29
42

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA TEORIA DE NORMA SUPERSIMETRICA UTILIZANDO FORMAS DIFERENCIALES EN EL SUPERESPACIO

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

FISICO

PRESENTA

MIGUEL MELESIO RODRIGUEZ ROJAS

México D.F. 1989

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INDICE

Introducción

Para poder entender cómo está constituido el mundo necesitamos una teoría que explique las interacciones entre las partículas elementales de la materia. O lo que es lo mismo : se requiere una teoría de las fuerzas básicas de la naturaleza. Se han identificado cuatro fuerzas de esta clase; y hasta hace poco cada una de ellas precisaba una teoría distinta. La fuerza de la gravitación y la del electromagnetismo tienen un alcance ilimitado. La fuerza nuclear débil y fuerza nuclear fuerte escapan a la percepción directa porque su influencia se extiende sólo a distancias cortas, no mayores que el radio del núcleo atómico. La fuerza fuerte mantiene unidos los protones y los neutrones en el núcleo y, en otro contexto, liga las partículas llamadas quarks que se cree son los constituyentes de protones y neutrones. La fuerza débil es responsable de la desintegración β.

Una ambición de la física es llegar a formular una teoría central única que incorpore todas las fuerzas conocidas. Una teoría que revele profundas conexiones entre los distintos tipos de fuerzas y a la vez que de cuenta de su diversidad aparente. Aunque no se ha logrado tal unificación se han realizado algunos progresos. Podemos ya interpretar la fuerza débil y el electromagnetismo en el contexto de una teoría única. No se trata de que ambas fuerzas pierdan su identidad característica, sino de que la teoría las implica matemáticamente. Y lo más importante es que las cuatro fuerzas fundamentales vienen descritas por teorías que tienen la misma forma general.

Estas son las teorías de campos de norma o teorías de norma. Estas hacen uso de nuevas ideas físicas y un fuerte aparato matemático para dar una descripción unificada de todas las formas de interacciones de partículas elementales. Al mismo tiempo admiten una interpretación puramente geométrica como una teoría de medios continuos.

La teoría de campos de norma está basada sobre principios de simetría. Existen primordialmente dos principios de simetría, las simetrías que resultan de la aplicación de una transformación uniforme en todo el espacio-tiempo (globales), y aquellas en que la transformación que las origina es distinto para cada uno de los puntos del espacio-tiempo (locales). Si bien, una simetría global parece un concepto más amplio, las simetrías locales imponen exigencias más estrictas en las teorías y revelan uniones más profundas en la naturaleza. Un ejemplo aclara esta afirmación, un globo esférico al que se gira cierto ángulo alrededor de un eje que pase por su centro, preserva su forma esférica porque todos los puntos de su superficie se han transformado de la misma manera (han rotado el mismo ángulo). Sin embargo, moviendo independientemente cada uno de los puntos en la superficie del globo de manera que permanezcan sobre dicha superficie, es decir, que sus distancias al centro permanezcan fijas para que la forma esférica se mantenga, estamos originando una simetría local. En este caso la superficie del globo se arrugará en algunas regiones y se estirará en otras dando origen a fuerzas que tratarán de restituir la superficie a su estado original. Estas fuerzas aparecen de manera similar cuando una teoría física posee simetría local: el paso de una simetría global a una local puede usarse para describir el origen de las fuerzas. De esta manera podemos obtener los campos de fuerza del electromagnetismo, de la interacción débil, de la interacción fuerte y de la gravedad pidiendo la invariancia local de los grupos U(1), SU(2), SU(3) y del grupo de Poincaré respectivamente, de la lagrangiana de una teoría.

El hecho que las interacciones fuerte, débil y electromagnetica sean descritas por teorías de norma nos da la posibilidad de que quisa las tres interacciones puedan ser entendidas como aspectos distintos de una única teoría de norma. La unificación parcial de las interacciones débil y electromagnetica ha sido lograda en la teoría de Weinberg y Salam, haciendo local al grupo de simetría SU(2)XU(1).

Siguiendo el mismo espiritu de la teoría de Weinberg y Salam, se pueden desarrollar esquemas que combinen las fuerzas nucleares con el electromagnetismo (Teorías de Gran Unificación). Los esquemas de gran unificación, están asociados con grupos de simetría tales como SU(5), SO(10) o E_6. Estos grupos contienen a los grupos SU(3) de interacciones fuertes y al grupo SU(2)XU(1) de la teoría electrdébil.

Los esquemas gran unificados ignoran a la gravedad. El concepto de supersimetría constituye una herramienta que podría capacitarnos para unificar la gravedad con las demás fuerzas de la naturaleza.

La idea esencial de la supersimetría se centra en el concepto de espín. La existencía del espín es tan fundamental a la naturaleza de las partículas que las divide en dos clases distintas, bosones y fermiones. Cuando una partícula tiene espín cero o entero, se le llama bosón, y cuando el espín es semientero, se le llama fermión. La distinción entre bosones y fermiones es muy importante, se manifiesta especialmente cuando consideramos sus hábitos de agrupación. Los fermiones se hallán poseídos por una fobia hacia ellos mismos y no permiten a sus hermanos que se acerquen demasiado. Esto queda expresado por el principio de exclusión de Pauli, el cual sostiene que dos fermiones no pueden exisistir en el mismo estado. El principio de exclusión es en realidad el equivalente microscopico al hecho macroscópico de que dos objetos no pueden ocupar el mismo lugar al mismo tiempo. En contraste con el comportamiento aislacionista de los fermiones a los bososnes les encanta estar juntos, nada se opone a que muchos de ellos se encuentren en el mismo estado. En los bosones no actúa ningun principio de exclusión, y la conducta de los bosones es completamente distinta a la de los fermiones.

Mediante una transformación de supersimetría podemos asociarlé a cada fermión un bosón, y viceversa, de espín contiguo, es decir la operación transforma a una partícula de espín J a otra partícula cuyo espín puede tener uno de dos valores: J+1/2 ó J-1/2. Si realizamos sucesivamente dos operaciones supersimétricas obtendremos una operación geométrica análoga a un cambio de posición en el espacio-tiempo. La gravedad siendo como es geometría curvada, recibe una expresión natural en el lenguaje de supersimetría. Entonces al hacer local la invariancia de supersimetría, dos transformaciones supersimétricas dan una traslación en el espacio-tiempo local. Como la teoría que es invariante bajo traslaciones locales es la teoría de gravitación de Einstein, a la teoría invariante bajo transformaciones de supersimetría local se le llama supergravedad y es la "raíz cuadrada " de la gravitación, en el sentido de que se necesitan dos supertraslaciones locales para obtener una traslación local usual en el espacio-tiempo. Entonces la supersimetría es una posible via para lograr la unificación de todas las fuerzas elementales.

Además el álgebra de supersimetría es la única álgebra graduada de Lie de simetrías de la matriz-S consistente con la teoría cuántica de campo. La prueba de este planteamiento se basa en el teorema de Coleman-Mandula, este teorema establece que el álgebra de Lie más general de simetrías de la matriz-S contiene al operador de momento y energía P_m, al operador de rotaciones de Lorentz M_{mn}, y un número finito de operadores escalares de Lorentz B_l. El teorema además asegura que los operadores B_l deben pertenecer al álgebra de un grupo de Lie compacto.

La supersimetría evita las restricciones del teorema de Coleman-Mandula generalizando la noción del álgebra de Lie definiendo sistemas álgebraicos que incluyan tanto conmutadores como anticonmutadores. Estas nuevas álgebras son llamadas superálgebras o álgebras graduadas de Lie.

Por estas razones es importante tratar con supersimetría. La tesis está encaminada a obtener una lagrangiana, de un campo vectorial, globalmente invariante bajo transformaciones de supersimetría e invariante de norma localmente bajo transformaciones de simetría interna, utilizando formas diferenciales en el superespaacio.

En el capítulo 1 se tratará la teoría general de formas diferenciales en un espacio ordinario, veremos que existe un isomorfismo entre el análisis vectorial clásico y la teoría de formas, cuando ésta es aplicada al espacio euclideano tridimensional, se utiliza el lenguaje de las formas diferenciales para reescribir las ecuaciones de Maxwell. En el capítulo 2 se estudian algunos aspectos del álgebra de Grassmann, la cual utiliza variables que anticonmutan, se introducen los conceptos de derivada e integral en Grassmann, se estudia a nivel clásico sisstemas sencillos Bose-Fermi, y se construye una alagrangiana supersimétrica utilizando supercampos. En el capítulo 3 se da una introducción a la supersimetría en teoría cuántica de campo, se definen las transformaciones supersimétricas, se dá un panorama de de la matemática que involucra la supersimetría, y se estudia una lagrangiana localmente invariante de norma pero globalmente supersimétrica. En el capítulo 4 se define el superespacio, y se introduce en él las formas diferenciales como una generalización del capítulo 1. En el capítulo 5 se aplican las formas diferenciales del superespacio para construir una lagrangiana globalmente supersimétrica e invariante de norma local. Finalmente en el capítulo 6 se construye una lagrangiana semejante a la del capítulo 5, utilizando en este caso supercampos, ésto es para comparar ambos metodos.

CAPITULO I

1.-Algebra exterior: El álgebra de formas diferenciales.

Para tratar con las formas diferenciales nos es conveniente tratar con las mas sencillas, las 1-formas.

Sea E^n, un espacio euclideano n-dimensional con coordenadas $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Entonces cualquier punto x del espacio euclideano estará descrito por la n-eada $x=(x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

A cada punto $x \epsilon E^n$ le asociaremos un conjunto de objetos dx^i con $i=1,2,\ldots,n$ que formarán la base para las 1-formas, de acuerdo a la siguiente definición.

Cualquier 1-forma ω es una combinación lineal de los objetos dx^i, es decir una 1-forma es una combinación lineal de la base de 1-formas dx^i.

$$\omega = \Sigma^n{}_{i=1} a_i dx^i \qquad \ldots(1.1)$$

El conjunto de 1-formas en un punto forman un espacio vectorial, denotado por $(\Lambda^1 E^n)$. Esto lo podemos probar si consideramos dos 1-formas ω_1 y ω_2 si las sumamos veremos que la suma es de nuevo una 1-forma:

Sea $\omega_1=\Sigma\ a_i dx^i \ \epsilon(\Lambda^1 E^n)$ y $\omega_2=\Sigma\ b_i dx^i \ \epsilon(\Lambda^1 E^n)$ entonces:

$$\omega_1+\omega_2 = \Sigma(a_i+b_i)dx^i \ \epsilon(\Lambda^1 E^n) \qquad \ldots(1.2)$$

La suma de ω_1 y ω_2 es de nuevo una combinación lineal de la base de 1-formas dx^i y por tanto también es una 1-forma. Ahora tomemos el producto de un escalar por una 1-forma; sea $\lambda \epsilon R$ y $\omega=\Sigma a_i dx^i$, una 1-forma entonces:

$$\lambda(\omega) = \lambda\Sigma a_i dx^i = \Sigma\lambda a_i dx^i \ \epsilon(\Lambda^1 E^n) \qquad \ldots(1.3)$$

El producto de un escalar por una 1-forma es de nuevo una 1-forma. Las propiedades de las 1-formas,(1.2) y (1.3) nos muestran que las 1-formas en un punto del espacio euclideano E^n forman un espacio vectorial.

Definamos ahora el producto exterior ,como aquella operación entre formas diferenciales que satisface las siguientes reglas,

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i \qquad \ldots(1.4)$$

$$(\Sigma a_i dx^i)\wedge dx^j = \Sigma a_i dx^i \wedge dx^j \qquad \ldots(1.5)$$

El producto exterior $\wedge$, es anticonmutativo y distributivo, notemos que el producto exterior no cumple con la propiedad de cerradura, es decir el producto exterior de dos 1-formas no es una 1-forma. La propiedad (1.4) nos dice que si i=j entonces $dx^i \wedge dx^j=0$.

Con el producto exterior podemos construir 2-formas, como el producto exterior de dos 1-formas. Debido a que $dx^i \wedge dx^j=-dx^j \wedge dx^i$ el número de 2-formas independientes en un punto del espacio euclideano es n(n-1)/2.

Demostremos la anterior afirmación;sean $\alpha=\Sigma_i a_i dx^i$ y $\beta=\Sigma_j b_j dx^j$, dos 1-formas entonces:

$$\alpha\wedge\beta = \Sigma_i a_i dx^i \wedge \Sigma_j b_j dx^j = \Sigma_{i,j} a_i b_j dx^i \wedge dx^j \qquad \ldots(1.6)$$

debido a que el producto exterior satisface que $dx^i \wedge dx^i=0$ y $dx^i \wedge dx^j=-dx^j \wedge dx^i$, para i j (1.6) queda como:

$$\alpha\wedge\beta = \Sigma_{i<j}(a_i b_j - a_j b_i)dx^i\wedge dx^j \qquad \ldots(1.7)$$

Entonces cualquier 2-forma es una combinación lineal del producto exterior (1.7) y debido a que las 2-formas $dx^i\wedge dx^j$ forman una base, la dimensión del espacio vectorial de 2-formas (Λ^2E^n) es $n(n-1)/2$.

Podemos extender el producto exterior a la multiplicación de un número arbitrario de 1-formas, para formar una base de p-formas, $dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$, que generarán un espacio vectorial (Λ^pE^n) en un punto x de E^n, cuya dimensión es $n!/p!(n-p)!$.

Notemos que si $p>n$ en donde n es la dimensión del espacio base E^n, al menos una de las dx^i se repite y tendremos un producto de la forma $dx^i\wedge dx^i$ el cual es cero debido a que el producto es anticonmutativo, de aquí que toda p-forma es nula para $p>n$.

Una p-forma arbitraría $\omega \in (\Lambda^pE^n)$ esta definida por:

$$\omega = \Sigma_{i_1\cdots i_p} a_{i_1\cdots i_p} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p} \qquad \ldots(1.8)$$

Podemos ilustrar lo anterior tomando como ejemplo el caso tridimensional, en este caso hay que notar que en cada punto del espacio euclideano tridimensional (E^3) la base de 1-formas es dx^1, dx^2 y dx^3 y por tanto la base de 2-formas es $dx^1\wedge dx^2$, $dx^2\wedge dx^3$ y $dx^1\wedge dx^3$ y sólo existe una base para las 3-formas, $dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$.

Entonces cualquir 1-forma, 2-forma o 3-forma arbitrarías estará dadá por:

$$\rho = \Sigma\, a_i\, dx^i \in (\Lambda^1E^3)$$

$$\omega = \Sigma_{i<j}\, a_{ij} dx^i\wedge dx^j \in (\Lambda^2E^3) \qquad \ldots(1.9)$$

$$\eta = a dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$$

Podemos incluir a las formas diferenciales a la toría de campos. Definimos un campo de 1-formas como, $\omega=\Sigma_i a_i(x)dx^i$ donde $a_i(x)$ es un conjunto de funciones diferenciables de x. De esta manera, una 1-forma en cualquier punto $x=x_0$ está dada por $\omega=\Sigma a_i dx^i$, que es la definición de 1-formas anteriormente vista.

La generalización a un campo arbitrario de p-formas es inmediata, si $\omega(x)$ es un campo cualquiera de p-formas entonces quedará definido como:

$$\omega(x) = \Sigma_{i_1\cdots i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x)\, dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p} \qquad \ldots(1.10)$$

en donde los coeficientes de la expansión de $\omega(x)$ en la base $dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$, las $a_{i_1\cdots i_p}(x)$ son funciones diferenciables de x.

Ahora definiremos una operación sobre las formas diferenciables que juega un papel muy importante. El operador estrella de Hodge o dual se define de la siguiente manera: El dual de la p-forma base $dx^{i_1}\cdots dx^{i_p}$ es la (n-p)-forma $\epsilon_{i_1\cdots i_p i_{p+1}\cdots i_n} dx^{i_{p+1}}\cdots dx^{i_n}$ en donde

$$\epsilon_{i_1\cdots i_p i_{p+1}\cdots i_n} = \begin{cases} 1 \text{ si } (i_1\ldots i_p i_{p+1}\ldots i_n) \text{ es una permutacion par de } 1,2,\ldots,n. \\ -1 \text{ si } (i_1\ldots i_p i_{p+1}\ldots i_n) \text{ es una permutación impar de } 1,2,\ldots,n. \\ 0 \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

notemos que los $i_{p+1},\dots,i_n$ completan el conjunto de números enteros $i_1,\dots,i_p$ de 1 a n.

Observemos que el operador estrella mapea una p-forma ω en una (n-p)-forma $*\omega$, es decir el operador estrella es una transformación lineal, $*:(\Lambda^p E^n)\text{---}(\Lambda^{(n-p)}E^n)$, que va del espacio vectorial de p-formas a el espacio vectorial de (n-p)-formas[1].

Podemos ilustrar la acción del operador de Hodge para el caso del espacio euclideano tridimensional E^3. Anteriormente vimos la base de 1-formas en un punto $x\in E^3$, es dx^1, dx^2 y dx^3, aplicando el operador estrella de Hodge a cada una de estas formas tenemos:

$$*dx^1 = dx^2\wedge dx^3,\quad *dx^2 = dx^3\wedge dx^1,\quad *dx^3 = dx^1\wedge dx^2 \quad \dots(1.11)$$

La base para las 2-formas en E^3 es, $dx^1\wedge dx^2$, $dx^1\wedge dx^3$ y $dx^2\wedge dx^3$ aplicando el operador de Hodge a esta base tenemos:

$$*(dx^1\wedge dx^2)= dx^3,\quad *(dx^1\wedge dx^3)= -dx^2,\quad *(dx^2\wedge dx^3)= dx^1 \quad \dots(1.12)$$

Similarmente aplicando el operador estrella a la 3-forma $dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$ y a una cero-forma, que es una función escalar de variables reales, tenemos:

$$\begin{aligned} *(dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3) &= 1 \\ *f &= f dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3 \end{aligned} \quad \dots(1.13)$$

Terminaremos esta sección con un compendio de las propiedades más importantes de las p-formas.

1)Una p-forma en general puede ser escrita como

$$\omega = \Sigma_{i_1\dots i_p} a_{i_1\cdots i_p} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p} \quad \dots(1.14)$$

2)Si $\omega=\Sigma a_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$ y $\eta=\Sigma b_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$ son dos p-formas entonces:

$$\omega+\eta = \Sigma(a_{i_1\cdots i_p}+b_{i_1\cdots i_p})dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p} \quad \dots(1.15)$$

es decir la suma de dos p-formas es otra vez una p-forma.

3)Si ω es una p-forma y η es una q-forma entonces:

$$\omega\wedge\eta = \Sigma_{i's}\Sigma_{j's} a_{i_1\cdots i_p} b_{j_1\cdots j_q} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q} \quad \dots(1.16)$$

4)Si ω es una p-forma y η una q-forma entonces:

$$\omega\wedge\eta = (-)^{pq}\,\eta\wedge\omega \quad \dots(1.17)$$

5)Si $\Phi_i=\Sigma_{j=1}{}^3 f_{ij}dx^j$, con $1\le i\le 3$, es una 1-forma en el espacio euclideano tridimensional entonces:

$$\Phi_1\wedge\Phi_2\wedge\Phi_3 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33}. \end{vmatrix} dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3 \quad \dots(1.18)$$

6)Para el caso de dimensión tres se cumple que $*(*\omega)=\omega$ para ω una cero-forma, una 1-forma, una 2-forma o una 3-forma en E^3.

Comprobemos la anterior afirmación para cada caso. Consideremos una 0-forma f y apliquémosle dos veces el operador de Hodge

1: Para una definición más general vease, Flanders (1) y Schutz (2).

tenemos:

$$*(*f) = *(f\, dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3) = f \quad \ldots (1.19)$$

realizando la misma operación para una 1-forma $\phi=\Sigma_{i=1}{}^3 a_i dx^i$ tenemos:

$$*(*\phi) = *(a_1 dx^2\wedge dx^3 + a_2 dx^3\wedge dx^1 + a_3 dx^1\wedge dx^2$$

$$= a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + a_3 dx^3 = \phi \quad \ldots (1.20)$$

para ω una 2-forma la doble aplicación del operador estrella nos da en este caso

$$\begin{aligned} *(*\omega) &= *(*\Sigma_{i,j} a_{ij} dx^i\wedge dx^j) \\ &= a_{12} dx^1\wedge dx^2 + a_{23} dx^2\wedge dx^3 + a_{31} dx^3\wedge dx^1 \\ &= \omega \quad \ldots (1.21) \end{aligned}$$

En todos estos ejemplos observamos que para el caso n=3, la dimensión del espacio base, el dual del dual es la identidad $*(*\omega)=\omega$.

7)Si α y β son p-formas entonces:

$$\alpha\wedge *\beta = \beta\wedge *\alpha \quad \ldots (1.22)$$

Demostración:Sean $\alpha=\Sigma_{H_1\cdots H_p} a_{H_1\cdots H_p} dx^{H_1}\wedge\cdots\wedge dx^{H_p}$ y $\beta=\Sigma_{K_1\cdots K_p} b_{K_1\cdots K_p} dx^{K_1}\wedge\ldots\wedge dx^{K_p}$ dos p-formas entonces:

$$*\beta = \Sigma_{K_1\cdots K_p} b_{K_1\cdots K_p}\, \epsilon_{K_1\cdots K_p K_{p+1}\cdots K_n} dx^{K_{p+1}}\wedge\ldots\wedge dx^{K_n} \quad \ldots (1.23)$$

$$y \; *\alpha = \Sigma_{H_1\cdots H_p} a_{H_1\cdots H_p}\, \epsilon_{H_1\cdots H_p H_{p+1}\cdots H_n} dx^{H_{p+1}}\wedge\ldots\wedge dx^{H_n} \quad \ldots (1.24)$$

de la definición de α y β y de las ecuaciones (1.23) y (1.24) tenemos que:

$$\alpha\wedge *\beta = \Sigma_{H_1\cdots H_p}\Sigma_{K_1\cdots K_p} a_{H_1\cdots H_p} b_{K_1\cdots K_p}\, \epsilon_{K_1\cdots K_p K_{p+1}\cdots K_n}$$
$$dx^{H_1}\wedge\cdots\wedge dx^{H_p}\wedge dx^{K_{p+1}}\wedge\cdots\wedge dx^{K_n}$$

y

$$\beta\, *\alpha = \Sigma_{K_1\cdots K_p}\Sigma_{H_1\cdots H_p} b_{K_1\cdots K_p} a_{H_1\cdots H_p}\, \epsilon_{H_1\cdots H_p H_{p+1}\cdots H_n}$$
$$dx^{K_1}\wedge\cdots\wedge dx^{K_p}\wedge dx^{H_{p+1}}\wedge\cdots\wedge dx^{H_n}$$

y debido a que los índices K_i y H_i son indices mudos que toman los mismos valores, las expresiones anteriores son iguales y por tanto se verifica que $\alpha\wedge*\beta=\beta\wedge*\alpha$.

2.-Derivada Exterior.

La derivada exterior denotada por $d\omega$ de cualquier p-forma ω, está definida como una (p+1)-forma de acuerdo a la siguiente regla:

$$d\omega = \Sigma_{j,i_1,\cdots,i_p} \partial_j a_{i_1,\cdots,i_p} dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p} \quad \ldots (2.1)$$

es decir la derivada exterior conecta p-formas con (p+1)-formas. Pongamos atención en que el símbolo ∂_j significa derivacion parcial con respecto de x^j.

Denotemos por $F^p(U)$ al conjunto de todas las p-formas sobre U, en donde U es un subconjunto de E^n, en particular $F^0(U)$ es el conjunto de todas las funciones suaves sobre U. Entonces el operador d mapea p-formas de $F^p(U)$ a (p+1)-formas de $F^{p+1}(U)$.

$$d : F^p \longrightarrow F^{p+1} \quad \ldots(2.2)$$

Notemos de la definición de derivada exterior ec.(2.1), que si ω es una n-forma entonces su derivada exterior se anula $d\omega=0$.

Un hecho muy interesante del operador d, es que incorpora al gradiente, al rotacional y a la divergencia dentro de su formalismo, cuando es aplicado a las formas diferenciales en el espacio euclideano tridimensional.

En efecto si ω es una 0-forma en E^3, es decir es una función escalar f entonces:

$$df = \Sigma_i \partial_i f \ dx^i \quad \ldots(2.3)$$

lo que se asemeja al gradiente de una función escalar. Si ahora ω es una 1-forma en E^3, $\omega=\phi=\Sigma a_i dx^i$ entonces:

$$d\phi = \Sigma_{j,i} \partial_j a_i \ dx^j \wedge dx^i = \Sigma_{j<i} (\partial_j a_i - \partial_i a_j) dx^j \wedge dx^i \quad \ldots(2.4)$$

lo cual se asemeja al rotacional en tres dimensiones. En ambos casos existe una conexión natural entre el operador d y el gradiente o el rotacional.

El operador d satisface las siguientes reglas;

L(1): Si p es una p-forma, $p=a_H dx^H=\Sigma_H a_{H_1\cdots H_p} dx^{H_1}\wedge\cdots\wedge dx^{H_p}$ y q una q-forma, $q=b_K dx^K=\Sigma_{K_1\cdots K_q} b_{K_1\cdots K_q} dx^{K_1}\wedge\cdots\wedge dx^{K_q}$ entonces:

$$d(p\wedge q) = dp\wedge q + (-1)^p p\wedge dq \quad \ldots(2.5)$$

Demostracion: $d(p\wedge q) = \Sigma_i \partial_i (a_H b_K) dx^i \wedge dx^H \wedge dx^K$

$$d(p\wedge q) = \Sigma_i \partial_i a_H \ b_K \ dx^i \wedge dx^H \wedge dx^K + \Sigma_i a_H \partial_i b_K dx^i \wedge dx^H \wedge dx^K$$

$$= dp\wedge q + (-)^p p\wedge dq$$

el factor $\partial_i b\, dx^i$ para llegar a la posición $\partial_i b \ dx^i \wedge dx^K$, debe intercambiarse p veces con los elementos base dx^H de la p-forma p en cada intercambio la suma cambia de signo de ahi que aparezca el factor $(-1)^p$.

De esta regla se desprende que si f y g son funciones y ϕ y τ son 1-formas, entonces se cumple lo siguiente:

$$d(fg) = (df)g + f(dg)$$
$$d(f\phi) = df\wedge\phi + fd\phi \quad \ldots(2.6)$$
$$d(\phi\wedge\tau) = d\phi\wedge\tau - \phi\wedge d\tau$$

L(2): El operador d es un operador líneal, es decir si p y q son p-formas entonces:

$$d(p+q) = dp+dq \quad \ldots(2.7)$$

La derivada exterior nos permite tener una manera alternativa de introducir las 1-formas. Si realizamos una transformación de coordenadas en E^n, $(x^1,\ldots,x^n)$ -- $(\overline{x}^1,\ldots,\overline{x}^n)$ o sea $\overline{x}^i=f_i(x)$, en donde las nuevas coordenadas son funciones continuas (0-formas) de las viejas coordenadas, entonces:

$$d\bar{x}^i = \Sigma_j \partial_j f_i \, dx^j \quad \ldots (2.8)$$

aplicando la propiedad (5), de la sección anterior, ecuación (1.18) tenemos;

$$d\bar{x}^1 \wedge d\bar{x}^2 \wedge d\bar{x}^3 = (\text{jacobiano}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad \ldots (2.9)$$

recordemos que la ecuación (1.18) fue un resultado para el caso de un espacio euclideano tridimensional, que puede ser generalizado a un espacio de n-dimensiones. En particular si hacemos $\bar{x}^i = x^i$, entonces de la ecuación (2.8) tenemos:

$$dx^i = \Sigma_j \partial_j x^i \, dx^j = \Sigma_j \, \delta_{ij} dx^j = dx^i \quad \ldots (2.10)$$

de donde podemos observar que las 1-formas pueden ser introducidas de una forma natural a través del operador diferencial d, al ser éste aplicado a las coordenadas vistas como funciones, es decir vistas como 0-formas, de ellas mismas.

Otro operador diferencial importante es el de la coderivada δ el cual actúa sobre elementos de $F^p(U)$ y los mapea a elementos de $F^{p-1}(U)$ y está definido de la siguiente manera, si ω es una p-forma entonces:

$$\delta\omega \equiv *(d*\omega) \quad \ldots (2.11)$$

$\delta\omega$ es una (p-1)-forma , es decir δ es un operador lineal de $F^p(U)$ a $F^{p-1}(U)$.

La combinación $d\delta+\delta d$ es una generalización del operador Laplaciano. Para verivicar la anterior afirmación es suficiente comprobar que $d\delta+\delta d$ se reduce al laplaciano cuando estamos trabajando en el espacio euclideano de tres dimensiones. Sea f una 0-forma, entonces:

$$(d\delta+\delta d) f = (d*d*+*d*d) f = *d*df \quad \ldots (2.12)$$

debido a que $d(*f)=0$ ya que $*f$ es una 3-forma, continuando la operación tenemos;

$$(d\delta+\delta d) f = *d*(\Sigma_i \partial_i f \, dx^i)$$

$$= \Sigma_{il} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ljk} \partial^2_{li} f$$

$$= \Sigma_{il} \delta_{il} \partial^2_i f = \Sigma \partial^2_i f \quad \ldots (2.13)$$

que es el laplaciano de la función f en tres dimensiones.

Una vez que tenemos definidas las operaciones sobre formas, veamos los resultados más importantes expresados en cuatro teoremas.

T(1):(Lema de Poincaré) Si ω es una p-forma arbitraría entonces:

$$d^2\omega = 0 \quad \ldots (2.14)$$

Demostración: Sea $\omega = \Sigma_i a_{i_1,\cdots,i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$, una p-forma entonces:

$$d^2 = \Sigma_{k,j,i} \; \partial^2_{kj} a_{i_1,\cdots,i_p} dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

$$= \Sigma_{j,k,i} \partial^2_{jk} a_{i,\cdots,i} dx^j \wedge dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

el último paso se debe a que el intercambio de los índices mudos j y k no debe de afectar el resultado, y lo anterior debe de ser igual a;

$$-\Sigma_{j,h,i}\,\partial^2{}_{jh}a_{i_1\cdots i_p}dx^j\wedge dx^h\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

debido a la antisimetría del producto $dx^h\wedge dx^j$, esto demuestra que $d^2\omega=0$ para toda p-forma ω.

Intimamente relacionado con el lema de Poincaré se tiene el siguiente resultado:

T(2):(Reciproco del lema de Poincaré) Sea λ una p-forma, si $d\lambda=0$ entonces existe una (p-1)-forma ω tal que

$$\lambda = d\omega. \qquad \ldots(2.15)$$

Antes de proseguir conozcamos algunas definiciones importantes. Se dice que una p-forma α es exacta si $\alpha=d\beta$. Se dice que una p-forma ω es cerrada si $d\omega=0$. Notemos que si α es una p-forma exacta, entonces α tambien es cerrada , la cual es una manera alternativa para expresar el lema de Poincaré.

El teorema T(2) nos dice que si λ es cerrada ($d\lambda=0$) entonces λ es exacta ($\lambda=d\omega$) hay que tener cuidado y notar que ω no es única. La (p-1)-forma ω', donde ω y ω' difieren sólo en una derivada exterior $\omega'=\omega+d\gamma$,con γ una (p-2)-forma ,nos da el mismo resultado que ω ,debido a que $d\gamma$ es exacta y por tanto $\lambda=d\omega'=d\omega+d^2\gamma=d\omega$. Por lo que el planteamiento, $d\lambda=0$ implica $\lambda=d\omega$, es cierto sólo localmente y no necesariamente cierto globalmente.

T(3):(Teorema de descomposición de Hodge) Cualquier p-forma ω puede ser escrita como:

$$\omega = d\alpha+\delta\beta+\gamma \qquad \ldots(2.16)$$

en donde α es una (p-1)-forma ,β es una (p+1)-forma y γ es una p-forma armónica, satisface la ecuación de Laplace, $\Delta\gamma=0$, en donde $\Delta=d\delta+\delta d$, las formas $d\alpha$, $\delta\beta$ y γ son únicas.

T(4):(Teorema generalizado de Stokes) Si ω es una p-forma y D un dominio (p+1)-dimensional entonces:

$$\int_{\partial D}\omega = \int_D d\omega \qquad \ldots(2.17)$$

en donde ∂D es la frontera de la región D. Es decir la integral de la p-forma ω sobre la frontera de la región D es igual a la integral de la derivada exterior de ω ,sobre la región D. Sin embargo es necesario hacer notar un detalle, la integral de formas diferenciales sobre una variedad de dimensión n, está definida sólo para n-formas , es decir el orden de la forma debe de ser igual a la dimensión del espacio en el cual se está integrando. Esto nos permite realizar la integración de p-formas sobre subvariedades del espacio de dimensión p, llamadas hipersuperficies.

3.-Análisis Vectorial

Ahora contamos con las bases suficientes para ver como la teoría de formas diferenciales contiene al análisis vectorial. La idea esencial es que podemos asociar a todo vector una 1-forma y a toda operación que involucre vectores una operación involucrando formas, entendiéndose que trabajamos en el espacio euclideano de tres dimensiones.

Para empezar hagamos la siguiente correspondencia, a todo campo vectorial, $\vec{A}=A_1\hat{x}_1+A_2\hat{x}_2+A_3\hat{x}_3$, donde los $\hat{x}_i$ son los vectores base unitarios del espacio E^3, un campo de 1-formas $\phi_A=A_1dx^1+A_2dx^2+A_3dx^3$. Esto lo simbolizaremos por $\vec{A}\approx\phi_A$. A la función escalar f le asociaremos la 0-forma f.

Consideremos el producto vectorial entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$:

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_2B_3-A_3B_2)\hat{x}_1+(A_3B_1-A_1B_3)\hat{x}_2+(A_1B_2-A_2B_1)\hat{x}_3 \quad \ldots(3.1)$$

debemos notar que el producto vectorial (3.1) es una cantidad muy parecida al producto exterior de las 1-formas ϕ_A y ϕ_B, donde $\phi_A=\Sigma_{i=1}{}^3A_idx^i$ y $\phi_B=\Sigma_{j=1}{}^3B_jdx^j$:

$$\phi_A\wedge\phi_B= (A_1B_2-B_1A_2)dx^1\wedge dx^2+(A_2B_3-A_3B_2)dx^2\wedge dx^3+(A_3B_1-A_1B_3)dx^3\wedge dx^1 \quad \ldots(3.2)$$

pero ésta última expresión es una 2-forma ,con los coeficientes del producto cruz $\vec{A}\times\vec{B}$ y anteriormente convenimos en asociar a un vector una 1-forma, entonces la ecuación (3.2) no tiene asociado un vector, esto lo podemos remediar si tomamos el dual de $\phi_A\wedge\phi_B$;

$$*(\phi_A\wedge\phi_B)= (A_1B_2)dx^3+(A_2B_3-A_3B_2)dx^1+(A_3B_1-A_1B_3)dx^2 \quad \ldots(3.3)$$

que es una 1-forma y por consiguiente podemos hacer la siguiente asignación;

$$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{C} \approx \phi_A\wedge\phi_B= \phi_C \quad \ldots(3.4)$$

en donde ϕ_C es la 1-forma asociada a $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$. Consideremos el producto escalar $\vec{A}.\vec{B}=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3$, debido a que $\vec{A}.\vec{B}$ es un escalar debemos buscar una combinación de ϕ_A y ϕ_B, que son las 1-formas asociadas a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ respectivamente, que nos de una 0-forma. La única posibilidad es $*(\phi_A\wedge*\phi_B)$, demostremos la correspondencia de esta operación con el producto escalar $\vec{A}.\vec{B}$:

$$\begin{aligned}*(\phi_A\wedge*\phi_B)&= *((A_1dx^1+A_2dx^2+A_3dx^3)\wedge(B_1dx^2\wedge dx^3+B_2dx^3\wedge dx^1+B_3dx^1\wedge dx^2))\\ &= *((A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3)\\ &= A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3 \end{aligned} \quad \ldots(3.5)$$

que es precisamente la expresión para el producto escalar de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Además como $*(\phi_A\wedge*\phi_B)=*(\phi_B\wedge*\phi_A)$, lo cual refleja el hecho de que el producto escalar es conmutativo,nos permite afirmar que la siguiente asociación es correcta;

$$\vec{A}.\vec{B} \approx *(\phi_A\wedge*\phi_B) \quad \ldots(3.6)$$

Consideremos ahora el rotacional de una función vectorial B(x);

$$\nabla\times\vec{B}= (\partial_2B_3-\partial_3B_2)\hat{x}_1+(\partial_3B_1-\partial_1B_3)\hat{x}_2+(\partial_1B_2-\partial_2B_1)\hat{x}_3 \quad \ldots(3.7)$$

en donde se ha utilizado la siguiente notación $\partial_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$, i=1,2,3. Para encontrar la operación correspondiente en formas diferenciales de la expresión (3.7) probemos con la siguiente expresión $*(d\phi_B)=*d\Sigma_{i=1}{}^3B_idx^i$, notemos que $d\phi_B$ es una 2-forma.

$$
\begin{aligned}
*(d\phi_B) = \\
&= *(\partial_2 B_1 dx^2 \wedge dx^1 + \partial_3 B_1 dx^3 \wedge dx^1 + \partial_1 B_2 dx^1 \wedge dx^2 + \\
&\quad + \partial_3 B_2 dx^3 \wedge dx^2 + \partial_1 B_3 dx^1 \wedge dx^3 + \partial_2 B_3 dx^2 \wedge dx^3) \\
&= (\partial_1 B_2 - \partial_2 B_1) dx^3 + (\partial_1 B_3 - \partial_3 B_1) dx^2 + \\
&\qquad + (\partial_2 B_3 - \partial_3 B_2) dx^1 \qquad \ldots (3.8)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\nabla X \vec{B} \approx *(d\phi_B)$ ...(3.9)
es la regla de correspondencia buscada para el rotacional de una función vectorial.

Consideremos ahora la divergencia del campo vectorial $\vec{B}(x)$, $\nabla.\vec{B}=\partial_1 B_1+\partial_2 B_2+\partial_3 B_3$, veamos que le corresponde la siguiente operación en el lenguaje de formas diferenciales: $*(d*\phi_B)$, como ya vimos en la ecuación (2.11), ésta operación es precisamente la coderivada δ de ϕ_B.

$$
\begin{aligned}
\delta\phi_B &= *d*\Sigma_1{}^3 B_i dx^i \\
&= *(\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&= \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 \qquad \ldots (3.10)
\end{aligned}
$$

Que es exactamente igual a la divergencia del campo vectorial $\vec{B}$ y por tanto podemos hacer la siguiente asociación:

$$\nabla.\vec{B} \approx *d*\phi_B = \delta\phi_B \qquad \ldots (3.11)$$

Finalmente consideremos el gradiente de una función escalar f; $\nabla f=\Sigma_{i=1}{}^3 \partial_i f\hat{x}_i$. Evidentemente df, en donde f es una 0-forma, es la relación buscada

$$df = \Sigma_1{}^3 \partial_i f dx^i \qquad \ldots (3.12)$$

Por lo que, al gradiente de una función escalar le asociaremos simplemente la derivada exterior de la misma función.

$$\nabla f \approx df \qquad \ldots (3.13)$$

Una vez definida la relación entre las operaciones del análisis vectorial y el cálculo de formas diferenciales podemos probar las identidades vectoriales más usuales.

Empezemos con el gradiente de el producto de dos funciones escalares (fg), de la ecuación (3.13) y de la regla L(1) de la sección tres, en particular las ecuaciones (2.6), podemos ver que la asociación apropiada al gradiente de (fg) es:

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \approx d(fg) = fdg + gdf \qquad \ldots (3.14)$$

en donde f y g son 0-formas. Para el caso de la divergencia del producto de una función escalar por una función vectorial la regla de correspondencia es:

$$\nabla\cdot(f\vec{A}) = \nabla f\cdot\vec{A} + f\nabla\cdot A \approx *d*(f\phi_a) = *(df\wedge *\phi_a) + f*(d*\phi_a) = \delta(f\phi_a) \ldots (3.15)$$

en donde f es una 0-forma y ϕ_a es una 1-forma. La ecuación (3.15) es fácil de probar, como veremos en seguida.

$$
\begin{aligned}
\delta(f\phi_a) &= *d*(f\Sigma_i A_i dx^i) = *d(f\Sigma_i A_i \epsilon_{ijk} dx^j \wedge dx^k) \\
&= *(df\wedge *\phi_a) + *f(d*\phi_a) \\
&= *(df\wedge *\phi_a) + f*(*d*\phi_a) \qquad \ldots (3.16)
\end{aligned}
$$

Consideremoa ahora la divergencia del producto vectorial de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$:

$$\nabla\cdot(\vec{A}X\vec{B})=\vec{B}\cdot(\nabla X\vec{A})-\vec{A}\cdot(\nabla X\vec{B}) \approx *(d**(\Phi_a\wedge\Phi_B))$$
$$=*(\Phi_B\wedge d\Phi_a)-*(\Phi_a\wedge d\Phi_B) \quad \ldots(3.17)$$

Notemos que; $*(\Phi_B\wedge*(*d\Phi_a))-*(\Phi_a\wedge*(*df_B))=*(\Phi_B\wedge d\Phi_a)-*(\Phi_a\wedge d\Phi_B)$, debido a que en tres dimensiones $**\omega=\omega$ para cualquier p-forma ω en E_3. Por lo tanto

$$*(d*(*(\Phi_a\wedge\Phi_B)))=\delta*(\Phi_a\wedge\Phi_B)$$
$$\delta*(\Sigma_{ij}A_iB_j dx^i\wedge dx^j)=*(\Sigma_{ijk}\partial_k A_iB_j dx^k\wedge dx^i\wedge dx^j)$$
$$=*(\Phi_B\wedge d\Phi_a)-*(\Phi_a\wedge d\Phi_B) \quad \ldots(3.18)$$

lo cual prueba la identidad (3.17). Consideremos ahora el rotacional del producto de una función escalar por una función vectorial $f\vec{A}$:

$$\nabla X(f\vec{A})=\nabla fX\vec{A}+f\nabla X\vec{A} \approx *(d(f\Phi_a)=*(df\wedge\Phi_a)+f*(d\Phi_a) \quad \ldots(3.19)$$

la demostración es inmediata;

$$*(d(f\Phi_a)=*(df\wedge\Phi_a+fd\Phi_a)$$
$$=*(df\wedge\Phi_a)+*(fd\Phi_a)$$
$$=*(df\wedge\Phi_a)+f*(d\Phi_a) \quad \ldots(3.20)$$

La conocida identidad vectorial $\vec{A}.(\vec{B}X\vec{C})=\vec{C}.(\vec{A}X\vec{B})=\vec{B}.(\vec{C}X\vec{A})$,puede ser fácilmente traducida al lenguaje de formas diferenciales, de la siguiente manera:

$$*(\Phi_a\wedge\Phi_B\wedge\Phi_C)=*(\Phi_C\wedge\Phi_a\wedge\Phi_B)=*(\Phi_B\wedge\Phi_C\wedge\Phi_a) \quad \ldots(3.21)$$

Probemos la ecuación (3.21);

$$*(\Phi_a\wedge\Phi_B\wedge\Phi_C)=*(\Sigma_{ijk}A_iB_jC_k dx^i\wedge dx^j\wedge dx^k)$$
$$=\Sigma_{ijk}\epsilon_{ijk}A_iB_jC_k$$
$$=*(\Phi_C\wedge\Phi_a\wedge\Phi_B)=*(\Phi_B\wedge\Phi_C\wedge\Phi_a) \quad \ldots(3.22)$$

el último paso es debido a que los índices i,j,k son índices mudos.

Para el producto vectorial de tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ la relacion vectorial; $\vec{A}X(\vec{B}X\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$ se traduce al lenguaje de formas diferenciales como:

$$*(\Phi_a\wedge*(\Phi_B\wedge\Phi_C))=\Phi_B*(\Phi_a\wedge*\Phi_C)-\Phi_C*(\Phi_a\wedge*\Phi_B) \quad \ldots(3.23)$$

la demostración de la identidad (3.23) es como sigue:

$$*(\Phi_a\ *(\Phi_B\ \Phi_C))=*(\Sigma_{ij}A_iB_iC_j\epsilon_{ijk}dx^i\wedge dx^k+$$
$$+\Sigma_{ij}A_jB_iC_j\epsilon_{ijk}dx^j\wedge dx^k)$$
$$=-\Sigma_{ij}A_iB_iC_jdx^j+\Sigma_{ij}A_jB_iC_jdx^i$$
$$=-\Phi_C*(\Phi_a\wedge\Phi_B)+\Phi_B*(\Phi_a\wedge*\Phi_C) \quad \ldots(3.24)$$

que es lo que se quería demostrar.

Podemos continuar con el análisis anterior y considerar ahora la identidad; $(\vec{A}X\vec{B}).(\vec{C}X\vec{D})=(\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D})-(\vec{A}.\vec{D})(\vec{B}.\vec{C})$,que en el lenguaje de formas diferenciales se traduce como:

$$*(*(\Phi_a \wedge \Phi_B) \wedge (\Phi_C \wedge \Phi_D)) =$$
$$= *(\Phi_a \wedge \Phi_C) * (\Phi_B \wedge * \Phi_D) - *(\Phi_a \wedge * \Phi_D) * (\Phi_B \wedge * \Phi_D) \ldots (3.25)$$

La demostración se presenta a continuación:

$$*(*\Phi_a \wedge \Phi_B) \wedge (\Phi_C \wedge \Phi_D) =$$
$$= *(*\Sigma_{ij} A_i B_j dx^i \wedge dx^j \ \Sigma_{kl} C_k D_l dx^k \wedge dx^l)$$
$$= *(\Sigma_{ij} A_i B_j \epsilon_{ijm} dx^m \ \Sigma_{kl} C_k D_l dx^k \wedge dx^l)$$
$$= *(\Sigma_{ijkl} \epsilon_{ijm} A_i B_j C_k D_l dx^m \wedge dx^k \wedge dx^l)$$

debido a que $m=i$ y $m \neq k \neq l$ requerimos que , $k=i, l=j$, o, $l=i, k=j$ y por tanto la anterior expresión se puede escribir como:

$$= \Sigma_{ij} A_i B_j C_i D_j - \Sigma_{ij} A_i B_j C_j D_i$$
$$= *(\Phi_a \wedge * \Phi_C) * (\Phi_B \wedge * \Phi_D) - *(\Phi_a \wedge * \Phi_D) * (\Phi_B \wedge * \Phi_C) \ldots (3.26)$$

que prueba la identidad (3.26). Continuemos con ésta correspondencia entre el análisis vectorial y el cálculo de formas diferenciales, haciéndonos la siguiente pregunta ¿A qué corresponden los teoremas de formas diferenciales en el análisis vectorial?.

Las siguientes dos identidades son consecuencias directas del Lema de Poincaré.

Aplicando el lema a una 0-forma f, tenemos que, $d^2 f=0$, y tomando el dual para obtener una 1-forma, encontramos, que debido a que a el gradiente le corresponde el operador d y al rotacional ∇X le corresponde el operador de formas $*d$, la siguiente identidad vectorial:

$$*(d^2 f) = 0 \approx \nabla X(\nabla f) \qquad \ldots (3.27)$$

es decir; el rotacional de un gradiente es igual a cero.

Aplicando el Lema de Poincaré a una 1-forma Φ_a y tomando el dual obtenemos:

$$*(d^2 \Phi_a) = *d*(*d\Phi_a) = \delta(*d\Phi_a) = 0 \qquad \ldots (3.28)$$

si a la 1-forma Φ_a le ponemos en correspondencia el campo vectorial $\vec{A}$ y a la coderivada $\delta=*d*$ el operador divergencia $\nabla.$ y debido a que en tres dimensiones se cumple que $**\omega=\omega$, para ω una p-forma con p=0,1,2,3, obtenemos la siguiente correspondencia:

$$*(d^2 \Phi_a) \approx \nabla.(\nabla X \vec{A}) = 0 \qquad \ldots (3.29)$$

que nos dice que la divergencia de un rotacional es cero.

Consideremos una 1-forma ω, aplicando el recíproco del Lema de Poincaré a la relación $*d\omega=d\omega=0$, entonces existe una 0-forma α, tal que $\omega=\alpha$, esto se refleja en el análisis vectorial de la siguiente manera, en primer lugar a $*d\omega$ le corresponde $\nabla X\vec{W}$ y a $d\alpha$ le corresponde $\nabla\alpha$, por tanto la identidad $*d\omega=0$ se puede expresar en el analisis vectorial de la siguiente manera.

Teorema I.-Sea $\vec{W}$ un campo vectorial, si $\nabla X\vec{W}=0$, entonces existe α una función tal que $\vec{W} = \nabla\alpha$. ...(3.30)

Ahora consideremos la coderivada de una 1-forma ,tal que esta se anule $\delta\omega=*(d*\omega)=0$, por el recíproco del Lema de Poincaré, teorema T(2) de la sección tres, existe una 1-forma β tal que $*\omega=d\beta$ o $\omega=*(d\beta)$, haciendo corresponder a la coderivada δ el operador divergencia $\nabla.$ y a el operador $*d$ el rotacional ∇X, entonces la correspondencia entre formas y vectores se puede plantear como un teorema.

Teorema II.-Sea $\vec{B}$ un campo vectorial tal que $\nabla.\vec{B}=0$, entonces existe $\vec{A}$, un campo vectorial, tal que $\vec{B} = \nabla X\vec{A}$. ...(3.31)

Uno de los teoremas más importantes en electrodinámica es el teorema de Helmholtz. Veamos en primer lugar como se obtiene este teorema a partir del teorema de descomposición de Hodge y una vez obtenido lo postularemos para el caso vectorial.

Sea ω una 1-forma, por el teorema T(3) de la sección tres, existe α una 0-forma, β una 2-forma y γ una 1-forma armónica, tal que $\omega=d\alpha+\delta\beta+\gamma$. Consideremos las siguientes correspondencias de formas diferenciales al análisis vectorial. A la 0-forma α le corresponde la función escalar f, y por tanto a $d\alpha$ le corresponde el gradiente de f, a la coderivada $\delta\beta=*d(*\beta)$ le corresponde $\nabla X\vec{B}$, donde se hizo la asociación $*d \approx \nabla X$ y $*\beta \approx \vec{B}$, y a la 1-forma γ le corresponde el campo vectorial $\vec{Q}$, el cual hereda la propiedad de γ de ser armónica $(d\delta+\delta d)\gamma=0$ es decir $\nabla^2\vec{Q}=0$, esta correspondencia se puede plasmar en el siguiente teorema.

Teorema de Helmholtz.-Para cualquier campo vectorial $\vec{A}$ existen, f un campo escalar, $\vec{B}$ y $\vec{Q}$ campos vectoriales, tal que $\vec{A}=\nabla f+\nabla X\vec{B}+\vec{Q}$, donde $\nabla_2\vec{Q} = 0$. ...(3.32)

Enseguida veremos como los teoremas integrales de Gauss y Stokes están contenidos en el teorema generalizado de Stokes de la teoría de formas diferenciales, consideremos primero el teorema de Gauss, el cual nos dice que la integral de volumen de la divergencia de un campo vectorial $\vec{C}$, sobre la región tridimensional V, es igual a la integral de superficie del campo $\vec{C}$ sobre la frontera de V ($\partial V=S$, ∂ sin índices se refiere a la frontera de alguna región).

$$\int_V \nabla.\vec{C}\ dV = \int_{S=\partial V} \vec{C}.\ d\vec{A} \qquad ...(3.33)$$

Al integrando $\nabla.\vec{C}\ dV=\Sigma_i\partial^i C_i\ dx^1dx^2dx^3$ le asociaremos la siguiente forma diferencial $d(*\phi_C)=\Sigma_i\partial^i C_i dx^1dx^2dx^3$, integrando esta última expresión y utilizando el teorema generalizado de Stokes, teorema T(4) de la sección tres, tenemos el siguiente resultado:

$$\int_D d(*\phi_C) = \int_{\partial D} *\phi_C \qquad ...(3.34)$$

como $*\phi_C=C_1dx^2\ dx^3+C_2dx^3\ dx^1+C_3dx^1\ dx^2$, obtenemos la siguiente correspondencia directa con vectores, $*\phi_C \approx \vec{C}.d\vec{A}$ y por tanto debido a que D es una región tridimensional, la frontera de D (∂D) es una región bidimensional y la ecuación (3.34) es la versión del teorema de Gauss en el lenguaje de formas diferenciales.

Para finalizar esta sección veamos la correspondencia del teorema de Stokes del análisis vectorial con el teorema generalizado de Stokes de la teoría de formas diferenciales. El teorema de Stokes dice lo siguiente; la integral de superficie del rotacional de un campo vectorial $\vec{A}$ es igual a la integral cerrada de línea del campo $\vec{A}$, debemos notar que la integral de línea es sobre la frontera de la región bidimensional S donde se integra el rotacional:

$$\int_S \nabla X\vec{A}.d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{A}.d\vec{l} \quad ...(3.35)$$

como $d\vec{S}=\hat{x}_1 dx^2dx^3+\hat{x}_2dx^3dx^1+\hat{x}_3dx^1dx^2$ entonces $\nabla X\vec{A}.d\vec{S}=$ $(\partial_2A_3-\partial_3A_2)dx^2dx^3+(\partial_3A_1-\partial_1A_3)dx^1dx^3+$ $(\partial_1A_2-\partial_2\partial_1)dx^1dx^2$, a esta última expresión le podemos asociar la 2-forma $d\Phi_a=(\partial_2A_3-\partial_3A_2)dx^2\ dx^3+$ $+(\partial_3A_1-\partial_1A_3)dx^1\ dx^3+(\partial_1A_2-\partial_2A_1)dx^1\ dx^2$ e integrando ésto último y utilizando el teorema generalizado de Stokes tenemos:

$$\int_D d\Phi_a = \int_{\partial D} \Phi_a \quad ...(3.36)$$

donde D es una región bidimensional y por tanto ∂D es una región unidimensional, haciendo la correspondencia $\Phi_a=\Sigma_i A_i dx^i$ con a.dl, lo que obtenemos es precisamente el teorema de Stokes.

Con todo lo expuesto en esta sección podemos concluir que el análisis vectorial está contenido en el formalismo de la teoría de formas diferenciales.

4.-Electrodinámica

En esta sección aplicaremos la teoría de formas diferenciales a una teoría física, la electrodinámica y veremos como este formalismo le da elegancia a la teoría.

Las ecuaciones de Maxwell escritas en el sistema Gaussiano de unidades, con $c=\mu_0=\epsilon_0=1$ son:

$$\nabla X\vec{B}-\partial_t\vec{E}=4\pi\vec{J} \quad ...(4.1a)$$

$$\nabla X\vec{E}+\partial_t\vec{B}=0 \quad ...(4.1b)$$

$$\nabla.\vec{B}=0 \quad ...(4.1c)$$

$$\nabla.\vec{E}=4\pi\rho \quad ...(4.1d)$$

Primero reescribiremos las ecuaciones de Maxwell en una forma invariante relativista, en términos del tensor electromagnético o tensor de Faraday. El tensor de Faraday F_{mn} puede ser obtenido a partir del cuatripotencial vectorial $\Phi^m=(\Phi^0,\Phi^1,\Phi^2,\Phi^3)=(\varphi,\vec{A})$, donde φ es el potencial eléctrico y $\vec{A}$ es el potencial vectorial electromagnético. En términos de estos potenciales el campo eléctrico y el campo magnético están dados por:

$$\vec{B}=\nabla X\vec{A} \quad , \quad \vec{E}=-\nabla\varphi-\partial_t\vec{A} \quad ...(4.2)$$

Debido a que tratamos con una teoría relativista, el espacio en el que trabajamos es el espacio de Minkowsky cuyos elementos son cuatrivectores $x^m=(x^0,x^1,x^2,x^3)$ y la métrica esta dada por:

$$g_{mn}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \quad ...(4.3)$$

El tensor de Faraday, es un tensor antisimétrico de segundo orden definido de la siguiente forma:

$$F_{mn}=\partial_n\Phi_m-\partial_m\Phi_n \quad \ldots(4.4)$$

Las componentes del tensor de Faraday, son precisamente las componentes del campo eléctrico y el campo magnético, esencialmente dados por F_{0i} y F_{ij} respectivamente;

$$F_{0i}=E_i \quad , \quad F_{ij}=-\epsilon_{ijk}B_k \quad \ldots(4.5)$$

en donde los índices i y j corren desde 1 hasta 3. Explícitamente el tensor de Faraday es:

$$F_{mn}=\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \ldots(4.6)$$

Las ecuaciones de Maxwell en forma tensorial toman la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} \nabla\times\vec{E}+\partial_t\vec{B}=0 \\ \nabla\cdot\vec{E}=4\pi\rho \end{array}\right\} \approx \quad F_{[mn,l]}=0 \quad \ldots(4.7a)$$

$$\left.\begin{array}{l} \nabla\times\vec{B}-\partial_t\vec{E}=4\pi\vec{J} \\ \nabla\cdot\vec{E}=4\pi\rho \end{array}\right\} \approx \quad F^{mn}{}_{,n}=4\pi J^m \quad \ldots(4.7b)$$

en donde $F_{[mn,l]}=F_{mn,l}+F_{nl,m}+F_{lm,n}=0$, la coma(,) significa diferenciación parcial $(A_{,m}=\partial_m A)$ y $F^{mn}=g^{ma}g^{nb}F_{ab}$. Veamos como podemos obtener las ecuaciones de Maxwell a partir de su versión tensorial. Consideremos $F_{[0i,j]}=0$, en donde i, j=1,2,3.

$$\begin{aligned} F_{[0i,j]} &= F_{0i,j}+F_{ij,0}+F_{j0,i} \\ &= E_{i,j}+(-\epsilon_{ijk}B_k)_{,0}+E_{j,i} \quad \ldots(4.8) \\ &= \nabla\times\vec{E}+\partial_0\vec{B}=0 \end{aligned}$$

Por tanto $F_{[0i,j]}=0$ es precisamente la ecuación (4.1b) escrita en forma tensorial. Ahora consideremos $F^{jm}{}_{,m}=4\pi J^j$, en donde $J^m=(\rho,\vec{J})$ es la cuadricorriente y el indice j corre de 1 hasta 3.

$$F^{jm}{}_{,m}=F^{j0}{}_{,0}+F^{ji}{}_{,i}=-\partial_t\vec{E}+\nabla\times\vec{B}=4\pi\vec{J} \quad \ldots(4.9)$$

La ecuación $F^{jm}{}_{,m}=4\pi J^j$ es precisamente la ecuación (4.1a). La ecuación $\nabla\cdot\vec{B}=0$ puede ser obtenida a partir de $F_{[ij,k]}=0$ y $\nabla\cdot\vec{E}=4\pi\rho$ se deduce de $F^{0m}{}_{,m}=4\pi J^0$, con lo que se tienen las cuatro ecuaciones de Maxwell.

Dado que el espacio apropiado para la electrodinámica es el espacio de Minkowsky, el cual es pseudoeuclideano, necesitamos generalizar el concepto de dualidad, además requerimos extender la correspondencia entre vectores y 1-formas, a una correspondencia entre tensores de alto rango y formas diferenciales.

Definiremos el dual de una 1-forma $J=\Sigma_m J_m dx^m$, como la 3-forma $*J$

$=\Sigma_m \epsilon_{mabl} J^m dx^a\ dx^b\ dx^l$, el dual de una 2-forma $F=\Sigma_{mn} F_{mn} dx^m\ dx^n$ como la 2-forma $*F=\Sigma_{mn}{}^{1/2}\epsilon_{abmn} F^{mn} dx^a\ dx^b$.

Ahora podemos asociar a la cuatricorriente $J^m=(\rho, J)$, la 1-forma $J=\Sigma_m J_m dx^m$, y al tensor de campo electromagnético F_{mn} le asociaremos la 2-forma $F=\Sigma_{mn}{}^{1/2}F_{mn} dx^m\ dx^n$. Entonces las ecuaciones de Maxwell pueden transcribirse al lenguaje de formas diferenciales como:

$$\begin{array}{c} \nabla.\vec{B}=0 \\ \nabla X\vec{E}+\partial_t\vec{B}=0 \end{array} \quad \approx \quad F_{|mn,l|}=0 \quad \approx \quad dF=0 \quad \ldots(4.10a)$$

$$\begin{array}{c} \nabla.\vec{E}=4\pi\rho \\ \nabla X\vec{B}-\partial_t\vec{E}=4\pi\vec{J} \end{array} \quad \approx \quad F^{mn}{}_{,n}=4\pi J^m \quad \approx \quad d*F=4\pi *J \quad \ldots(4.10b)$$

Las expresiones anteriores son respectivamente, las ecuaciones de Maxwell en notación vectorial, tensorial y de formas diferenciales.

Confirmemos que las ecuaciones $dF=0$ y $d*F=4\pi J$ son efectivamente las ecuaciones de Maxwell. La 2-forma F es esencialmente lo siguiente; $F=\Sigma_i E_i dx^0\ dx^i+\Sigma_{ij}{}^{1/2}(-\epsilon_{ijh}B_h)dx^i\ dx^j$. Por lo que utilizando el hecho que $dF=0$, tenemos:

$$\begin{aligned} dF= & \Sigma_{ij}\partial_j E_i dx^j\ dx^0\ dx^i - \\ & -\Sigma_h 1/2\partial_0 B_h \epsilon_{ijh} dx^0\ dx^i\ dx^j \\ & -\Sigma_h 1/2\partial_h B_h \epsilon_{ijh} dx^h\ dx^i\ dx^j \\ = & -(\nabla X\vec{E}+\partial_t\vec{B})dx^i\ dx^j\ dx^0-(\nabla.\vec{B})dx^h\ dx^i\ dx^j= 0 \quad \ldots(4.11) \end{aligned}$$

en la ecuación (4.11) $dx^i\ dx^j\ dx^0$ es independiente de $dx^h\ dx^i\ dx^j$ por lo tanto para que la ecuación $dF=0$ sea satisfecha los coeficientes de estas formas se deben de anular independientemente, este requerimiento nos da el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \nabla X\vec{E}+\partial_t\vec{B} &= 0 \\ \nabla.\vec{B} &= 0 \quad \ldots(4.12) \end{aligned}$$

que son precisamente las ecuaciones (4.1b) y (4.1c), dos de las ecuaciones de Maxwell. Obtengamos ahora el restante par de ecuaciones de Maxwell, utlizando la ecuación $d*F=4\pi J$. Primero encontremos el dual de F.

$$\begin{aligned} *F= & \Sigma E_i \epsilon_{mn0i} dx^m\ dx^n-\Sigma_h 1/2B_h\epsilon_{ijh}\epsilon_{mnij}dx^m\ dx^n \\ = & \Sigma E_i \epsilon_{jh0i} dx^j\ dx^h-\Sigma_h 1/2B_h\epsilon_{ijh}\epsilon_{0hij}dx^0\ dx^h \quad \ldots(4.13) \end{aligned}$$

y tomando la derivada exterior de la ecuación (4.13) tenemos:

$$\begin{aligned} d*F = & \Sigma_i\partial_0 E_i \epsilon_{jh0i} dx^0\ dx^j\ dx^h + \\ & +\Sigma_i\partial_i E_i\epsilon_{jh0i}dx^i\ dx^j\ dx^h - \\ & -\Sigma_{hj}{}^{1/2}\partial_j B_h\epsilon_{ijh}\epsilon_{0hij}dx^j\ dx^0\ dx^h \\ = & (\nabla X\vec{B}-\partial_t\vec{E})dx^0\ dx^j\ dx^h+(\nabla.\vec{E})dx^i\ dx^j\ dx^h \quad \ldots(4.14) \end{aligned}$$

por otro lado el dual de la 1-forma $J=\Sigma_m J_m dx^m$ es igual a:

$$*J = J_0 dx^i\ dx^j\ dx^h+\Sigma_i J_i dx^0\ dx^j\ dx^h \quad \ldots(4.15)$$

de las ecuaciones (4.14) y (4.15) y de la independencia de dx^i $dx^j\ dx^h$ con $dx^0\ dx^j\ dx^h$, y a partir de la ecuación $d*F=4\pi *J$

obtenemos:

$$\nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = 4\pi \vec{J}$$

$$\nabla . \vec{E} = 4\pi\rho \qquad \ldots(4.16)$$

que son precisamente las ecuaciones (4.1a) y (4.1b). Por tanto, las cuatro ecuaciones vectoriales se reducen a dos simples ecuaciones de formas diferenciales.

$$dF = 0 \quad , \quad d{*}F = 4\pi{*}J \qquad \ldots(4.17)$$

Como hemos podido ver las formas diferenciales son una herramienta matemática muy importante y fundamental.

Las formas diferenciales contienen al análisis vectorial y a las identidades diferenciales e integrales de los campos vectoriales de una forma natural y simple, y además nos permiten identificarlas con tensores antisimétricos. Aun más el ejemplo mostrado al final del capítulo pone de manifiesto que las formas diferenciales nos dan la posibilidad de escribir las ecuaciones de una ley física de una manera sencilla, elegante y manejable.

Nuestro interés en el estudio de las formas diferenciales radica en que nos permite el entendimiento de su estructura, para [illegible] el mayor espacio. Con el propósito de [illegible] para construir una teoría de norma [illegible] bajo transformaciones globales de [illegible].

CAPITULO II

1.- El Algebra de Grassman.

Al conjunto de todas las formas diferenciales de grado arbitrario, equipado con la multiplicación anticonmutativa $\wedge$, es llamado un álgebra de Grassman. La dimensión del álgebra de Grassman es la suma de todas las dimensiones de los espacios de p-formas, con $p \leq n$, donde n es la dimensión del espacio base. Si denotamos por G al álgebra de Grassman su dimensión es:

$$\operatorname{Dim} G = \Sigma_{p=0}{}^{n} \binom{n}{p} 1^{n-p} 1^{p} = (1+1)^{n} = 2^{n} \qquad \ldots(1.1)$$

en donde $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, es la dimensión de los espacios de p-formas.

Sean $\xi_1, \ldots, \xi_n$, n generadores de un álgebra de Grassman G_n, para cualquier $j, k = 1, \ldots, n$ tenemos que:

$$\xi_j \xi_k + \xi_k \xi_j = 0 \qquad \ldots(1.2)$$

en particular $\xi_k{}^2 = 0$. Cualquier elemento g del álgebra ($g \epsilon G_n$), puede ser representado en la base, $1, \xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_1 \xi_2, \ldots, \xi_{n-1} \xi_n$, como una combinación lineal de la siguiente forma:

$$g(\xi) = g_0 + \Sigma_k g_1(k) \xi_k + \Sigma_k (k_1 k_2) g_2 \xi_k \xi_k + \ldots + \\ + \Sigma_k g_n)(k_1, \ldots, k_n) \xi_k \ldots \xi_k \qquad \ldots(1.3)$$

o en forma sintetizada como:

$$g(\xi) = \Sigma_{\nu=0}{}^{n} \Sigma_{k=0}{}^{\nu} g_\nu (k_1, \ldots, k_\nu) \xi_k \ldots \xi_k \qquad \ldots(1.4)$$

Cosideremos el conjunto G_n" de elementos de G_n los cuales son representados en la forma de combinaciones líneales de monomios de grado par:

$$g = g_0 + \Sigma_k g_2 (\xi_1, \xi_2) \xi_k \xi_k + \ldots \qquad \ldots(1.5)$$

Los elementos de G_n" son llamados pares. Los elementos pares conmutan con todos los elementos de G_n. El conjunto G_n' de todos los elementos que son combinaciones líneales de grado impar son llamados impares. Los elementos de G_n' tienen la forma.

$$g = \Sigma_k g_1(k) \xi_k + \Sigma_k g_3 (k_1, k_2, k_3) \xi_k \xi_k \xi_k + \ldots \qquad \ldots(1.6)$$

Evidentemente todo elemento de G_n está únicamente representado en la forma $g = g' + g''$, con $g' \epsilon G_n'$ y $g'' \epsilon G_n''$.

Por ejemplo pensemos que ξ_1 y ξ_2 son los únicos elementos del álgebra de Grassman G_2, entonces cualquier elemento g de G_2 se escribe como:

$$g = g_0 + g_1(k_1)\xi_1 + g_1(k_2)\xi_2 + \\ + g_2(k_1 k_2)\xi_1 \xi_2 \qquad \ldots(1.7)$$

Los elementos pares son, g_0 y $g_2(k_1 k_2)\xi_1 \xi_2$, y los elementos impares son $g_1(k_1)\xi_1$ y $g_1(k_2)\xi_2$.

Enseguida consideremos una operación en el álgebra de Grassman, la cual es análoga a la conjugación compleja, llamada involución. Definimos un mapeo uno a uno, del álgebra en si misma, $g \to g^*$, el cual satisface las siguientes condiciones

$$(g*)* = g \;,\quad (g_1 g_2)* = g_2 g_1 \;,\quad (\alpha g)* = \alpha * g* \qquad \ldots(1.8)$$

en donde α es un número complejo. Se dice que un elemento g es real si, $g=g*$, por tanto un álgebra es real si todos sus elementos son reales, en particular $\xi_h=\xi_h*$.

2.- Derivadas en un Algebra de Grassman.

Definimos las derivadas, izquierda $\dfrac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \xi_h}$ y derecha $\dfrac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_h}$ de un elemento $g(\xi)$ del álgebra G_n, como operadores lineales en G, los cuales actúan sobre los elementos base como:

$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \xi_p}\xi_{t_1}\cdots\xi_{t_s} = \delta_{t_1 p}\xi_{t_2}\cdots\xi_{t_s} - \delta_{t_2 p}\xi_{t_1}\cdots\xi_{t_s} + \cdots + (-1)^{s-1}\delta_{t_s p}\xi_{t_1}\cdots\xi_{t_{(s-1)}}$$

$$\xi_{t_1}\cdots\xi_{t_s}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_p} = \delta_{t_s p}\xi_{t_1}\cdots\xi_{t_{(s-1)}} - \delta_{t_{(s-1)} p}\xi_{t_1}\cdots\xi_{t_s} + \cdots + (-1)^{s-1}\delta_{t_1 p}\xi_{t_2}\cdots\xi_{t_s} \qquad \ldots(2.1)$$

En otras palabras, para calcular la derivada izquierda de $\xi_{t_1}\ldots\xi_{t_p}$ con respecto a ξ_p, tenemos que permutar ξ_p hasta el primer lugar en el monomio usando las relaciones (1.2) y entonces eleminar ésta. Para calcular la derivada derecha , tenemos que permutar ξ_p hasta el último lugar y eleminarla. Si el monomio $\xi_{t_1}\ldots\xi_{t_s}$ no contiene a ξ_p entonces ambas derivadas son nulas. Introduzcamos la siguiente notación, ∂_h significa la derivada con respecto a ξ_h. Para ilustrar el procedimiento de derivación en Grassman veamos un ejemplo; $\overrightarrow{\partial}_1\xi_1\xi_2=\xi_2$, $\overrightarrow{\partial}_2\xi_1\xi_2=-\xi_1$

De la definición de derivada podemos observar que la regla de la cadena también se cumple, para comprobarlo consideremos los siguientes casos. Sea $\xi_h=\Sigma_p a_h y_p$ y $f(\xi)=f|\xi(y)|$ entonces:

(1)
$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y_p} f|\xi(y)| = \Sigma_h \left|\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \xi_h} f(\xi)\right|_{\xi=\xi(y)} a_h \qquad \ldots(2.2)$$

$$f|\xi(y)|\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_p} = \Sigma_h \left|f(\xi)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_h}\right|_{\xi=\xi(y)} a_h \qquad \ldots(2.2)$$

(2) Sea t un parámetro real, y $\xi_h(t)=\Sigma_p a_h(t) y_p$, entonces

$$\frac{d}{dt} f|\xi(t)| = \Sigma_h \frac{d\xi_h}{dt}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \xi_h} f = \Sigma_h \left(f\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_h}\right)\frac{d\xi_h}{dt} \qquad \ldots(2.3)$$

Consideremos las fórmulas para diferenciacion de un producto. Sea $f_1 \epsilon G_n$" un elemento par y f_2 un elemento arbitrario de G_n entonces;

$$\overrightarrow{\partial}_p(f_1 f_2) = (\overrightarrow{\partial}_p f_1) f_2 + f_1(\overrightarrow{\partial}_p f_2)$$

$$(f_1 f_2)\overleftarrow{\partial}_p = f_2(f_1\overleftarrow{\partial}_p) + (f_2\overleftarrow{\partial}_p) f_1 \qquad \ldots(2.4)$$

Si $f_1 \epsilon G_n$' y f_2 es un elemento arbitrario de las fórmulas para la derivada de un producto toman la siguiente forma:

$$\overrightarrow{\partial}_p(f_1 f_2) = (\overrightarrow{\partial}_p f_1) f_2 - f_1(\overrightarrow{\partial}_p f_2)$$

$$(f_2 f_1)\overleftarrow{\partial}_p = f_2(f_1\overleftarrow{\partial}_p) - (f_2\overleftarrow{\partial}_p) f_1 . \qquad \ldots(2.5)$$

Enfoquemos ahora nuestra atención en las propiedades de las segundas derivadas, que se muestran en las siguientes fórmulas:

$$\vec{\partial}_1(\vec{\partial}_2 f) = -\vec{\partial}_2(\vec{\partial}_1 f)$$

$$(f\overleftarrow{\partial}_1)\overleftarrow{\partial}_2 = -(f\overleftarrow{\partial}_2)\overleftarrow{\partial}_1 \qquad \ldots(2.6)$$

$$(\vec{\partial}_1 f)\overleftarrow{\partial}_2 = \vec{\partial}_1(f\overleftarrow{\partial}_2)$$

Estas propiedades, asi como las propiedades (2.2),(2.3),(2.4) y (2.5) se obtienen con facilidad de la definición de derivada.

3.- Integral Sobre un Algebra de Grassmann

En primer lugar introduzcamos los símbolos $d\xi_1 \ldots d\xi_n$, los cuales son las diferenciales en el álgebra de Grassmann, estos obedecen las siguientes relaciones de conmutación

$$\{d\xi_i, d\xi_j\} = \{\xi_h, d\xi_l\} = 0 \qquad \ldots(3.1)$$

una vez introducidas las diferenciales $d\xi_i$, podemos definir la integral en el álgebra de Grassmann de la siguiente forma:

$$\int d\xi_i = 0 \, , \int \xi_i \, d\xi_i = 1 \qquad \ldots(3.2)$$

La integral múltiple se obtiene por medio de iteración de integrales de la forma (3.2). En particular podemos definir la integral para cualquier monomio,

$$\int f(\xi) \, d\xi_n \ldots d\xi_1$$

la cual puede ser extendida a elementos arbitrarios de Grassmann, por linealidad.

De la definición de integral, y de las relaciones de anticonmutación de ξ_i y de $d\xi_i$, obtenemos el siguiente resultado

$$\int \xi_{h_1} \cdots \xi_{h_\nu} d\xi_\nu \ldots d\xi_1 = \epsilon_{h_1 \cdots h_\nu} \qquad \ldots(3.3)$$

en donde $\epsilon_{12\ldots n} = 1$ o -1 si hay una permutación impar de 12..n.
Para un elemento arbitrario $f(\xi)$, representado como en la fórmula (1.4), podemos integrarlo de la siguiente forma

$$\int f(\xi) \, d\xi_n \ldots d\xi_1 = \epsilon_{h_1 \cdots h_n} f_n(k_1 \ldots k_n) \qquad \ldots(3.4)$$

Como en el análisis ordinario con la integral sobre el álgebra de Grassmann, podemos integrar por partes

$$\int f(\xi)\left(\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_p} g(\xi)\right) d\xi_n \ldots d\xi_1 = \int \left(f(\xi)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_p}\right) g(\xi) \, d\xi_n \ldots d\xi_1$$

$$\int f(\xi)(g(\xi)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\xi_p})d\xi_n\ldots d\xi_1=(-1)^{n+1}\int(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\xi_p}f(\xi))g(\xi)d\xi_n\ldots d\xi_1 \qquad \ldots(3.5)$$

Para la prueba de (3.5) es suficiente considerar un par de monomios arbitrarios para f y g. En particular consideremos los siguientes; $f(\xi)=f_1\xi_1+f_2\xi_2 f_{12}\xi_1\xi_2$, y $g(\xi)=g_1\xi_1$ entonces:

$$\int f\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\xi_1}g\ d\xi_1=\int(f_1\xi_1+f_2\xi_2+f_{12}\xi_1\xi_2)g_1d\xi_1 =$$
$$=f_1g_1-f_{12}g_1\xi_2$$

por otro lado tenemos,

$$\int f(\xi)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\xi_1}g(\xi)d\xi_1=\int(f_1-f_{12}\xi_2)g_1\xi_1d\xi_1=$$
$$=f_1g_1-f_{12}g_1\xi_2$$

las dos últimas ecuaciones son iguales entre si, lo cual demuestra un caso particular del resultado (3.5).

4.- Mecánica Clásica para sistemas Bose-Fermi. (Formalismo Lagrangiano y Paréntesis de Poisson)

En esta sección contruiremos el formalismo canónico para un sistema pseudoclásico descrito por variables ordinarias q_i $(i=1,\ldots,n)$, que conmutan, y por variables de Grassmann θ_α $(\alpha=1,\ldots,N)$, que anticonmutan. Supondremos que tenemos un número finito de grados de libertad ,pero las consideraciones que hagamos se pueden generalizar a un número infinito de grados de libertad.

Observemos que una derivada derecha con respecto a las variables de Grassmann está definida por la ecuación variacional

$$\delta f(\theta_\alpha)=\delta\theta_\alpha g^\alpha(\theta_\alpha) \quad , \quad g^\alpha(\theta_\alpha)=\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta_\alpha}f(\theta_\alpha) \qquad \ldots(4.1)$$

en donde $f(\theta_\alpha)$ y $g^\alpha(\theta_\alpha)$ están dadas como en las ecuaciones (1.3) y (2.4). En lo que sigue sólo consideraremos derivadas que actuán por la derecha.

La dinámica de un sistema pseudoclásico, al igual que un sistema clásico, está descrita por un principio de acción estacionaria ($\delta S=0$), en donde la acción está dada por la siguiente expresión;

$$S=\int L(q_i,\dot{q}_i;\theta_\alpha,\dot{\theta}_\alpha)\ dt. \qquad \ldots(4.2)$$

La variación de la función lagrangiana está dada por:

$$\delta L=\delta q_i\frac{\partial L}{\partial q_i}+\delta\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}+\delta\theta_\alpha\frac{\partial L}{\partial\theta_\alpha}+\delta\dot{\theta}_\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_\alpha} \qquad \ldots(4.3)$$

si definimos $p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}$ $\qquad \Pi^\alpha=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_\alpha}$ $\qquad \ldots(4.4)$

como los momentos conjugados de las variables q_i y θ_α

respectivamente, la ecuación (4.3) se puede escribir como:

$$\delta L = \delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \delta\theta_\alpha \frac{\partial L}{\partial \theta_\alpha} + \delta\dot{q}_i p^i + \delta\dot{\theta}_\alpha \Pi^\alpha \quad \ldots(4.5)$$

Para tener una teoría pseudoclásica sensata, pedimos que la lagrangiana sea una función par en las variables de Grassmann; entonces para tales sistemas se deberán cumplir las siguientes relaciones de conmutación: $[L,\theta_\alpha] = 0$ y $\{\pi^\alpha,\theta_\beta\} = 0$, ...(4.6) en donde , $[A,B]=AB-BA$ es el conmutador y $\{A,B\} = AB+BA$ es el anticonmutador.

Variando la acción (4.2) y usando (4.3), obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\dot{p}^i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \dot{\Pi}^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \theta_\alpha}. \quad \ldots(4.7)$$

Estas ecuaciones son las usuales, más un conjunto de ecuaciones que no ocurren en los sistemas clásicos, debido a la presencia de las variables de Grassman. Utilizando estas ecuaciones encontramos que la variación de la acción está dadá por;

$$\delta S = F(t_f) - F(t_i) \quad \ldots(4.8)$$

en donde

$$F(t) = \delta q_i p^i + \delta\theta_\alpha \Pi^\alpha - L\delta T \quad \ldots(4.9)$$

Clásicamente F(t) es el generador de la transformación infinitesimal δ. Por analogía, con el caso clásico definimos, el Hamiltoniano como la expresión (4.9), para la transformación infinitesimal $t \dashrightarrow t+\delta t$.

$$H = \dot{q}_i p^i + \dot{\theta}_\alpha \Pi^\alpha - L \quad \ldots(4.10)$$

Calculemos la variación del Hamiltoniano, utilizando las ecuaciones (4.6) y (4.7)

$$\delta H = -\delta q_i \dot{p}^i - \delta\theta_\alpha \dot{\Pi}^\alpha + \delta p^i \dot{q}_i - \delta\Pi^\alpha \dot{\theta}_\alpha \quad \ldots(4.11)$$

de donde podemos obtener las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \dot{\Pi}^\alpha = -\frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha}, \quad \dot{\theta}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial \Pi^\alpha} \quad \ldots(4.12)$$

es interesante notar, que los signos en las ecuaciones para las variables de Grassmann, no son exactamente los mismos que en las variables que conmutan.

Usando la ecuación (4.12) podemos obtener la derivada temporal de cualquier función de las variables canónicas:

$$\frac{d}{dt} A(q_i, p^i; \theta_\alpha, \Pi^\alpha; t) = \frac{\partial A}{\partial t} + \left(\frac{\partial H}{\partial p^i}\frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p^i}\right) - \left(\frac{\partial H}{\partial \Pi^\alpha}\frac{\partial A}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial A}{\partial \Pi^\alpha}\right) \quad \ldots(4.13)$$

Este es el resultado central de esta sección, porque la ecuación (4.13) define el paréntesis de Poisson

$$\langle A,B\rangle = \left(\frac{\partial B}{\partial p^i}\frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p^i}\right) - \left(\frac{\partial B}{\partial \Pi^\alpha}\frac{\partial A}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial B}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial A}{\partial \Pi^\alpha}\right) \quad \ldots(4.14)$$

de donde tenemos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \langle A,H\rangle \qquad \ldots(4.15)$$

Ahora dividiremos las variables dinámicas en dos clases, variables pares (E) y variables impares (O), obedeciendo las siguientes relaciones de conmutación

$$|E_1,E_2|=|E,O|=0 \quad , \quad \{O_1,O_2\}= 0 \qquad \ldots(4.16)$$

Notemos que la expresión (4.14) define el paréntesis de Poisson, cuando B es una función par, porque habíamos definido a ∂S como una función par. Pero tenemos la libertad de definir el paréntesis de Poisson cuando B es impar. Definiremos el paréntesis de Poisson de tal manera que tendremos un álgebra sobre un anillo de Grassmann, estas cantidades requieren

$$\epsilon\langle E,O\rangle = \langle \epsilon E,O\rangle = \langle E,\epsilon O\rangle \qquad \ldots(4.17)$$

donde ϵ es una constante impar.

Ahora examinemos en detalle los posibles casos.

a)Caso par-par, éste se sigue de la definición (4.14)

$$\langle E_1,E_2\rangle=\left(\frac{\partial E_1}{\partial q_t}\frac{\partial E_2}{\partial p^t}-\frac{\partial E_2}{\partial q_t}\frac{\partial E_1}{\partial p^t}\right) + \left(\frac{\partial E_1}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial E_2}{\partial \Pi^\alpha}-\frac{\partial E_2}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial E_1}{\partial \Pi^\alpha}\right) \qquad \ldots(4.18)$$

debido a que $\frac{\partial E}{\partial \theta_\alpha}$ y $\frac{\partial E}{\partial \Pi^\alpha}$ son variables impares.

Es fácil verificar las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}&\langle E_1,E_2\rangle= -\langle E_2,E_1\rangle\\&\langle E_1,E_2E_3\rangle= E_2\langle E_1,E_3\rangle + \langle E_1,E_2\rangle E_3 \qquad \ldots(4.19)\\&\langle E_1,\langle E_2,E_3\rangle\rangle + \langle E_2,\langle E_3,E_1\rangle\rangle + \langle E_3,\langle E_1,E_2\rangle\rangle= 0\end{aligned}$$

b)Caso impar-par, se sigue de la definición (4.14) que

$$\langle O,E\rangle=\left(\frac{\partial O}{\partial q_t}\frac{\partial E}{\partial p^t}-\frac{\partial E}{\partial q_t}\frac{\partial O}{\partial p^t}\right) - \left(\frac{\partial O}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial E}{\partial \Pi^\alpha}+\frac{\partial E}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial O}{\partial \Pi^\alpha}\right) \qquad \ldots(4.20)$$

de lo cual podemos verificar que

$$\begin{aligned}&\langle O,E_1E_2\rangle= E_1\langle O,E_2\rangle+\langle O,E_1\rangle E_2\\&\langle O_1O_2,E\rangle= O_1\langle O_2,E\rangle+\langle O_1,E\rangle O_2 \qquad \ldots(4.21)\\&\langle OE_1,E_2\rangle= O\langle E_1,E_2\rangle+\langle O,E_2\rangle E_1\end{aligned}$$

c)Caso par-impar; de la ecuación (4.17) llegamos a la condición

$$\epsilon\langle E,O\rangle=\langle E,\epsilon O\rangle=\left(\frac{\partial E}{\partial q_t}\frac{\partial \epsilon O}{\partial p^t}-\frac{\partial \epsilon O}{\partial q_t}\frac{\partial E}{\partial p^t}\right)+\left(\frac{\partial E}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial \epsilon O}{\partial \Pi^\alpha}-\frac{\partial \epsilon O}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial E}{\partial \Pi^\alpha}\right) \qquad \ldots(4.22)$$

de ésto se sigue que el paréntesis de Poisson para el caso par-impar, deberá ser definido como;

$$\langle E,O\rangle=\left(\frac{\partial E}{\partial q_t}\frac{\partial O}{\partial p^t}-\frac{\partial O}{\partial q_t}\frac{\partial E}{\partial p^t}\right)+\left(\frac{\partial E}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial O}{\partial \Pi^\alpha}+\frac{\partial O}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial E}{\partial \Pi^\alpha}\right) \qquad \ldots(4.23)$$

Las propiedades de este paréntesis son:

$$\langle E,O\rangle= -\langle O,E\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle E_1E_2,O\rangle &= E_1\langle E_2,O\rangle+\langle E_1,O\rangle E_2 \\ \langle E,O_1O_2\rangle &= O_1\langle E,O_2\rangle+\langle E,O_1\rangle E_2 \\ \langle E_1,OE_2\rangle &= O\langle E_1,E_2\rangle+\langle E_1,O\rangle E_2 \\ \langle E_1,\langle E_2,O\rangle\rangle+\langle E_2,&\langle O,E_1\rangle\rangle+\langle O,\langle E_1,E_2\rangle\rangle=0 \end{aligned} \qquad \ldots(4.24)$$

d)Caso impar-impar; utlizando una vez más la ecuación (4.17) obtenemos

$$\langle \epsilon E,O\rangle= \epsilon\langle E,O\rangle=\left(\frac{\partial \epsilon E}{\partial q_i}\frac{\partial O}{\partial p^i}+\frac{\partial O}{\partial q_i}\frac{\partial \epsilon E}{\partial p^i}\right)-\left(\frac{\partial \epsilon E}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial O}{\partial \Pi^\alpha}+\frac{\partial O}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial \epsilon E}{\partial \Pi^\alpha}\right) \qquad \ldots(4.25)$$

Por consistencia el paréntesis impar-impar deberá ser definido de la siguiente manera:

$$\langle O_1,O_2\rangle=\left(\frac{\partial O_1}{\partial q_i}\frac{\partial O_2}{\partial p^i}+\frac{\partial O_2}{\partial q_i}\frac{\partial O_1}{\partial p^i}\right)-\left(\frac{\partial O_1}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial O_2}{\partial \Pi^\alpha}+\frac{\partial O_2}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial O_1}{\partial \Pi^\alpha}\right) \qquad \ldots(4.26)$$

y las propiedades que obedece son:

$$\begin{aligned} \langle O_1,O_2\rangle &= \langle O_2,O_1\rangle \\ \langle O_1O_2,O_3\rangle &= O_1\langle O_2,O_3\rangle-\langle O_1,O_3\rangle O_2 \\ \langle EO_1,O_2\rangle &= E\langle O_1,O_2\rangle-\langle E,O_2\rangle O_1 \\ E_1\langle O_1,O_2\rangle\rangle+\langle O_1,\langle O_2,E\rangle\rangle-&\langle O_2,\langle\langle E,O_1\rangle\rangle= 0 \\ \langle O_1,\langle O_2,O_3\rangle\rangle+\langle O_2,\langle O_3,O_1\rangle\rangle+&\langle O_3,\langle O_1,O_2\rangle\rangle= 0 \end{aligned} \qquad \ldots(4.27)$$

Además para cualesquiera tres variables se cumple:

$$\langle A,B+C\rangle = \langle A,B\rangle + \langle A,C\rangle \qquad \ldots(4.28)$$

Notemos que para cualesquiera tres variables A,B y C una identidad generalizada de Jacobi se cumple; esto quiere decir que también para la pseudomecánica el siguiente teorema fundamental se cumple,"El paréntesis de Poisson de cualquier dos constantes de movimiento es una constante de movimiento".

Ahorá consideremos un par de ejemplos de la mecánica de sistemas Bose-Fermi. Empecemos con el caso de una partícula libre grassmanniana ,con variables $q(t)$ y $\theta(t)$ solamente, es decir una partícula libre unidimensional con una sola variable de Grassmann.

Empecemos por definir realidad en Grassmann como:

$$\theta^* = \theta \quad , \quad (\theta_1\theta_2)^* = \theta_2{}^*\theta_1{}^* \quad , \quad (\theta_1{}^*\theta_1)^* = \theta_1{}^*\theta_1 \qquad \ldots(4.29)$$

Ahora sea $L=1/2m\dot{q}^2+i/2M\theta\dot{\theta}$, la lagrangiana del sistema, notemos que la lagrangiana es una función par y real, debido a que

$$(\theta\theta)^* = \theta^*\theta^* = \theta\theta = -\theta\theta. \qquad \ldots(4.30)$$

La función lagrangiana tiene ésta forma debido a que, en primer lugar es par y real, además de ser la única combinación en las variables θ y θ que cumplen con este requisito , que son distintas de cero. Aplicando las ecuaciones (4.4) a la lagrangiana tenemos:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}= m\dot{q} \quad , \quad \Pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{-i}{2}M\theta \qquad \ldots(4.31)$$

Ahora aplicando las ecuaciones (5.7) tenemos;

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad , \quad \dot{\Pi} = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 1/2M\dot{\theta} \quad \ldots(4.32)$$

enseguida construyamos el Hamiltoneano del sistema, el cual está dado por; $H = \dot{q}p+\dot{\theta}\Pi-L = m\dot{q}^2-\dot{\theta}1/2M\theta-1/2m\dot{q}^2-1/2M\theta\dot{\theta}$

$$H = 1/2m\dot{q}^2 = p^2/2m \quad \ldots(4.33)$$

Resulta interesante notar que en el Hamiltoneano del sistema no aparecen las variables θ, θ, esto quiere decir que la ecuación $\Pi=-1/2M\theta$, no es una ecuación de movimiento sino una constricción del sistema. Esto es más claro en la formulación Hamiltoneana, las ecuaciones de movimiento son ((4.12)):

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0, \quad \dot{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \Pi} = 0, \quad \dot{\Pi} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad \ldots(4.34)$$

Por tanto la lagrangiana de este ejemplo , es una lagrangiana de una partícula en una dimensión con constricciones.

Tratemos ahora un caso un poco más interesante, consideremos una partícula libre en tres dimensiones, es decier las coordenadas generalizadas en este caso son $q_i(t)$ y $\theta_i(t)$, con $i=1,2,3$, como una generalización del caso anterior. Por tanto la lagrangiana esta dada por:

$$L = 1/2\, m\dot{q}_i{}^2 + 1/2\, M\theta_i\dot{\theta}_i \quad \ldots(4.35)$$

en este caso las ecuaciones de movimiento son,

$$p^i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=m\dot{q}_i, \quad \Pi^i=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}=-1/2M\theta_i, \quad \dot{p}^i=\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \quad \dot{\Pi}^i=\frac{\partial L}{\partial \theta_i}=1/2M\dot{\theta}_i \quad \ldots(4.36)$$

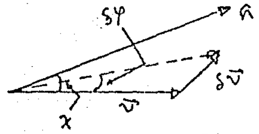
y por tanto el Hamiltoneano del sistema adquiere la siguiente forma; $H = \dot{q}_i p^i+\dot{\theta}_i\Pi^i-L = 1/2p^2m^{-1}$ ...(4.37)
y las ecuaciones de movimiento de Hamilton son:

$$\dot{p}^i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}=0, \quad \dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p^i}=\frac{p^i}{m}, \quad \dot{\theta}_i=-\frac{\partial H}{\partial \Pi^i}=0, \quad \dot{\Pi}^i=-\frac{\partial H}{\partial \theta_i}=0 \quad \ldots(4.38)$$

Como en el caso anterior, la lagrangiana (4.35) describe una partícula libre con constricciones, tales constricciones son:

$$\Pi^i + 1/2\, M\theta_i = 0 \quad y \quad \dot{\Pi}^i - 1/2\, M\dot{\theta}_i = 0 \quad \ldots(4.39)$$

Consideremos una rotación infinitesimal $\delta\varphi$ alrededor de un eje espacial, cuyo vector unitario es $\hat{n}$, el vector velocidad $\vec{v}$ sufrirá un cambio $\delta\vec{v}$ dado por (figura 1):



$$\delta\vec{v}=\vec{v}\,\mathrm{sen}\,\xi\,\delta\varphi = \vec{n}\times\vec{v}\,\delta\varphi = \delta\varphi\,\epsilon_{ijk}n_j v_k \quad \ldots(4.40)$$

Figura 1.

Postulamos que las variables q_i y θ_i sufren los siguientes cambios, debidos a la rotación:

$$\delta q_i = \delta\varphi \epsilon_{ijh} n_j q_h, \quad \delta\theta_i = \delta\varphi \epsilon_{ijh} n_j \theta_h \qquad \ldots(4.41)$$

La función $F(t)=\delta q_i p^i + \delta\theta_i \Pi^i - \delta t H$, es una constante del movimiento(teorema de Noether), introduciendo los cambios (4.41) en esta función obtenemos el siguiente resultado

$$d/dt(\vec{q} x \vec{p} + \vec{\theta} x \vec{\Pi}) = 0 \qquad \ldots(4.42)$$

en nuestro caso, $\vec{q}$ y $\vec{p}$ son paraleleos y por tanto la ecuación (4.42) nos dice que $\vec{\theta} x \vec{\Pi}$=cte. ...(4.43)
entonces la lagrangiana (4.35), describe una partícula libre con un momento angular intrínseco, es decir una partícula con espin.

5.-Lagrangiana invariante de transformaciones de Supersimetría (Introducción al Superespacio)

El superespacio es una extensión del espacio-tiempo ordinario. Sus puntos son marcados no sólo con coordenadas bosónicas, que conmutan, sino también con coordenadas fermiónicas, que anticonmutan (de Grassmann).

En general un punto del superespacio estará marcado por $z^M=(x^m, \theta^\alpha, \theta_\alpha)$. Para nuestros propósitos consideremos un superespacio sencillo, marcado sólo por $z^M=(t,\theta,\theta*)$, para este superespacio cualquier función tiene la siguiente expansión en serie;

$$F(t,\theta,\theta*) = F_1(t) + F_2(t)\theta + F_3(t)\theta* + F_4(t)\theta*\theta \qquad \ldots(5.1)$$

la derivada en este espacio queda definida a traves de las siguientes relaciones

$$\frac{\partial\theta}{\partial\theta} = 1 = \frac{\partial\theta*}{\partial\theta*}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\theta*} = \frac{\partial t}{\partial\theta} = 0, \text{ etc..} \qquad \ldots(5.2)$$

Por ejemplo $\partial F/\partial\theta$, F dada como en la ecuación (5.1), tiene el siguiente valor:

$$\frac{\partial F}{\partial\theta} = F_2 - F_4\theta* \qquad \ldots(5.3)$$

En general la derivada para cualesquiera funciones A y B esta dada por $\frac{\partial(AB)}{\partial\theta} = \frac{\partial A}{\partial\theta}B + (-)^a A\frac{\partial B}{\partial\theta}$, con a=0 o 1 si A es par o impar

Además la derivada cumple con las siguientes reglas

$$\left(\frac{\partial F_{par}}{\partial\theta}\right)* = -\frac{\partial F*_{par}}{\partial\theta}, \quad \left(\frac{\partial F_{impar}}{\partial\theta}\right)* = \frac{\partial F*_{impar}}{\partial\theta} \qquad \ldots(5.4)$$

La integral en este superespacio se define a través de las siguientes reglas

$$\int \theta* d\theta* = \int \theta d\theta = 1, \quad \int d\theta = 0 \qquad \ldots(5.5)$$

La integral de la función $F(t,\theta,\theta*)$, F dada como en (5.1), posee la siguiente simetría $\theta \to \theta+\epsilon$, donde ϵ es una constante grassmanniana.

$$\int F(t,\theta,\theta*)d\theta = F_1(t) - F_4(t)\theta*$$

$$\int F'(t,\theta+\epsilon,\theta*)d\theta = F_1(t) - F_4(t)\theta* \quad \ldots(5.6)$$

Es decir, la función F es invariante bajo traslaciones en Grassmann.

La ecuación (5.5) nos sirve para definir el producto escalar de dos funciones del superespacio, $F(t,\theta,\theta*)$ y $G(t,\theta,\theta*)$ como:

$$(F,G) \equiv \int dt d\theta d\theta* \; F*G \quad . \ldots(5.7)$$

En general este producto no es definido positivo, y además si $(F,F)=0$, no quiere decir que necesariamente $F=0$.

El producto escalar nos permite definir un operador adjunto atraves de la siguiente relación,

$$(QF,G) = (F,Q^+G) \quad \ldots(5.8)$$

En donde Q^+ es el operador adjunto de Q. En partícular tenemos que $(i\partial_t)^+=i\partial_t$, $(\partial_\theta)^+=\partial_{\theta*}$, $(\partial_{\theta*})=\partial_\theta$ ...(5.9)

Enseguida tratemos las transformaciones de supersimetría y encontremos una función lagrangiana que sea invariante bajo estas transformaciones.

Las transformaciones de supersimetría están definidas por

$$\begin{aligned} t' &= t - i(\theta*\epsilon-\epsilon*\theta) \\ \theta' &= \theta + \epsilon \\ \theta*' &= \theta* + \epsilon* \end{aligned} \quad \ldots(5.10)$$

notemos que t'es,par y real, y es prácticamente la única transformación que se puede definir , excepto por constantes y signos.

El generador de las transformaciones finitas de supersimetría es $L \equiv e^{i(\epsilon*Q*+Q\epsilon)}$. Debido a que, $A'=LAL^+$, para A cualquier función del superespacio,tenemos que para una transformación infinitesimal se cumple la siguiente relación

$$\delta A = i|\epsilon*Q*+Q\epsilon, A| \quad \ldots(5.11)$$

debido a que $\delta t=-i(\theta*\epsilon-\epsilon*\theta)$, $\delta\theta=\epsilon$ y $\delta\theta*=\epsilon*$, encontramos que los generadores de supersimetría tienen la siguiente representación

$$Q = i\partial_\theta - \theta*\partial_t$$

$$Q* = -i\partial_{\theta*} + \theta\partial_t \quad \ldots(5.12)$$

de este resultado se sigue que las cargas Q y Q*, satisfacen las siguientes relaciones de anticonmutación

$$\{Q,Q*\} = 2i\partial_t$$

$$\{Q,Q\} = \{Q*,Q*\} = 0 \quad \ldots(5.13)$$

Bajo las transformaciones de supersimetría las siguientes derivadas son invariantes

$$D_\theta = \partial_\theta - i\theta*\partial_t$$

$$D_{\theta*} = \partial_{\theta*} - i\theta\partial_t = (D_\theta)^+ \quad ...(5.14)$$

debido a que, $\partial_\theta=\partial_{\theta'}-i\epsilon*\partial_{t'}$, $\partial_{\theta*'}=\partial_{\theta*'}-i\epsilon\partial_{t'}$ y $\partial_t=\partial_{t'}$.

Las derivadas covariantes (5.14), satisfacen las siguientes reglas:

$$\{D_\theta, Q\}=\{D_\theta, Q^+\}=0$$

$$\{D_\theta, D_\theta\}=\{D_{\theta*}, D_{\theta*}\}=0$$

$$\{D_\theta, D^+_\theta\}=\{D_\theta, D_{\theta*}\}=-2i\partial_t$$

$$D_\theta(AB) = (D_\theta A)B + (-)^a A(D_\theta B) \quad ...(5.15)$$

Definimos un supercampo escalar real, como aquella función del superespacio que obedece la siguiente relación
$\varphi(t,\theta,\theta*)=\varphi*(t,\theta,\theta*)$, y además $\varphi'(t',\theta',\theta*')= \varphi(t,\theta.\theta*)$ ...(5.16)

La función escalar $\varphi(t,\theta,\theta*)$ puede ser expresada como un polinomio de θ y $\theta*$, en la siguiente forma

$$\varphi = \xi(t) + i\theta\Psi(t) + i\theta*\Psi*(t) + \theta*\theta D(t) \quad ...(5.17)$$

en donde $\xi(t)$ y $D(t)$ son funciones pares, y $\Psi(t)$, $\Psi*(t)$ son funciones impares. De la ecuación (5.11) tenemos que el cambio en φ debido a una transformación de supersimetría está dado por $\delta\varphi=i|\epsilon*Q*+Q\epsilon,\varphi|$ y por otro lado, $\delta\varphi=\partial_t\varphi\delta t+\partial_\theta\varphi\delta\theta+\partial_{\theta*}\varphi\delta\theta*$, tal que

$$\delta\varphi = \delta\xi + i\theta\delta\Psi - i\delta\Psi*\theta* + \theta*\theta\delta D \quad ...(5.18)$$

por lo que tenemos:

$$\delta\xi = -i(\Psi\epsilon - \epsilon*\Psi*), \quad \delta\Psi = -\epsilon*(\dot{\xi}-iD) \text{ y } \delta D = \partial_t(\epsilon\Psi+\Psi*\epsilon*) \quad ...(5.19)$$

en donde $\dot{\xi}=\partial_t\xi$.

En términos de componentes, tenemos que las derivadas covariantes de $\varphi(t)$ son:

$$D_\theta\varphi = i\Psi - \theta*D - i\theta*\dot{\xi} + \theta*\theta\dot{\Psi}$$

$$(D_\theta\varphi)* = -i\Psi* - \theta D + i\theta\dot{\xi} + \theta*\theta\dot{\Psi}* \quad ...(5.20)$$

Una función arbitraia de φ puede ser expandida en una serie de potencias como sigue:

$$V(\varphi) = \Sigma_n a_n\varphi^n \quad ...(5.21)$$

La acción invariante más general que se puede construir con el supercampo escalar φ, es de la forma

$$S=\int dt\, d\theta*d\theta(1/2|D_\theta\varphi|^2-V(\varphi)) \quad ...(5.22)$$

Como la integral en Grassmann se comporta como si fuera una derivada, sólo necesitamos encontrar el coeficiente de $\theta*\theta$ en la expansión de $V(\varphi)$ y de $|D_\theta\varphi|^2$. Tenemos que

$$(D_\theta\varphi)*D_\theta\varphi = \theta\theta*(\dot{\xi}^2+i(\Psi*\dot{\Psi}-\dot{\Psi}*\Psi) + D^2 + ...$$

$$V(\varphi) = \theta\theta*\{\Sigma n a_n \xi^{n-1}(-D) + \Sigma n(n-1)a_n\xi^{n-2}1/2\ (\psi\psi*-\psi*\psi)\}+\ldots$$
$$= \theta\theta*\{-DV'(\xi) - 1/2\ (\psi*\psi-\psi\psi*)V''(\xi)\}+\ldots \quad \ldots(5.23)$$

Introduciendo la expansión (5.23) en la ecución (5.22) e integrando obtenemos

$$S=\int dt\ (1/2(\dot{\xi}^2+(\psi*\dot{\psi}-\dot{\psi}*\psi)+D^2+(\psi*\psi-\psi\psi*)V''(\xi))+DV'(\xi)) \quad \ldots(5.24)$$

Los términos $\psi,\psi*$ (impares) corresponden a un campo fermiónico y los términos ξ y D (pares) a campos bosónicos. Nótese que D no aparece en forma de derivadas en la ecuación (5.24) y por lo tanto no es un campo dinámico, es un campo auxiliar. La acción (5.24) tiene la forma deseada, es una acción invariante bajo las transformaciones de supersimetría en las componentes de la función escalar φ.

En este capítulo revisamos el álgebra de Grassmann. Para nosotros tratar con esta álgebra representa entender el comportamiento algebraico de los campos bosónicos y fermiónicos, los cuales conmutan y anticonmutan, respectivamente, como lo hacen los elementos del álgebra de Grassmann. Y es de interés porque estos campos describen a las partículas elementales, como por ejemplo los mesones π que son bosones, o a los electrones que son fermiones.

También presentamos a la pseudomecánica; una mecánica con variables de Grassmann. Formulamos los paréntesis de Poisson para las diferntes posibilidades de las variables de Grassmann, y construimos una lagrangiana que representa a una partícula con giro intrinseco, es decir con espín.

Otro hecho de relevancia fue la introducción del superespacio, que es un espacio compuesto por coordenadas que conmutan y otras que anticonmutan. Es de importancia por dos razones; una, el superespacio es la extensión de las variedades de Riemann, que incluye nuevas coordenadas que representan grados de libertad internos de los campos fundamentales. Dos, nosotros trabajaremos con una teoría basada en este superespacio.

Finalmente introdujimos las transformaciones de supersimetría y construimos una lagrangiana invariante de supersimetría de un campo escalar. Esta lagrangiana tiene la cualidad de ser la más general que podemos construir.

CAPITULO III

1.- Simetrías en Teoría Cuántica de Campo

Una simetría es una invariancia de alguna ley física, bajo un grupo de transformaciones. Este grupo es llamado el grupo de simetría.

Una teoría clásica de campos en general, es una teoría en la cual un grupo de simetrías actúa sobre un conjunto de funciones llamadas campos, definidas sobre una variedad espacio-temporal de cuatro dimensiones. La evolución temporal de estos campos es gobernada por ecuaciones diferenciales, invariantes bajo las transformaciones del grupo de simetría. Estas ecuaciones se pueden obtener de un principio de acción estacionaria, esta acción es una funcional de los campos, definida en términos de una densidad lagrangiana la cual es invariante bajo el grupo de simetría.

Las transformaciones de simetría son de dos tipos; simetrías espacio-temporales, en las cuales las transformaciones corresponden a un cambio de las coordenadas espacio- temporales y simetrías internas involucrando grados de libertad diferentes a las coordenadas espacio temporales.

Si los parámetros de las transformaciones de un grupo de simetría interna son independientes de las coordenadas espacio-temporales , se dice que la teoría tiene una invariancia de norma global, en caso de que los parámetros dependan de las coordenadas entonces la teoría tiene una invariancia de norma local.

El grupo de Poincaré es el grupo de simetrías espacio-temporales de la forma $x'^m = \mathring{\Lambda}^m{}_n x^n + a^m$, en donde $\mathring{\Lambda}$ es un elemento del grupo de Lorentz y a^m es un cuatrivector real, que dejan la forma bilineal $x^m g_{mn} y^n$ invariante. Los operadores P_m y M_{mn} generan las transformaciones de Poincaré en el espacio de estados físicos, P_m genera las translaciones, M_{mn} genera rotaciones y transformaciones de Lorentz. Estos operadores determinan un álgebra de Lie cuyas relaciones de conmutación son[1]

$$|P_m, P_n| = 0$$

$$|M_{mn}, P_p| = g_{np}\, P_m - g_{mp}\, P_n \qquad \ldots(1.1)$$

$$|M_{mn}, M_{lp}| = g_{nl} M_{mp} - g_{ml} M_{np} - g_{np} M_{ml} + g_{mp} M_{nl}$$

en donde g_{mn} es la métrica de Minkowski.

Una importante consecuencia de la invariancia de Poincaré, es que las partículas son clasificadas por su masa y espín , y que los diferentes estados de momento y helicidad $|p, \lambda\rangle$ de una partícula, son colocados en una representación irreducible diferente. La invariancia global de Poincaré predice que la energía, el momento y el momento ángular se conservan.

Las simetrías internas forman un grupo de Lie, cuyos operadores T^a son escalares o pseudoescalares, las relaciones de conmutación que obedecen forman un álgebra de Lie

$$|T^a, T^b| = f^{ab}{}_c\, T^c \qquad \ldots(1.2)$$

Las partículas de la misma masa y espín pero de diferentes eigenvalores de T^a, son colocadas en representaciones irreducibles diferentes, con bases $|p, \lambda, i\rangle$, en donde i denota los números cuánticos internos. Una simetría interna global

1.- Bogolubov, et. al. (14)

predice leyes de conservación para números cuánticos.

Antes de entrar a supersimetría señalemos una consecuencia del teorema de Coleman-Mandula. Este teorema establece que el grupo de simetría total de una teoría de campo es el producto directo del grupo de Poincaré con el grupo de simetría interna. Es decir, dentro del contexto de las álgebras de Lie, si queremos combinar la simetría interna con la invariancia de Poincaré, sólo se puede realizar de una forma trivial (el producto directo). Notemos que si el grupo de simetría es el producto directo de un grupo de simetría interna con el grupo de Poincaré, entonces los casimires del grupo de simetría son al mismo tiempo los casimires de los dos subgrupos que intervienen en el producto, en particular el operador asociado al espin, el vector de Pauli-Lubansky, es un casimir del grupo de simetría, por lo que cada representación diferente debe tener espin diferente. Entonces cualquier intento para unificar simertrías espacio-temporales con simetría interna en el sentido de colocar en la misma representación irreducible espines diferentes, requiere de una estructura matemática diferente a las álgebras de Lie.

Afortunadamente existe el formalismo de álgebras graduadas de Lie, las cuales son sistemas algebráicos con dos clases o grados de elementos, los elementos pares B^a y los elementos impares F_α, las relaciones de estructura son de la siguiente forma

$$|B^a, B^b| = f^{ab}{}_c \; B^c$$

$$|B^a, F_\alpha| = -t^a{}_{\alpha\beta} \; F_\beta \qquad \ldots(1.3)$$

$$\{F_\alpha, F_\beta\} = s_{a\alpha\beta} \; B^a$$

Entonces los elementos pares determinan un álgebra de Lie, los elementos impares se transforman de acuerdo a el álgebra de las matrices $t^a{}_{\alpha\beta}$, y el anticonmutador de dos elementos impares es una combinación de elementos pares.

Debemos notar que las álgebras graduadas de Lie no son sistemas misteriosos sino, sistemas muy concretos que pueden ser representados por matrices diagonales en bloque

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \tilde{b}' \end{pmatrix} , \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & f \\ \tilde{f}' & 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots(1.4)$$

en donde b es una matriz de dimensión nxn, $\tilde{b}'$ de mxm, f de nxm y $\tilde{f}'$ de mxn.

El álgebra de supersimetría es un álgebra graduada de Lie, en la cual una o más cargas espinoriales aparecen como elementos impares; Consideremos el caso de una carga Q_α con cuatro componentes, α=0,1,2,3., las relaciones de estructura están dadas por

$$|M^{mn}, Q_\alpha| = -i \; (\sigma^{mn})_{\alpha\beta} \; Q_\beta \qquad \ldots(1.5)$$

$$|P_m, Q_\alpha| = 0 \qquad \ldots(1.6)$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = \gamma^m{}_{\alpha\beta} \; P_m \qquad \ldots(1.7)$$

Las constantes de estructura $t_{a\alpha\beta}$ y $s_{a\alpha\beta}$ de las ecuaciones (1.3) son los elementos de las matrices de Dirac γ^m y

$\sigma^{mn}=1/4|\gamma^m,\gamma^n|$. La ecuación (1.5) establece que Q_α se transforma como un espinor bajo transformaciones de Lorentz, la ecuación (1.6) implica que las cargas espinoriales Q_α se conservan bajo translaciones se comportan como el operador momento. La ecuación (1.7) es la relación clave de la estructura de supersimetría y nos dice que dos transformaciones repetidas de supersimetría dan una translación en el espacio tiempo.

Consideremos un ejemplo sencillo de supersimetría; Primero definamos variables de primera y de segunda especie, de la siguiente forma. Se llaman variables de primera especie a aquellas que conmutan, como por ejemplo, la posición x y el momento p, las variables de segunda especie son aquellas que anticonmutan, como por ejemplo los espinores ψ y ψ^+. Las variables de primera y segunda especie tienen la particularidad que en el límite clásico las primeras se reducen a números que conmutan (números-c) y las segundas a variables de Grassmann.

Supongamos un álgebra de supersimetría dada por:

$$\{Q,Q\} = \{Q^+,Q^+\} = 0$$

$$|Q,i\partial_t| = 0 \qquad \ldots(1.8)$$

$$\{Q,Q^+\} = 2i\,\partial_t$$

Para pasar a mecánica cuántica postulamos el Hamiltoniano H como:

$$H \equiv 1/2\,\{Q,Q^+\} \qquad \ldots(1.9)$$

con esta definición H queda definido positivo, además en el caso cuántico, $|Q,H|=0$, el Hamiltoniano conmuta con la carga espinorial Q. Consideremos una representación de Q dada por $Q=(P-iV')\psi$, en donde $\psi\psi=\psi^+\psi^+=0$, $\{\psi,\psi^+\}=1$ y $V'=\partial_t V$, es decir Q anticonmuta, $Q^2=Q^{+2}=0$.

Con tal representación el Hamiltoniano queda expresado de la siguiente forma

$$H = 1/2\{Q,Q^+\}= 1/2\ (p^2+V'^2)\{\psi,\psi^+\} + i/2|p,V'||\psi,\psi^+|$$

$$= 1/2\ (p^2+V'^2) + V''|\psi,\psi^+| \qquad \ldots(1.10)$$

En donde se utilizó que, $\{\psi,\psi^+\}=1$ y que si A es un operador cualesquiera el conmutador de P y A nos da una derivada de A, $|P_m,A|=-i\partial_m A$.

Definamos ahora el operador de número N como

$$N = 1/2\ H^{-1}|Q,Q^+| \qquad \ldots(1.11)$$

el cuadrado del operador de número es igual a la identidad

$$N^2 = \frac{4|Q,Q^+||Q,Q^+|}{4\{Q,Q^+\}\{Q,Q^+\}} = \frac{QQ^+QQ^+ + Q^+QQ^+Q}{QQ^+QQ^+ + Q^+QQ^+Q} = 1 \qquad \ldots(1.12)$$

debido al hecho que $N^2=1$, los eigenvalores de N son +1 y -1, a los eigenestados con N=1 se les llama estados bosónicos y con N=-1 estados fermiónicos. Consideremos la siguiente representación para ψ y ψ^+:

$$\psi \equiv \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \psi^+ \equiv \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots(1.13)$$

con esta representación se cumplen las siguientes relaciones

$$\{\psi, \psi^{+}\} = 1 \quad , \quad [\psi, \psi^{+}] = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \ldots(1.14)$$

Entonces el Hamiltoniano $H=1/2\ (p^2+V'^2)+1/2\ V''\sigma_3$, representa a una partícula con espin en una dimensión, no relativista y de masa uno. Los estados del sistema se pueden clasificar por sus eigenvalores de energía y de σ_3, $|E,\sigma_3\rangle$. En términos de los operadores ψ y ψ^{+}, el operador de número queda expresado como:

$$N = \frac{[\psi, \psi^{+}]}{\{\psi, \psi^{+}\}} = \sigma_3 \qquad \ldots(1.15)$$

Notemos que los eigenvalores de σ_3 son ± 1, que son precisamente los eigenvalores de N, además que σ_3 conmuta con el Hamiltoniano, $[\sigma_3, H]=0$ y que la energía es positiva $E\geq 0$. En nuestro ejemplo la función de onda de las partículas se puede descomponer en la siguiente forma

$$\langle x|E,+\rangle = \phi_E(x)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \langle x|E,-\rangle = \phi_E(x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \ldots(1.16)$$

Aplicando los generadores de supersimetría Q, Q^{+} sobre los estados del sistema tenemos

$$Q|E,+\rangle=0 \ , \ Q^{+}|E,-\rangle=0 \ , \ Q|E,-\rangle\approx|E,+\rangle \ , \ Q^{+}|E,+\rangle\approx|E,-\rangle \qquad \ldots(1.17)$$

y como $[Q,H]=0$, Q no cambia la energía de la partícula, en una teoría supersimétrica podemos tener juntos en la misma representación a bosónes y fermiónes. Los generadores Q y Q^{+} pasan a un estado bosónico en uno fermiónico y viceversa.

En general si consideramos un estado de helicidad λ, $|p,\lambda\rangle$ y le aplicamos la carga Q_α, el resultado es una superposición de estados de partículas de el mismo momento y energía , y por tanto de la misma masa, pero con helicidades $\lambda\pm 1/2$, debido a que P_m y Q_α conmutan, $[P,Q]=0$.

$$Q_\alpha|P,\lambda\rangle = a|P,\lambda+1/2\rangle + b|P,\lambda-1/2\rangle \qquad \ldots(1.18)$$

Entonces las transformaciones de supersimetría conectan estados de partículas que difieren por 1/2 de unidad de espín. De aquí se desprende que supersimetría relaciona bosónes y fermiónes.

En supersimetría global tenemos leyes de conservación y relaciones entre amplitudes, análogas a aquellas de la invariancia de Poincaré y de la simetría interna. Las leyes de conservación son puramente formales, debido a que los eigenestados de Q_α son superposiciones de bosónes y fermiónes, los cuales no ocurren en la naturaleza, pues están prohibidos por el teorema de Coleman-Mandula.

Veamos como ocurre esto último en nuestro sencillo modelo supersimétrico, dado por la ecuación (1.8). Antes detengamonos a observar algunos hechos de este modelo. Debido a que el operador de número N y el Hamiltoniano conmutan y $N^2=1$, los estados $|E,\pm\rangle$ están degenerados. Si el valor promedio de la energía en el estado de vacío $|0\rangle$ tiene un valor igual a cero

$$\langle 0|H|0\rangle = 1/2 \langle 0|QQ^{+} + Q^{+}Q|0\rangle = 0 \qquad \ldots(1.19)$$

implica que $Q|0\rangle = Q^{+}|0\rangle = 0$. Entonces el estado de vacío $|0\rangle$ es único y por lo tanto es un estado supersimétrico no degenerado.

Consideremos un regimén de dispersión, en donde existe un potencial $V' \equiv W$ de corto alcance, es decir $W(x)=0$ si $|x|>|R|$ R es el alcance del potencial. Entonces los generadores de supersimetría toman la siguiente forma, en la región donde $|x|>|R|$.

$$Q = p\psi = \frac{1}{i}\partial_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^{+} = p\psi^{+} = \frac{1}{i}\partial_x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots(1.20)$$

Para $x<-R$, el estado $|E,\pm\rangle$ puede ser representado por; $|E,\pm\rangle \approx (e^{ikx}+R_{\pm}e^{-ikx})\chi_{\pm}$ en donde $\chi_{+}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\chi_{-}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R_{\pm}$ es la amplitud de que el haz sea reflejado (figura 2).

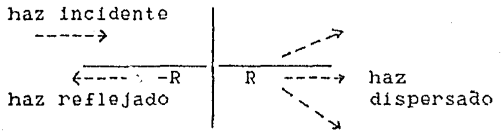


Figura 2.-Régimen de dispersión para un potencial de corto alcance.

Para $x>R$ $(W=0)$ el estado $|E,\pm\rangle$ puede ser representado por $|E,\pm\rangle \approx T_{\pm}e^{ikx}\chi_{\pm}$, en donde $T_{\pm}$ es la amplitud de transmisión del haz. Trabajando en el régimen asintótico el generador Q^{+} aplicado al estado $|E,+\rangle$ nos da el siguiente resultado

$$\begin{aligned} Q^{+}|E,+\rangle &= \frac{1}{i}\,\partial_x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(e^{ikx} + R_{+}e^{-ikx})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha|E,-\rangle \\ &= \alpha(e^{ikx} + R_{-}e^{-ikx})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \ldots(1.21)$$

de la ecuación (1.21) obtenemos que $\alpha=k$ y $R_{+}=-R_{-}$; por lo que la amplitud de reflexión para bosónes es igual al negativo de la amplitud de reflexión para fermiónes. De la misma manera, aplicando Q al estado $|E,-\rangle$, para $x>R$, tenemos

$$Q|E,-\rangle = \frac{1}{i}\partial_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(T_{-}e^{ikx})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta|E,+\rangle = T_{+}e^{ikx}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots(1.22)$$

La ecuación (1.22) nos dice que $\beta=k$ y $T_{-}=T_{+}$, es decir la amplitud de transmisión para bosónes es igual a la amplitud de transmisión para fermiónes. Este simple ejemplo muestra el tipo de relaciones que se pueden encontrar en una teoría más refinada.

2.- Supersimetría en Teoría Cuántica de Campo

Es importante que nos demos cuenta que la supersimetría no actúa como una simetría convencional puesto que no se basa en un álgebra de Lie. En supersimetría tratamos con sistemas de campos bosónicos $\varphi(x)$ y fermiónicos $\Psi(x)$ simultaneamente. Con estos campos podemos formar una densidad lagrangiana $L(\varphi,\partial_m\varphi,\Psi,\partial_m\Psi)$ y con ésta una acción dada por:

$$I(\varphi,\Psi)=\int d^4x\ L(\varphi,\partial\varphi,\Psi,\partial\Psi) \qquad ...(2.1)$$

También existe un parámetro espinorial anticonmutante ϵ_α en términos del cual las transformaciones supersimétricas de los campos tienen la siguiente forma esquemática

$$\delta\varphi = \bar{\epsilon}\Gamma\Psi \quad , \quad \delta\Psi = \partial Q\tilde{\Gamma}\epsilon + ... \qquad ...(2.2)$$

en donde $\Gamma,\tilde{\Gamma}$ son matrices de Dirac elegidas para balancear los índices de Lorentz, y +... indica posibles términos adicionales. Las transformaciones de supersimetría siempre mezclan campos de Bose y de Fermi, a diferencia de las simetrías tradicionales.

Antes de que consideremos una teoría supersimétrica, repasemos algo del material técnico sobre matrices de Dirac y espinores de Majorana.

Consideremos la métrica de Minkowsky $\eta_{mn}=-g_{mn}\approx(-1,1,1,1)$. Para empezar definiremos M, como una matriz de 2x2 con determinante igual a uno, es decir M es un elemento del grupo SL(2,C).

La representación más baja no trivial del grupo SL(2,C) es bidimensional. Los elementos del espacio donde actúa esta representación son llamados espinores. Hay dos representaciones bidimensionales no equivalentes de SL(2,C), dadas por las matrices M y $(M*)^{-1}$, y por lo tanto hay dos tipos de espinores, representados por ψ_α y $\bar{\psi}^{\dot\alpha}$, sus leyes de transformación son:

$$\Psi'_\alpha = M_\alpha{}^\beta\ \psi_\beta \ , \ \bar{\Psi}'^{\dot\alpha} = (M*)^{-1}{}_{\dot\beta}{}^{\dot\alpha}\ \psi^{\dot\beta} \qquad ...(2.3)$$

Además estableceremos la siguiente convención, los espinores con índices punteados inferiores se transforman por la matriz compleja conjugada M* y los espinores con índices no punteados superiores con la matriz dual, definida por $M^D=(M^{-1})^T$

$$\bar{\Psi}'_{\dot\alpha} = M*_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\ \bar{\Psi}_{\dot\beta} \ , \ \psi'^\alpha = (M^{-1})_\beta{}^\alpha\ \psi^\beta \qquad ...(2.4)$$

Existe un isomorfismo entre el grupo de restringido de Lorentz (L, $\det\Omega=1$ y $\Omega_0{}^0\geq1$, $\Omega\in L$) y el grupo SL(2,C). A cada matriz $M\in SL(2,C)$ le corresponde una transformación de Lorentz $\Omega(M)$, tal que $\Omega(M_1M_2)=\Omega(M_1)\Omega(M_2)$, sin embargo cuando $\Omega(M_1)=\Omega(M_2)$ sucede que $M_1=\pm M_2$, en otras palabras la correspondencia $\Omega \dashrightarrow \pm M$, define una representación bivaluada del grupo de Lorentz, llamada la representación espinorial.

La conexión entre el grupo SL(2,C) y el grupo de Lorentz es establecida a través de las matrices-σ.

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ \sigma^1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \sigma^2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\ \sigma^3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad ...(2.5)$$

estas matrices forman una base para las matrices complejas de dos por dos.

A cada cuatrivector p_m podemos asociarle una matriz Hermiteana p, dada por:

$$\rho = P_m\sigma^m = \begin{pmatrix} -p_0+p_3 & p_1-ip_2 \\ p_1+ip_2 & -p_0-p_3 \end{pmatrix} \quad \ldots(2.6)$$

De cualquier matriz hermiteana ρ, podemos siempre obtener otra por la siguiente transformación:

$$\rho' = M\rho M^{+} \quad \ldots(2.7)$$

ambas matrices ρ y ρ' tiene expanciones en la base de las matrices-σ

$$P'_m\ \sigma^m = M\ P_m\sigma^m\ M^{+} \quad \ldots(2.8)$$

debido a que M es unimodular (detM=1) los coeficientes P_m y P'_m están conectados atraves de una transformación de Lorentz

$$\det|P'_m\sigma^m| = \det|P_m\sigma^m| = p'_0{}^2-\vec{p}'^2 = p_0{}^2-\vec{p}^2 \quad \ldots(2.9)$$

el determinante es entonces un invariante de Lorentz.

Notemos que los índices $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ denotan espinores y los índices $m,n,p,\ldots$, denotan vectores y tensores. De las ecuaciones (2.2),(2.3) y (2.7) podemos ver que σ^m tiene la siguiente estructura de indices: $\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m$ ...(2.10)

Debido a que M es unimodular los tensores antisimétricos $\epsilon^{\alpha\beta}$ y $\epsilon_{\alpha\beta}$, en donde $\epsilon_{21}=\epsilon^{12}=1$, $\epsilon_{12}=\epsilon^{21}=-1$, $\epsilon_{11}=\epsilon_{22}=0$, son invariantes bajo las transformaciones de Lorentz

$$\epsilon_{\alpha\beta} = M_\alpha{}^\gamma\ M_\beta{}^\delta\ \epsilon_{\gamma\delta}$$

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\gamma\delta}\ M_\gamma{}^\alpha\ M_\delta{}^\beta \quad \ldots(2.11)$$

Los espinores con índices superiores e inferiores están relacionados a través del tensor ϵ, de la siguiente manera:

$$\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\ \psi_\beta\ ,\ \psi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\ \psi^\beta \quad \ldots(2.12)$$

Notemos que hemos definido $\epsilon_{\alpha\beta}$ y $\epsilon^{\alpha\beta}$ de tal manera que $\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\beta\gamma}=\delta_\alpha{}^\gamma$. Un tratamiento análogo se tiene para el tensor ϵ con índices punteados. El tensor ϵ tambien puede ser usado para subir los índices de las matrices-σ

$$\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\ \epsilon^{\alpha\beta}\ \sigma^m{}_{\beta\dot{\beta}}. \quad \ldots(2.13)$$

De la definición de las matrices-σ encontramos que estas obedecen las siguientes relaciones:

$$(\sigma^m\bar{\sigma}^n+\sigma^n\bar{\sigma}^m)_\alpha{}^\beta = -2\eta^{mn}\ \delta_\alpha{}^\beta$$

$$(\bar{\sigma}^m\sigma^n+\bar{\sigma}^n\sigma^m)^\alpha{}_\beta = -2\eta^{mn}\ \delta^\beta{}_\alpha \quad \ldots(2.14)$$

también se cumplen las siguientes relaciones de completes

$$\mathrm{Tr}(\sigma^m\sigma^n) = -2\eta^{mn}$$

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\ \bar{\sigma}_m{}^{\dot{\beta}\beta} = -2\delta_\alpha{}^\beta\ \delta^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}. \quad \ldots(2.15)$$

Un biespinor $v_{\alpha\dot{\alpha}}$ es construido por el producto directo de un espinor χ_α con el spinor $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$:

$$v_{\alpha\dot{\alpha}} = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \qquad \ldots(2.16)$$

Las relaciones (2.15) pueden ser utilizadas para convertir un vector en un biespinor o un biespinor en un vector

$$v_{\alpha\dot{\alpha}} = \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\, v_m \;, \quad v^m = -1/2\; \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha}\, v_{\alpha\dot{\alpha}} \qquad \ldots(2.17)$$

Las ecuaciones (2.14) nos permiten relacionar espinores de dos componentes con espinores de cuatro componentes (biespinores). Esto se puede hacer a través de la siguiente realización de las matrices-γ de Dirac

$$\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \bar{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots(2.18)$$

en donde, de la ecuación (2.13), tenemos que, $\bar{\sigma}^0 = \sigma^0$ y $\bar{\sigma}^{1,2,3} = -\sigma^{1,2,3}$.

De las ecuaciones (2.14) y (2.18) encontramos que las matrices de Dirac obedecen la siguiente álgebra

$$\{\gamma^m, \gamma^n\} = -2\eta^{mn} = 2g^{mn} \qquad \ldots(2.19)$$

llamada el álgebra de Clifford.

A los biespinores $v_{\alpha\dot{\alpha}}$, que contienen cuatro componentes, les llamaremos espinores de Dirac y serán denotados por

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \qquad \ldots(2.20)$$

Cualquier conjunto de matrices que satisfacen las relaciones de anticonmutación (2.19), están relacionadas entre si atraves de una transformación de semejanza $\gamma'^m = S\gamma^m S^{-1}$. Por ejemplo a la representación de las matrices de Dirac dada por la ecuación (2.18) se le llama la base de Weyl. La base canónica está definida por:

$$\gamma_C{}^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;, \quad \gamma_C{}^h = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^h \\ -\sigma^h & 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots(2.21)$$

la base canónica está relacionada a la base de Weyl por la siguiente transformación de semejanza;

$$\Gamma_w = X\Gamma_C X^{-1} \;, \quad X = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \ldots(2.22)$$

La base de Majorana esta definida por $\gamma^m{}_M{}^* = -\gamma^m{}_M$, está dada por

$$\gamma_M{}^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \; \gamma_m{}^1 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^3 \\ i\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}, \; \gamma_M{}^2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \; \gamma_M{}^3 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^1 \\ -i\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots(2.23)$$

y esta relacionada a la base de Weyl através de la siguiente transformación de semejanza

$$\Gamma_w = Y\Gamma_M Y^{-1} \;, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon & -i\epsilon \end{pmatrix} \qquad \ldots(2.24)$$

En el álgebra generada por las matrices-γ de Dirac, existe una matriz llamada de conjugación de carga, representada por C, la cual satisface la siguiente relación

$$C\gamma^m C^{-1} = -\gamma^{mT} \quad \ldots(2.25)$$

en donde T indica transposición.

El conjugado de Dirac de un espinor se define de la siguiente forma:

$$\psi^D = \psi^+\gamma^0 \quad \ldots(2.26)$$

y el conjugado de Majorana como; $\psi^M=\psi^T C$. ...(2.27)

Un espinor de Majorana es un espinor cuyo conjugado de Dirac es igual a su conjugado de Majorana, $\psi^D=\psi^M$. Esta condición, es una condición de realidad análoga a la condición de realidad para campos bosónicos, $\varphi=\varphi*$, y reduce a la mitad el número de componentes independientes, de esta manera en una representación de las matrices de Dirac en donde $C\gamma^{0T}=1$, nos trae como consecuencia el empleo de espinores de Majorana con componentes estrictamente reales, $\psi=\psi*$.

Nosotros impondremos que todas las cantidades espinoriales incluyendo las cargas Q_α de supersimetría, sean espinores de Majorana.

Dados dos cualesquiera espinores de Majorana, ψ y χ, tenemos que se cumple lo siguiente

$$\bar{\psi}\Gamma\chi = \psi^T C\ \chi \quad \ldots(2.28)$$

para cualquier matriz de Dirac Γ.

Además tenemos que independientemente de la representación en que se trabaje, las seis matrices, C, $C\gamma_5$ y $C\gamma_5\gamma^m$ son antisimetricas, y las diez matrices $C\gamma^m$ y $C\sigma^{mn}$ son simétricas; en donde $\gamma_5=\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ y $\sigma^{mn}=1/4\,|\gamma^m,\gamma^n|$.

Las componentes de los espinores de Majorana pueden ser números conmutantes o anticonmutantes;

$$\chi_\alpha\psi_\beta \pm \psi_\beta\chi_\alpha = 0 \quad \ldots(2.29)$$

Además los espinores de Majorana tienen las siguientes propiedades de simetría:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\chi &= -(\pm)\bar{\chi}\psi \\ -\bar{\psi}\gamma^m\chi &= -(\pm)\bar{\chi}\gamma^m\psi \\ -\bar{\psi}\sigma^{mn}\chi &= -(\pm)\bar{\chi}\sigma^{mn}\psi \\ -\bar{\psi}\gamma_5\gamma^m\chi &= \pm\bar{\chi}\gamma_5\gamma^m\psi \\ -\bar{\psi}\gamma_5\chi &= \pm\bar{\chi}\gamma_5\psi \end{aligned} \quad \ldots(2.30)$$

Ahora estudiaremos la teoría de campo libre para espinores de Majorana; la acción covariante está dada por:

$$I = 1/2 \int d^4x\ \bar{\psi}(x)(i\gamma^m\partial_m - m)\psi(x) \quad \ldots(2.31)$$

Esta acción es precisamente la acción de Dirac multiplicada por el factor 1/2, esto es debido a que un campo de Majorana tiene la mitad de sus componentes independientes. Notemos que la acción I, es nula si las componentes de ψ conmutan, por lo tanto las componentes ψ_α deben de ser números anticonmutantes, debemos tomar el signo superior en las ecuaciones (2.29) y (2.30) en la teoría clásica.

Para encontrar las ecuaciones de movimiento, tomemos la primera variación de la ecuación (2.31):

$$\delta I = {}^{1/2}\int d^4x \,|\, \delta\bar{\Psi}(i\gamma^m\partial_m - m)\Psi + \bar{\Psi}(i\gamma^m\partial_m - m)\delta\Psi \,| = \int d^4x\,\delta\bar{\Psi}(i\gamma^m\partial_m - m)\Psi \quad \ldots(2.32)$$

en el segundo paso se ha realizado una integración por partes y utilizado la propiedad de Majorana (2.30). Entonces es necesario variar solamente $\bar{\Psi}$ y multiplicar por dos, para obtener la ecuación de movimiento, la cual es precisamente la ecuación de Dirac

$$(i\gamma^m\partial_m - m)\Psi = 0 \qquad \ldots(2.33)$$

la expansión en ondas planas para la solución general es:

$$\Psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3(2\omega)^{1/2}} \sum_{\lambda=\pm 1/2} \left[b(p,\lambda)u(p,\lambda)e^{-ip\cdot x} + b*(p,\lambda)v(p,\lambda)e^{ip\cdot x} \right] \ldots(2.34)$$

Después de cuantizar tenemos:

$$\{ b(p,\lambda), b*(p',\lambda') \} = \hbar\ \delta^3(p-p')\delta_{\lambda\lambda'} \qquad \ldots(2.35)$$

los b y b* son operadores de aniquilación y creación respectivamente. Para cada momente p tenemos dos partículas de helicidad $\lambda=\pm 1/2$, las partículas son identicas con las antipartículas, como en el caso de campos bosónicos reales.

Ahora consideremos una teoría supersimétrica de Yang-Mills, la cual es una teoría supersimétrica globalmente pero local desde el punto de vista del grupo de simetría interno. Los campos del modelo son un conjunto de potenciales vectoriales, $A_m(x)$ y un conjunto de campos fermiónicos de Majorana $\chi^a(x)$. Ambos son asignados a la representación adjunta del grupo interno.

La acción supersimétrica de éste sistema es la acción minimamente acoplada en el sentido de invariancia de Yang-Mills.

$$I(A_m, \chi) = \int d^4x \,|-1/4(F_{mn}{}^a)^2 + i/2\bar{\chi}^a\gamma^m(D_m\chi)^a|$$

$$F_{mn}{}^a = \partial_m A_n{}^a - \partial_n A_m{}^a + gf^{abc}A_m{}^b A_n{}^c$$

$$D_m\chi^a = \partial_m\chi^a + gf_{abc}A_m{}^b\chi^c \qquad \ldots(2.36)$$

Pudimos haber tratado con esta teoría antes del desarrollo de la supersimetría sin sospechar que ésta posee una invariancia fermiónica adicional, la cual está dada por las siguientes transformaciones:

$$\delta A_m{}^a = i\bar{\epsilon}\gamma_m\chi^a$$

$$\delta\chi^a = \sigma^{mn}F_{mn}{}^a\epsilon \qquad \ldots(2.37)$$

$$\delta\bar{\chi}^a = -\bar{\epsilon}\sigma^{mn}F_{mn}{}^a$$

Esta transformación tiene el mismo carácter que ya habíamos discutido anteriormente, es decir campos bosónicos se rotan en campos fermiónicos y campos fermiónicos se rotan en campos bosónicos.

Enseguida veremos la prueba de la invariancia de esta teoría. Primero calculemos la variación de la acción, la cual está dada por:

$$\delta I = \int d^4x \,|-1/2\delta F^{mna}F_{mn}{}^{a} + 1/2\delta\bar{\chi}^{a}\gamma^{m}(D_m\chi)^{a} + 1/2\bar{\chi}^{a}\gamma^{m}(D_m\delta\chi)^{a} + 1/2\bar{\chi}^{a}G^{m}g f_{abc}\delta A_m{}^{b}\chi^{c}| \quad \ldots(2.38)$$

los dos últimos sumandos dentro de la integral se obtienen del hecho que

$$\delta(D_m\chi)^{a} = (D\delta\chi)^{a} + g f_{abc}\delta A_m{}^{b}\chi^{c} \quad \ldots(2.39)$$

El tercer sumando en la integral se puede reescribir como

$$\int d^4x \; 1/2\bar{\chi}^{a}\gamma^{m}(D_m\delta\chi)^{a} = \int d^4x \; 1/2\delta\bar{\chi}^{a}\gamma^{m}(D_m\chi^{a}) \quad \ldots(2.40)$$

Para obtener el resultado (2.40) se utilizó una integración por partes

y $$\int d^4x \; N^{a}(D_m M^{a}) = -\int d^4x \; (D_m N^{a})M^{a} \quad \ldots(2.41)$$

y las propiedades de los espinores de Majorana (2.30).

Utilizando la ecuación (2.40) la variación de la acción toma la siguiente forma:

$$\delta I = \int d^4x \; (-1/2\delta F^{mna}F_{mn}{}^{a} + 1\delta\bar{\chi}^{a}\gamma^{m}(D_m\chi)^{a} + 1/2g\bar{\chi}^{a}\gamma^{m}\chi^{c}f^{abc}\delta A_m{}^{b}) \quad \ldots(2.42)$$

Consideremos el primer sumando en la variación de la acción (2.42) éste toma la siguiente forma;

$$\int d^4x \; (-1/2\delta F^{mna}F_{mn}{}^{a}) = -\int d^4x \; (D^{m}\delta A^{na})F_{mn}{}^{a} \quad \ldots(2.43)$$

integrando por partes, ecuación (2.39), obtenemos:

$$\int d^4x \; (-1/2\delta F^{mna}F_{mn}{}^{a}) = \int d^4x \; \delta A_n{}^{a}(D_m F^{mna}) \quad \ldots(2.44)$$

Ahora tomemos el segundo sumando en la integral (2.42), sustituyendo la variación $\delta\bar{\chi}^{a}$, dada por la ecuación (2.37), se obtiene que es igual a lo siguiente:

$$-1\int d^4x \; \bar{\epsilon}\sigma^{np}\gamma^{m}(D_m\chi^{a})F_{np}{}^{a} \quad \ldots(2.45)$$

e integrando por partes encontramos el siguiente resultado:

$$1\int d^4x \; \bar{\epsilon}\sigma^{np}\gamma^{m}\chi^{a}(D_m \quad)F_{np}{}^{a} \ldots(2.46)$$

De la igualdad $\sigma^{mn}\gamma^{p}=1/2(\gamma^{m}g^{np}-\gamma^{n}g^{mp})+1/2\epsilon^{mnpl}\gamma_5\gamma_l$, tenemos que la ecuación (2.46) toma la siguiente forma:

$$i\int d^4x\,\bar{\varepsilon}[1/2(\gamma^n g^{pm} - \gamma^p g^{nm}) + \\ + 1/2\epsilon^{mnpl}\gamma_5\gamma_l]\chi^a(D_m F_{np}{}^a) \quad \ldots(2.47)$$

Debido a las propiedades de simetería del tensor ϵ, del tensor F y de las constantes de estructura f^{abc}, el segundo sumando en la integral (2.47) se anula, reduciendose la ecuación (2.45) a:

$$i/2\int d^4x\;\bar{\varepsilon}(\gamma^n g^{pm}-\gamma^p g^{nm})\chi^a(D_m F_{np}{}^a) =$$

$$= \int d^4x\;\bar{\varepsilon}\gamma^m\chi^a(D_m F^{nma}) \quad \ldots(2.48)$$

y debido a que $\delta A_n{}^a = i\bar{\varepsilon}\gamma_n\chi^a$, la ecuación (2.48) se transforma en:

$$-\int d^4x\;\delta A_n{}^a(D_m F^{mna}) \quad \ldots(2.49)$$

Por lo tanto el primer y segundo sumandos en la variación de la acción se anulan, ecuaciones (2.44) y (2.49), sobreviviendo sólo el tercer sumando. Entonces δI queda como:

$$\delta I = -g/2\int d^4x\;f^{abc}(\bar{\varepsilon}\gamma^m\chi^a)(\bar{\chi}^b\gamma_m\chi^c) \quad \ldots(2.50)$$

En seguida veremos que el integrando en (2.50) desaparece debido a las propiedades de las matrices de Dirac y a las reglas de anticonmutación para los espinores de Majorana. Debido a que las 16 matrices de Dirac Γ^A forman un conjunto completo de matrices 4x4, podemos escribir el producto de cualesquiera dos matrices de Dirac como:

$$\Gamma^A{}_{\alpha\beta}\Gamma^B{}_{\gamma\delta} = M^{AB;CD}\Gamma^C{}_{\alpha\delta}\Gamma^D{}_{\gamma\beta} \quad \ldots(2.51)$$

en donde $M^{AB;CD}$ es una matriz númerica 256x256, la cual se conoce como la matriz de Fierz en su forma general. En particular nosotros tenemos un arreglo de la forma

$$\gamma^m{}_{\alpha\beta}\gamma_{m\gamma\delta} = a\delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta} + b\gamma^M{}_{\alpha\delta}\gamma_{m\gamma\beta} + c\sigma^{mn}{}_{\alpha\delta}\sigma_{mn\gamma\beta} + \\ + d(\gamma_5\gamma^m)_{\alpha\delta}(\gamma_5\gamma_M)_{\gamma\beta} + e\gamma_{5\alpha\delta}\gamma_{5\gamma\beta} \quad \ldots(2.52)$$

Realizando las trazas con las matrices $\delta_{\beta\alpha}, \gamma^p{}_{\beta\gamma}$, etc., encontramos que los valores de los coeficientes son; $a=1$, $b=-1/2$, $c=0$, $d=-1/2$, y $e=-1$. Entonces para cualesquier tres espinores de Majorana, ψ^1, ψ^2, ψ^3 tenemos

$$\gamma^m\psi^1(\bar{\psi}^2\gamma_m\psi^3) = \\ = \pm[\psi^3(\bar{\psi}^2\psi^1) - 1/2\gamma^m\psi^3(\bar{\psi}^2\gamma_m\psi^1) - \\ -1/2\gamma_5\gamma^m\psi^3(\bar{\psi}^2\gamma_5\gamma^m\psi^1) - \gamma_5\psi^3(\bar{\psi}^2\gamma_5\psi^1)] \quad \ldots(2.53)$$

en donde $\pm$ se refiere a la naturaleza conmutante y anticonmutante de los espinores de Majorana. Debido a que elegimos la anticonmutación, obtenemos para el integrando de la ecuación (2.50) la siguiente expresión

$$f^{abc}(\bar{\epsilon}\gamma^m\chi^a)(\bar{\chi}^b\gamma_m\chi^c) = -f^{abc}[(\bar{\epsilon}\chi^c)(\bar{\chi}^b\chi^a) -$$

$$-1/2(\bar{\epsilon}\gamma^m\chi^c)(\bar{\chi}^b\gamma_m\chi^a) - 1/2(\bar{\epsilon}\gamma_5\gamma^m\chi^c)(\bar{\chi}^b\gamma_5\gamma_m\chi^a) -$$

$$-(\bar{\epsilon}\gamma_5\chi^c)(\bar{\chi}^b\gamma_5\chi^a)] \quad \ldots(2.54)$$

Debido a la antisimetría de f^{abc} y a las propiedades de los espinores de Majorana (2.30), todos los términos se anulan excepto el término de la forma $\gamma^m(\gamma_m)$,

$$f^{abc}(\bar{\epsilon}\gamma^m\chi^a)(\bar{\chi}^b\gamma_m\chi^c) =$$

$$= 1/2\ f^{abc}(\bar{\epsilon}\gamma^m\chi^c)(\bar{\chi}^b\gamma_m\chi^a) \quad \ldots(2.55)$$

Reordenando los índices de simetría interna en (2.55) obtenemos

$$= -1/2\ f^{abc}(\bar{\epsilon}\gamma^m\chi^c)(\bar{\chi}^b\gamma_m\chi^a) \quad \ldots(2.56)$$

Entonces el integrando en (3.50) desaparece, básicamente por la antisimetrización de los espinores de Majorana.

Finalmente hemos probado que, la teoría de campo es invariante bajo transformaciones de supersimetría globales.

Los elementos de la prueba de invariancia fueron; La estructura del álgebra de Dirac, incluyendo el reordenamiento de Fierz, la propiedad anticonmutante de los campos fermiónicos y las propiedades de simetría de la invariancia de norma de Yang-Mills.

Las simetrías de una teoría de campo basada en un formalismo lagrangiano son muy importantes, pues nos proveen de una forma natural, atraves del teorema de Noether, de cantidades que se conservan. Es decir las leyes de conservación se pueden obtener imponiendo la invariancia de una acción cuando actúa sobre ella un grupo de simetría, con parámetros constantes.

Aún más cuando se impone a una acción una simetría representada por un grupo cuyos parámetros no son constantes (dependen del espaciotiempo), trae como consecuencia la aparición de un campo de fuerza. esto es extraordinario, no sólo las simetrías nos facilitan leyes de conservación, sino también las fuerzas que actúan entre partículas elementales.

La supersimetría es una simetría que esencialmente cambia a los bosones en fermiones y a los fermiones en bosones. Algo que ocurre a nivel de partículas elementales es que los fermiones son, casi siempre, partículas que pueden formar materia (electrón, quark, mesones μ, τ, etc.) y los bosones son partículas mensajeras de las interacciones (gravitón, fotón, gluón, etc.). Podríamos decir que los fermiones son bloques fundamentales de materia y los bosones mensajeros.

Pues bien la supersimetría establece que si se cambian en todo el universo los bloques fundamentales por los mensajeros y los mensajeros por bloques fundamentales, el universo no va a sufrir ningún cambio.

Algo extraordinario de la supersimetría es que elconmutador de dos transformaciones produce un desplazamiento en el espacio-tiempo. Es decir , al aplicarle por ejemplo a un bosón el conmutador de dos transformaciones de supersimetría el resultado es de nuevo un bosón, pero no situado en el mismo punto del espacio-tiempo.

CAPITULO IV

1.-Formas Diferenciales en el Superespacio.

El superespacio es una generalización del espacio convencional de cuatro dimensiones, que contiene coordenadas que conmutan x^m y coordenadas espinoriales de Grassmann que anticonmutan θ^μ, $\bar{\theta}_{\dot{\mu}}$. De tal forma que el superespacio es una extensión graduada del espacio-tiempo. Cualquier elemento del superespacio lo podemos representar como:

$$z^M = (x^m, \theta^\mu, \bar{\theta}_{\dot{\mu}}) \quad \ldots(1.1)$$

Notemos que la letra mayúscula M representa los índices cuadrivectoriales m así como los índices espinoriales μ y $\dot{\mu}$. Los índices M, m, y μ son índices superiores y $\dot{\mu}$ es un índice inferior.

Los elementos del superespacio obedecen la siguiente ley de multiplicación

$$z^M z^M = (-)^{nm} z^N z^M \quad \ldots(1.2)$$

En donde n esta en función de N y m esta en función de M, y toman los valores cero o uno dependiendo si N y M son índices vectoriales o espinoriales.

Ahora introduciremos las formas diferenciales en el superespacio, generalizando los resultados del capítulo uno. Empecemos definiendo las cero-formas, como las funciones de la variable del superespacio z^M:

$$F(z^M) \quad \ldots(1.3)$$

Las uno-formas en el superespacio se definen de la siguiente forma:

$$\Gamma = dz^M w_M(z) = dx^m w_m(z) + d\theta^\mu w_\mu(z) + d\bar{\theta}_{\dot{\mu}} \bar{w}^{\dot{\mu}}(z) \quad \ldots(1.4)$$

Una vez definidas las 1-formas podemos definir el producto exterior en el superespacio en analogía con el espacio ordinario

$$dz^M \wedge dz^N = -(-)^{nm} dz^N \wedge dz^M$$

$$dz^M z^N = (-)^{nm} z^N dz^M \quad \ldots(1.5)$$

Con esta definición podemos extender el concepto de p-formas, al superespacio de la siguiente manera:

$$\Omega = dz^{M_1} \wedge \cdots \wedge dz^{M_p} w_{M_p \cdots M_1}(z) \quad \ldots(1.6)$$

Notemos que las diferenciales del superespacio son escritas a la izquierda de la función $w_{M_p \cdots M_1}(z)$ y los índices son tales que hay siempre un número par de ellos. Ademas utilizamos la notación de Einstein, es decir índices repetidos significan una suma.

Debemos poner atención en el hecho que la definición (1.5) nos lleva, a que las funciones que aparecen como coeficientes de las diferenciales tengan simetría mezclada. Entonces en contraste al caso usual, no existe valor de p arriba del cual todas las formas se anulen.

Nosotros supondremos que las funciones coeficiente con un número impar de índices espinoriales son fermiónicas en caracter, y aquellas con un número par de índices espinoriales son bosónicas. Estas asignaciones reproducen las reglas familiares para la multiplicación de formas.

$$(c_1\Gamma_1+c_2\Gamma_2)\wedge\Omega = c_1\Gamma_1\wedge\Omega + c_2\Gamma_2\wedge\Omega$$

$$\Gamma\wedge\Omega = (-)^{pq}\Omega\wedge\Gamma \qquad \ldots(1.7)$$

$$\Gamma\wedge(\Omega\wedge\Phi) = (\Gamma\wedge\Omega)\wedge\Phi$$

Aquí hemos supuesto que Γ es una p-forma y Ω una q-forma.

Habiendo introducido las formas diferenciales en el superespacio, podemos también introducir la derivada exterior. La derivada exterior mapea 0-formas en 1-formas

$$dF = dz^M\partial/\partial z^M F(z) = dz^M\partial_M F(z) \qquad \ldots(1.8)$$

y p-formas en (p+1)-formas,

$$d\Omega = dz^{M_1}\wedge\cdots\wedge dz^{M_p}\wedge dz^N\partial/\partial z^N w_{M_p\cdots M_1}(z) \qquad \ldots(1.9)$$

En general la derivada exterior cumple con las siguientes propiedades:

$$d(\Omega+\Sigma) = d\Omega + d\Sigma$$
$$d(\Omega\wedge\Sigma) = \Omega\wedge d\Sigma + (-)^q d\Omega\wedge\Sigma \qquad \ldots(1.10)$$
$$dd = 0$$

Las demostraciones de éstas propiedades no son difíciles, como ejemplo verifiquemos la última propiedad;

$$\begin{aligned} dd &= dz^N\wedge dz^L\partial_L\partial_N = dz^L\wedge dz^N\partial_N\partial_L \\ &= -(-)^{ln}(-)^{ln}dz^N\wedge dz^L\partial_L\partial_N \\ &= -dz^N\wedge dz^L\partial_L\partial_N = 0 \qquad \text{QED.} \end{aligned}$$

En las ecuaciones (1.10) hemos supuesto que, Σ es una q-forma y Ω una p-forma.

Las ecuaciones escritas en términos de formas diferenciales y de derivadas exteriores son covariantes bajo cambios de coordenadas. Para ver ésto, supongamos que Y y z representan dos conjuntos de coordenadas del superespacio

$$Y^M = Y^M(z) \qquad \ldots(1.11)$$

Las funciones de Y tienen un mapeo natural en funciones de z

$$F(Y) = F(Y(z)) = \Phi{*}F(z) \qquad \ldots(1.12)$$

Si establecemos que las coordenadas Y y z marcan el mismo punto en el superespacio, la definición de $\Phi{*}F(z)$ en (1.12) garantiza que una cierta cantidad toma el mismo valor en el mismo punto, independientemente de las coordenadas que se utilizen. De una manera similar, $\Phi{*}$ induce mapeos entre p-formas en los dos sistemas coordenados:

$$\begin{aligned} \Omega(Y) &= dY^{M_1}\wedge\cdots\wedge dY^{M_p}\,W_{M_p\cdots M_1}(Y) \\ &= dz^{N_1}\partial Y^{M_1}/\partial z^{N_1}\wedge\cdots\wedge dz^{N_p}\partial Y^{M_p}/\partial z^{N_p}\,W_{M_p\cdots M_1}(Y(z)) \\ &= dz^{N_1}\wedge\cdots\wedge dz^{N_p}\Phi{*}W_{N_p\cdots N_1}(Y(z)) = \Phi{*}\Omega(Z) \qquad \ldots(1.13) \end{aligned}$$

El mapeo $\phi*$ posee las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \phi*(\Omega+\Sigma) &= \phi*\Omega + \phi*\Sigma \\ \phi*(\Omega\wedge\Sigma) &= (\phi*\Omega)\wedge(\phi*\Sigma) \qquad \ldots(1.14) \\ d(\phi*\Omega) &= \phi*(d\Omega) \end{aligned}$$

Estas propiedades hacen un formalismo basado sobre formas diferenciales y derivada exterior automáticamente covariante bajo cambio de coordenadas.

Las teorías de norma no son sólo covariantes bajo transformaciones de coordenadas, también son covariantes bajo un grupo de estructura local. Este es un grupo de Lie, compacto para teorías de norma de Yang-Mills y el grupo de Lorentz para teorías de gravedad.

En general las formas diferenciales expanden una representación de este grupo:

$$\begin{aligned} \Omega'^{a} &= \Omega^{b}\, X_{b}{}^{a}(z) \\ \Omega' &= \Omega X \qquad \ldots(1.15) \end{aligned}$$

El índice a corre de 1 a L, siendo L la dimensión de la representación X del grupo.

A los objetos que se transforman linealmente bajo una representación del grupo de estructura los llamaremos tensores. Debemos notar que la derivada exterior no mapea tensores en tensores:

$$d\Omega' = \Omega dX + d\Omega X. \qquad \ldots(1.16)$$

Por tanto debemos de introducir una conexión que compense la parte inhomogenea ΩdX. Las conexiones son 1-formas valuadas en el álgebra de lie

$$\varphi = dz^{N}\, \varphi_{M}{}^{r}(z) iT^{r} \qquad \ldots(1.17)$$

la cual posee la siguiente ley de transformación:

$$\varphi' = X^{-1}\varphi X - X^{-1}dX. \qquad \ldots(1.18)$$

En la ecuación (1.17), las matrices T son los generadores Hermiteanos del grupo de estructura, y r es un índice que corre sobre la dimensión del álgebra.

Las conexiones nos permiten definir derivadas covariantes D, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\Omega &= d\Omega + \Omega\wedge\varphi = dz^{N}\mathbb{D}_{N}\Omega \\ &= dz^{M_1}\wedge\cdots\wedge dz^{M_p}\wedge dz^{N}\partial_{N}W_{M_p\cdots M_1}(z) \\ &\quad + dz^{M_1}\wedge\cdots\wedge dz^{M_p}\wedge dz^{N}\varphi_{N}{}^{r}W_{M_p\cdots M_1}(z)iT^{r} \qquad \ldots(1.19) \end{aligned}$$

Siendo Ω una p-forma, la derivada covariante mapea p-formas en (p+1)-formas y tensores en tensores:

$$\begin{aligned} D\Omega' &= d\Omega' + \Omega'\wedge\varphi' \\ &= \Omega\wedge dX + d\Omega X + \Omega X\wedge(X^{-1}\varphi X - X^{-1}dX) \\ &= (d\Omega + \Omega\wedge\varphi)X = (D\Omega)X. \qquad \ldots(1.20) \end{aligned}$$

A partir de la conexión y de sus derivadas podemos construir un tensor, llamado el tensor de curvatura, y esta dado por la derivada covariante de la conexión:

$$R = \mathbb{D}\varphi = d\varphi + \varphi\wedge\varphi \quad \ldots(1.21)$$

El tensor de curvatura R, es una 2-forma valuada en el álgebra de Lie

$$R = 1/2\ dz^M \wedge dz^N R_{NM}(z)$$
$$R_{NM}(z) = R_{NM}{}^r(z) iT^r. \quad \ldots(1.22)$$

La ley de transformación para el tensor de curvatura R esta dada por:

$$R' = X^{-1}RX \quad \ldots(1.23)$$

El tensor de curvatura y la derivada covariante de un tensor, son en general, las únicas cantidades tensoriales que podemos construir tomando derivadas. Si tomamos derivadas más altas no obtenemos nuevos tensores sino identidades, debido al hecho que dd=0, estas identidades son llamadas identidades de Bianchi.

Se llama identidad de Bianchi del primer tipo a la derivada exterior de la derivada covariante:

$$\begin{aligned} d\mathbb{D}\Omega &= \Omega d\varphi - d\Omega\varphi \\ &= \Omega(R-\varphi\varphi) - (\mathbb{D}\Omega-\Omega\varphi)\varphi \\ &= \Omega R - \mathbb{D}\Omega\varphi \quad \ldots(1.24) \end{aligned}$$

que debido a la definición de derivada covariante podemos escribir como:

$$\mathbb{D}\mathbb{D}\Omega = \Omega R$$
$$dz^M dz^N \mathbb{D}_N \mathbb{D}_M \Omega = 1/2\ dz^M dz^N R_{NM}{}^r \Omega i T^r. \quad \ldots(1.25)$$

Debemos notar que en las últimas ecuaciones no aparece explicitamente el simbolo de producto exterior. Donde se ha eliminado por conveniencia debido a que la única manera que conocemos de multiplicar formas diferenciales es a través del producto exterior y por tanto su eliminación no resulta ambigua.

Las identidades de Bianchi del segundo tipo se encuentran tomando la derivada exterior de la curvatura:

$$\begin{aligned} dR &= \varphi d\varphi - d\varphi\varphi \\ &= \varphi(R-\varphi\varphi) - (R-\varphi\varphi)\varphi \\ &= \varphi R - R\varphi \quad \ldots(1.26) \end{aligned}$$

lo cual podemos escribir de la siguiente forma

$$\mathbb{D}R = 0 \quad \ldots(1.27)$$

Debido a que la curvatura es un tensor de segundo orden en los índices del grupo.

La identidad (1.27) se puede escribir en términos de las funciones coeficiente R_{NM} como:

$$dz^M dz^N dz^L D_L R_{NM} = 0 \quad \ldots(1.28)$$

Sumando la última expresión sobre todos los índices y usando las propiedades de antisimetria de la curvatura, $R_{NM}=-(-)^{mn}R_{MN}$ obtenemos:

$$\mathbb{D}_L R_{NM} + (-)^{l(n+m)} \mathbb{D}_N R_{ML} + (-)^{m(n+l)} \mathbb{D}_M R_{LN} = 0 \quad \ldots (1.29)$$

Que nos recuerda la conocida identidad cíclica de la curvatura en gravitación, la ecuación (1.29) es la generalización de dicha identidad al superespacio.

Las formas diferenciales, como ya lo mencionamos en el capítulo uno, son tan importantes como los tensores, pero el gran interés para nosotros es que; las formas diferenciales son invariantes bajo transformaciones de coordenadas. Si realizamos un cambio de coordenadas como un desplazamiento, una rotación, etc. las formas no cambian, y por tanto, si podemos construir algunos objetos a partir de las formas difernecíales, estos objetos son automaticamente invariantes.

Esto es de gran importancia para la física, pues si escribimos las leyes de la física en terminos de formas diferenciales, la invariancia de las formas refleja el principio de relatividad, "Las leyes de la física son las mismas en todas partes".

Otro aspeco importante de las formas diferenciales es que estas expanden una representacion de algún álgebra de un grupo de Lie, esto nos permite hacer contacto con las simetrías internas del sistema, que pudiéramos describir con las formas diferenciales.

Las formas diferenciales también nos permiten conocer la eswtructura geométrica del superespacio. Debido a que las formas expanden una representación de un álgebra de Lie, la derivada exterior ya no mapea tensores en tensores, es decir aparece un nuevo término inhomogeneo (ec(1.16)), para compensar este nuevo término se introduce una conexion, que es una 1-forma, y una nueva derivada covariante. Pues bien la derivada covariante de la conexión es una 2-forma llamada la curvatura.

Toda esta herramienta será utilizada en el siguiente capítulo para construir una lagrangiana de Yang-Mills supersimétrica.

CAPITULO V

1.-Teorías de Norma.

En el capítulo anterior introdujimos las formas diferenciales en el superespacio, y utilizamos las diferenciales del superespacio dz^M, como una base natural para las formas. Sin embargo podemos utilizar cualquier otra base,

$$dz^M E_M{}^A(z). \qquad \ldots(1.1)$$

$E_M{}^A(z)$ es una función invertible del superespacio, llamada el vielbein

$$E_M{}^A(z)E_A{}^N(z) = \delta_M{}^N$$
$$E_A{}^N(z)E_N{}^B(z) = \delta_A{}^B \qquad \ldots(1.2)$$

debemos de entender que la delta de Croneker está dada por:

$$\delta_M{}^N = \begin{pmatrix} \delta_m{}^n & 0 & 0 \\ 0 & \delta_\mu{}^\nu & 0 \\ 0 & 0 & \delta^{\dot\mu}{}_{\dot\nu} \end{pmatrix} \ldots(1.3)$$

La base dz no nos es útil porque la derivada exterior $dz^M\partial_M$ no mapea supercampos en supercampos. Esto es debido a que el operador diferencial $\partial/\partial z$ no conmuta con los generadores de supersimetría.

Una base más conveniente está determinada por las derivadas invariantes de supersimetría

$$D_a = \partial/\partial x^a$$
$$D_\alpha = \partial/\partial\theta^\alpha + i\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m\bar\theta^{\dot\alpha}\partial/\partial x^m \qquad \ldots(1.4)$$
$$\bar D^{\dot\alpha} = \partial/\partial\bar\theta_{\dot\alpha} + i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^m\epsilon^{\dot\beta\dot\alpha}\partial/\partial x^m$$

Estos operadores diferenciales conmutan con los generadores de supersimetría

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = \{D_\alpha, \bar Q^{\dot\beta}\} = \{\bar D^{\dot\alpha}, Q_\beta\} = \{\bar D^{\dot\alpha}, \bar Q^{\dot\beta}\} = 0 \qquad \ldots(1.5)$$

y además mapean supercampos en supercampos.

La derivada exterior puede ser escrita en términos de los operadores diferenciales (1.4) si introducimos una nueba base

$$e^A(z) = dz^M e_M{}^A(z) \qquad \ldots(1.6)$$

de tal manera que

$$dz^M\partial/\partial z^M = e^A D_A = dz^M e_M{}^A e_A{}^N\partial/\partial z^N \quad \ldots(1.7)$$

en donde $$D_A = e_A{}^N\partial/\partial z^N \qquad \ldots(1.8)$$

Los elementos de matriz de $e_A{}^M$ se obtienen directamente de las ecuaciones (1.4):

$$e_A{}^M = \begin{pmatrix} \delta_a{}^m & 0 & 0 \\ i\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m\bar\theta^{\dot\alpha} & \delta_\alpha{}^\mu & 0 \\ i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^m\epsilon^{\dot\beta\dot\alpha} & 0 & \delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\mu} \end{pmatrix} \ldots(1.9)$$

La inversa de $e_a{}^M$ esta dada por

$$e_M{}^A = \begin{pmatrix} \delta_m{}^a & 0 & 0 \\ -i\sigma_{\mu\dot{\mu}}{}^a\bar{\theta}^{\dot{\mu}} & \delta_\mu{}^\alpha & 0 \\ -i\theta^\tau\sigma_{\tau\dot{\nu}}{}^a\epsilon^{\dot{\nu}\dot{\mu}} & 0 & \delta^{\dot{\mu}}{}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad \ldots(1.10)$$

Las matrices (1.9) y (1.10) definen al espacio supersimétrico plano. Observemos que las derivadas exteriores de la nueva base no se anulan

$$de^A = dz^M dz^N \partial/\partial z^N e_M{}^A(z)$$

$$de^a = -2ie^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^a e^{\dot{\alpha}} \quad \ldots(1.11)$$

$$de^\alpha = de_{\dot{\alpha}} = 0$$

Para tratar con teorías de norma, debemos de introducir una conexión φ. Como vimos en el capítulo anterior la conexión es una 1-forma valuada en un álgebra de Lie

$$\varphi = dz^M\varphi_M = e^A\varphi_A$$

$$\varphi_A = \varphi_A{}^r iT^r \quad \ldots(1.12)$$

para hacer contacto con las teorías de norma ordinarias, debemos de demandar que,

$$\varphi_m{}^r|_{\theta=\bar{\theta}=0} = v_m{}^r \quad \ldots(1.13)$$

cuando el superespacio se reduce al espacio convencional, el campo $\varphi_m{}^r$ se reduce al campo vectorial de Yang-Mills v_m.
La curvatura (2-forma) se define como en la ecuación (1.21) del capítulo cuatro, en ambas bases es:

$$R = d\varphi + \varphi\varphi = 1/2\ dz^M dz^N R_{NM} = 1/2\ e^A e^B R_{BA} \quad \ldots(1.14)$$

En el superespacio plano, la curvatura tiene la siguiente forma:

$$R = e^A e^B d_B\varphi_A + de^A\varphi_A + e^A\varphi_A e^B\varphi_B)$$

$$= de^A\varphi_A + 1/2\ e^A e^B[D_B\varphi_A - (-)^{ab}D_A\varphi_B - \varphi_B\varphi_A + (-)^{ab}\varphi_A\varphi_B] \quad \ldots(1.15)$$

La función coeficiente R_{BA} puede ser descompuesta en sus componentes covariantes de Lorentz; a partir de la ecuación (1.15) obtenemos:

$$R_{ba} = \partial_b\varphi_a - \partial_a\varphi_b - [\varphi_b, \varphi_a]$$

$$R_{b\alpha} = \partial_b\varphi_\alpha - D_\alpha\varphi_b - [\varphi_b, \varphi_\alpha]$$

$$R_{b\dot{\alpha}} = \partial_b\varphi_{\dot{\alpha}} - \bar{D}_{\dot{\alpha}}\varphi_b - [\varphi_b, \varphi_{\dot{\alpha}}]$$

$$R_{\beta\alpha} = D_\beta\varphi_\alpha + D_\alpha\varphi_\beta - \{\varphi_\beta, \varphi_\alpha\} \quad \ldots(1.16)$$

$$R_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} = \bar{D}_{\dot{\beta}}\varphi_{\dot{\alpha}} + \bar{D}_{\dot{\alpha}}\varphi_{\dot{\beta}} - \{\varphi_{\dot{\beta}}, \varphi_{\dot{\alpha}}\}$$

$$R_{\beta\dot{\alpha}} = D_\beta \varphi_{\dot{\alpha}} + \bar{D}_{\dot{\alpha}}\varphi_\beta - \{\varphi_\beta, \varphi_{\dot{\alpha}}\} + 2i\sigma_{\beta\dot{\alpha}}{}^a \varphi_a$$

Debemos notar que las componentes de la curvatura se reducen al tensor de Yang-Mills cuando hacemos las coordenadas θ y $\bar{\theta}$ del superespacio igual a cero, lo cual se puede apreciar de la primera ecuación del conjunto (1.16)

$$R_{ba}|_{\theta=\bar{\theta}=0} = v_{ba}{}^r i T^r \qquad \dots(1.17)$$

en donde $v_{ba}{}^r i T^r$ es el tensor de Yang-Mills.

Podemos también descomponer las identidades de Bianchi en sus componentes covariantes de Lorentz. Consideremos en particular la derivada covariante de la curvatura

$$\mathbb{D}R = 0 \qquad \dots(1.18)$$

$$\mathbb{D}R = 1/2\ e^A e^B e^C\ D_C R_{BA} + 1/2\ e^A de^B R_{BA} - 1/2\ de^A e^B R_{BA}$$

las componentes son:

1) $\mathbb{D}_c R_{ba} + \mathbb{D}_b R_{ac} + \mathbb{D}_a R_{cb} = 0$

2) $\mathbb{D}_\alpha R_{bc} + \mathbb{D}_b R_{c\alpha} + \mathbb{D}_c R_{\alpha b} = 0$

3) $\bar{\mathbb{D}}_{\dot{\alpha}} R_{bc} + \mathbb{D}_b R_{c\dot{\alpha}} + \mathbb{D}_c R_{\dot{\alpha} b} = 0$

4) $\mathbb{D}_c R_{\beta\alpha} + \mathbb{D}_\beta R_{\alpha c} - \mathbb{D}_\alpha R_{c\beta} = 0$

5) $\mathbb{D}_c R_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} + \bar{\mathbb{D}}_{\dot{\beta}} R_{\dot{\alpha} c} - \bar{\mathbb{D}}_{\dot{\alpha}} R_{c\dot{\beta}} = 0 \qquad \dots(1.19)$

6) $\mathbb{D}_c R_{\dot{\beta}\alpha} + \bar{\mathbb{D}}_{\dot{\beta}} R_{\alpha c} - \mathbb{D}_\alpha R_{c\dot{\beta}} + 2i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^a R_{ac} = 0$

7) $\mathbb{D}_\gamma R_{\beta\alpha} + \mathbb{D}_\beta R_{\alpha\gamma} + \mathbb{D}_\alpha R_{\gamma\beta} = 0$

8) $\bar{\mathbb{D}}_{\dot{\gamma}} R_{\beta\alpha} + \mathbb{D}_\beta R_{\alpha\dot{\gamma}} + \mathbb{D}_\alpha R_{\dot{\gamma}\beta} + 2i\sigma_{\alpha\dot{\gamma}}{}^a R_{a\beta} + 2i\sigma_{\beta\dot{\gamma}}{}^a R_{a\alpha} = 0$

9) $\mathbb{D}_\gamma R_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} + \bar{\mathbb{D}}_{\dot{\beta}} R_{\dot{\alpha}\gamma} + \bar{\mathbb{D}}_{\dot{\alpha}} R_{\gamma\dot{\beta}} + 2i\sigma_{\gamma\dot{\beta}}{}^a R_{a\dot{\alpha}} + 2i\sigma_{\gamma\dot{\alpha}}{}^a R_{a\dot{\beta}} = 0$

10) $\bar{\mathbb{D}}_{\dot{\gamma}} R_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} + \bar{\mathbb{D}}_{\dot{\beta}} R_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} + \bar{\mathbb{D}}_{\dot{\alpha}} R_{\dot{\gamma}\dot{\beta}} = 0$

Las derivadas que aparecen en las ecuaciones (1.19) son derivadas covariantes de norma.

Cada componente de la curvatura R representa un multiplete de supercampos, los cuales a su vez contienen un número determinado de campos. La mayoría de estos campos son superfluos y se deben de eliminar utilizando ecuaciones de constricción. Las ecuaciones de constricción deben de satisfacer ciertos requisitos, como ser covariantes de norma, covariantes de Lorentz, supersimétricas y además no deben de restringuir la dependencia en x de los campos.

Nosotros elegiremos las siguientes constricciones[1]:

$$R_{\alpha\beta} = R_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = R_{\alpha\dot{\beta}} = 0 \qquad \dots(1.20)$$

Analicemos las identidades de Bianchi sujetas a estas constricciones. Podemos observar que las identidades (7) y (10) en (1.19) se satisfacen inmediatamente, sin embargo la identidad (8) nos lleva a una nueva constricción en R:

1. Sohnius and West (18).

$$\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^{a}R_{a\beta} + \sigma_{\beta\dot{\beta}}{}^{a}R_{a\alpha} = 0 \quad \ldots(1.21)$$

El espín-vector $R_{a\alpha}$ posee componentes de espín-3/2 y 1/2, para encontrarlos multipliquemos $R_{a\alpha}$ por $\sigma_{\beta\dot{\beta}}{}^{a}$:

$$\sigma_{\beta\dot{\beta}}{}^{a}R_{a\alpha} \equiv R_{\beta\alpha\dot{\beta}} = 1/2\ R_{(\beta\alpha)\dot{\beta}} + 1/2\ R_{|\beta\alpha|\dot{\beta}} \quad \ldots(1.22)$$

en donde, $1/2\ R_{(\beta\alpha)\dot{\beta}} = 1/2\ |R_{\beta\alpha\dot{\beta}}+R_{\alpha\beta\dot{\beta}}|$ ...(1.23)
es la parte simetrica de $R_{\beta\alpha\dot{\beta}}$ y,
$1/2\ R_{|\beta\alpha|\dot{\beta}} = 1/2\ |R_{\beta\alpha\dot{\beta}}+R_{\alpha\beta\dot{\beta}}|$ ...(1.24)
es la parte antisimétrica de $R_{\beta\alpha\beta}$.

La parte simétrica de $R_{\beta\alpha\dot{\beta}}$ representa a la componente de espín-3/2 y la parte antisimétrica a la componente de espín-1/2. Por tanto de (1.23) tenemos que:

$$1/2\ R_{(\beta\alpha)\dot{\beta}} = 1/2\ |\sigma_{\beta\dot{\beta}}{}^{a}R_{a\alpha}+\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^{a}R_{a\beta}| \quad \ldots(1.25)$$

y entonces la constricción (1.21) nos dice que la componente de espín-3/2 de $R_{a\alpha}$ desaparece. Lo cual nos permite escribir al espin-vector $R_{a\alpha}$ en términos de un supercampo $\bar{W}^{\dot{h}}$ de la siguiente forma:

$$R_{a\alpha} = i\sigma_{a\alpha\dot{h}}\bar{W}^{\dot{h}} \quad \ldots(1.26)$$

de donde podemos despejar $\bar{W}^{\dot{h}}$ para obtener que;

$$\bar{W}^{\dot{h}} = 1/4\ \bar{\sigma}^{a\dot{h}\alpha}R_{a\alpha} \quad \ldots(1.27)$$

La identidad (9) nos da un resultado similar

$$R_{a\dot{\alpha}} = iW^{\beta}\sigma_{a\beta\dot{\alpha}}$$

$$W^{\alpha} = 1/4\ R_{a\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{a\dot{\alpha}\alpha} \quad \ldots(1.28)$$

Observemos que la identidad (6) nos permite expresar a R_{ab} en términos de los nuevos supercampos W y $\bar{W}$:

$$R_{ab} = 1/8\ \bar{\sigma}_{a}{}^{\dot{\beta}\alpha}(\bar{\mathbb{D}}_{\dot{\beta}}R_{b\alpha}+\mathbb{D}_{\alpha}R_{b\dot{\beta}})$$

$$= -1/8\ (\bar{\mathbb{D}}_{\dot{\beta}}\bar{\sigma}_{a}{}^{\dot{\beta}\alpha}\sigma_{b\alpha\dot{h}}\bar{W}^{\dot{h}}-\mathbb{D}_{\alpha}\sigma_{ah\dot{\beta}}\bar{\sigma}_{b}{}^{\dot{\beta}\alpha}W^{h}) \quad \ldots(1.29)$$

Aprovechando las propiedades de antisimetría de R_{ab}, podemos encontrar una nueva constricción sobre los supercampos W^{h}, $\bar{W}^{\dot{h}}$. Consideremos la siguiente suma

$$R_{ab} + R_{ba} = 0 \quad \ldots(1.30)$$

sustituyendo el resultado de la ecuación (1.29) encontramos que:

$$R_{ab} + R_{ba} = -1/8\ (\bar{\mathbb{D}}_{\dot{\beta}}\bar{\sigma}_{a}{}^{\dot{\beta}\alpha}\sigma_{b\alpha\dot{h}}\bar{W}^{\dot{h}}-\mathbb{D}_{\alpha}\sigma_{ah\dot{\beta}}\bar{\sigma}_{b}{}^{\dot{\beta}\alpha}W^{h}+$$

$$+\bar{\mathbb{D}}_{\dot{\beta}}\bar{\sigma}_{b}{}^{\dot{\beta}\alpha}\sigma_{a\alpha\dot{h}}\bar{W}^{\dot{h}}-\mathbb{D}_{\alpha}\sigma_{bh\dot{\beta}}\bar{\sigma}_{a}{}^{\dot{\beta}\alpha}W^{h}) = 0 \quad \ldots(1.31)$$

de donde obtenemos

$$\bar{\mathbb{D}}_{\dot{\beta}}(\bar{\sigma}_{a}{}^{\dot{\beta}\alpha}\sigma_{b\alpha\dot{h}}+\bar{\sigma}_{b}{}^{\dot{\beta}\alpha}\sigma_{a\alpha\dot{h}})\bar{W}^{\dot{h}}-$$

$$-\mathbb{D}_{\alpha}(\sigma_{bh\dot{\beta}}\bar{\sigma}_{b}{}^{\dot{\beta}\alpha}+\sigma_{bh\dot{\beta}}\bar{\sigma}_{a}{}^{\dot{\beta}\alpha})W^{h} = 0 \quad \ldots(1.32)$$

utilizando las siguientes propiedades de las matrices σ

$$(\bar{\sigma}_m\sigma_n+\bar{\sigma}_n\sigma_m)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = -2\eta_{mn}\delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}$$

$$(\sigma_m\bar{\sigma}_n+\sigma_n\bar{\sigma}_m)_{\alpha}{}^{\beta} = -2\eta_{mn}\delta_{\alpha}{}^{\beta} \quad \ldots(1.33)$$

la identidad (1.32) se reduce a:

$$\bar{\mathbb{D}}_{\dot{\beta}}(-2\eta_{ab}\delta^{\dot{\beta}}{}_{\dot{h}})\bar{W}^{\dot{h}} - \mathbb{D}_{\alpha}(-2\eta_{ab}\delta_{h}{}^{\alpha})W^{h} = 0$$

$$-2\eta_{ab}(\bar{\mathbb{D}}_{\dot{\beta}}\bar{W}^{\dot{\beta}}-D_{\alpha}W^{\alpha}) = 0 \quad \ldots(1.34)$$

es decir, la constricción sobre los supercampos W^{h} y $\bar{W}^{\dot{h}}$ es:

$$\bar{\mathbb{D}}_{\dot{h}}\bar{W}^{\dot{h}} = D_{h}W^{h} \quad \ldots(1.35)$$

Podemos aprovechar aún más las identidades (1.19) para obtener nuevas constricciones sobre los supercampos W y $\bar{W}$. Por ejemplo la identidad (5) nos lleva a:

$$\bar{\mathbb{D}}_{\dot{\beta}}R_{\dot{\alpha}c} - \bar{\mathbb{D}}_{\dot{\alpha}}R_{c\dot{\beta}} = 0$$

$$-\bar{\mathbb{D}}_{\dot{\beta}}R_{c\dot{\alpha}} - \bar{\mathbb{D}}_{\dot{\alpha}}R_{c\dot{\beta}} = 0$$

$$-i(\sigma_{c\beta\dot{\alpha}}\bar{\mathbb{D}}_{\dot{\beta}}+\sigma_{c\beta\dot{\beta}}\bar{\mathbb{D}}_{\dot{\alpha}})W^{\beta} = 0 \quad \ldots(1.36)$$

contrayendo ésta última ecuación con $\bar{\sigma}^{c\dot{\sigma}\sigma}$ obtenemos

$$-i(\bar{\sigma}^{c\dot{\sigma}\sigma}\sigma_{c\beta\dot{\alpha}}\bar{\mathbb{D}}_{\dot{\beta}}+\bar{\sigma}^{c\dot{\sigma}\sigma}\sigma_{c\beta\dot{\beta}}\bar{\mathbb{D}}_{\dot{\alpha}})W^{\beta} = 0$$

$$4i(\delta^{\dot{\sigma}}{}_{\dot{\alpha}}\bar{\mathbb{D}}_{\dot{\beta}}+\delta^{\dot{\sigma}}{}_{\dot{\beta}}\bar{\mathbb{D}}_{\dot{\alpha}})W^{\beta} = 0 \quad \ldots(1.37)$$

haciendo $\dot{\alpha}=\dot{\sigma}$, la ecuación (1.37) se reduce a:

$$\bar{\mathbb{D}}_{\dot{\beta}}W^{\beta} = 0\,. \quad \ldots(1.38)$$

Ahora consideremos la identidad (4) de (1.19) tenemos que:

$$-\mathbb{D}_{\beta}R_{c\alpha} - \mathbb{D}_{\alpha}R_{c\beta} = 0$$

$$-i(\sigma_{c\alpha\dot{h}}\mathbb{D}_{\beta}+\sigma_{c\beta\dot{h}}\mathbb{D}_{\alpha})\bar{W}^{\dot{h}} = 0 \quad \ldots(1.39)$$

que como en el caso anterior, contrayendo la ecuación (1.39) con $\bar{\sigma}^{c\dot{\sigma}\sigma}$ ésta toma la siguiente forma

$$\mathbb{D}_{\beta}\bar{W}^{\dot{h}} = 0 \quad \ldots(1.40)$$

Lo que hemos encontrado hasta este momento es que las identidades de Bianchi se pueden satisfacer por dos supercampos W^{α} y $\bar{W}^{\dot{\alpha}}$ y que la información dinámica contenida en la curvatura se encuentra también en los mismos supercampos.

A partir de las componentes de la curvatura podemos construir una acción, que es invariante de Lorentz, invariante de norma y supersimétrica. Para hacer esto consideremos sólo las componentes $R_{a\alpha}$ y $R_{a\dot{\alpha}}$, recordemos que se impuso la constricción que $R_{\alpha\beta}$, $R_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ y $R_{\alpha\dot{\beta}}$ sean nulas, además la identidad (6) de (1.19) nos permite expresar a la componente R_{ab} en términos de las componentes $R_{a\alpha}$ y

$R_{a\dot{\alpha}}$.

Elevemos los índices de la componente $R_{a\alpha}$;

$$R^{a\alpha} = \eta^{ab}\epsilon^{\alpha\beta}R_{b\beta}$$
$$= i\eta^{ab}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma_{b\beta\dot{h}}\bar{W}^{\dot{h}} \qquad \ldots(1.41)$$

Utilizando los siguientes resultados

$$\epsilon^{\dot{h}\dot{\lambda}}\epsilon_{\dot{\lambda}\dot{\xi}} = \delta^{\dot{h}}{}_{\dot{\xi}}$$
$$\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta}\sigma^{m}{}_{\beta\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \qquad \ldots(1.42)$$

la ecuación (1.41) toma la siguiente forma:

$$R^{a\alpha} = i\eta^{ab}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma_{b\beta\dot{h}}\epsilon^{\dot{h}\dot{\lambda}}\epsilon_{\dot{\lambda}\dot{\xi}}\bar{W}^{\dot{\xi}} = i\bar{\sigma}^{a\dot{\lambda}\alpha}\bar{W}_{\dot{\lambda}} \qquad \ldots(1.43)$$

Realicemos la misma operación con la componente $R_{a\dot{\alpha}}$;

$$R^{a\dot{\alpha}} = \eta^{ab}R_{b\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} = i\eta^{ab}W^{h}\sigma_{bh\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\alpha} \qquad \ldots(1.44)$$

utilizando las siguientes igualdades;

$$\epsilon_{\lambda\gamma}\epsilon^{\gamma h} = \delta_{\lambda h}$$
$$\bar{\sigma}_{b}{}^{\dot{\alpha}\gamma} = \epsilon^{\gamma h}\sigma_{bh\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \qquad \ldots(1.45)$$

la ecuación (1.44) adquiere la siguiente forma

$$R^{a\dot{\alpha}} = i\eta^{ab}W^{\lambda}\epsilon_{\lambda\gamma}\epsilon^{\gamma h}\sigma_{bh\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} = iW_{\gamma}\bar{\sigma}^{a\dot{\alpha}\gamma} \qquad \ldots(1.46)$$

Con las componentes $R_{a\alpha}$ y $R_{a\dot{\alpha}}$ podemos construir una cantidad escalar que nos sirva como una densidad lagrangiana. Esto se logra contrayendo $R^{a\alpha}$ con $R_{a\alpha}$ y $R^{a\dot{\alpha}}$ con $R_{a\dot{\alpha}}$ y sumando ambas contracciones.

Proponemos como acción la siguiente expresión:

$$\frac{\mathrm{Tr}}{16K}\int R_{a\mathring{A}}R^{a\mathring{A}}\,|_{\theta\theta,\bar{\theta}\bar{\theta}}d^4x \qquad \ldots(1.47)$$

en donde el índice $\mathring{A}$ corre sobre los valores α y $\dot{\alpha}$, el simbolo $|_{\theta\theta,\bar{\theta}\bar{\theta}}$ quiere decir que se consideren sólo las componentes $\theta\theta$ de $R_{a\dot{\alpha}}R^{a\dot{\alpha}}$ y sólo las componentes $\bar{\theta}\bar{\theta}$ de $R_{a\alpha}R^{a\alpha}$. La traza se debe tomar sobre los índices del grupo de estructura. Recordemos de la ecuación (1.12) que la conexión φ, es una 1-forma valuada en un álgebra de Lie, cuyos generadores los representamos por T^{r}, los cuales son Hermiteanos y obedecen la siguiente normalización, en la representación adjunta

$$\mathrm{Tr}T^{a}T^{b} = K\delta^{ab},\ \text{con K mayor que cero.} \qquad \ldots(1.48)$$

Desarrollando la acción (1.47) tenemos:

$$\frac{\mathrm{Tr}}{16K}\int R_{a\mathring{A}}R^{a\mathring{A}}|_{\theta\theta,\bar{\theta}\bar{\theta}}d^4x = \frac{\mathrm{Tr}}{16K}\int (R_{a\alpha}R^{a\alpha}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}} + R_{a\dot{\alpha}}R^{a\dot{\alpha}}|_{\theta\theta})d^4x$$

$$= \frac{\mathrm{Tr}}{4K}\int(\bar{W}^{\dot{n}}\bar{W}_{\dot{n}}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}+W^{n}W_{n}|_{\theta\theta})d^{4}x \quad \ldots(1.49)$$

notemos que en las contracciones de las componentes de la curvatura $R_{a\alpha}$ y $R_{a\dot{\alpha}}$,

$$R_{a\dot{\alpha}}R^{a\dot{\alpha}} = -W^{n}W_{n}\sigma_{an\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{a\dot{\alpha}n}$$

$$R_{a\alpha}R^{a\alpha} = -\sigma_{a\alpha\dot{n}}\bar{\sigma}^{a\dot{n}\alpha}\bar{W}^{\dot{n}}\bar{W}_{\dot{n}} \quad \ldots(1.50)$$

aparece el producto de las matrices σ_a y σ^a el cual es igual a; $\sigma_a\sigma^a=-4I_2$.

Resumiendo, hemos encontrado que la información dinámica de la curvatura R se encuentra en los supercampos W y $\bar{W}$ los cuales obedecen las constricciones (1.35), (1.38) y (1.40)

$$\bar{\mathbb{D}}_{\dot{n}}\bar{W}^{\dot{n}} - \mathbb{D}_{n}W^{n} = 0 \quad \ldots(1.35)$$

$$\bar{\mathbb{D}}_{\dot{\beta}}W^{\beta} = 0 \quad \ldots(1.38)$$

$$\mathbb{D}_{\beta}\bar{W}^{\dot{n}} = 0 \quad \ldots(1.40)$$

La restricción (1.35) es el análogo de la identidad de Jacobi del caso electromagnético, (1.38) y (1.40) definen a W y W como supercampos quirales.

En este capítulo observamos los siguientes hechos. No existe una base única ppara las formas diferenciales, pero hay una base apropiada para la supersimería (ec.(1.4)), pues los operadores diferenciales asociados a esta base conmutan con los generadores de supersimetría.

La derivad exterior del vielbein e^a es una 2-forma llamada torsión, y observamos (ec.(1.11)) que la torsión del superespacio no es cero.

En esta nueva base se puede introducir también una conexión, y a partir de ésta encontrar la curvatura. Si revisamos las componentes de la curvatura encontraremos que éstas son en mucho semejantes a los tensores antisimétricos que definen a los campos de fuerza de Yang-Mills, sólo que contienen componentes en exceso es decir no necesarios.

Las identidades de Bianchi exigen que se cumplan ciertas constricciones sobre las componentes de la curvatura. Estas constricciones aunadas con otras , que se imponen por conveniencia (ec.(1.20)), nos permiten eliminar algunos supercampos que no son necesarios. Y a partir de sólo dos componentes $R_{a\alpha}$ y $R_{a\dot{\alpha}}$ podemos construir una lagrangiana que es invariante de norma y globalmente supersimétrica de un campo de Yang-Mills, el cual depende del álgebra de Lie que expanden las formas diferenciales.

El construir una lagrangiana de Yang-Mills supersimétrica es muy importante, pues todas las interacciones se pueden describir através de teorías de norma. Si la supersimetría es una simetría fundamental de la naturaleza, el poseer una lagrangiana de Yang-Mills supersimétrica nos permite enlazar la supersimetría con otras simetrías internas también fundamentales.

CAPITULO VI

1.-Supercampos Escalares y Vectoriales

Los supercampos escalares se definen por la siguiente condición:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \quad ...(1.1)$$

Esta constricción se puede resolver , con facilidad , en términos de las coordenadas $y^m=x^m+i\theta\sigma^m\bar{\theta}$ y θ, porque la derivada con respecto a $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ de estas variables se anula:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}(x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}) = 0 \quad , \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta = 0 \quad ...(1.2)$$

Entonces cualquier función de y^m y θ^α satisface la condición (1.1). Elejiremos al campo escalar Φ como una función par, con la siguiente forma:

$$\Phi = A(y) + \sqrt{2}\,\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \quad ...(1.3)$$

Para cualquier función $\Gamma(y)$ de y^m podemos realizar una expansión en serie de Taylor:

$$\Gamma(y) = \Sigma_0^\infty 1/i!\ \partial_m{}^i\Gamma(y)|_{y_0}\Delta y^i \quad ...(1.4)$$

en nuestro caso particular $y^m=x^m+i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}=y_0{}^m+\Delta y^m$. De tal manera que el supercampo $\Phi(y)$ quedada expandido como:

$$\Phi = A(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A(x) + 1/4\ \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A(x) + \sqrt{2}\,\theta\psi(x) -$$

$$-i/\sqrt{2}\ \theta\theta\partial_m\psi(x)\sigma^m\bar{\theta} + \theta\theta F(x) \quad ...(1.5)$$

El supercampo Φ^+ satisface la condición $D_\alpha\Phi^+=0$. De la misma manera , que como el supercampo Φ, Φ^+ es una función natural de $y^{+m}=x^m-i\theta\sigma^m\bar{\theta}$ y $\bar{\theta}$. Y su expansión en serie de potencias se encuentra por conjugación de Φ.

$$\Phi^+ = A^*(y^+) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(y^+) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(Y^+)$$

$$= A^*(x) - i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A^*(x) + 1/4\ \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A^*(x) +$$

$$+\sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) + i/\sqrt{2}\ \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\psi}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(x) \quad ...(1.6)$$

Un supercampo vectorial se define como aquel que satisface la siguiente condición:

$$V = V^+ \quad ...(1.7)$$

El supercampo vectorial se puede expander en serie de potencias en θ y $\bar{\theta}$:

$$V(x,\theta,\bar{\theta}) = C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) + 1/2\ \theta\theta|M(x)+iN(x)| -$$

$$-1/2\ \theta\theta|M(x)-iN(x)| - \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + i\theta\theta\bar{\theta}|$$

$$|\bar{\lambda}(x)+1/2\ \bar{\sigma}^m\partial_m\chi(x)| - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta|\lambda(x)+1/2\ \sigma^m\partial_m\bar{\chi}(x)| +$$

$$+1/2\ \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}|D(x)+1/2\ \Box C(x)| \quad ...(1.8)$$

si los campos componentes C, D, M, N y v_m son reales, entonces la expansión (1.8) cumple con la condición (1.7).

La elección de la combinación, particular, de los coeficientes de las componentes de $\theta\theta\bar{\theta}$, $\bar{\theta}\bar{\theta}\theta$ y $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ de V, están determinadas por el campo hermiteano $\Phi+\Phi^+$:

$$\Phi+\Phi^+ = A + A^* + \sqrt{2}(\theta\psi+\bar{\theta}\bar{\psi}) + \theta\theta F + \bar{\theta}\bar{\theta}F^* + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m(A-A^*) +$$

$$+ 1/\sqrt{2}\ \theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^m\partial_m\psi + 1/\sqrt{2}\ \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\psi} + 1/4\ \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box(A+A^*) \quad \ldots(1.9)$$

Esta combinación contiene al gradiente $i\partial_m(A-A^*)$, como coeficiente de $\theta\sigma^m\bar{\theta}$, lo cual motiva a definir la siguiente generalización supersimétrica de una transformación de norma:

$$V \dashrightarrow V + \Phi + \Phi^+ \quad \ldots(1.10)$$

bajo esta transformación ocurren los siguientes cambios, en las funciones componentes del supercampo vectorial:

$$\begin{aligned} C &\text{---}\ C + A + A^* \\ \chi &\text{---}\ \chi - i\sqrt{2}\psi \\ M + iN &\text{---}\ M + iN - 2iF \\ v_m &\text{---}\ v_m - i\partial_m(A-A^*) \qquad \ldots(1.11) \\ \lambda &\text{---}\ \lambda \\ D &\text{---}\ D \end{aligned}$$

La elección de las componentes en la expansión (1.8) dejan a λ y D como invariantes de norma. Existe una norma especial, llamada la norma de Wess y Zumino (Norma wz), en la cual C, χ, M y N son cero. Esta norma rompe la supersimetría pero permite las transformaciones de norma usuales $v \dashrightarrow v_m+\partial_m a$.

Bajo esta norma V y sus potencias adquieren la siguiente forma:

$$V = -\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + 1/2\ \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x)$$

$$V^2 = -1/2\ \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}v_m v^m \quad \ldots(1.12)$$

$$V^3 = 0$$

2.-Lagrangiana de Yang-Mills Supersimétrica Utilizando Supercampos.

El supercampo vectorial V es la generalización supersimétrica del campo de Yang-Mills. Para construir el correspondiente campo de fuerza supersimétrico, observemos que λ_α y $\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}$ son las componentes invariantes de norma de menor dimensión en V. Ellos son también los campos componentes de menor dimensión en

$$W_\alpha = -1/4\ \bar{D}\bar{D}D_\alpha V$$

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} = -1/4\ DD\bar{D}_{\dot{\alpha}}V \quad \ldots(2.1)$$

Estos campos son quirales e invariantes de norma, la quiralidad se obtiene inmediatamente de las ecuaciones (2.1)

$$\bar{D}_{\dot{\beta}}W_\alpha = 0$$

$$D_\beta\bar{W}_{\dot{\alpha}} = 0 \quad \ldots(2.2)$$

debido al hecho que $D\Phi=\bar{D}\Phi^{+}=0$, se obtiene la invariancia de norma

$$W_\alpha \longrightarrow -1/4\ \bar{D}\bar{D}D_\alpha(V+\Phi+\Phi^{+}) = W_\alpha - 1/4\ \bar{D}\{D,D_\alpha\}\Phi = W_\alpha \quad \ldots(2.3)$$

En la norma de Wess y Zumino las componentes de W_α y $\bar{W}_{\dot\alpha}$ en las variables $y=x+i\theta\sigma\bar\theta$ o $y^{+}=x-i\theta\sigma\bar\theta$ son:

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -i\lambda_\alpha(y) + [\delta_\alpha{}^\beta D(y) - 1/2\ (\sigma^m\bar\sigma^n)_\alpha{}^\beta(\partial_m v_n(y) - \\ &\quad -\partial_n v_m(y))]\theta_\beta + \theta\theta\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m\partial_m\bar\lambda^{\dot\alpha}(y) \\ \bar{W}_{\dot\alpha} &= i\bar\lambda_{\dot\alpha}(y^{+}) + [\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}D(y^{+}) + i/2\ \epsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}(\bar\sigma^m\sigma^n)^{\dot\gamma}{}_{\dot\beta}(\\ &\quad (\partial_m v_n(y^{+}) - \partial_n v_m(y^{+}))]\bar\theta^{\dot\beta} - \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\theta\bar\theta\sigma^{m\dot\beta\alpha}\partial_m\lambda_\alpha(y^{+}) \end{aligned} \quad \ldots(2.4)$$

Los supercampos W_α y $\bar{W}_{\dot\alpha}$ contienen sólo los campos invariantes de norma D, λ_α, y $v_{mn}=\partial_m v_n-\partial_n v_m$.

Ademas ellos son quirales y satisfacen la ecuación de constricción

$$D^\alpha W_\alpha = \bar{D}_{\dot\alpha}\bar{W}^{\dot\alpha} \quad \ldots(2.5)$$

Debido a que W_α es quiral, las componentes $\theta\theta$ de $W^\alpha W_\alpha$,

$$\begin{aligned} W^\alpha W_\alpha = &-2i\lambda\sigma^m\partial_m\bar\lambda - 1/2\ v^{nm}v_{mn} + D^2 + \\ &+1/4\ v^{mn}v^{lk}\epsilon_{mnlk} \end{aligned} \quad \ldots(2.6)$$

se transforman en una derivada espacial y por tanto se pueden utilizar para construir la generalización de la lagrangiana supersimétrica para un campo vectorial libre.

$$L = 1/4\ (W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot\alpha}\bar{W}^{\dot\alpha}|_{\bar\theta\bar\theta}) \quad \ldots(2.7)$$

El campo de fuerza supersimétrico W^α puede ser generalizado a el caso no abeliano de la siguiente forma:

$$W_\alpha = -1/4\ \bar{D}\bar{D}e^{-V}D_\alpha e^{V}, \quad \ldots(2.8)$$

en donde los supercampos vectoriales V ahora son matrices dadas por:

$$V_{ij} = T_{ij}{}^a V_a, \quad \ldots(2.9)$$

las matrices T^a son los generadores hermiteanos del grupo de norma, que en la representación adjunta se pueden normalizar como sigue:

$$trT^aT^b = k\delta^{ab} \quad , k>0 \quad \ldots(2.10)$$

y las constantes de estructura t^{abc} :

$$[T^a,T^b] = it^{abc}T^c \quad \ldots(2.11)$$

son completamente antisimétricas.

En una teoría de norma no abeliana la lagrangiana del campo de Yang-Mills (2.7) se puede generalizar de la siguiente forma:

$$L = 1/4k\ tr(W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot\alpha}\bar{W}^{\dot\alpha}|_{\theta\theta}) \quad \ldots(2.12)$$

Esta es la lagrangiana deseada, que si la comparamos con la ecuación (1.49) del capítulo cinco, podemos darnos cuenta que es idéntica. Por lo tanto dos métodos diferentes nos permiten llegar al mismo resultado.

CONCLUSIONES

A lo largo de la tesis hemos aprendido nuevos aspectos de la física que no son cotidianos y sin embargo son importantes. Lo primero que debemos de recordar es que las formas diferenciales son tan importantes como los vectores y tensores, ellas contienen de una forma simple las identidades del análisis y cálculo vectorial, y que debido a su estructura son invariantes bajo transformaciones de coordenadas y por tanto nos permiten construir objetos que tambien son invariantes.

Existe un álgebra llamada de Grassmann que contiene elementos que conmutan y anticonmutan, esto es justo el comportamiento de los campos bosónicos y fermiónicos, por tanto el álgebra de Grassmann es una herramienta para tratar con estos campos. La mecánica formada con elementos de Grassmann describe, a nivel clásico, partículas con espín.

Las simetrías en teoría de campo son fundamentales, pues ellas nos permiten encontrar atraves del teorema de Noether cantidades que se conservan, y además cuando exigimos una invariancia local se introducen los campos de fuerza fundamentales. Y no sólo esto, las simetrías nos dan la pauta para lograr la unificación de las fuerzas fundamentales conocidas.

El superespacio y las formas diferenciales en el superespacio son una herramienta para tratar con teorías supersimétricas, no es la única alternativa, de hecho como se muestra en los capítulos cinco y seis, podemos llegar al mismo resultado partiendo de formas diferenciales o utilizando supercampos.

Las ecuaciones (1.49) del capítulo 5 y (2.12) del capítulo 6 nos muestran la misma lagrangiana invariante de norma e invariante de supersimetría global, la demostración de la invariancia es semejante a lo expuesto en el capítulo 3, estas lagrangianas fueron encontradas por dos caminos distintos, formas diferenciales en el superespacio y supercampos. El hecho de que ambos caminos coincidadn se debe a que están intimamente relacionados.

Si hacemos covariantes las derivadas supersimétricas, con respecto al grupo de Yang-Mills

$$\mathbb{D}_A = D_A - A_A T$$

en donde T son los generadores de Yang-Mills, los campos de fuerza son definidos por:

$$\{\mathbb{D}_A, \mathbb{D}_B\}_\pm = -T_{AB}{}^C \mathbb{D}_C - R_{AB} T$$

en donde $T_{AB}{}^C$ son cero excepto para $T_{\alpha\dot{\beta}}{}^m = 2i(\sigma^m)_{\alpha\dot{\beta}}$ y se sigue que:

$$R_{BC}T = D_B A_C T - D_C A_B T(-1)^{bc} - \{A_B T, A_C T\}_\pm + T_{BC}{}^D A_D T$$

El término final de esta expresión no tiene análogo y corresponde al hecho que en el superespacio la torsión no es nula, aún en el caso llano. Está última ecuación representa las componentes del tensor de curvatura. El supercampo A_B contiene muchos campos componentes, en particular contiene campos de espín mayor que uno. Una manera de atacar este problema es atraves de constricciones supersimétricas. Si pedimos la siguiente condición;

$\mathbb{D}_\alpha \Phi = 0$,(ecuación (1.1) del capítulo 6)

la cual es covariante de Yang-Mills y de la supersimetría. Está condición implica que:

$$\{\mathbb{D}_\alpha, \mathbb{D}_\beta\}\ \Phi = 0 = -R_{\alpha\beta}T\ \Phi$$

y por tanto $R_{\alpha\beta}=0$ (ecuación (1.20) del capítulo 5).

De la misma manera la condición $\mathbb{D}_{\dot\beta}\Phi=0$, implica que $R_{\dot\alpha\dot\beta}=0$ (ecuación (1.20) del capítulo 5). Estas condiciones esencialmente son las condiciones de quiralidad de los supercampos escalares.

Hay otro tipo de constricción que es necesario imponer para eliminar grados de libertad inecesarios.

Consideremos $R_{\alpha\dot\beta}$ la cual esta dada por:

$$R_{\alpha\dot\beta}T = D_\alpha A_{\dot\beta}T + D_{\dot\beta}A_\alpha T - \{A_\alpha T, A_{\dot\beta}T\} +$$
$$+ 2i(\sigma^c)^{\alpha\dot\beta}A_cT$$

debido a que $R_{\alpha\dot\beta}$ es un objeto covariante se sigue que $A_c-i/4\,(\sigma_c)^{\alpha\beta}R_{\alpha\dot\beta}$ tiene exactamente la misma propiedad de transformación como A_c. Consecuentemente puede ser usado como potencial de norma, haciendo la presencia de A_c redundante. Podemos solventar este problema haciendo $R_{\alpha\dot\beta}=0$, este tipo de constricción sólo es convencional, no como $R_{\alpha\beta}=R_{\dot\alpha\dot\beta}=0$, que son demandadas por algún principio, lo que permite formular a la teoría sin necesidad de campos inecesarios.

Todo ésto muestra la relación que existe entre ambos formalismos. La ventaja de utilizar formas diferenciales es que éstas son objetos covariantes, lo cual les da una potencía mayor en el sentido de que podemos construir con relativa facilidad objetos que también son invariantes.

Por otro lado en las teorías de norma con invariancía de supersimetría global es necesario incluir constricciones para eliminar campos de alto espín, estas constricciones deben de ser invariantes de norma y supersimétricas.

Supersimetría es una alternativa para unificar las fuerzas fundamentales, incluyendo la gravedad, cuando ésta se hace local. A la teoría que resulta por este procedimiento se le llama supergravedad. Existen otras alternativas para unificar las fuerzas y cuantizar la gravedad, tal como supercuerdas. Ambas teorías requieren de la supersimetría , por esto y por la belleza que encierra la transformación de bosones en fermiones y de fermiones en bosones, la simetría de partículas materiales y partículas mensajeras, es importante el estudio de la supersimetría.

Referencias.

1.-Flanders. Differential Forms. Academic Press, 1963.
2.-Bernard Schutz. Geometrical Methods of Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1980.
3.-Nathan Schleifer. Differential Forms as a Basis for Vector Analysis, with Applications to Electrodynamics. Am. J. Phys. 51(12). Dec. 1983.
4.-Reitz y Milford. Fundamentos de la Teoría Electromagnética. UTEHA, 1981.
5.-F. Cooper and B. Freedman. Aspects of Supersimmetric Quantum Mechanics. Annis of Physics, 146, (262-288), 1983.
6.-R. Casalbuoni. On the Quantizqtion of Systems with Anticommuting Variables. Il Nuovo Cimento, Vol. 33A, #1, 1° Maggio 1976.
7.-F. A. Berezin. The Method of Second Quantization. Academic Press, New York, 1966.
8.-R. Casalbuoni. The Classycal Mechanics of Bose-Fermi Systems. Il Nuovo Cimento, Vol. 33A, #3, 1° Giugno 1976.
9.-F. A. Berezin. Particle Spin Dynamics as the Grassmann Variant of Classical Mechanics. Annls of Physics, 104, (336-362), 1977.
10.-V. I. Ogievetskii and L. Mezincescu. Boson-Fermion Symmetries and Superfields. Sov. Phys. Usp. Vol. 18, #12, 1975.
11.-B. Zumino. Superespace. Unification of the Fundamental Particle Interactions, Ferrara, Ellis and Vand Niewenhuisen Editors, Ettore Majorana International Science Series Vol. 7, Plenum Press, New York, 1980.
12.-Freedman. Introduction to Supersimetry. ICTP Report: Spring School on Supersimetry, 1981.
13.-Wess and Bagger. Supersimetry and Supergravity. Princenton Series in Physics, 1983.
14.-Bogolubov, Logunov and Todorov. Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1975.
15.-Martin F. Sohnius. Identities for Bianchi-Identities. Superspace and Supergravity. Editors Rocek and Hawking, Canbridge University, 1980.
16.-Mathematical Aspects of Superspace. Edited by, Seifert. Clark and Rosenblum, NATO ASI Series, 1983.
17.-Dewitt. Supermanifolds. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1984.
18.-Sohnius and West. Supersimetric Yang-Mills Theories. Unification of the Fundamental Particle Interactions. Editors Ferrara, Ellis and Van Nieuwenhuiezen. Plenum Press, New York, 1980.
19.-Zumino. Supergravity and Superespace. Edited by Levy and Deser, Plenum Press, New York, 1980.
20.-Bleecker D.. Gauge Theory and Variatinal Principles. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1981.
21.-Aitchinson and Hey. Gauge Theories in Particle Physics. Adam Hilger LTD, Bristol, 1982.
22.-Van Nieuwenhuiezen. Supergravity. Physics Reports 68 (4), 1981.