por lo tanto

$$|P(A \cap \bar{T}_B^n) - P(A)P(B)| \leq |P(A \cap \bar{T}_B^n) - P(A_0 \cap \bar{T}_B^n)| + |P(A_0 \cap \bar{T}_B^n) - P(A)P(B)|$$

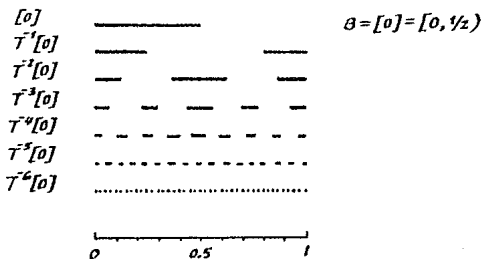
Como  $A_0$  aproxima a  $A$ , los dos términos de la derecha son cada uno menor que  $\epsilon$  si  $n \geq N \in \mathbb{N}$ , por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A \cap \bar{T}_B^n)$  es igual a  $P(A)P(B)$  para conjuntos  $A, B$  de la forma  $[a, b)$ .



La propiedad es válida también para conjuntos  $A = \bigcup_{i=1}^K A_i$  y  $B = \bigcup_{i=1}^K B_i$  con  $A_i$  y  $B_i$  de la forma  $[a, b) \subset [0, 1)$  pues claramente  $A$  y  $B$  pueden ser expresados como una unión finita y ajena de intervalos de la misma forma y si se utiliza la ley distributiva de uniones e intersecciones finitas de conjuntos, este caso se reduce al anterior. Y como la clase de uniones finitas de intervalos de la forma  $[a, b) \subset [0, 1)$  forma un campo generador de  $\mathcal{B}_{[0,1)}$  se utiliza la proposición (A.11) se concluye que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A \cap T^{-n} B) = P(A)P(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{B}_{[0,1)}$$

El esquema siguiente ilustra el mecanismo de mezclado de la transformación  $\nabla \Delta$ . Se observa la forma en la que el conjunto  $T^n B$  se va distribuyendo uniformemente por todo el espacio.

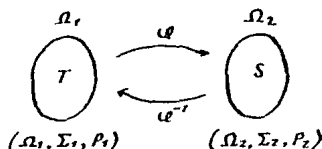


### 3 LA TRANSFORMACION LOGISTICA

#### 3.1 INTRODUCCION

Dado lo anterior sabemos ahora que la transformación  $\Delta$  es mezclante, lo que resta hacer es relacionar esta transformación con la logística. Esto se logra mediante la definición de una función  $\varphi: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ , uno a uno, sobre y medible; para el caso que nos ocupa se tomará  $\Omega_1 = \Omega_2 = [0,1)$ . Después, con el conjunto  $\Omega_2$ , la función  $\varphi$  y el espacio de probabilidad  $(\Omega_1, \Sigma_1, P_1)$  se construye otro espacio de probabilidad de la siguiente forma: se define  $\Sigma_2 = \{A_2 \subset \Omega_2: \varphi^{-1}A_2 \in \Sigma_1\}$  y  $P_2(A_2) = P_1(\varphi^{-1}A_2)$ . Por construcción  $(\Omega_2, \Sigma_2, P_2)$  es un espacio de probabilidad.

Ahora, como  $T: \Omega_1 \rightarrow \Omega_1$  y  $\varphi: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ , se define  $S = \varphi T \varphi^{-1}$ ,  $S: \Omega_2 \rightarrow \Omega_2$ , la expresión de  $S$  es clara pues al aplicar  $\varphi^{-1}$  se va del espacio  $\Omega_2$  al espacio  $\Omega_1$ , donde está definida  $T$ , y después de aplicar ésta, mediante la  $\varphi$  se regresa al espacio  $\Omega_2$ .



Debido a la forma de  $S$ ,  $S^n = \varphi T^n \varphi^{-1}$ , de donde se puede sospechar que lo que haga  $T$  (mezcla) lo hará también  $S$  (mezcla). Tomando a la transformación  $T$  del capítulo anterior y una  $\varphi$  adecuada se obtendrá que  $S$  será el mapeo logístico, y mediante un teorema que se probará enseguida se sabrá que si  $T$  es mezcla entonces  $S = \varphi T \varphi^{-1}$  también lo es.

### 3.2 LA PROPIEDAD MEZCLANTE DE LA TRANSFORMACION LOGISTICA

En esta parte se presenta el resultado que nos llevará finalmente a concluir que la transformación logística es mezclante.

**C.1 Proposición.** Sean  $(\Omega_1, \Sigma_1, P_1)$  un espacio de probabilidad,  $T: \Omega_1 \rightarrow \Omega_1$  una transformación y  $\varrho: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  una función uno a uno, sobre y medible. Se construye el espacio de probabilidad  $(\Omega_2, \Sigma_2, P_2)$  de la siguiente forma:  $\Sigma_2 = \{A_2 \subset \Omega_2 : \varrho^{-1}A_2 \in \Sigma_1\}$  y  $P_2(A_2) = P_1(\varrho^{-1}A_2)$  para todo  $A_2 \in \Sigma_2$  y se define  $S = \varrho T \varrho^{-1}: \Omega_2 \rightarrow \Omega_2$ , entonces si  $T$  es mezclante también  $S$  lo es.

*Demostración.*

Se verifica primero que  $S$  preserva la medida  $P_2$ :

$$\begin{aligned} P_2(S^{-1}A_2) &= P_2(\varrho T^{-1} \varrho^{-1}A_2) = P_1(\varrho^{-1} \varrho T^{-1} \varrho^{-1}A_2) = P_1(T^{-1} \varrho^{-1}A_2) \\ &= P_1(\varrho^{-1}A_2) = P_2(A_2) \end{aligned}$$

Y ahora se prueba que  $S$  es mezclante:

Si  $S = \varrho T \varrho^{-1}$  entonces  $S^n = \varrho T^n \varrho^{-1}$ , sean  $A_2, B_2 \in \Sigma_2$ ,

$$P_2(A_2 \cap S^{-n}B_2) = P_1(\varrho^{-1}(A_2 \cap \varrho T^{-n} \varrho^{-1}B_2)) = P_1(\varrho^{-1}A_2 \cap T^{-n} \varrho^{-1}B_2)$$

como  $\varrho^{-1}A_2$  y  $\varrho^{-1}B_2 \in \Sigma_1$  y  $T$  es mezclante, entonces

$$P_2(A_2 \cap S^{-n}B_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_1(\varrho^{-1}A_2) P_1(\varrho^{-1}B_2) = P_2(A_2) P_2(B_2). //$$

Sea  $T$  como en el capítulo anterior y  $\varrho(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  para  $x \in [0,1)$ , se demostrará ahora que la  $T$  y la  $\varrho$  así definidas generan a la transformación logística, es decir,  $S(y) = \varrho T \varrho^{-1}(y) = 4y(1-y)$ .

Como  $\varrho^{-1}(y) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{y}$ , entonces al aplicar  $T$  a  $\varrho^{-1}$  se

deben distinguir dos casos :

para la 1ª mitad del intervalo :  $T\bar{u}^1(y) = 2\left(\frac{\pi}{4} \arcsen \sqrt{y}\right)$

para la 2ª mitad del intervalo :  $T\bar{u}^1(y) = 2\left(1 - \frac{\pi}{4} \arcsen \sqrt{y}\right)$

al aplicar luego  $\varrho$  se obtiene :

$$\varrho T\bar{u}^1(y) = \begin{cases} \text{sen}^2(2 \arcsen \sqrt{y}) \\ \text{sen}^2(\pi - 2 \arcsen \sqrt{y}) \end{cases}$$

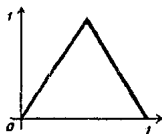
pero aplicando la fórmula  $\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}(x)$  en el segundo caso, se encuentra que  $\varrho T\bar{u}^1$  se expresa como  $\text{sen}^2(2 \arcsen \sqrt{y})$ , ahora se aplica la fórmula  $\text{sen } 2x = 2 \text{sen } x \cos x$  y se obtiene :

$$\begin{aligned} S(y) &= \varrho T\bar{u}^1(y) = 4 \text{sen}^2(\arcsen \sqrt{y}) (1 - \text{sen}^2(\arcsen \sqrt{y})) \\ &= 4y(1-y) \end{aligned}$$

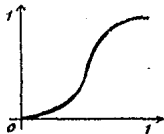
Finalmente, como  $T$  es mezclante y  $\varrho$  satisface las condiciones del teorema, se concluye que la transformación logística es mezclante respecto a la medida inducida por la función  $\varrho$ , que es la medida arco-seno :

$$P_2([a, b]) = \int_a^b (\pi \sqrt{y(1-y)})^{-1} dy = \frac{2}{\pi} (\arcsen \sqrt{b} - \arcsen \sqrt{a})$$

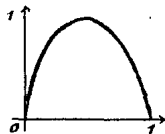
Las siguientes gráficas de las transformaciones  $T$ ,  $\varrho$  y  $S$  ayudan a visualizar el proceso.



$$T(x) = 1 - |1 - 2x|$$



$$\begin{aligned} \varrho(x) &= \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ \bar{\varrho}(x) &= \frac{2}{\pi} \arcsen \sqrt{x} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} S(x) &= 4x(1-x) \\ \bar{S}(x) &= \varrho T\bar{u}^1(x) \end{aligned}$$

### 3.3 APLICACIONES

La logística es una transformación que, como se me menciona en el artículo de May, debido a su simplicidad podría ser presentada en los primeros años a los estudiantes de matemáticas, como un ejemplo típico de un sistema totalmente determinístico en donde se observa que la dinámica de la transformación puede ser caótica y por lo tanto imprevisible en su evolución. De hecho ha servido como ejemplo de ruta al caos.

Una aplicación importante del mapeo logístico es cuando se usa como generador de números aleatorios, véase por ejemplo el trabajo de Ulam y von Neumann [19], en donde iterando esta transformación se obtiene una sucesión de números en  $(0,1)$  con función de densidad continua  $f(x) = \frac{1}{\pi} (x(1-x))^{-1/2}$ .

La propiedad mezclante es una característica interesante de las transformaciones, pues un mapeo con ésta propiedad (tan sencillo como el que se estudia en éste trabajo) puede asemejar el comportamiento a través del tiempo de fenómenos físicos como los mencionados anteriormente, aun cuando éstos presenten dinámica bastante compleja.

#### 4 CONCLUSION

El proceso que se ha seguido aquí para demostrar la propiedad mezclante de la transformación logística puede aplicarse de manera general a otros tipos de transformaciones, es decir, para demostrar que el mapeo  $S$  es mezclante se tendría que buscar una transformación  $T$  (de la cual conozcamos cierta esta propiedad o bien sea fácil verificarla) y una función  $\mathcal{Q}$  (uno a uno, sobre y medible) tales que mediante éstas dos funciones se genere en la forma  $\mathcal{Q}T\mathcal{Q}^{-1}$  la transformación original  $S$ .

Esta forma de generar transformaciones mezclantes (bajo diferentes medidas de probabilidad) puede ser iterativa e incluso se pueden aplicar distintas funciones  $\mathcal{Q}$ , es decir, si  $T$  es mezclante y  $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_m$  son funciones uno a uno, sobre y medibles, entonces

$$S = \mathcal{Q}_1^{n_1} \dots \mathcal{Q}_m^{n_m} T \mathcal{Q}_m^{-n_m} \dots \mathcal{Q}_1^{-n_1} \quad n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$$

será mezclante respecto a la medida generada por las distintas funciones  $\mathcal{Q}$ , es decir

$$P_S(A) = P_T(\mathcal{Q}_m^{-n_m} \dots \mathcal{Q}_1^{-n_1} A)$$

en donde  $P_S(\cdot)$  es la medida definida para la transformación  $S$  y  $P_T(\cdot)$  la medida respectiva para  $T$ .

Por otro lado, la transformación logística ha sido objeto de referencia en gran cantidad de trabajos concernientes a los sistemas dinámicos y al caos, y de acuerdo a lo que se ha visto en el presente trabajo, la transformación  $T = \bigwedge$  es isomorfa al mapeo logístico y por lo

tanto heredera del comportamiento y la esencia de éste. Lo anterior lleva a pensar que dicho mapeo sirve igualmente como transformación para ejemplificar situaciones que se han observado en el mapeo logístico; además resulta más simple su manipulación, pues aunque se divida en dos partes, se trabaja siempre con términos lineales.

De hecho, como el mapeo  $\triangleleft$  resulta ser una simplificación de la logística, algunas características intrínsecas del mapeo logístico pueden ser calculadas de manera indirecta a través de la transformación  $\triangleleft$ , como es el caso de la entropía.

Finalmente, un problema puramente matemático sería el de caracterizar de manera general a las transformaciones generadas de la forma  $\mathcal{L}T\mathcal{Q}^{-1}$ , de lo cual existen algunos resultados aislados.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Adler, Rivlin (1964) : "Ergodic and mixing properties of Chebyshev polynomials". *Proc. Amer. Math. Soc.* 15, 794-796.
- [2] Billingsley (1965) : "Ergodic theory and information". Wiley.
- [3] Breiman (1968) : "Probability". Addison-Wesley.
- [4] Brolin (1965) : "Invariant sets under iteration of rational functions". *Arkiv för matematik* Band 6 nr 6.
- [5] Collet, Eckmann (1980) : "Iterated maps on the interval as dynamical systems". Birkhäuser. Boston.
- [6] Ciencias Físicas. Introducción Experimental. IPS.
- [7] Halmos (1960) : "Lectures on ergodic theory". Chelsea.
- [8] José (1983) : "Ergodicity and density of states in a 1D crystal". *Math. Gen.* 16.
- [9] Lasota, Yorke (1973) : "On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations". *Trans. Amer. Math. Soc.* 186.
- [10] Li, Yorke (1978) : "Ergodic transformations from an interval into itself". *Trans. Amer. Math. Soc.* 235.
- [11] May (1976) : "Simple mathematical models with very complicated dynamics". *Nature* 261, 459-467.
- [12] Petersen (1983) : "Ergodic theory". Cambridge Univ. Press.
- [13] Ruelle (1977) : "Applications conservant une mesure absolument continue par rapport à  $dx$  sur  $[0,1]$ ". *Commun. Phys. Math.* 55, 47-51.
- [14] Sastre, Mansilla (1988) : "Modelación matemática de sistemas biológicos". CENIC.



- [15] Smítal (1988) : " On functions and functional equations ".  
Adam Hilger.
- [16] Smorodinsky (1971) : " Ergodic theory. Entropy ". Lecture  
Notes in Math. Springer-Verlag.
- [17] Szlenk (1979) : " Teoría Ergódica ". CINVESTAV . IPN .
- [18] Ulam , von Neumann (1947) : " On combination of stochastic  
and deterministic processes ".  
Bull. Amer. Math. Soc. (Abstr.)  
53 , 120 .
- [19] von Neumann : " Various techniques used in connection  
with random digits " .