2 ej 2

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORIA DE DISTRIBUCIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

JAIME AGUILAR ORTIZ

MEXICO, D. F. 1989

INDICE

INTRODUCCION

Frecuentemente en los cursos de Física se escucha la expresión "Consideremos que la delta de Dirac es una función entonces ... ". En la Física hay un momento en que se introduce la delta de Dirac, un concepto que sirvío para describir cargas eléctricas, masas puntuales, impulsos instantáneos y otros fenómenos . La delta de Dirac parecía tener propiedades parecidas a las que tienen algunas funciones, es decir , como que se podía derivar, integrar y multiplicar por constantes o ciertas funciones. Schwartz en la introducción de su tratado " Théorie des Distributions" menciona esto, y afirma que se ha hecho de la delta de Dirac y otras cuestiones parecidas, todo un cálculo operacional que no es formal aunque funciona. Se propone formalizar estas ideas introduciendo el concepto de función generalizada o distribución, donde un caso particular es la delta de Dirac.

La idea de funciones generalizadas tienen muchos antecedentes, estos ya se encuentran en los comienzos del siglo XIX con los trabajos de Fourier en la búsqueda de soluciones a ecuaciones diferenciales, en el cálculo de variaciones y en la teoría espectral entre otras ramas. Trabajos realizados por matemáticos como Cauchy, Riemann, Sobolev y Wierstrass. Así, el mérito de la creación de la Teoría de distribuciones no es de un sólo hombre, pero es Schwartz el primero que hace un estudio sistemático de estos objetos.

Con toda la herramienta que surgió de estas investigaciones se pudo estudiar problemas viejos a partir de nuevas técnicas, como en el siglo XVII con la creación del cálculo se pudieron estudiar y generalizar en forma adecuada problemas surgidos tiempo atrás.

Un ejemplo de esto en la Teoría de Distribuciones es el de la función de Green que siempre tuvo una formulación muy ambigua.

El uso principal de la Teoría de Distribuciones está en las soluciones a ecuaciones diferenciales, problemas de la vida real, por lo tanto se buscan soluciones que sean realmente funciones.

Surgen de esta manera las siguientes preguntas

¿ Cuándo una distribución es una función?

¿ Qué tanto una distribución se parece a una función?

En este trabajo se estudian un poco estas preguntas, introduciendo el concepto de FRENTE DE ONDA o espectro singulsar de una distribución desarrollado por Lars Hörmander en los años sesenta y setenta.

Por medio del frente de onda de una distribución se puede ver cuando localmente la distribución está dentro de cierto espacio de funciones que son las generalmente utilizadas en ecuaciones diferenciales. Este concepto está muy relacionado con la inversión de los operadores diferenciales, como se verá el el capítulo 4, de ahí el nombre de espectro singular que indica el conjunto de puntos para los cuales no se pueden invertir ciertos operadores diferenciales.

El estudio sólo se hará en los operadores diferenciales y no en forma general (operadores pseudodiferenciales), con el fin de lograr una mayor visualización. Tampoco se hace un estudio sobre la búsqueda de soluciones a ecuaciones diferenciales y los operadores diferenciales que se utilizarán tendrán como coeficientes a funciones de clase C^{∞} .

Es pertinente mencionar que los trabajos realizados en esta dirección tienen limitaciones principalmente en la búsqueda de soluciones a ecuaciones diferenciales con coeficientes no constantes. Existen ecuaciones diferenciales en la teoría de variable compleja, que no tienen soluciones en la teoría de distribuciones desarrollada por Schwartz ver[8], situación que no se da en las ecuaciones diferenciales que tienen como coeficientes a constantes, en donde el teorema de Melgrange (1054) afirma la existencia de soluciones en el espacio de distribuciones ver[1].

La finalidad de este trabajo es el estudio del frente de onda de una distribución y el análisis sobre donde una distribución es localmente de clase C^{∞} . Se dan las principales propiedades que surgen del concepto de frente de onda y algunos ejemplos.

Los tres primeros capítulos desarrollan los conceptos y resultados fundamentales de la teoría de distribuciones y transformada de Fourier necesarios en el capítulo 4. Algunos teoremas que se dan en tales capítulos no incluye su demostración. Se dará en tal caso la referencia correspondiente.

En este espacio por último quiero agradecerle al Dr. Salvador Perez Esteva por su apoyo en la realización de este trabajo y, al Instituto de Matemáticas de la UNAM.

NOTACION Y DEFINICIONES BASICAS

En todo el trabajo se utilizará notación que aparece en la mayoría de los textos. Aquí sólo se hacen algunas observaciones.

R^n Denota el conjunto de los números reales con la tolopología natural

$R^n = R \times \cdots \times R$ Es el n-ésimo producto cartesiano de R con la topología natural.

C Es el conjunto de los números complejos con la topología natural

$C^n = C \times \cdots \times C$ Es el n-ésimo producto cartesiano de C con la topología natural.

$N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ El conjunto de los números naturales.

$N^n = N \times \cdots \times N$ Es el n-ésimo producto cartesiano de N.

$|x|$ con $x \in R^n$ ó C^n es la norma del punto x.

$< \cdot, \cdot >$ Producto escalar.

$\widehat{f}$ La transformada de Fourier.

$\breve{f}$ La transformada inversa de Fourier de f.

$i = \sqrt{-1}$ Raíz cuadrada de -1 del capítulo 3 en adelante.

$\frac{\partial}{\partial x_j}$ La derivada parcial con respecto a la variable x_j.

$$D^{e_j} = \frac{1}{\subset} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$\sup A$ El supremo de A

$\inf A$ El ínfimo de A

$A \hookrightarrow B$ La función inclusión de A en B.

$L_p(\Omega)$ El espacio de las funciones

$$f : \Omega \to C$$

donde f es integrable en el sentido de Lebesgue, con la norma dada por

$$\|f\|_p = (\int |f(x)|^p)^{\frac{1}{p}}\, dx$$

La fórmula del multinomio de Newton

$$(a_1+\cdots+a_n)^n = \sum_{i_1+\cdots+i_n=m}^{m} \frac{m!}{i_1!\cdots i_n!} a_1^{i_1}\cdots a_n^{i_n}$$

Si $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in N^n$ entonces

i) $\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_n+\beta_n)$

ii) $\alpha\leq\beta$ si $\alpha_i\leq\beta_i$ con $i=1\ldots n$, en este caso

$$\beta-\alpha=(\beta_1-\alpha_1,\ldots,\beta_n-\alpha_n)$$

iii) $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$

iv) $\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!$

v) Si $\alpha\leq\beta$, entonces

$$\binom{\beta}{\alpha}=\frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!\alpha!}$$

La formula de Leibniz

$$\frac{\partial^\gamma fg}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} = \sum_{\alpha+\beta=\gamma}\binom{\beta}{\gamma}\frac{\partial^{\gamma-\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\frac{\partial^\beta g}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

${}^tA$ El operador traspuesto.

Definición 1 Si u es una función del espacio topológico X en C el soporte de u es el conjunto

$$supp u=\{x\in X|u(x)=0\}^-$$

$\Omega\subset R^n$ Siempre será un conjunto abierto.

$C^\infty(\Omega)$ Funciones de clase C^∞ con dominio Ω.

$C^m(\Omega)$ Funciones de clase C^m con dominio Ω.

$C_0^\infty(\Omega)$ Funciones de clase C^∞ con soporte compacto y dominio en Ω.

$C_0^m(\Omega)$ Funciones de clase C^m con soporte compacto y dominio en Ω.

$L^1_{Loc}(\Omega)$ Funciones integrebles en conjuntos compactos.

Definicón 2 Una seminorma en el espacio vertorial E sobre el campo $k(k=R$ ó $C)$ es una función p que cumple las siguientes propiedades.

i) $p:E\to R^+\cup\{0\}$

ii) $p(x+y)\leq p(x)+(y)$

iii) $p(\lambda x)=|\lambda|p(x)$

con $x,y\in E$ y $\lambda\in k$.

¡Oh inteligencia, soledad en llamas!
que lo consume todo hasta el silencio
sí, como una semilla enamorada
...
...
¡Oh inteligencia, soledad en llamas,
que todo lo concibe sin crearlo!
Finge el calor del lodo,
su emoción de substancia adolorida,
el iracundo amor que la embellece
...
...
amoroso temor de la materia,
angélico egoísmo que se escapa
como un grito de júbilo sobre la muerte
-Oh inteligencia, páramo de espejos!

José Gorostiza

CAPITULO 1

Distribuciones

En este capítulo se dan los teoremas básicos necesarios más adelante, utilizando algunos conceptos elementales de topología y análisis funcional.Se da una definición de distribución por medio de funcionales lineales en el espacio $C_0^\infty(\Omega)$ dotado de cierta topología. Se definen algunas operaciones entre distribuciones y ejemplos inportantes, o que son de interes.

Topología en los espacios $C_0^\infty(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$ y $C^m(\Omega)$

Para poder definir las topologías en los espacios de funciones que interesan más adelante se revisan conceptos importantes, en los espacios vectoriales topológicos.

Definición 1

Si E es un espacio vertorial sobre el campo $k(k = R$ ó $C)$ con la topología τ , se llama espacio vectorial topológico si las operaciones de suma y multiplicación por escalares en E, son continuas.

Definición 2

Si E es un espacio vectorial topológico, con la topología τ, se llama localmente convexo, si el vector cero de E, tiene una base local de abiertos convexos.

Definición 3

Si E es un espacio localmente convexo, se llama espacio de Frechet, si además es métrico y completo.

Sea ahora $\{E_i\}_{i\in N}$ una sucesión de espacios localmente convexos tales que

$$E_i \subset E_{i+1} \text{ para toda } i \in N$$

y

$$E_i \hookrightarrow E_{i+1} \text{ son continuas para toda } i \in N$$

Sobre $E = \cup E_i$ se define la topología localmente convexa más fina tal que las inclusiones

$$E_i \hookrightarrow E$$

son continuas para toda $i \in N$.

Esta topología sobre E se llama la topología de límite inductivo de E definida por el conjunto de espacios $\{E_i\}_{i\in N}$. E con esta topología se llama el límite inductivo de los espacios $\{E_i\}_{i\in N}$.

Para la topología del límite inductivo el siguiente resultado es muy importante.

Teorema 1

Sea E la unión de una sucesión $\{E_i\}_{i\in N}$ de espacios localmente convexos para los cuales

i) $E_i \subset E_{i+1}$

ii) $E_i \hookrightarrow E_{i+1}$ es continua

iii) La topología inducida por E_{i+1} sobre E_i coincide con la topología de E_i.

iv) E_i es un subespacio cerrado de E_{i+1}.

Entonces

a) El límite inductivo de E, induce sobre E_i su topología original.

b) Un subconjunto $A \subset E$ es acotado en la topología de límite inductiva, si y sólo si existe $i \in N$ tal que $A \subset E_i$ y A es acotado en E_i.

ver[1]◇

En el caso especial en que $E = C_0^\infty(\Omega)$, con $\Omega \subset R^n$ un conjunto abierto, y $\{K_i\}_{i\in N}$ es una sucesión de conjuntos compactos de R^n que cumplen

i) $K_i \subset K_{i+1}$ para todo $i \in N$

ii) $X = \cup K_i$

Para los espacios

$$C_0^\infty(\Omega, K_i) = \{f \in C_0^\infty(\Omega) | \; supp f \subset K_i\}$$

se tiene la topología localmente convexa dada por la familia de normas $\{p_{m,i}\}$, donde

$$p_{m,i}(f) = \sup_{x\in K_i, |\alpha|\leq m} |\partial\alpha f(x)| \text{ con } f \in C_0^\infty(\Omega, K_i) \text{ y } m \in N$$

Estos espacios tienen las siguientes propiedades.

Teorema 2

El espacio $C_0^\infty(\Omega, K_i)$ con la topología dada por la familia de seminormas $\{p_{m,i}\}$, resulta un espacio de Frechet.

ver[1]◇

Teorema 3

Las funciones

$$C_0^\infty(\Omega, K_i) \hookrightarrow C_0^\infty(\Omega, K_{i+1})$$

son continuas para todo $i \in N$, y

$$C_0^\infty(\Omega, K_i)$$

es un subespacio cerrado de $C_0^\infty(\Omega, K_{i+1})$.
ver[1]$\diamond$

Por estos dos resultados la sucesión $\{C_0^\infty(\Omega, K_i)\}_{i\in N}$ cumple las hipótesis del teorema 1.

El límite inductivo sobre

$$C_0^\infty(\Omega) = \cup C_0^\infty(\Omega, K_i)$$

así construido se denotará por

$$\wp(\Omega)$$

Con esta topología sobre $C_0^\infty(\Omega)$ se trabajará en todo lo que sigue.

Propiedades importantes del espacio $\wp(\Omega)$ son las siguientes.

Teorema 4

El espacio $\wp(\Omega)$ es independiente de la sucesión $\{K_i\}_{i\in N}$ escogida que cumple i) y ii).
ver[1]$\diamond$

Teorema 5

Un subconjunto $A \subset C_0^\infty(\Omega)$ es acotado en $\wp(\Omega)$, si y sólo si existe K compacto tal que

$$A \subset C_0^\infty(\Omega, K)$$

y

$$|\partial^\alpha \phi| \leq C_m \text{ con } \phi \in A, \alpha \in N^n \text{ y } |\alpha| \leq m$$

para toda $m \in N$.
ver[1]$\diamond$

Teorema 6

Una sucesión $\{\phi_i\}_{i\in N} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge a cero en $\wp(\Omega)$, si y sólo si existe $K \subset \Omega$ compacto y

i) $supp\phi_i \subset \Omega$

ii) $\partial^\alpha \phi_i$ converge uniformemente a cero sobre K, para todo $\alpha \in N^n$.

ver[1]$\diamond$

En el espacio $C^\infty(\Omega)$, también se puede construir una topología con seminormas $p_{m,i}$, como en el caso anterior.Esta topología se denotará por E y es la que se utilizará en el espacio C^∞.

Propiedades importantes del espacio $E(\Omega)$ son las siguientes.

Teorema 7

El espacio $E(\Omega)$ es independiente de la sucesión $\{K_i\}_{i\in N}$ escogida que cumpla i) y ii).
ver[1]$\diamond$

Teorema 8

Un subconjunto A de $C^{\infty}(\Omega)$ es acotado en $E(\Omega)$, si y sólo si dado $m \in N$ y $K \subset \Omega$ compacto, existe $Cm, K > 0$ tal que

$$|\partial^{\alpha}\phi(x)| \leq C_{m,K}$$

con $\phi \in A, |\alpha| \leq m$ y $x \in K$.
ver[1]◇

Teorema 9

Una sucesión $\{\phi_i\}_{i \in N}$ en $C^{\infty}(\Omega)$ converge a cero, si y sólo si dado $m \in N$ y $K \subset \Omega$ compacto, la sucesión $\{\partial^{\alpha}\phi\}_{i \in N}$ con $|\alpha| \leq m$ converge uniformemente a cero en K.
ver[1]◇

Los espacios $C_0^m(\Omega)$ y $C^m(\Omega)$ como en los casos anteriores tienen una topología generada por una familia de seminormas $\{p_{m,i}\}$ salvo que el índice m, es menor o igual a m.
ver[1]

Propiedades importantes del espacio $C^m(\Omega)$ son la siguientes.

Teorema 10

Un subconjunto A de $C^m(\Omega)$ esta acotado, si y sólo si dado $K \subset \Omega$ compacto existe C_K tal que

$$|^{\partial}\alpha\phi(x)| \leq C_K$$

con $\phi \in A, |\alpha| \leq m$ y $x \in K$.
ver[1]◇

Teorema 11

Una sucesión $\{\phi_i\}_{i \in N}$ en $C^m(\Omega)$ converge a cero, si y sólo si dado $K \subset \Omega$ compacto la sucesión $\{\partial^{\alpha}\phi_i\}_{i \in N}$ converge uniformemente a cero en K cuando $|\alpha| \leq m$.
ver[1]◇

Un resultado que será muy útil, que da una manera sencilla para verificar la continuidad de funciones cuando el espacio dominio sea el límite inductivo de una sucesión de espacios localmente, convexos es el siguiente.

Teorema 12

Si E es el límite inductivo de la sucesión de espacios localmente convexos $\{E_i\}_{i \in N}$ y F un espacio localmente convexo, entonces

$$u : E \to F$$

es continua, si y sólo si

$$u_{|E_i} : E_i \to F$$

es continua para toda $i \in N$.
ver[1]◇

En el caso particular en que se tengan los espacios $\wp(\Omega)$ y $E(\Omega)$, una consecuencia del último teorema es el siguiente resultado.

Teorema 13

La función

$$\wp(\Omega) \hookrightarrow E(\Omega)$$

es continua y, $\wp(\Omega)$ es denso en $E(\Omega)$.

ver[1]$\diamond$

Definición de distribución

La razón de las topologías construidas en los espacios $C_0{}^{\infty}(\Omega)$, $C^{\infty}(\Omega)$, $C^{m}(\Omega)$ y $C_0{}^{m}(\Omega)$ está al considerar las soluciones generalizadas de ecuaciones diferenciales . Schwartz antes de definir lo que es una distribución, definió como una solución generalizada de una ecuación diferencial, al límite uniforme sobre conjuntos compactos de soluciones ordinarias.

En 1945 Schwartz da la siguiente definición.

Definición 4 Una distribución es una funcional lineal

$$u : \wp(\Omega) \to C$$

continua.

El conjunto de tales funcionales se denotará por

$$\wp\prime(\Omega)$$

Algunos criterios importantes que se utilizarán mucho posteriormente, y que facilitan ver cuando una funcional lineal es en realidad una distribución son los siguientes.

Teorema 14

Una funcional lineal u de $\wp(\Omega)$ en C es una distribución, si y sólo si para toda $K \subset \Omega$ compacto existen $c > 0$ y $m \in N$ tales que

$$| < u, \phi > | \leq c \sup_{x \in K, |\alpha| \leq m} |\partial^{\alpha} \phi(x)| \text{ con } \phi \in C_0^{\infty}(\Omega, K) \tag{1}$$

Demostración

Si $\in \wp\prime(\Omega)$ para todo conjunto $K \subset \Omega$ compacto

$$u|_{C_0^{\infty}(\Omega,K)} : C_0^{\infty}(\Omega, K) \to C \tag{1$\prime$}$$

es continua. Así para la bola $B_1(0)$ existen $m \in N$ y $\epsilon > 0$ tales que

$$V(K, m, \epsilon) = \{\phi \in C_0^{\infty}(\Omega, K) | p_{m,K}(\phi) \leq \epsilon\}$$

y

$$u^{-1}_{|C_0^{\infty}(\Omega,K)}(B_1(0))$$

donde

$$p_{m,K}(\phi) = \sup_{x\in K,|\alpha|\le m} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

Si $\phi \neq 0$

$$\frac{\epsilon\phi}{p_{m,K}(\phi)} \in V(K,m,\epsilon)$$

además $\phi = 0$ cumple 1 con cualquier C.

Tomando $C = \frac{1}{\epsilon}$ se obtiene 1'.

Si 1 se cumple significa que son continuas las funcionales 1'. Por lo tanto u resulta continua.

ver [1] ◇

Teorema 15

Una funcional lineal u de $\wp(\Omega)$ en C es una distribución, si y sólo si para toda sucesión $\{\phi_i\}_{i\in N}$ convergiendo a cero en $\wp(\Omega)$, la sucesión $\{< u, \phi_i >\}_{i\in N}$ converge a cero en C.

Demostración

Si u es una distribución y $\{\phi_i\}_{i\in N}$ converge a cero en $\wp(\Omega)$, por la continuidad de u, la sucesión $\{< u, \phi_i >\}_{i\in N}$ converge a cero.

Recíprocamente si u no fuera continua, existiría $K \subset \Omega$ compacto tal que $u_{C_0^\infty(\Omega,K)}$ no sería continua. Como el espacio $C_0^\infty(\Omega, K)$ es métrico, existe una sucesión $\{\phi_i\}_{i\in N}$ que converge a cero en $C_0^\infty(\Omega, K)$ y $\{< u, \phi_i >\}_{i\in N}$ que no converge a cero en C, lo cual es una contradicción.

◇

En forma análoga se puede considerar el dual topológico del espacio $E(\Omega)$.

Para este espacio, denotado por $E'(\Omega)$, se tiene un resultado análogo al del teorema 14.

Teorema 16

Una funcional lineal u de $E(\Omega)$ en C es un elemento en el espacio $E'(\Omega)$, si y sólo si existen $c > 0$, $m \in N$ y $K \subset \Omega$ compacto tales que

$$|< u, \phi >| \le c \sup_{x\in K,|\alpha|\le m} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

con $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

La relación importante entre los espacios $\wp'(\Omega)$ y $E'(\Omega)$ lo da el siguiente resultado.

Teorema 17

El espacio $E'(\Omega)$ se puede considerar un subespacio de $\wp'(\Omega)$.

ver [1] ◇

Algunos ejemplos

La definición de distribución tiene por motivo el dar una generalización del concepto de función, al menos de funciones útiles en ecuaciones diferenciales. Dentro de esta funciones estas las familias

$$C_0^\infty(\Omega)$$
$$C^\infty(\Omega)$$
$$C^m(\Omega)$$

y

$$L_1(\Omega)$$

En todos estos casos la definición 4 generaliza realmente el concepto de función.

a)

Dada una función en $L_1(\Omega)$ la funcional lineal

$$F_f : C_0^\infty(\Omega) \to C$$

dada por

$$F_f(\phi) = \int \phi(x) f(x)\, dx$$

con $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ esta bien definida y resulta continua. Ademas para f y g en $L_1(\Omega)$ distintas, existe $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$F_f(\phi) \neq fg(\phi)$$

De esta manera, $L_1(\Omega)$ se puede considerar como un subespacio algebraico de $\wp\prime(\Omega)$. Lo mismo sucede con $C_0^\infty(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$ y $C^m(\Omega)$.

b)

El ejemplo clásico estudiado en Física es el de la delta de Dirac.Se define como la distribución dada por

$$\delta(\phi) = \phi(0) \quad \text{con} \quad \phi \in {C_0}^\infty(\alpha)$$

Hay varias generalizaciones de esta distribución.

Por ejemplo, si $v = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n | x_1 = 0\}$, la funcional lineal δ_v dada por

$$\delta_v(\phi) = \int_v \phi \quad \text{con} \quad \phi \in {C_0}^\infty(\Omega)$$

es continua.

En forma general, si S es una hipersuperficie, la funcional lineal dada por

$$\delta_S(\phi) = \int_S \phi \quad \text{con} \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

resulta continua.

Se pueden encontrar otros ejemplos en [1] y [3].

Topologías en los espacios $\wp\prime(\Omega)$ y $E\prime(\Omega)$

Los espacios $\wp\prime(\Omega)$ y $E\prime(\Omega)$ resultan espacios vectoriales a los que se puede dar alguna topología bajo la cual tengan estructura de espacio vectorial topológico y resulten continuas algunas operaciones importantes que se definirán posteriormente , aquí se estudian en estos espacios, dos de tales topologías, útiles en todo lo que sigue.

Toplogía débil

En el espacio $\wp'(\Omega)$ una manera de asociarle una topología mediante la cual resulta un espacio vectorial topológico, es por medio de la familia de seminormas $\{p_\phi\}$ dadas por

$$p_\phi(u) = |<u,\phi>| \quad \text{con} \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \text{y} \quad u \in \wp'(\Omega)$$

Esta topología que resulta sobre el espacio $\wp'(\Omega)$, se llama la topología débil y tiene la siguiente propiedad.

Teorema 18 Una sucesión $\{u_i\}_{i\in N}$ de elementos en el espacio $\wp'(\omega)$ converge a cero en la topología débil, si y sólo si la sucesión numérica $\{<u,\phi>\}_{i\in N}$, converge a cero en C para todo ϕ en $C_0^\infty(\Omega)$.

ver[1]◇

En el espacio $E'(\Omega)$ tambien se puede considerar la topología débil generada por la familia de seminormas $\{p_\phi\}$ donde

$$p_\phi(u) = |<u,\phi>| \text{ con } \phi \in C^\infty(\Omega) \text{ y } u \in E'(\Omega)$$

y se tiene una propiedad para este espacio análoga a la del teorema 18.

Teorema 19

Una sucesión $\{u_i\}_{i\in N}$ de elementos en el espacio $E'(\Omega)$ converge a cero en la topología débil, si y sólo si la sucesión numérica $\{<u,\phi>\}_i i \in N$ converge a cero en C para toda $\phi \in C^\infty(\Omega)$.

ver[1]◇

Bajo la topología débil todas las operaciones que se definan posteriormente serán continuas.

Con esta topología no solo se tiene una inclusión algebraica en el teorema 17, como lo indica el siguiente resultado.

Teorema 20

Son continuas las siguientes inclusiones.

i) $C_0^\infty(\Omega) \hookrightarrow \wp'(\Omega)$

ii) $C_0^\infty(\Omega) \hookrightarrow E'(\Omega)$

iii) $C^\infty(\Omega) \hookrightarrow \wp'(\Omega)$

iv) $C_0^m(\Omega) \hookrightarrow \wp'(\Omega)$

v) $C_0^m(\Omega) \hookrightarrow E'(\Omega)$

vi) $C^m(\Omega) \hookrightarrow \wp'(\Omega)$

vii) $L^1_{Loc}(\Omega) \hookrightarrow \wp'(\Omega)$ donde $L^1_{Loc}(\Omega)$ tiene la topología inducida por $L_1(\Omega)$.

viii) $E'(\Omega) \hookrightarrow \wp'(\Omega)$ donde $E'(\Omega)$ y $\wp'(\Omega)$ tienen la topología débil.

ver[1]◇

Topología fuerte

Otra topología que generalmente se asocia a los espacios $\wp'(\Omega)$ y $E'(\Omega)$, es la llamada topología fuerte con la que resultan espacios vertoriales topológicos. Para poder definir adecuadamente esta topología se requiere de las siguientes definiciones.

Definición 5

Si E es un espacio vectorial sobre el campo $k(k = R$ ó $C)$ y $A \subset E$, entonces A es absorbente, si dado $y \in E$ existe $\lambda \in k$ tal que

$$\lambda g \in A$$

Definición 6

Si E es un espacio vectorial sobre el campo $k(k = R$ ó $C)$, y $A \subset E$, entonces A es balanceado si para todo $\lambda \in R$ y $|\lambda| \leq 1$

$$\lambda A \subset A$$

donde

$$\lambda A = \{\lambda x \in E | E \in A\}$$

Definición 7

Si E es un espacio vectorial topológico, $E\prime$ es el dual topológico de E y $B \subset E$, entonces el conjunto

$$B^{\circ} = \{x\prime \in E\prime | \, | < x, u > | \leq 1, x \in B\}$$

se llama la polar de B, en donde $E\prime$ es el dual topológico de E.

Así se tiene.

Teorema 21

Si E es un espacio vectorial topológico sobre k y $B \subset E$ es un conjunto acotado, entonces B° es absorbente balanceado y convexo en $E\prime$.

ver[1]$\circ$

Teorema 22

Si E es un espacio vectorial sobre k y $B \subset E$ es un conjunto absorbente, balanceado y convexo, entonces la función

$$p_B : E \to R$$

dada por

$$p_B(x) = \inf\{\lambda | x \in \lambda B\}$$

es una seminorma en E.

ver[1]$\circ$

Si E es un espacio vectorial topológico, se puede tomar en $E\prime$ por los dos resultados anteriores, la topología generada por la familia de seminormas $\{p_{B^{\circ}}\}$ donde $B \subset E$ es acotado.

Esta topología se llama la topología fuerte sobre $E\prime$.

En el caso particular en que se tenga en el espacio $\wp\prime(\Omega)$ la topología fuerte, el siguiente resultado análogo al teorema 18 es importante.

Teorema 23

Una sucesión $\{u_i\}_{i\in N}$ de elementos en $\wp'(\Omega)$, converge a cero en la topología fuerte, si y sólo si la sucesión numérica $\{< u_i, \phi >\}_{i\in N}$ converge a cero uniformente sobre todo conjunto acotado en $C_0^\infty(\Omega)$.

ver[1]◇

De la misma manera en los espacios $E'(\Omega)$, $[C_m(\Omega)]'$ y $[C^m(\Omega)]'$, se puede considerar la topología fuerte, obteniendose un resultado análogo al teorema anterior.

En todos estos casos, como todo conjunto con un solo elemento en un espacio vectorial topológico es acotado, la topología fuerte resulta más fina que la topología débil.

Con estas topologías en los espacios $\wp'(\Omega)$ y $E'(\Omega)$ se pueden definir algunas operaciones entre distribuciones

Aquí sólo se describen algunas propiedades y operaciones comunes.

Un primer punto son las propiedades locales de las distribuciones, que son muy importantes posteriormente.

Definición 8

Si $u \in \wp'(\Omega)$ y $V \subset \Omega$ abierto, se dice que u es cero en V, si $< u, \phi >= 0$ para todo $\phi \in C_0^\infty(V)$.

Definición 9

Si $u \in \wp'(\Omega)$ y $x_0 \in \Omega$, se dice que u es cero en x_0, si y sólo si existe $V \subset \Omega$ abierto con $x_0 \in V$ tal que u es cero en V.

Definición 10

Si $u, v \in \wp'(\Omega)$ y $x_0 \in \Omega$ se dice que u y v son equivalentes en x_0, si y sólo si $u - v$ es cero en x_0.

Con estas definiciones y los dos siguientes resultados se ve que una distribución queda determinada completamente si se conoce su comportamiento local.

Teorema 24 (Partición de la unidad*)

Si $K \subset R^n$ es un conjunto compacto y $\{V_i\}_{i=1}^n$ es una cubierta abierta finita de K, existe $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ de funciones tales que

$$\psi_i \in C_0^\infty(V_i) \quad \text{con} \quad 0 \le \psi_i \le 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n \psi_i = 1 \quad \text{en} \quad K$$

ver[1]◇

Teorema 25

Si $u \in \wp'(\Omega)$ es cero en cada punto de Ω, entonces u es la distribución constante igual a cero.

ver[1]◇

Con esto se puede hablar del soporte de una distribución, que generaliza el concepto estudiado en las funciones.

---

*Así se conoce generalmente a este teorema

Definición 11

Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, el soporte de u; denotado por $supp u$; es el complemento en Ω del abierto más grande donde u es cero.

Hay una relación muy importante entre el soporte de una distribución y el espacio $E'(\Omega)$, como lo indica el siguiente resultado.

teorema 26

En la topología fuerte, la inclusión

$$E'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

es continua, y $E'(\Omega)$ considerado como subespacio de $\mathcal{D}'(\Omega)$, es el conjunto de distribuciones de soporte compacto.

Demostración

Como es continua la inclusión de $C_0^\infty(\Omega)$ en $C^\infty(\Omega)$, un conjunto acotado en $C_0^\infty(\Omega)$ lo es en $C^\infty(\Omega)$.

Por otra parte si $u \in E'(\Omega)$, para la bola $B_\epsilon(0)$ de C existen $m \in N$, $\delta > 0$ y $K \subset \Omega$ compacto, tales que para todo elemento en

$$V(K, m, \delta) = \{\phi \in C_0^\infty(\Omega) | p_{m,K}(\phi) < \delta\}$$

se tiene

$$| < u, \phi > | < \epsilon$$

En particular para $\phi \in C_0^\infty(\Omega - K)$

$$p_{m,K}(\phi) = 0$$

con lo que

$$< u, \phi >= 0$$

Por lo tanto

$$supp u \subset K$$

Si $u \in E'(\Omega)$, se puede considerar u como elemento de $\mathcal{D}'(\Omega)$, definiendo la distribución $u|_{C_0^\infty(\Omega)}$.

ver[1]◇

Con estas propiedades ya se pueden definir algunas operaciones entre distribuciones.

a) la suma de distribuciones y la multiplicación de un escalar y una distribución son claramente operaciones continuas en $\mathcal{D}'(\Omega)$ y $E'(\Omega)$.

b) Para introducir el concepto de derivada en distribuciones, se tiene la siguiente motivación. Si u es una función en el conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ al considerar a u y $\frac{\partial u}{\partial x_i}$

$$< \frac{\partial u}{\partial x_i}, \phi >= \int \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\phi(x)\, dx = -\int u(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\, dx = - < u, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} >$$

con $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

De esta observación se puede definir la α-ésima derivada de $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ con $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N^n$, como la distribución dada por

$$< \frac{\partial^\alpha u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}, \phi >= (-1)^{|\alpha|} < u, \frac{\partial^\alpha \phi}{\partial^{\alpha_1} x_1, \cdots, \partial^{\alpha_n} x_n} >$$

Bajo la topología fuerte esta derivada resulta una operación continua en los espacios $\mathcal{D}'(\Omega)$ y $E'(\Omega)$.

c) La multiplicación de distribuciones en general no se puede definir.

En el capítulo 2 se verán algunas razones, por las cuales no se puede definir el producto de tal manera que sea una extensión del producto ordinario de funciones y sea una operación continua en las topologías vistas.

Sin embargo en algunos casos es fácil definir el producto de dos distribuciones.

i) Si $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ y $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, la distribución producto ψu es natural definirla como el elemento en $\mathcal{D}'(\Omega)$ dada por

$$< \psi u, \phi >=< u, \psi\phi > \quad \text{con} \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Esta definición como en el caso anterior esta motivada por la relación entre el producto de dos funciones y al funcional asociado a tal producto por medio de una integral.

ii) Si $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ y $u \in E'(\Omega)$, la distribución ψu es un elemento en $\mathcal{D}'(\Omega)$ definida como i) para toda $\psi \in C^\infty(\Omega)$.

Es fácil ver de nuevo que las operaciones en i) y ii), resultan continuas en cada una de las variables en las topologías consideradas

d) Otra operación muy importante entre distribuciones, utilizada primero por Schwartz, en su estudio de las ecuaciones diferenciales es la convolución.

Si f y g son elementos en $C_0^\infty(R^n)$, la convolución es una nueva función definida por

$$f * g(\xi) = \int f(\xi - \eta) g(\eta)\, d\eta \quad \text{con} \quad \xi \in R^n$$

Si $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, se tiene

$$< f * g, \phi >= \int f * g(\xi)\phi(\xi)\, d\xi = \int \left[\int f(\xi - \eta) g(\eta)\, d\eta\right] \phi(\xi)\, d\xi$$

con el cambio de variable $\xi_1 = \xi - \eta$ en la última integral, se obtiene

$$< f * g, \phi >= \int f(\xi_1) g(\eta) \phi(\xi_1 + \eta)\, d\xi_1\, d\eta \tag{1}$$

de esta manera se ve que a la convolución $f * g$, se le puede asociar la función $f(\cdot)g(\cdot) \in C_0^\infty(R^n \times R^n)$, pero no una funcional lineal dada por una integral en $R^n \times R^n$, pues la función $\phi(\cdot + \cdot)$ en $C^\infty(\Omega \times \Omega)$ no tiene necesariamente soporte compacto.

Sin embargo el conjunto

$$supp f(\cdot)g(\cdot) \cap supp \phi(\cdot + \cdot)$$

es compacto.

De esta manera, tomando $\psi \in C_0^\infty(\Omega \times \Omega)$ con $\psi = 1$ en alguna vecindad del conjunto anterior, el valor de

$$< f(\cdot)g(\cdot), \psi(\cdot,\cdot)\phi(\cdot + \cdot) >$$

es independiente de la función ψ con tal propiedad, y es igual al valor de la expresión 1.

Esto da una manera de definir la operación de convolución en el conjunto $\wp\prime(\Omega)$.

Antes de tal definición se necesita el siguiente resultado.

Teorema 27

Si $u \in \wp\prime(X)$, $v \in \wp\prime(Y)$, con $X \subset R^n$, $Y \subset R^n$ abiertos, existe una distribución única; denotada por $u \otimes v$; en $\wp\prime(X \times Y)$ tal que

$$< u \otimes v, \phi(\cdot,\cdot) > = < u, < u, \phi(\eta,\cdot) >> = < u, < u, \phi(\cdot,\xi) >>$$

con $\phi \in C_0^\infty(X \times Y)$.

Demostración

Para cualquier $x \in X$ y $y \in Y$ las expresiones $< v, \phi(\cdot, y) >$ y $< u, \phi(x,\cdot) >$ definen funciones en $C_0^\infty(X)$ y $C_0^\infty(Y)$ respectivamente.

Notando que las funciones

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i \psi_i \quad \text{con} \quad \phi_i \in C_0^\infty(X) \quad \text{y} \quad \psi_i \in C_0^\infty(Y)$$

para toda $n \in N$, forman un conjunto denso de funciones en $C_0^\infty(X \times Y)$, se determina completamente a la funcional lineal $u \otimes v$. Por el teorema 15, es fácil ver de esta manera que resulta continua.

Definición 11

Si $u \in C_0^\infty(\Omega)$ y $v \in E\prime(\Omega)$, la convolución de estas distribuciones, denotada por $u * v$ esta definida por

$$< u * v, \phi > = < u \otimes v, \alpha(\cdot,\cdot)\phi(\cdot + \cdot) >$$

donde $\alpha \in C_0^\infty(\Omega \times \Omega)$, con $\alpha = 1$ en una vecindad del conjunto compacto

$$(supp u \times supp v) \cap supp \phi(\cdot,\cdot) \tag{2}$$

y $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Se obtienen de la definición anterior las siguientes propiedades.

Teorema 28

Si $u \in \wp\prime(\Omega)$ y $v \in E\prime(\Omega)$

$$supp(u * v) \subset supp u + supp v$$

donde

$$suppu + suppv = \{x + y | x \in suppu, y \in suppv\}$$

Demostración

$suppu + suppv$ es un conjunto cerrado, pues es la suma de un conjunto compacto y uno cerrado en R^n.

Si $\phi \in C_0^\infty((suppu + suppv)^c)$ como $\phi(x + \cdot) \in C_0^\infty((suppu)^c)$, para $x \in suppu$, se tiene

$$< u * v, \phi > = < u, < v, \alpha(x + \cdot)\phi(x + \cdot) >>$$

con $\alpha \in C_0^\infty(\Omega \times \Omega)$ y, $\alpha = 1$ en una vecindad del conjunto compacto 2.
ver[1]$\diamond$

Teorema 29

La convolución es continua separadamente en cada variable en la topología fuerte.

Demostración

Basta ver la definición 11, en donde la operación $\otimes$ fácilmente se ve que es separadamente continua en cada variable.
ver[1]$\diamond$

Teorema 30

El espacio $E\prime(\Omega)$ es un álgebra conmutativa con unidad bajo las operaciones de espacio vectorial y la convolución, en donde, la delta de Dirac es la unidad.

Demostración

Por la definición 11 y el teorema 28 la convolución resulta una operación cerrada y conmutativa en $E\prime(\Omega)$.

Si $u \in E\prime(\Omega)$

$$< u * \delta, \phi > = < u \otimes \delta, \phi(\eta + \cdot) > = < u, < \delta, \phi(\eta + \cdot) > =$$

$$< u, \phi(0 + \cdot) > = < u, \phi >$$

con $\phi \in C^\infty(\Omega)$.
ver[1] $\diamond$

Para ecuaciones diferenciales el siguiente resultado es importante.

Teorema 31

Si u, v son elementos de $\mathcal{D}\prime(\Omega)$ y esta definida la convolución como en la definición 11, entonces se tiene

$$\frac{\partial(u * v)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} * v = u * \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

Demostración

Por b) y la definición 11

$$< \frac{\partial(u * v)}{\partial x_i}, \phi > = - < u * v, \frac{\partial \alpha(\cdot + \cdot)}{\partial x_i} >$$

esta expresión es igual a

$$< u, < \frac{\partial v}{\partial x_i}, \phi(\xi + \cdot) >> = < u * \frac{\partial v}{\partial x_1}, \phi > =$$

$$< v, < \frac{\partial u}{\partial x_i}, \phi(\cdot + \eta) >> = < v * \frac{\partial u}{\partial x_i}, \phi > = < \frac{\partial u}{\partial x_i} * v, \phi >$$

Otro resultado que se usara posteriormente es el siguiente.

Teorema 32

i) Si $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ y $u \in \wp\prime(\Omega)$, entonces $u * \phi \in C^\infty(\Omega)$.

ii) Si $\phi \in C^\infty(\Omega)$ y $u \in E\prime(\Omega)$, entonces $u * \phi \in C^\infty(\Omega)$.

iii) Si $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ y $u \in E\prime(\Omega)$, entonces $u * \phi \in C_0^\infty(\Omega)$

Además estas operaciones son separadamente continuas en cada variable en las topologías definidas.

Demostración

Con el cambio de variable $x = \xi + \eta$, se tiene

$$< u * \phi, \psi > = < u \otimes \phi, \psi(\cdot, \cdot) > = < u, < \phi(\eta), \psi(\xi + \eta) >> =$$

$$< \psi, < u, \phi(x - \cdot) >>$$

entonces

$$u * \phi = < u, \phi(x - \cdot) >$$

con lo que

$$< u, < \phi(x - \cdot) >$$

resulta una función en $C^\infty(\Omega)$, (para iii) en $C_0^\infty(\Omega)$).

Para ver la continuidad separable en cada variable, se analizará el caso i), los demás tienen una demostración análoga.

Si $u \in \wp\prime(\Omega)$ es un elemento fijo, para que el mapeo de $C_0^\infty(\Omega)$ a $C^\infty(\Omega)$ dado por

$$\phi \to u * \psi$$

sea continua, es necesario que lo sea en su restricción al espacio $C_0^\infty(\Omega, K)$ con $K \subset \Omega$ compacto. En este caso por las topologías en $C_0^\infty(\Omega, K)$ y $C^\infty(\Omega)$ es suficiente mostrar que para cualquier $L \subset \Omega$ compacto y $n \in N^n$, existen $m \in N^n$ y $c > 0$ tales que

$$\sup_{x \in L} |\partial^n(u * \phi)(x)| \leq c \sup_{x \in K, |\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

con $\phi \in C_0^\infty(\Omega, k)$.

Por ser $L - K$ un conjunto compacto, donde

$$L - K = \{x - y | x \in L, y \in K\}$$

y $u \in \wp\prime(\Omega)$, por el teorema 14 existen $c_1 > 0$ y $n \in N$ tales que

$$| < u, \psi > | \leq c \sup_{x \in L - K, |\alpha| \leq n} |\partial^\alpha \psi(x)|$$

con $\psi \in C_0^\infty(\Omega, L-K)$

Así

$$\begin{aligned}\sup_{x\in L} |\partial^p(u * \phi)(x)| &= \sup_{x\in L} |(u * \partial^p\phi)(x)| \\ &= \sup_{x\in L} | < u, \partial^p\phi(x - \cdot) > | \end{aligned} \tag{3}$$

Esta última expresión es menor o igual a

$$c_1 \sup_{\xi\in R^n} \sup_{x\in L, |\alpha|\leq n} |\partial^\alpha(\partial^p\phi)(x-\xi)| \leq c \sup_{x\in L-K, |\alpha|\leq n+|p|} |\partial^\alpha\phi(x)|$$

sea entonces $m = n + |p|$ y $c = c_1$.

Fijando ahora $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, para esta función se tiene

$$\sup_{x\in R^n, \xi\in R^n} |\phi(x-\xi)| < \infty$$

con lo que

$$\{\phi(x-\cdot) | x \in K\} \quad \text{donde} \quad K \subset \Omega \quad \text{es compacto}$$

es un conjunto acotado en $C_0^\infty(\Omega)$.

◇

Por el teorema 23, con una sucesión $\{u_i\}_{i\in N}$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ convergiendo a cero, y un desarrollo similar a 3, se ve que la sucesión $\{u_i * \phi\}_{i\in N}$ converge a cero en $C^\infty(\Omega)$.

e) Otra operación entre distribuciones es la integración. Como no se necesita en este trabajo no se estudia.
ver[3]

f) Una operación muy importante es la composución de distribuciones. En este caso se puede preguntar si dada f una función y u una distribución, como se puede definir "$u \circ f$"; es decir la composición; de tal manera que se tenga una extensión continua de la composición de funciones en el sentido clásico.

En el siguiente capítulo y en el capítulo 4 se estudian algunas condiciones que garantizan la existencia de tal operación.

g) En algunos casos se puede hablar del cociente de dos distribiciones.
ver[12]

h) Resulta útil en algunos ocasiones manejar series de distribuciones.
ver[12]

Algo importante de observar en la definición de estas operaciones son sus defectos.

En b) algo muy novedoso es que bajo la definición de derivada dada en las distribuciones todo elemento en $\mathcal{D}'(\Omega)$ es infinitamente diferenciable, resultado que no es muy útil en ecuaciones diferenciales, donde sólo se requiere la derivabilidad hasta cierto orden finito.

Otro hecho aun más importante es decir que salvo en a) y b), las demás operaciones no estan definidas en todo el espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ o en $E'(\Omega)$.

En otros ocasiones con estas definiciones se llega a resultados no deseables.

Por ejemplo para la distribución delta de Dirac y la función identidad su producto en $\mathcal{D}'(\Omega)$ es igual a cero pues

$$< x\delta, \phi > = < \delta, x\phi > = 0$$

Es decir, el producto de dos distribuciones distintas de cero en $\mathcal{D}'(\Omega)$ puede resultar ser la función constante cero.

En los siguientes capítulos se ven otros defectos de la definición de distribución dada por Schwartz y condiciones suficientes entre distribuciones o subespacios de $\mathcal{D}'(\Omega)$, donde se puedan definir operaciones útiles.

CAPITULO 2

Definiciones equivalentes de distribución

En este capítulo se estudian otras dos formas equivalentes de la definición de distribución, dada en el capítulo anterior. Cada una de ellas guarda una relación más estrecha con el estudio de las ecuaciones diferenciales. Primero se vera como una distribución se puede aproximar en la topología fuerte por una sucesión de funciones en $C^{\infty}(\Omega)$. Asi tambien, como, al menos en conjuntos compactos, a cada distribución se le puede asociar un operador lineal dado por una integral, como en el caso de las funciones $L_{Loc^{I}}(\Omega)$.

Con estas equivalencias se pueden generalizar más fácilmente algunas propiedades en las distribuciones.

Tambien se define el concepto de distribución en variedades diferenciales, y la composición de una función con una distribución en un caso particular.

Un hecho conocido en el espacio $C(\Omega)$ es que cada uno de sus elementos se puede aproximar uniformemente en conjuntos compactos $K \subset \Omega$ por funciones en el espacio $C_0^{\infty}(\Omega)$. Una manera de hacer esto es considerando una función $\alpha \in C_0^{\infty}(\Omega)$ tal que

$$\int |\alpha(x)|\, dx = 1, |\alpha(x)| \leq 1 \text{ y } supp\alpha \subset B_1(0)^-$$

entonces la función $\alpha_\epsilon = \epsilon^{-n}\alpha(\epsilon)$ que cumple

$$\int |\alpha_\epsilon(x)|\, dx = 1, |\alpha\epsilon(x)| \leq \epsilon^n, supp\alpha \in B_\epsilon(0)^- \text{ y } \epsilon > 0$$

es un elemento en $C_0^{\infty}(\Omega)$.

Dado $u \in C(\Omega)$, $K \subset \Omega$ compacto y $\varrho > 0$ existe δ tal que

$$|u * \alpha_\epsilon(x) - u(x)| \leq \int |\alpha_\epsilon(t)| u(x-t) - u(x)|\, dt \leq \varrho$$

con $x \subset K$ y $\epsilon \leq \delta$.

Un resultado análogo se obtiene para los espacios $\wp\prime(\Omega)$ y $E\prime(\Omega)$.

Teorema 1

$C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $\wp\prime(\Omega)$ en la topología fuerte.

Demostración

Si $u \in \wp\prime(\Omega)$ y α_ϵ como arriba, por el teorema 32 del capítulo 1 $u * \alpha_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$ con cualquier $\epsilon > 0$. Para $A \subset C^\infty(\Omega)$ acotado y una sucesión $\{\epsilon_i\}_{i\in N}$ en R^n que converge a cero, se tiene

$$< u * \alpha_{\epsilon_i} - u, \psi > = < u, < \alpha_{\epsilon_i}, \psi(\cdot + \xi) >> - < u, \psi >$$

esto es igual a

$$< u, < \alpha_{\epsilon_i}(\eta), \psi(\eta + \cdot) > - \psi(\cdot) >$$

Utilizando el teorema del valor medio con $|\eta| \leq \epsilon$, se tiene

$$|\partial^p \psi(\eta + \xi) - \partial^p \psi(\xi) \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} |D(\partial^p \psi(\xi + \theta\eta))|\epsilon$$

además el conjunto

$$\{\psi(\cdot + \theta\eta) | \psi \in A, 0 \leq \theta \leq 1, |\eta| < \epsilon\}$$

es acotado en $C^\infty(R^n)$ pues $K + B_\epsilon(0)^-$ es compacto si K lo es, y

$$supp\psi(\cdot + \cdot\cdot) \subset K + B\epsilon(0)^-$$

por el teorema 5 del capítulo anterior.

De esta forma se ve que existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{0 \leq \theta \leq 1} |D|\partial^p \psi(\cdot + \theta\eta))| \leq M$$

con $\psi \in A$ y $|\eta| \leq \epsilon$.

Por el teorema 14, para un conjunto compacto L que contiene a $K + B_1(0)^-$ y $|\eta| \leq \epsilon$

$$| < u * \alpha_{\epsilon_k} - u, \phi > | \leq M\epsilon$$

tomando j suficientemente grande tal que para $K \geq j$ y $\epsilon_K \leq \frac{\epsilon}{M}$, se obtiene el resultado. ver|1|$\diamond$

Con esta propiedad se puede definir la composición de una función y una distribución en un caso particular.

Teorema 2

Si $u \in \wp\prime(Y)$ y $f : X \to Y$ con $X \subset R^n$ y $Y \subset R^N$ abiertos, es un homeomorfismo de clase C^∞, entonces existe una distribución; denotada por $f * u$; en $\wp\prime(\Omega)$, tal que para toda sucesión $\{u_i\}_{i\in N}$ en $C^\infty(Y)$, que converge a u en la topología fuerte, la sucesión $\{u_i \circ f\}_{i\in N}$ en $C^\infty(X)$ converge en la topología fuerte a una única distribución; denotada por $f^* u$.

Demostración

Si A es un conjunto acotado en $C_0^\infty(X)$, el conjunto

$$\{(JDf^{-1}g \circ f^{-1}\}g \in A$$

es acotado en $C_0^\infty(Y)$, donde JDf^{-1} es el Jacobiano de Df^{-1}.

Por el cambio de variable $y = f(x)$, se tiene

$$|\int(u_i \circ f(x) - u_j \circ f(x))\psi(x)|\,dx \leq \epsilon \quad \text{con} \quad \psi \in A$$

entonces se puede definir

$$< f * u, \psi >= \lim_{i\to\infty} < u_i \circ f, \psi >$$

y por la desigualdad del triángulo se puede ver que $f^* u$ es una distribución y es la única obtenida como el límite en la topología fuerte de la sucesión $\{u \circ f\}_{i\in N}$ en C_0^∞

◇

Distribuciones en variedades

Con el teorema anterior se puede definir el concepto de distribución en variedades.

Para entender este concepto es pertinente dar las siguientes propiedades en las variedades.

Definición 1

Una n-dimensional variedad C^∞-diferenciable X, es un espacio topológico Hausdorff con base numerable para el cual existe una familia $F = \{K\}$ de homeomorfismos; generalmente llamados coordenadas locales o cartas; para las que se tienen las siguientes propiedades

i) $K : X_K \subset X \to \tilde{X}_K \subset R^n$ con $X_K, \tilde{X}_K$ abiertos.

ii) $K\prime \circ K^{-1} : K(X_K \cap X_{K\prime}) \to K\prime(X_K \cap X_{K\prime})$ es un homeomorfismo de clase C^∞ para toda pareja $K\prime$, K en F.

iii) $\cup X_K = X$

Definición 2

Si X es una n-dimensional variedad C^∞-diferenciable la función $u : X \to C$ se dice que es un elemento de clase C^∞ en X, si dado $K \in F$ entonces

$$(K^{-1})^* u = u \circ K^{-1}$$

resulta un elemento en $C^\infty(\tilde{X}_K)$.

Al conjunto de tales funciones se les denotará por $C^\infty(X)$.

En forma análoga, se pueden definir los espacios $C^m(X)$ y $L^1_{Loc}(X)$.

En topología diferencial generalmente se demuestra que las definiciones 1 y 2 son independientes de la elección de la familia F.

La definición 2 es la que generalmente se da de mapeo en $C^\infty(X)$. Para definir el concepto de distribución en variedades se puede dar de otra manera.

Si $u \in C^\infty(X)$ las funciones $u_K = u \circ K^{-1}$ y $u_{K'} = u \circ K'^{-1}$ con K y K' en F cumplen

$$u_{K'} = u_K \circ (K \circ K'^{-1}) \quad \text{en} \quad K'(X_K \cap X_{K'}) \tag{1}$$

e inversamente, si para todo elemento en F se tiene la propiedad 1, existe $u \in C^\infty(X)$ tal que

$$u = u_K \circ K = u_{K'} \circ K' \quad \text{en} \quad X_K \cap X_{K'}$$

De esta manera se puede definir el concepto de distribición en una variedad, que al restringirla a R^n o abiertos de este conjunto, es equivalente a la definición de Schwartz.

Definición 3

Sea X una C^∞-variedad diferenciable, F un conjunto como en la definición 1, y para todo elemento K y K' en esta familia, existenu_K y $u_{K'} \in \wp'(\tilde{X}_K)$ tales que

$$u_{K'} = (K \circ K'^{-1})^* u_K \quad \text{en} \quad K'(X_K \cap X_{K'})$$

donde $(K \circ K'^{-1})^*$ es como en el teorema 2.

Al sistema $\{u_K\}$ se le llamará una distribución en X.

El conjunto de tales distribuciones en la variedad X se denotará por

$$\wp'(X)$$

El concepto de distribución en variedades será utlizado posteriormente hasta el capítulo 4, aquí sólo se da su definición.

Ahora se verá la segunda forma equivalente de considerar a las distribuciones.

Toda ecuación diferencial se puede poner como una ecuación integral y toda solución clásica en la primera lo es en la segunda, pero no viceversa. Esto da un motivo para la definición de la derivada para funciones $f \in L_1(\Omega)$ para las cuales existe $g \in L_1(\Omega)$ tal que

$$\int g(x)\phi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int \partial^\alpha \phi(x)\,dx \quad \text{para todo} \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

en este caso se puede decir que

$$\partial^\alpha f = g$$

En general Schwartz probó que toda distribución tiene una situación análoga, al menos en conjuntos compactos, como lo indica el siguiente teorema.

Teorema 3 (Representación)

Si $u \in \wp'(\Omega)$ y A es un abierto relativamente compacto tal que $A' \subset \Omega$, existe $g \in C(\Omega)$ tal que

$$u = \partial^\alpha g \quad \text{en} \quad A \quad \text{y} \quad \alpha \in N^n$$

donde la derivada se considera en $\wp'(\Omega)$.

Demostración

Para $\epsilon > 0$ existe

$$V(A^-, m, \delta) = \{\phi \in C_0^\infty(\Omega, A^-) | p_{m,A^-}(\phi) < \delta\}$$

tal que

$$| < u, \phi > | \leq \epsilon \text{ con } \phi \in V(A^-, m, \delta)$$

Por otra parte, si se toma el espacio de funciones

$$\partial^{m+1} C_0^\infty(\Omega) = \{ \frac{\partial^{n(m+1)}\phi}{\partial^{m+1}x_1 \cdots \partial^{m+1}x_n} | \phi \in C_0^\infty(\Omega, A^-)\}$$

para toda sucesión $\{\psi_i\}_{i \in N}$ en este espacio, convergiendo a cero en $L_1(A^-)$, dada $\gamma > 0$, con i suficientemente grande, se tiene

$$| \int \frac{\partial^{n(m+1)}\phi_i(x_1, \ldots, x_n)}{\partial^{m+1}x_1 \cdots \partial^{m+1}x_n} \, dx_1 \ldots dx_n | \leq \frac{\gamma}{l^{n(m+1)}}$$

donde l es tal que $A^- \cap [0, l]^n$.

Si $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in N^n$ y $|\alpha| \leq m$

$$|\partial^\alpha \phi_i(x)| =$$

$$| \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \frac{\partial^{n(m+1)}\phi_i(x_1, \cdots, x_n)}{\partial^{m+1}x_1 \cdots \partial^{m+1}x_n} d^{m+1-\alpha}x_1 \cdot \cdot d^{m+1-\alpha_i}x_i \cdot \cdot d^{m+1-\alpha_n}x_n|$$

$$< \gamma$$

donde $d^{m+1-\alpha_i}$ indica una integración de $m + 1 - \alpha_i$-veces en la variable x_i.

Si se toma $\gamma = \delta$, para toda i suficientemente grande se obtiene

$$| < u, \phi_i > | < \epsilon$$

Como $C_0^\infty(\Omega, A^-)$ es un espacio métrico, la funcional lineal

$$u_1 : \partial^{m+1} C_0^\infty(\Omega, A) \rightarrow C$$

dada por

$$< u, \frac{\partial^{n(m+1)}\phi}{\partial^{m+1}x_1 \cdots \partial^{m+1}x_n} > = < u, \phi >$$

es continua.

Utilizando ahora el teorema de Hahn-Banach, se tiene la funcional lineal

$$< \tilde{u}_1, \cdot >: L_1(A^-) \rightarrow C$$

extensión continua de u_1, y asociada a esta extensión por el teorema de Riesz, existe $g_1 \in L_\infty(\Omega)$ tal que

$$< \tilde{u}_1, \psi > = \int g_1(x_1, \ldots, x_n)\psi(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \cdots dx_n \text{ con } \psi \in L_1(A)$$

Tomando $\tilde{g} \in C(A)$ dada por

$$\tilde{g}(x_i, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} g_1(t_1, \cdots, t_n)\, dt_1 \cdots dt_n$$

se tiene

$$< u, \phi >= (-1)^n \int \frac{\tilde{g}(t_1, \ldots, t_n) \partial^{n(m+1)} \phi(t_1, \ldots, t_n)}{\partial^{m+2} x_1 \cdots \partial^{m+2} x_n}\, dt_1 \cdots dt_n$$

donde $\phi \in C_0^\infty(\Omega, A^-)$. De esta manera con

$$g = (-1)^{n(m+1)}\, \tilde{g} \quad \text{y} \quad \alpha = (n(m+2), \ldots, n(m+2))$$

se obtiene el resultado.

◇

En el caso en que u sea un elemento del espacio $E\prime(\Omega)$, el resultado anterior es muy bueno, como se ve en el siguiente resultado.

Teorema 4

Si $u \in E\prime(\Omega)$ existe $g \in C_0(\Omega)$ con *suppg* contenido en una vecindad de *suppu* tal que

$$u = \sum_{|p| \leq r} \partial^p g \quad \text{y} \quad r \in N$$

Demostración

Por el teorema anterior tomando $A \subset \Omega$ un conjunto abierto relativamente compacto y $suppu \subset A$, existe $g \in C(\Omega)$ tal que

$$u = \partial^\alpha g \quad \text{y} \quad A$$

Si $\beta \in C_0^\infty(A)$ con $\beta = 1$ en una vecindad de *suppu* entonces

$$\beta u = u$$

y

$$< \beta u, \phi >=$$

$$(-1)^{|\alpha|} \int g(x_1, \ldots, x_n) \partial^\alpha(\beta(x_1, \ldots, x_n) \phi(x_1, \ldots, x_n))\, dx_1 \cdots dx_n$$

Como

$$\partial^\alpha(\beta\phi) = \sum_{p \leq \alpha} \frac{\alpha!}{p!(\alpha - p)!} \partial^{\alpha - p} \beta \partial^p \phi$$

se puede considerar

$$g = (-1)^{|\alpha| + |p|} \frac{\alpha!}{p!(\alpha - p)!} g \partial^{\alpha - p} \beta$$

◇

De los teoremas anteriores se tienen las siguientes observaciones.

En el teorema 1 se ve que toda distribución en $\mathcal{D}'(\Omega)$ se puede considerar como una sucesión de Cauchy en el espacio $C_0^\infty(\Omega)$, e inversamente si $\{u_i\}_{i\in N}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio $C_0^\infty(\Omega)$ entonces la expresión

$$u(\phi) = \lim_{i\to\infty} < u_i, \phi > \quad \text{con} \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

esta bien definida y determina una distribución.

La propiedad dada en el teorema 3 desafortunadamente no es de caracter global, por ejemplo la distribución en R dada por

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{(k)}^k$$

donde $< \delta_{(k)}^k, \phi >= \partial^k \phi(k)$ y $k \in N$, no tiene asociada una función continua g tal que

$$< u, \phi >= \int g(x) \partial^\alpha \phi(x)\, dx \quad \text{para toda} \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

pues dada g existen ϕ_1 y ϕ_2 en $C_0^\infty(\Omega)$ que tienen sus derivadas de cualquier orden iguales en N, pero las integrales

$$\int g(x_1, \ldots, x_n) \partial^\alpha \phi_1(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

$$\int g(x_1, \ldots, x_n) \partial^\alpha \phi_2(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

son distintas para toda $\alpha \in N^n$.

Schwartz llegó al resultado del teorema 4 con la esperanza de poder definir el producto de distribuciones, al menos en $E'(\Omega)$ en forma consistente. Por el teorema 1 se ve que el producto de la distribución delta de Dirac consigo misma no se puede hacer.

De lo contrario tomando una sucesión $\{\alpha_{\epsilon_i}\}_{i\in N}$ como antes y

$$\phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

con $\phi(0) \neq 0$ debe cumplirse.

$$< \delta \cdot \delta, \phi >= \lim_{i\to\infty} < \delta, \alpha_{\epsilon_i} \phi >= \lim_{i\to\infty} \frac{\phi(0)}{\epsilon_i^n}$$

pero la última expresión no esta definida.

CAPITULO 3

Transformada de Fourier

En este capítulo se estudia la transformada de Fourier en el espacio de distribuciones, sumamente importante en este trabajo. Esto da origen al teorema de Paley-Wiener- Schwartz, criterio analítico que da información sobre cuando una distribución es en realidad una función en $C_0^\infty(\Omega)$ ó $E\prime(\Omega)$.

Definición de la transformada de Fourier

La transformada de Fourier para un elemento u en el espacio $L_1(\Omega)$, se define como la función

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-i<x,\xi>} u(x)\, dx$$

En el caso particular en que $u \in C_0^\infty(R^n)$, la transformada de Fourier $\widehat{u}$ no necesariamente es de nuevo un elemento en $C_0^\infty(R^n)$, hay sin embargo un subespacio muy importante de $L_1(\Omega)$; cuyo origen se encuentra en los trabajos de Sobolev sobre el problema de Cauchy en ecuaciones diferenciales; en donde la transformada de Fourier resulta una transformación isomorfa algebraicamente, y con cierta topología tambien resulta un homeomorfismo.

Para ver esto se tienen las siguientes definiciones y teoremas.

Definición 1

Una función $\phi \in C^\infty(R^n)$ decrece rápidamente si para toda $\alpha,\ p \in N^n$

$$\lim_{|x|\to\infty} |x^\alpha \partial^p \phi(x)| = 0$$

El conjunto de tales funciones se denotará por $S(R^n)$.

A $S(R^n)$ se le dará la topología generada por la familia de seminormas $\{\gamma_{\alpha,p}\}$ con $\alpha, p \in N^n$ y

$$\gamma_{\alpha,p}(\phi) = \sup_{x\in R^n} |x^\alpha \partial^p \phi(x)| \quad \text{con} \quad \phi \in S(R^n)$$

Teorema 1

El espacio $S(R^n)$ con la topología generada por la familia de seminormas $\{\gamma_{\alpha,p}\}$, donde $\alpha, p \in N^n$, es de Frechet.
ver[1]$\diamond$

En analogía a los teoremas 6, 8 y 10 del capítulo 1, los siguientes resultados en el espacio $S(R^n)$ son importantes.

Teorema 2

Si $A \subset S(R^n)$ es acotado y se tienen m, p en N^n, existe $c > 0$ tal que

$$|x^m \partial^p \phi(x)| < c \quad \text{con} \quad \phi \in A$$

ver[1]$\diamond$

Teorema 3

Una sucesión $\{\phi_i\}_{i\in N}$ en $S(R^n)$ converge a cero si dado cualquier polinomio y cualquier operador diferencial $Q(\partial)$, la sucesión $\{P(x)Q(\partial)\phi_i\}_{i\in N}$ converge uniformemente a cero en R^n.

Teorema 4

Las inclusiones

$$C_0^\infty(R^n) \hookrightarrow S(R^n) \hookrightarrow C^\infty(R^n)$$

son continuas, con $C_0^\infty(R^n)$ denso en $S(R^n)$ y este en $C^\infty(R^n)$

Demostración

$C_0^\infty(R^n)$ es denso en $C^\infty(R^n)$, así, $S(R^n)$ resulta denso en $C^\infty(R^n)$.

Tomando una sucesión $\{\beta_j\}_{j\in N}$ en $C_0^\infty(R^n)$ tal que $\beta_j = 1$ en la bola $B_j(0)$, entonces

$$\beta_j\phi \to \phi$$

en $S(R^n)$, si $\phi \in S(R^n)$.

Para la continuidad de las inclusiones basta considerar sucesiones convergiendo a cero en $C_0^\infty(R^n, K)$, donde $K \subset R^n$ es un conjunto compacto y en $S(R^n)$, pues estos espacios son métricos.

$\diamond$

El resultado más importante para el espacio $S(R^n)$ es el siguiente.

Teorema 5

Si $u \in S(R^n)$ entonces

i) $\widehat{u} \in S(R^n)$

ii) La función $\breve{u}$ llamada la transformada inversa de Fourier de u, dada por

$$\breve{u}(\xi) = \int e^{i<x,\xi>} u(x)\, dx$$

con $x \in R^n$, es un elemento de $S(R^n)$.

iii) $\widehat{\breve{u}} = u$

iv) La función $F : S(R^n) \to (R^n)$ con $F(u) = \breve{u}$, es un homeomorfismo, donde $F^{-1}(u) = \widehat{u}$.

Demostración

i) Si $u \in S(R^n)$ y $\alpha, p \in N^n$

$$\partial^p \widehat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-i<x,\xi>} \xi^p u(x)\, dx$$

con lo que

$$\xi^{\alpha+p} \widehat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-i<x,\xi>} \xi^{\alpha+p} u(x)\, dx =$$

$$\frac{(-1)^{|\alpha|+|p|}}{(2\pi)^n} \int e^{-i<x,\xi>} \partial^{\alpha+p} u(x)\, dx$$

así

$$|\xi^{\alpha+p} \widehat{u}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int |\partial^{\alpha+p} u(x)|\, dx$$

donde el segundo miembro de la desigualdad es menor o igual a

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{1+|x|^2}{1+|x|^2} |\partial^{\alpha+p} u(x)|\, dx \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{c}{1+|x|^2}\, dx < \infty$$

ii) Sean $\alpha, p \in N^n$. Como en i) se obtiene

$$|\xi^\alpha \partial^p \widehat{u}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int |\partial^{\alpha+p} u(x)\, dx| < \infty$$

iii) Primero, sea la función $g = e^{\frac{-|\,|^2}{2}}$, entonces

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{\frac{-|x|^2}{2}} e^{-i<x,\xi>}\, dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{\frac{-|x+i\xi|^2}{2}} e^{\frac{-|\xi|^2}{2}}\, dx$$

donde

$$\int e^{\frac{-|x+\xi|^2}{2}}\, dx = \int e^{\frac{-|x|^2}{2}}\, dx = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$$

Así

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|\xi|^2}{2}}$$

Considerando ahora la identidad

$$\int \widehat{u}(\xi) g(\epsilon\xi) e^{i<x,\xi>}\, d\xi =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int g(\epsilon\xi) e^{i<x,\xi>} \left[\int e^{-i<y,\xi>} u(y)\, dy\right] d\xi$$

de la última expresión se obtiene

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{i<x-y,\xi>} g(\epsilon\xi) u(y)\, dy\, d\xi =$$

$$\epsilon^n \int \widehat{g}(\frac{y-x}{\epsilon})u(y)\,dy$$

y por el cambio de variable $y = x + \epsilon z$

$$\int \widehat{u}(\xi)g(\epsilon\xi)e^{i<x,\xi>}\,d\xi = \int \widehat{g}(y)u(x+\epsilon y)\,dy$$

entonces

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int \widehat{u}(\xi)g(\epsilon\xi)e^{i<x,\xi>}\,d\xi = \breve{\widehat{u}}(x)$$

y

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int \widehat{g}(\xi)u(x+\epsilon\xi)\,d\xi = u(x)$$

iv) Por ser $S(R^n)$ un espacio métrico para cualquier sucesión $\{u_i\}_{i\in N}$ en $S(R^n)$ convergiendo a cero, dadas m, $p \in N^n$ y $\epsilon > 0$ con $|m| > 2n$, existe $j_{m,p,\epsilon} \in N$ tal que

$$|(|x^m|+1)\partial^p u_k(x)| < \frac{\epsilon}{4^{9}} \text{ con } k > j_{m,p,\epsilon}$$

y

$$|x^m\partial^p\,\widehat{u_k}(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n}\int \frac{(|\xi^m|+1)|\partial^p u_k(\xi)|}{|\xi^m|+1}\,d\xi < \epsilon$$

en forma análoga se ve que F^{-1} es continua.

◇

En el curso de la demostración del teorema anterior se obtienen las siguientes propiedades.

Teorema 6 Si $u \in S(R^n)$

i) $\widehat{ix_j u} = -\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \xi_j}$

ii) $\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}} = i\xi_j\,\widehat{u}$

iii) En general si $p(X,D) = \sum a_p(x)D^p$ es un operador diferencial, con coeficientes constantes donde

$$D^p = \frac{1}{i^{|p|}}\partial^p$$

se tiene

$$\widehat{P(X,D)u} = P(X,\cdot)\,\widehat{u}$$

◇

Otras propiedades del espacio $S(R^n)$, fácilmente verificables son las siguientes.

Teorema 7

La inclusión

$$S(R^n) \hookrightarrow \wp'(R^n)$$

es continua.

ver[1]◇

Teorema 8

Si $S'(R^n)$* denota al dual topológico del espacio $S(R^n)$ y tiene la topología fuerte, las inclusiones

$$E'(R^n) \hookrightarrow S'(R^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(R^n)$$

son continuas.

Demostración

Fácilmente se ve que todo conjunto acotado en $C_0^\infty(R^n)$ lo es en el espacio $S(R^n)$, y todo conjunto que es acotado en $S(R^n)$ lo es en $C^\infty(R^n)$.

ver[1]◇

Teorema 9

Si $u \in S'(R^n)$, existen $m, p \in N^n$ y $c > 0$ tales que

$$| < u, \phi > | < c \sup |x^m \partial^p \phi(x)|$$

ver[1]◇

El espacio $S'(R^n)$ es importante por la siguiente propiedad que da una motivación para definir la transformada de Fourier de forma sencilla en $S'(R^n)$.

Teorema 10

Si $f, g \in S(R^n)$

$$\int \widehat{f}(x) g(x)\, dx = \int f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx$$

ver[1]◇

Definición 2

Si $u \in S'(R^n)$, se define la transformada de Fourier de u como la distribución $\widehat{u} \in S'(R^n)$ tal que

$$< \widehat{u}, \phi >=< u, \widehat{\phi} > \quad \text{con} \quad \phi \in S(R^n)$$

y se define la transformada inversa de Fourier de u, como la distribución $\breve{u} \in S'(R^n)$ tal que

$$< \breve{u}, \phi >=< u, \breve{\phi} > \quad \text{con} \quad \phi \in S(R^n)$$

Teorema 11

Si $S'(R^n)$ tiene la topología fuerte, el mapeo

$$F : S'(R^n) \to S'(R^n)$$

dada por

$$F(u) = \widehat{u} \quad \text{con} \quad u \in S'(R^n)$$

* A este espacio se le da el nombre de las distribuciones temperadas

es un homeomorfismo, donde F^{-1} está definida como

$$F^{-1}(u) = \breve{u} \quad \text{con} \quad u \in S'(R^n)$$

ver[1]◇

Operaciones en el espacio $S'(R^n)$

Muy importante para el capítulo 4 es la transformada de Fourier del producto de distribuciones y calcular su valor. Aquí sólo se menciona un caso particular, en que tal operación se puede efectuar, que basta para el desarrollo posterior.

Teorema 12

Si $\phi \in S(R^n)$ y $u \in S'(R^n)$, la distribución producto es un elemento en $S'(R^n)$, y tal operación es separadamente continua en cada variable.

ver[1]◇

Teorema 13

Si $u \in S'(R^n)$ y $v \in E'(R^n)$ la convolución existe, es un elemento en $S'(R^n)$ y resultando separadamente continua en cada variable.

Demostración

Por el teorema 14 del capítulo 2

$$v = \sum \partial^p g_p \quad \text{con} \quad g_p \in C_0(R^n) \quad \text{y} \quad suppu \subset suppg_p$$

Para cualquiera de estas funciones g_p, dada $\phi \in S(R^n)$, se tiene

$$\psi(\xi) =< \partial^p g_p, \phi(\xi + \cdot) >= (-1)^{|p|} \int g_p(\eta) \partial^p \phi(\xi + \eta)\, d\eta$$

Así

$$(1 + |\xi|^2)^m \partial^q \psi(\xi) = \int (-1)^{|p|} g_p(\eta)(1 + |\xi|^2)^m \partial^{p+q} \phi(\xi + \eta)\, d\eta \tag{1}$$

usando en 1 la desigualdad

$$1 + |\xi|^2 \leq 2(1 + |\eta|^2)(1 + |\xi + \eta|^2)$$

se obtiene

$$|(1 + |\xi|^2)^m \partial^q \psi(\xi) \leq 2 \int |(1 + |\eta|^2)^m g_p(\eta)(1 + |\xi + \eta|^2)^m \partial^{p+q} \phi(\xi + \eta)|\, d\eta$$

como existe $c > 0$ tal que $|g_p(\eta)(1 + |\eta|^2)^m| < c$ para toda η, entonces

$$|(1 + |\xi|^2)^m \partial^q \psi(\xi)| \leq 2c \int |(1 + |\xi + \eta|^2)^m \partial^{p+q} \phi(\xi + \eta)|\, d\eta$$

haciendo el cambio de variable $\eta_1 = \xi + \eta$

$$|(1 + |\xi|^2)^m \partial^q \psi(\xi)| \leq 2c \int |(1 + |\eta|^2)^m \partial^{p+q} \phi(\eta)|\, d\eta \tag{2}$$

pero

$$|(1 + |\cdot|^2)^m \partial^{p+q} \phi \in S(R^n)$$

entonces el segundo miembro de la desigualdad 2 está acotado.

De esta manera por la desigualdad del triángulo se puede ver que la función

$$\psi = < v, \phi(\cdot + \cdot) >$$

es un elemento del espacio $S(R^n)$. Además por la topología que tiene el espacio $S(R^n)$ la función $< u, \phi(\cdot + \cdot) >$ está en $C^\infty(\Omega)$ y quedan bien definidas las expresiones

$$< u, < v, \phi(\cdot + \cdot) >>$$

y

$$< v, < u, \phi(\cdot + \cdot) >>$$

coincidiendo en $C_0^\infty(R^n)$.

Así, en el espacio $S(R^n)$ se puede definir la convolución de u y v como

$$< u * v, \phi > = < u, < v, \phi(\cdot + \cdot) >> \quad \text{con} \quad \phi \in S(R^n) \tag{3}$$

Para demostrar que la convolución es continua separadamente en cada variable, es suficiente por la definición dada en 3, ver que para todo conjunto $A \subset S(R^n)$ acotado, los conjuntos

$$B = \{< v, \phi(\cdot + \cdot) > | \phi \in A\}$$
$$C = \{< u, \phi(\cdot + \cdot) > | \phi \in A\}$$

son acotados en $S(R^n)$ y $C^\infty(R^n)$ respectivamente.

Así, con A acotado en $S(R^n)$ existe $c_1(m, p, q) > 0$ que depende de m, p y q tal que

$$|(1 + |\xi|^2)^m \partial^p \psi(\xi)| \leq 2c \cdot c_1(m, p, q) \text{ con } \xi \in R^n$$

Por lo tanto B resulta acotado en $S(R^n)$.

Por otra parte por el teorema 9, para todo $K \subset R^n$ compacto y $c > 0$, se tiene

$$| < u, \phi(\cdot + y) > | < c|(x + y)^m \partial\phi(x + y)| < c \cdot c_1(m, p, q)$$

con $y \in K$.

Por lo tanto C es un conjunto acotado en $C^\infty(R^n)$.

ver[1]$\diamond$

Con este resultado se puede enunciar un caso especial de la transformada de Fourier de la convolución de dos distribuciones.

Teorema 14

Dadas $\phi \in S(R^n)$ y $u \in E'(R^n)$

$$\widehat{\phi * u} = \widehat{\phi} \cdot \widehat{u}$$

Demostración

Si $\psi \in S(R^n)$, por la definición 2 y el teorema 12

$$< \widehat{\phi * u}, \psi > = < \phi * u, \widehat{\psi} > = < u, < \phi, \widehat{\psi}(\cdot + \cdot) >>$$

en donde

$$< \phi, \widehat{\psi}(\cdot + \cdot) >= \int \phi(\xi)\, \widehat{\psi}(\eta + \xi)\, d\xi = \int \phi(\xi - \eta)\, \widehat{\psi}(\xi)\, d\xi$$

Como

$$\widehat{\widehat{\phi}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-i<x,\xi>}\, \widehat{\phi}(\xi)\, d\xi = \phi(-x)$$

entonces

$$\int \phi(\xi - \eta)\, \widehat{\psi}(\xi)\, d\xi = \int \widehat{\widehat{\phi}}(\eta - \xi)\, \widehat{\psi}(\xi)\, d\xi = \widehat{\widehat{\phi}} * \widehat{\psi}(\eta)$$

y

$$\widecheck{\widehat{\widehat{\phi}} * \widehat{\psi}}(\xi) = \int \left[\int \widehat{\widehat{\phi}}(x - t) e^{i<x-t,\xi>}\, dx\right] \widehat{\psi}(t) e^{i<t,\xi>}\, dt$$

$$= \left(\int \widehat{\widehat{\phi}}(x) e^{i<\xi,x>}\, dx\right) \left(\int \widehat{\psi}(t) e^{i<t,\xi>}\, dt\right) = \widecheck{\widehat{\widehat{\phi}}} \cdot \widecheck{\widehat{\psi}}(\xi)$$

entonces

$$< \widehat{\phi * u}, \psi >=< u, \widehat{\widehat{\widehat{\phi}} * \widehat{\psi}} >=< \widehat{u}, \widecheck{\widehat{\widehat{\phi}}} \cdot \widecheck{\widehat{\psi}} >=$$

$$< \widehat{u}, \widehat{\phi} \cdot \psi >=< \widehat{\phi} \cdot \widehat{u}, \psi >$$

ver[1],[2]◇

Teorema de Paley-Wiener-Schwartz

El teorema de Paley-Wiener-Schwartz, da una herramienta muy poderosa en la busqueda de condiciones analíticas que garantizan cuando una distribución está en los espacios $E\prime(R^n)$ ó $C_0^\infty(R^n)$, o como se verá en el capítulo 4, en que puntos localmente se comporta como una función de clase C^∞. Este teorema involucra la construcción de funciones analíticas en C^n. Así primero se define este concepto, que es completamente análogo al caso de C.

Definición 3

Si se denota a la variable en C^n por

$$\varsigma = (\varsigma_1, \ldots, \varsigma_n)$$

donde $\varsigma_j = \xi_j + i\eta_j$ con ξ_j, $\eta_j \in R$ y se define

$$\frac{\partial}{\partial \varsigma_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} - i\frac{\partial}{\partial \eta_j}\right)$$

una función $f : U \subset C^n \to C$ con U abierto, es analítica, si para todo $x \in U$

$$\frac{\partial f}{\partial \varsigma^j} = 0 \text{ con } j = 1, \ldots, n$$

Teorena 15 (Paley-Wiener-Schwartz)

i) La transformada de Fourier de una distribución $u \in E\prime(R^n)$ es una función analítica F en C^n para la que existen constantes c, $A \in R$ y $r \in N$ tales que

$$|F(\varsigma)| \leq c(1+|\varsigma|)^r e^{A|Im\varsigma|} \quad \text{con} \quad \varsigma \in C^n \tag{1}$$

e inversamente, toda función analítica que cumpla la condición 1 en C^n, es la transformada de Fourier de una distribución en $E\prime(R^n)$.

ii) La transformada de fourier de una función $u \in C_0^\infty(R^n)$ es una función analítica F en C^n para la que existe $A > 0$ tal que para toda $r \in N$ existe c_r y

$$|F(\varsigma)| \leq c_r(1+|\varsigma|)^{-r} e^{A|Im\varsigma|} \quad \text{con} \quad \varsigma \in C^n \tag{2}$$

e inversamente, toda función analítica que cumple la condición 2 en C^n, es la transformada de Fourier de una función en $C_0^\infty(R^n)$.

Demostración

i) Si $u \in E\prime(R^n)$ y $\{\alpha_{\epsilon_j}\}_{j\in N}$ es una sucesión de funciones en $C_0^\infty(R^n)$ como las construidas en el capítulo anterior, entonces por el teorema 31 de capítulo 1

$$u * \alpha_{\epsilon_j} \in C_0^\infty(R^n)$$

Para estas funciones la transformada de Fourier esta dada por

$$< u * \alpha_{\epsilon_j}, e^{-i<\cdot,\cdot>} >$$

Sea ahora $\phi \in C_0^\infty(R^n)$ tal que $\phi(\xi) \neq 0$. Por el teorema 14

$$\widehat{\phi * u}(\xi) = \widehat{\phi}(\xi) \cdot \widehat{u}(\xi)$$

así $\widehat{u} \in C^\infty(R^n)$.

Aplicando el teorema 1 del capítulo 2 a la delta de Dirac, se obtiene

$$\alpha_{\epsilon_j} \rightarrow \delta$$

con lo que

$$\phi = \overset{\frown}{\widehat{\phi}} = \widehat{\breve{u} * \delta} = \overset{\frown}{\widehat{\phi}} \cdot \widehat{\delta} = \phi \cdot \widehat{\delta}$$

entonces

$$\widehat{\delta} = 1 \ \text{ y } \ \widehat{\delta} = < \delta, e^{-i<\cdot,\cdot>} >$$

Con esto, dada $\frac{\epsilon}{2}$, existe $K(\frac{\epsilon}{2}) \in N$ tal que

$$|1 - \alpha_{\epsilon_j}(\xi)| = |< \delta, e^{-i<\cdot,\xi>} > - < \alpha_{\epsilon_j}, e^{-i<\cdot,\xi>} >| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

con $j \geq K(\frac{\epsilon}{2})$. y por el teorema 1 del capítulo 2

$$|< u, e^{-i<\cdot,\xi>} > - < u * \alpha_{\epsilon_j}, e^{-i<\cdot,\psi>} >| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Por lo tanto

$$|< u, e^{-i<\cdot,\xi>} > - \widehat{u}(\xi)| < \epsilon \;\text{ con }\; j \geq K(\frac{\epsilon}{2})$$

De esta manera se ve que la transformada de Fourier de la distribución u esta dada en $\xi \in R^n$ por

$$\widehat{u}(\xi) = < u, e^{-i<\cdot,\xi>} >$$

Si se toma ahora la variable $\varsigma \in C^n$, la expresión

$$\widehat{u}(\varsigma) = < u, e^{-i<\cdot,\varsigma>} >$$

está bien definida y es una extensión a C^n de $\widehat{u}$, que resulta analítica en C^n.

Aplicando el teorema 15 del capítulo 1 a la distribición u, se tiene la existencia de $c > 0$, $K \subset R^n$ compacto y $r \in R$ tal que

$$| < u, e^{-i<x,\varsigma>} | \leq c \sup_{x \in K, |\alpha| \leq N} |D^\alpha e^{-i<x,\varsigma>}|$$

Como

$$|D^\alpha e^{-i<x,\varsigma>}| = |\varsigma^\alpha e^{-i<x,\xi+i\eta>}| \leq |\varsigma|^{|\alpha|} |e^{<x,\eta>}|$$

con $A \in R$ suficientemente grande tal que, $K \subset B_A(0)$, y la desigualdad de Schwartz

$$< x, \eta > \leq A|\eta| \;\text{ con }\; x \in K$$

entonces

$$| < u, e^{-i<x,\varsigma>} > | \leq c(1 + |\varsigma|)^r e^{A|Im\varsigma|}$$

En el caso particular en que $u \in C_0^\infty(R^n)$, tomando A tal que $supp u \subset B_A(0)$

$$|\varsigma_j^{2me_j} \widehat{u}(\varsigma)| = \frac{1}{(2\pi)^n} |\int e^{-i<\eta,\varsigma>} D^{2me_j} u(\eta)\, d\eta| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} c_{2me_j} e^{A\eta}$$

donde e_j es el j-ésimo vector canónico en N^n, $m \in N$ y $c_{2me_j} = \sup_{\eta \in R^n} |D^{2me_j} u(\eta)|$.

Así

$$(1 + |\varsigma|)^r |\widehat{u}(\varsigma)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{m=0}^{r} \binom{r}{m} \sum_{j=1}^{n} c_{2me_j} e^{A\eta}$$

y con

$$c_n = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{m=0}^{r} \binom{r}{m} \sum_{j=1}^{n} c_{2me^j}$$

se obtiene 2.

Inversamente si se cumple 2, tomando

$$u_\eta(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int F(\xi + \eta) e^{i<x,\xi+i\eta>} d\xi$$

u_η resulta un elemento en $C^\infty(R^n)$ y

$$|u_\eta(x)| \le \frac{c_r}{(2\pi)^n}\int (1+|\xi+i\eta|)^{-r} e^{A|\eta|-<x,\eta>}\, d\xi \le$$

$$\frac{c_r e^{A|\eta|-<x,\eta>}}{(2\pi)^n}\int (1+|\xi|)^{-n}\, d\xi$$

tomando $r = n+1$ se obtiene

$$|u_\eta(x)| \le \frac{4^n c_{n+1}}{(2\pi)^n} e^{A|\eta|-<x,\eta>} \quad \text{con} \quad \eta \in R^n$$

y si $\eta = tx$

$$|u_\eta(x)| \le \frac{4^n c_{n+1}}{(2\pi)^n} e^{-t(|x|^2 - A|x|)}$$

Así cuando $t \to \infty$, para $x \in R^n$ con $|x| > A$, se tiene $u_\eta(x) = 0$. Además como se cumple 2

$$\lim_{|\varsigma|\to\infty} F(\varsigma)e^{-i<x,\varsigma>} = 0$$

y por ser F analítica

$$\frac{\partial u_\eta}{\partial \eta_j}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \frac{\partial F}{\partial \eta_j}(\xi+i\eta)e^{i<x,\xi+i\eta>}\, d\xi - F(\xi+i\eta)e^{i<x,\xi+i\eta>}x_j$$

en donde

$$\int \frac{\partial F}{\partial \eta_j}(\xi+i\eta)e^{i<x,\xi+i\eta>}\, d\xi = -F(\xi+i\eta)e^{i<x,\xi+i\eta>}\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$+\int F(\xi+i\eta)x_j e^{i<x,\xi+i\eta>}\, d\xi$$

por lo tanto

$$\frac{\partial u_\eta}{\partial \eta_j} = 0$$

De esta manera se tiene que $u_\eta(x) = u_o(x)$ para todo $x \in R^n$ y $u_o(x)$ es la transformada inversa de Fourier de F.

Por último, si se cumple 1 para toda $\phi \in S(R^n)$, se tiene

$$\left|\int F(\xi)\phi(\xi)\, d\xi\right| \le c\int (1+|\xi|)^r |\phi(\xi)|\, d\xi < \infty$$

con lo que $F \in S\prime(R^n)$ y $\breve{F} \in S(R^n)$.

Aplicando 1, 2 y el teorema 14

$$|\widehat{\breve{F} * \alpha_{\epsilon_j}}(\varsigma)| = |F \cdot \widehat{\alpha_{\epsilon_j}}(\varsigma)| \le$$

$$c_{2r}(1+|\varsigma|)^{-r} e^{2(A+\epsilon_j)|Im\varsigma|}$$

entonces $\breve{F} * \alpha_{\epsilon_j}$ es una función de clase C^∞ con soporte en $B_{A+\epsilon_j}(0)$ que converge a $\breve{F}$, cuyo soporte está en $B_A(0)$.

CAPITULO 4

Singularidades

Cuando se tiene una ecuación diferencial dada por un operador

$$P = P(X, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha \quad \text{con} \quad a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$$

de la forma $Pu = f$, se trata de encontrar una solución u.

La existencia de tal solución se puede pensar no en un espacio de funciones sino en un espacio de distribuciones. Es decir se pregunta por la existencia de $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que

$$Pu = f$$

donde la derivada de la distribución u y la multiplicación de esta por una función son como se definieron en los capítulos anteriores. En este contexto se pueden plantear las siguientes preguntas.

1. ¿ Dada la ecuación diferencial $Pu = f$ con $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, existe una solución u en $\mathcal{D}'(\Omega)$?

2. ¿ Si tal solución existe, es realmente una función ? o

3. ¿ Qué tanto se parece tal solución a una función ? ¿ En que sentido ?

En este capítulo se estudian los puntos donde una distribución no se comporta localmente como una función de clase C^∞, definiendo para ello el frente de onda de una distribución.

Par u se definió el conjunto *suppu* como el complemento en Ω de

$$\{x \in \Omega | \text{ existe } V \subset \Omega \text{ abierto } , x \in V \text{ y } u|_V = 0\}$$

Imitando esto, se puede tomar la siguiente definición.

Definición 1

Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ el conjunto *singsuppu* es el complemento en Ω de

$$\{x \in \Omega | \text{ existe } V \subset \Omega \text{ abierto}, x \in V \text{ y } u|_V \in C_0^\infty(\Omega)\}$$

y se llama el soporte singular de u.

El soporte singular de una distribución es el conjunto de puntos donde una distribución no se comporta localmente como una función de clase C^{∞}.

Un refinamiento del último conjunto se puede dar con la ayuda de las siguientes definiciones.

Definición 2

Un conjunto $V \in R^n$ es un cono abierto (cerrado) si V es un conjunto abierto (cerrado) en R^n, tal que para cada $x \in V$ se tiene

$$\{tx \in R^n | t \in R^+\} \subset V$$

Definición 3

Si $u \in E\prime(\Omega)$, entonces

$$\eta \notin \sum u \ \text{ con } \ \eta \in R^n - \{0\}$$

si existe un cono abierto V con $\eta \in V$ tal que

$$|\widehat{u}(\xi)| \leq c_m(1+|\xi|)^{-m} \ \text{ con } \ m \in N \ \text{ y } \ \xi \in V$$

donde c_m es una constante que depende de m.

Fácilmente se observa que para $u \in E\prime(\Omega)$, el conjunto $\sum u$ es cerrado.

Se tienen tambien los siguientes resultados importantes.

Teorema 1

Si $u \in E\prime(\Omega)$ y $\phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ entonces

$$\sum(\phi u) \subset \sum u$$

Demostración

Si $\xi \notin \sum u$ y $\phi \in C_0^{\infty}(R^n)$, entonces $\widehat{\phi} \in S(R^n)$, y por el teorema de Paley-Wiener-Schwartz, existen $M \in N$ y $c_i > 0$ tales que

$$|\widehat{u}(\xi)| \leq c_1(1+|\xi|)^M \ \text{ con } \ \xi \in R^n - \{0\}$$

Sea ahora c tal que $0 < c < 1$. Dividiendo R^n en los conjuntos

$$A_\xi = \{\eta \in R^n - \{0\} | |\eta| < c|\eta|\}$$

$$B_\xi = \{\eta \in R^n - \{0\} | |\eta \geq c|\xi|\}$$

Si $\eta \in B_\xi$, como $|\xi - \eta| \leq |\xi| + |\eta| < |\eta| + c^{-1}|\eta|$, entonces

$$|\xi - \eta| \leq (1+c^{-1})|\eta|$$

Además

$$|\int_{|\eta|<c|\xi|} \widehat{u} * \widehat{\phi}(\xi - x)\,dx| \leq \sup_{|\eta|<c|\xi|} |\widehat{u}(\eta)| \int |\widehat{\phi}(\xi - x)|\,dx$$

así

$$|\widehat{u\phi}(\xi)| \leq \sup_{|\eta|\leq c|\xi|} |\widehat{u}(\eta)| \| \widehat{\phi} \|_{L_1} +$$

$$\int_{|\eta|\geq c|\xi|} |\widehat{\phi}(x)|(1+c^{-1})^M (1+|x|)^M \, dx$$

Si Γ es un cono abierto cuya cerradura está contenida en Γ, se puede tomar c tal que

$$\eta \in \Gamma \ \text{si} \ \ \xi \in \Gamma, \ \ \text{y} \ \ |\xi - \eta| < c|\xi|$$

* Así

$$|\eta| > (1-c)|\xi| \ \ \text{con} \ \ \eta \in \Gamma \ \ \text{y} \ \ \xi \in \Gamma_1$$

y

$$\sup_{|\eta|\leq|\xi|} |\widehat{u}(\eta)|(1+|\xi|)^m \leq \sup_{\Gamma} |\widehat{u}(\eta)|(1-c)^{-m}(1+|\eta|)^m$$

entonces

$$\sup_{\Gamma_1}(1+|\xi|)^m |\widehat{\phi u}(\xi) \leq$$

$$(1-c^{-1})^{-m} \sup_{\Gamma} |\widehat{u}(\eta)|(1+|\eta|)^m \| \widehat{\phi} \|_{L_1} + c_1(1+c^{-1})^{M+m} \int |\widehat{\phi}|(1+x|)^{M+m} \, dx$$

$$< c\prime_m$$

donde $c\prime_m$ es una constante que depende de m.

Por lo tanto

$$\xi \notin \sum \phi u$$

◇

Una generalización del conjunto $\sum u$ con $u \in E\prime(\Omega)$ para el espacio $\wp\prime(\Omega)$, esta dada de la siguiente forma.

Definición 4

Si $u \in \wp\prime(\Omega)$ y $x_o \in \Omega$

$$\sum_{x_o} u = \bigcap_{\phi \in C_0^\infty(\Omega), \phi(x_o)\neq 0} \sum \phi u$$

En combinación con el soporte singular de una distribución, se tiene la siguiente definición importante, dada por primera vez por Lars Hörmander en 1970.

Definición 5

Si $u \in \wp\prime(\Omega)$, el frente de onda de u es el conjunto

$$WFu = \{(x,\xi) \in \Omega \times R^n - \{0\} | \xi \in \sum_x u\}$$

Por su dfinición el frente de onda de una distribución es cerrado en $\Omega \times R^n - \{0\}$ y resulta invariante bajo multiplicaciones por escalares positivos en ξ. Por lo tanto, se

---

*Para $\xi \in \Gamma_1 \cap S^{n-1}$, existe una bola $B_{r_\xi}(\xi) \subset \Gamma$ con $r_\xi < 1$, por lo tanto $r_{\xi_1}, \ldots, r_{\xi_k} < 1$ tales que $\Gamma_1 \cap S^{n-1} \subset \cup_{j=1}^k B_{r_j}(\xi_j)$. Si $c = \min\{r_{\xi_j}\}$ se tiene este hecho. Cuando $|\xi| \neq 1$ tomando $\frac{|\xi-\eta|}{|\xi|}$ se procede como antes para $\frac{\xi}{|\xi|}$

puede considerar como un subconjunto de $\Omega \times S^{n-1}$. Esta consideración será útil en varias de las pruebas de los resultados siguientes.

Teorema 2

Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, la proyección sobre Ω de WFu, es el conjunto *singsuppu*.

Demostración

Si $(x,\xi) \in WFu$, suponiendo $x \notin singsuppu$, existe $A \subset R^n$ abierto con $x \in A$ tal que $u|_A$ es una función de clase C^∞. Para $\phi_1 \in C_0^\infty(A)$ entonces $\phi_1 u \in C_0^\infty(A)$. De esta manera localmente en x, u es de clase C^∞ y

$$\sum_x u = \bigcap_{\phi \in C_0^\infty(\Omega), \phi(x) \neq 0} \sum \phi u \subset \sum \phi_1 u = \emptyset$$

lo cual es una contradicción.

Por otra parte si $\in singsuppu$ y se supone $\sum_x u = \phi$, considerando al conjunto WFu como un subconjunto de $\Omega \times S^{n-1}$

$$(\sum_x u)^c = (\bigcap_{\phi \in C_0^\infty(R^n), \phi(x) \neq 0} \sum \phi u)^c =$$

$$\bigcup_{\phi \in C_0^\infty(R^n), \phi(x) \neq 0} (\sum \phi u)^c = S^{n-1}$$

Por lo tanto existen funciones ϕ_j $j = 1, \cdots, K$ de clase C^∞ con $\phi_j(x) \neq 0$ tales que

$$\cap_{j=1}^K (\sum_{\phi \in C_0^\infty(R^n), \phi(x) \neq 0} \phi_j u)^c = S^{n-1}$$

Tomando $\phi = \phi_1 \cdots \phi_n$, por el teorema 1

$$\sum \phi u \subset \cap_{j=1}^K \phi_j u = \phi$$

Así $\phi u \in C_0^\infty(\Omega)$, es decir u es una función de clase C^∞ en una vecindad de x, lo cual es una contradicción.

◇

Si $u \in E'(\Omega)$ se tiene más información en el conjunto WFu.

Teorema 3

Si $u \in E'(\Omega)$, la proyección de WFu sobre $R^n - \{0\}$, es el conjunto $\sum u$.

Demostración

Si $(x,\xi) \in WFu$ entonces

$$\xi \in \sum_x u = \bigcap_{\phi \in C_0^\infty(R^n), \phi(x) \neq 0} \sum \phi u \subset \sum u$$

Por otra parte si $\xi \in \sum u$ y $\xi \neq \sum_x u$, para todo $x \in suppu$ existe $V_x \subset R^n$ abierto con $x \in V_x$ tal que $\xi \notin \sum \phi u$ con $\phi \in C_0^\infty(V_x)$ y $\phi(x) \neq 0$. Por un argumento de partición de la unidad, * para $suppu$ existen V_{x_j} con $j = 1, \cdots, K$ abiertos con $x_j \in V_{x_j}$, $\phi_{x_j} \in C_0^\infty(V_{x_j})$ y $\phi_{x_j}(x_j) \neq 0$, tales que $\sum_{j=1}^{K} \phi_j = 1$. De esta manera por la linealidad de la transformada de Fourier y la desigualdad del triángulo se tiene

$$\sum u = \sum((\sum_{j=1}^{K} \phi_j)u) = \sum(\sum_{j=1}^{K} \phi_j u)$$

$$\subset \cup \sum_{j=1}^{K} \phi_j u$$

lo cual es una contradicción.

◇

Localmente el comportamiento de la expresión

$$|\xi|^m |\widehat{\phi u}(\xi)| \quad \text{con} \quad \phi(x_o) \neq 0 \quad \text{y} \quad (x_o, \xi_o) \in \Omega \times R^n - \{0\}$$

se puede observar notando que la función $e^{i\cdot}$ es periódica. Para $(x_o, \xi_o) \in \Omega \times S^{n-1}$ y valores (x, ξ) muy cercanos a este punto, con $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que los puntos de $supp\phi$ esten muy cercanos a x_o, la expresión

$$t^m \, \widehat{\phi u}(t\xi_o) = t^m < u, e^{-i<\cdot, t\xi_o>} \phi >$$

oscila cuando t crece, disipándose tal oscilación si $(x_o, \xi_o) \neq WFu$, pero no cuando $(x_o, \xi_o) \in WFu$, como se muestra en las figuras siguientes.

En el caso en que $(x_o, \xi_o) \neq WFu$

En el caso en que $(x_o, \xi_o) \in WFu$

Ahora se calculará el frente de onda de algunas distribuciones.

* teorema 24 capítulo 1

a) Sea la distribución dada por la delta de Dirac. En este caso, si $\phi \in C_0^\infty(R)$ con $\phi(0) \neq 0$ se tiene

$$\widehat{\phi\delta}(\xi) = < \phi\delta, e^{-i<\cdot,\xi>} > = < \delta, \phi e^{-i<\cdot,\xi>} > = \phi(0)$$

Así para toda $n \in N$ y $\xi \in R^n - \{0\}$

$$|\xi|^m|\widehat{\delta\phi}(\xi)| = |\xi|^m|\phi(0)| \to \infty \quad \text{cuando} \quad \xi \to \infty$$

por lo tanto $(0,\xi) \in WF\delta$.

En los puntos en que $x \neq 0$, δ es localmente de clase C^∞.

De esto se concluye que

$$WF\delta = \{(0,\xi) | \xi \in R - \{0\}\}$$

En general para la delta de Dirac en R^n, se tiene

$$WF\delta = \{(0,\xi) | \xi \in R^n - \{0\}\}$$

b) Sea $X_{[a,b]}$ la función característica del intervalo $[a,b]$ en R^n. Claramente

$$singsuppX_{[a,b]} = \{a,b\}$$

y la transformada de Fourier de la distribución $X_{[a,b]}$ es

$$\widehat{X_{[a,b]}}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)}\int_a^b e^{-ix\xi}\,dx = \frac{-e^{-ib\xi} + e^{-ia\xi}}{i(2\pi)\xi}$$

Como la expresión

$$|\xi|^m(cosa\xi - cosb\xi + isenb\xi - isena\xi)$$

no está acotada cuando $\xi \to \infty$, entonces

$$(1 + |\xi|)^m|\widehat{X_{[a,b]}}(\xi)|$$

no está acotada cuando $\xi \to \infty$ y $m \geq 2$.

Como $X_{[a,b]} \in E\prime(R)$, por el teorema 3

$$\sum X_{[a,b]} = R - \{0\} \tag{1}$$

Si existiera $(a,\eta) \notin WFX_{[a,b]}$, para alguna función $\phi \in C_0^\infty((a\prime, \frac{a+b}{2}))$ con $a\prime < a$, $\phi(a) \neq 0$ y V cono abierto en R con $\eta \in V$, se tendría

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} \phi(x)e^{-ix\xi}\,dx = \int_{b-a+a\prime}^{\frac{3b-a}{2}} \phi(x+a-b)e^{-i(x+a-b)\xi}\,dx =$$

$$e^{-i(a-b)\xi}\int_{b-a+a\prime}^{\frac{3b-a}{2}} \phi(x+a-b)e^{-ix\xi}\,dx$$

así

$$(1+|\xi|)^m|\widehat{\phi(\cdot+a-b)X_{[a,b]}}(\xi)| = (1+|\xi|)^m|\widehat{\phi X_{[a,b]}}(\xi)|$$

Esto significa que $\phi(\cdot+a-b)$ es una función para la cual su valor en b es distinto de cero, pues

$$\phi(b+a-b) = \phi(a) \neq 0$$

y es de soporte compacto. Así se tendría $(b,\xi) \notin WFX_{[a,b]}$, hecho que no es posible por 1.

De esto se concluye que

$$WFX_{[a,b]} = \{a,b\} \times R - \{0\}$$

se toma una función $\phi \in C_0^\infty(R)$ de tal manera que $\phi(a) \neq 0$ y su soporte no contenga al punto b.

c) Sea $X_{[a,b]\times[c,d]}$ la función característica del cuadrado $[a,b]\times[c,d]$ en R^n con a, b, c y d, en R.

Claramente

$$singsuppX_{[a,b]\times[c,d]} = \partial([a,b]\times[c,d])$$

Para $x_\circ \in \partial([a,b]\times[c,d])$, se analizan tres casos

i) Para $x_\circ$ que no es un vértice, en algún lado horizontal de $\partial([a,b]\times[c,d])$ y $\xi_\circ = (\xi_{1_\circ}, \xi_{2_\circ})$ tal que $\xi_{1_\circ} \neq 0$, sea V un cono abierto con $\xi_\circ \in V$ en donde se tengan constantes c_1 y c_2 tales que

$$0 < c_1 < |\xi|,\ |\xi_1 - \xi_{1_\circ}| < c_2 \ \text{ y } \ |\xi_2 - \xi_{2_\circ}| < c_2$$

con $(\xi_1, \xi_2) \in V \cap S^{n-1}$. Tomando $\phi \in C_0^\infty((a\prime, b\prime)\times(c\prime, d\prime))$ tal que $a\prime < a < b\prime < b$ y $c\prime < c < d\prime < d$, se tiene

$$|\widehat{\phi X_{[a,b]\times[c,d]}}(\xi)| = \frac{1}{(2\pi)^2}\left|\int_{a_1}^{b_1} e^{-ix_2\xi_2}\left[\int_c^d e^{-ix_1\xi_1}\frac{D^{me_1}\phi(x_1,x_2)}{\xi_1^m}\right] dx_1\, dx_2\right|$$

donde $e_1 = (1,0)$ y $|\xi| > 1$.

Así

$$|\xi|^m|\widehat{\phi X_{[a,b]\times[c,d]}}(\xi)| =$$

$$|(1,\frac{\xi_2}{\xi_1})|^m\left|\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{a_1}^{b_1} e^{-ix_2\xi_2}\left[\int_c^d e^{-ix_1\xi_1}D^{me_1}\phi(x_1,x_2)\,dx_1\right] dx_2\right| \leq$$

$$|(1, \frac{\xi_2}{\xi_1})|^m |\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{a_1}^{b_1}\int_c^d D^{me_1}\phi(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2|$$

y por la elección de V

$$|\frac{\xi_2}{\xi_1}| \leq \frac{c_2 + |\xi_{2_o}|}{c_1} \quad \text{con} \quad (\xi_1, \xi_2) \in V$$

por lo tanto $(x_o, \xi_o) \notin WFX_{[a,b]\times[c,d]}$.

Para $\xi_o = (0, \xi_{2_o})$ con $\xi_{2_o} \neq 0$, como la función $X_{[a,b]\times[c,d]}$ no es de clase C^∞ en x_o, tanto $(0, \xi_{2_o})$ como $(0, -\xi_{2_o})$, están en el conjunto $\sum_{x_o} X_{[a,b]\times[c,d]}$.

ii) Para x_o que no es un vértice, en algún lado vertical de $\partial([a,b] \times [c,d])$, $\xi_o = (\xi_{1_o}, \xi_{2_o})$ con $\xi_{2_o} \neq 0$ y una construción análoga a la del caso i), se tiene que

$$(x_o, \xi_o) \notin WFX_{[a,b} \times [c,d]$$

Para $\xi_o = (\xi_{1_o}, 0)$ con $\xi_{1o} \neq 0$, como en el caso i), tanto $(\xi_{1_o}, 0)$ como $(-\xi_{1_o}, o)$ están en el conjunto $\sum_{x_o} X_{[a,b]\times[c,d]}$.

iii) Si x_o es uno de los vértices del cuadrado. Por ejemplo $x_o = (a,c)$, y $(\xi_1, \xi_2) \in R^2 - \{0\}$ con ξ_1, $\xi_2 \neq 0$, sea $\phi \in C_0^\infty(R^2)$ con $supp\phi \subset [a', b'] \times [c', d']$ y $\phi(a,c) \neq 0$, donde $a' < a < b' < b$ y $c' < c < d' < d$.

De esta manera, se tiene

$$\widehat{\phi X_{[a,b]\times[c,d]}}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_a^b\int_c^d e^{-i(x_1\xi_1+x_2\xi_2)}\phi(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$

Integrando por partes, la última expresión es igual a la suma de

$$\frac{-1}{(2\pi)^2\xi_1\xi_2}\int_a^b \frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x,c)e^{-i(x_1\xi_1+c\xi_2)}\,dx_1 = \tag{1}$$

$$\frac{-1}{(2\pi)^2\xi_1^2\xi_2 i}\left[\int_a^b \frac{\partial^2\phi}{\partial^2 x_1}(x_1,c)e^{-i(x_1\xi_1+c\xi_2)}\,dx_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_1}(a,c)e^{-i(a\xi_1+c\xi_2)}\right]$$

$$\frac{-i}{(2\pi)^2\xi_1\xi_2}\int_c^d \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(a,x_2)e^{-i(a\xi_1+x_2\xi_2)}\,dx_2 = \tag{2}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2\xi_2^2\xi_1 i}\left[\int_c^d \frac{\partial^2\phi}{\partial^2 x_2}(a,x_2)e^{-i(a\xi_1+x_2\xi_2)}\,dx_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(a,c)e^{-i(a\xi_1+c\xi_2)}\right]$$

$$\frac{-1}{(2\pi)^2\xi_1\xi_2}\int_a^b\int_c^d \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}(x_1,x_2)e^{-i(x_1\xi_1+x_2\xi_2)}\,dx_1\,dx_2 = \tag{3}$$

$$\frac{-1}{(2\pi)^2\xi_1^2\xi_2 i}[\int_c^d \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}(a,x_2)e^{-i(a\xi_1+x_2\xi_2)}\,dx_2 +$$

$$\int_a^b\int_c^d \frac{\partial^3\phi(a,x_2)}{\partial^2 x_1\partial x_2}e^{-i(a\xi_1+x_2\xi_2)}\,dx_1\,dx_2]$$

y

$$\frac{-e^{-(a\xi_1+c\xi_2)}\phi(a,c)}{(2\pi)^2\xi_1\xi_2} \tag{4}$$

Como $|\xi_1\xi_2| \leq \xi_1^2\xi_2^2$, la expresión $|\xi|^2|\widehat{\phi X_{[a,b]\times[c,d]}}(\xi)|$ es mayor o igual al valor absoluto de la suma de 1,2,3 y 4 multiplicadas por el factor $|\xi_1\xi_2|$.

Las expresiones 1,2 y 3 multiplicadas por dicho factor tienden a cero cuando $|(\xi_1,\xi_2)|$ tiende a infinito en cualquier cono V que no contenga a los ejes coordenados, cosa que no ocurre para 4. Por lo tanto si, x_o es un vértice del cuadrado $\partial([a,b]\times[c,d])$ y $\xi = (\xi_1,\xi_2)$ con ξ_1, $\xi_2 \neq 0$, se tiene $(x_o,\xi_o) \in WFX_{[a,b]\times[c,d]}$.

Como el frente de onda es un conjunto cerrado, entonces

$$\sum_{x_o} X_{[a,b]\times[c,d} = R^2 - \{0\}$$

Para los demás vértices se puede hacer un análisis parecido.

Resumiendo $(x_o,\xi_o) \in WFX_{[a,b]\times[c,d]}$, si $x_o \in \partial([a,b]\times[c,d])$ y ξ_o está en el subespacio de R^2 generado por las normales a los lados del cuadrado $\partial([a,b]\times[c,d])$ que contienen a x_o.

◇

d) En general se puede ver que para la distribución dada por la función característica $X_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]}$ en R^n

$$(x_o,\xi_o) \in WFX_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]}$$

si y sólo si $x_o \in \partial([a_1,b_1]\times\cdots\cdots[a_n,b_n])$ y ξ_o está en el subespacio de R^n generado por las normales de las hipercaras del hipercubo $\partial([a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ que contienen a x_o.

Se toma una función ϕ de clase C^∞, de tal manera que $\phi(a,b) \neq 0$ y de soporte compacto, que no contenga a los otros vértices del cuadrado.

e) Sea $V = \{(0,x_2,\ldots,x_n) \in R^n\}$. Si δ_V es la distribución dada por

$$\delta_V(\phi) = \int_V \phi \quad \text{con} \quad \phi \in C_0^\infty(R^n)$$

Para $x_o \notin V$, existe $\phi \in C_0^\infty(R^n)$ con $\phi(x_o) \neq 0$ y $supp\phi \cap V = 0$ tal que

$$\delta_V(\phi) = \int_V \phi = 0$$

Si $x_o \in V$, sea $\phi \in C_0^\infty(R^n)$ y $\phi(x_o) \neq 0$. Como en el ejemplo c), para $\xi_o = (\xi_{1_o}, \ldots, \xi_{n_o}) \in R^n - \{0\}$ con $\xi_{j\prime_o} > 0$ para alguna $j\prime_o \geq 2$, sea V un abierto cónico con $\xi_o \in V$ para el cual existen constantes c_1 y c_2 tales que

$$0 < |\xi_j - \xi_{j_o}| < c_1 \text{ y } 0 < c_2 < |\xi_{j\prime_o}|$$

para $j = 1, \ldots, n$.

Así

$$|\xi|^m |\widehat{\phi\delta_V}(\xi)| \leq$$

$$(\frac{c_1 + |\xi_{j_o}|}{c_2})|\xi_j|^m| \int e^{-i(x_2\xi_2+\cdots+x_n\xi_n)}\phi(0, x_2, \cdots, x_n)\, dx_2 \cdots x_n|$$

$$= (\frac{c_1 + |\xi_{j_o}|}{c_2})\frac{1}{(2\pi)^n}| \int e^{-i(x_2\xi_2+\cdots+x_n\xi_n)}D^{me_j}\phi(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \cdots dx_n|$$

$$< \infty \text{ con } \xi \in V$$

Para puntos $\xi_o = (\xi_{1_o}, 0, \ldots, 0) \in R^n\{0\}$, se tiene la expresión

$$|\xi_o|^m |\widehat{\phi\delta_V}(\xi_o)| = |\xi_{1_o}|^m |\delta_V(\phi)|$$

que no queda acotada cuando $t\xi_o \to \infty$ si $\delta_V(\phi) \neq 0$.

De este maneras se concluye que

$$WF\delta_V = V \times (V^\perp - \{0\})$$

o

Un problema interesante que surge al ver los ejemplos anteriores es el encontrar $u \in \wp\prime(R^n)$ tal que

$$WFu = A$$

con $A \subset R^n \times R^n - \{0\}$ cualquier conjunto cónico cerrado (cónico en la segunda coordenada).

El siguiente teorema responde a esta pregunta.

Teorema 4

Si $A \subset R^n \times R^n - \{0\}$ es un conjunto cerrado y cónico en la segunda coordenada, existe una distribución $u \in \wp\prime(R^n)$ tal que

$$WFu = A$$

Demostración

Sea $\{(x_j, \xi_j)\}_{j \in N}$ un conjunto denso y numerable de

$$A \cap S^{n-1}$$

Tomando la función

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

con $x \in R^n$, y

$$\phi_1 = \phi * \phi$$

se tiene

$$\widehat{\phi_1}(\xi) \geq 0$$

con $\xi \in R^n$, y

$$\widehat{\phi_1}(0) = 1$$

Sea entonces la función

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2}\phi_1(j(x - x_j))e^{ij^3 < x, x_j >} \tag{1}$$

que es continua en R^n.

Si $(x_o, \xi_o) \notin A$, sea U un abierto con $x_o \in U$ y V un abierto cónico con $\xi_o \in V$ tales que

$$(U \times V) \cap A = \emptyset$$

En 1 sea u_1 la suma de los términos tales que $x_j \notin U$, y u_2 el conjunto de los términos tales que $x_j \in U$. De esta manera, en una vecindad de x_o, u_1 es una función en $C_0^\infty(R^n)$, pues sólo un número finito de los elementos $j^{-2}\phi_1(j(x - x_j))$ es distinto de cero en tal vecindad.

Para u_2 se tiene

$$\widehat{u_2}(\xi) = \sum_{x_j \in U} j^{-2-n}\,\widehat{\phi_1}\left(\frac{\xi - j^3\xi_j}{j}\right)e^{i<x_j, j^3\xi_j - \xi>}$$

Si V_1 es un abierto cónico con $\xi_o \in V_1$ y $\underset{1}{\tilde{V}} \subset V$, entonces existe $c \in R$ tal que

$$|\xi - \eta| \geq c(|\xi| + |\eta|) \quad \text{con} \quad \xi \in V_1 \;\; \text{y} \;\; \eta \notin V \tag{2}$$

*

---

* Para ver esto se tiene el siguiente desarrollo.

En el caso en que $|\xi| = |\eta| = 1$ y suponiendo que V es el abierto cónico en $R^n - \{0\}$ determinado por el arco AOD, y V_1 es el abierto cónico, determinado por el arco BOC, la distancia entre $\xi \in V_1$ y $\eta \notin V$ es mayor que el mínimo de las distancias de A a B y de C a D.

En el caso en que ξ y η tengan la misma norma se divide 2 por $|\xi| + |\eta|$ y se tiene el caso anterior.

Si ξ y η tienen normas distintas; suponiendo la norma de ξ mayor a la norma de η; se divide 2 por la norma de ξ y se tiene una situación como la de la figura 2 en donde el ángulo α' es menor al ángulo α. Por lo tanto la distancia de η a ξ es mayor a la distancia de $\frac{\eta}{|\eta|}$ a ξ.

Si η tiene norma mayor a ξ, se tiene una solución análoga al caso anterior. De esta manera se puede tomar en 2 a c como el mínimo de las distancias de A a B y de C a D.

con lo que

$$|\xi - j^3\xi_j| \geq c(|\xi| + j^3) \geq c|\xi|^{\frac{2}{3}} j \quad \text{con} \quad \xi \in V_1$$

Como ϕ es una función rápidamente decreciente

$$|\xi|^{\frac{2m}{3}} |\widehat{u_2}(\xi)| \leq \sum_{x_j \in U} j^{-2-n} \widehat{\phi}_1(\frac{\xi - j^3\xi_j}{j}) \frac{|\xi - j^3\xi_j|^m}{j^m c^m}$$

$$\leq \sum_{x_j \in U} j^{-2-n} \frac{c\prime_m}{c^m} < \infty \quad \text{con} \quad \xi \in V_1$$

Por lo tanto $(x_o, \xi_o) \notin WFu$.

Por otra parte, si $(x_o, \xi_o) \in A$, sea $\psi \in C_0^\infty(R^n)$ con $\psi = 1$ en una vecindad de x_o. Entonces el conjunto

$$\{\psi\phi_1(j(\cdot - x_j))\}_{j \in N} \tag{2$\prime$}$$

es acotado en el espacio $S(R^n)$.

Si se define la función

$$\phi_j = \psi(\frac{\cdot}{j} + x_j)\phi$$

entonces

$$\widehat{\phi u}(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2-n} \widehat{\phi}_j(\frac{\xi - j^3\xi_j}{j}) e^{i<x_j, j^3\xi_j - \xi>}$$

Para x_j muy cercano a x_o y j muy grande se tiene por la definición de ϕ_j que

$$\phi_j = \phi \tag{3}$$

con lo que

$$|\widehat{\psi u}(k^3\xi_k) \geq$$

$$|k^{-2-n} \widehat{\phi}_k(0) + \sum_{j \neq k} j^{-2-n} \widehat{\phi}_j(\frac{\xi - j^3\xi_j}{j}) e^{i<x_j, j^3\xi_j - \xi>}|$$

si se cumple 3 para $j = k$, entonces la última expresión en la desigualdad anterior es igual a

$$|k^{-2-n} + \sum_{j \neq k} j^{-2-n} \widehat{\phi}_j(\frac{\xi - j^3\xi_j}{j}) e^{i<x_j, j^3\xi_j - \xi>}| \tag{4}$$

y por la desigualdad del triángulo 4 es mayor o igual a

$$k^{-2-n} - \sum_{j \neq k} j^{-2-n} |\widehat{\phi}_j(\frac{\xi - j^3\xi_j}{j}) \tag{5}$$

Como el conjunto en $2\prime$ es acotado, entonces 5 es mayor o igual a

$$k^{-2-n} - c_m \sum_{j \neq k} j^{-2-n} (\frac{|k^3\xi_K - j^3\xi_j|}{j})^{-m} \tag{6}$$

donde

$$|\widehat{\phi_j}(\frac{\xi - j^3\xi_j}{j})| \leq c_m(\frac{|\xi - j^3\xi_j|}{j})^{-m}$$

para todo j y $\xi \in R^n - \{0\}$

Si el segmento OA es el vector $k^3\xi_k$ y el segmento OC es el vector $j^3\xi_j$, como el ángulo $\alpha\prime$ es menor a α

$$|k^3\xi_k - j^3\xi_j| \geq |k^3 - j^3| \geq k^2 + kj + j^2 \geq kj \quad \text{con} \quad k \notin j$$

entonces θ es mayor o igual a

$$k^{-2-n} - \frac{c_m}{k^m}\sum_{j \neq k} j^{-2-n}$$

y con $m > n+2$ y k suficientemente grande la última expresión resulta mayor a $\frac{k^{-2-n}}{2}$.

Así

$$|\widehat{\psi u}(k^3\xi_k)| \geq \frac{k^{-2-n}}{2}$$

para todo punto ξ_k tal que x_k está muy cercano a x_o.

Por lo tanto, no existe vecindad cónica para ξ_o donde $\widehat{\psi u}$ decrece rápidamente, con lo que

$$(x_o, \xi_o) \in WFu$$

$\circ$

Por medio del frente de onda se pueden definir nuevos subespacios en $\wp\prime(\Omega)$, útiles en lo que sigue.

Definición 6

Si $\Gamma \subset \Omega \times R^n - \{0\}$ es un conjunto cerrado cónico y

$$\wp\prime(\Omega) = \{u \in \wp\prime(\Omega) | WFu \subset \Omega\}$$

la sucesión $\{u_j\}_{j \in N}$ en $\wp\prime_\Gamma(\Omega)$ converge a u en el espacio $\wp\prime_\Gamma(\Omega)$ si

i) $u_j \to u$ en $\wp\prime(\Omega)$ con la topología débil.

ii) Para $\in C_0^\infty(\omega)$ y $V \subset R^n - \{0\}$ cerrado cónico tal que $(supp\phi \times V) \cap \Gamma = \emptyset$, se cumple

$$\sup_V |\xi|^m |\widehat{\phi u}(\xi) - \widehat{\phi_j u}(\xi)| < c_m$$

para toda j, $m \in N$.

Con esto, en el espacio $\wp\prime_\Gamma(\Omega)$ se tiene el siguiente resultado

Teorema 5

Si $u \in \mathcal{D}'_\Gamma(\Omega)$, existe una sucesón $\{u_j\}_{j\in N}$ en $C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$u_j \to u \ \text{ en } \ \mathcal{D}'_\Gamma(\omega)$$

Demostración

Sean $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ con $\psi_j = 1$ en $K_j \subset \Omega$ compacto tal que $K_j \subset K_{k+1}$, $\Omega = \cup K_j$ y las funciones

$$\alpha_{\epsilon_j} = \epsilon_j^{-n}\alpha(\frac{\cdot}{\epsilon_j})$$

como en el capítulo 2, que además cumplan

$$supp\alpha_{\epsilon_j} + supp\psi_j \subset K_j \ \text{ con } \ j \in N$$

Si

$$u_j = (\psi_j u) * \alpha_{\epsilon_j} \in C_0^\infty(\Omega) \ \text{ con } \ j \in N$$

como

$$\psi_j u \to u \ \text{ y } \ \alpha_{\epsilon_j} \to \delta$$

se tiene

$$u_j \to u \ \text{ en } \ \mathcal{D}'(\Omega)$$

sea ahora $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ y $V \subset R^n - \{0\}$ cerrado cónico tal que

$$\Gamma \subset (supp\phi \times V) = \emptyset$$

Por ser $supp\phi$ compacto en R^n y V compacto en S^{n-1}, existen $W_1 \subset R^n$ cerrado y $W \subset R^n - \{0\}$ cerrado cónico tales que

$$supp\phi \subset W_1 \text{ y } V \subset W$$

y

$$\Gamma \cap (W_1 \times W) = \emptyset$$

Tomando $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, con $\psi = 1$ en una vecindad de $supp\phi$, para toda j tal que $supp\psi \subset supp\psi_j$

$$\phi u_j = \phi(\alpha_{\epsilon_j} * (\psi u))$$

Así en W

$$|\widehat{\alpha_{\epsilon_j} * \psi u}| = |\widehat{\alpha_{\epsilon_j}}||\widehat{\psi u}| \leq |\widehat{\psi u}|$$

Como $|\widehat{\psi u}|$ decrece rápidamente en W, tambien lo hace $|\widehat{\alpha_{\epsilon_j} * \psi u}|$ en W.

Por lo tanto $|\alpha u_j|$ decrece rapidamente en W.

◇

Con este resultado se obtiene el siguiente teorema que da condiciones suficientes para la existencia única de la composición del mapeo f y la distribución u, conociendo el conjunto de normales a f y el frente de onda de u.

teorema 6

Sean $X \subset R^m$ y $Y \subset R^n$ conjuntos abiertos y $f : X \to Y$ un mapeo de clase C^∞. Sea el conjunto de normales a f dado por

$$N_f = \{(f(x), \eta) \in Y \times R^n | {}^t f\prime(x)\eta = 0\}$$

Entoces la composición de u y f; denotada por f^*u; se puede definir para $u \in \wp\prime(Y)$ siempre que

$$N_f \cap WFu = \emptyset$$

Además para $\Gamma \subset Y \times R^n - \{0\}$ cerrado cónico tal que $\Gamma \cap N_f = \emptyset$, el mapeo

$$f^* : \wp\prime_\Gamma(Y) \to \wp\prime_{f^*\Gamma}(X)$$

donde

$$f^*\Gamma = \{(x, {}^t f\prime(x)\eta | (f(x), \eta) \in \Gamma\}$$

es continua.

En particular con $u \in \wp\prime(Y)$ tal que $N_f \cap WFu = \emptyset$, se tiene

$$WF(f^*u) \subset f^*WFu$$

Este resultado se da sin demostración la cual es bastante técnica. Sólo se habla un poco de la técnica usada para ver que el teorema es cierto.

La prueba usa el método de la fase estacionaria. Este consiste en calcular el comportamiento asintótico de integrales de la forma

$$\int u(x) e^{i\omega f(x)} \, dx \tag{1}$$

donde f y u son funciones de clase C^∞.

En general se puede ver[2] que si $u \in C_0^K(\Omega)$, $f \in C^{K+1}(\Omega)$ y $f\prime \neq 0$ en el soporte de u, entonces 1 decrece rápidamente.

De esta forma la contribución a 1 cuando $|\omega|^n \to \infty$ viene dada por los puntos x tales que $f\prime(x) = 0$. De ahí el nombre de método de la fase estacionaria.

$\diamond$

Este teorema da un motivo por el cual es útil considerar el frente de onda de una distribución en lugar del soporte singular de la misma, y de pansarlo como un subconjunto del espacio cotangente.

Antes de explicar esto se tienen los siguientes resultados de topología diferencial.

Dos variedades diferenciales muy importantes asociadas a una variedad diferencial X son el espacio tangente y el espacio cotangente de X.

El espacio tangente a X se define de la siguiente manera, en forma natural, utilizando el concepto de distribución.

Definición 7

Sea X una variedad diferencial, $x_o \in X$ y K la carta

$$K : X_K \subset X \to \tilde{X}_K \subset R^n \quad \text{con} \quad x_o \in X_K$$

entonces el espacio T_{x_o} de vectores tangentes a X en x_o, es el conjunto de distribuciones t de la forma

$$t(\phi) = \sum_{j=1}^{n} t^j \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(k(x_o)) \text{ con } t^j \in R \text{ y } \phi \in C_0^\infty(R^n)$$

y el espacio tangente a X es el conjunto

$$T(X) = \cup_{x_o \in X} T_{x_o}(X)$$

En topología diferencial se muestra que el espacio $T(X)$ es una variedad diferencial ver[22].

Un mapeo muy importante que induce el espacio tangente de una variedad diferencial es el siguiente.

Definición 8

Sean X y Y variedades diferenciales donde

$$f : X \to Y$$

es un mapeo de clase C^∞, entonces el mapeo f_* asociado a f, donde

$$f_* : T_{x_o}(X) \to T_{f(x_o)}(Y)$$

es definido como

$$f_* t(\phi) = t(\phi \circ f) \text{ con } \phi \in C_0^\infty(Y) \text{ y } t \in T_{x_o}(X)$$

Cuando X y Y son conjuntos abiertos en R^n y R^m respectivamente, se tiene una visualización de la función f_*. En este caso

$$f_* = f\prime(\text{ La diferencial de f})$$

La función f_* cumple la siguiente propiedad que es fácil de verificar.

Lema 1

Si X, Y y Z son variedades diferenciales y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ son mapeos de clase C^∞, entonces

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

$\diamond$

El espacio cotangente a X que será muy importante en lo que sigue, se define de la siguiente manera.

Definición 9

El espacio cotangente a la variedad diferencial X es el conjunto

$$T^*(X) = \cup_{x_o \in X} T\prime_{x_o}(X)$$

donde $T\prime_{x_o}(X)$ denota el dual algebraico de $T_{x_o}(X)$.

En topología diferencial de nuevo se muestra que $T^*(X)$ es una variedad diferencial.

Asociado a este espacio, se tiene un mapeo muy importante entre los espacios cotangentes de variedades diferenciales.

Definición 10

Sean X y Y variedades diferenciales y el mapeo

$$f : X \to Y \quad \text{de clase} \quad C^\infty$$

entonces el mapeo f^* asociado a f, donde

$$f^* : T^*(Y) \to T^*(X)$$

es definida por

$$f^*u(t) = u(f_*t) \quad \text{con} \quad u \in T^*(Y) \quad \text{y} \quad t \in T(X)$$

Cuando X y Y son abiertos en R^n y R^m respectivamente, se tiene de nuevo una visualización de la función f^*, pues

$$f^* = {}^t f\prime (\text{Traspuesta de la diferencial})$$

La función f^* cumple además la siguiente propiedad fácil de verificar.

Lema 2

Si X, Y y Z son variedades diferenciales y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ son mapeos de clase C^∞, entonces

$$(g \circ f)^* : T^*(Z) \to T^*(X)$$

y

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

De estas propiedades se tienen los siguientes resultados.

Corolario 1

Si $u \in \wp\prime(X)$, donde X es una variedad diferencial, es decir u es una colección $\{u_K\}_{K \in N}$ de distribuciones, en donde, para las cartas K, $K\prime$ y las distribuciones u_K, $u_{K\prime}$ se tienen

$$u_K = (K\prime \circ K^{-1})^* u_{K\prime} \quad \text{en} \quad K(X_K \cap X_{K\prime})$$

entonces el conjunto

$$K^* WFu_K$$

es independiente de la carta K en cada punto de X.

Demostración

Por el teorema 6 para las cartas K y $K\prime$, como $K\prime \circ K^{-1}$ definida de $K(X_K \cap X_{K\prime})$ a $K\prime(X_K \cap X_{K\prime})$ es un difeomorfismo de clase C^∞ se tiene

$$(K\prime \circ K^{-1})^* WFu_{K\prime} = WFu_K$$

así

$$(K^{-1})^* \circ (K\prime)^* WFu_{K\prime} = WFu_K$$

y

$$(K)^* \circ (K^{-1})^* \circ (K\prime)^* WFu_{K\prime} = (K)^* WFu_K$$

con lo que

$$(K\prime)^* WFu_{K\prime} = (K)^* WFu_K$$

$\diamond$

De esta manera, la siguiente definición es consistente.

Definición 11

Si $u \in \wp(X)$ con X una variedad diferencial y u una coleción de distribuciones, como arriba, entonces

$$WFu = \cup K^* WFu_K \subset T^*(X)$$

Corolario 2

Si S es una hipersuperficie en R^n

$$WF\delta_S = \{(x,\xi) | x \in S \ \text{ y } \ <\xi,\eta>=0 \ \text{ con } \ \eta \in T_x(S)\}$$

Demostración

Localmente en cada punto $x \in S$, y sin perdida de generalidad, existe un homeomorfismo F de clase C^∞ donde

$$F : A \subset R^n \to R^n \ \text{ con } \ A \ \text{ abierto y } \ 0 \in A$$

definido como

$$F(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_{n-1}, f(x_1,\ldots,x_n))+$$

$$x_n(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_{n-1}),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,\ldots,x_{n-1}),-1)$$

con

$$f : A \to R \ \text{ de clase } \ C^\infty$$

y

$$F(\{(x_1,\ldots,x_n) \in A | x_n = 0\} \subset S \ \text{ y } \ F(0) = x$$

Así, localmente en el punto $x \in S$ se tiene

$$\int_S \phi = \int_B \frac{(\phi \circ F) JF}{|(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}},-1)|}$$

donde

$$B = \{(x_1,\ldots,x_n) \in A | x_n = 0\}$$

$\phi \in C_0^\infty(R^n)$ y

$$\frac{JF}{|(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}},-1)|}$$

es el elemento de area en la última integral, pues JF (el Jacobiano de F) es el elemento de volumen en la integral de ϕ sobre $F(A)$, y el vector $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x), -1)$ es ortogonal a S en el punto $f(x)$ con lo que

$$WF\delta_S = F^*WF\delta_B$$

y

$$^tF\prime(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

de donde se concluye

$$^tF\prime(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}, -1)$$

y por el teorema 6 se tiene el resultado.

$\diamond$

El teorema 6 tambien ayuda a definir el producto de distribuciones en más casos que los analizados en capítulos anteriores. Antes de ver esto se tiene el siguiente resultado.

Lema 3

Si $u \in \wp\prime(X)$ y $V \in \wp\prime(Y)$ con $X \subset R^n$ y $Y \subset R^m$ abiertos, entonces

$$WF(u \otimes V) \subset$$

$$WFu \times WFv \cup (suppu \times \{0\}) \times WFv \cup WFu \times (suppv \times \{0\}) \tag{1}$$

Demostración

Sea $\xi_o = (\xi_{1_o}, \xi_{2_o}) \in R^n \times R^m$, $x_o = (x_{1_o}, x_{2_o}) \in R^n \times R^m$, $\phi_1 \in C_0^\infty(R^n)$ y $\phi_2 \in C_0^\infty(R^m)$ tales que $\phi_1(x_{1_o}) \neq 0$, $\phi(x_{2_o}) \neq 0$ y el punto $(x_{1_o}, \xi_{1_o}, x_{2_o}, \xi_{2_o})$ que no esté en el conjunto 1. Como

$$|(\widehat{\phi_1 \otimes \phi_2)}(u \otimes v)(\xi_1, \xi_2)| = |\widehat{\phi_1 u}(\xi_1)||\widehat{\phi_2 v}(\xi_2)| \tag{2}$$

se tienen los siguientes casos

i) Si $\xi_{1_o} \neq 0$ y $\xi_{2_o} \neq 0$, existen W_1 y W_2 conjuntos abiertos cónicos de ξ_{1_o} y ξ_{2_o} respectivamente, tales que

$$|\xi_1|^r|\widehat{\phi_1 u}(\xi_1)| < c\prime_r \quad \text{con} \quad \xi_1 \in W_1$$

$$|\xi_2|^r|\widehat{\phi_2 v}(\xi_2)| < c\prime\prime_r \quad \text{con} \quad \xi_2 \in W_2$$

Por lo tanto $W_1 \times W_2$ es un conjunto abierto cónico de $R^n \times R^m$ en donde 2 está acotado.

ii) Si $\xi_1 \neq 0$ y $\xi_2 = 0$ ó $\xi_1 = 0$ y $\xi_2 \neq 0$

Ambos casos son análogos.

Suponiendo el primero se tiene

$$|(\xi_1, 0)|^r |(\phi_1 \otimes \phi_2)\widehat{\ }(u_1 \otimes u_2)(\xi, 0)| \leq |\xi_1|^r |\widehat{\phi_1 u}(\xi_1)||\widehat{\phi_2 v}(0)|$$

y el segundo miembro de la desigualdad está acotado en $W_1 \times W_2$.

◇

corolario 3

Sean u y v en $\wp\prime(\Omega)$ tales que si el punto $(x, \xi) \in WFu$ entonces $(x, -\xi) \notin WFv$. De esta manera se puede definir un producto de u y v en forma consistente.

Demostración

Sea $F : \Omega \to \Omega \times \Omega$ dado por $F(x) = (x, x)$ con $x \in \Omega$, entonces

$$F\prime(x)y = (y, y)$$

y

$$^tF\prime(x)(\xi, \eta) = \xi + \eta$$

con lo que

$$N_f = \{(F(x), \xi, \eta) \in \Omega^2 \times R^{2n} | \eta = -\xi\}$$

Entonces, utilizando lema anterior y la hipótesis se tiene

$$(F(x), \xi, -\xi) \notin WF(u \otimes v)$$

y

$$WF(u \otimes v) \cap N_f = \emptyset$$

Así

$$\{(x, \xi + \eta) | (x, \xi) \in WFu \;\text{ ó }\; \xi = 0,\; (x, \eta) \in WFv \;\text{ ó }\; \eta = 0\}$$

y se puede definir el producto de u y v como

$$u \cdot v = f^*(u \otimes v)$$

◇

El frente de onda de una distribución es de caracter local y contiene la información que da el soporte singular de esta. Su ventaja lo da el teorema 6 que interpreta a este conjunto como un subconjunto invariante del espacio cotangente y el hecho de que se puede definir en forma adecuada este concepto para distribuciones en variedades diferenciales, con lo que es posible realizar un estudio de las singularidades en distribuciones dadas en variedades como se ha hecho en R^n.

Ahora se verá una propiedad muy importante del frente de onda de una distribución en conexión con los operadores diferenciales que tiene como coeficientes a funciones de clase C^∞.

Dado un operador diferencial $P(X, D)$ con coeficientes en $C_0^\infty(R^n)$, por los teoremas 1,2 y 3, para una distribución u se concluye la siguiente propiedad.

Teorema 7

SI $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $P(X,D)$ es un operador diferencial con coeficientes de clase C^{∞}, entonces

$$WFP(X,D) \subset WFu$$

o

Una manera de ver que puntos están en el conjunto

$$WFu - WFP(X,D)u$$

es tratando de resolver la ecuación

$$P(X,D)u = f$$

por medio de la transformada de Fourier; si esta existe en ambos miembros. En este caso

$$\widehat{P(X,D)u}(\xi) = P(X,\xi)\,\widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$$

Si la expresión

$$\frac{\widehat{f}}{P(X,\xi)}$$

define una función integrable, se tomaría como solución

$$u = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \frac{e^{i<x,\cdot>}\,\widehat{f}}{P(X,\cdot)}\,dx$$

En el caso en que f sea una función integrable, lo que hace imposible la conclusión anterior, es el conjunto de ceros del polinomio $P(X,\xi)$.

Para el siguiente resultado importante, que surgue a partir de estas observaciones se necesitan las siguientes definiciones.

Definición 12

Dado el operador diferencial

$$P(X,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_{\alpha}(X)D^{\alpha}$$

el grado de $P(X,D)$, es el mayor natural $|\alpha|$ para el cual la función a_{α} es distinta de cero.

Definición 13

Dado el operador diferencial $P(X,D)$ como arriba, entonces

i) $P_m(X,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha}(X)\xi^{\alpha}$

y

ii) $CharP(X,D) = \{(x,\xi) \in R^n \times R^n - \{0\} | P_m(x,\xi) = 0\}$ con m el grado de $P(X,D)$.

De esta manera se tiene

Teorema 8

Dado el operador diferencial

$$P(X,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(X)D^\alpha$$

de grado m y $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, entonces

$$WFu \subset CharP(X,D) \cup WFP(X,D)u$$

Demostración

Si $(x_o, \xi_o) \notin CharP(X,D)$, como el polinomio $P_m(X,\xi)$ es homogeneo

$$(x_o, \frac{\xi_o}{|\xi_o|)}) \notin CharP$$

y por lo tanto existen abiertos $U \subset R^n$ y $V \subset S^{n-1}$ con $x_o \in U$ y $\frac{\xi_o}{|\xi_o|} \in V$, tales que

$$1 \leq cP_m(x, \frac{\xi}{|\xi|)}) \text{ con } x \in U \text{ y } \frac{\xi}{|\xi|} \in V$$

Así, para el abierto cónico

$$V_1 = \{t\xi | t \in R - \{0\},\ \xi \in V\}$$

se tiene

$$|\xi|^m \leq P_m(x,\xi) \text{ con } x \in U \text{ y } \xi \in V$$

Sea ahora $\phi \in C_0^\infty(U)$ con $\phi(x_o) = 1$. Para estimar $\widehat{\phi u}(\xi)$ con $\xi \in V$, se utiliza la información dada por el conjunto $CharP(X,D)$ de la siguiente manera.

Si $P(X,D)u = f$, para $v \in C_0^\infty(\Omega)$, se tiene

$$< u, {}^tP(X,D)v > = < P(X,D)u, v > = < f, v > \tag{1}$$

donde ${}^tP(X,D)$ es el operador traspuesto a $P(X,D)$, es decir

$${}^tP(X,D)v = \sum_{|\alpha|\leq m} (-D)^\alpha(a_\alpha(x)v)$$

con $v \in C^\infty(\Omega)$.

Si se logra encontrar v tal que

$${}^tP(X,D)v = \phi e^{-i<\cdot,\xi>} \tag{1'}$$

el lado derecho de 1 sería igual a $\widehat{\phi u}$.

Para esto sea

$$v = \frac{we^{-i<\cdot,\xi>}}{P_m(\cdot,\xi)} \tag{1''}$$

entonces

$$ {}^{t}Pv = \sum_{|\alpha|\leq m} (-D)^{\alpha}\left(\frac{a_{\alpha} w e^{-i<\cdot,\xi>}}{P_m(\cdot,\xi)}\right) \tag{2}$$

$$ = \sum_{|\alpha|\leq m} \sum_{0\leq j\leq \alpha} \binom{\alpha}{j} (-D)^{j}\left(\frac{a_{\alpha} w}{P_m(\cdot,\xi)}\right)(-D)^{\alpha-j} e^{-i<\cdot,\xi>}$$

donde α, $j \in N^n$.

La expresión en 2 es igual a

$$\sum_{|\alpha|=m}\left(\frac{a_{\alpha} v}{P_m(\cdot,\xi)}\right)(-D)^{\alpha} e^{-i<\cdot,\xi>} \tag{3}$$

$$+ \sum_{0<j\leq \alpha} \binom{\alpha}{j} (-D)^{j}\left(\frac{a_{\alpha} w}{P_m(\cdot,\xi)}\right)(-D)^{\alpha-j} e^{-i<\cdot,\xi>}$$

$$+ \sum_{|\alpha|<m} \sum_{0\leq j\leq \alpha} \binom{\alpha}{j} \left(\frac{a_{\alpha} w}{P^m(\cdot,\xi)}\right)(-D)^{\alpha-j} e^{-i<\cdot,\xi>}$$

Como

$$(-D)^{\beta} e^{-i<\cdot,\xi>} = \xi^{\beta} e^{-i<\cdot,\xi>}$$

y de esto

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{a_{\alpha}(-D)^{\alpha}}{P_m(\cdot,\xi)} e^{-i<\cdot,\xi>} = 1$$

entonces la expresión 3 es igual a

$$w e^{-i<\cdot,\xi>} + \sum_{|\alpha|=m} \sum_{0<j\leq \alpha} \binom{\alpha}{j} (-D)^{j}\left(\frac{a_{\alpha} w}{P_m(\cdot,\xi)}\right) \xi^{\alpha-j} e^{-i<\cdot,\xi>} +$$

$$\sum_{|\alpha|} \sum_{0\leq j\leq \alpha} \binom{\alpha}{j} (-D)^{j}\left(\frac{a_{\alpha} w}{P_m(\cdot,\xi)}\right) \xi^{\alpha-j} e^{-i<\cdot,\xi>} \tag{3'}$$

Notando que cada uno de los términos

$$(-D)^{j}\left(\frac{a_{\alpha} w}{P_m(\cdot,\xi)}\right) \xi^{\alpha-j}$$

es homogeneo en ξ de grado $-m + |\alpha - j|$ y reagrupando, $3'$ es igual a

$$w e^{-i<\cdot,\xi>} + \sum_{s=1}^{m} \sum_{|\alpha-j|=m-s} \binom{\alpha}{j} (-D)^{\alpha}\left(\frac{a_{\alpha} w}{P_m(\cdot,\xi)}\right) \xi^{\alpha-j}$$

Si se define entonces el operador R_s, evaluado en w como

$$R_s w = \sum_{|\alpha-j|=m-s} \binom{\alpha}{j} (-D)^{\alpha}\left(\frac{a_{\alpha} w}{P_m(\cdot,\xi)}\right) \xi^{\alpha-j}$$

este resulta homogeneo en ξ de grado $-s$ y

$$\sum R_s = R$$

De esta manera, por 1′ se obtiene la ecuación diferencial

$$(w - Rw)e^{-i<\cdot,\xi>} = \phi e^{-i<\cdot,\xi>}$$

y de esta última, la ecuación

$$w - Rw = \phi \tag{4}$$

Para esta ecuación se podría pensar en una solución dada por

$$\sum_{K=0}^{\infty} R^K \phi$$

expresión que puede no tener sentido.

Sin embargo en 4 con

$$w_r = \sum_{K=0}^{r} R^K \phi$$

se tiene

$$w_r - Rw_r = \phi - R^{r+1}\phi$$

y R^{r+1} es pequeño para valores grandes de ξ.

De esta forma, tomando W_r en lugar de W en 1″ y sustituyendo en 1′ se ve que

$${}^tP(X,D)\left(\frac{e^{-i<\cdot,\xi>}}{P_m(\cdot,\xi)}w_r\right) = (\phi - R^r\phi)e^{-i<\cdot,\xi>}$$

lo cual es equivalente a

$${}^tP(X,D)\left(\frac{e^{-i<;\xi>}}{P_m(\cdot,\xi)}\right) + R^r\phi e^{-i<\cdot,\xi>} = \phi e^{-i<\cdot,\xi>} \tag{5}$$

Así

$$< u, {}^tP(X,D)\left(\frac{e^{-i<\cdot,\xi>}}{P_m(\cdot,\xi)}w_r\right) > + < u, R^r\phi e^{-i<\cdot,\xi>} > = < u, \phi e^{-i<\cdot,\xi>} >$$

y por 1, esta última expresión es equivalente a

$$\widehat{\phi u}(\xi) = u(e^{-i<\cdot,\xi>}R^r\phi) + f\left(\frac{e^{-i<\cdot,\xi>}}{P_m(\cdot,\xi)}w^r\right)$$

Por otra parte, como $D^\alpha(R^r\phi)$ es una suma de términos, cada uno de ellos homogeneos en ξ de grado menor o igual a $-r$

$$|\xi|^r|D^\alpha(R^r\phi)| < c_{r,\alpha}$$

con $c_{r,\alpha} \in R$, $|\xi| > 1$ y $r \in N$.

Entonces

$$|D^\alpha(e^{-i<\cdot,\xi>}|\xi|^r R^r\phi)| \leq \sum_{0\leq j\leq\alpha} |\binom{\alpha}{j}\xi^j e^{-i<\cdot,\xi>}|\xi|^r D^{\alpha-j}(R^r\phi)|$$

$$\leq |\xi|^{|\alpha|} \sum_{0\leq j\leq\alpha} |\binom{\alpha}{j}||\xi|^r D^{\alpha-j}(R^r\phi)| < c_{r,\alpha}|\xi|^{r+|\alpha|}$$

con $|\xi| > 1$ y $r \in N$.

Tambien, como u es una distribución, existen $c_r \in R$ y $M \in N$ tales que

$$|u(e^{-i<\cdot,\xi>}|\xi|^r R^r\phi)| \leq c_r \sup_{|\alpha|\leq M} |D^\alpha(e^{-i<\cdot,\xi>}|\xi|^r R^r\phi)|$$

$$\leq c_r \sum_{|\alpha|\leq M} c_{r,\alpha}|\xi|^{|\alpha|} \leq c_r \cdot c_{M,r}|\xi|^M$$

con $r \in N$, $c_{M,r} = \max_{|\alpha|\leq M}\{c_{r,\alpha}\}$ y $|\xi| > 1$

Así

$$|u(e^{-i<\cdot,\xi>}R^r\phi)| \leq c_r \cdot c_{M,r}|\xi|^{M-r} \text{ con } |\xi| > 1 \tag{6}$$

Si $(x_o,\xi_o) \notin WFf$, existe $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ con $\phi(x_o) \neq 0$ y $V \subset R^n - \{0\}$ abierto cónico con $\xi_o \in V$ tales que

$$|\xi|^r|\widehat{\phi f}(\xi)| \leq c'_r \text{ con } \xi \in V \tag{7}$$

Para la función ϕ existe U abierto con $x_o \in U \subset \Omega$ tal que

$$0 < c \leq |\phi(x)| \text{ con } x \in U$$

De esta manera, si $\psi \in C_0^\infty(U)$, por el teorema 1

$$\sum_{x_o}\psi = \sum_{x_o}\psi\frac{\phi}{\phi} = \sum_{x_o}\frac{\psi}{\phi}\phi \subset \sum_{x_o}\phi$$

y

$$|\xi|^r|\widehat{\psi f}(\xi)| \leq c'_M$$

con $\xi \in V$ y $c_{M'} \in R$.

En particular si $\phi \in C_0^\infty(U)$, $\psi = \frac{w_r}{P_m(\cdot,\xi)} \in C_0^\infty(U)$ y por 5,6 y 7

$$|\xi|^M|\widehat{\phi u}(\xi)| \leq c_r \cdot c_{M,r}|\xi|^{M-r}|\xi|^M + c_{M'} \leq$$

$$c_r \cdot c_{M,r} + c_{M'}$$

con $\xi \in V$, $r > 2M$ y $|\xi| \geq 1$

Por lo tanto

$$(x_o,\xi_o) \notin WFu$$

◇

Este resultado puede ayudar al cálculo del frente de onda de una distribución, utilizando operadores adecuados

Para el ejemplo d) anterior, se tiene el siguiente desarrollo.

Sea $x_o = (x_{1_o}, \ldots, x_{n_o}) \in \partial([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n.b_n])$ y $x_o^{\perp}$ el subespacio generado por las normales de las caras del cubo que contienen a x_o. Si e_j es un vector canónico ortogonal a $x_o^{\perp}$ y se tiene el operador diferencial $P(X, D) = D^{e_j}$, entonces para $\phi \in C_0^{\infty}(R^n)$, cuyo soporte no contenga a puntos en las hipercaras ajenas a x_o, se tiene

$$< D^{e_j} X_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]}, \phi >= -\int \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_j} dx_j \cdot\cdot dx_{j-1}\, dx_{j+1} \cdot\cdot dx_n = 0$$

Así, localmente en x_o, es cero la distribución

$$D^{e_j} X_{[a_1,b_1]\times\cdots[a_n.b_n]}$$

y

$$CharD^{e_j} = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n) | \xi_j = 0\}$$

con lo que

$$\sum_{x_o} X_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n.b_n]} \subset CharD^{e_j}$$

entonces

$$\sum_{x_o} X_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]} \subset \cap_{e_j \perp x_o^{\perp}} CharD^{e_j} = x_o^{\perp}$$

Sea ahora el operador diferencial

$$P(X, D) = D^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}$$

con $\alpha_j = 1$, si e_j no es ortogonal a $x_o^{\perp}$, y cero en el caso contrario. Para este operador diferencial y $\phi \in C_0^{\infty}(R^n)$, cuyo soporte no contenga a puntos que esten en las hipercaras que son ajenas a x_o, se tiene

$$< D^{\alpha} X_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]}, \phi >=$$

$$(-1)^{|\alpha|} \int D^{\alpha}\phi(x)\, dx = \int \phi(x_1, \ldots, \tilde{x}_j, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots d\,\tilde{x}_j \cdots dx_n$$

donde $\tilde{x}_j$ es igual a x_{j_o} si $\alpha_j = 1$, y $d\,\tilde{x}_j$ indica la ausencia de la integración con respecto a la variable x_j.

De esta manera se ve que

$$D^{\alpha} X_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]} = \delta_{x_o^{\perp}}$$

y

$$\widehat{\phi\delta_{x_o^{\perp}}}(\xi) =$$

$$\int \phi(x_1, \cdots, x_n) e^{-i<(x_1,\ldots,\tilde{x}_j,\cdots,x_n),(\xi_1,\ldots,\xi_n)>}\, dx_1 \cdots d\,\tilde{x}_j \cdots dx_n$$

Tomando $\xi \in x_o^{\perp}$, entonces

$$< (x_1, \dots, \tilde{x}_j, \cdots, x_n), (\xi_1, \cdots, \xi_n) >= \sum \tilde{x}_j \xi_j$$

y con

$$\int |\phi(x_1, \dots, \tilde{x}_j, \dots, x_n)| \, dx_1 \cdots dx_j \cdots d\tilde{x}_j \cdots dx_n \neq 0$$

se tiene

$$|\xi|^m |\widehat{\delta_{x_o^{\perp}}}(\xi)| = |\xi|^m \frac{1}{(2\pi)^n} \int |\phi(x_1, \dots, \tilde{x}_j, \dots, x_n)| \, dx_1 \cdots d\tilde{x}_j \cdots dx_n$$

que no esta acotada cuando ξ crece.

Por lo tanto

$$x_o^{\perp} \subset \sum_{x_o} \delta_{x_o^{\perp}} \subset \sum_{x_o} X_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]}$$

con lo que

$$WFX_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]} = \{(x,\xi)| \in \partial([a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n]), \ \xi \in x_{\perp}\}$$

◇

El teorema 8 puede dar mucha información; en algunos casos; sobre como es el frente de onda de distribuciones que son las soluciones a ecuaciones diferenciales.

Por ejemplo si $P(X, D)$ es un operador elíptico en R^n, es decir un operador para el cual

$$P(x, \xi) = 0 \ \text{ si y sólo si } \ x = 0 \ \text{ y } \ \xi = 0$$

la ecuación diferencial

$$P(X, D) = f \quad \text{con} \quad f \in C^{\infty}(R^n)$$

si tiene solución en el espacio $\wp\prime(R^n)$, esta es un elemento en $C^{\infty}(R^n)$.

En otros casos el resultado del teorema puede dar muy poca información.

Por ejemplo si se toma una distribución $u \in \wp\prime(R^n)$ tal que

$$D^{e_n} u = 0$$

u localmente puede considerarse la composición del mapeo

$$F : R^n \to R^n \ f(x\prime, x_n) = x\prime \text{ y } x\prime = (x_1, \dots, x_{n-1})$$

con una distribución $v \in \wp\prime(R^{n-1})$.

Para ver que esto es cierto, se tiene el siguiente desarrollo.

Sea $g_o \in C_0^{\infty}(X_1)$ con $X_1 \subset R$ un conjunto abierto y la integral de de g_o igual a 1.

Si

$$H = \{h \in C_0^{\infty}(X_1) | \int h = 0\}$$

entonces

$$C_0^{\infty}(X_1) = H \oplus < g_o >$$

Es decir si $g \in C_0^\infty(X_1)$, se tiene

$$g = g_1 + \lambda g_o$$

con

$$\int g_1(t)\,dt = 0 \quad \text{y} \quad \int g(t)\,dt = \lambda$$

Si además $X_2 \in R^{n-1}$ es un abierto, toda función $f \otimes g$ en el espacio $c_0^\infty(X_2) \otimes C_0^\infty(X_1)$ se puede expresar como

$$f \otimes g = f \otimes g_1 + \lambda f \otimes g_o$$

De esta manera tomando la función $g_2 \in C_0^\infty(X_1)$ dada por

$$g_2(x) = \int_{-\infty}^{x} g_1(t)\,dt$$

se tiene

$$f \otimes g = D^{e_n} f \otimes g_2 + \lambda f \otimes g_o$$

Como $D^{e_n}u = 0$, para cada punto $x \in R^n$ existe un abierto $\Omega \subset R^n$ con $x \in \Omega$ tal que

$$< u, D^{e_n}\phi >= 0 \quad \text{con} \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Si X_1 y X_2 son abiertos en R y R^{n-1} respectivamente, tales que $X_2 \times X_1 \subset \Omega$, se tiene

$$< u, f \otimes g >=< u, D^{e_n} f \otimes g_2 > + \lambda < u, f \otimes g_o >$$

$$= \lambda < u, f \otimes g_o >$$

Entonces se puede definir la distribución $v \in \wp\prime(X_2)$ como

$$< v, f >=< u, f \otimes g_o > \quad \text{en} \quad f \in C_0^\infty(X_2)$$

Observando que

$$^tF\prime(x)\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in R^{n-1}$, queda bien definida la distribución F^*v, por el teorema 6.

Si v fuera una función de clase C^∞, entonces F^*v estaría definida de la siguiente manera.

$$< F^*v, \phi >=< v \circ F, \phi >=$$

$$\int v(F(x\prime, x_n))\phi(x\prime, x_n))\,dx_1 \cdots dx_{n-1}\,dx_n$$

$$= \int v(x\prime)\phi(x\prime, x_n)\,dx_1 \cdots dx_{n-1}\,dx_n =< v \otimes 1, \phi >$$

con $\phi \in C_0^\infty(X_2 \times X_1)$, $x\prime = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, y 1 la distribución identidad en R.

De esta manera, por la continuidad se tiene

$$F^* v = v \otimes 1$$

cuyo valor en $f \otimes g \in C_0^\infty(X_2) \otimes C_0^\infty(X_1)$ es

$$< F^* v, f \otimes g > = < v \otimes 1, f \otimes g > = < 1, g >< v, f >$$
$$= \lambda < u, f \otimes g_o > = < u, f \otimes g >$$

con lo que $F^* v$ y u resultan iguales en el conjunto denso $C_0^\infty(X_2) \otimes C_0^\infty(X_1)$ de $C_0^\infty(X_2 \times X_1)$, y por lo tanto son iguales.

Así se ve entonces que

$$WFu = WF(v \otimes 1) = \{(x\prime, x_n, \xi\prime, 0) | (x\prime, \xi\prime) \in WFv\}$$

pero

$$WFD^{e_n} u = \emptyset$$

Entonces por el teorema 4, para todo conjunto B cerrado cónico de

$$\{(x\prime, x_n, \xi\prime, 0) \in R^{4n}\}$$

existe $u \in \wp\prime(X_2 \times X_1)$ tal que

$$WFu = B \ \text{ y } \ WFD^{e_n} u = \emptyset$$

Para mayor información de las propiedades del frente de onda en conexión con tipos especiales de operadores diferenciales se puede consultar en [2]. Aquí Hörmander da muchas propiedades hermosas del frente de onda en conexión con los operadores diferenciales a partir del teorema 8. Incluso Hörmander da refinamientos del frente de onda y obtiene resultados como el del teorema 8.

Algunos refinamientos del frente de onda se buscan de tal manera que se pueda caracterizar el donde una distribución se comporta localmente como una función en algún espacio útil en las ecuaciones diferenciales, por ejemplo en espacios de clase C^m, trabajos en esta dirección se pueden encontrar en [5].

Aunque todos estos trabajos son bastante complicados, a partir de ellos se obtienen muchas resultados en la busqueda de soluciones a ecuaciones diferenciales y propiedades locales de tales soluciones.

Justificación de la terminología "Frente de Onda"

Por último se habla un poco del término frente de onda.

Lars Hörmander en sus artículos y libros publicados con relación al teorema 8, no sólo obtiene este resultado, sino tambien prueba que el frente de onda es un conjunto invariante bajo el flujo Hamiltoniano.

Si $P(X, D)$ es un operador diferencial con parte principal $P_m(X, \xi)$, el flujo Hamiltoniano esta dado por las ecuaciones

$$\frac{\partial x_k}{\partial t} = \frac{\partial P_m(X, \xi)}{\partial x_k} \ \text{ y } \ \frac{\partial \xi_k}{\partial t} = -\frac{\partial P_m(X, \xi)}{\partial x_j}$$

Hörmander tambien da el siguiente resultado.

Teorema 9

Sea $P(D)$ un operador diferencial con coeficientes constantes para el cual la parte principal $P_m(\xi)$ es real y, $P\prime_m(\xi) \neq 0$. Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $P(D)u = f$ y $(x\xi) \in WFu - WFf$, entonces

$$I \times \{\xi\} \subset WFu$$

si I es un intervalo conteniendo a x en Ω, con dirección $P\prime_m(\xi)$, tal que $I \times \{\xi\}$ no intersecta a WFf.

Este teorema dice que las singularidades de una distribución u con frecuencia ξ, se propagan con una frecuencia fija en la dirección $P\prime_m(\xi)$ en Ω hasta que intersectan a las singularidades de f.

En el caso que se tenga como operador diferencial al de onda, el flujo Hamiltoniano se reduce a la construcción clásica de Huyghens de la propagación de una onda.

En esta construcción se asume que la posición y el plano tangente de una onda, es conocido en un momento dado, y se concluye que tiempo después, cada punto de la onda se ha trasladado en la dirección normal del plano tangente, a la velocidad de la luz/end

Hörmander tambien da el siguiente resultado.

Teorema 9

Sea $P(D)$ un operador diferencial con coeficientes constantes para el cual la parte principal $P_m(\xi)$ es real y, $P'_m(\xi) \neq 0$. Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $P(D)u = f$ y $(x\xi) \in WFu - WFf$, entonces

$$I \times \{\xi\} \subset WFu$$

si I es un intervalo conteniendo a x en Ω, con dirección $P'_m(\xi)$, tal que $I \times \{\xi\}$ no intersecta a WFf.

Este teorema dice que las singularidades de una distribución u con frecuencia ξ, se propagan con una frecuencia fija en la dirección $P'_m(\xi)$ en Ω hasta que intersectan a las singularidades de f.

En el caso que se tenga como operador diferencial al de onda, el flujo Hamiltoniano se reduce a la construcción clásica de Huyghens de la propagación de una onda.

En esta construcción se asume que la posición y el plano tangente de una onda, es conocido en un momento dado, y se concluye que tiempo después, cada punto de la onda se ha trasladado en la dirección normal del plano tangente, a la velocidad de la luz/end

Bibliografía

[1] Barros Neto, José
An introduction to the theory of Distributions, (1973)
[2] Hörmander, Lars
The Analysis of Partial Differential Operators, Vol. I (1983)
[3] Schwartz, Laurent
Théorie des Distributions, Vol. I (1950)
[4] Schwartz, Laurent Théorie des Distributions, Vol. II (1951)
[5] Peterson Bent, E.
Introduction to the theory of Distributions and Pseudodifferential Operators, (1983)
[6] Lützen, Jesper
The prehistory of the theory of Distributions, (1982)
[7] Friedlander, F.G.
Introduction to the theory of Distributions, (1982)
[8] Rosinger Elemar, E.
Generalized Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations, (1987)
[9] Spivak, Michael
Cálculo en Variedades, (1979)
[10] Courant, R. and Hilbert, D.
Methods of Mathematical Physics Vol. I
[11] Courant, R. and Hilbert, D.
Methods of Mathematical Physics Vol. II
[12] Misra, O.P. and Lavorne, J.L.
Transform Analysis of Generalized Functions, (1986)
[13] Rektoris, Karol
Variational Methods in Mathematics, (1977)
[14] Gelfand, I.M. and Shilov, G.E.
Generalized Functions Vols. I,II y III, (1964)
[15] Treves, F.
Topological Vector Spaces and Distributions, (1966)

[16] Horvath, J.

Topological Vector Spaces and Distributions, (1966)

[17] Royden, H.L.

Functional Analysis, (1973)

[18] Rudin, W.

Functional Analysis, (1973)

Artículos

[19] Dieudonné, J.

Recent developments in Mathematics

Amer. Math. Monthly, 79 (1964), pags. 239-248

[20] Browder, F.F. The relation of Functional Analysis to concrete Analysis in 20th century Mathematics

Hist. Math., 2 (1975), pags. 575-590

[21] Hörmander, Lars

Spectral Analysis of Singularities

Princenton University Press (1978)

Para los conceptos de topología diferencial se puede consultar

[22] Guillemin, V.

Differential Topology