



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"REQUISITOS DE GEOMETRIA PLANA
PARA LOS PROBLEMAS DE
LAS OLIMPIADAS"

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A
NEREO ELIAS MATA

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

México, D. F. 1980



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE GENERAL

	pag.
INTRODUCCION	
PROBLEMAS	1
SUGERENCIAS	16
SOLUCIONES	26
DEFINICIONES BASICAS	92
LISTA DE SIMBOLOS	93
BIBLIOGRAFIA	94

INTRODUCCION

Uno de los problemas que existen en la metodología de la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles (sobre todo a nivel elemental) es la falta de estímulos para la creatividad y el desarrollo de la intuición en el estudiante. Esto da lugar a que, dado un problema, el alumno no tenga la capacidad suficiente para resolverlo, o al menos la intuición necesaria para atacarlo.

Además, por esa falta de motivación, el interés por resolver un problema matemático se torna casi nulo. Aún más, muchos de los cursos usuales de matemáticas se basan en el aprendizaje mecánico de fórmulas y métodos y no capacitan a los estudiantes para que éstos puedan enfrentar a los problemas con éxito.

Uno de los fines de las Olimpiadas de Matemáticas es el de motivar a los estudiantes para que desarrollen su capacidad de resolver problemas.

Cuando uno trata de resolver los problemas que se han planteado en las Olimpiadas Internacionales de Matemáticas se da cuenta que hay un abismo sobre los conocimientos y la habilidad desarrollada en la escuela y la habilidad necesaria para resolverlos.

El objetivo primordial de este trabajo es el de tender un puente que lleve al lector desde problemas muy sencillos de geometría hasta problemas que son de dificultad semejante a la de los problemas de Olimpiadas.

El trabajo es muy disparajeo. Aparecen en él problemas que son muy fáciles y otros que son difíciles. De manera que si un lector puede hacer fácilmente los primeros, no debe pensar por eso que

estos problemas no le llevarán a aprender nada nuevo. Ya encontrará algunos problemas que lo hagan sufrir un poco (o mucho)!

Al escribir esta lista de problemas hemos supuesto únicamente que el lector tiene conocimientos elementales de geometría plana (no incluimos problemas de geometría del espacio). Y si alguien resuelve los problemas aquí propuestos, habrá alcanzado un buen conocimiento de esta geometría.

Una buena parte de los problemas que aquí aparecen son originales, pero son motivados por los problemas de las Olimpiadas Internacionales. Algunos otros son simplemente modificaciones y otros son resultados conocidos, que se incluyen para que sean también conocidos por el lector.

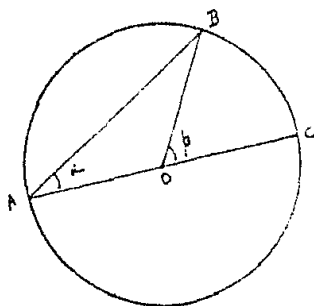
Hemos escrito los problemas de tal forma que se pueda avanzar progresivamente. Este trabajo está dirigido principalmente a alumnos de bachillerato. Como la intención es que sea un puente entre problemas fáciles y problemas difíciles, hemos puesto un escalón; Las sugerencias. De todas maneras siempre es útil asesorarse de alguien con un poco de más conocimientos en matemáticas o trabajar en grupo.

PROBLEMAS

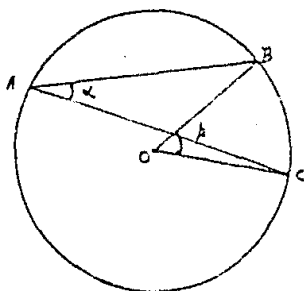
1) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180° .

2) Todo ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los ángulos internos opuestos.

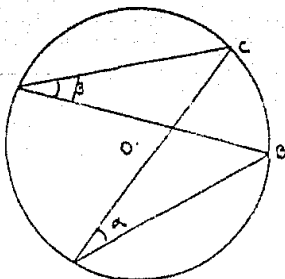
3) En la figura; Probar que $\alpha = \frac{\beta}{2}$



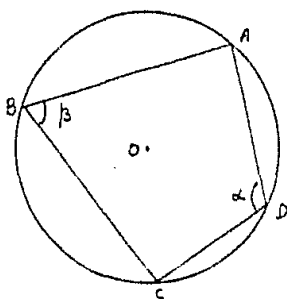
4) En la figura; Probar que $\alpha = \frac{\beta}{2}$



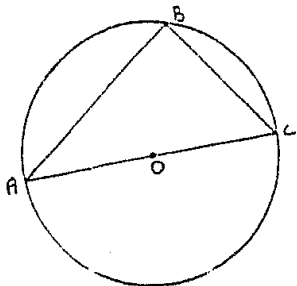
5) En la figura : Probar que $\alpha = \beta$



6) En la figura ; Mostrar que $\alpha + \beta = 180^\circ$.

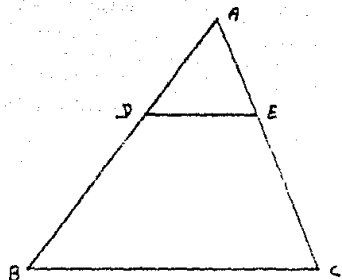


7) En la figura; Probar que el triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo.

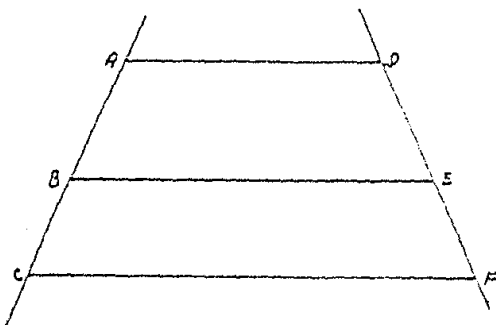


8) Si dos triángulos tienen la misma altura, entonces la razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases.

- 9) En la figura, si $DE \parallel BC$, entonces $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.



- 10) En la figura, $AD \parallel BE \parallel CF$. Probar que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.



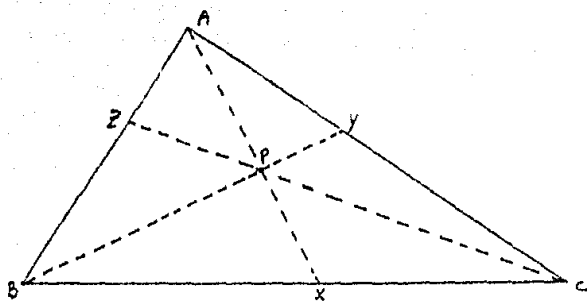
- 11) Demostrar que la media geométrica de dos números positivos diferentes, es siempre menor que su media aritmética.

- 12) Sean x, y dos números positivos y r una constante. Probar que si $x + y = r$, entonces xy es máximo si y sólo si $x = y$.

- 13) Probar el teorema de Pitágoras que dice que : En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

- 14) Probar que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

- 15) Probar que $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.
- 16) Probar que $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.
- 17) Probar que $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$.
- 18) Construir un triángulo rectángulo con hipotenusa y un cateto dados.
- 19) El segmento entre los puntos medios de dos lados de un triángulo es la mitad de la longitud del tercer lado.
- 20) Sean dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$. Supongamos que las líneas AB , BC y CA son perpendiculares a las líneas DE , EF y FD respectivamente. Probar que los dos triángulos son semejantes.
- 21) Mostrar que dos medianas de un triángulo que se intersectan en un punto tal que divide a ambas medianas en dos segmentos miden $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ de la longitud de la mediana respectiva.
- 22) De todos los triángulos que tienen perímetros iguales, con una misma base, el isósceles es el de área máxima.
- 23) En la figura, probar que $\frac{PX}{AX} + \frac{PY}{BY} + \frac{PZ}{CZ} = 1$.



24) Sea G el centroide de un triángulo acutángulo $\triangle ABC$. Probar que cualquier punto que está dentro del triángulo $\triangle AGC$ cumple la siguiente relación: $\frac{BP}{PY} \geq 2$, donde Y es la intersección de AC con la prolongación del segmento BP.

25) Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo. Encontrar un punto O dentro de $\triangle ABC$ tal que $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120^\circ$.

26) Probar que un cuadrilátero convexo ABCD tiene un círculo inscrito si y sólo si $AB + DC = AD + BC$.

27) Consideremos un triángulo rectángulo e isósceles de hipotenusa a y catetos b y c. Probar que $b + c \leq \sqrt{2} a$.

28) Si α , β y γ son los ángulos de un triángulo, entonces $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$.

29) Si un vértice, el incentro y el circuncentro de un triángulo son colineales, entonces el triángulo es isósceles.

30) Considere un triángulo isósceles. Sea r el radio de su círculo circunscrito y ρ el radio de su círculo inscrito. Probar que la distancia d entre los centros de estos círculos es:

$$d = \sqrt{r(r - \rho)}$$

31) Probar la ley de los cosenos. Que dice que si tenemos un triángulo $\triangle ABC$, y hacemos $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ y $\beta = \text{ang } ABC$. Probar que:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

32) Sean A y C dos puntos fijos en una circunferencia K , para cada punto B' que está en K , consideremos los incentros I' de los triángulos $\triangle ACB'$. ¿Qué lugar geométrico describe los I' ?.

33) Probar la fórmula de de Heron, que dice: El área de un triángulo $\triangle ABC$ con lados a , b y c es igual a $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

34) Sea $\triangle ABC$ un triángulo de lados a , b y c . Sea r el radio de su círculo inscrito. Probar que :

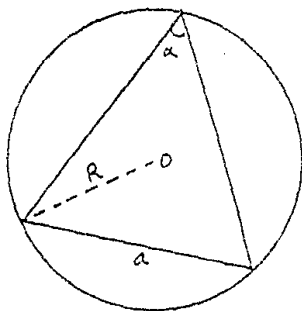
$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}, \text{ donde } s = \frac{a+b+c}{2}$$

35) Probar que si a y b son números reales y α , β y γ son los ángulos de un triángulo, entonces

$$a + b - \tan(\gamma/2)(a \tan \alpha + b \tan \beta) =$$

$$\frac{(a \cos \beta - b \cos \alpha)(\cos \alpha + \gamma/2)}{\cos (\gamma/2) \cos \alpha \cos \beta}$$

36) En la figura, probar que $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$



37) Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera. Sean X , Y y Z los puntos medios de BC , CA y AB respectivamente. Tomemos puntos cualesquiera M en AZ , L en CY y K en BX . Probar que $\frac{1}{4} \text{ área } (\triangle ABC) \leq \text{área } (\triangle KLM)$

38) Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo cuya base $r = BC$ es el radio del circuncírculo de dicho triángulo.

Probar que $a = r(\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha)$, donde $a = AB$ y $\alpha = \text{áng } ABC$.

39) Sean $\triangle XYZ$ y $\triangle ABC$ dos triángulos que cumplen lo siguiente: YZ pasa por A , XZ pasa por B y XY pasa por C . Sean P , Q y R los circuncentros de los triángulos $\triangle XBC$, $\triangle YCA$ y $\triangle ZAB$ respectivamente. Probar que

a) Los circuncírculos de los triángulos $\triangle XBC$, $\triangle YCA$ y $\triangle ZAB$ tienen un punto en común.

b) Los triángulos $\triangle POR$ y $\triangle XYZ$ son semejantes.

40) Sea $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ dos triángulos acutángulos de tal manera que $AB \leq A'B'$, $BC \leq B'C'$, y $AC \leq A'C'$. Probar que $\text{área}(\triangle ABC) \leq \text{área}(\triangle A'B'C')$.

41) Sea r el circuncírculo del triángulo acutángulo $\triangle ABC$. Entonces los tres círculos de radio s con centro en A , B y C respectivamente, cubren al triángulo $\triangle ABC$ si y solo si $s \geq r$.

42) Sea r el radio del incírculo del triángulo rectángulo $\triangle ABC$. Expresar a r en términos de los lados del triángulo.

43) Sea $\triangle ABC$ un triángulo tal que $\text{ang } BAC = 2 \text{ang } ABC$. Sea $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$. Probar que $b(b + c) = a^2$.

44) Sea $\triangle ABC$ un triángulo tal que $\text{ang } BAC = 3 \text{ang } ABC$. Sea $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$. Probar que $c^2 b = (a + b)(a - b)$.

45) Sea AB el diámetro del circuncírculo K del triángulo $\triangle ABC$. Sea D el punto de intersección de AB con la altura desde C del triángulo $\triangle ABC$. Dibujemos el círculo K_1 que es tangente a CD , AB y K . Sea H el punto de contacto entre K_1 y AB . Probar que el triángulo $\triangle BCH$ es isósceles.

46) Sea r el radio del círculo inscrito K_1 del triángulo $\triangle ABC$

y q el radio de su círculo exscrito K_2 que está en el ángulo ACB.
 Probar que $\frac{r}{q} = \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2}$, donde $\alpha = \text{ang BAC}$ y $\beta = \text{ang ABC}$.

47) Probar que todo cuadrilátero convexo inscribible en un círculo, puede ser partido en seis cuadriláteros inscribibles en un círculo.

48) Mostrar que si se tienen cuatro puntos no alineados tres a tres, y se construyen todos los triángulos posibles con estos puntos, al menos uno de ellos es no acutángulo.

49) Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera. Sean M y N los puntos medios de AB y AC respectivamente. Demostrar que existe un punto D sobre MN tal que AD es la media geométrica de MD y DN si y sólo si el circuncírculo del triángulo $\triangle AMN$ intersecta BC.

50) Dados dos puntos A y B y una recta l, encuentre un punto P en l tal que la suma de distancias AP + PB es mínima.

51) Sean AC y BD los lados opuestos de un cuadrilátero convexo ABCD. Supongamos que $AC + BD + CB = 16$. ¿Cuánto es lo máximo que puede valer el área del cuadrilátero?

52) Sean $\triangle ABC$ y $\triangle A_1B_1C_1$ dos triángulos semejantes y no congruentes tales que $AB \parallel B_1C_1$, $AC \parallel A_1C_1$ y $BC \parallel B_1C_1$. Probar que las líneas AA_1 , BB_1 y CC_1 son concurrentes.

53) Probar el teorema de Ceva que dice:

Consideremos un triángulo $\triangle ABC$ y un punto O adentro de él. Supongamos que las rectas AO , BO y CO cortan a los lados BC , AC y AB en los puntos L , M y N respectivamente, entonces $\frac{AN}{NB} * \frac{BL}{LC} * \frac{CM}{MA} = 1$.

Inversamente, si L , M y N son puntos en los lados BC , CA y AB del triángulo $\triangle ABC$, para los cuales se cumple la relación anterior, entonces AL , BM y CN son concurrentes.

54) Probar el teorema de Menelao que dice: Si una línea intersecta las líneas BC , CA y AB de un triángulo $\triangle ABC$ en los puntos L , M y N , respectivamente, entonces

$$\frac{AN}{NB} * \frac{BL}{LC} * \frac{CM}{MA} = 1$$

Inversamente, si L , M y N son puntos de los lados BC , CA y AB del triángulo $\triangle ABC$ para el cual se cumple la relación anterior, entonces L , M y N son colineales.

55) Sea $\triangle A_1A_2A_3$ un triángulo. Sea T_i ($i = 1, 2, 3$) el punto donde el incírculo toca al lado a_i (lado opuesto a A_i). Denotemos por S_i a la reflexión de T_i respecto a la bisectriz de A_i . Probar que $S_1S_2 \parallel A_2A_3$.

56) Sea C un círculo. Sean R , S , U y T puntos de C . Supongamos que las rectas RS y TU se intersectan en un punto Q . Probar que $QR * QS = QU * QT$.

Al número $QR * QS$ se le llama la potencia Q con respecto a C . Lo que dice este problema es que la potencia no depende de la línea QS .

57) Sea C una circunferencia. Sean R , S y T puntos de C y sea Q la intersección de la línea RS con la recta tangente a C que pasa por T . Probar $QR \cdot QS = QT^2$.

58) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Supongamos que existe un círculo K tal que AD , DC y BC son tangentes a K y el centro de K está en AB . Probar que $AO = AE + GC$, donde E y G son los puntos de contacto K con AD y BC respectivamente.

59) Sea K una circunferencia de radio r . Sean A , B puntos de K y se P un punto fuera de la circunferencia. Probar que $PA \cdot PB = PO^2 - r^2$, donde O es el centro de K .

60) Sean C_1 y C_2 dos círculos no concéntricos. Encontrar el lugar geométrico de los puntos del plano tales que su potencia con respecto a C_1 es igual a su potencia con respecto a C_2 . (este conjunto se llama eje radical de C_1 y C_2).

61) Sean K_1 , K_2 y K_3 tres círculos no concéntricos colocados como en la figura. Donde A , B , C , L , M y N son puntos de intersección; A , B y C están alineados y P es el punto de intersección de las líneas AL y BM . Probar que L , M , N y P son concíclicos.

63) Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo.

a) Sean P y Q dos puntos exteriores a $\triangle ABC$ tales que $\text{ang } CAP = \text{ang } ACP = 30^\circ$ y $\text{ang } ABQ = \text{ang } BAQ = 30^\circ$. Tomemos un punto X dentro de $\triangle ABC$ tal que el triángulo $\triangle AQX$ sea equilátero. Demostrar que el triángulo $\triangle AXP$ es semejante al triángulo $\triangle ABC$.

b) Lo mismo que en el problema anterior, pero con $\text{ang } CAP = 45^\circ$, $\text{ang } ACP = 30^\circ$ y $\text{ang } ABQ = \text{ang } BAQ = 15^\circ$.

64) Sea K el circuncírculo del triángulo $\triangle ABC$. Tracemos una bisectriz l del ángulo A . Sea L el punto de intersección de l con BC y N el punto de intersección de l con K . Sea M el punto de intersección del círculo que pasa por A , B y L con el segmento AC .
Probar que $\text{área}(\triangle ABNM) = \text{área}(\triangle ABC)$.

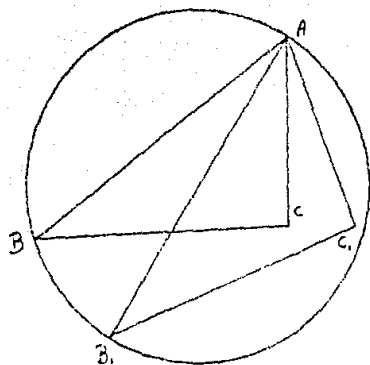
65) Sea K el circuncírculo del triángulo $\triangle ABC$. Sean L y N los puntos de intersección de la bisectriz l desde A con BC y K , respectivamente. Tracemos un círculo cualquiera K_1 que pase por A y L , pero con la condición de que interseccione a los segmentos AB y AC . Llamemos H y M las intersecciones de K_1 con AB y AC respectivamente.

Probar que $\text{área}(\triangle AHNM) = \text{área}(\triangle ABC)$.

66) Sea $\triangle ABC$ un triángulo tal que A y B están sobre un círculo K . Consideremos todos los triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ semejantes a $\triangle ABC$, tales que $A_1 = A$ y el punto B_1 están sobre K . Y además $\triangle A_1B_1C_1$ está colocado en una posición semejante a la del $\triangle ABC$ (ver figura)

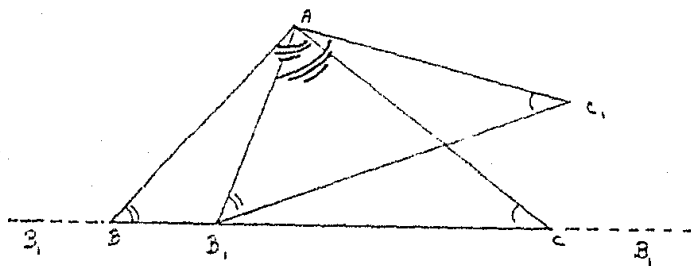
Pruebe que si tomamos todos los posibles triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ con

las características mencionadas y tomamos las mediatrices de los segmentos B_1C_1 , entonces todas estas mediatrices pasan por un punto fijo



67) Sea $\triangle ABC$ un triángulo fijo. Consideremos los triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ tales que $\triangle A_1B_1C_1$ es semejante a $\triangle ABC$, $A = A_1$, B_1 está en la recta BC y $\triangle ABC$ y $\triangle A_1B_1C_1$ están colocados en una posición semejante (ver figura).

¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos C_1 cuando B_1 corre a lo largo de la recta BC ?



68) Sean K_1 y K_2 dos círculos que se intersectan en dos puntos D_1 y L_1 y con K_1 más pequeño que K_2 . Sean l_1 y l_2 dos rectas que son tangentes a ambos círculos.

Sean A_2 y Q_2 los puntos de contacto de l_1 y l_2 con el círculo K_2 respectivamente y sea O el punto de intersección de l_1 con l_2 . La recta OD_1 intersecta a K_2 en un punto D_2 diferente de D_1 . Sea M_2 el punto medio del segmento A_2Q_2 . Probar que los puntos L_1 , D_2 y M_2 están alineados.

69) Consideremos un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con hipotenusa AC . Sea H el pie de la altura bajada desde B . Sean P y Q los puntos de intersección de AB y BC respectivamente con la recta que une a los incentros de los triángulos $\triangle ABH$ y $\triangle BCH$.

a) Pruebe que $\angle BPQ = \angle BQP$.

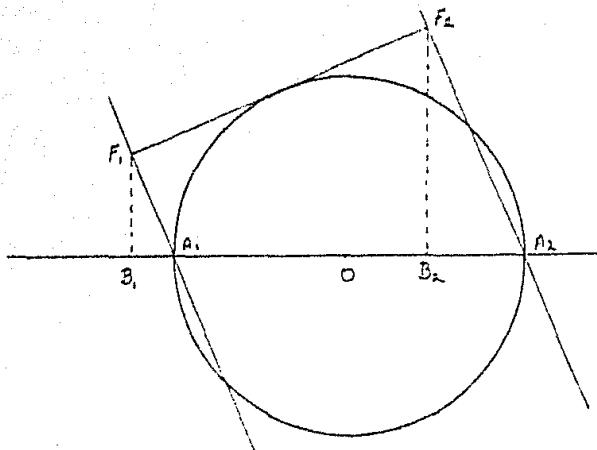
b) Pruebe que los segmentos BQ y BH son iguales

70) Sean K_1 y K_2 dos círculos concéntricos de radio R y r ($R > r$) respectivamente. Sea P un punto fijo en K_2 . Por P tracemos una línea cualquiera que cruce a K_1 en B y C . Sea A el otro punto de intersección de K_2 con la línea perpendicular al segmento BC que pasa por P .

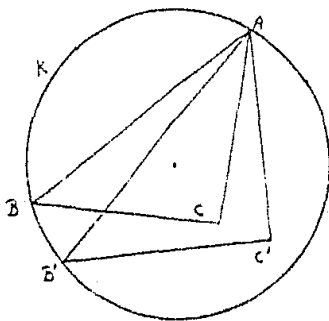
Pruebe que $BC^2 + CA^2 + AB^2 = 6R^2 + 2r^2$.

71) Sea K un círculo y O un punto fijo fuera de K . ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos OP , donde P es un punto que se mueve a lo largo de K ?

- 72) En la figura; Probar que $F_1B_1 + F_2B_2 = F_1F_2$, donde $A_1F_1 \parallel A_2F_2$ y F_1F_2 es una tangente al círculo de diámetro A_1A_2 .



- 73) Sea $\triangle ABC$ un triángulo fijo tal que A y B están sobre un círculo K. Consideremos todos los triángulos $\triangle A'B'C'$ semejantes a $\triangle ABC$, tales que $A' = A$ y el punto B' están sobre K. Y además $\triangle A'B'C'$ está colocado en una posición semejante a la del $\triangle ABC$ (ver figura) Pruebe que el lugar geométrico de los puntos C' , cuando B' corre a lo largo de K, es un círculo.



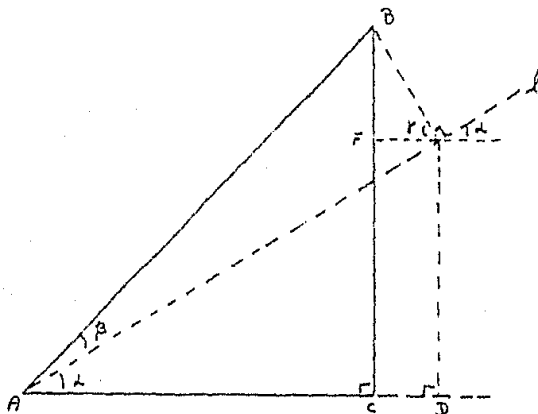
SUGERENCIAS

- 1) Trazar una línea paralela a AB que pase por C.
- 2) Utilizar el problema 1.
- 3) Ver que el triángulo $\triangle AOB$ es isósceles y utilizar el problema 2.
- 4) Trazar el diámetro del círculo que pasa por A.
- 5) Trazar OC y OB.
- 6) Trazar OA, OC, OB y BD y utilizar el problema 4.
- 7) Usar el problema 3.
- 8) Usar la fórmula del área de un triángulo.
- 9) Trazar BE y CD , y utilizar el problema 8.
- 10) Usar el problema 9.
- 11) Trazar un círculo con diámetro igual a la suma de los números positivos dados.
- 12) Usar el problema 11.

13) Construir un cuadrado de lados $a + b$, donde a y b son los catetos del triángulo $\triangle ABC$ dado.

14) Recuerdese que $\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$.

15) Considere la figura :



16) Usar los problemas 14 y 15.

17) Recuerdese que $\tan \gamma = \frac{\text{sen } \gamma}{\cos \gamma}$.

18) Construir un círculo que tenga como diámetro la hipotenusa dada.

19) Sea $\triangle ABC$ el triángulo dado. Denotemos por D y E los puntos medios de AB y AC, respectivamente. Probar que los triángulos $\triangle ADE$ y $\triangle ABC$ son semejantes.

- 20) Probar que dos ángulos correspondientes de los triángulos son iguales.
- 21) Sean CN y BM las medianas del triángulo $\triangle ABC$ y O el punto de concurrencia. Probar que los triángulos $\triangle ANM$ y $\triangle ABC$ son semejantes; y, que los triángulos $\triangle BOC$ y $\triangle MON$ también lo son.
- 22) Probar que la altura del triángulo $\triangle ADB$ es menor que la del triángulo $\triangle ABC$.
- 23) Compare las áreas de los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle PAC$, $\triangle PAB$ y $\triangle BPC$.
- 24) Compare las áreas de los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle PAC$ y $\triangle AGC$.
- 25) Trazar los dos circuncírculos de los triángulos equiláteros que tienen base AC y BC respectivamente, y que no se traslapan con el triángulo $\triangle ABC$.
- 27) Dibuje un triángulo rectángulo e isósceles de hipotenusa a y compare su área con la del original.
- 28) Probar que de todos los triángulos que tienen un ángulo fijo γ , el equilátero es aquel para el que la suma $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$.

Recuérdese que $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$.

29) Sea O el circuncentro del triángulo $\triangle ABC$. Sean X y Y los puntos de intersección de AC y AB bajadas desde O . Pruebe que $AX = XC$ y $AY = BY$.

30) Consideremos el triángulo $\triangle ABC$ donde $AB = BC$. Sea I el incentro. Trazar la bisectriz l del ángulo BAC . Sea M la intersección de l con el circuncírculo del triángulo, y X el punto donde la recta AB es tangente al incírculo. Probar que el triángulo $\triangle BMH$ es isósceles y que los triángulos $\triangle ABM$ y $\triangle AXI$ son semejantes.

31) Trazar las alturas correspondientes del triángulo y aplicar el teorema de Pitágoras a cada uno de los triángulos formados.

32) Pruébese que el ángulo $AI'C$ es constante y concluir que el lugar geométrico descrito por I' es un semicírculo.

33) Usar la ley de los cosenos.

34) Utilizar la fórmula de Heron.

35) Recuérdese que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

36) Aplicar la ley de los senos al triángulo $\triangle OBC$.

37) Compare las áreas de los triángulos $\triangle XYZ$, $\triangle MXY$ y $\triangle MLK$.

39) Para la parte b). Si dos círculos C_1 y C_2 de centros O_1 y

O₂ se intersectan en dos puntos A y F, entonces $\text{ang } O_2O_1F = \text{ang } AO_1F$.

40) Muestre que alguno de los ángulos del triángulo $\triangle ABC$ es menor o igual que el ángulo respectivo en $\triangle A'B'C'$

41) Sea O el circuncentro de $\triangle ABC$. Probar que si $s < r$, entonces la unión de los círculos no cubre a O. Inversamente. Sean K, L y M los pies de las perpendiculares bajadas desde O hacia BC, AC y AB respectivamente. El círculo de radio r y centro en A cubre al cuadrilátero ANOM.

42) Probar que $r = \frac{ab}{a+b+c}$, calculando áreas.

43) Utilice la proporcionalidad de los lados de los triángulos semejantes $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$, donde D es la intersección de BC con la bisectriz del ángulo A.

44) Usar el problema anterior, y la semejanza de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$, donde D es la intersección de BC con una de las líneas que triseca al ángulo BAC.

45) Aplicar el teorema de Pitágoras a los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ACD$ y aprovechar la semejanza con el triángulo $\triangle BCD$.

46) Sean U y V los puntos de contacto de AB con K_1 y K_2 respectivamente. Pruebe que $\text{ang } AO_2O_1 = \frac{\alpha}{2}$, $\text{ang } BO_2V = \frac{\beta}{2}$.

donde O_1 y O_2 son los centros de K_1 y K_2 , respectivamente.

47) Trazar una de las diagonales del cuadrilátero. Tomar un punto P en alguno de los dos triángulos formados. A partir de este punto trazar las perpendiculares a los lados del triángulo elegido. Ver que siempre se puede tomar P de manera que los pies de las perpendiculares quedan en el triángulo.

48) Mostrar que si se tienen cuatro puntos no alineados tres a tres, y se construyen todos los triángulos posibles con estos puntos, al menos uno de ellos es no acutángulo.

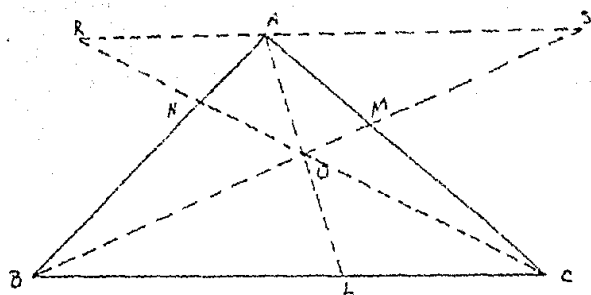
49) Supongamos que E es un punto de la intersección del circuncírculo de $\triangle AHN$ con BC . Los triángulos $\triangle ADN$ y $\triangle MDE$ son semejantes.

50) Pruebe que si Q es el reflejado de B con respecto a l , entonces el punto P es el que está en la intersección de AQ con l .

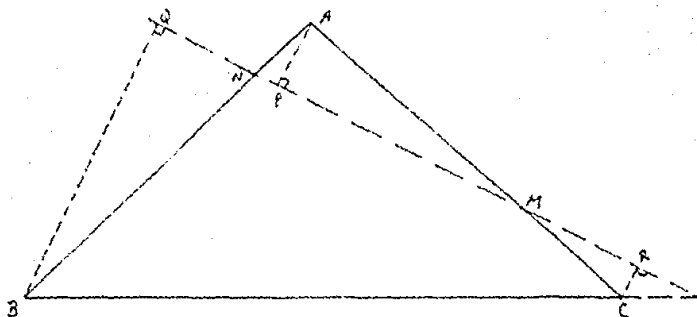
51) Usar que el producto de dos números positivos x , y cuya suma es una constante, es máximo cuando $x = y$.

52) Sea O el punto de concurrencia de las líneas CC_1 y BB_1 . Probar que los triángulos $\triangle OC_1A_1$ y $\triangle OCA$ son semejantes.

53) Considerar el dibujo; donde $RS \parallel BC$. Usar los triángulos semejantes adecuados.



54) Considerar el dibujo.



55) Sea I el incentro del triángulo dado. Pruebe que $\text{ang } S_2IT_1 = \text{ang } A_2 + \text{ang } A_3 = \text{ang } S_2IT_1$.

56) Pruebe que los triángulos ΔSUQ y ΔTRQ son semejantes.

57) Probar que los triángulos ΔQST y ΔQTR son semejantes.

58) Sobre la línea AD construir un punto H tal que $EH = FC$.

Probar que $\text{ang } FCO = \text{ang } AHO = \text{ang } AOH$.

59) Trácese la línea OP y recuerde la definición de la potencia de un punto.

60) Probar que el lugar geométrico es una línea recta.

61) Pruebe que los puntos B, M y P están alineados.

62) Probar que la distancia de los doce puntos medios al centro del cuadrilátero es la misma. Y además, la distancia entre dos adyacentes es la misma (para cualquier par de adyacentes).

63) a) Mostrar que $\text{ang PAX} = \text{ang CAB}$, y que $\frac{PA}{CA} = \frac{AX}{AB}$.

b) Aplicar la ley de los senos al triángulo $\triangle APC$ y $\triangle AQB$.

64) Probar que $BH \parallel NC$.

65) Probar que $HP \parallel BN$ y $PM \parallel NC$, donde P es el punto de intersección del segmento BC con K_1 .

66) Pruebe que ang C'GD es constante.

67) Probar que ang BCC' es constante.

68) Sean A_1 y Q_1 los puntos de contacto de K_1 con l_1 y l_2 respectivamente y sea M_1 el punto medio de A_1Q_1 . Probar que el triángulo $\triangle M_1D_1M_2$ es isósceles.

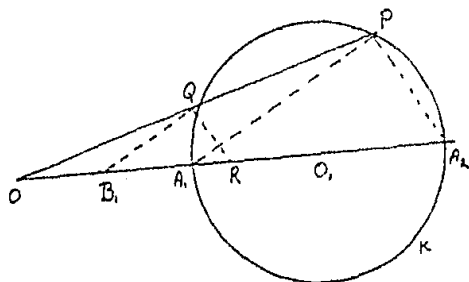
69) a) Sean O_1 y O_2 los incentros de los triángulos $\triangle AHB$ y

$\triangle BHC$ respectivamente. Pruebe que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle O_1HO_2$ son semejantes.

b) Sean L y N los puntos de contacto del incírculo del triángulo BHC y los segmentos BC y BH respectivamente. Pruebe que $LH = NQ$.

70) Sea Q el punto de intersección del segmento BP con K_1 . Sean $a = BQ$, $b = QP$, $c = PC$ y $d = AP$. Mostrar que $a = c$ y, usando potencias mostrar que $(a + b)c = R^2 - r^2$.

71) Considere la figura: Sea O_1 el centro de K . Sean Q y R los puntos medios de los segmentos OP y OA_2 respectivamente. Probar que los triángulos $\triangle B_1QR$ y $\triangle A_1PA_2$ son semejantes.

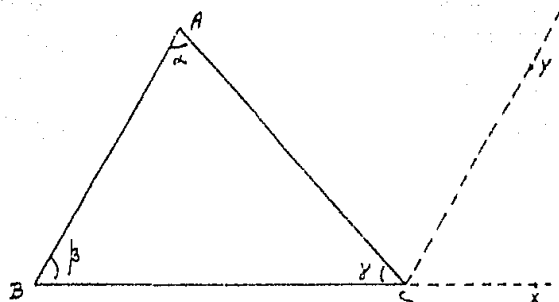


72) Sea E_1 el punto de intersección de la línea perpendicular al segmento F_1F_2 trazada desde el punto medio O_1 del segmento B_1B_2 . Probar que $E_1O_1 = B_1O_1$.

73) Prolónguese la línea BC y $B'C'$. Probar que su intersección es un punto P que está sobre K . Trácese un círculo que pasa por A , C y P . Probar que también pasa por C' .

SOLUCIONES

1)



Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera.

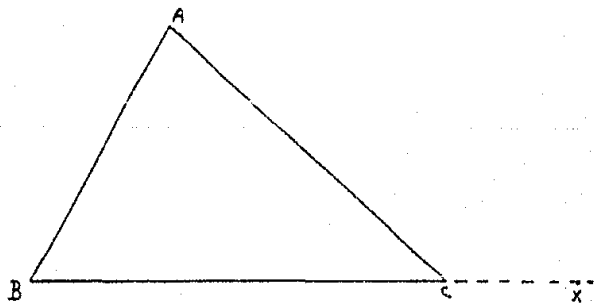
Sean $\alpha = \text{ang BAC}$, $\beta = \text{ang ABC}$ y $\gamma = \text{ang ACB}$.

Trácese un segmento YC paralelo a AB y prolonguese a BC hasta un punto X. Entonces $\text{ang YCX} = \text{ang ABC}$.

Por otro lado $\text{ang YCA} = \text{ang BAC}$, ya que son ángulos alternos internos.

Por tanto $\beta + \alpha + \gamma = \text{ang XCY} + \text{ang YCA} + \text{ang ACB} = \pi$.

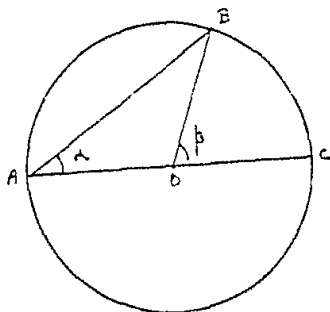
2)



Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera.

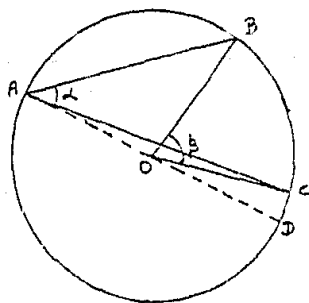
Sean $\alpha = \text{ang BAC}$, $\beta = \text{ang ABC}$ y $\gamma = \text{ang BCA}$. En la figura prolonguense BC hasta un punto X a la derecha de C. Sabemos que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Por otro lado $\gamma + \text{ang ACX} = \pi$. De aquí que $\gamma = \pi - \text{ang ACX}$. Por consiguiente $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta + (\pi - \text{ang ACX}) = \pi$. Entonces, $\alpha + \beta = \text{ang ACX}$.

3)



Dado que $AO = OB$, $\triangle AOB$ es isósceles. De modo que $\alpha = \text{ang ABO}$. Por el problema 2), tenemos que $\beta = \alpha + \text{ang ABO}$. Por tanto $\alpha = \frac{\beta}{2}$.

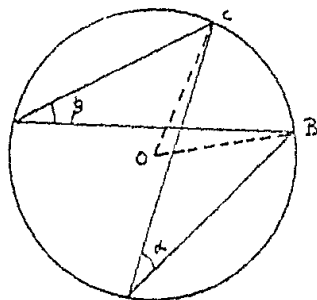
4)



Tracemos el diámetro AD. Entonces $\text{ang BAD} = \frac{1}{2} (\text{ang DOB})$ y $\text{ang CAD} = \frac{1}{2} (\text{ang DOC})$. De aquí que $\alpha = \text{ang BAD} - \text{ang CAD} = \frac{1}{2} (\text{ang DOB}) - \frac{1}{2} (\text{ang DOC}) = \frac{1}{2} (\text{ang DOB} - \text{ang DOC}) = \frac{1}{2} (\text{ang COB}) = \frac{\beta}{2}$

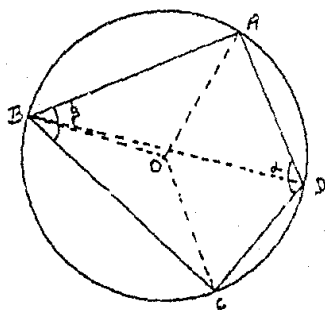
Por tanto $\alpha = \frac{\beta}{2}$

5)



Por el problema 4), $\beta = \frac{1}{2} (\text{ang BOC})$ y $\alpha = \frac{1}{2} (\text{ang BOC})$. Por tanto $\alpha = \beta$.

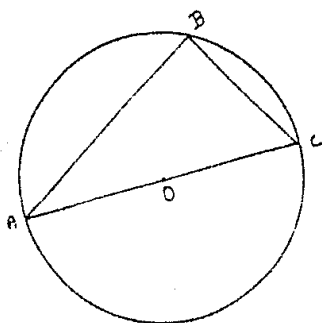
6)



Por el problema 4), sabemos que $\beta = \frac{1}{2} (\text{ang AOC})$. Sea $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, donde α_1 es el ang ADB, y α_2 es el ang BDC. Entonces $\alpha_1 = \frac{1}{2} (\text{ang AOB})$ y $\alpha_2 = \frac{1}{2} (\text{ang BOC})$. De modo que $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \alpha_2) + \beta = \frac{1}{2} (\text{ang AOB} + \text{ang BOC}) + \frac{1}{2} (\text{ang AOC}) = (\text{ang AOB} + \text{ang BOC} + \text{ang AOC}) = \frac{1}{2} (2\pi) = \pi$.

Por tanto $\alpha + \beta = \pi$.

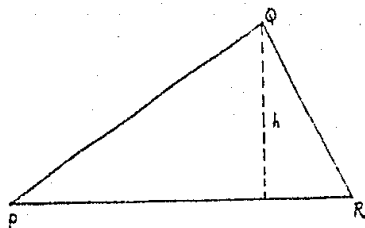
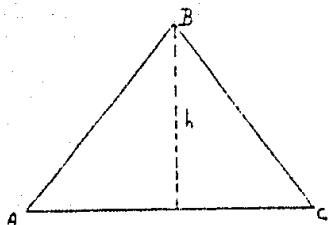
7)



Como $\text{ang ABC} = \frac{1}{2} (\text{ang AOC}) = \frac{1}{2} (180^\circ) = 90^\circ$,

Por tanto $\triangle ABC$ es rectángulo.

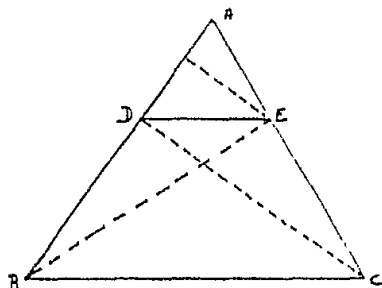
8)



Sean $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$ dos triángulos que tienen la misma altura h . Sean $b = AC$ y $p = PR$ las bases de los triángulos. Entonces,

$$\frac{\text{área}(\triangle ABC)}{\text{área}(\triangle PQR)} = \frac{\frac{bh}{2}}{\frac{ph}{2}} = \frac{b}{p}$$

9)



Vamos a fijarnos en los triángulos $\triangle AED$ y $\triangle DEB$, estos tienen la misma altura, entonces por el problema 8),

$$\frac{\text{área}(\triangle DEB)}{\text{área}(\triangle AED)} = \frac{DB}{AD}$$

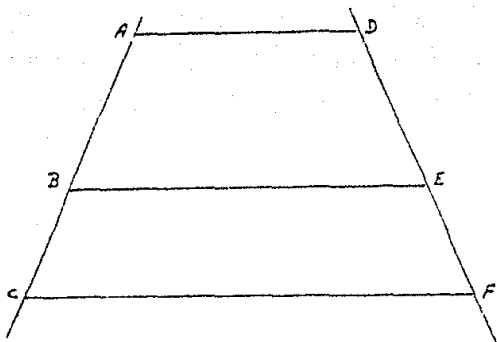
De igual manera tenemos que,

$$\frac{\text{área}(\triangle CDE)}{\text{área}(\triangle AED)} = \frac{EC}{AE}.$$

Ahora tomemos los triángulos $\triangle CDE$ y $\triangle DEB$, que tienen a DE como una base en común. Dado que DE y BC son paralelos, entonces $\text{área}(\triangle CDE) = \text{área}(\triangle DEB)$.

Por tanto, $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$; sumando 1 a ambos lados, se tiene $\frac{DB}{AD} + \frac{AD}{AD} = \frac{EC}{AE} + \frac{AE}{AE}$, de aquí que $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

10)



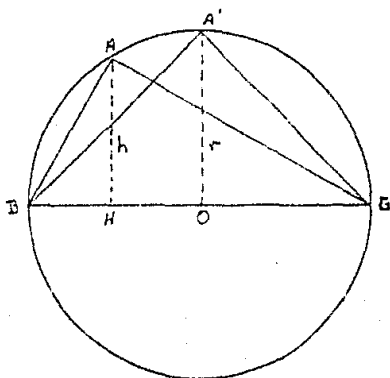
Sabemos, por el problema 9), que

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}, \text{ de modo que,}$$

$$\frac{AC}{AB} - \frac{AB}{AB} = \frac{DF}{DE} - \frac{DE}{DE}, \text{ por consiguiente}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{DE}. \text{ Por tanto } \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

11)



Sea $a = BG$, $x = BH$ y $y = HG$. Sea a el diámetro del círculo trazado, ver figura.

Como los triángulos $\triangle ABH$ y $\triangle GAH$ son semejantes, entonces $\frac{x}{h} =$

$\frac{h}{y}$, de aquí que $h^2 = xy$. De modo que $h = \sqrt{xy}$.

Notemos que $r = \frac{a}{2} = \frac{x+y}{2}$. Pero además $h \leq r$. Por consiguiente,

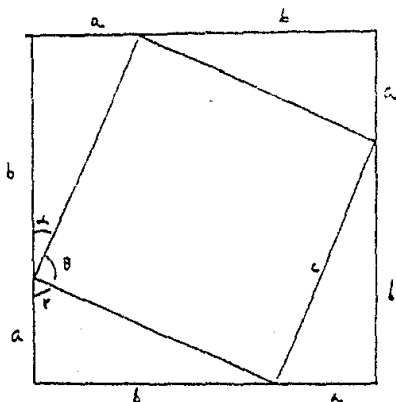
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

12) Sabemos que $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{r}{2}$. De modo que $xy \leq \frac{r^2}{4}$.

Si $x = y$, entonces el producto xy alcanza su máximo valor.

Si xy alcanza el máximo, entonces $xy = \frac{r^2}{4}$, es decir $xy = \frac{(x+y)^2}{4}$. De aquí que $(x-y)^2 = 0$. Por tanto $x = y$.

13)



Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo, donde $\text{ang } BCA = 90^\circ$. Hacemos $c = AB$, $b = BC$ y $a = AC$. Construyamos un cuadrado de lado $a + b$. Dibujemos cuatro triángulos con catetos a y b , como en la figura. Cada uno de estos triángulos es congruente con el triángulo dado.

Por tanto todos tienen hipotenusa de longitud c .

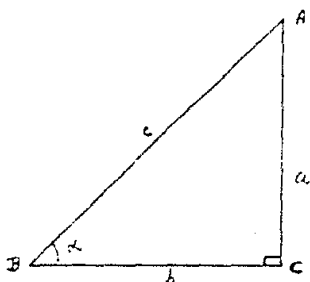
Notemos que $\alpha + \gamma = 90^\circ$. Además $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$. De aquí que

$\theta = 90^\circ$. Por tanto el cuadrilátero formado por las cuatro hipotenusas es un cuadrado.

Calculemos el área del cuadrado grande de dos maneras. Por un lado el área es igual a $c^2 + 4 \left(\frac{1}{2} ab \right) = c^2 + 2ab$, y por otro, el área es igual a $a^2 + b^2 + 2ab$.

Por tanto $a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$, es decir $a^2 + b^2 = c^2$.

14)

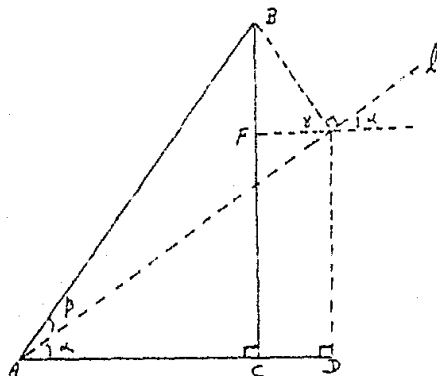


Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo tal que $c = AB$, $b = BC$, con $\text{ang } BCA = 90^\circ$.

Sabemos que $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ y $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, entonces $\sin^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2}$ y $\cos^2 \alpha = \frac{b^2}{c^2}$.

Por tanto, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$

15)



Consideremos la figura:

Donde, ED es perpendicular a CD

BC es perpendicular a AC

BF es perpendicular a FE, y

BE es perpendicular a EA.

Notemos que

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{AC}{BA} = \frac{AD - CD}{AB} = \frac{AD - FE}{AB}, \text{ y que}$$

$$AD = AE(\cos \alpha) \dots\dots(1)$$

$$\text{Dado que } \alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}, \text{ entonces } \cos \gamma = \sin \alpha.$$

$$\text{Claramente } FE = BE(\cos \gamma) = BE(\sin \alpha) \dots\dots\dots(2)$$

De (1) y (2) tenemos que,

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{AE(\cos \alpha) - BE(\sin \alpha)}{AB} = \frac{AE}{AB} \cos \alpha - \frac{BE}{AB} \sin \alpha = \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha.$$

Nota. Esta prueba es para cuando $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. La demostración para otros casos es similar.

16)

Como $\sin^2(\alpha + \beta) = 1 - \cos^2(\alpha + \beta)$, entonces $\sin(\alpha + \beta)$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \sqrt{1 - (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)^2} = \\ &= \sqrt{1 - (\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta)} = \\ &= \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta} \\ &\text{en } \beta = \end{aligned}$$

$$\sqrt{\sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) + \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \beta) + 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta}$$

$$= \sqrt{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta}$$

$$= \sqrt{(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)^2} = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Por tanto $\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

17)

$$\tan (\alpha + \beta) = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos (\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} =$$

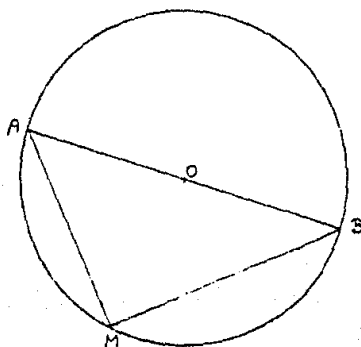
$$= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \cdot \frac{(\cos \alpha \cos \beta)}{(\cos \alpha \cos \beta)}$$

$$= \frac{\cos \beta \sin \alpha + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

$$= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \beta} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}$$

$$= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

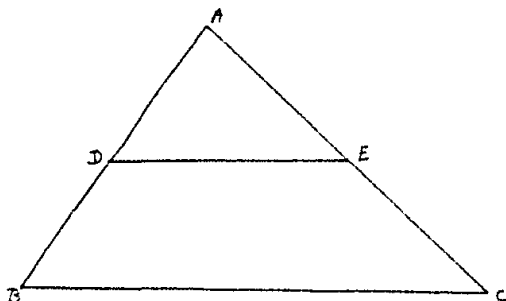
18)



Sean AB y c , la hipotenusa y cateto dadas. Con diámetro AB trazamos un círculo K .

Con centro en A y con radio c , trazamos un arco que corte al círculo K . Sea H el punto de esta intersección. Entonces por el problema 7), tenemos que AMB es un triángulo rectángulo.

19)



Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera. Sean D y E los puntos medios de AB y AC respectivamente.

Primero probaremos que $DE \parallel BC$.

Supongamos que DE no es paralelo a BC . Entonces podemos trazar por E una paralela a BC . Sea DH dicha paralela. Por consiguiente, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AH}$. Además, $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$. Entonces

$$\frac{DB + AD}{AD} = \frac{EC + AE}{AE}, \text{ por consiguiente}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{AC}{AH}, \text{ por tanto } AH = AE.$$

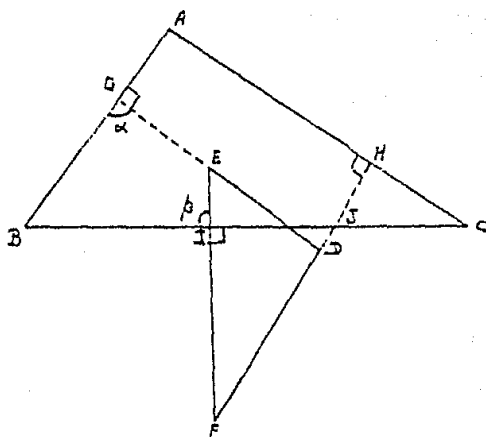
Entonces DH coincide con DE , y como DH es paralela a BC , tenemos que $DE \parallel BC$.

De modo que los triángulos $\triangle ADE$ y $\triangle ABC$ son semejantes. Entonces

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD} = \frac{2 AD}{AD} = 2.$$

Por tanto $DE = \frac{BC}{2}$

20)



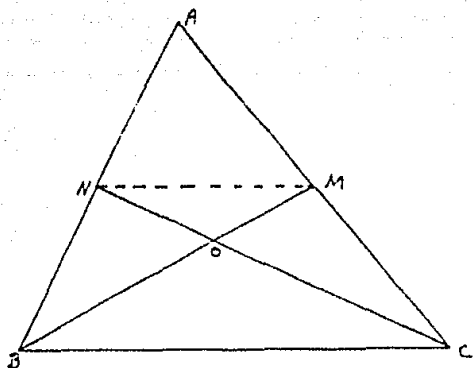
Sean $\triangle ABC$ y $\triangle FDE$ dos triángulos tales que las líneas AB , AC y BC son perpendiculares a las líneas ED , DF y EF , respectivamente. Sean G , H e I los puntos de intersección de las líneas AB , AC y BC con las líneas DE , DF y FE , respectivamente.

Ya que $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, (ver figura), $\text{ang } ABC + \text{ang } GDF = \pi$. Además, $\text{ang } GDF + \text{ang } DEF = \pi$. De aquí tenemos que $\text{ang } ABC = \text{ang } DEF$.

Sea J el punto de intersección de la línea FD con la línea BC . Los triángulos $\triangle IJF$ y $\triangle HJC$ son semejantes, pues ambos son rectángulos y $\text{ang } IJF = \text{ang } HJC$. De aquí que $\text{ang } IFJ = \text{ang } ACR$.

Por tanto los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son semejantes.

21)



Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Sea O el punto de concurrencia de las medianas CN y BM de $\triangle ABC$.

Consideremos los triángulos $\triangle ANM$ y $\triangle ABC$. Como sus lados correspondientes son paralelos, entonces son semejantes. De aquí que $\frac{NM}{BC} = \frac{AN}{AB} = \frac{1}{2}$. De igual manera, como los triángulos $\triangle BOC$ y $\triangle MON$ sus lados paralelos, ellos son semejantes, de aquí que

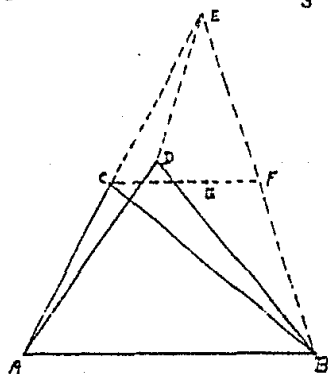
$$\frac{OM}{BO} = \frac{ON}{CO} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}.$$

Tenemos entonces que $2OM = BO$ y $2ON = CO$, pero $BO + OM = BM$, por lo que $2OM + OM = BM$. De aquí que $OM = \frac{1}{3} BM$.

Sustituyendo OM por $\frac{1}{2} BO$, obtenemos, $BO + \frac{1}{2} BO = BM$. Por consiguiente $BO = \frac{2}{3} BM$.

De forma análoga se prueba que $ON = \frac{1}{3} CN$ y $CO = \frac{2}{3} CN$.

22)



Sean $\triangle ABC$ y $\triangle ABD$ dos triángulos que tienen perímetros iguales y $AC = BC$, pero AD no es igual a BD .

Prolónguese AC hasta un punto E , de tal manera que $CE = AC$. Tracemos EB y ED . Sea F el punto de intersección de BE con la línea paralela a AB que pasa por C .

Tomemos un punto G en el segmento CF . Entonces $GE = GB$. Entonces

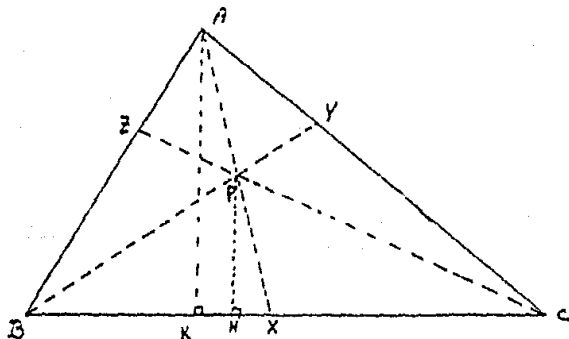
perímetro $(\triangle ADB) = AD + DG + GB + AB \geq AG + GB + AB = AG + GE + AB \geq AE + AB = AC + CE + AB = AC + CB + AB =$ perímetro $(\triangle ABC)$. De modo que perímetro $(\triangle ADB) \geq$ perímetro $(\triangle ABC)$. Pero la desigualdad no se puede dar. De modo que:

$AD + DG = AG$ implica D está en el segmento AG . De igual manera, $AG + GE = AE$ implica que G está en el segmento AC .

Por tanto, D está en el segmento AC y $G = C$.

Por consiguiente, la altura del triángulo $\triangle ADB$ es menor que la del triángulo $\triangle ACB$. De aquí que el área $(\triangle ADB) <$ área $(\triangle ACB)$.

23)



Sean H y K los pies de las alturas respectivas de los triángulos $\triangle BPC$ y $\triangle ABC$

Como los triángulos $\triangle AXC$, $\triangle PHX$ son semejantes, entonces $\frac{PX}{AX} = \frac{PH}{AK}$. De modo que

$$\frac{\text{área}(\triangle APC)}{\text{área}(\triangle ABC)} = \frac{\frac{(BC)(PH)}{2}}{\frac{(BC)(AK)}{2}} = \frac{PH}{AK}$$

Por tanto

$$\frac{PX}{AX} = \frac{\text{área}(\triangle BPC)}{\text{área}(\triangle ABC)}. \text{ De forma análoga, tenemos que}$$

$$\frac{PY}{BY} = \frac{\text{área}(\triangle PAC)}{\text{área}(\triangle ABC)}$$

$$\frac{PZ}{CZ} = \frac{\text{área}(\triangle PAB)}{\text{área}(\triangle ABC)}$$

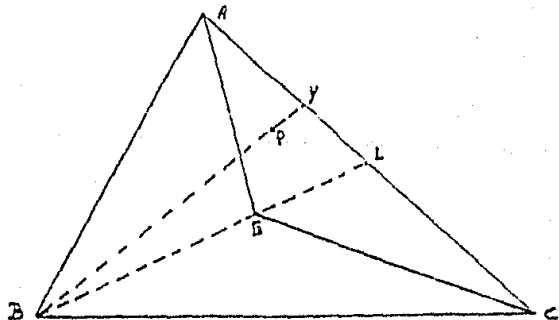
Entonces

$$\begin{aligned} \frac{PX}{AX} + \frac{PY}{BY} + \frac{PZ}{CZ} &= \frac{\text{área}(\triangle BPC) + \text{área}(\triangle PAC) + \text{área}(\triangle PAB)}{\text{área}(\triangle ABC)} = \\ &= \frac{\text{área}(\triangle ABC)}{\text{área}(\triangle ABC)} = 1 \end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{PX}{AX} + \frac{PY}{BY} + \frac{PZ}{CZ} = 1.$$

24)



Sea L el punto de intersección de la prolongación del segmento BG con AC. Como los triángulos $\triangle BAC$ y $\triangle PAC$ tienen la misma base y sus alturas son proporcionales, entonces

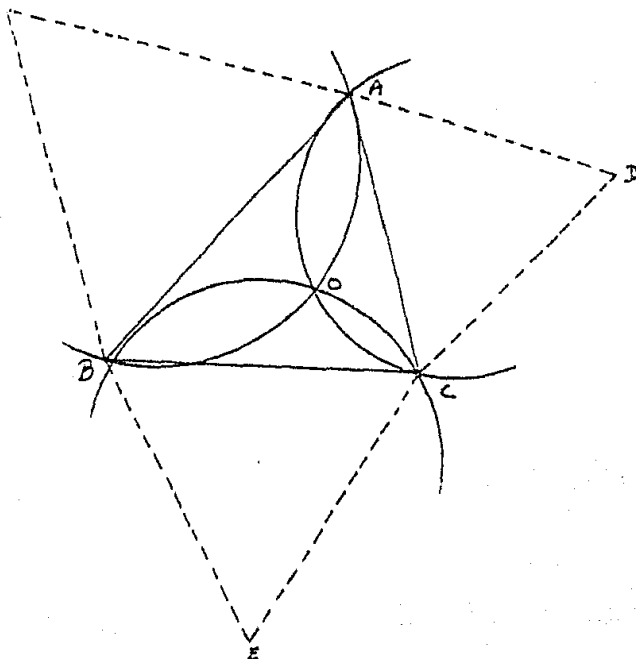
$$\frac{BY}{PY} = \frac{\text{área}(\triangle ABC)}{\text{área}(\triangle PAC)} \geq \frac{\text{área}(\triangle ABC)}{\text{área}(\triangle AGC)} = \frac{BL}{GL} = 3$$

De aquí que $BY \geq 3 \cdot PY$.

Pero $BY = BP + PY$. Entonces $BP \geq 2 \cdot PY$.

Por tanto $\frac{BP}{PY} \geq 2$.

25)



Con base AC y BC construimos dos triángulos equiláteros $\triangle ACD$ y $\triangle BCE$ que no se traslapen con el triángulo $\triangle ABC$.

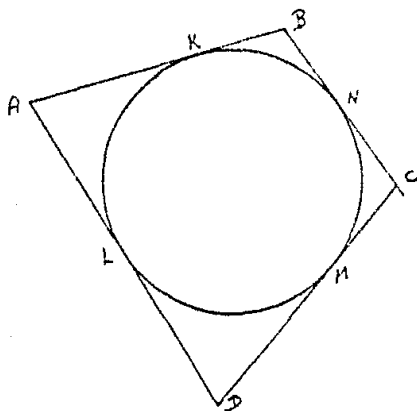
Ahora tracemos los circuncírculos C_1 y C_2 de $\triangle ACD$ y $\triangle BCE$.

C_1 y C_2 se intersectan en C y en otro punto O . Aseguramos que O es el punto buscado.

Como O y D están sobre C_1 , tenemos que $\text{ang } AOC + \text{ang } ADC = 180^\circ$; pero por ser $\triangle ADC$ equilátero, $\text{ang } ADC = 60^\circ$. Entonces $\text{ang } AOC = 120^\circ$.

De igual manera se prueba que $\text{ang } BOC = 120^\circ$. De aquí se deduce que $\text{ang } AOC = 120^\circ$.

26)



Sean K , L , M y N los puntos de tangencia del círculo tales que K , L , M y N están en los segmentos AB , AD , DC y CB respectivamente. Dichos puntos, por ser de tangencia, satisfacen :

$$AK = AL$$

$$KB = BN$$

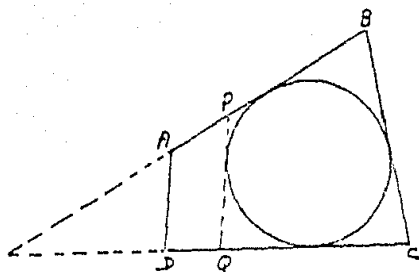
$$DM = LD \text{ , y}$$

$$MC = NC \text{ .}$$

Sumando miembro a miembro, obtenemos :

$AK + KB + DM + MC = AL + LD + BN + NC$. De modo que $AB + DC = AD + BC$.

4)



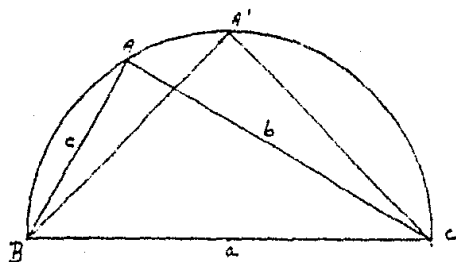
Inversamente. Supongamos que $AB + DC = AD + BC$, eso quiere decir que, al menos dos lados son no paralelos, sin pérdida de generalidad, supongamos que AB no es paralelo a DC , ver figura.

Vamos a suponer que no es posible inscribir algún círculo K en el cuadrilátero $ABCD$.

Dibujemos un círculo K_1 de tal manera que sea tangente a los segmentos AB , BC y DC . Entonces $AB + DC > PB + QC = PQ + BC > AD + BC$, que es una contradicción.

Por tanto es posible inscribir un círculo K en el cuadrilátero $ABCD$ con las condiciones mencionadas.

27)



Supongamos que nuestro triángulo tiene vértices A, B y C y que $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$. Tracemos el círculo K de diámetro a . Entonces A está en K. Tracemos el triángulo isósceles $\triangle A'B'C$ donde A' está en K con $A'B = A'C$. Notemos que $\text{área}(\triangle ABC) \leq \text{área}(\triangle A'B'C)$.

Sean $c' = A'B$ y $b' = A'C$. Entonces $c'^2 + (b')^2 = a^2$, es decir $(b')^2 = \frac{a^2}{2}$.

Por otro lado, $(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + 2bc = a^2 + 4 \cdot \text{área}(\triangle ABC) \leq a^2 + 4 \cdot \text{área}(\triangle A'B'C) = a^2 + 2 \cdot b'c' = a^2 + 2(b')^2 = a^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{2} = 2a^2$

Entonces $b + c \leq \sqrt{2} a$

28)

Vamos a ver que de todos los triángulos, el equilátero es aquel en el que la suma $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$ es máxima.

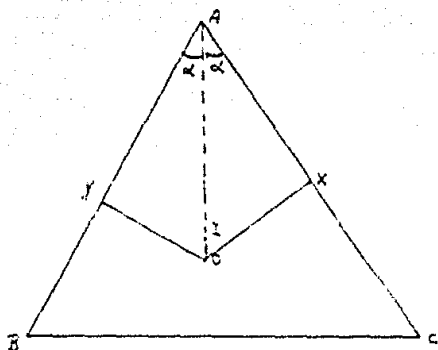
Primero tomemos un ángulo fijo γ . Vamos a probar que la suma $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$ es máxima cuando $\alpha = \beta$.

Sabemos que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Así que $\alpha + \beta$ es constante. Ya que $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$, y como $\alpha + \beta$ es constante, este producto es máximo cuando $\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = 1$, es decir, cuando $\alpha = \beta$.

Como α , β y γ entran en el problema en forma simétrica, $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$ alcanza el máximo valor cuando todos son iguales. Es decir, $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$.

Por tanto $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$.

29)



Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Sean I y O el incentro y el circuncentro de $\triangle ABC$ respectivamente.

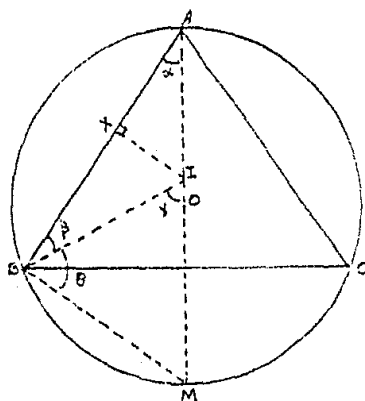
Sean X y Y los puntos de intersección de AC y AB con las perpendiculares bajadas desde O .

Notemos que los triángulos $\triangle AOY$ y $\triangle AOX$ son semejantes. De aquí que $AX = AY$.

Como $OX = OY$ son mediatrices, se tiene que $AX = XC$ y $AY = BY$. Por consiguiente $AB = AC$.

Por tanto, el triángulo $\triangle ABC$ es isósceles.

30)



Consideremos el triángulo $\triangle ABC$ donde $AB = BC$. Sean I y O el incentro y el circuncentro del triángulo $\triangle ABC$, respectivamente.

Sea M la intersección del circuncírculo con la bisectriz trazada desde A .

Tracemos los segmentos IB y BM .

Dado que γ es el ángulo exterior del triángulo $\triangle ABI$, ver figura, $\gamma = \alpha + \beta = \frac{1}{2}(\text{ang } A) + \frac{1}{2}(\text{ang } B)$.

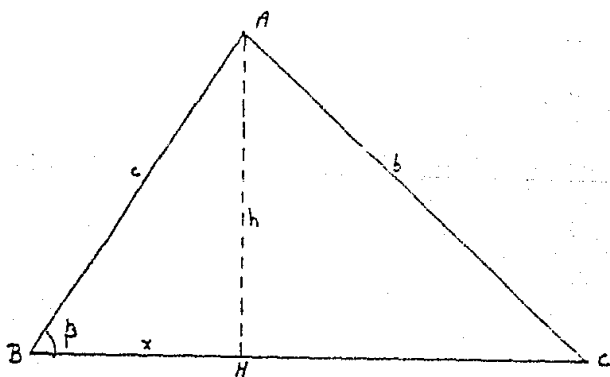
Nótese que $\theta = \beta + \alpha$, pues $\text{ang } CBM = \text{ang } CAM$. De aquí que $\gamma = \theta$. Por consiguiente el triángulo $\triangle BIM$ es isósceles. Por tanto $BM = BI$.

Sea X el punto donde la recta AB es tangente al incírculo.

Los triángulos $\triangle ABM$ y $\triangle AXI$ son semejantes. Por tanto,

$\frac{AI}{AH} = \frac{XI}{BH}$. Sustituyendo, $\frac{r+d}{2r} = \frac{\rho}{r-d}$, de aquí que, $(r+d)(r-d) = 2r\rho$. De modo que, $r^2 - d^2 = 2r\rho$. Por tanto, $d = \sqrt{r(r-2\rho)}$.

31)



Tracemos desde A la altura h. Sea H el punto de intersección de h con BC.

Sea $x = BH$, entonces $HC = a - x$. Aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos

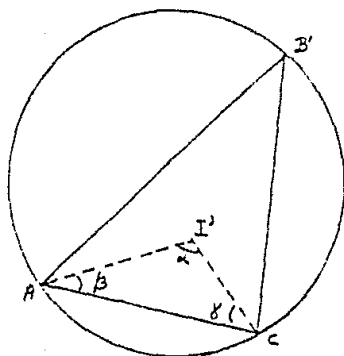
$$c^2 = h^2 + x^2 \dots\dots\dots(1)$$

$$b^2 = (x - a)^2 + h^2 \dots\dots\dots(2)$$

Desarrollando en (2) y sustituyendo el valor de c^2 de (1) tenemos, $b^2 = x^2 + a^2 - 2ax + h^2 = a^2 + c^2 - 2ax$.

Por otro lado tenemos que $x = c \cos \beta$. Por tanto $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$.

32)



Afirmamos que el lugar geométrico que describe los I' es un semicírculo.

En efecto. Sean I' el incentro del triángulo ACB' , $\alpha = \text{ang } AIC$, $\beta = \text{ang } I'AC$ y $\gamma = \text{ang } I'CA$. Entonces :

$$\alpha = \pi - (\beta + \gamma) = \pi - \left(\frac{\text{ang } A}{2} + \frac{\text{ang } C}{2} \right) = \pi - \frac{1}{2} (\text{ang } A + \text{ang } C)$$

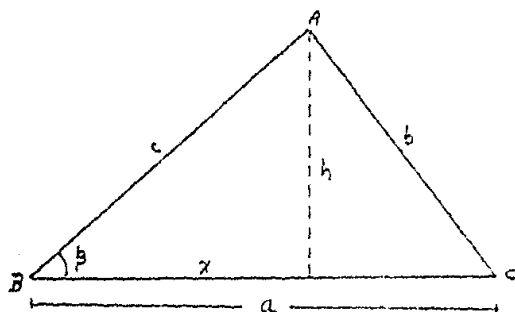
$$C) = \pi - \frac{1}{2} (\pi - \text{ang } B') = \frac{\pi}{2} - \frac{\text{ang } B'}{2}.$$

Como B' está sobre K, entonces $\text{ang } B'$ es constante.

Por tanto α es constante.

Por tanto el lugar geométrico que describe I' es un semicírculo.

33)



Sean $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$. Sea H la intersección de la altura trazada desde A con BC . Sea $h = AH$ y sea $x = BH$, entonces $HC = a - x$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $\triangle ABH$, obtenemos

$$h = \sqrt{c^2 - x^2} \quad . \text{ De aquí que}$$

$$\text{Área } (\triangle ABC) = \frac{ah}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{(c+x)(c-x)}.$$

Aplicando la ley de los cosenos en el triángulo $\triangle ABC$, tenemos que

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta = a^2 + c^2 - 2ac \frac{x}{c} = a^2 + c^2 - 2ax \quad .$$

Por consiguiente

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

$$\text{Por tanto } \text{Área } (\triangle ABC) = \frac{a}{2} \left[\left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right) \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right) \right]^{1/2}$$

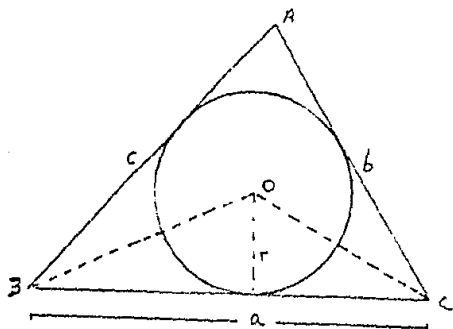
$$= \frac{a}{2} \left[\left(\frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right) \left(\frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a} \right) \right]^{1/2} =$$

$$= \left[\frac{1}{4} ((a+c)^2 - b^2)(b^2 - (a-c)^2) \right]^{1/2} =$$

$$= \left[\left(\frac{a+b+c}{2} \right) \left(\frac{a-b+c}{2} \right) \left(\frac{b-a+c}{2} \right) \left(\frac{b+a-c}{2} \right) \right]^{1/2}$$

$$= \left[(s(s-b)(s-a)(s-c)) \right]^{1/2}$$

34)



Sea O el incentro del triángulo $\triangle ABC$. Notemos que $\text{área}(\triangle ABC) = \text{área}(\triangle BOC) + \text{área}(\triangle COA) + \text{área}(\triangle AOB) = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{1}{2}(a+b+c)r$.

Denotemos por $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Entonces $\text{área}(\triangle ABC) = rs$.

Utilizando la fórmula de Heron, se tiene que:

$rs = \text{área}(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, de modo que

$$r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s^2} = \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$$

35)

$$a + b - \tan(\gamma/2) (a \tan \alpha + \tan \beta) =$$

$$= a + b - \frac{\sin(\gamma/2)}{\cos(\gamma/2)} \left(a \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + b \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right)$$

$$= a + b - a \frac{\sin(\gamma/2)}{\cos(\gamma/2)} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - b \frac{\sin(\gamma/2)}{\cos(\gamma/2)} \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$

$$= \frac{a \cos(\gamma/2) \cos \alpha \cos \beta + b \cos(\gamma/2)}{\cos(\gamma/2) \cos \alpha \cos \beta}$$

$$\frac{\cos \alpha \cos \beta - a \sin(\gamma/2) \cos \beta \sin \alpha - b \sin(\gamma/2) \sin \beta \cos \alpha}{\cos(\gamma/2) \cos \alpha \cos \beta}$$

$$= \frac{a \cos \beta (\cos(\gamma/2) \cos \alpha - \sin(\gamma/2) \sin \alpha) + b \cos \alpha (\cos(\gamma/2) \cos \beta - \sin(\gamma/2) \sin \beta)}{\cos(\gamma/2) \cos \alpha \cos \beta}$$

$$\frac{\cos \beta - b \sin(\gamma/2) \sin \beta}{\cos(\gamma/2) \cos \alpha \cos \beta}$$

$$= \frac{a \cos \beta \cos((\gamma/2) + \alpha) + b \cos \alpha \cos((\gamma/2) + \beta)}{\cos(\gamma/2) \cos \alpha \cos \beta} = ***$$

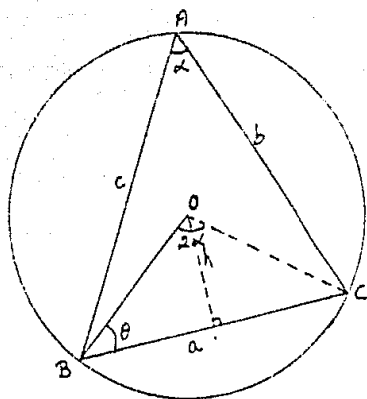
$$= \frac{a \cos \beta \cos((\gamma/2) + \alpha) - b \cos \alpha \cos((\gamma/2) + \beta)}{\cos(\gamma/2) \cos \alpha \cos \beta} =$$

$$= \frac{a \cos((\gamma/2) + \alpha) (a \cos \beta - b \cos \alpha)}{\cos((\gamma/2) \cos \alpha \cos \beta)}$$

Justificación de ***

Ya que $((\gamma/2) + \alpha) + ((\gamma/2) + \beta) = \alpha + \beta + \gamma = \pi$, entonces $\cos((\gamma/2) + \alpha) = \cos(\pi - ((\gamma/2) + \beta)) = -\cos((\gamma/2) + \beta)$.

36)



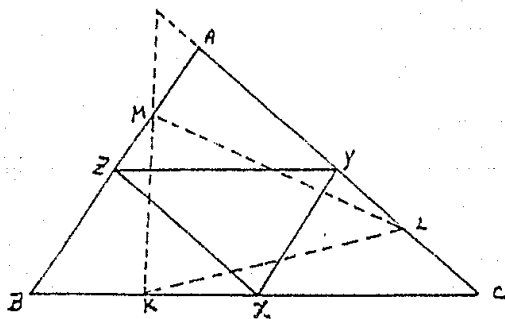
Aplicando la ley de los senos al triángulo $\triangle OBC$ (ver figura), se tiene $\frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{\sin \theta}$, entonces $\frac{a}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{R}{\sin \theta}$.
 Notemos que $\cos \alpha = \frac{h}{R}$ y $\sin \theta = \frac{h}{R}$.

Por consiguiente

$$\frac{a}{2 \sin \alpha} = R$$

Por tanto $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.

37)



Trazando el triángulo $\triangle XYZ$, obtenemos dentro del triángulo $\triangle ABC$ cuatro triángulos congruentes. De manera que $\frac{1}{4}$ área = área ($\triangle XYZ$).

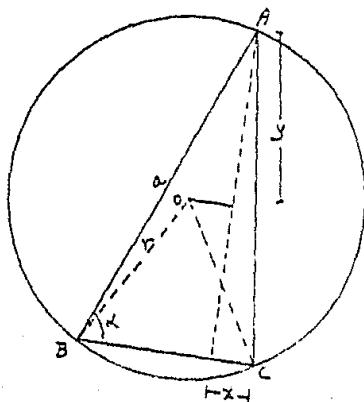
Ya que $BM \parallel XY$, tenemos que área ($\triangle XYZ$) = área ($\triangle XYM$).

Dado que al prolongar la línea KM cortamos a la línea CA en algún punto, esto implica que la altura del triángulo $\triangle XMY$ es menor que la del $\triangle XML$ (tomando como base XM por supuesto). Por tanto área ($\triangle XMY$) < área ($\triangle XML$).

Con un razonamiento análogo al anterior se deduce que área ($\triangle XML$) < área ($\triangle KLM$).

Juntando las expresiones anteriores, se concluye que $\frac{1}{4}$ área ($\triangle ABC$) < área ($\triangle KLM$).

38)



En la figura, notemos que, $\cos \alpha = \frac{(r/2) + x}{a}$
 y $\sin \alpha = \frac{r(\sqrt{3}/2) + y}{a}$. De aquí que

$$r (\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha) =$$

$$r \left(\frac{(r/2) + x}{a} + \frac{\sqrt{3} ((\sqrt{3}/2)r + y)}{a} \right) =$$

$$\frac{(r^2/2) + rx + (3/2) r^2 + \sqrt{3} ry}{a} = \frac{2 r^2 + rx + \sqrt{3} ry}{a} .$$

Lo que queremos probar es que $2 r^2 + rx + \sqrt{3} ry = a^2$.

Por el teorema de Pitágoras se tiene que $a^2 = ((r/2) + x)^2 + ((\sqrt{3}/2)r + y)^2 = \frac{r^2}{4} + rx + x^2 + (3/4)r^2 + \sqrt{3} ry + y^2 =$

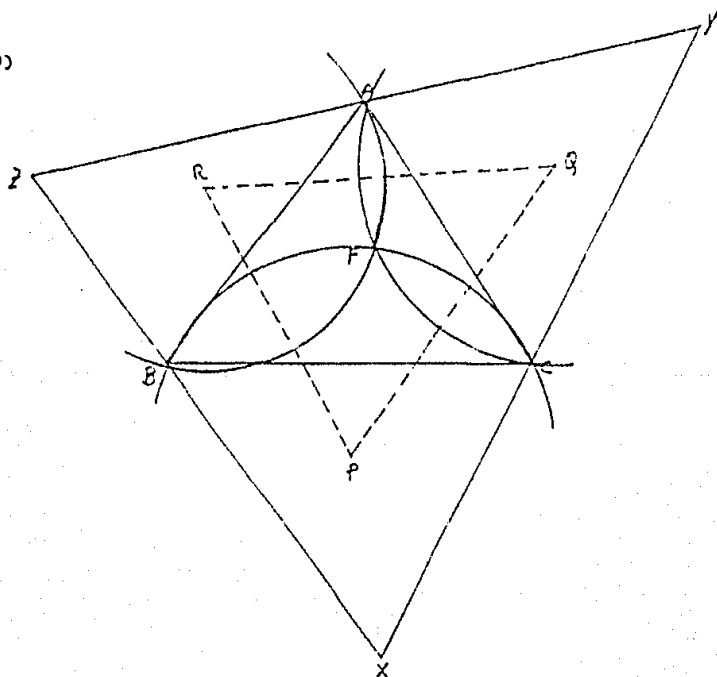
$$r^2 + rx + \sqrt{3} ry + (x^2 + y^2) = r^2 + rx + \sqrt{3} ry + r^2$$

Por tanto $a = 2 r^2 + rx + \sqrt{3} ry$.

Por consiguiente

$$a = r (\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha) .$$

39)



a) Supongamos que los circuncírculos de los triángulos $\triangle BCX$ y $\triangle ACY$ se intersectan en un punto F, entonces $\text{ang BFC} = \pi - \text{ang X}$ y $\text{ang CFA} = \pi - \text{ang Y}$.

De modo que, $\text{ang BFA} = 2\pi - (\text{ang BFC} + \text{ang CFY}) = \text{ang X} + \text{ang Y} = \pi - \text{ang Z}$

Por tanto $\text{ang BFA} = \pi - \text{ang Z}$. De modo que, los puntos B, F, A y Z son concíclicos. Es decir F está en el circuncírculo del triángulo $\triangle BZA$.

b)

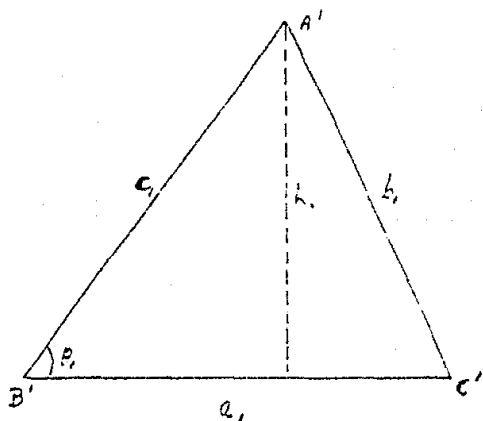
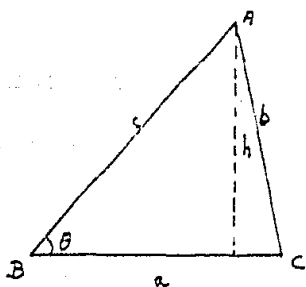
Ya que RQ y RP bisectan a AF y BF respectivamente, tenemos que $\text{ang PRQ} = \text{ang PRF} + \text{ang FRQ} = \frac{1}{2} (\text{ang BRF} + \text{ang FRA}) = \frac{1}{2} (\text{ang BRA}) = \text{ang BZA}$.

Por tanto $\text{ang BZA} = \text{ang PQR}$.

De igual manera se pueden probar la igualdad de los otros ángulos.

Por tanto los triángulos $\triangle PQR$ y $\triangle XYZ$ son semejantes.

40)



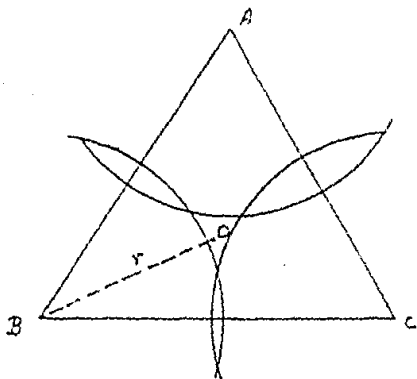
Sean a, b, c y a_1, b_1, c_1 las longitudes de los lados de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ respectivamente. Sean h y h_1 las alturas de dichos triángulos por A y A' respectivamente. Hacemos $\theta = \text{ang } B$ y $\theta_1 = \text{ang } B'$.

Como alguno de los ángulos de $\triangle ABC$ es menor o igual que el ángulo respectivo en $\triangle A'B'C'$, sin pérdida de generalidad supongamos que $\theta \leq \theta_1$. Entonces $\sin \theta \leq \sin \theta_1$.

Notemos que $\sin \theta = \frac{h}{c}$ y $\sin \theta_1 = \frac{h_1}{c_1}$. Además, como $c \leq c_1$, entonces $\frac{h}{c} \leq \frac{h_1}{c_1}$. De aquí que $h \leq h_1$. Entonces $\frac{ah}{2} \leq \frac{a_1 h_1}{2}$.

Por tanto $\text{área}(\triangle ABC) \leq \text{área}(\triangle A'B'C')$.

41)

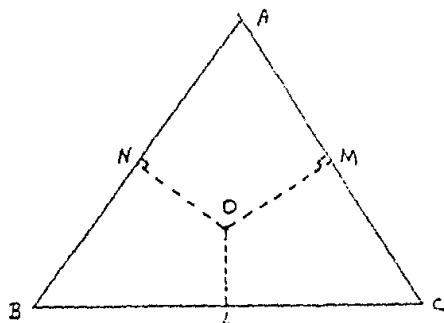


→)

Sea O el circuncentro del triángulo $\triangle ABC$. Supongamos que los círculos cubren al triángulo. Como $\triangle ABC$ es acutángulo, O está adentro de él. Además, $OA = OB = OC = r$.

Supongamos que $r > s$, entonces O no está en ninguno de los círculos con centros en A , B y C . Por lo tanto los tres círculos no cubren al triángulo. Pero esto es una contradicción. Entonces $s \geq r$.

•)



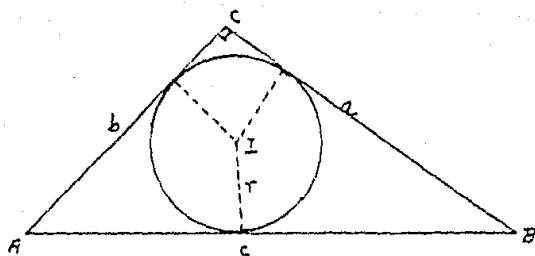
Supongamos que $s \geq r$. Basta probar que los círculos de radio r centrados en A , B y C cubren al triángulo $\triangle ABC$.

Sean L , M y N los pies de las perpendiculares desde O a los lados BC , AC y AB respectivamente. Ya que el segmento AN es perpendicular al segmento NO , se tiene que $AN < AO$. En forma similar, tenemos que $AM < AO$.

De aquí que el cuadrilátero $AMON$ está dentro del círculo que pasa por O y centrado en A . Similarmente, los cuadriláteros $BLON$ y $CLOM$ están dentro de los círculos que pasan a través de O (de radio r) y con centros en B y C respectivamente.

Como $\triangle ABC$ es la unión de los tres cuadriláteros, entonces está contenido en la unión de los tres círculos.

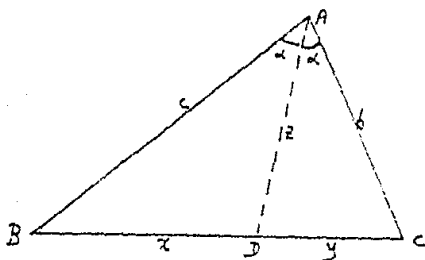
(2)



Sea $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$.

Como $\frac{ab}{2} = \text{área}(\triangle ABC) = \text{área}(\triangle AIB) + \text{área}(\triangle BIC) + \text{área}(\triangle CIA)$
 $= \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2}$, tenemos que $r = \frac{ab}{a + b + c}$.

43)



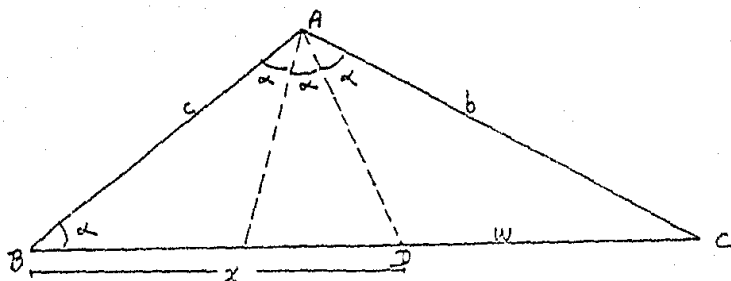
Sea D la intersección de la bisectriz del ángulo A con BC.

Sean $x = BD$, y $y = DC$. Entonces $a = x + y$. Notemos que $x = AD$.

Notemos que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$ son semejantes, así que
 $\frac{y}{b} = \frac{b}{a}$ y $\frac{z}{c} = \frac{c}{a}$, de modo que $y = \frac{b^2}{a}$ y $z = \frac{bc}{a}$. Entonces
 $a = x + y = \frac{bc}{a} + \frac{b^2}{a}$.

Por tanto $b(b + c) = a^2$.

44)



Sea D el punto de intersección de BC con una de las líneas que triseca al ángulo BAC.

Sean $x = BD$, $w = DC$ y $z = AD$. Notemos que $a = x + w$, de aquí que $x = a - w = \frac{a^2 - b^2}{a}$.

Por el problema anterior, tenemos que $z(z + c) = x^2, \dots (1)$

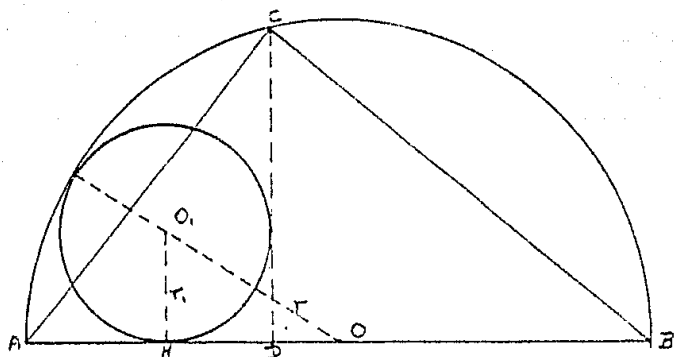
Como los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$ son semejantes, tenemos que

$$\frac{z}{b} = \frac{c}{a} \quad \text{y} \quad \frac{w}{b} = \frac{b}{a}, \quad \text{por lo que (1) toma la forma;}$$

$$\frac{bc}{a} \left(\frac{bc}{a} + c \right) = \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2}$$

$$\text{Por tanto } c^2 b = (a + b)(a - b)^2.$$

45)



Sea r y r_1 los radios de K y K_1 respectivamente. Como $r_1 = HD$, por el teorema de Pitágoras, tenemos que

$$(r - r_1)^2 = r_1^2 + (r_1 + DO)^2. \text{ Desarrollando se tiene}$$

$$r^2 - 2rr_1 + r_1^2 = r_1^2 + r_1^2 + 2r_1DO + DO^2. \text{ De modo que}$$

$$r^2 - DO^2 = r_1^2 + 2r_1(r + DO) = r_1^2 + 2r_1(BD). \text{ Entonces}$$

$$(r + DO)(r - DO) = r_1^2 + 2r_1(BD). \text{ Sustituyendo}$$

$$(BD)(AD) = r_1^2 + 2r_1(BD) \dots\dots\dots (1)$$

Por otro lado se tiene que los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ y $\triangle CBD$ son semejantes, por lo que

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \text{ y } \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}. \text{ De modo que } AD = \frac{(AC)^2}{AB} = \frac{b^2}{c} \text{ y}$$

$$BD = \frac{(BC)^2}{AB} = \frac{a^2}{c}$$

$$\text{Entonces (1) toma la forma } \frac{a^2}{c} \cdot \frac{b^2}{c} = r_1^2 + 2r_1 \cdot \frac{a^2}{c}. \text{ De aquí que}$$

$$\frac{a^2 b^2}{c^2} + \left(\frac{a^2}{c}\right)^2 = r_1^2 + 2r_1 \cdot \frac{a^2}{c} + \left(\frac{a^2}{c}\right)^2.$$

Entonces

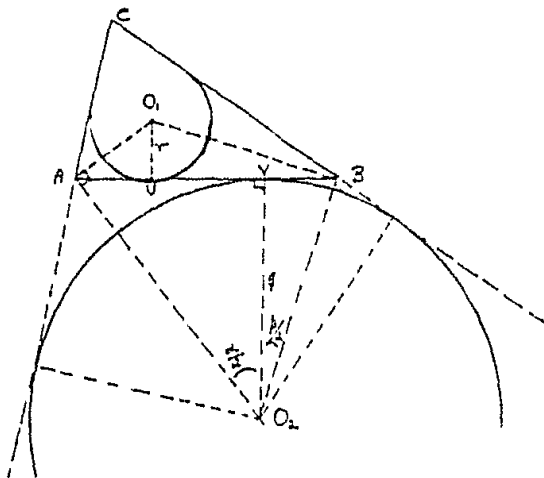
$$\frac{a^2(a^2 + b^2)}{c^2} = \left[r_1 + \frac{a^2}{c} \right]^2 . \text{ De modo que}$$

$$\frac{a^2 c^2}{c^2} = \left[r_1 + \frac{a^2}{c} \right]^2 . \text{ Por consiguiente}$$

$$a = r_1 + \frac{a^2}{c} . \text{ Por tanto } r_1 + BD = a , \text{ es decir } a = BH.$$

Por tanto, el triángulo ABCH es isósceles.

46)



Sean U y V los puntos de contacto de AB con K_1 y K_2 respectivamente. Sea $c = AB$.

Es fácil probar que $\text{ang } O_1 A O_2 = \frac{\pi}{2}$. De manera que $\text{ang } V O_2 A = \frac{\pi}{2} - \text{ang } V A O_1 = \frac{\alpha}{2}$. De aquí que los triángulos $\triangle A O_1 U$ y $\triangle O_2 A V$ son semejantes.

De forma análoga se argumenta que $\text{ang } B O_2 V = \frac{\beta}{2}$.

Notemos que $AU = \frac{r}{\tan(\alpha/2)}$ y $BV = \frac{r}{\tan(\beta/2)}$.

Por otro lado

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{AV}{q} \text{ y } \tan \frac{\beta}{2} = \frac{BV}{q}$$

$$\text{Por tanto } \frac{r}{\tan(\alpha/2)} + \frac{r}{\tan(\beta/2)} = AU + UB = c$$

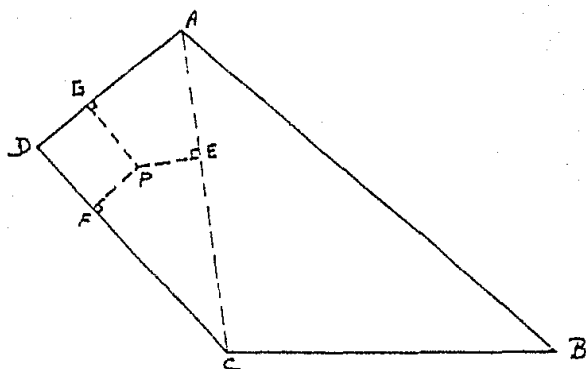
$$AV + VB = q \cdot \tan \frac{\alpha}{2} + q \cdot \tan \frac{\beta}{2}$$

$$\text{Es decir, } \frac{r}{q} = \frac{\tan(\alpha/2) + \tan(\beta/2)}{\frac{1}{\tan(\alpha/2)} + \frac{1}{\tan(\beta/2)}} =$$

$$= \frac{(\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2})(\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2})}{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2}}$$

$$= \tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2}.$$

(47)



Sea ABCD el cuadrilátero .

Tracemos una de las diagonales de ABCD, digamos AC; Tomemos un punto P en alguno de los triángulos formados. A partir de este punto tracemos las perpendiculares a los lados del triángulo formado. Primero vamos a mostrar que siempre se puede tomar P de manera que los pies de las perpendiculares quedan en el triángulo; En caso de que el triángulo formado fuera acutángulo, cualquier

punto P adentro de este, cumple con lo requerido (en nuestro caso, el triángulo $\triangle ADC$); si el triángulo formado no es acutángulo, lo que hacemos es fijarnos en el ángulo mayor (en este caso $\triangle ACD$). A partir de B trazamos las perpendiculares de BC y AC. Con esto formamos el triángulo $\triangle XBY$; cualquier punto P adentro de este triángulo, cumple con el requisito. Entonces, aseguramos la existencia de P.

Desde P tracemos líneas perpendiculares hacia AC, CD y DA.

Como $\text{ang } AGP + \text{ang } AEP = \pi$, entonces el cuadrilátero AGPE es inscribible. De forma análoga se justifica que los otros dos cuadriláteros son inscribibles.

Dado que en el triángulo $\triangle ABC$ pueden formarse otros tres cuadriláteros inscribibles, en total se tienen seis cuadriláteros inscribibles.

48) Para mostrar esto, primero consideremos cuatro puntos P_1, P_2, P_3 y P_4

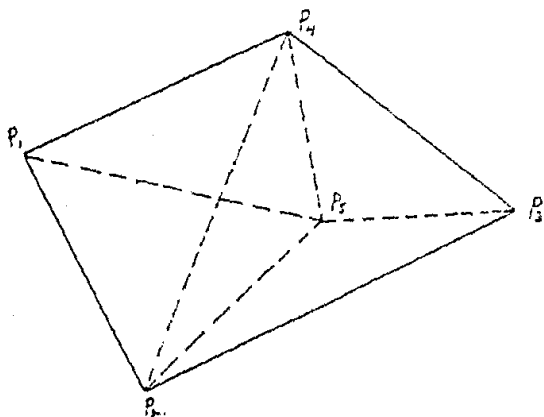
Caso (i) Uno de los puntos, digamos P_4 , está dentro del triángulo formado por los otros tres. Los tres ángulos con vértice en P_4 suman 360° , pero cada uno de ellos es también menor que 180° , por lo que al menos dos son mayores a 90° . De aquí que al menos hay dos triángulos obtusángulos que tienen como vértice a P_4 .

Caso (ii) Los cuatro puntos forman un cuadrilátero convexo. Ya que la suma de sus ángulos interiores es 360° , al menos uno de ellos es mayor o igual a 90° , es decir al menos uno de los triángulos formados es no acutángulo.

Ahora consideremos los casos posibles para los cinco puntos P_1 .

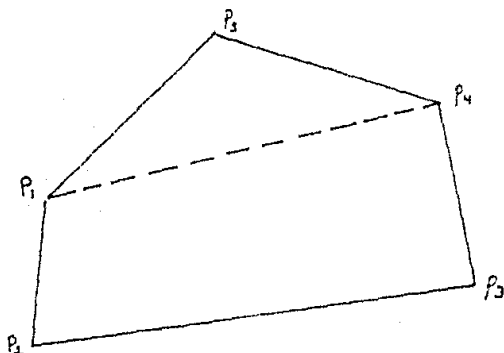
P_2 , P_3 , P_4 y P_5 .

Caso a) La cáscara convexa (el conjunto más pequeño que los contiene) de los cinco puntos, es un triángulo, digamos P_1 , P_2 y P_4 . Entonces por i), tenemos que hay al menos dos triángulos obtusángulos que tienen como uno de sus vértices a P_4 y los otros vértices se toman de los puntos P_1 , P_2 y P_3 , y también por i), hay otros dos triángulos obtusángulos con P_3 y con los puntos P_1 , P_2 y P_4 . Así que por lo menos hay cuatro triángulos obtusángulos.



Caso b) La cáscara convexa es un cuadrilátero, digamos $P_1P_2P_3P_4$, y P_5 está adentro. Con los vértices del cuadrilátero podemos formar cuatro triángulos, entre los cuales, P_5 está dentro de dos de ellos. En la figura, en los triángulos $\triangle P_1P_2P_5$ y $\triangle P_2P_3P_5$. Como en el caso i), dos pares ($\triangle P_1P_2P_5$, $\triangle P_2P_3P_5$ y $\triangle P_2P_3P_5$, $\triangle P_3P_4P_5$) son triángulos no acutángulos con vértice P_5 . De estos pares, sólo puede haber un elemento en común (en el dibujo es $\triangle P_2P_3P_5$). De aquí que tengamos al menos tres triángulos no acutángulos con

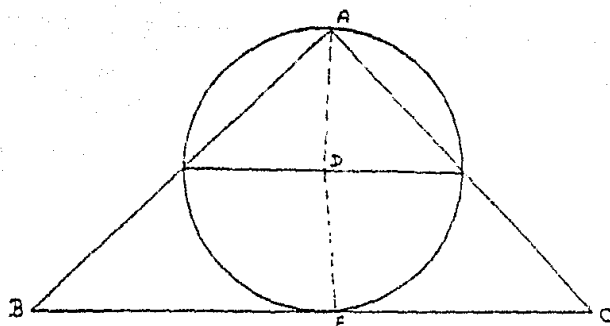
vértice P_5 . Además uno de los ángulos P_1, P_2, P_3, P_4 es mayor o igual a 90° , dando lugar a otro triángulo no acutángulo.



Caso c) Los puntos forman un pentágono convexo $P_1P_2P_3P_4P_5$. La suma de los ángulos interiores es 540° , por lo que al menos dos ellos son no agudos. Esto da lugar a dos triángulos no agudos. Si los tres ángulos interiores restantes son agudos, dos de ellos deben de ser adyacentes, digamos P_2 y P_3 , y por el caso (a) aplicado al cuadrilátero $P_1P_2P_3P_4$, uno sus ángulos $P_1P_3P_4$ ó $P_4P_1P_2$ no es agudo. Dando lugar a un triángulo no acutángulo. Este triángulo es diferente a los otros dos que ya habíamos obtenido porque los obteníamos del hecho de que dos de los ángulos en P_1, P_4 o P_5 eran mayores o iguales que 90° y entonces esos dos triángulos tenían a P_5 como vértice.

Como con los cinco puntos podemos formar diez triángulos, de los cuales al menos tres no son acutángulos, inferimos que a lo más hay siete triángulos no acutángulos.

49)



→)

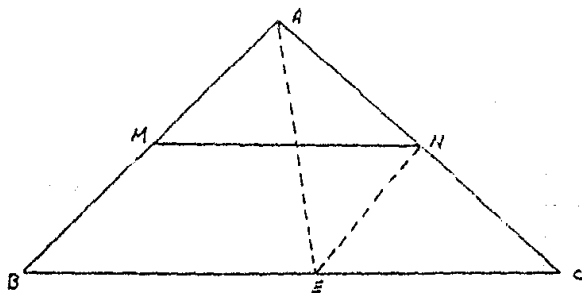
Supongamos que E es un punto de la intersección del circuncírculo de $\triangle AMN$ con BC. Los triángulos $\triangle ADN$ y $\triangle MDE$ son semejantes. Así que;

$\frac{AD}{MD} = \frac{DN}{DE}$, entonces $AD \cdot DE = MD \cdot DN$. Como los triángulos $\triangle AMD$ y $\triangle ABE$ son semejantes, entonces $AD = DE$.

Por tanto $AD \cdot DE = AD^2 = MD \cdot DN$.

Entonces AD es la media geométrica de MD y DN.

→)

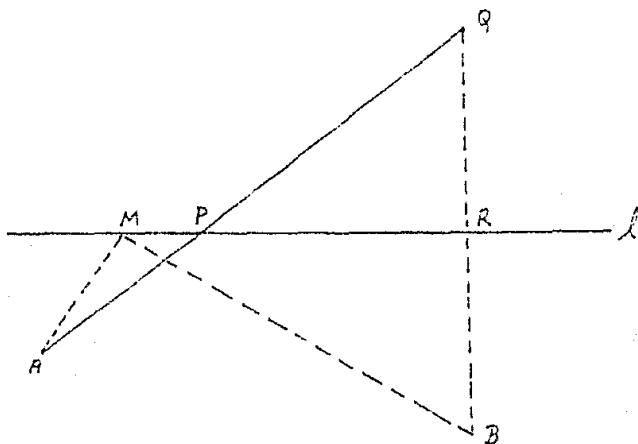


Supongamos que AD es la media geométrica de MD y DN. Entonces $AD \cdot DE = MD \cdot DN$. De aquí que :

$\frac{AD}{MD} = \frac{DN}{DE}$. Por consiguiente, los triángulos $\triangle ADM$ y $\triangle DNE$ son semejantes. Entonces $\angle M = \angle E$. De manera que el cuadrilátero AMNE es concíclico.

Por tanto el circuncírculo del triángulo $\triangle AMN$ intersecta BC.

50)

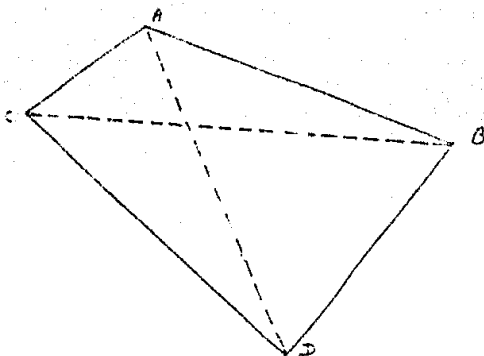


Tracemos por B una línea perpendicular a l . Sea R el punto de intersección de esta perpendicular con l . Consideremos un punto Q diferente de B sobre la línea BR tal que $RQ = BR$. Notemos que para cualquier punto M sobre l , $MB = MQ$.

Aseguramos que el punto P es la intersección de l con AQ.

En efecto. Si M es cualquier otro punto sobre l , $AM + MB = AM + MQ > AP + PQ = AP + PB$.

51)



Sabemos que $AC + BD + CB = 16 \dots\dots (1)$.

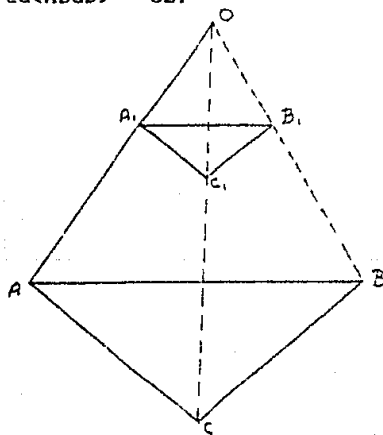
Notemos que el área máxima del cuadrilátero se alcanza cuando $\text{ang } ACB = \text{ang } DBA = 90^\circ$.

En este caso, $\text{área}(ABCD) = \frac{1}{2} (AC)(BC) + \frac{1}{2} (BD)(BC) = \frac{1}{2} BC(AC + BD) \dots\dots (2)$

Entonces encontrar el máximo de (2) bajo la condición (1) es equivalente a encontrar el máximo $BC(AC + BD)$ sujeto a (1). Como el producto de dos números xy que sumados son una constante es máximo cuando son iguales, tenemos que nuestro problema se resuelve cuando $BC = AC + BD$.

Entonces de (1) tenemos que $2BC = 16$, de aquí que $BC = 8 = AC + BD$. Por tanto, $\text{área}(ABCD) = 32$.

52)



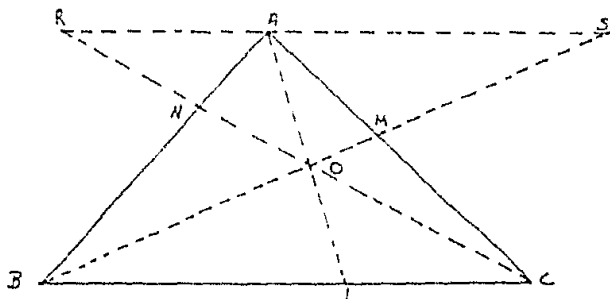
Supongamos que las líneas BB_1 y CC_1 concurren en un punto O . Queremos ver que la línea AA_1 también pasa por O . Para esto, basta probar que $\angle C_1OA_1 = \angle COA$. Entonces probaremos que los triángulos $\triangle COA$ y $\triangle C_1OA_1$ son semejantes.

Sabemos que los triángulos $\triangle OC_1B_1$ y $\triangle OCB$ son semejantes, y como $\angle OC_1A = \angle OCA$, entonces

$$\frac{OC_1}{OC} = \frac{C_1B_1}{CB} = \frac{A_1C_1}{AC}$$

De aquí que los triángulos $\triangle C_1OA_1$ y $\triangle COA$ son semejantes. Por tanto las líneas AA_1 , BB_1 y CC_1 son concurrentes.

53)



⇒)

Tracemos una línea l , paralela a BC , que pase por A y sean R y S los puntos de intersección de CN y BM con l respectivamente.

Nótese que los triángulos $\triangle ANR$ y $\triangle NCB$ son semejantes. De modo que:

$$\frac{AN}{NB} = \frac{AR}{BC}.$$

Por razones semejantes se tiene que:

$$\frac{CH}{HA} = \frac{BC}{SA} \text{ y } \frac{BL}{LO} = \frac{AS}{AO} \text{ y } \frac{LC}{LO} = \frac{RA}{AO} . \text{ Así que } \frac{BL}{LC} = \frac{AS}{AR}$$

Por tanto $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AR}{BC} \cdot \frac{SA}{AR} \cdot \frac{BC}{SA} = 1 .$

Inversamente, supongamos que BM y CN se intersectan en el punto O y supongamos que AO corta a BC en un punto Q. De aquí tenemos que

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BQ}{QL} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

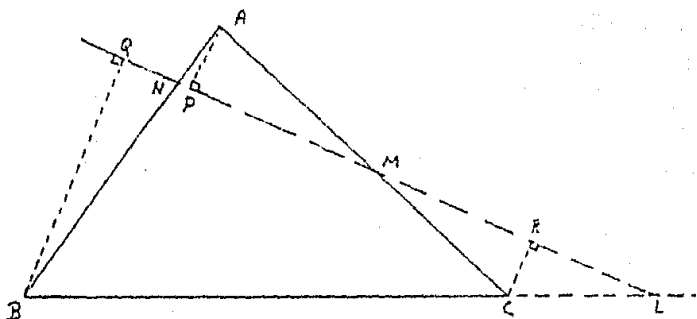
Por hipótesis sabemos que

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BQ}{QL} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA}$$

$$\text{Entonces } \frac{BQ}{QL} = \frac{BL}{LC} . \text{ De aquí que } L = Q .$$

Por tanto AL pasa por O.



Sean AP, BQ y CR las perpendiculares desde A, B y C respectivamente, a la línea LM.

Es fácil ver que los triángulos $\triangle APN$ y $\triangle BQN$ son semejantes y

también los triángulos $\triangle QBL$ y $\triangle RCL$. De aquí que

$$\frac{AN}{NB} = \frac{AP}{BQ} \quad \text{y} \quad \frac{BL}{LC} = \frac{BO}{CR}$$

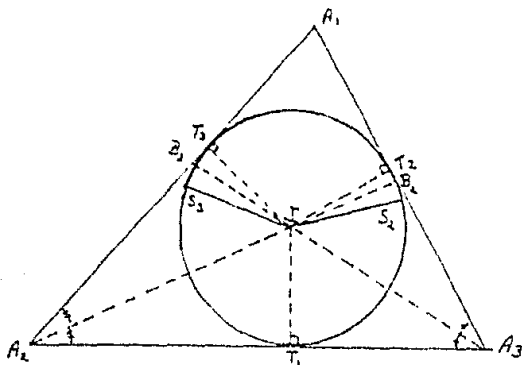
Los triángulos $\triangle APH$ y $\triangle CRM$ también son semejantes. De modo que

$$\frac{CH}{HA} = \frac{CR}{AP}$$

Por tanto $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CH}{HA} = \frac{AP}{BQ} \cdot \frac{BO}{CR} \cdot \frac{CR}{AP} = 1$

Inversamente. La prueba de la afirmación inversa es análoga a la del problema anterior

55)



Sea I el incentro del triángulo $\triangle A_1A_2A_3$.

Como el cuadrilátero $T_3A_2T_1I$ es cíclico, entonces $\text{ang } T_2IT_1 = \pi - \text{ang } A_2$.

Ya que $\text{ang } T_3BaA_2$ es el ángulo exterior del triángulo $\triangle B_3A_2A_3$, entonces $\text{ang } T_3BaA_2 = \text{ang } A_2 + \frac{1}{2} \text{ang } A_2$. Además $\text{ang } T_2IB_2 = \frac{\pi}{2} - \text{ang } T_3BaI$. De modo que

$$\text{ang } T_2IS_2 = 2 \text{ang } T_2IB_2 = \pi - 2 \text{ang } A_2 - \text{ang } A_2.$$

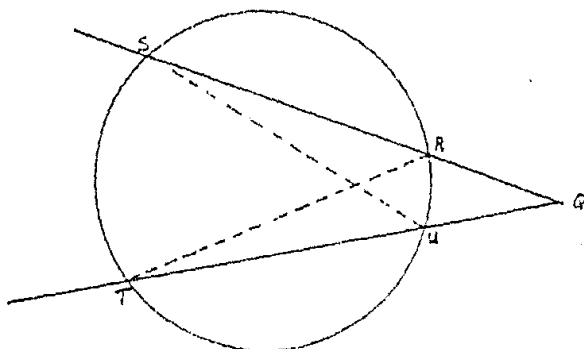
Por consiguiente, $\text{ang } S_2IT_1 = \text{ang } T_2IT_1 - \text{ang } T_2IS_2 = \text{ang } A_2 + \text{ang } A_1$.

Por tanto $\text{ang } S_2IT_1 = \text{ang } A_2 + \text{ang } A_1$.

De manera análoga se prueba que $\text{ang } S_2IT_1 = \text{ang } A_1 + \text{ang } A_2$.

Por tanto $S_2S_1 \perp A_2A_1$.

56)

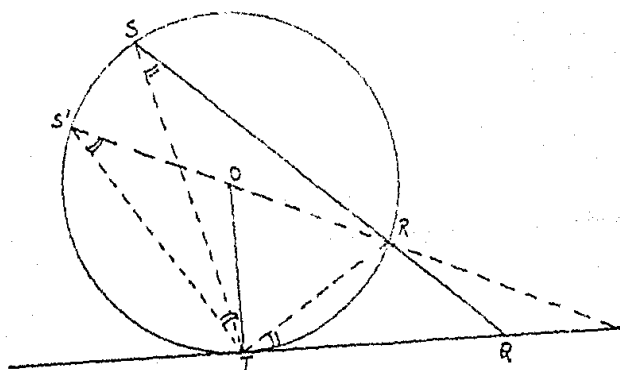


Como $\text{ang } RTU = \text{ang } USR$, se sigue que los triángulos ΔSUQ y ΔTRQ son semejantes. De modo que:

$$\frac{QS}{QT} = \frac{QU}{QR}$$

Por tanto $QS \cdot QR = QU \cdot QT$.

57)



Tracemos los segmentos ST y RT. Probaremos que los triángulos $\triangle QST$ y $\triangle QTR$ son semejantes.

Primero probaremos que $\angle RST = \angle RTQ$. Una manera de probar esto, es hacer tender S hacia T. Sin embargo, daremos otra prueba:

Sea O el centro de C . Tracemos el segmento OT . Sea S' el punto de intersección de la línea OR con C . Notemos que $\text{ang } OS'T = \text{ang } RST$.

Como $\text{ang QTR} + \text{ang RTQ} = \frac{\pi}{2}$ y $\text{ang RTO} + \text{ang OTS}' = \frac{\pi}{2}$,
entonces $\text{ang QTR} = \text{ang OTS}'$.

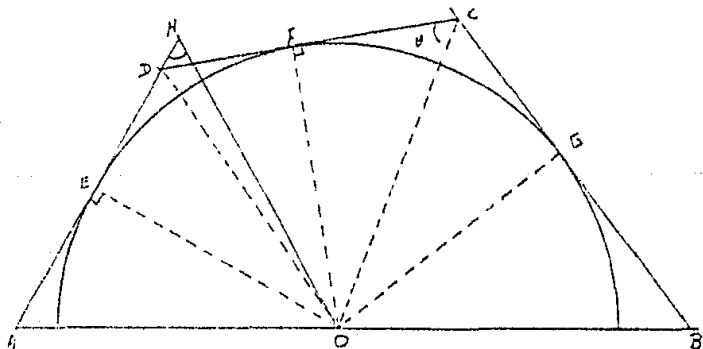
Ya que el triángulo $\triangle OTS'$ es isósceles, tenemos que $\text{ang } OTS' = \text{ang } OS'T$. Por tanto $\text{ang } RST = \text{ang } RTQ$.

Además ang SQT es un ángulo común de los dos triángulos. De modo que dichos triángulos tienen dos ángulos correspondientes iguales. Por consiguiente son semejantes.

Entonces, $\frac{QS}{QT} = \frac{QT}{QR}$

Por tanto $QS \approx QR \approx QT^2$.

58)



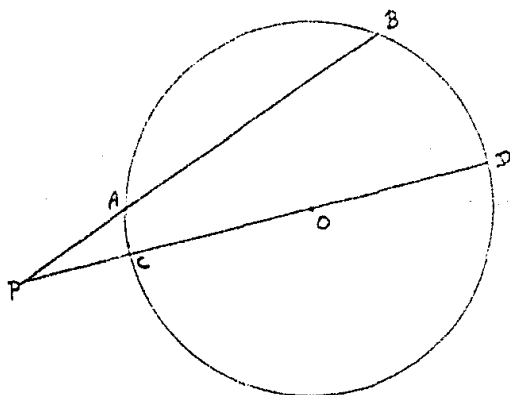
Sea $\theta = \text{ang } FCO$, donde F es el punto de contacto de CD con K. Sobre la línea AD tracemos un punto H tal que $EH = FC$, como en la figura. Entonces los triángulos $\triangle OFC$ y $\triangle OEH$ son congruentes. Así que $\text{ang } EHO = \theta$. Notemos que $\text{ang } OCG = \theta$.

Por otro lado el cuadrilátero ABCD es concíclico, de modo que $\text{ang } HAO = \pi - 2\theta$. Por consiguiente, $\text{ang } HOA = \pi - \theta - (\pi - 2\theta) = \theta$. De modo que $AH = AO$.

Entonces $AO = AH = AE + EH = AE + FC = AE + CG$.

Por tanto $AO = AE + GC$.

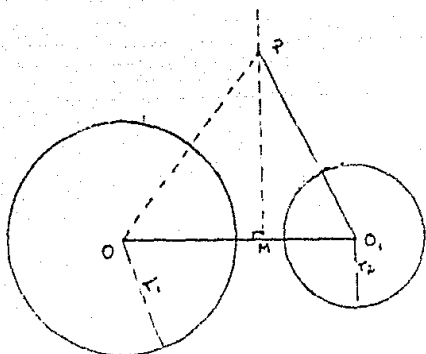
59)



Sean C y D los puntos de intersección de K con la línea OP. Entonces, $PB \cdot PA = PD \cdot PC = (PO + r)(PO - r) = PO^2 - r^2$.

Por tanto $PB \cdot PA = PO^2 - r^2$.

60)



Para probar que el lugar geométrico es una línea recta, consideremos dos circunferencias C_1 y C_2 no concéntricas cuyos centros son O y O_1 y cuyos radios son r_1 y r_2 respectivamente. Sea P un punto que tiene la misma potencia con respecto a C_1 y C_2 . Dibujemos una línea PM , perpendicular a la línea de los centros OO_1 . Entonces

$$PO^2 - r^2 = PO_1^2 - r_1^2$$

Restando MP^2 , ver figura, obtenemos ;

$$OM^2 - r^2 = MO_1^2 - r_1^2 .$$

Ya que $OM + MO_1 = OO_1$, tenemos que $OM - MO_1 = \frac{r^2 - r_1^2}{OO_1}$.

Notemos que esta última expresión es constante.

Afirmamos que hay un sólo punto M que satisface estas relaciones.

En efecto. Supongamos que un punto N también cumple que :

$$ON + NO_1 = \frac{r^2 - r_1^2}{OO_1} , \text{ entonces}$$

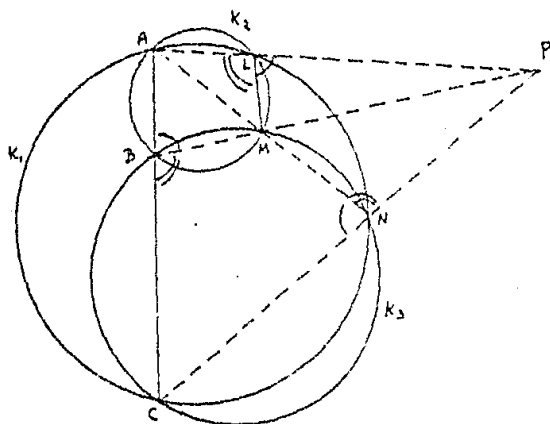
$$OM - MO_1 = ON - NO_1 . \text{ De aquí que } ON - MN - MO_1 = ON + MN - MO_1 .$$

Por consiguiente $MN = 0$, es decir $N = M$.

Por tanto, si un punto tiene potencias iguales con respecto a las dos circunferencias C_1 y C_2 , está en una perpendicular a la línea de sus centros.

Supongamos que las dos circunferencias se intersectan en dos puntos distintos, R y Q. Ya es fácil probar que el eje radical de C_1 y C_2 es la línea que une R y Q.

61)



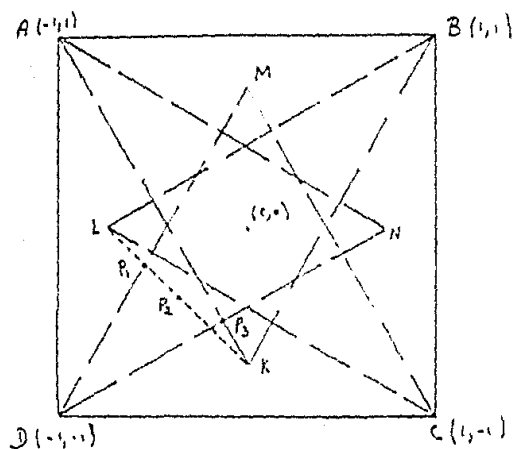
Aseguramos que los puntos C, N y P están alineados. Notemos que la potencia de P con respecto a K_1 y K_2 es la misma porque A, L y P están alineados. Por otra parte la potencia de P respecto K_2 y K_3 es la misma porque B, N y P están alineados. Por tanto la potencia de P con respecto a K_1 y K_3 es la misma. Entonces P está en el eje radical de K_1 y K_3 . Como se vió en el problema 62, el eje radical de K_1 y K_3 es la recta que une a C y N. Por tanto P, C y N están alineados.

Como $\text{ang PLM} + \text{ang MLA} = \pi$, $\text{ang CBM} + \text{ang MBA} = \pi$ y $\text{ang ALM} +$

$\text{ang ABM} = \pi$, entonces $\text{ang PLM} = \text{ang ABM}$ y $\text{ang ALM} = \text{ang CBM}$. Por consiguiente $\text{ang MNP} = \text{ang ALM}$. De modo que $\text{ang PLM} + \text{ang MNP} = \pi$.

Por tanto L, M, N y P son concíclicos.

623



Introduzcamos un sistema de coordenadas de tal manera que el origen quede colocado en el centro del cuadrado. Supongamos que el cuadrado es de lado 2. Entonces las coordenadas de A, B, C y D son: $A = (-1,1)$, $B = (1,1)$, $C = (1,-1)$ y $D = (-1,-1)$. De modo que las coordenadas de K, L, M y N son: $K = (0, 1 - \sqrt{3})$,

$$L = (-\sqrt{3} + 1, 0), M = (0, \sqrt{3} - 1) \text{ y } N = (\sqrt{3} - 1, 0).$$

Sea P_1 el punto medio del segmento DN , que es

$$P_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}-2}{2} \right)$$

Sea P_2 el punto medio del segmento LK , que es

$$P_2 = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)$$

Calculemos las distancias de P_1 y P_2 al origen, $d(P_1, 0)$ y $d(P_2, 0)$,

$$d(P_1, 0) = \left[\frac{1}{4} + \frac{3+4-4\sqrt{3}}{4} \right]^{1/2} = \left[2 - \sqrt{3} \right]^{1/2}$$

$$\begin{aligned} d(P_2, 0) &= \left[\frac{1+3-2\sqrt{3}}{4} + \frac{1+3-2\sqrt{3}}{4} \right]^{1/2} \\ &= \left[2 - \sqrt{3} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Notemos que las dos distancias son iguales.

Sea P_3 el punto medio del segmento DN , que es :

$$P_3 = \left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

Calculemos las distancias $d(P_1, P_2)$ y $d(P_2, P_3)$, los cuales

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \left[\frac{(-2 + \sqrt{3})^2}{4} + \frac{(2\sqrt{3} - 3)^2}{4} \right]^{1/2} \\ &= \left[7 - 4\sqrt{3} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} d(P_2, P_3) &= \left[\frac{(3 - 2\sqrt{3})^2}{4} + \frac{(2 - \sqrt{3})^2}{4} \right]^{1/2} \\ &= \left[7 - 4\sqrt{3} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

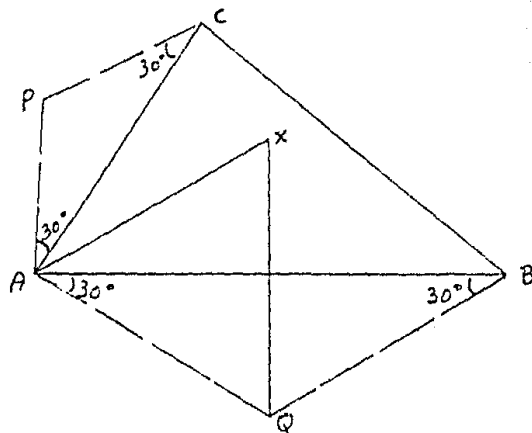
Notemos que las distancias son iguales.

Como la figura es simétrica, todas las demás distancias se chequean de manera análoga. Por tanto, los doce puntos son los

vértices de un dodecágono regular.

63)

a)



Primero mostraremos que $\text{ang PAX} = \text{ang CAB}$.

Como el triángulo $\triangle QXA$ es equilátero, entonces $\text{ang QAX} = 60^\circ$. De aquí que $\text{ang PAX} = \text{ang PAB} - \text{ang XAB} = (30^\circ + \text{ang CAB}) - 30^\circ = \text{ang CAB}$. Por consiguiente $\text{ang PAX} = \text{ang CAB}$.

Ahora mostraremos que $\frac{PA}{CA} = \frac{AX}{AB}$

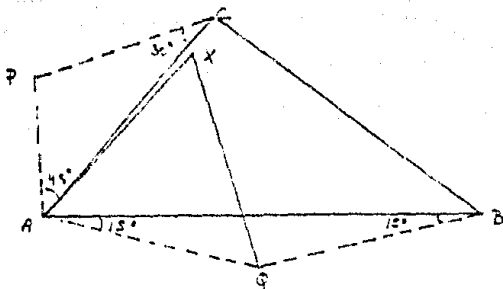
Notemos que los triángulos $\triangle PAC$ y $\triangle QAB$ son semejantes. De modo que

$$\frac{PA}{AQ} = \frac{AC}{AB}, \text{ pero } AX = AQ. \text{ Por consiguiente}$$

$$\frac{PA}{AC} = \frac{AX}{AB}.$$

Por tanto, los triángulos $\triangle PAX$ y $\triangle ABC$ son semejantes.

b)



Primero mostraremos que $\text{ang PAX} = \text{ang CAB}$.

Como el triángulo ΔXAQ es equilátero, se tiene que $\text{ang XAB} = 45^\circ$.

De aquí que $\text{ang PAX} = \text{ang CAB}$.

Aplicando la ley de los senos al triángulo ΔAPC , tenemos que

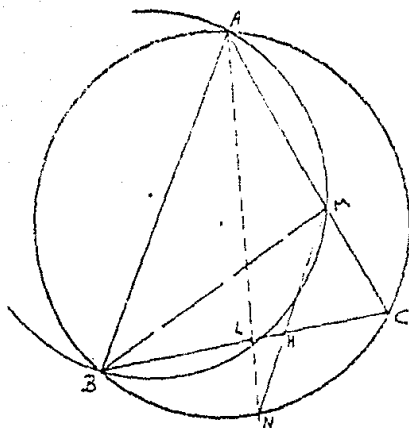
$$\begin{aligned} \frac{PA}{AC} &= \frac{\text{sen } 30^\circ}{\text{sen } 105^\circ} = \frac{\text{sen } 30^\circ}{\text{sen}(180^\circ - 75^\circ)} = \frac{\text{sen}(15^\circ + 15^\circ)}{\text{sen } 75^\circ} \\ &= \frac{2 \text{ sen } 15^\circ \cos 15^\circ}{\text{sen}(90^\circ - 15^\circ)} = \frac{2 \text{ sen } 15^\circ \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ} \\ &= 2 \text{ sen } 15^\circ. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{AQ}{AB} &= \frac{\text{sen } 15^\circ}{\text{sen } 150^\circ} = \frac{\text{sen } 15^\circ}{\text{sen}(180^\circ - 30^\circ)} = \frac{\text{sen } 15^\circ}{\text{sen } 30^\circ} \\ &= \frac{\text{sen } 15^\circ}{2 \text{ sen } 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{1}{2 \cos 15^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos 15^\circ} \\ &= \text{sen } 30^\circ \cdot \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{2 \text{ sen } 15^\circ}{\cos 15^\circ} = 2 \text{ sen } 15^\circ. \end{aligned}$$

Por consiguiente $\frac{PA}{AC} = \frac{AQ}{AB} = \frac{AX}{AB}$. De modo que $\frac{PA}{AX} = \frac{AC}{AB}$.

Por tanto los triángulos ΔPAX y ΔABC son semejantes.



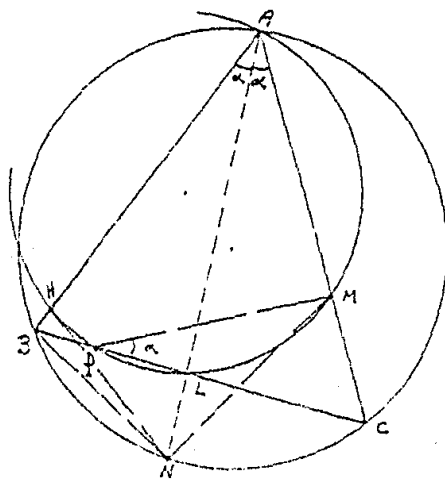
Sea H la intersección del segmento BC y el segmento MN .

Para probar que $\text{área}(\triangle ABNM) = \text{área}(\triangle ABC)$, basta probar que $\text{área}(\triangle BNH) = \text{área}(\triangle MHC)$. Si probamos que $BH \parallel NC$, la conclusión sería inmediata, ya que se tendría que: $\text{área}(\triangle BNC) = \text{área}(\triangle MNC)$. Así que $\text{área}(\triangle BNC) - \text{área}(\triangle NHC) = \text{área}(\triangle MNC) - \text{área}(\triangle NHC)$. De modo que $\text{área}(\triangle BNH) = \text{área}(\triangle MHC)$.

Entonces probaremos que $BH \parallel NC$

$\angle BAN = \angle BCN$ y $\angle MBL = \angle NAC$. Pero $\angle BAN = \angle NAC$, de modo que $\angle MBL = \angle BCN$; y como son ángulos alternos internos , entonces $BH \parallel NC$.

65)



Dado que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle AB_1C_1$ son semejantes, tenemos que $\text{ang } ABC = \text{ang } AB_1C_1$. También $\text{ang } BMD = \text{ang } B_1M'D' = 90^\circ$. De aquí que $\text{ang } BDM = \text{ang } B_1D'M'$. Por consiguiente $\text{ang } AD'L' = \text{ang } ADL$.

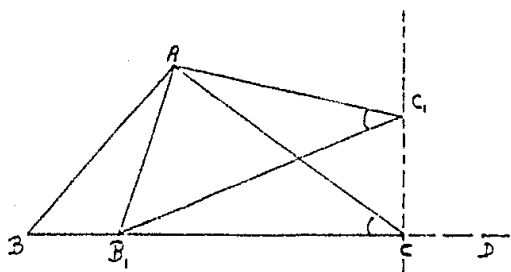
Tracemos un círculo K_1 que pasa por A , D y D' . Sea P el punto de intersección de la línea DL con K_1 . Tomemos un punto D_1 sobre el segmento AD tal que $\text{ang } AD_1P = \text{ang } ADP$. Entonces $\text{ang } AD_1P = \text{ang } AD_1L'$. De aquí que $D_1P = D_1L'$. Por consiguiente D_1L' pasa por P .

Por tanto, las mediatrices concurren.

67) Afirmamos que el lugar geométrico es una línea recta que pasa por C .

Para probar esto consideremos dos casos:

Caso 1) Supongamos que B_1 está en el segmento BC .



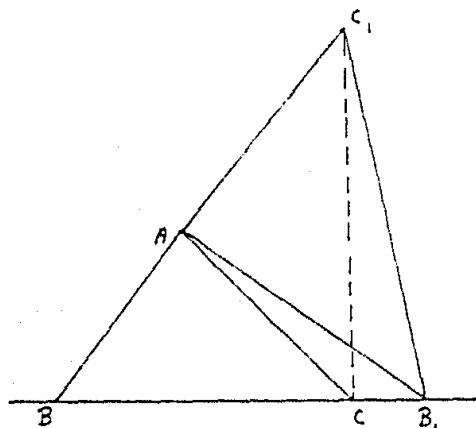
Vamos a probar que $\text{ang } B_1CC_1 = \pi - \text{ang } BAC$. Y entonces el punto C_1 se moverá en una línea recta.

Sea D un punto de la recta BC a la derecha de C . Probaremos que

$\text{ang } C_1CD = \text{ang } BAC.$

Dado que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle AB_1C_1$ son semejantes, tenemos que, $\text{ang } AC_1B_1 = \text{ang } ACB_1$. Esto implica que el cuadrilátero AC_1CB_1 es cíclico. Entonces $\text{ang } B_1CC_1 = \pi - \text{ang } B_1AC_1 = \pi - \text{ang } BAC.$

Caso (1) Supongamos que B_1 no está en el segmento BC .

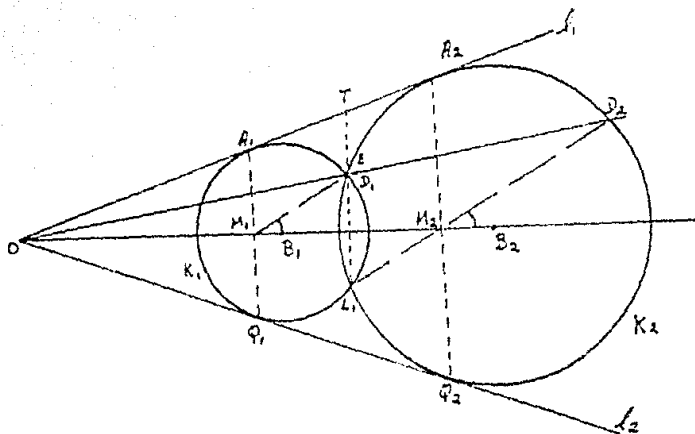


Como en el caso anterior, basta demostrar que $\text{ang } C_1CB_1 = \text{ang } BAC.$

Notemos que $\text{ang } B_1CA + \text{ang } ACB = \pi$. De aquí que $\text{ang } B_1CA + \text{ang } AC_1B_1 = \pi$. Por tanto el cuadrilátero ACB_1C_1 es cíclico.

Por tanto, $\text{ang } C_1CB_1 = \text{ang } B_1AC_1 = \text{ang } BAC.$

El último caso sería cuando B_1 está a la izquierda de B . Este caso se prueba en forma análoga.



Sean B_1 y B_2 los centros de K_1 y K_2 respectivamente. Sean A_1 y Q_1 los puntos de contacto de l_1 y l_2 con K_1 , respectivamente. Sea M_1 el punto medio de A_1 y Q_1 .

Primero probaremos que los triángulos $\Delta M_1 D_1 B_1$ y $\Delta M_2 D_2 B_2$ son semejantes. Para probar que $D_1 B_1$ es paralelo a $D_2 B_2$, sea E un punto sobre la línea OD_2 tal que $EB_1 \parallel D_2 B_2$. Queremos mostrar que $E = D_1$. Los triángulos ΔOEB_1 y $\Delta OD_2 B_2$ son semejantes. De manera que $\frac{EB_1}{D_2 B_2} = \frac{OB_1}{OB_2}$. Por otra parte los triángulos $\Delta OA_1 B_1$ y $\Delta OA_2 B_2$ son semejantes. De modo que $\frac{OB_1}{OB_2} = \frac{A_1 B_1}{A_2 B_2} = \frac{B_1 D_1}{B_2 D_2}$. Por tanto $\frac{EB_1}{D_2 B_2} = \frac{B_1 D_1}{B_2 D_2}$. Es decir EB_1 es igual al radio de K_1 . De modo que E está en la recta OD_2 y en K_1 . Por tanto $E = D_1$. Hemos probado que $D_1 B_1 \parallel D_2 B_2$.

Las rectas $A_1 B_1$ y $A_2 B_2$ son paralelos. De aquí que los triángulos $\Delta A_1 M_1 B_1$ y $\Delta A_2 M_2 B_2$ son semejantes. Así que $\frac{M_1 B_1}{M_2 B_2} = \frac{A_1 B_1}{A_2 B_2} = \frac{B_1 D_1}{B_2 D_2}$. De modo que $\frac{M_1 B_1}{M_2 B_2} = \frac{B_1 D_1}{B_2 D_2}$ y, por lo que probamos antes, ang

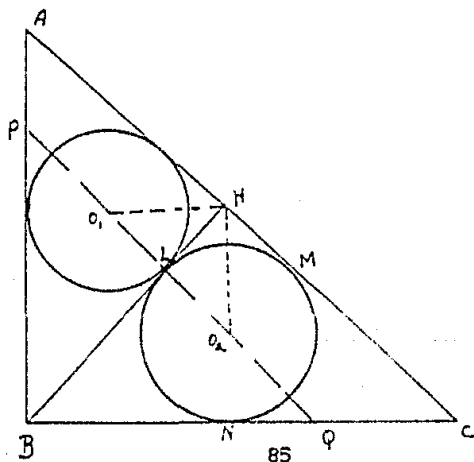
$M_1B_1D_1 = \text{ang } M_2B_2D_2$. Esto implica que los triángulos $\Delta M_1B_1D_1$ y $\Delta M_2B_2D_2$ son semejantes. Probamos esta semejanza porque vamos a usar que $\text{ang } D_1M_1B_1 = \text{ang } D_2M_2B_2$.

Sea T el punto de intersección de las líneas D_1L_1 y A_1A_2 . Notemos que las potencias de T con respecto a K_1 y a K_2 coinciden porque T , D_1 y L_1 están alineados. Como T está en A_1A_2 , la potencia de T con respecto a K_1 es $(TA_1)^2$ y con respecto a K_2 es $(TA_2)^2$. De manera que $TA_1 = TA_2$. Es decir T es punto medio de A_1A_2 .

Sea M el punto de intersección de D_1L_1 con B_1B_2 . Entonces, como D_1L_1 es paralela a A_1Q_1 y T es punto medio de A_1A_2 , tenemos que M es punto medio de M_1 y M_2 . De aquí se sigue que los triángulos ΔM_1MD_1 y ΔM_2MD_2 son congruentes. En particular, $\text{ang } D_1M_1B_1 = \text{ang } D_1M_2M$.

Por simetría, $\text{ang } L_1M_2M = \text{ang } D_1M_2M$. Reuniendo las tres igualdades de ángulos que hemos probado, tenemos que, $\text{ang } L_1M_2M = \text{ang } D_1M_2M = \text{ang } D_1M_1B_1 = \text{ang } D_2M_2B_2$. De modo que $\text{ang } L_1M_2M = \text{ang } D_2M_2B_2$. Por tanto, los puntos L_1 , M y D_2 están alineados.

69)



a)

Sean O_1 y O_2 los incentros de los triángulos $\triangle AHB$ y $\triangle BHC$ respectivamente. Notemos que los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle BHC$ y $\triangle AHB$ son semejantes.

Como BH es perpendicular a AC , tenemos que $\angle O_1HB = 45^\circ = \angle O_2HB$. Así que $\angle O_1HO_2 = 90^\circ$. Ya que $\angle HAO_1 = \frac{1}{2} \angle HAB = \frac{1}{2} \angle HBC = \angle HBO_2$, obtenemos que los triángulos $\triangle O_1AB$ y $\triangle O_2BC$ son semejantes. De aquí que $\frac{O_1H}{O_2H} = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{AB}{BC}$. De manera que $\angle O_1HO_2 = 90^\circ$ y $\frac{O_1H}{O_2H} = \frac{AB}{BC}$. Por tanto los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle O_1HO_2$ son semejantes.

Ya que $\angle HO_1O_2 = \angle BAC = \angle PAH$ y $\angle O_2O_1H + \angle HO_1P = \pi$, tenemos que $\angle PAH + \angle PO_1H = \pi$. Y como los ángulos interiores del cuadrilátero AHO_1P suman 2π , concluimos que $\angle APO_1 + \angle AHO_1 = \pi$, por lo que $\angle APO_1 = 135^\circ$. De aquí que $\angle BPQ = 45^\circ$. Y entonces $\angle PQB = 45^\circ$.

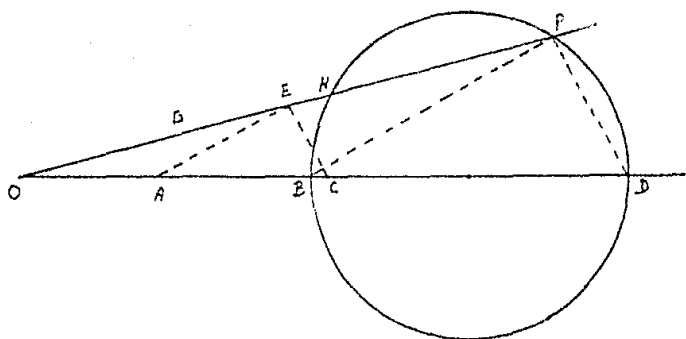
Por tanto $\angle BQP = \angle QPB$.

b) Sean L , M y N los puntos de contacto del incírculo del triángulo $\triangle BHC$ con los segmentos BH , HC y CB respectivamente. Notemos que $BL = BN$, entonces basta probar que $LH = NQ$.

Como $\angle LHO_2 = \angle O_2QN = 45^\circ$ y $\angle O_2LH = \angle O_2NQ = 90^\circ$, tenemos que, $\angle NO_2Q = \angle HO_2L = 45^\circ$. Además, $O_2L = O_2N$. Entonces los triángulos $\triangle LHO_2$ y $\triangle NQO_2$ son congruentes.

Por tanto $LH = NQ$.

71) Consideremos el siguiente dibujo :



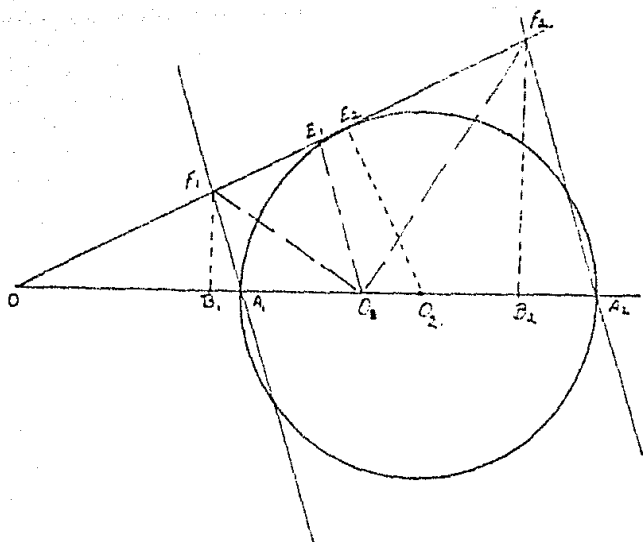
Donde G y E son los puntos medios de los segmentos OH y OP respectivamente; A y C los puntos medios de los segmentos OB y OD respectivamente. El segmento BD es un diámetro de K.

Sabemos que $\text{ang BFD} = 90^\circ$. Si probamos que $\text{ang AEC} = 90^\circ$, entonces E estará en la circunferencia que tiene por diámetro al segmento AC, de modo que el lugar geométrico descrito por esos puntos es un círculo. De aquí que basta probar que los triángulos $\triangle AEC$ y $\triangle BFD$ son semejantes.

Notemos que $EC \parallel FD$ y $EC = \frac{FD}{2}$. También $\angle FDB = \angle ECA$.
Entonces basta mostrar que $AC = \frac{BD}{2}$.

Compte BD = BC + CD = BC + OC = BC + OB + BC = 2BC + OB = 2BC + 2OA = 2(BC + OA) = 2(BC + AB) = 2AC. Entorses AC = $\frac{BD}{2}$.

Por tanto, el lugar geométrico descrito por dichos puntos medios es un círculo.



Sea O el punto de intersección de la línea F_1F_2 y A_1A_2 . Sean O_1 y O_2 los puntos medios de los segmentos A_1A_2 y B_1B_2 , respectivamente. Para $i = 1, 2$, sea E_i el punto de intersección del segmento F_1F_2 con la línea perpendicular al segmento F_1F_2 que pasa por O_i .

Como los triángulos $\triangle OE_1O_1$ y $\triangle OE_2O_2$ son semejantes, tenemos que,

$$\frac{E_1O_1}{E_2O_2} = \frac{OO_1}{OO_2}.$$

Ya que los triángulos $\triangle OB_1F_1$ y $\triangle OB_2F_2$ son semejantes y también los triángulos $\triangle OA_1F_1$ y $\triangle OA_2F_2$ son semejantes, tenemos que $\frac{OB_1}{OF_1} = \frac{OB_2}{OF_2}$ y $\frac{OA_1}{OF_1} = \frac{OA_2}{OF_2}$. De aquí que $\frac{OB_1}{OB_2} = \frac{OA_1}{OA_2}$.

Notemos que $\frac{OO_1 - O_1B_1}{OO_2 - O_2A_1} = \frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB_2}{OA_2} = \frac{OO_1 + O_1B_1}{OO_2 + O_2A_1}$. De manera que, $\frac{OO_1 - O_1B_1}{OO_2 - O_2A_1} = \frac{OO_1 + O_1B_1}{OO_2 + O_2A_1}$. Desarrollando esta expresión resulta que $\frac{OO_1}{OO_2} = \frac{O_1B_1}{O_2A_1}$. Por consiguiente $\frac{EO_1}{E_2O_2} = \frac{O_1B_1}{O_2A_1}$, pero $E_2O_2 = O_2A_1$, de manera que $E_1O_1 = O_1B_1$.

Dado que los triángulos $\triangle O_1F_1B_1$ y $\triangle O_1F_1E_1$ son congruentes,

Por tanto los puntos A , C , C' y P son concíclicos. De manera que C' está siempre en el círculo K_1 que contiene a los puntos A , C y P .

Por tanto el lugar geométrico de los puntos C' es un círculo K_1 .

DEFINICIONES BASICAS SOBRE LOS TRIANGULOS

Se llama MEDIATRIZ de un segmento al lugar geométrico de los puntos equidistantes de los extremos del mismo.

Al punto de concurrencia de las mediatrices se llama CIRCUNCENTRO y a la circunferencia que pasa por los vértices CIRCUNCIRCULO.

El punto de concurrencia de las bisectrices interiores de un triángulo se le llama INCENTRO.

La circunferencia tangente a los tres lados del triángulo cuyo centro es el incentro se le llama CIRCULO INSCRITO.

La ALTURA sobre un lado de un triángulo es la perpendicular a este, trazada por el vértice opuesto.

Una MEDIANA de un triángulo es la recta trazada desde el punto medio de un lado al vértice opuesto del mismo.

SIMBOLOGIA

$\geq$	mayor o igual
$\leq$	menor o igual
$\parallel$	paralelo
ang	ángulo
$\triangle ABC$	triángulo ABC
$\tan x$	tangente de x
$\sin x$	seno de x
$\cos x$	coseno de x
AB	se utiliza para representar :

- i) segmento que une el punto A al punto B
- ii) longitud del segmento AB, y
- iii) recta que pasa por A y B.

BIBLIOGRAFIA

- 1) Samuel L. Greitzer, " International Mathematical Olympiads 1959 - 1977 ", New Mathematical Library, publicado por The Mathematical Asosiation of America, vol. 27, 1977, 204 pags.
- 2) Murray S. Klamkin, " International Mathematical Olympiads, 1978-1985 and forty supplementary problems ", New Mathematical Library, publicado por The Mathematical Asosiation of America, vol. 31, 1986, 191 pags.
- 3) H.S.M. Coxeter and S.L. Greitzer, " Geometry Revisted ", New Mathematical Library, publicado por The Mathematical Asosiation of America, vol. 19, 1967, 189 pags.
- 4) Edwin E. Moise and Floyd L. Downs, Jr., " Geometría ", México, Ed. Norma y Fondo Educativo Interamericano, Serie Matemática Moderna, vol. 1V, 1969, 578 pags.
- 5) Jorge Ventworth y David Eugenio Smith, " Geometría Plana y del Espacio ", México, Ed. Porrúa, 1977, 469 pags.
- 6) Levi S. Shively, Ph. D., " Introducción a la Geometría Moderna ", Ed. C. E.C.S.A., México, 1980, 172 pags.