

00587



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERIA

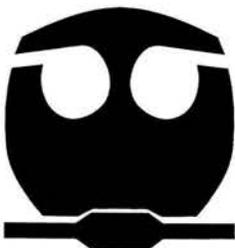
FACULTAD DE QUIMICA

FLUJO OSCILANTE DE LÍQUIDOS COMPLEJOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN INGENIERIA
INGENIERIA QUIMICA-POLIMEROS
P R E S E N T A:
EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

TUTOR: DR. ANGEL ENRIQUE CHÁVEZ CASTELLANOS



MÉXICO. D.F.

2008

M. 105982



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO

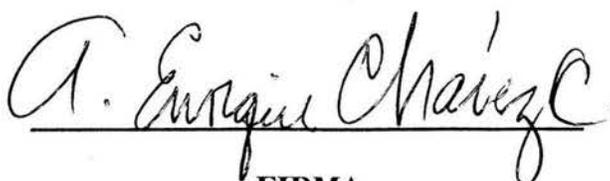
Presidente: Dr. Octavio Manero Brito
Vocal: Dr. Luis Felipe del Castillo Dávila
Secretario: Dr. Rafael Herrera Najera
1^{er}. Suplente: Dr. Luis Alberto Vicente Hinestroza
2^{do}. Suplente: Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos

Lugar donde se realizó la tesis:

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA QUÍMICA
FACULTAD DE QUÍMICA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

TUTOR DE TESIS:

DR. ÁNGEL ENRIQUE CHÁVEZ CASTELLANOS


FIRMA

AGRADECIMIENTOS

**AL POSGRADO DE INGENIERÍA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO, POR PERMITIRME HACER MIS ESTUDIOS
DOCTORALES EN INGENIERÍA QUÍMICA EN LA FACULTAD DE
QUÍMICA.**

**EL PRESENTE TRABAJO FUE REALIZADO GRACIAS A LA BECA
OTORGADA POR CONACYT CON REGISTRO 162980.**

**A LA DIRECCION GENERAL DE ESTUDIOS DE POSGRADO (DGEP) DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, POR OTORGARME
UNA BECA COMPLEMENTO DE APOYO AL POSGRADO.**

DEDICATORIAS

Este trabajo que ha costado tanto esfuerzo y empeño quiero dedicarlo a las siguientes personas importantes en mi vida.

A mi madre Maria Luisa Cortes Sosa:

Por ser mi ángel personal durante toda la vida, por mostrarme el camino en Salerno Italia, te dedico este trabajo mi amada madre.

A mi abuelo Roberto Herrera:

Por protegerme y guiarme desde el cielo. Gracias abuelito

A los padres de mi asesor el Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos

No tuve la oportunidad de conocerles bien, pero a través de su hijo puedo ver la bondad de sus almas, desde las alturas nos guían en nuestros caminos. Con todo respeto y sencillez les dedico este presente.

A Sofia:

Por ser una mujer ejemplar, trabajadora y excepcional orgullo de quienes te conocieron. A través de tus hijos puedo ver la hermosa mujer que fuiste y desde el cielo, guías a German y Susana en su camino por esta vida.

A mi padre Emilio Herrera Caballero:

A lo largo de mi vida, mi único anhelo ha sido que te sientas orgulloso de mí, he tratado por todos los medios de honrar tu nombre con mucho trabajo esfuerzo y dedicación. Espero, que esta tesis la tomes como tu revancha ante la vida. Gracias Papa.

A mi madre Yolanda Valencia Cortés:

Es difícil expresar en unas pocas líneas lo que siento por ti. Todo lo que he hecho en mi vida ha sido en tu nombre. Alguna vez, alguien me pregunto en la facultad de química si existía Dios. Le respondí, que si, que yo lo veía a través de los ojos de mi madre.

A mi hermana Gabriela Yolanda Herrera Valencia:

A mi hermosa hermana Gabriela, por ser mi compañera en muchos años y un ejemplo de consistencia, tenacidad y capacidad en los momentos difíciles. Gabriela sin duda, eres nuestro orgullo.

A mi abuela Luchita:

Por quererme y apoyarme en mi vida. Gracias abuelita

A la sobrina del Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos:

Por ser un ángel que nos guía desde el cielo, dedico este trabajo.

Al Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos:

Por tu amistad y cariño a lo largo de estos años, por su capacidad de análisis y sus conocimientos, dedico a mi asesor el Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos y en nombre de mi familia, este trabajo.

Al Dr. Octavio Manero Brito:

Por su capacidad y liderazgo en momentos claves de este proyecto y por ser una joya de la Universidad Nacional Autónoma de México, dedico respetuosamente este trabajo a él y su familia.

Al Dr. Luis Felipe del Castillo Dávila:

Por su conocimiento, su capacidad y su aguda visión, quiero darle las gracias a usted y respetuosamente a su familia por los consejos y comentarios en este trabajo.

Al Dr. Rafael Herrera Najera:

Por su guía a lo largo de mi trabajo doctoral su don de gente y su increíble análisis, dedico respetuosamente esta tesis a usted y su familia.

Al Dr. Fausto García Calderas:

Por sus consejos, conocimiento e increíble capacidad en los momentos difíciles de mi trayectoria en el Posgrado, y por las horas largas de trabajo, análisis y tazas de café dedico a mi amigo y a su familia la presente tesis doctoral.

A mis compañeros de Posgrado:

Por sus consejos y ayuda a lo largo de este camino tan difícil.

Al Dr. German Zarate:

Por su amistad y cariño durante estos años, por darme la fuerza para ser mejor y superar mis miedos. Te dedico esta tesis con todo respeto y admiración.

A Edna, Edahi y la Bella Xally:

Por aceptarme y considerarme parte de su familia, por permitirme amarlos y quererlos dedico este trabajo como una prueba de mi amor hacia ustedes.

A Jaime, Carol y la Bella Cintli:

Dedico este escrito a mi cuñado y familia por ser una fuente de inspiración para mí, por enseñarme que el único camino hacia el triunfo es el trabajo, dedico esta tesis.

A Mabel, Mario, Paola y las Bellezas de Mixtli y Paola:

Por darme la fuerza en mi vida, por aceptarme y enseñarme a enfrentar los retos sin miedo dedico estas páginas en su honor.

Al Sr. Jaime y Conchita:

Por mostrarme el camino de la honradez y el trabajo, quiero dedicarles este trabajo que me ha llevado años de mi vida en culminarlo. Gracias

A Mayra:

Por ser mi amiga, mi compañera y mi esposa, por enseñarme a levantarme en los momentos difíciles y darme la fuerza para encarar mis miedos, te quiero dedicar esta tesis doctoral mi amada esposa.

A Camila Isabella Herrera Sánchez:

Todos estos años he buscado el sentido a mi vida, algunas veces, me he perdido en mis miedos y fracasos y he pensado que nadie ni nada me haría supéralos. Sin embargo, la vida me ha mandado un regalo que no lo puedo describir en unas cuantas líneas. A través del tiempo, que leas estos párrafos, entenderás que tú eres el milagro que he buscado, has transformado a todas las personas que te conocen. Solamente te puedo decir, que tú representas todas mis razones y en tu nombre jamás sentiré miedo. En tus ojos veo reflejada a tu Madre Mayra y en los ojos de Mayra veo reflejado tu hermoso rostro. Para mí las dos representan a la misma persona. Mi hermosa Camila Isabella te prometo que algún día, no muy lejano, te sentirás orgullosa de tus padres de la misma manera que lo estamos de ti.

Amada hija mía



**CAMILA ISABELLA EN UN HOTEL DE LA CIUDAD DE ROMA DESPUÉS
DE MI PLÁTICA EN EL PPS-24 EN SALERNO ITALIA (2008).**

ÍNDICE	
RESUMEN	11
ABSTRACT	12
NOMENCLATURA	13
1. INTRODUCCIÓN	16
2. PRELIMINARES ESTOCÁSTICOS	24
3. ECUACIONES	26
3.1 Modelo Bautista-Manero-Puig (BMP)	26
3.2 Ecuaciones de movimiento y continuidad	28
4. FLUJO PULSÁTIL	29
4.1 Componente axial de la ecuación de movimiento modificada	30
4.2 Eficiencia	30
4.3 Variables adimensionales	31
4.4 Ecuaciones adimensionales	31
4.4.1 Ecuación de movimiento modificada adimensional	31
4.4.2 Ecuaciones reológica y cinética adimensionales	32
4.4.3 Eficiencia adimensional	32
4.5 Esquema perturbativo	33
4.6 Análisis asintótico a bajos números de Reynolds	35
4.7 Comparación de la eficiencia del modelo BMP con otras ecuaciones constitutivas.	40
4.7.1 Eficiencia del modelo newtoniano generalizado	41
4.7.2 Eficiencia del modelo de Tanner	42
4.7.3 Eficiencia del modelo de White-Metzner	43
4.8 Potencia	44
5. RESULTADOS	48
5.1 Predicciones teóricas	50
5.2 Comparación con datos reométricos en flujo de corte simple	61

6. CONCLUSIONES	72
7. TRABAJO FUTURO	75
BIBLIOGRAFÍA	79
APÉNDICE	83
TRABAJO ENVIADO	

RESUMEN

En este trabajo se analiza un líquido complejo con estructura transitoria que fluye a través de una tubería de radio $R = a$ y longitud L . El proceso es isotérmico y el líquido es incompresible. El líquido fluye debido a un gradiente de presión pulsátil. A partir de éste, se calcula el flujo volumétrico perturbado y se compara con el correspondiente sin perturbación. Para caracterizar el líquido complejo con estructura transitoria se utiliza el modelo Bautista-Manero-Puig (BMP), el cual consiste en la ecuación reologica convectiva superior de Maxwell acoplada con una de tipo cinético, que describe la evolución de la estructura debido a dos mecanismos. El primero de éstos consiste en un término de relajación (construcción de la estructura) y el segundo está asociado al trabajo irreversible de rompimiento de la estructura (destrucción de la estructura). Para resolver el sistema se propone un planteamiento estocástico-perturbativo en torno al número de Reynolds. Se demuestra que el cambio del flujo volumétrico es enorme en la región donde el líquido es adelgazante al corte. La predicción de estos aumentos dependen de las propiedades estructurales, cinéticas y viscoelásticas del modelo BMP. Finalmente, se utilizan datos reométricos del tensoativo catiónico CTAT a diferentes concentraciones con el fin de cuantificar las predicciones del modelo BMP en el sistema de flujo a gradiente de presión pulsátil.

ABSTRACT

In this work, the rectilinear flow of a complex liquid under a pulsating, time-dependent pressure gradient is analyzed. The fluctuating component of the pressure gradient is assumed to be of small amplitude and can be adequately be represented by a weakly stochastic process, to which a perturbation solution scheme is suggested. The pulsating pressure-gradient flow is analyzed with the Bautista-Manero-Puig model (BMP) constitutive equation, consisting in the Upper Convected Maxwell equation coupled to a kinetic equation to account for the breakdown and reformation of the fluid structure. A dramatic enhancement of the volumetric flow rate is predicted in the region where the fluid experiences a pronounced shear-thinning. In addition, the power requirement is calculated and no energetic advantage is found when the complex liquid is pumped with a random stochastic stationary sinusoidal function. Finally, flow enhancement is predicted using rheometric data of an aqueous solution of cetyl trimethyl ammonium tosilate (CTAT) at various concentrations (wormlike micellar solution).

NOMENCLATURA

$I(\%)$	Eficiencia
$\langle Q \rangle$	Promedio del flujo volumétrico pulsátil u oscilatorio en la pared
Q	Flujo volumétrico a gradiente de presión constante
$n(t)$	Función estocástica estacionaria
$R(s)$	Función de correlación
$\Lambda(\alpha)$	Función de densidad espectral
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tensor de esfuerzos viscoelástico
η	Función viscosidad
$\underline{\underline{\overset{\vee}{\sigma}}}$	Derivada codeformacional del tensor de esfuerzos
$\underline{\underline{D}}$	Tensor rapidez de deformación
$G_0, \eta_0, \eta_\infty, \lambda, k$	Propiedades materiales del modelo Bautista-Manero-Puig
$\frac{D}{Dt}$	Operador de Stokes
$\underline{\underline{\nabla V}}$	Tensor gradiente de velocidad
$(\underline{\underline{\nabla V}})^T$	Transpuesta del tensor gradiente de velocidad

$S_1 \xrightarrow{k} S_2$	Representación de una transformación estructural con constante cinética k
ρ	Densidad
P	Presión
\underline{g}	Vector aceleración de la gravedad
$\underline{V}(R, t)$	Vector de velocidad
a, L	Radio y longitud del cilindro
$\dot{\gamma}(R, t) = \frac{\partial V_z(R, t)}{\partial R}; \dot{\gamma}_0(R) = \frac{dV_z(R)}{dR}$	Rapidez de deformación en estados transitorio y estacionario
$v; p; \xi; \tau; q; r; \Phi; \Omega$	Variables adimensionales
$Re = \frac{\rho \omega a^2}{\eta_0}$	Número de Reynolds pulsátil
$n(\xi)$	Función estocástica estacionaria adimensional
$We = \omega \frac{\eta_0}{G_0}$	Número de Weissenberg pulsátil
$A = \frac{k\eta_0}{\lambda}; B = \frac{\eta_0}{\eta_\infty}; C = \frac{\mu}{\lambda}$	Grupos adimensionales
$q(r, \xi) = \frac{\partial v(r, \xi)}{\partial r}; q_0(r) = \frac{dv_0}{dr}$	Rapideces de deformación adimensional en estados transitorio y estacionario
$q_j(r, \xi); \tau_j(r, \xi); \Phi_j(r, \xi)$	Rapidez de deformación, esfuerzo y función viscosidad a órdenes j

$\dot{\tau}_0; \ddot{\tau}_0$	Primera y segunda derivadas del esfuerzo a orden cero
$\dot{\Phi}_0; \ddot{\Phi}_0$	Primera y segunda derivadas de la función viscosidad a orden cero
$\tau_w = \tau_0(r=1)$	Esfuerzo en la pared
δ	Función delta de Dirac
$\langle P \rangle$	Potencia pulsátil promedio
P_0	Potencia
$I_{Pot}(\%)$	Eficiencia de la potencia
$n(\xi); \ddot{n}(\xi)$	Primera y segunda derivadas de la función estocástica estacionaria adimensional
μ	Parámetro de intensidad de flujo bandeado

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente, existen en la literatura dos grandes clasificaciones en fluidos oscilantes. El primero de estos, es el flujo a gradiente de presión pulsátil y el segundo es perturbación oscilatoria en la pared a gradiente de presión constante. Una de los cálculos más interesantes en los dos sistemas, es la eficiencia (el aumento de gasto volumétrico) que se define como:

$$I(\%) = \frac{\langle Q \rangle - Q_0}{Q_0} \times 100 \quad (1)$$

En la ecuación (1) $\langle Q \rangle$ es el flujo oscilante en sus dos formas y Q_0 es el flujo a gradiente de presión constante. La ecuación (1) es una forma de cuantificar los efectos que produce las oscilaciones en el flujo volumétrico. Sobre estos sistemas se han publicado una gran cantidad de trabajos teóricos y experimentales con el fin de analizar estos interesantes problemas. Las principales conclusiones de estos trabajos, son mencionadas a continuación:

- La eficiencia (1) depende de la amplitud de las perturbaciones, frecuencia angular y de las propiedades materiales de los líquidos (viscosidades a corte bajo, alto y tiempos de relajación)
- Para que existan aumentos en los dos sistemas el líquido analizado debe ser adelgazante al corte, i.e., la función viscosidad debe cambiar por efecto de la rapidez de deformación.
- El máximo en las curvas resonantes está determinado por un acoplamiento de las propiedades viscoelásticas del material.
- Experimentalmente se demostró que para algunos valores de frecuencia la eficiencia aumenta mientras que para otros decrece.

La investigación de flujos pulsátiles y oscilantes ha tenido gran relevancia en muchas ramas de la ciencia. Por ejemplo, en biorreología, el estudio de la sangre en las venas es importante en la creación de anticoagulantes que permitan evitar ataques cardiacos. En este caso, el corazón, actúa como bomba peristáltica mandando pulsos al sistema lo que permite que el flujo volumétrico aumente y se consuma menos energía. Por otra parte, el uso de flujos pulsátiles y oscilantes ha sido de gran ayuda en los procesos industriales con líquidos poliméricos (extrusión, inyección, moldeo, etc).

Las investigaciones realizadas en este campo, se han basado en el estudio de líquidos newtonianos y no newtonianos (Fredrickson 1964; Barnes et al. 1969,1971; Edwards et al. 1972; Gianetto et al. 1973; Sundstrom y Kaufman 1977; Manero y Mena 1977; Manero y Walters 1980; Kazakia y Rivlin 1978, 1979; Phan-Thien 1978, 1980, 1981, 1982; Phan-Thien y Dudek 1982; Davies et al. 1978; Mena et al. 1979; Mori et al. 1984; Khabakhpasheva et al. 1989; De Andrade Lima y Rey 2005,2006).

Los flujos oscilantes en sus dos versiones, han sido caracterizados con diferentes ecuaciones constitutivas para líquidos inelásticos y viscoelásticos. La mayoría de estos trabajos, han empleado las siguientes ecuaciones reológicas: newtoniano generalizado, ley de potencia, Ellis, Carreau-Yasuda, Tanner, White-Metzner, Oldroyd-B, Goddard-Miller, Wagner, B-KBKZ, Filbey-Ericksen-Criminale y MacDonald-Bird-Carreau (Phan-Thien et al. 1980, 1982; Davies et al. 1978; Bird et al. 1977).

Los trabajos mencionados antes demostraron que la eficiencia (1) depende de la amplitud de las perturbaciones, de la frecuencia, de las propiedades adelgazantes al corte del líquido y de la ecuación constitutiva que se utiliza para describir el flujo. El estudio de flujos oscilantes tiene una amplia historia. Barnes et al. (1969) presentaron una disertación teórica y experimental acerca del flujo pulsátil.

Como líquido de estudio utilizaron una solución de poliacrilamida y sus cálculos teóricos estuvieron basados en consideraciones inelásticas y los parámetros de la ecuación constitutiva fueron extraídos directamente de datos reométricos. Para su trabajo experimental utilizaron los siguientes valores de amplitud, radio del cilindro y frecuencia: (i) $\epsilon = 0.2$, (ii) $\omega = 0.88 \text{ rad/s}$ y (iii) $R = 0.16 \text{ cm}$. Sin embargo, en la parte experimental de su trabajo, para una solución de poliacrilamida de 1.5 y 8 % en peso se obtuvo un aumento del 20 y 8 % respectivamente. Sus predicciones teóricas demostraron la misma tendencia que la parte experimental pero cuantitativamente hubo una diferencia por un factor de 2 con los experimentos.

La discrepancia entre los resultados teóricos y experimentales fue asociada a los efectos elásticos de la poliacrilamida. Por esta razón, Walters y Townsend (1970) estudiaron el flujo pulsátil de un líquido viscoelástico caracterizado con un modelo corrotacional de cuatro constantes tipo Oldroyd-B. Sus predicciones fueron similares a las de Barnes et al. (1969). Ellos demostraron que la eficiencia depende de la amplitud de la perturbación y que para un cierto valor crítico del gradiente de presión, se aprecian aumentos considerables en el flujo volumétrico. Además, sus cálculos teóricos demostraron que la eficiencia es una función creciente o decreciente de la frecuencia para un gradiente de presión constante.

En constaste, para un espectro de frecuencias, demostraron que al aumentar el gradiente de presión, la eficiencia decrece considerablemente. Por otra parte y en la misma línea, Barnes et al. (1971) estudiaron el mismo problema, utilizando datos viscométricos para alimentar su modelo.

Las conclusiones principales de su trabajo basado en el modelo Newtoniano Generalizado son: (i) a bajas frecuencias, los resultados experimentales con una solución de poliacrilamida demostraron que el flujo volumétrico perturbado decrece conforme aumenta la frecuencia de las pulsaciones y (ii) a frecuencias altas la eficiencia aumenta conforme la frecuencia de las pulsaciones lo hace.

De acuerdo con esto, existen discrepancias entre los resultados teóricos con el modelo viscoelástico de cuatro constantes propuesto por Walters y Townsend (1970) y los resultados teóricos-experimentales de Barnes et al (1971). Por estos motivos, los métodos computacionales empleados para resolver ecuaciones diferenciales parciales no lineales han sido de gran interés con el fin de obtener resultados más precisos en la obtención de la eficiencia (1). Townsend (1973) resolvió el flujo pulsátil como un problema de valor inicial mediante un algoritmo computacional basado en un esquema perturbativo y utilizando un método numérico tipo Runge-Kutta clásico de cuarto orden. Una de las ventajas de éste es su gran estabilidad computacional y versatilidad en las cantidades físicas importantes (amplitud de la perturbación, frecuencia, propiedades materiales de la ecuación constitutiva etc).

Para el intervalo de frecuencias que utilizaron, Barnes et al. (1971) y Edwards et al. (1972) estudiaron la eficiencia y la potencia requerida para el sistema de flujo a gradiente de presión pulsátil. Para caracterizar su líquido, utilizaron dos modelos inelásticos (ley de potencia y Ellis) y resolvieron el problema de valor inicial empleando un método de diferencias finitas. Sus principales conclusiones incluyeron, que el aumento en el flujo volumétrico no depende de la frecuencia de las pulsaciones, solamente de su amplitud y del índice del modelo de ley de potencia, asociado con las propiedades adelgazantes del líquido.

Sin embargo, la potencia requerida para mantener el flujo pulsátil es siempre positiva, lo que implica que no existe ninguna ventaja de tipo energética en bombear un líquido viscoso mediante un gradiente de presión pulsátil. Por último ellos concluyeron que la diferencia entre sus resultados y los de Barnes están asociados a la ecuación constitutiva que se utilice para caracterizar el líquido problema.

Por otra parte, en la mayoría de los trabajos, los efectos inerciales y elásticos son despreciados en el cálculo de la eficiencia. Por esta razón, Davies et al. (1978) analizaron el flujo a gradiente de presión pulsátil incorporando los mecanismos mencionados anteriormente. Para caracterizar su líquido viscoelástico, utilizaron un modelo de Goddard-Miller, el cual demostró las mismas discrepancias entre la teoría y la parte experimental mencionadas por Barnes et al. (1971). Sus conclusiones principales son enlistadas a continuación: (i) los mecanismos inerciales y elásticos no son los responsables de aumento en el flujo volumétrico, (ii) la discrepancia entre la teoría y los datos experimentales han sido asociados a flujos secundarios. (iii) El aumento en el flujo volumétrico depende fuertemente de la curva de viscosidad que se empleé. Conclusiones similares a las de Davies et al. (1978), han sido obtenidas por diferentes investigadores, utilizando diferentes ecuaciones constitutivas (Kazakia y Rivlin 1978, 1979; Mena et al. 1979; Manero y Walters 1980).

Phan-Thien (1978, 1980, 1982, 1982a, 1982b) resolvió los dos sistemas de flujo (gradiente de presión pulsátil y perturbación oscilatoria en la pared). Mediante desarrollos perturbativos-estocásticos y numéricos, con un número considerable de ecuaciones constitutivas (Tanner, Newtoniano generalizado, redes no afines, Wagner, fluidos débilmente elásticos etc).

Las conclusiones principales de sus trabajos fueron: (i) Para que exista aumento en el flujo, la función viscosidad debe disminuir con el segundo invariante del tensor rapidez de deformación es decir, el líquido debe ser adelgazante al corte. (ii) La eficiencia es muy sensible al tipo de ecuación constitutiva que se utilice. (iii) El valor del gradiente de presión al cual se obtiene el máximo en las curvas eficiencia-gradiente de presión, está determinado por un acoplamiento entre las propiedades viscoelásticas de los líquidos. (iv) De acuerdo con su esquema perturbativo, la eficiencia es un fenómeno de segundo orden en el parámetro de expansión (amplitud de las perturbaciones).

En las últimas décadas, el estudio del flujo oscilante se ha centrado básicamente en métodos analíticos y numéricos avanzados, con el fin de obtener resultados que describan con mayor precisión la parte fenomenológica de estos sistemas físicos utilizando diferentes ecuaciones constitutivas. Por otra parte, existen trabajos en la literatura donde las técnicas antes descritas no son aplicables, por lo que se debe recurrir a métodos variacionales y computacionales tipo Galerkin (De Andrade Lima y Rey 2005, 2006).

Debido a la creciente crisis de petróleo en el continente americano, la extracción de crudo en los yacimientos petroleros es de suma importancia en nuestro presente y futuro. En este campo, los líquidos complejos han sido utilizados en la recuperación de petróleo. La extracción de cantidades adicionales de petróleo puede ser inducida mediante fracturas hidráulicas en la formación de rocas. Recientemente, líquidos complejos basados en agentes tensoactivos catiónicos han sido escogidos para los procesos de fractura de rocas en yacimientos de petróleo. Los líquidos hechos con agentes tensoactivos pueden mejorar las extracciones de cantidades adicionales de petróleo en comparación con los líquidos poliméricos.

En vista de sus potenciales aplicaciones tecnológicas en tratamiento de agua, mantos acuíferos, campos geotérmicos, los sistemas complejos como líquidos poliméricos, cristales líquidos, sistemas micelares etc., sometidos a flujos oscilantes se han convertido en punto de partida de varios grupos de investigación en el mundo.

Recientemente Bautista et al. (1999) demostraron que estos líquidos exhiben propiedades interesantes dependientes del tiempo (tixotropía y tixotropía negativa). Los cuales han sido sometido a diferentes tipos de flujo: (i) flujo cortante simple, extensional y oscilatorio en el régimen de viscoelasticidad lineal y no lineal (Manero, et al. 2002). Se ha trabajado con CTAT Soltero et al. (1995, 1996) sometidos a distintos tipos de flujo. Este líquido exhibe comportamientos reológicos dependientes del tiempo. Para soluciones micelares de CTAT-agua-electrolito hay evidencias de un ciclo triple de histéresis dependiente de las concentraciones de electrolito y tensoactivo.

Por otra parte, en soluciones concentradas de polímeros, el mecanismo que gobierna la relajación es la reptación Doi y Edwards (1986). En forma similar, en una solución de micelas gigantes y enredadas, la relajación de esfuerzos es debida en parte a la reptación de las micelas, Cates y Candeanu (1990), pero adicionalmente se rompen y se unen continuamente bajo la influencia del flujo, por lo que la relajación también puede ocurrir por rompimiento y reformación de la estructura, Cates (1987). La modificación de Cates al modelo de reptación predice que cuando el tiempo de vida media de las micelas es del orden del tiempo de relajación del esfuerzo, la relajación decae exponencialmente con una sola constante de tiempo, esto es, exhibe un comportamiento maxwelliano. El mismo modelo extendido a la región no lineal, predice una saturación del esfuerzo cortante (en la cual el esfuerzo es constante) a una velocidad de corte crítica en experimentos de corte simple en estado estacionario (Spenley et al. 1993; Spenley y Cates 1994; Spenley et al. 1996).

Este comportamiento, observado experimentalmente en sistemas micelares es acompañado de estados transitorios de larga duración y un comportamiento no monotónico del esfuerzo al inicio de flujo Berret (1994). Por otra parte, en la región donde el esfuerzo es independiente de la velocidad de corte (denominada meseta en el esfuerzo) da origen a una inestabilidad constitutiva, en donde coexisten varias velocidades de corte a un esfuerzo dado.

Este fenómeno, es conocido en la literatura como flujo bandeado (Bautista et al. 2000). Sin embargo, otros autores han propuesto una transición de primer orden de la fase isotrópica a la nemática para explicar la presencia del la meseta en el esfuerzo (Berret 1994). Por otra parte, Manero et al. (2002) demostraron mediante argumentos de termodinámica irreversible, que la formación de bandas a diferentes viscosidades está asociada con el mínimo de la disipación en el sistema.

En resumen, en la vasta literatura concerniente al tema, no existen estudios de líquidos viscoelásticos que presenten estructura transitoria, sometidos a flujos pulsátiles. Por está razón, la originalidad de esta propuesta doctoral radica en la aplicación de la ecuación constitutiva de BMP en el flujo a gradiente de presión pulsátil. Para tal efecto, el material en la presente tesis doctoral se encuentra distribuido de la siguiente manera. En el primer capítulo se presentan los antecedentes del trabajo, se plantean los objetivos y se discute la metodología del trabajo. En el segundo capítulo se definen las propiedades de una función estocástica estacionaria junto con las relaciones de Wiener-Khintchine. En el tercer capítulo se hace una descripción matemática y física del modelo BMP. En el cuarto capítulo se plantea y resuelve el problema del flujo pulsátil de un líquido con estructura transitoria. En el quinto capítulo se lleva a cabo el análisis de resultados y por último, en el sexto capítulo se explican las conclusiones y trabajo futuro.

2. PRELIMINARES ESTOCÁSTICOS

El problema del flujo pulsátil consiste básicamente en un flujo cortante perturbado por una fluctuación pequeña en el gradiente de presión, que describe físicamente una señal electrónica o ruido. Estas fluctuaciones en el tiempo pueden ser representadas por funciones aleatorias que toman valores discretos o continuos, por lo tanto son funciones de tipo estocásticas, es decir son funciones que describen procesos aleatorios dependientes del tiempo. En particular, el interés de esta propuesta, se centra en las funciones estacionarias en el sentido débil (Yaglom AM 1965), es decir las funciones que satisfacen las propiedades de Wiener-Khintchine:

$$\langle n(t) \rangle = 0 \quad (1)$$

$$R(s) = \langle n(t)n(t+s) \rangle \quad (2)$$

donde $\langle \rangle$ denota un ensamble promedio con respecto a la función de distribución de probabilidad, y $R(s)$ es la función de correlación de $n(t)$. La propiedad definida en (2), significa que la función de correlación $R(s)$ es invariante ante una traslación en el tiempo, es decir, solamente son importantes los incrementos de s . Es importante señalar, que el promedio de $n(t)$, i.e., $\langle n(t) \rangle = 0$ es estrictamente una variable aleatoria mientras que $\langle n(t)n(t+s) \rangle$ es un proceso estocástico, puesto que depende de la elección de la señal muestra $n(t)$. Por otro lado, $\langle n(t) \rangle$ es una constante y $R(s)$ es una función determinística. En este caso, suponemos que las medias estadísticas y temporales son iguales, i.e.,

$$\langle n(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} n(t) dt \right) \quad (3)$$

por lo que el proceso descrito por las ecuaciones (1-2) es ergódico.

En muchos procesos físicos, tales como sistemas mecánico vibratoriales, teoría de filtros., etc, la función de correlación $R(s)$ tiende a cero tan rápido como el valor absoluto de los incrementos diverge, es decir., $|s| \rightarrow \infty$ así que, $R(s)$ puede ser expresada en el espacio de Fourier, y su transformada compleja se representa como:

$$R(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha s} d\mu(\alpha) \quad i^2 = -1 \quad (4)$$

donde $d\mu(\alpha)$ es una medida finita. Si $d\mu(\alpha)$ es absolutamente continua de Lebesgue entonces tiene densidad, i.e., $\Lambda(\alpha): R \rightarrow R$ tal que, $d\mu(\alpha) = \Lambda(\alpha)d\alpha$ por lo que la función de correlación (3) toma la forma:

$$R(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha s} \Lambda(\alpha) d\alpha \quad (5)$$

$$\Lambda(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha s} R(s) ds \quad (6)$$

En (5) $i^2 = -1$ y $\Lambda(\alpha)$ es la función de densidad espectral $n(t)$. De acuerdo con nuestro análisis, $n(t)$ puede ser expresada mediante una integral compleja Fourier-Stieljes la cual, se escribe a continuación:

$$n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t} d\mathfrak{R}(\alpha) \quad (7)$$

en (7) $d\mathfrak{R}(\alpha)$ es una medida aleatoria estocástica que satisface las siguientes propiedades :

$$\langle d\mathfrak{R}(\alpha) \rangle = 0 \quad (8)$$

$$\langle d\mathfrak{R}(\alpha_i) \overline{d\mathfrak{R}(\alpha_j)} \rangle = \Lambda(\alpha_i) d\alpha_j \quad (9)$$

En (8-9) la sobrebarra representa el complejo conjugado en el espacio complejo. Es importante señalar que los resultados anteriores representan un conjunto ortogonal desde el punto de vista del análisis funcional.

3. ECUACIONES

3.1 Modelo Bautista-Manero-Puig (BMP)

Bautista et al. (1999) propusieron un modelo fenomenológico que describe el estado reológico de un fluido con estructura transitoria, el cual resulta de acoplar la ecuación convectiva superior de Maxwell con una ecuación de evolución de la estructura. Esta ecuación en la literatura es de tipo cinético en analogía con cinética química (en este caso no se estudia la evolución de la concentración con el tiempo sino el cambio de estructura debido al flujo). El modelo BMP se describe a continuación:

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{R}, t) + \frac{\eta(\underline{R}, t)}{G_0} \overset{\nabla}{\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{R}, t) = 2\eta(\underline{R}, t) \underline{\underline{D}}(\underline{R}, t) \quad (1)$$

$$\frac{d\eta(\underline{R}, t)}{dt} = \frac{1}{\lambda} \eta(\underline{R}, t) \left(1 - \frac{\eta(\underline{R}, t)}{\eta_0} \right) + k\eta(\underline{R}, t) \left(1 - \frac{\eta(\underline{R}, t)}{\eta_\infty} \right) \underline{\underline{\sigma}}(\underline{R}, t) : \underline{\underline{D}}(\underline{R}, t) \quad (2)$$

donde

$$\overset{\nabla}{\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{R}, t) = \frac{D}{Dt} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{R}, t) - \left(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{R}, t) \cdot \nabla \underline{V}(\underline{R}, t) + (\nabla \underline{V}(\underline{R}, t))^T \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{R}, t) \right) \quad (3)$$

$$\frac{D}{Dt} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{R}, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{V} \cdot \nabla \right) \underline{\underline{\sigma}}(\underline{R}, t) \quad (4)$$

$$\underline{\underline{D}}(\underline{R}, t) = \frac{1}{2} \left(\nabla \underline{V}(\underline{R}, t) + (\nabla \underline{V}(\underline{R}, t))^T \right) \quad (5)$$

El sistema (1-2) representa un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales acoplada con los tensores de esfuerzos y rapidez de deformación. En la ecuación (1) $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{R}, t)$ es el tensor de esfuerzo viscoelástico, $\eta(\underline{R}, t)$ es la función viscosidad, $\underline{\underline{D}}(\underline{R}, t)$ es el tensor rapidez de deformación, el cual es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad $\nabla \underline{V}(\underline{R}, t)$ definido en la ecuación (5) y G_0 es el módulo elástico del material.

La ecuación cinética (2) que describe la evolución de la función viscosidad contiene dos viscosidades a rapidez de cortes bajo y alto η_0, η_∞ respectivamente, una constante cinética k que puede ser interpretada matemáticamente como la normalización del tensor de esfuerzos y físicamente como una medida de la desestructuración del material y por último λ , la cual es un tiempo característico asociado a la reestructuración del material. En la ecuación (1) $\underline{\underline{\sigma}}(R, t)$ es la derivada codeformacional del tensor de esfuerzos descrita por la ecuación (3). Este operador no lineal se descompone en la diferencia entre la derivada substancial del esfuerzo, i.e., $\frac{D}{Dt}$ la cual, describe cambios espaciales y temporales en el tensor de esfuerzos en dirección de la velocidad y los productos tensoriales del esfuerzo con el tensor gradiente de velocidades y su transpuesta. Este tipo de objetos matemáticos, son utilizados para desprestigiar las rotaciones instantáneas de los elementos del fluido. La ecuación (2) fue desarrollada para describir la evolución de la estructura debido a dos mecanismos. El primero de ellos es de relajación y el segundo está asociado con el trabajo irreversible para modificar la estructura del material. El término de relajación físicamente describe una transición de estructura y matemáticamente es modelado por una exponencial decreciente, la cual contiene un tiempo característico del sistema. De esta manera, supongamos que el material posee una estructura inicial, que al ser sometido a flujo, la estructura se modifica y los elementos del fluido se orientan, por lo que el sistema pasa de un estado de estructura S_1 a otro S_2 y puede ser visualizado como una reacción química de primer orden:



Al aumentar la deformación, el sistema alcanza una estructura final que puede ser mayor o menor que la inicial dependiendo de la naturaleza del fluido (adelgazante o engrosante al corte). El segundo término del modelo de Fredrickson (1970) está asociado con el trabajo irreversible que se hace al sistema para romper la estructura del material. La constante cinética k es una medida del grado de destrucción de un material sometido a flujo. Una constante con valor pequeño, i.e., $k \ll 1$ implica un fluido con viscosidad constante; por otro lado, una constante grande, i.e., $k \gg 1$ implica un fluido no newtoniano viscoelástico. El modelo necesita 5 propiedades materiales para ser descrito; todas pueden ser calculadas mediante experimentos en estado transitorio y estacionario (Bautista et al. 2002).

3.2 Ecuaciones de movimiento y continuidad

La ecuación de movimiento se puede escribir en término de la derivada material definida en hidrodinámica:

$$\rho \frac{D}{Dt} \underline{V}(\underline{R}, t) = -\nabla P + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{R}, t) + \rho \underline{g} \quad (7)$$

$$\frac{D}{Dt} \underline{V}(\underline{R}, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{V}(\underline{R}, t) \cdot \nabla \right) \underline{V}(\underline{R}, t) \quad (8)$$

y continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + (\nabla \cdot \rho \underline{V}(\underline{R}, t)) = 0 \quad (9)$$

En la ecuación (7) ρ es la densidad del líquido, \underline{g} es el vector de aceleración en el campo terrestre, el cual es constante y $\underline{V}(\underline{R}, t)$ es el vector de velocidad y finalmente la ecuación (9) es la conservación de masa en el sistema. En la siguiente sección, el modelo BMP, junto con las ecuaciones de movimiento y continuidad, serán utilizadas para describir el flujo de un líquido con estructura transitoria sometido a gradiente de presión pulsátil en una tubería.

4. FLUJO PULSÁTIL

El sistema físico que se analiza en esta sección se describe a continuación. Un líquido incompresible con estructura transitoria fluye en la dirección axial en un cilindro de radio $R = a$ y longitud $Z = L$ bajo la acción de un gradiente de presión que oscila de acuerdo con una función estocástica estacionaria que satisface las relaciones de Wiener-Khintchine, i.e., su valor promedio es cero y su función de correlación es invariante ante una traslación en el tiempo. El proceso es isotérmico y el sistema de coordenadas es cilíndrico (R, Θ, Z) . El origen de coordenadas es colocado en el centro del tubo y los efectos debido a la aceleración de la gravedad se desprecian es decir $\underline{g} = \underline{0}$.

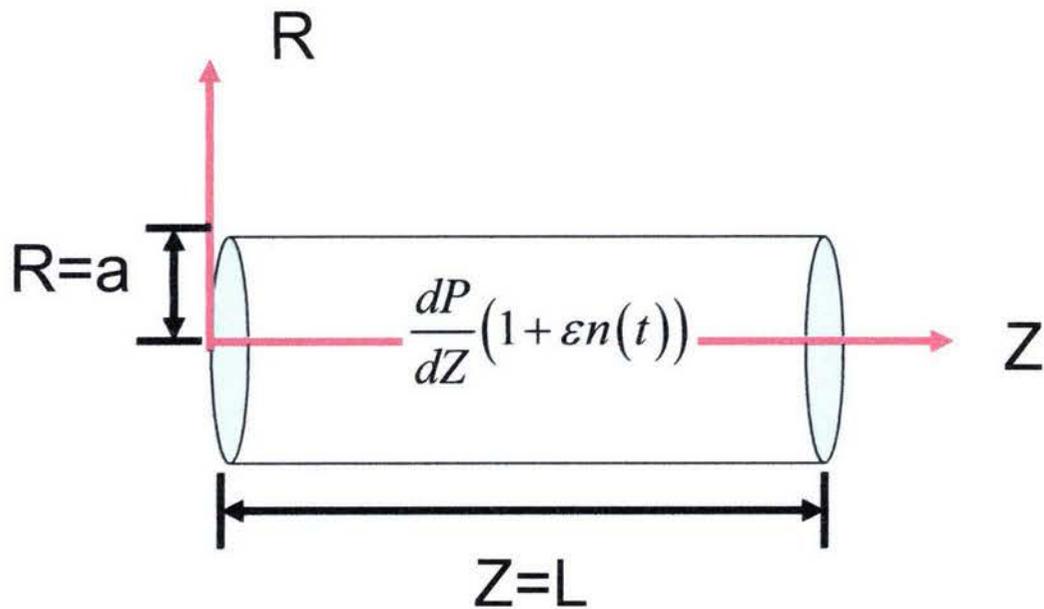


Figura 1. Representación del flujo pulsátil de un líquido con estructura transitoria

4.1 Componente axial de la ecuación de movimiento modificada

A partir de las restricciones definidas en 4, el vector de campo de velocidades, la componente axial de la ecuación de movimiento modificada, junto con las respectivas condiciones de frontera, pueden ser expresadas como:

$$\underline{V} = [0, 0, V_z(R, t)] \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial V_z(R, t)}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial Z} (1 + \varepsilon n(t)) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \sigma_{RZ}(R, t)) \quad (2)$$

la ecuación (2) satisface las siguientes condiciones de frontera:

$$V_z(R = a, t) = 0 \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial R} V_z(R, t) \right|_{R=0} = 0 \quad (4)$$

en la ecuación (1) $\frac{\partial P}{\partial Z}$ es el gradiente de presión en la dirección axial y $\varepsilon \ll 1$ es un parámetro perturbativo, el cual se asocia a la amplitud de las perturbaciones. Las condiciones de frontera (3) y (4) representan ausencia de deslizamiento en la pared y el efecto de simetría del campo de velocidades, respectivamente.

4.2 Eficiencia

A partir de la definición integral del flujo volumétrico se puede obtener una expresión equivalente en término de la rapidez de deformación (Bird et al. 1977). Integrando por partes la definición general del flujo volumétrico y utilizando la condición de frontera de adherencia definida en (3),

$$I(\%) = \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \times 100 = \frac{\int_0^a \langle \dot{\gamma}(R, t) - \dot{\gamma}_0(R) \rangle R^2 dR}{\int_0^a \dot{\gamma}_0(R) R^2 dR} \times 100 \quad (5)$$

donde $\dot{\gamma}(R,t) = \frac{\partial V_z(R,t)}{\partial R}$, $\dot{\gamma}_0(R) = \frac{dV_z(R)}{dR}$ son la rapidez de deformación en estados transitorio y estacionario.

4.3 Variables adimensionales

Con el fin de simplificar las ecuaciones de movimiento, constitutiva y de continuidad se introducen las siguientes variables adimensionales para la velocidad axial, gradiente de presión, tiempo, esfuerzo cortante, rapidez de deformación, coordenada radial, función viscosidad y frecuencia.

$$v = \frac{V_z}{\omega a}; p = \frac{dP}{\eta_0 a \lambda}; \xi = \frac{t}{\lambda}; \tau = \frac{\sigma_{RZ}}{\eta_0 / \lambda}; q = \lambda \dot{\gamma}_{RZ}; r = \frac{R}{a}; \Phi = \frac{\eta}{\eta_0}; \Omega = \omega \lambda \quad (6)$$

en (6) ω es la frecuencia de las pulsaciones y a es el radio del cilindro.

4.4 Ecuaciones adimensionales

Sustituyendo (6) en la componente axial de la ecuación de movimiento, condiciones de frontera, ecuación constitutiva y eficiencia obtenemos las ecuaciones adimensionales, las cuales son punto de partida en nuestro esquema estocástico perturbativo.

4.4.1 Ecuación de movimiento modificada adimensional

$$\text{Re} \frac{\partial v(r, \xi)}{\partial \xi} = -p(1 + \text{Re} n(\xi)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau(r, \xi)) \quad (7)$$

la ecuación (7) está sujeta a las siguientes condiciones de frontera:

$$v(r=1, \xi) = 0 \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} v(r, \xi) \right|_{r=0} = 0 \quad (9)$$

Nótese que en la ecuación (7) $n(\xi)$ es una función estocástica adimensional que satisface las relaciones de Wiener-Khintchine definidas en el capítulo 2. Por otro lado, el parámetro de perturbación $\varepsilon \ll 1$ ha sido remplazado por el número de Reynolds pulsátil, el cual será explicado más adelante.

4.4.2 Ecuaciones reológica y cinética adimensionales

$$\left(1 + De\Phi(r, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \tau(r, \xi) = \Phi(r, \xi) q \quad (10)$$

$$\frac{d\Phi(r, \xi)}{d\xi} = \Phi(r, \xi)(1 - \Phi(r, \xi)) + A\Phi(r, \xi)(1 - B\Phi(r, \xi))\tau(r, \xi)q \quad (11)$$

4.4.3 Eficiencia adimensional

$$I(\%) = \frac{\int_0^1 \langle q(r, \xi) - q_0(r) \rangle r^2 dr}{\int_0^1 q_0(r) r^2 dr} \times 100 \quad (12)$$

En las ecuaciones (7, 10, 11) se han definido los siguientes grupos adimensionales

$$Re = \frac{\rho(\omega a)a}{\eta_0}; \quad De = \frac{\eta_0 / G_0}{\lambda}; \quad A = \frac{k\eta_0}{\lambda}; \quad B = \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \quad (13)$$

El primero de estos grupos es el número de Reynolds pulsátil (Re), el cual es una medida de los efectos inerciales y viscosos del fluido. A números de Reynolds menores de la unidad, es decir., $Re \ll 1$ los mecanismos inerciales son pequeños comparados con los viscosos. Por otro lado, a números de Reynolds altos, $Re \gg 1$, los efectos viscosos son despreciables con respecto a los inerciales. Siguiendo con nuestro análisis, el segundo número es el Deborah, el cual se define como la razón entre un tiempo característico del material y un tiempo de observación. En este caso, nuestro tiempo de observación es el tiempo de reestructuración del material. A números de Deborah altos, i.e., $De \gg 1$ el tiempo de reestructuración del material es menor que el tiempo de flujo. Sin embargo, a números de Deborah bajos, i.e., $De \ll 1$ el tiempo de

reestructuración es mayor que el tiempo de flujo por lo que, el material no se recobra después de una deformación y presenta estados de tixotropía.

Bautista et al. (1999) demostraron que las formas de los ciclos de tixotropía dependen del tiempo de reestructuración del material. El tercer grupo es un cociente entre las propiedades cinéticas, viscosas y estructurales. Cuando el número adimensional A es pequeño, i.e., $A \ll 1$ los efectos estructurales dominan sobre la parte cinética y viscosa. En este punto, podemos tener dos casos: (i) la constante cinética es pequeña y los efectos viscosos grandes, (ii) la constante cinética es grande y los efectos viscosos son pequeños. Por otra parte, si A es grande, i.e., $A \gg 1$ el tiempo de reestructuración del líquido es pequeño y los efectos cinéticos y viscosos son dominantes. En particular, si la constante cinética es igual al inverso del modulo elástico, i.e., $k = G_0^{-1}$, el número adimensional A se simplifica a $A = \frac{\eta_0 / G_0}{\lambda}$ y se reduce al número de Deborah. El cuarto grupo, es un relación entre la viscosidad a corte bajo y alto respectivamente. Si $B \gg 1$ el sistema pasa de estados de mayor a menor estructura (adelgazante al corte). Por otra parte, si $B \ll 1$ el sistema pasa de estado de menor a mayor estructura (engrosante al corte).

4.5 Esquema perturbativo

Con el fin de calcular la eficiencia del sistema, se necesita resolver el sistema de ecuaciones diferenciales adimensionales (7, 10, 11,12) sujeto a las condiciones de frontera (8,9). En la vasta literatura concerniente al tema existen dos métodos matemáticos utilizados para resolver el flujo pulsátil. El primero de éstos consiste en resolver el problema de valor inicial por métodos numéricos donde las variables discretizadas son el tiempo y el espacio.

Estos son de gran utilidad porque permiten una gran flexibilidad en los valores de la frecuencia, amplitud de la perturbación y grupos adimensionales.

El segundo método consiste en proponer un esquema perturbativo en términos de un parámetro perturbativo y obtener un algoritmo analítico numérico que permita deducir el aumento en el flujo. Por estas razones, se propone el siguiente esquema perturbativo para la velocidad axial, rapidez de deformación, esfuerzo cortante y función viscosidad.

$$\begin{aligned}
 v(r, \xi) &= v_0(r) \text{Re}^0 + v_1(r, \xi) \text{Re}^1 + v_2(r, \xi) \text{Re}^2 + \dots \\
 q(r, \xi) &= q_0(r) \text{Re}^0 + q_1(r, \xi) \text{Re}^1 + q_2(r, \xi) \text{Re}^2 + \dots \\
 \tau(r, \xi) &= \tau_0(r) \text{Re}^0 + \tau_1(r, \xi) \text{Re}^1 + \tau_2(r, \xi) \text{Re}^2 + \dots \\
 \Phi(r, \xi) &= \Phi_0(r) \text{Re}^0 + \Phi_1(r, \xi) \text{Re}^1 + \Phi_2(r, \xi) \text{Re}^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{14}$$

En (14) las contribuciones del esfuerzo y función viscosidad a órdenes mayores de uno no se conocen, por lo que se propone utilizar el teorema de Taylor para expresar $\tau_j(r, \xi)$ y $\Phi_j(r, \xi)$ con $j=1, 2, \dots$ en términos de derivadas superiores del esfuerzo y función viscosidad de orden cero $\tau_0(r)$ y $\Phi_0(r)$. Por lo tanto, el esfuerzo y la función viscosidad toman la forma:

$$\tau(r, \xi) = \tau_0(r) \text{Re}^0 + \left(q_1 \dot{\tau}_0 \right) \text{Re}^1 + \left(q_2 \dot{\tau}_0 + \frac{1}{2} q_1^2 \ddot{\tau}_0 \right) \text{Re}^2 + \dots \tag{15}$$

$$\Phi(r, \xi) = \Phi_0(r) \text{Re}^0 + \left(q_1 \dot{\Phi}_0 \right) \text{Re}^1 + \left(q_2 \dot{\Phi}_0 + \frac{1}{2} q_1^2 \ddot{\Phi}_0 \right) \text{Re}^2 + \dots \tag{16}$$

en (15-16) se ha utilizado la siguiente notación:

$$\tau_0 = \tau(q_0), \quad \dot{\tau}_0 = \left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q \rightarrow q_0}, \quad \ddot{\tau}_0 = \left. \frac{d^2\tau}{dq^2} \right|_{q \rightarrow q_0}; \tag{17}$$

$$\Phi_0 = \Phi(q_0), \quad \dot{\Phi}_0 = \left. \frac{d\Phi}{dq} \right|_{q \rightarrow q_0}, \quad \ddot{\Phi}_0 = \left. \frac{d^2\Phi}{dq^2} \right|_{q \rightarrow q_0}; \tag{18}$$

En la siguiente sección, se utiliza este esquema perturbativo en las ecuaciones adimensionales para deducir una expresión para la eficiencia.

4.6 Análisis asintótico a bajos números de Reynolds

Substituyendo (14-18) en las ecuaciones (19-23) e igualando términos del mismo orden en el número de Reynolds, se obtiene la contribución a orden cero, i.e., $O(\text{Re}^0)$:

$$\tau_0 = \Phi_0 q_0 = \tau_w r \quad (19)$$

$$\Phi_0(q_0) = \frac{Aq_0^2 - 1 + \sqrt{(Aq_0^2 - 1)^2 + 4ABq_0^2}}{2ABq_0^2} \quad (20)$$

$$I(\%) = 0 \quad (21)$$

En la ecuación (19) se ha utilizado la condición de frontera $\tau_0 = 0$ en $r = 0$ y se ha definido $\tau_w = \tau_0(r = 1)$ como el esfuerzo en la pared. De la misma manera que el orden cero, se igualan términos de primer orden en el número Reynolds, i.e., $O(\text{Re}^1)$:

$$\tau_1(r, \xi) = \tau_0 n(\xi) \quad (22)$$

$$q_1(r, \xi) = \frac{\tau_0}{\dot{\tau}_0} \left(n(\xi) + De \Phi_0 \dot{n}(\xi) \right) \quad (23)$$

$$\frac{dq_1(r, \xi)}{d\xi} = f_1(A, B, q_0) q_1(r, \xi) \quad (24)$$

$$I(\%) = \text{Re}^0 \frac{\int_0^1 \langle q_1(r, \xi) \rangle r^2 dr}{\int_0^1 q_0(r) r^2 dr} \times 100 \quad (25)$$

$$\dot{\tau}_0 \neq 0; \dot{\Phi}_0 \neq 0$$

En las ecuaciones (22-25) se han utilizado las condiciones de frontera $\tau_1(r, \xi) = q_1(r, \xi) = 0$ en $r = 0$. Nótese que la rapidez de deformación a orden uno $q_1(r, \xi)$ satisface la ecuación diferencial definida en (24) donde la función $f_1(A, B, q_0)$ está definida en el Apéndice. Por otro lado, si se toma el valor promedio de las ecuaciones (23-24) se obtiene $\langle q_1(r, \xi) \rangle = 0$ y $\left\langle \frac{dq_1(r, \xi)}{d\xi} \right\rangle = 0$, por lo que, de la ecuación (25), se concluye que a primer orden no hay aumento en el flujo, por lo que la eficiencia, i.e., $I(\%) = 0$.

La solución a segundo orden en el número de Reynolds, i.e., $O(\text{Re}^2)$:

$$\tau_2(r, \xi) = \left(\frac{1}{r} \int_0^r \beta v_0(\beta) d\beta \right) \dot{n}(\xi) \quad (26)$$

$$q_2(r, \xi) = -\frac{1}{2} \frac{\ddot{\tau}_0}{\dot{\tau}_0} q_1^2(r, \xi) + De \dot{\Phi}_0 \frac{\tau_0}{\dot{\tau}_0} n(\xi) q_1(r, \xi) + \left(\frac{n(\dot{\xi}) + De \Phi_0 n(\ddot{\xi})}{\dot{\tau}_0} \right) \left(\frac{1}{r} \int_0^r \beta v_0(\beta) d\beta \right) \quad (27)$$

$$\frac{dq_2(r, \xi)}{d\xi} = f_2(A, B, q_0) q_2(r, \xi) + f_3(A, B, q_0) \quad (28)$$

$$I(\%) = 100 \text{Re}^2 \frac{\int_0^1 \langle q_2(r, \xi) \rangle r^2 dr}{\int_0^1 q_0(r) r^2 dr} \quad (29)$$

$$\dot{\Phi}_0 \neq 0; \dot{\tau}_0 \neq 0$$

En las ecuaciones (26-27) se han utilizado las condiciones de frontera $\tau_2(r, \xi) = q_2(r, \xi) = 0$ en $r = 0$. En una forma similar, la rapidez de deformación a segundo orden en el número de Reynolds satisface la ecuación diferencial (28), donde las funciones $f_2(A, B, q_0), f_3(A, B, q_0)$ están definidas en el Apéndice.

Con el fin de obtener la eficiencia a segundo orden (29), se toma el valor promedio de (27), por lo que,

$$\langle q_2(r, \xi) \rangle = \left\langle -\frac{1}{2} \frac{\ddot{\tau}_0 \tau_0^2}{\left(\dot{\tau}_0\right)^3} \left\langle \left(n(\xi) \right)^2 + De^2 \Phi_0^2 \left(n(\xi) \right)^2 \right\rangle + De^2 \frac{\left(\Phi_0^2 \right)}{2 \left(\dot{\tau}_0 \right)^2} \tau_0^2 \left\langle \left(\dot{n}(\xi) \right)^2 \right\rangle \right\rangle \quad (30)$$

donde

$$\left\langle \frac{dq_2(r, \xi)}{d\xi} \right\rangle = f_2(A, B, q_0) \langle q_2(r, \xi) \rangle + \langle f_3(A, B, q_0) \rangle \quad (31)$$

La ecuación (31) describe el promedio de la rapidez de deformación en función de las derivadas de primer y segundo órdenes en el esfuerzo y la función viscosidad a orden cero. Nótese que depende del número de Deborah, es decir, de las propiedades viscoelásticas y de estructura del material. A Deborah bajo, i.e., $De \rightarrow 0$, se obtiene solamente la contribución viscosa. La ecuación (31) describe el promedio de la evolución temporal de la rapidez de deformación a segundo orden en el número de Reynolds. Es importante, resaltar que el promedio de la ecuación (31) es diferente de

cero, i.e., $\left\langle \frac{dq_2(r, \xi)}{d\xi} \right\rangle \neq 0$ a diferencia del primer orden donde $\left\langle \frac{dq_1(r, \xi)}{d\xi} \right\rangle = 0$. Para

obtener la eficiencia a segundo orden (ecuación 29) solamente se necesita calcular las

funciones adimensionales $n(\xi)$ y $\dot{n}(\xi)$ por lo que a partir de las relaciones de Wiener-

Khinchine (capítulo 2) obtenemos:

$$R(0) = \left\langle \left(n(\xi) \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\overline{\left(n(\xi) \right)} \right) \left(\overline{\left(n(\xi) \right)} \right) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle dZ(\alpha) \overline{dZ(\alpha)} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(\alpha) d\alpha \quad (32)$$

$$R_1(0) = \left\langle \left(\dot{n}(\xi) \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\overline{\left(\dot{n}(\xi) \right)} \right) \left(\overline{\left(\dot{n}(\xi) \right)} \right) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^2 \langle dZ(\alpha) \overline{dZ(\alpha)} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^2 \Lambda(\alpha) d\alpha \quad (33)$$

Substituyendo ecuaciones (32, 33) en la ecuación (30), se obtiene:

$$\langle q_2(r, \xi) \rangle = \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\ddot{\tau}_0 \tau_0^2}{\left(\dot{\tau}_0\right)^3} \left(R(0) + De^2 \Phi_0^2 R_1(0) \right) + De^2 \frac{\left(\dot{\Phi}_0^2\right)}{2 \left(\dot{\tau}_0\right)^2} \tau_0^2 R_1(0) \right\} \quad (34)$$

Para evaluar la eficiencia, los valores de las funciones de correlación $R_0(0)$ y $R_1(0)$ deben ser conocidos. En particular, si $n(\xi)$ es una función sinusoidal (con frecuencia $\Omega = \omega\lambda$) i.e., $n(\xi) = \text{sen}(\Omega\xi)$. La densidad espectral y sus funciones de correlación $R_0(0)$ y $R_1(0)$ toman la forma:

$$\Omega(\alpha) = \frac{1}{4} (\delta(\Omega - \alpha) + \delta(\Omega + \alpha)) \quad (35)$$

$$R_0(0) = \frac{1}{2}; \quad R_1(0) = \frac{\Omega^2}{2} \quad (36)$$

Substituyendo (35-36) en (39) y finalmente en la eficiencia (ecuación 29) se obtiene la eficiencia del modelo BMP en su forma integral:

$$I(\%) = 25 \text{Re}^2 \frac{\int_0^1 \left(-\frac{\ddot{\tau}_0 \tau_0^2}{\left(\dot{\tau}_0\right)^3} (1 + De^2 \Phi_0^2) + De^2 \frac{\left(\dot{\Phi}_0^2\right)}{\left(\dot{\tau}_0\right)^2} \tau_0^2 \right) r^2 dr}{\int_0^1 q_0(r) r^2 dr} \quad (37)$$

Para facilitar los cálculos numéricos, (37) puede ser expresada en términos del esfuerzo y rapidez de deformación en la pared. Substituyendo el esfuerzo a orden cero, i.e., $\tau_0 = \tau_w r$ en (37) se obtiene:

$$I(\%) = 25 \text{Re}^2 \frac{\int_0^{q_w} \left(-\frac{\ddot{\tau}_0 \tau_0^4}{\left(\dot{\tau}_0\right)^2} (1 + De^2 \Phi_0^2) + De^2 \frac{\left(\dot{\Phi}_0^2\right)}{\dot{\tau}_0} \tau_0^4 \right) dq_0}{\int_0^{q_w} q_0 d\left(\frac{1}{3} \tau_0^3\right)} \quad (38)$$

En (38) $q_w = q_0(r=1)$ es la rapidez de deformación en la pared. Para algunas ecuaciones constitutivas, (38) puede ser difícil de calcular debido a que involucra la segunda derivada del esfuerzo a orden cero, i.e., $\ddot{\tau}_0$. Sin embargo, la ecuación (38) puede ser simplificada integrando por partes, tomando $u = \tau_0^4(1 + De^2\Phi_0^2)$ y

$$dv = -\frac{\ddot{\tau}_0}{\left(\dot{\tau}_0\right)^2} = d\left[\frac{1}{\dot{\tau}_0}\right].$$

La segunda integral del numerador en (38) se cancela, y

finalmente se obtiene una expresión más simple de la eficiencia de un fluido complejo sometido a un gradiente de presión pulsátil, y que puede ser caracterizado por el modelo BMP:

$$I(\%) = 75 \text{Re}^2 \left\{ \frac{\left[\tau_w^4 - 4\dot{\tau}_w \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 + We^2 \left(\tau_w^4 \Phi_w^2 - 4\dot{\tau}_w \int_0^{q_w} \Phi_0^2 \tau_0^3 dq_0 \right) \right]}{\dot{\tau}_w \left(q_w \tau_w^3 - \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 \right)} \right\} \quad (39)$$

En (39) $We = \Omega De = \frac{\eta_0}{G_0} \omega$ es el número de Weissenberg pulsátil el cual, se define como

el producto de un tiempo característico viscoelástico del material, i.e., $\frac{\eta_0}{G_0}$ y una rapidez

de deformación del proceso i.e., ω . En la ecuación (39), $\Phi_w = \Phi_0(q_w)$ y $\tau_w = \tau_0(q_w)$

representan la función viscosidad y esfuerzo a orden cero evaluados en la rapidez de deformación en la pared. Es claro en (39) que la eficiencia es función del cuadrado en

los números de Reynolds, Weissenberg y de la combinación de parámetros

adimensionales del modo BMP $\left(A = \frac{k\eta_0}{\lambda}; B = \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right)$.

En el límite de frecuencias bajas, i.e., $We \rightarrow 0$, $Re \rightarrow 0$ la eficiencia tiende a cero. Por otra parte, a frecuencias altas es decir, $We \rightarrow \infty$ el término que contiene al número de Weissenberg domina y (39) se simplifica a:

$$I(\%) = 75 Re^2 We^2 \left\{ \frac{\left(\tau_w^4 \Phi_w^2 - 4 \dot{\tau}_w \int_0^{q_w} \Phi_0^2 \tau_0^3 dq_0 \right)}{\dot{\tau}_w \left(q_w \tau_w^3 - \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 \right)} \right\} \quad (40)$$

En (40), el producto de los números de Weissenberg y Reynolds es una medida de los

efectos elásticos e inerciales en el sistema $\left(ReWe = \frac{\rho(\omega a)^2}{G_0} \right)$. Phan-Thien (1978-

1980), Bird et al. (1977) utilizaron varios modelos elásticos e inelásticos y obtuvieron expresiones similares mediante otro tipo de técnicas perturbativas en la eficiencia. Para resolver la integral (39) es necesaria una expresión que relacione la rapidez de deformación en la pared como función del esfuerzo en la pared. Para tal efecto, la ecuación (20) se resuelve para el escalar rapidez de deformación en la pared de tal forma que:

$$q_w(\tau_w) = \frac{AB\tau_w^2 - 1 + \sqrt{(AB\tau_w^2 - 1)^2 + 4A\tau_w^2}}{2A\tau_w} \quad (41)$$

Las ecuaciones (39,41) son las más importantes en los cálculos numéricos.

4.7 Comparación de la eficiencia del modelo BMP con otras ecuaciones constitutivas

La ecuación (39) deducida a través del método perturbativo propuesto en la presente tesis, puede ser comparada con otros resultados de eficiencia obtenidos con diferentes ecuaciones constitutivas para modelos viscosos y viscoelásticos.

4.7.1 Eficiencia del modelo newtoniano generalizado.

Phan-Thien (1978; 1980; 1983) cálculo la eficiencia en el flujo pulsátil con diferentes ecuaciones constitutivas. La más sencilla de todas, fue el Newtoniano Generalizado $\left(\underline{\underline{\sigma}} = 2\eta\left(\underline{\underline{II}}_D\right)\underline{\underline{D}}\right)$ y como función viscosidad utilizó el modelo reológico

de Carreau-Yasuda $\left(\eta\left(\underline{\underline{II}}_D\right) = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left(1 + \left(\lambda_1 \sqrt{\underline{\underline{II}}_D}\right)^2\right)^m}\right)$. Si consideramos el mismo

conjunto de variables adimensionales (definidas en 4.4) en los cálculos perturbativos excepto que, el tiempo de reestructuración se cambia por el tiempo λ_1 del modelo de Carreau-Yasuda obtenemos el siguiente conjunto de variables adimensionales.

$$v = \frac{V_z}{\omega a}; p = \frac{dP}{\frac{dZ}{\eta_0}}; \xi = \frac{t}{\lambda_1}; \tau = \frac{\sigma_{RZ}}{\eta_0 / \lambda_1}; q = \lambda_1 \dot{\gamma}_{RZ}; r = \frac{R}{a}; \Phi = \frac{\eta}{\eta_0}; \Omega = \omega \lambda_1 \quad (43)$$

sustituyendo (43) en el newtoniano generalizado, se obtiene el respectivo modelo viscoso adimensional:

$$\tau(r, \xi) = \Phi(r, \xi) q \quad (44)$$

$$\Phi(q) = \alpha + \frac{1 - \alpha}{(1 + q^2)^m} \quad (45)$$

el esquema perturbativo básicamente es el mismo que en la presente tesis doctoral, por lo que, la solución a segundo orden en el parámetro de expansión, toma la forma:

$$I(\%) = 75 \text{Re}^2 \left\{ \frac{\tau_w^4 - 4\tau_w \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0}{\tau_w \left(q_w \tau_w^3 - \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 \right)} \right\} \quad (46)$$

Es claro, de la expresión (46) que la eficiencia, solamente depende del cuadrado en el número de Reynolds, del esfuerzo y derivada del esfuerzo en la pared. Nótese que la integrales del numerador contienen un límite superior variable que depende del esfuerzo en la pared. Otro hecho importante, es que el esfuerzo adimensional $\tau_0(r, \xi)$ es función de la razón de viscosidades y del índice del modelo de Carreau-Yasuda $\left(\alpha = \frac{\eta_\infty}{\eta_0}; m\right)$.

Obsérvese, que la expresión (46) es un caso particular del modelo BMP en el caso de números de Weissenberg bajos ($We \ll 1$).

4.7.2 Eficiencia del modelo de Tanner

De la misma manera, Phan-Thien (1978) extendió sus resultados del newtoniano generalizado utilizando el modelo de Tanner $\left(\underline{\underline{\sigma}} + \lambda_0 \overset{\nabla}{\underline{\underline{\sigma}}} = 2\eta \left(II_{\underline{\underline{D}}}\right) \underline{\underline{D}}\right)$ el cual, es un modelo fenomenológico que posee una contribución elástica y una función viscosidad que depende del segundo invariante del tensor rapidez de deformación. Al introducir las variables adimensionales definidas en (43) el modelo de Tanner toma la forma:

$$\left(1 + De \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \tau = \Phi(q)q \quad (47)$$

y como función viscosidad adimensional propuso el modelo Carreau-Yasuda descrito en (45). En (47) $De = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ se puede interpretar como el número de Deborah que resulta del cociente de dos tiempos característicos asociados a la viscoelasticidad del material y otro a la fluidez. Al introducir el mismo esquema perturbativo utilizado en esta tesis doctoral en las ecuaciones de movimiento y de Tanner, Phan-Thien obtuvo la siguiente expresión para la eficiencia:

$$I(\%) = 75 \text{Re}^2 \left\{ \frac{\tau_w^4 - 4 \dot{\tau}_w \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0}{\dot{\tau}_w \left(q_w \tau_w^3 - \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 \right)} \right\} (1 + We^2) \quad (48)$$

En (48) $We = \Omega De = (\omega \lambda_1) \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) = \omega \lambda_0$ es el número de Weissenberg pulsátil. De la ecuación (48) se observa, que el modelo de Tanner incorpora los efectos elásticos de acuerdo con: $(1 + We^2)$. Es claro que si $We^2 \rightarrow 0$ se reduce a la eficiencia del Newtoniano Generalizado descrita en la ecuación (46). Nótese que (48) demuestra que la eficiencia aumenta conforme el número de Weissenbeg pulsátil lo hace.

4.7.3 Eficiencia del modelo de White-Metzner

El modelo de White-Metzner contiene un tiempo característico y una función viscosidad, que dependen del segundo invariante del tensor rapidez de deformación

$$\left(\underline{\underline{\sigma}} + \frac{\eta \left(II_{\underline{\underline{D}}} \right)_{\underline{\underline{v}}}}{G_0} \underline{\underline{\sigma}} = 2\eta \left(II_{\underline{\underline{D}}} \right) \underline{\underline{D}} \right). \text{ Las propiedades reológicas de esta ecuación, dependen}$$

completamente del valor de la función viscosidad que se utilice. Sustituyendo las variables adimensionales definidas en (43), y utilizando como función viscosidad el modelo de Carreau-Yasuda se obtiene la ecuación reológica adimensional del modelo de White-Metzner:

$$\left(1 + De \Phi(q) \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \tau(q) = \Phi(q) q \quad (47)$$

y por consiguiente, utilizando el mismo esquema perturbativo de los casos anteriores, obtenemos la eficiencia del modelo reológico de White-Metzner:

$$I(\%) = 75 \text{Re}^2 \left\{ \frac{\tau_w^4 - 4 \dot{\tau}_w \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 + We^2 \left(\tau_w^4 \Phi_w^2 - 4 \dot{\tau}_w \int_0^{q_w} \Phi_0^2 \tau_0^3 dq_0 \right)}{\dot{\tau}_w \left(q_w \tau_w^3 - \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 \right)} \right\} \quad (48)$$

Es claro, de la expresión (48), que la eficiencia se reduce al newtoniano generalizado descrito en 4.8.1 cuando el número de Weissenberg oscilante se aproxima a cero. Una expresión similar a (48) fue deducida por medio de una expansión en variable compleja (Bird et al. 1977). La expresión (48) presenta dos zonas donde la eficiencia es positiva y otra negativa por lo que el modelo de Tanner es más realista desde el punto de vista físico. Un hecho importante, es que los dos modelos (Tanner y White-Metzner) se reducen al newtoniano generalizado a bajos números de Weissenberg pulsátil. Por otra parte las estructuras matemáticas que describen la eficiencia son similares y la diferencia radica básicamente en la contribución elástica.

Nótese, que la eficiencia del modelo BMP es la misma que el del modelo de White-Metzner por lo que el esquema perturbativo utilizado en este trabajo es completamente general y es aplicable a varios modelos reológicos (Newtoniano Generalizado, Tanner, White-Metzner).

4.8 Potencia

La potencia necesaria para bombear un líquido en un tubo debido a un gradiente de presión pulsátil fue calculada por Middleman (1977):

$$\langle P \rangle = \left\langle p \left(1 + \text{Re}n(\xi) \right) \int_0^1 q(r, \xi) r^2 dr \right\rangle \quad (49)$$

Por lo tanto, la fracción de potencia necesaria para bombear un líquido, que presenta estructura transitoria, se define de manera análoga a la eficiencia, (ecuación 1):

$$I_{Pot}(\%) = \frac{\langle P \rangle - P_0}{P_0} \times 100 = \frac{\left\langle p(1 + \text{Re}n(\xi)) \int_0^1 q(r, \xi) r^2 dr \right\rangle - p \int_0^1 q_0(r) r^2 dr}{p \int_0^1 q_0(r) r^2 dr} \times 100 \quad (50)$$

En la ecuación (50), P_0 es la potencia requerida para bombear el líquido debido a un gradiente de presión pulsátil y $\langle P \rangle$ es el promedio de la potencia pulsátil. Sustituyendo el esquema perturbativo definido en (25) y calculando el promedio de (50), se obtiene:

$$I_{Pot}(\%) = \frac{\langle P \rangle - P_0}{P_0} \times 100 = \text{Re}^2 \left(\frac{\left\langle n(\xi) \int_0^1 q_1(r, \xi) r^2 dr \right\rangle + \int_0^1 \langle q_2(r, \xi) \rangle r^2 dr}{\int_0^1 q_0(r) r^2 dr} \right) \times 100 \quad (51)$$

sustituyendo las definiciones $q_1(r, \xi)$ y $q_2(r, \xi)$ (ecuaciones 34,38) en (51) e integrando por partes, se obtiene la fracción de potencia:

$$I_p(\%) = 75 \text{Re}^2 \left(\frac{\tau_w^4 \left(1 + (\Omega De \Phi_w)^2 \right) - 2 \dot{\tau}_w \int_0^{q_w} \left(1 + 2(\Omega De \Phi_0)^2 \right) \tau_0^3 dq_0}{\dot{\tau}_w \left(q_w \tau_w^3 - \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 \right)} \right) \quad (52)$$

La expresión (52) puede ser simplificada tomando en cuenta el hecho de que el número de Weissenberg es el producto de la frecuencia por el Deborah, i.e., $We = \Omega De$.

$$I_p(\%) = 75 \text{Re}^2 \left\{ \frac{\left[\tau_w^4 - 2 \dot{\tau}_w \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 + We^2 \left(\tau_w^4 \Phi_w^2 - 4 \dot{\tau}_w \int_0^{q_w} \Phi_0^2 \tau_0^3 dq_0 \right) \right]}{\dot{\tau}_w \left(q_w \tau_w^3 - \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 \right)} \right\} \quad (53)$$

La ecuación (53) indica que la fracción de potencia requerida para bombear un líquido mediante un gradiente de presión pulsátil tiene la misma estructura matemática que la eficiencia definida en términos del flujo volumétrico (ecuación (39)).

Es evidente que (53) se descompone en dos contribuciones, inelástica y elástica. A frecuencias bajas, i.e., $\omega \rightarrow 0$ los dos primeros términos del numerador son dominantes sobre el tercero, por lo que (53) se simplifica a:

$$I_p(\%) \approx 75 \text{Re}^2 \left\{ \frac{\tau_w^4 - 2 \dot{\tau}_w \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0}{\dot{\tau}_w \left(q_w \tau_w^3 - \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 \right)} \right\} \quad (54)$$

la ecuación (54) es la contribución inelástica de la potencia requerida para bombear un líquido que se estructura bajo flujo debido a un gradiente de presión pulsátil. Por otra parte, a frecuencias altas, i.e., $\omega \rightarrow \infty$ el término en el numerador integral que contiene el Weissenberg domina sobre los demás por lo que (53) se simplifica a:

$$I_p(\%) \approx 75 \text{Re}^2 \text{We}^2 \left\{ \frac{\left(\tau_w^4 \Phi_w^2 - 4 \dot{\tau}_w \int_0^{q_w} \Phi_0^2 \tau_0^3 dq_0 \right)}{\dot{\tau}_w \left(q_w \tau_w^3 - \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 \right)} \right\} \quad (55)$$

las ecuaciones 40 y 55 son iguales, por lo que en el régimen elástico no existe ninguna ventaja energética cuando se bombea un líquido viscoelástico estructurado por medio de un gradiente de presión pulsátil. Una manera de obtener una expresión que permita cuantificar cuándo un líquido en un sistema a gradiente de presión pulsátil presenta una ventaja de tipo económico, se obtiene combinando las ecuaciones (39) y (55):

$$I_{pol}(\%) - I(\%) = 150 \text{Re}^2 \left\{ \frac{\int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0}{\left(q_w \tau_w^3 - \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 \right)} \right\} \quad (56)$$

Para que el bombeo por un gradiente de presión pulsátil sea viable (56) debe ser negativo, es decir, la energía utilizada en las pulsaciones debe ser menor que la utilizada sin las pulsaciones. Un hecho claro, es que (56) siempre es una cantidad positiva

porque, el denominador de (56) es el flujo volumétrico a gradiente de presión constante, i.e., $Q_0 > 0$ por otra parte, por monotonía de la integral, τ_0^3 es una función continua y positiva en el intervalo compacto $[0, q_w] \subseteq R$ por lo que su integral es positiva, i.e., $\int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 > 0$, así que, la diferencia entre la fracción de potencia y la eficiencia es positiva, i.e., $I_{Pot}(\%) - I(\%) > 0$.

Esto implica que para un líquido con estructura transitoria, caracterizado por el modelo BMP, no existe ninguna ventaja de tipo energético el utilizar un gradiente de presión pulsátil. Edwards et al. (1972), Bird et al. (1977), Sundstrom y Kaufman (1977), Phan-Thien (1982), Phan-Thien y Dudek (1982) calcularon la potencia necesaria en un sistema de flujo a gradiente de presión pulsátil en el caso de un líquido inelástico modelado con la ecuación constitutiva ley de potencia. Ellos demostraron que la potencia es positiva y depende del exponente del modelo, por lo que no existe un ahorro de energía en bombear un líquido a través mediante un gradiente de presión pulsátil.

5. RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados numéricos de la eficiencia para distintas situaciones de flujo. En 5.1 se ilustran las predicciones del análisis numérico del modelo adimensional BMP sometido a un gradiente de presión pulsátil. En 5.2 se toman datos reométricos del tensoactivo CTAT (Soltero et al. 1999) con el fin de analizar el efecto de la concentración en la eficiencia a través de los grupos adimensionales involucrados. Los cálculos en este capítulo son obtenidos con base en la siguiente ecuación de la eficiencia:

$$I(\%) = 75 \text{Re}^2 \left\{ \frac{\left(\tau_w^4 - 2 \dot{\tau}_w \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 + We^2 \left(\tau_w^4 \Phi_w^2 - 4 \dot{\tau}_w \int_0^{q_w} \Phi_0^2 \tau_0^3 dq_0 \right) \right)}{\dot{\tau}_w \left(q_w \tau_w^3 - \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 \right)} \right\}$$

en donde, el límite superior de las integrales del numerador y denominador se calculan a partir de la siguiente ecuación cuadrática de la rapidez de deformación en la pared:

$$q_w(\tau_w) = \frac{AB\tau_w^2 - 1 + \sqrt{(AB\tau_w^2 - 1)^2 + 4A\tau_w^2}}{2A\tau_w}$$

en donde se definieron los siguientes números adimensionales que describen la competencia entre los diferentes mecanismos y que fueron analizados y discutidos ampliamente en el capítulo anterior.

$$A = \frac{k\eta_0}{\lambda}; \quad B = \frac{\eta_0}{\eta_\infty}; \quad B = \frac{\eta_0}{\eta_\infty}; \quad \text{Re} = \frac{\rho\omega a^2}{\eta_0}; \quad We = \frac{\eta_0}{G_0} \omega$$

de acuerdo con éstas definiciones, el interés se enfocará en evaluar el efecto de estos grupos adimensionales sobre la eficiencia de flujo. Para tal efecto, se desea inspeccionar los siguientes casos descritos en la tabla 1.

Tabla 1

$Re = \frac{\rho\omega a^2}{\eta_0}$	$A = \frac{k\eta_0}{\lambda}$	$B = \frac{\eta_0}{\eta_\infty}$	$We = \frac{\eta_0}{G_0} \omega$	Mecanismo
$Re \ll 1$	$A \ll 1$	$1 \leq B \ll B_1$	$We \gg 1$	V; AC
$Re \ll 1$	$A \ll 1$	$B \gg 1$	$0 \leq We \leq We_1$	VE
$Re \ll 1$	$1 \leq A \leq A_1$	$B \gg 1$	$We \gg 1$	C; V; E; T

En la tabla 1, se han etiquetado los diferentes mecanismos involucrados en el flujo pulsátil de la siguiente manera: V = Mecanismos Viscosos; C = Mecanismos Cinéticos; E = Mecanismos Estructurales; T = Tixotropía; AC = Efectos Adelgazantes al Corte del Fluido.

De acuerdo con estas definiciones, se observa que en la tabla 1 el primer caso de estudio son las propiedades viscosas generadas por el adelgazamiento al corte del fluido (En términos de la estructura, el sistema pasa de mayor a menor estructura debido al flujo).

El segundo conjunto de mecanismos que se estudian, están asociados a las propiedades viscoelásticas del material a través del número de Weissenberg. Por último, se investigan los mecanismos cinéticos, viscosos y estructurales, y como caso particular la tixotropía del sistema (Este efecto se obtiene cuando la constante cinética es igual al inverso del módulo elástico). Con el fin de contrastar los resultados teóricos obtenidos, se alimentan datos reométricos del tensoactivo CETAT a diferentes soluciones en el modelo, y los resultados obtenidos son presentados en la tabla 3 con el fin de analizar sus propiedades físicas.

5.1 Predicciones teóricas

La eficiencia del flujo volumétrico definida en el capítulo 4 ecuación (39), fue resuelta por un método de cuadratura gaussiana combinado con un algoritmo de Lagrange para extrapolar puntos cercanos al origen.

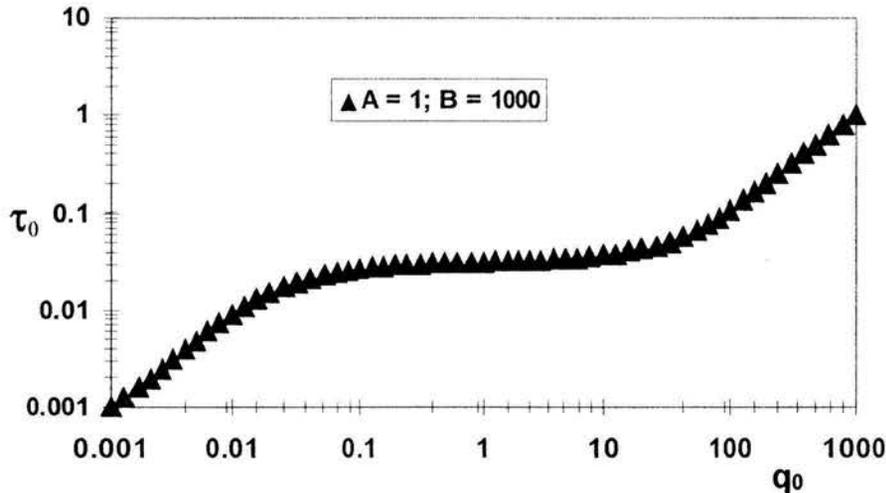


Figura 2. Esfuerzo cortante versus rapidez de deformación

En la figura 2, se representa gráficamente el esfuerzo cortante como función de la rapidez de deformación a orden cero. Los valores de los grupos adimensionales son: $A = 1$; $B = 1000$. A rapidez de deformación baja $0.001 \leq q_0 \leq 0.01$, el fluido presenta una zona a viscosidad constante, mientras que, a rapidez de deformación moderada, i.e., $0.04 \leq q_0 \leq 50$ el esfuerzo cortante a orden cero tiene un comportamiento monótono creciente con pendiente muy cercana a cero (zona de transición asociada al máximo rompimiento de la estructura). Por otra parte, a rapidez de deformación alta, i.e., $q_0 > 50$ el esfuerzo es lineal con pendiente constante. Físicamente, en la figura (2) el sistema pasa de estados de mayor a menor estructura debido al flujo, y la derivada del esfuerzo a orden cero es diferente de cero y positiva en todo el intervalo de rapidez de deformación a orden cero, i.e., $\dot{\tau}_0 \neq 0$, lo que implica la validez de la ecuación (39).

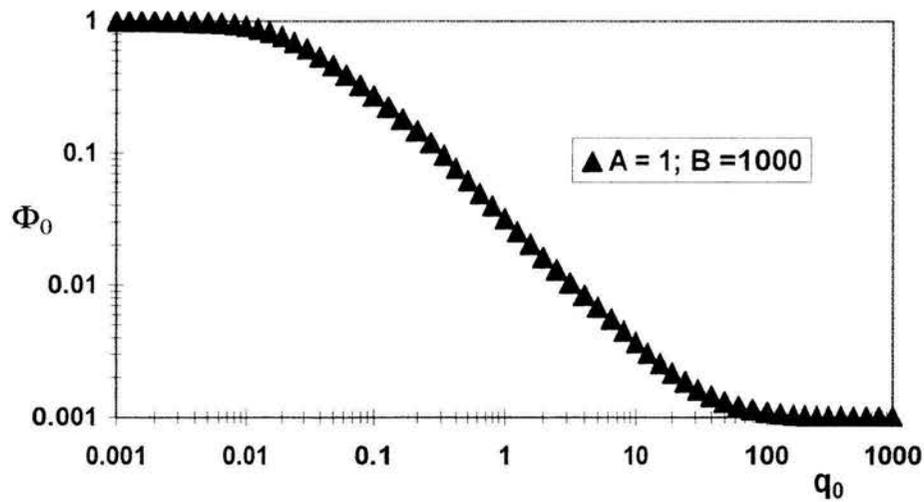


Figura 3. Función viscosidad versus rapidez de deformación

En la figura 3 se ilustra el comportamiento de la función viscosidad versus rapidez de deformación. Los valores de los grupos adimensionales, son los mismos que en la figura (2), i.e., $A=1$ y $B=1000$.

A rapidez de deformación baja ($0.001 \leq q_0 \leq 0.01$) se presenta una zona donde la viscosidad es constante. Aquí, el sistema tiene una estructura definida, al aumentar la rapidez de deformación ($0.01 < q_0 \leq 100$) la estructura se rompe debido al flujo y se observa una zona de transición de estados de mayor a menor estructura conocida como ley de potencia. Por otra parte, a rapidez de deformación alta ($100 \leq q_0 \leq 1000$) las cadenas se orientan y el líquido se estructura de nuevo. Aquí la viscosidad del material es menor que en la primera meseta debido al rompimiento en la estructura.

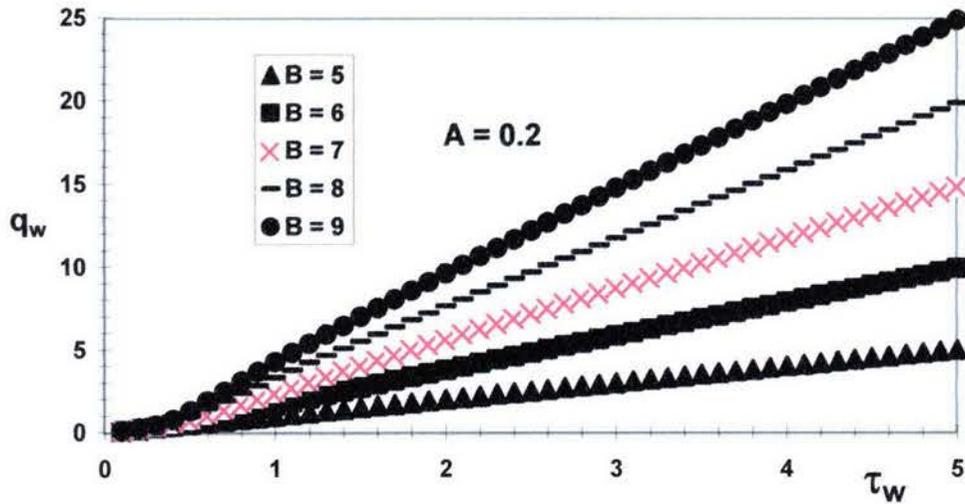


Figura 4. Rapidez de deformación versus esfuerzo en la pared, para diferentes valores del número B

En la figura 4, se representa la rapidez de deformación como función del esfuerzo en la pared para distintos valores B . En todos los casos, la rapidez de deformación en la pared es una función monótona creciente en todo el intervalo. A esfuerzo en la pared bajos, i.e., $\tau_w \leq 1$ todas las curvas se aproximan a una sola. Sin embargo, para valores de $\tau_w > 0.5$, se aprecia un cambio en las pendientes de las curvas debido a las propiedades adelgazantes al corte del sistema.

Es claro que para un valor de esfuerzo constante, la rapidez de deformación aumenta debido a que el líquido necesita más energía para romper su estructura.

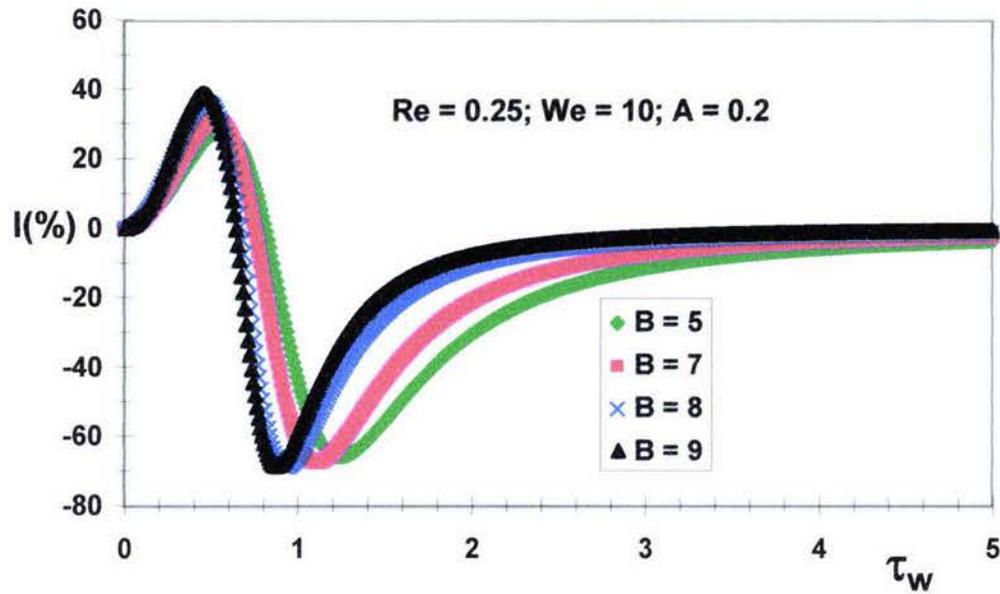


Figura 5. Eficiencia versus esfuerzo en la pared como función del número adimensional B

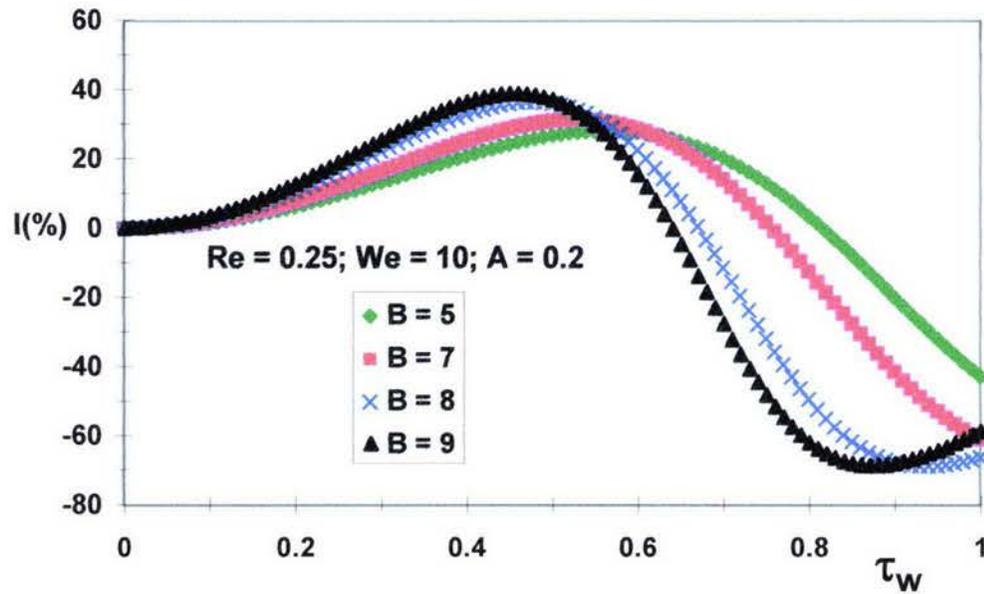


Figura 6. Ampliación de la figura 5 en el intervalo: $0 \leq \tau_w \leq 1$

En la figura 5 se representa gráficamente la eficiencia como función del esfuerzo en la pared, para diferentes valores del número B. Los otros grupos adimensionales utilizados en las predicciones son: $Re = 0.25$; $We = 10$; $A = 0.2$.

Por otra parte, la figura 6, ilustra una ampliación de la figura 5 en el intervalo $0 \leq \tau_w \leq 1$ para una mejor observación de las predicciones numéricas.

De acuerdo con los valores de los números adimensionales escogidos, el sistema se encuentra en un régimen en donde los mecanismos elásticos dominan sobre los viscosos y los efectos estructurales son mayores en comparación con los cinéticos, viscosos e inerciales. Es claro que en la figura (5) existen zonas donde la eficiencia es positiva y negativa respectivamente y el efecto del grupo adimensional B sobre la eficiencia es la de una traslación del máximo y del mínimo hacia valores menores de esfuerzo en la pared, cuando el líquido es más adelgazante al corte ($B \ll 1$). Físicamente cuando las propiedades adelgazantes aumentan, el sistema pasa de estados de mayor a menor estructura lo que implica una menor energía para romper la estructura del fluido y por ende, un desfaseamiento hacia valores de esfuerzo menores en la pared.

Nótese, que a partir de un cierto valor crítico de esfuerzo en la pared, todas las curvas convergen asintóticamente a cero conforme el esfuerzo en la pared aumenta. Por otra parte, experimentos con poliacrilamida demostraron solamente valores positivos en la eficiencia (Phan-Thien y Dudek 1982) por lo que el efecto del mínimo en las curvas de la figura 5 debe ser atribuido al modelo reológico que se emplea en la solución del flujo pulsátil. Phan-Thien obtuvo resultados positivos en el flujo, para un modelo de Tanner el cual contiene un tiempo de Maxwell y una viscosidad que depende del segundo invariante del tensor rapidez de deformación. En contraste, Bird et al. (1977) utilizó un modelo de White-Metzner el cual contiene un tiempo de Maxwell y una función viscosidad que dependen de la rapidez de deformación.

Como función viscosidad, propuso un modelo inelástico tipo Carreau-Yasuda. Los resultados son similares a los del modelo BMP en donde existen dos zonas de eficiencia, una positiva y la otra negativa.

La explicación a estas contradicciones es el cambio de signo de la segunda derivada del esfuerzo asociado con la convexidad de la gráfica esfuerzo rapidez de deformación, y que puede ser apreciado en la ecuación (38). Dado un intervalo de rapidez de deformación, la función esfuerzo es cóncava hacia arriba y por lo tanto, la segunda derivada del esfuerzo cortante es negativa, i.e., $\ddot{\tau}_0 < 0$, y además, la derivada del cuadrado de la función viscosidad es negativa en el intervalo donde el líquido es adelgazante al corte, es decir $(\dot{\Phi}_0^2) = 2\Phi_0 \dot{\Phi}_0 < 0$, por lo que el numerador de (38) es negativo y por consiguiente, la eficiencia es negativa. En la práctica solamente han sido observados valores positivo de la eficiencia, por lo que, el análisis solamente es válido en la región donde la eficiencia es positiva. Esto implicaría que una aplicación tecnológica de esta teoría se esperaría a valores moderados de esfuerzo en la pared en donde se presentarían ventajas energéticas de tipo económico.

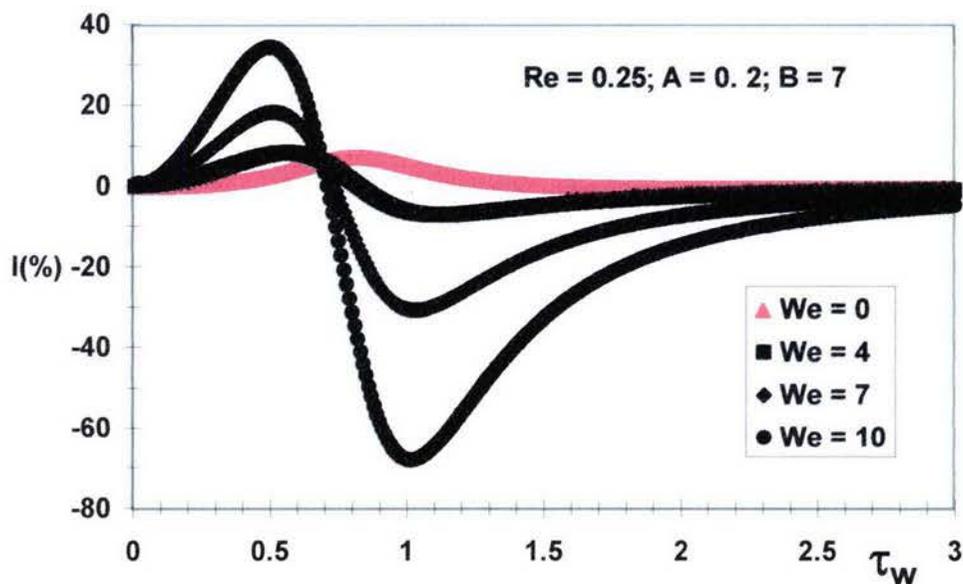


Figura 7. Eficiencia versus esfuerzo en la pared como función del número de Weissenberg pulsátil

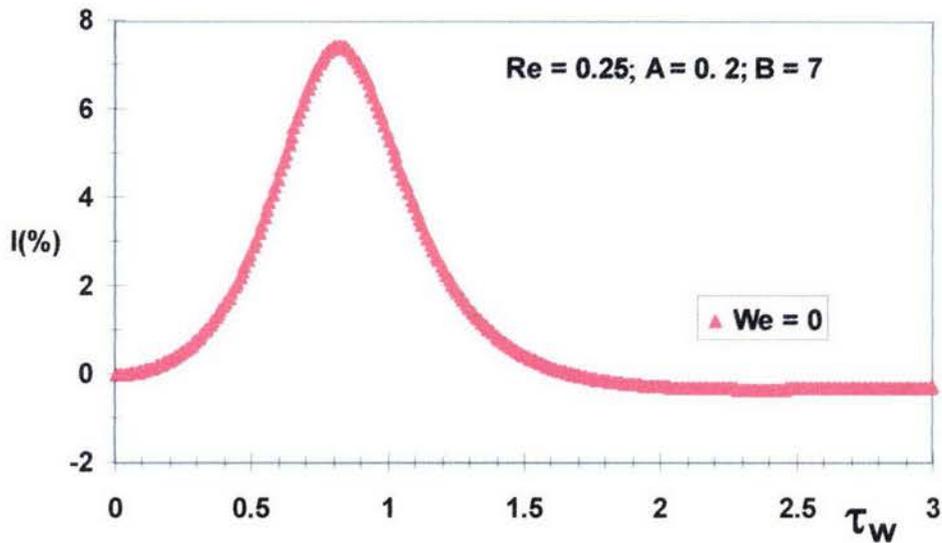


Figura 8. Ampliación de la figura (7) en el caso de un líquido inelástico (Es decir, en donde los mecanismos elásticos son despreciables con respecto a los viscosos y que matemáticamente se describen cuando el número de Weissenberg es cero, i.e., $We = 0$)

En la figura (7) en el eje de las ordenadas se representa gráficamente la eficiencia y en el de las abscisas el esfuerzo en la pared, a diferentes valores del número de Weissenberg pulsátil. Los otros grupos adimensionales utilizados en las predicciones son: $Re = 0.25$; $A = 0.2$; como pruebas de consistencia,. La línea roja muestra el caso en donde los mecanismos elásticos son pequeños en comparación con los viscosos (inelástico), en donde para cualquier valor de esfuerzo en al pared, la eficiencia es positiva. Por otra parte, cuando el líquido complejo es viscoelástico los máximos y mínimos aumentan su valor de debido a la elasticidad del medio. Sin embargo, en la parte experimental sólo se han observado valores positivos en la eficiencia con diferentes ecuaciones constitutivas (Manero y Mena 1977; Phan-Thien y Dudek 1982).

Por otra parte, en la figura (8) se muestra el caso inelástico de la eficiencia como función del esfuerzo en la pared, en donde, la eficiencia es positiva para cualquier valor de esfuerzo en la pared. El máximo en la eficiencia $I(\%) \approx 7.5$ se obtiene a un valor de esfuerzo en la pared cercano a $\tau_w \approx 0.9$. Comparando las figuras (7-8) se observa que los mecanismos elásticos cambian drásticamente el valor de la eficiencia debido, en este caso, a una variación en el tiempo característico de observación (tiempo asociado a la viscoelasticidad del material), i.e., $\eta_0 G_0^{-1}$ o de la frecuencia ω .

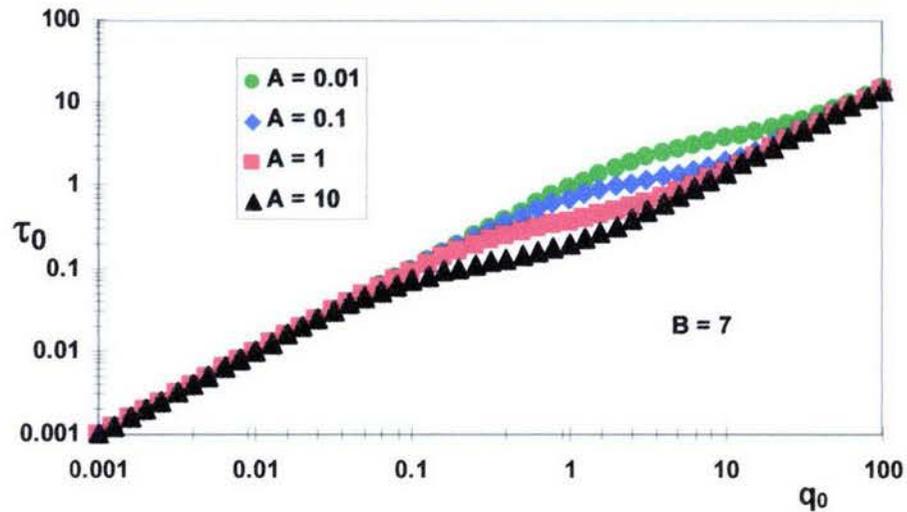


Figura 9. Esfuerzo versus rapidez de deformación para diferentes valores en el número adimensional A

En la figura (9) se representa gráficamente el esfuerzo versus rapidez de deformación como función del número adimensional A . El otro grupo adimensional utilizado es $B = 7$. Se observa en la figura (9) que en todas las condiciones de flujo, el líquido presenta cambios en la estructura debido a los mecanismos de tipo cinético, viscosos y de estructura. Por un lado, a valores menores de la unidad en el número adimensional A , i.e., $A < 1$ la relación esfuerzo-rapidez de deformación es mas amplia que en los casos en donde $A > 1$.

Físicamente, significa que el tiempo de estructura del material es mayor que los procesos cinético-estructurales por lo que el sistema requiere más energía para romper su estructura. Por otro lado, si $A \ll 1$ el tiempo asociado a los procesos cinético-viscosos es mayor que el de estructura. Este efecto, se aprecia en la relación constitutiva esfuerzo-rapidez de deformación en donde la zona donde el esfuerzo es lineal, es menor, por lo que el sistema se deforma a menor energía.

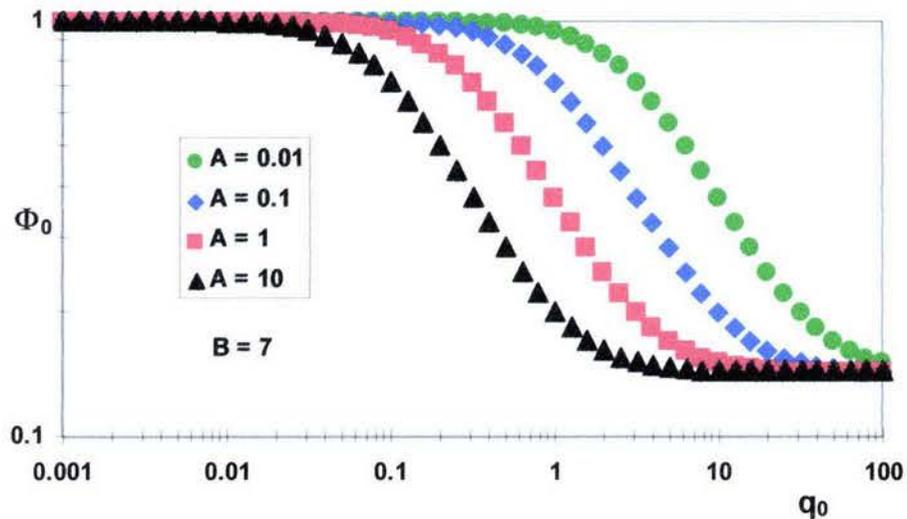


Figura. 10 Función viscosidad versus rapidez de deformación para diferentes valores en el número adimensional A

En la figura (10) se ilustra la función viscosidad normalizada para diferentes valores del número adimensional A . El otro grupo adimensional utilizado en las predicciones es $B = 7$. De la misma manera que en la figura 9, las condiciones de flujo impuestas a los líquidos por los grupos adimensionales implican que se presentan estados de mayor a menor estructura debido al flujo. A valores grandes de A , i.e., $A \gg 1$ la zona en donde la viscosidad es constante cambia a menores valores de rapidez de deformación debido a que el tiempo de flujo es menor que el de estructura, por lo que el sistema de menor energía cambia su estructura a menor deformación.

Por otra parte, si $A \ll 1$ los líquidos presentan zonas mas amplias de viscosidad constante. Una cantidad importante es el número adimensional A , que relaciona efectos cinéticos-viscosos y estructurales, i.e., $A = \frac{k\eta_0}{\lambda}$ contiene como caso particular la tixotropía del material. Manero et al. (2002) demostraron que en algunos sistemas micelares (CTAT, EHAC), la constante cinética k es igual al inverso del módulo elástico, es decir $k = G_0^{-1}$ por lo que el número adimensional puede ser simplificado a: $A = \frac{\eta_0 / G_0}{\lambda} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$. En este caso en particular, A se asocia a la tixotropía del material, por lo que cuando $A \ll 1 \Rightarrow \lambda_0 \ll \lambda$, el tiempo de flujo es mayor que el de estructura. Por otra parte, si $A \gg 1 \Rightarrow \lambda_0 \gg \lambda$, se presenta el efecto opuesto y el material exhibe ciclos de tixotropía. Bautista et al. (1999) investigaron que la forma de estos ciclos depende de la magnitud del tiempo de reestructuración λ . Por lo tanto, las figuras 10-11 pueden ser interpretadas como las curvas de tixotropía del modelo BMP.

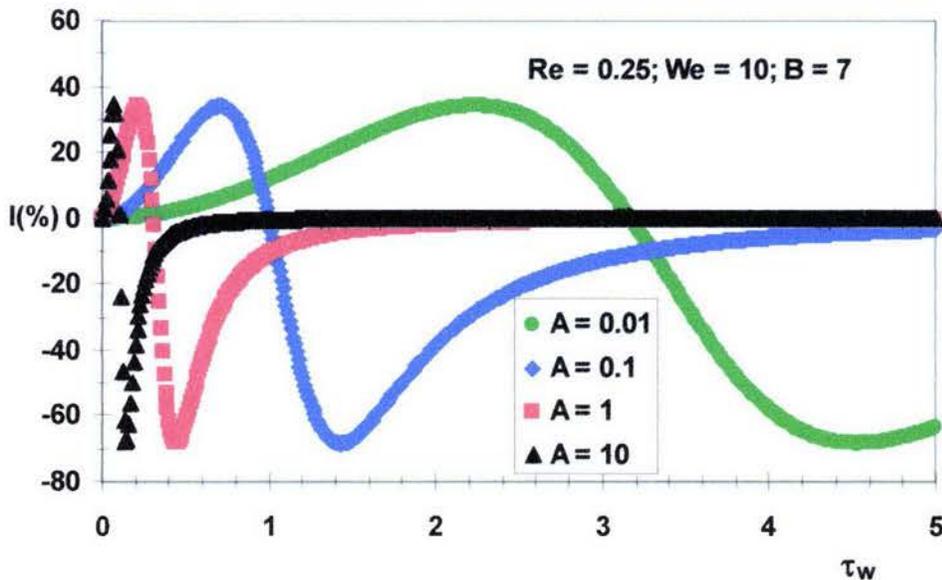


Figura. 11 Eficiencia versus esfuerzo en la pared a diferentes valores del número adimensional A

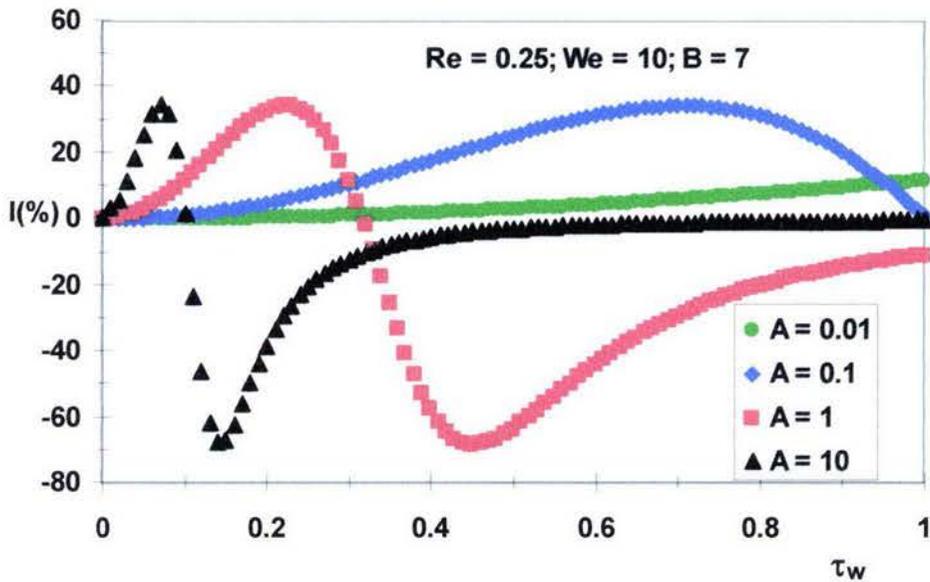


Figura. 12 Ilustra una ampliación de la figura 8 en el intervalo $0 \leq \tau_w \leq 1$

En la figuras 11-12 se representa la eficiencia versus esfuerzo en la pared como función del número adimensional A . Los otros grupos adimensionales son: $Re = 0.25$; $We = 10$; $B = 7$.

Las figuras 11-12 fueron generadas a partir de las figuras 9-10 con el fin de contrastar los efectos del esfuerzo y viscosidad como función del número adimensional A . Es claro, por los análisis anteriores, que existen dos casos. Cuando $A \ll 1$ los procesos cinéticos y viscosos son dominantes sobre el tiempo de reestructuración, por lo que el sistema se desplaza hacia valores de esfuerzo menores en la pared. Por otro lado, si $A \gg 1$ los procesos cinéticos-viscosos son despreciables con respecto al tiempo de estructura, por lo que el sistema necesita más energía para alcanzar el máximo en las curvas resonantes.

5.2 Comparación con datos reométricos en flujo de corte simple

En las figuras 12-13 se ilustran predicciones del esfuerzo y viscosidad como función de la concentración del tensoactivo CTAT a diferentes soluciones, obtenidas mediante experimentos reométricos en flujo de corte simple a una temperatura de $T = 30^{\circ}C$ en estado estacionario y no estacionario por Soltero et al. (1999), las cuales se presentan a continuación:

Tabla 2

C_{CTAT} (wt.%)	$\eta_0^{-1} (Pa \cdot s)^{-1}$	$\eta_{\infty}^{-1} (Pa \cdot s)^{-1}$	$k \times 10^{-6} (Pa)^{-1}$	$\lambda (s)$	$G_0 (Pa)$
5	0.0275	19.8	250.0	0.12	41.5
10	0.0061	15.0	30.3	0.33	176.0
15	0.0050	12.6	10.5	0.38	380.0
20	0.0042	12.0	4.2	0.42	620.0

A partir de estos datos, se construyen las gráficas adimensionales de esfuerzo y viscosidad versus rapidez de deformación.

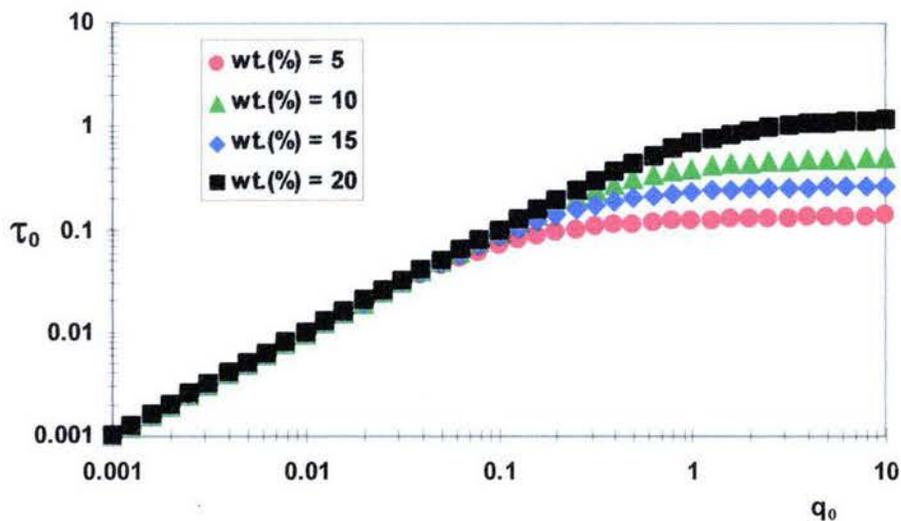


Figura. 13 Esfuerzo cortante versus rapidez de deformación para diferentes concentraciones de CTAT.

En la figura 13 se ilustra el esfuerzo cortante versus rapidez de deformación adimensionales del modelo BMP para diferentes concentraciones en peso del tensoactivo catiónico CTAT. En esta figura se aprecia que el intervalo $0.001 \leq q_0 \leq 0.1$ la relación esfuerzo-rapidez de deformación es lineal y las curvas convergen en una sola. Sin embargo, a valores de $q_0 > 0.1$ el efecto de la concentración se hace presente. Un hecho importante, es que a mayor concentración, el sistema presenta mayor estructura por lo que se necesitan valores más altos de rapidez de deformación para que ésta se modifique. Es importante señalar que, experimentalmente, la viscosidad a corte alto no se puede calcular con mucha precisión, porque a elevados valores de rapidez de deformación, existen inestabilidades de flujo, por lo que se utiliza la viscosidad del disolvente como límite a la viscosidad a rapidez de deformación alta.

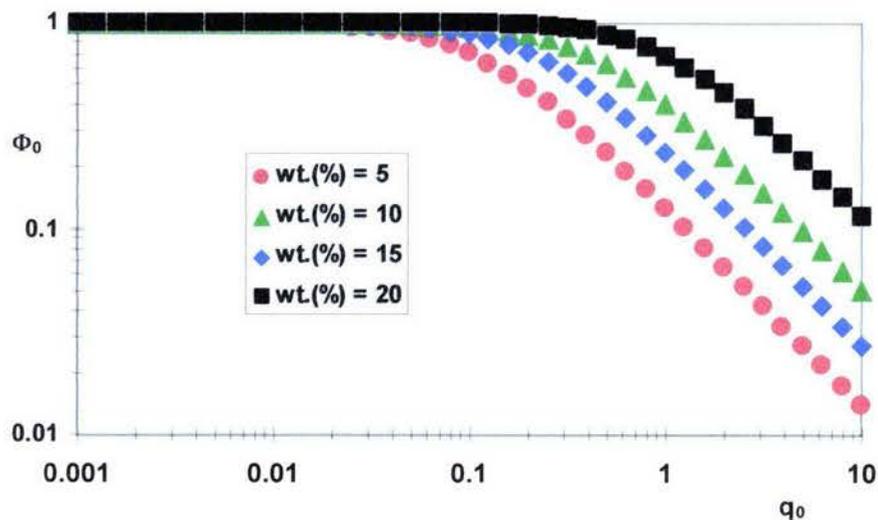


Figura. 14 Función viscosidad cortante versus rapidez de deformación para diferentes concentraciones de CTAT.

De manera similar, en la figura 14, se representa la función viscosidad normalizada versus rapidez de deformación para diferentes concentraciones del tensoactivo catiónico CTAT.

En la figura 14 se aprecia que en el intervalo $0.001 \leq q_0 \leq 0.04$ las curvas muestran un comportamiento constante, en donde el sistema presenta una estructura bien definida. Por otra parte, a valores de $q_0 > 0.04$ el efecto de la concentración se hace presente en la solución más diluida, por lo que el sistema pasa de estados de mayor a menor estructura a menor valor de rapidez de deformación. Sin embargo, al aumentar la concentración del tensoactivo, la zona donde la viscosidad es constante aumenta y el sistema requiere mayor energía para que el líquido modifique su estructura y, por consiguiente, su viscosidad. Además, de la figura 13, la mayor concentración presenta el mayor tiempo de reestructuración, por lo que la zona de viscosidad constante es más amplia. Por otro lado, la concentración $wI(\%) = 15$, queda por encima de la curva de $wI(\%) = 15$ debido a que las propiedades materiales son muy sensibles a la concentración y los diferentes mecanismos se combinan provocando este efecto. A partir de la tabla 2, se calculan la eficiencia versus esfuerzo en la pared para las diferentes concentraciones del tensoactivo CTAT.

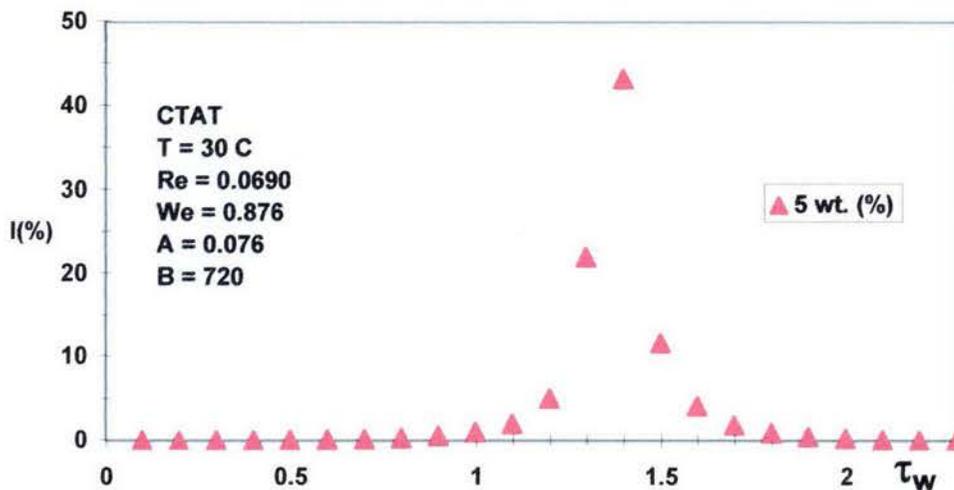


Figura 15. Eficiencia versus esfuerzo en la pared para una concentración del

$wI(\%) = 5$ del tensoactivo CTAT

En la figura 15 se ilustra el comportamiento de la eficiencia versus esfuerzo en la pared para una concentración de $wI(\%) = 5$ del tensoactivo CTAT. Los valores de los otros grupos adimensionales utilizados son: $A = 0.076$; $B = 720$ y $We = 0.876$.

Es evidente que el sistema presenta cambios de estructura debido al adelgazamiento al corte y los efectos elásticos e inerciales son despreciables comparados con los viscosos. A valores de esfuerzo en la pared bajos ($0 < \tau_w < 1.1$) la eficiencia es prácticamente cero. En contraste, a valores moderados de esfuerzo en la pared, i.e., $1.2 < \tau_w < 1.5$, la eficiencia aumenta drásticamente su valor, debido a que se encuentra en la zona de transición donde la derivada del esfuerzo es muy cercano a cero, i.e., $\dot{\tau}_0 \cong 0$. El máximo en la figura 15 es $I(\%) \approx 43.45$ a un valor de esfuerzo en la pared de $\tau_w = 1.4$. Para valores de esfuerzo mayores a: $\tau_w > 1.4$ la eficiencia converge a cero rápidamente.

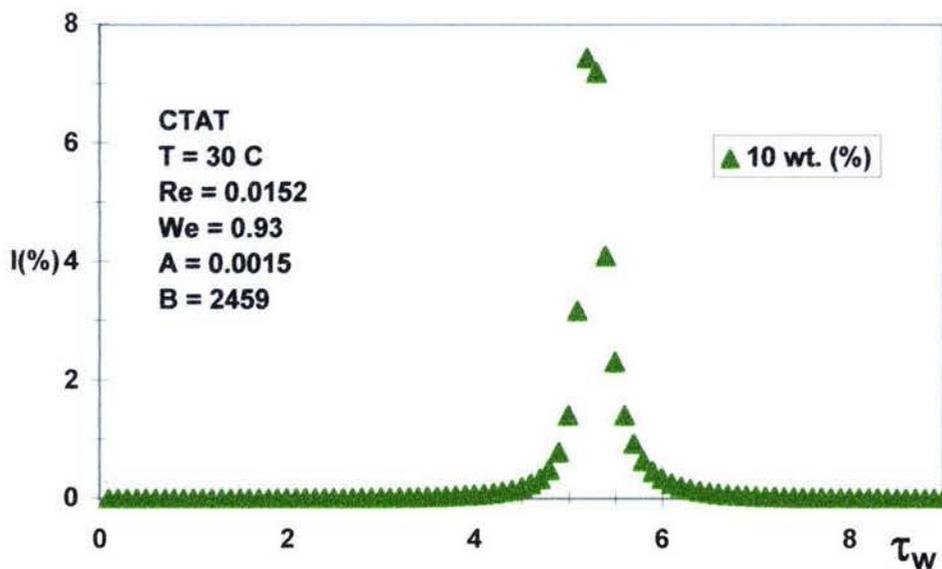


Figura 16. Eficiencia versus esfuerzo en la pared para una solución de

$wI(\%) = 10$ del tensoactivo CTAT

Un caso similar al de la figura 15, se presenta en la figura 16 para una solución de CTAT de $wt(\%)=10$. Los valores de las propiedades materiales a esta concentración y sus correspondientes grupos adimensionales fueron obtenidos a partir de la tabla 1 ($A=0.0015$; $B=2459$; $We=0.931$).

A partir de los valores de los grupos adimensionales, se infiere que el líquido es adelgazante al corte y los procesos cinéticos-viscosos son despreciables, en comparación con los mecanismos estructurales. Además, para el valor del Weissenberg pulsátil, en este caso los mecanismos elásticos juegan un papel secundario en la eficiencia. El comportamiento es muy similar al de la figura 14 excepto que el valor del máximo disminuye, i.e., $I(\%) \approx 7.44$ para un valor de esfuerzo en la pared de $\tau_w = 5.2$.

Al comparar los valores de los grupos adimensionales $A = \frac{k\eta_0}{\lambda}$ y $B = \frac{\eta_0}{\eta_\infty}$ en las dos

concentraciones, se obtiene: $\frac{B_{wt(\%)=10}}{B_{wt(\%)=5}} = \frac{2459}{720} \cong 3.42$ y $\frac{A_{wt(\%)=10}}{A_{wt(\%)=5}} = \frac{0.0015}{0.0076} \cong 0.2$.

El líquido de mayor concentración es 3.42 veces más adelgazante al corte. Sin embargo, el efecto de los procesos cinéticos-viscosos son menores en la concentración de $wt(\%)=10$, por lo que el efecto de la estructura se intensifica debido al aumento de la concentración. Otro hecho importante se observa en la figura 12. El líquido de mayor concentración ($wt(\%)=10$; línea verde) necesita valores mayores de rapidez de deformación para modificar su estructura que el líquido de menor concentración ($wt(\%)=5$; línea roja) lo que influye directamente en la eficiencia.

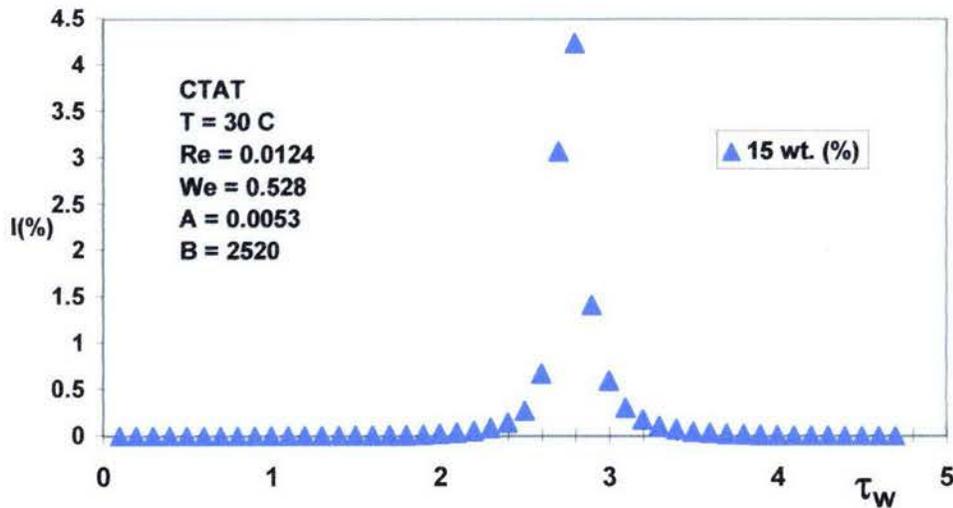


Figura 17. Eficiencia versus esfuerzo en la pared para una solución de $wl(\%) = 15$ del tensoactivo CTAT.

En la figura 17 se representa gráficamente la eficiencia versus esfuerzo en la pared para una concentración de CTAT del $wl(\%) = 15$. EL valor de los otros grupos adimensionales utilizados son: $A = 0.0053$; $B = 2520$ y $We = 1.39$. El comportamiento básicamente es el mismo excepto que el máximo en la curva es $I(\%) \approx 4.24$ para un valor de $\tau_w = 2.8$. En comparación con las figuras previas, la eficiencia es menor con respecto a la concentración del $wl(\%) = 10$. Al comparar los números adimensionales

asociados al adelgazamiento al corte, i.e., $\frac{B_{wl(\%)=15}}{B_{wl(\%)=10}} = \frac{2520}{2459} \cong 1.02$ prácticamente son

iguales por lo que la disminución del máximo se debe completamente a los efectos cinéticos y estructurales del material. El efecto de los procesos cinéticos, viscosos y estructurales se observa al comparar los grupos adimensionales asociados a estos

mecanismos es decir, $\frac{A_{wl(\%)=15}}{A_{wl(\%)=10}} = \frac{0.0053}{0.0015} \cong 3.53$ veces mayor.

concentración ($wl(\%) = 10$) por lo que los máximos en las curvas son menores que en las anteriores concentraciones.

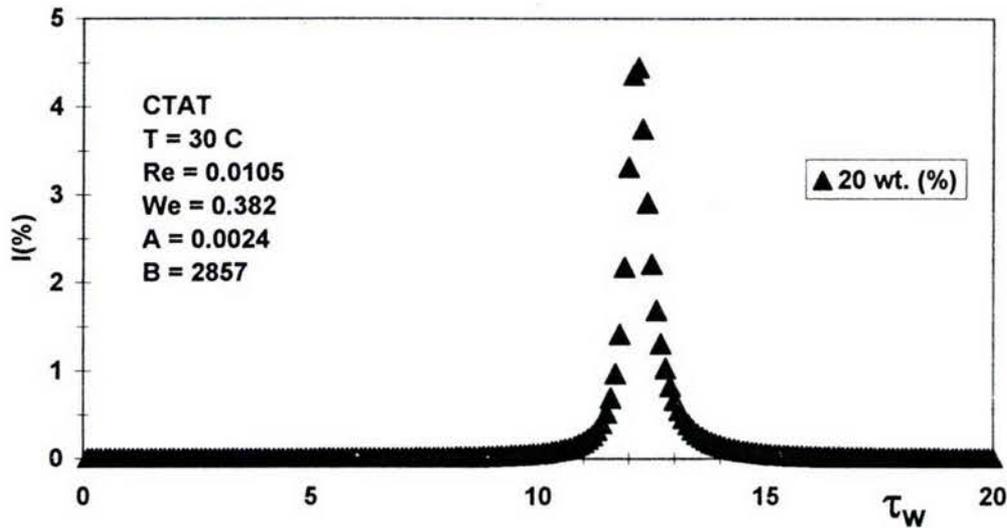


Figura 18. Eficiencia versus esfuerzo en la pared para una solución de $wl(\%) = 20$ del tensoactivo CTAT

En la figura 18 se ilustra la eficiencia como función del esfuerzo en la pared, a una solución del $wl(\%) = 20$ del tensoactivo CTAT. Los valores de los grupos adimensionales utilizados son: $A = 0.0024$; $B = 2857$; y $We = 0.382$. De manera análoga, los mecanismos inerciales, elásticos y cinético-viscosos son despreciables en comparación con los estructurales. Para esta concentración, el máximo en la curva resonante $I(\%) \approx 4.5$ a un valor de esfuerzo en la pared de $\tau_w = 12.2$. Básicamente, el máximo obtenido es muy similar al de la concentración de $wl(\%) = 15$, por lo que el razonamiento es similar. Sin embargo, la curva resonante al $wl(\%) = 20$, se desplaza hacia valores muy grandes de esfuerzo en la pared.

Al comparar los grupos adimensionales: $\frac{B_{wt(\%)=20}}{B_{wt(\%)=15}} = \frac{2857}{2520} \cong 1.13$, no se obtiene

una variación significativa, por lo que la disminución del máximo se debe completamente a los efectos cinéticos y estructurales en las dos concentraciones. De una forma similar al caso anterior, al dividir los grupos adimensionales asociados a la

estructura: $\frac{A_{wt(\%)=20}}{A_{wt(\%)=15}} = \frac{0.0024}{0.0053} \cong 0.45$, se obtiene que el nivel de estructura en la

concentración de $wt(\%) = 20$ es el doble que la de $wt(\%) = 15$ por lo que el sistema necesita mayor energía para tener el mismo aumento de flujo volumétrico. Es importante resaltar que los resultados obtenidos aquí demuestran que el líquido de mayor concentración ($wt(\%) = 20$), presenta la mayor destrucción de estructura ($B = 2857$), aunque es el más estructurado ($A = 0.0024$). El resultado es un menor aumento del flujo volumétrico, debido globalmente a los efectos de estructura causados por el aumento en la concentración.

A continuación se resumen los principales resultados obtenidos en este capítulo, en donde se han considerado los siguientes valores, para la frecuencia, radio del cilindro y densidad del tensoactivo CTAT respectivamente a una temperatura de laboratorio de $T = 30^\circ C$: $\omega = 1.0 \text{ rad/s}$; $a = 5 \times 10^{-2} \text{ m}^3$; $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$

Tabla 3

$wt(\%)$	Re	We	A	B	I_{Max}	$\tau_w(I_{Max})$
5	0.0690	0.876	0.0760	720	43.25	1.4
10	0.0153	0.931	0.0150	2459	7.44	5.2
15	0.0125	0.526	0.0055	2520	4.24	2.8
20	0.0105	0.384	0.0024	2857	4.45	12.2

En la Tabla 3 se han utilizado los grupos adimensionales definidos en el capítulo 4, ecuación (13), $Re = \frac{\rho\omega a^2}{\eta_0}$; $We = \frac{\eta_0}{G_0} \omega$; $A = \frac{k\eta_0}{\lambda}$; $B = \frac{\eta_0}{\eta_\infty}$. La tabla 2 muestra los

valores de los grupos adimensionales obtenidos a partir de las propiedades materiales definidas en la Tabla 2, a diferentes concentraciones. Además, se anexan los máximos y sus respectivos esfuerzos en la pared, asociados al intervalo de soluciones estudiado.

Las principales conclusiones obtenidas en esta sesión son mencionadas a continuación:

- La condición necesaria para que existan aumentos en el flujo volumétrico en la de que el sistema presente cambios de estructura por efecto del flujo es que la viscosidad sea una función decreciente del segundo invariante del tensor rapidez de deformación ($B \ll 1$; adelgazante al corte).
- La máxima eficiencia se obtuvo a la menor concentración, debido a que el nivel de estructura (entrecruzamientos físicos) es el menor de todos los casos.
- El efecto de la tixotropía ($A \ll 1$) en la eficiencia se resume en una traslación de las curvas hacia valores de energía mayores, debido a que los mecanismos cinéticos y viscosos son menores en comparación con los estructurales.

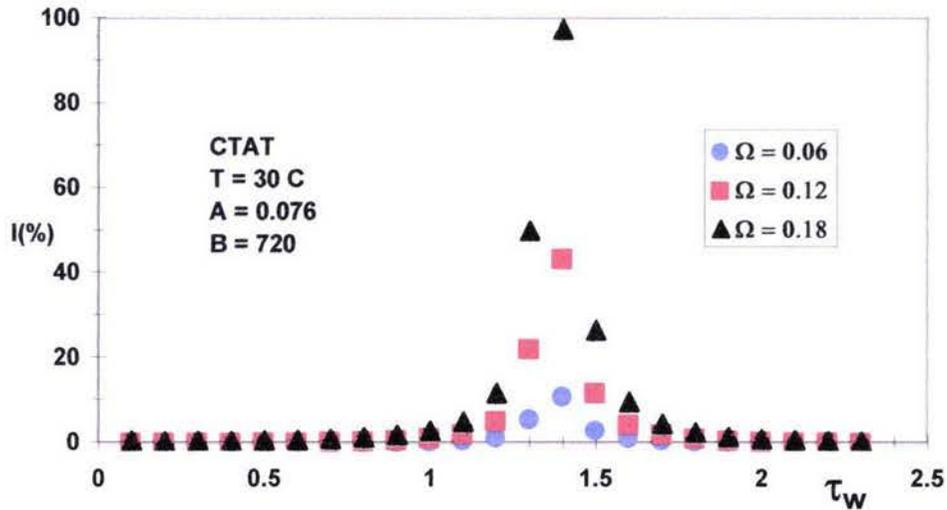


Figura 19. Eficiencia versus esfuerzo en la pared a diferentes frecuencias adimensionales

En la figura 19 se ilustra la eficiencia como función del esfuerzo en la pared a diferentes frecuencias adimensionales, para una solución de CTAT de $wt(\%) = 5$. Los resultados obtenidos son resumidos en la Tabla 4, el radio del cilindro y la densidad del líquido son los mismos que en la tabla 2 y las frecuencias utilizadas en los cálculos son: $\omega_1 = 0.5 \text{ rad/s}$; $\omega_2 = 1.0 \text{ rad/s}$ y $\omega_3 = 1.5 \text{ rad/s}$.

Tabla 4

$wt.(\%) = 5$	Re	We	A	B	I_{Max}	$\tau_w(I_{Max})$
$\Omega_1 = 0.06$	0.0126	0.438	0.076	720	10.82	1.4
$\Omega_2 = 0.12$	0.0252	0.876	0.076	720	43.25	1.4
$\Omega_3 = 0.18$	0.0378	1.314	0.076	720	97.20	1.4

Es evidente que en intervalo $0 \leq \tau_w \leq 1$ la eficiencia es cero en todos los casos, y para valores de $1.2 \leq \tau_w \leq 1.5$ la eficiencia crece drásticamente con el aumento en la frecuencia y su máximo está determinada por un acoplamiento entre las propiedades adelgazantes, cinéticas-viscosas y estructurales. Por último, para $\tau_w \geq 1.5$ la eficiencia converge a cero rápidamente.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se utilizó el modelo BMP con el fin de caracterizar un líquido que presenta estructura transitoria sometida a flujo pulsátil. Con el fin de representar las perturbaciones en este flujo se propuso una función estocástica estacionaria, la cual, satisface las propiedades de Wiener-Khinchine es decir, el promedio de cualquier ensamble es cero y su función de correlación es invariante ante una traslación en el tiempo. El sistema se resolvió por un método perturbativo estocástico. **Las aportaciones más importantes de la presente disertación doctoral son expuestas a continuación:**

- La ecuación que describe la eficiencia del flujo pulsátil del modelo BMP en un líquido que presenta estructura transitoria, se separa en dos contribuciones, inelástica: (en donde los mecanismos viscosos son dominantes sobre los elásticos) y elástica

$$I(\%) = 75 \text{Re}^2 \left\{ \frac{\tau_w^4 - 4 \dot{\tau}_w \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0}{\dot{\tau}_w \left(q_w \tau_w^3 - \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 \right)} + We^2 \frac{\tau_w^4 \Phi_w^2 - 4 \dot{\tau}_w \int_0^{q_w} \Phi_0^2 \tau_0^3 dq_0}{\dot{\tau}_w \left(q_w \tau_w^3 - \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 \right)} \right\}$$

Ésta depende de los números de Reynolds y Weissenberg en forma

$$\text{cuadrática} \left(\text{Re} = \frac{\rho(\omega a)a}{\eta_0}; We = \frac{\eta_0}{G_0} \omega \right).$$

- La expresión de la eficiencia, depende de dos grupos adimensionales a través del esfuerzo, viscosidad y de la primera derivada del esfuerzo evaluados en la pared del cilindro. Estos grupos adimensionales describen los mecanismo viscosos, estructurales y cinéticos del modelo BMP en el flujo pulsátil:

$$A = \frac{k\eta_0}{\lambda}; B = \frac{\eta_0}{\eta_\infty}$$

Los primeros dos grupos adimensionales son el Reynolds y Weissenberg púlsateles los cuales, describen los procesos inerciales, viscosos y elásticos del sistema. El tercer grupo define las propiedades adelgazantes al corte del material y se puede entender en términos de niveles de estructura del material.

Un hecho sobresaliente de estos grupos es el número adimensional $A = \frac{k\eta_0}{\lambda}$ el

cual, es una medida de los efectos estructurales, cinéticos y viscosos. Si $k = G_0^{-1}$

se obtiene una relación entre las propiedades viscoelásticas del material y de estructura del material lo que implicaría efectos de tixotropía en el material.

- El aumento en el flujo volumétrico (eficiencia) es un efecto de segundo orden en el parámetro de expansión $O(Re^2)$, donde Re es el número de Reynolds pulsátil. A órdenes cero y primero se demostró que la eficiencia de acuerdo con nuestro esquema perturbativo es cero.
- De acuerdo con el análisis presentado en el flujo pulsátil, **la condición necesaria y suficiente para que la eficiencia sea distinta de cero es que el líquido sea adelgazante al corte ($B \gg 1$)**. Es decir, en términos de estructura, el sistema pase de estados de mayor a menor estructura debido al flujo.
- Para un líquido viscoelástico la eficiencia aumenta a valores moderados de esfuerzo en la pared, mientras que para un cierto valor crítico de esfuerzo en la pared, la eficiencia presenta valores negativos. Esto se asocia, al cambio de signo de la segunda derivada del esfuerzo $\left(\ddot{\tau}_0 > 0; \ddot{\tau}_0 < 0 \right)$ debido a la convexidad de la función esfuerzo. Esto implica, que las curvas resonantes, son dependientes del modelo constitutivo que se utilice en su descripción.

- En la mayoría de los sistemas viscoelásticos de la literatura, el máximo en las curvas resonantes, está determinado por un acoplamiento entre las propiedades viscoelásticas del material. En contraste, en los modelos que presentan estructura transitoria, y que son caracterizados por el modelo BMP el máximo en las curvas, está determinado por los efectos cinéticos, viscosos, estructurales y tixotrópicos del material.
- En el caso de la energía por unidad de tiempo necesaria para transportar el líquido (potencia), **se demuestra que no existe una diferencia significativa con la eficiencia del flujo volumétrico, por lo que no habría un ahorro de energía si se bombeara un líquido por medio de un gradiente de presión pulsátil.**

Sin embargo, la parte experimental con sistemas micelares es clave para comparar el consumo de energía y corroborar la hipótesis mencionada antes.

- El efecto del aumento en la concentración del tensoactivo CTAT sobre la eficiencia es negativo. En la mayoría de los casos esto se debe, a que se tiene un material más estructurado, lo que favorece los efectos de tixotropía del material.
- Al aumentar la concentración, el material se estructura más, por lo que los procesos cinéticos-viscosos son menores y las curvas resonantes son desplazadas hacia estados de mayor energía, es decir, a mayores valores de esfuerzo en la pared.
- El aumento en la eficiencia para los datos reométricos utilizados implica que es una función creciente de la frecuencia de las pulsaciones.

7. TRABAJO FUTURO

De acuerdo con nuestros resultados, existen varias líneas de investigación que planteamos a continuación:

- Los resultados teóricos indican que los sistemas con estructura transitoria sometidos a flujo pulsátil presentan aumentos en el flujo volumétrico cuando son perturbados mediante un gradiente de presión pulsátil con respecto a aquéllos a gradiente de presión constante. Por lo tanto, la parte experimental con líquidos micelares (CTAT, EHAC) sería de mucha utilidad realizarlos con la finalidad de contrastar con los resultados teóricos obtenidos.
- En la parte matemática existe un vasto campo de métodos numéricos que pueden ser empleados con el fin de resolver el modelo BMP sometido a flujos pulsátiles. Dentro de los métodos numéricos, se propone utilizar elemento o volumen finito.

En cuanto a los métodos basados en análisis funcional, los algoritmos tipo Galerkin podrían ser de gran ayuda en la precisión del cálculo de la eficiencia con la finalidad de no tener ninguna restricción en los valores de los grupos adimensionales utilizados (en este trabajo la hipótesis mas fuerte fue de que los mecanismos inerciales son pequeños comparados con los viscosos por lo que el numero de Reynolds siempre es menor que la unidad, i.e., $Re \ll 1$).

- El esquema perturbativo estocástico utilizado en este trabajo se aplico en el flujo con perturbación oscilatoria en la pared a gradiente de presión constante. A diferencia del sistema analizado en esta tesis, el flujo oscilatorio en la pared el flujo volumétrico es constante mientras que la frontera (pared) es la que oscila.

El planteamiento es prácticamente similar al que se hizo. Sin embargo, los aumentos en el flujo son enormes al alimentar el modelo con los mismos datos reométricos utilizados para los cálculos teóricos (Aproximadamente, cerca de 25 veces más que en el flujo pulsátil). La ecuación de la eficiencia en el sistema de flujo con perturbación oscilatoria en la pared a gradiente de presión constante es:

$$I(\%) = 75 \text{Re}^2 \tau_w^{-2} \left\{ \frac{\left(\tau_w^4 - 4 \dot{\tau}_w \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 + We^2 \left(\tau_w^4 \Phi_w^2 - 4 \dot{\tau}_w \int_0^{q_w} \Phi_0^2 \tau_0^3 dq_0 \right) \right)}{\dot{\tau}_w \left(q_w \tau_w^3 - \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 \right)} \right\}$$

la única diferencia con respecto al resultado obtenido en este trabajo (ecuación 39), es el termino τ_w^{-2} por lo demás son exactamente iguales. **(Nota: Este trabajo será enviado a Journal Polymeric Science Part B: Polymer Physics como segunda publicación)**

- Actualmente el flujo bandeado es uno de los problemas más interesantes en reología de fluidos complejos. Este se forma cuando a un esfuerzo de corte existen varias rapidezces de deformación, por lo que el esfuerzo es una función multivaluada de la rapidez de deformación. Las posibles explicaciones que se le ha dado a este fenómeno, son la de una transición de primer orden o una inestabilidad de tipo mecánica. Bautista et al. (2000) propusieron una modificación a su modelo (BMP) con el fin de incluir el efecto del bandeo. En su trabajo, concluyeron que existe una zona en donde la derivada del esfuerzo es

negativa, i.e., $\left(\frac{\partial \tau_0}{\partial q_0} \right)_{T,P} < 0$ y, por lo tanto, el sistema, presenta inestabilidades

de flujo, por lo que, se separara en bandas con diferentes viscosidades.

Estos cambios drásticos en la función viscosidad, podrían ser benéficos en la eficiencia y sería una continuación natural de esta investigación. Es importante resaltar, que la única modificación al modelo BMP adimensional sería en la ecuación cinética con el fin de incorporar los efectos del bandeo. El modelo adimensional con bandeo se presenta a continuación:

$$\left(1 + De\Phi(r, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \tau(r, \xi) = \Phi(r, \xi)q$$

$$\frac{d\Phi(r, \xi)}{d\xi} = \Phi(r, \xi)(1 - \Phi(r, \xi)) + A(1 + Cq)\Phi(r, \xi)(1 - B\Phi(r, \xi))\tau(r, \xi)q$$

$$De = \left(\frac{\eta_0 / G_0}{\lambda}\right); A = \frac{k\eta_0}{\lambda}; B = \frac{\eta_0}{\eta_\infty}; C = \frac{\mu}{\lambda}$$

Básicamente la única diferencia del trabajo desarrollado en esta tesis, es el número adimensional $C = \frac{\mu}{\lambda}$, el cual es un cociente de dos tiempos característicos.

Uno asociado a la formación de bandas μ y otro al tiempo de reestructuración del material λ . Si $C \rightarrow 0$, se recupera el sistema investigado en esta tesis. Un hecho importante es que el esquema perturbativo estocástico propuesto en este trabajo no puede ser aplicado en sistemas que presentan bandeo, porque en la curva espinodal que une los máximos y mínimos de la relación constitutiva esfuerzo rapidez de deformación, las derivadas del esfuerzo son cero y las ecuaciones deducidas en esta propuesta no son aplicables. Como alternativa, se debe resolver numéricamente con alguno de los métodos numéricos y variacionales antes mencionados debido a que la función esfuerzo es no monotónica con respecto a la rapidez de deformación.

- Por otra parte, un aspecto que podría ser importante en el flujo pulsátil es la contribución del disolvente y del polímero por separado. Para tal efecto, se propone utilizar la ecuación reológica Boek et al. (2005) inspirada en el modelo BMP y cuya representación en forma adimensional es:

$$\tau(r, \xi) = \tau_s(r, \xi) + \tau_p(r, \xi)$$

$$\tau_s(r, \xi) = dq$$

$$\left(1 + De\Phi_p(r, \xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\tau_p(r, \xi) = \Phi_p(r, \xi)q$$

$$\frac{d\Phi_p(r, \xi)}{d\xi} = \Phi_p(r, \xi)(1 - \Phi_p(r, \xi)) - AB\Phi_p^2(r, \xi)\tau_p(r, \xi)q$$

$$De = \left(\frac{\eta_0 / G_0}{\lambda}\right); A = \frac{k\eta_0}{\lambda}; B = \frac{\eta_s}{\eta_\infty}; d = \frac{\eta_s}{\eta_0}$$

Nótese que la ecuación cinética es más simplificada que la del modelo BMP

y el número adimensional $d = \frac{\eta_s}{\eta_0}$ es una relación de viscosidades entre la

del disolvente η_s y la del polímero.

- Actualmente los fluidos complejos juegan un papel importante en las aplicaciones tecnológicas y científicas por lo que los métodos numéricos basados en cálculo de variaciones y análisis funcional son de vital importancia en la resolución de los modelos matemáticos complejos que describen el comportamiento reológico de estos líquidos. Por este motivo, el interés del autor, se enfocará en el análisis numérico y la reología computacional con el fin de no tener restricciones en los sistemas físicos de interés dejando los casos límite como pruebas de consistencia.

BIBLIOGRAFÍA

- Barnes HA, Towsend P, Walters K (1969) Flow of non-Newtonian liquids under a varying pressure gradient. *Nature* 224: 585-587
- Barnes HA, Towsend P, Walters K (1971) On pulsatile flow of non-Newtonian liquids. *Rheol Acta* 10:517-527
- Bautista F, De Santos JM, Puig JE, Manero O (1999) Understanding thixotropic and antithixotropic behavior of viscoelastic micellar solutions and liquid crystalline dispersions. The model. *J. Non-Newtonian Fluid Mech* 80: 93-113
- Bautista F, Soltero JFA, Macias ER, Manero O (2002) On the shear banding flow of wormlike micelles. *J. Phys. Chem. B* 106: 13018-13026
- Bautista F, Soltero JFA, Pérez-López JH, Puig JE, Manero O (2000) On the shear banding flow of elongated micellar solutions. *J. Non-Newtonian Fluid Mech* 94: 57-66
- Berret LF (1997) Transient Rheology of Wormlike Micelles. *J. Rheol* 39: 725-741
- Bird RB, Armstrong RC, Hassager O (1977) Dynamics of polymeric liquids, vol 1. Fluid Mechanics. Wiley, New York
- Boek ES, Padding JT, Anderson VJ, Tardy PMJ, Crawshaw JP and Pearson JRA (2005) Constitutive equations for extensional flow of wormlike micelles: stability analysis of the Bautista-Manero model. *J. Non-Newtonian Fluid Mech* 126: 39-46
- Cates ME (1987) Reptation of living polymers: dynamics of entangled polymers in the presence of reversible chain-scission reactions. *Macromolecules* 20: 2289-2296

- Cates ME, Candau SJ (1990) Statics and dynamics of worm-like surfactants micelles. *J. Phys. Condens. Matter* 2: 6869-6892
- Davies JM, Bhumiratana S, Bird RB (1978) Elastic and inertial effects in pulsatile flow of polymeric liquids in circular tubes. *J Non-Newtonian Fluid Mech* 3: 237-259
- De Andrade Lima LRP, Rey AD (2005) Pulsatile Poiseuille flow of discotic mesophases. *Chem. Eng. Sci* 60: 6622-6636
- De Andrade Lima LRP, Rey AD (2006) Pulsatile flows of Leslie-Ericksen liquid crystals. *J. Non-Newton. Fluid Mech* 135: 32-45
- Edwards MF, Nellist DA, Wilkinson WL (1972) Pulsating flows of non-Newtonian fluids in pipes. *Chem. Eng. Sci* 27: 545-553
- Fredrickson AG (1964) *Principles and Applications of Rheology*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs
- Fredrickson AG (1970) A model for the thixotropy of suspensions. *AIChE J* 16: 436-438
- Gianetto A, Baldi G, Capra V (1973) Laminar pulsed flow of non-Newtonian fluids. *Chem. Eng. Sci* 27: 295-306
- Herrera-Velarde JR, Mena B (2000) A note on Newtonian and non-Newtonian oscillatory pipe flow. *Revista Mexicana de Fisica* 46 (6): 566-571.
- Herrera-Velarde JR, Mena B (2001) Viscous dissipation of a power law fluid in a oscillatory pipe flow. *Revista Mexicana de Fisica* 47 (4): 351-356.
- Kazakia JY, Rivlin RS (1978) The influence of vibration on Poiseuille flow of non-Newtonian fluids. I. *Rheol Acta* 18: 210-226
- Kazakia JY, Rivlin RS (1979) The influence of vibration on Poiseuille flow of non-Newtonian fluids II. *Rheol Acta* 18: 244-255

- Khabakhpasheva EM, Popov VI, Kekalov AN, Mikhailova ES (1989) Pulsating flow of a viscoelastic fluids in tubes. *J. Non-Newton. Fluid Mech* 33: 289-304
- Manero O, Bautista F, Soltero JFA, Puig JE (2002) Dynamics of worm-like micelles: the Cox-Merz rule. *J. Non-Newtonian Fluid Mech* 106: 1-15
- Manero O, Mena B (1977) An interesting effect in non-Newtonian flow in oscillating pipes. *Rheol Acta* 19: 277-284
- Manero O, Walters K (1980) On elastic effects in unsteady pipe flows. *Rheol Acta* 19: 277-284
- Mena B, Manero O, Binding DM (1979) Complex flow of viscoelastic fluids through oscillating pipes. Interesting effects and applications. *J Non-Newtonian Fluid Mech* 5: 427-448
- Mori N, Wakabayashi K, Horikawa A, Nakamura K (1984) Measurements of pulsating and oscillating flows on non-Newtonian fluids through concentric and eccentric cylinders. *Rheol Acta* 23: 508-513
- Phan-Thien N (1978) On pulsating flow of polymeric fluids. *J Non-Newtonian Fluid Mech* 4: 167-176
- Phan-Thien N (1980a) Flow enhancement mechanism of a pulsating flow of non-Newtonian liquids. *Rheol Acta* 19: 285-290
- Phan-Thien N (1980b) The effects of longitudinal vibration on pipe flow of a non-Newtonian fluid. *Rheol Acta* 19: 539-547
- Phan-Thien N (1981) On pulsating flow of a polymer fluids: Strain-dependent memory kernels. *J. Rheol* 25 (3): 293-314
- Phan-Thien N (1982) On a pulsating flow of slightly non-Newtonian liquids. *Journal de Mécanique théorique et appliqué* 1: 81-89

- Phan-Thien N, Dudek J (1982a) Pulsating flow of a plastic fluid. *Nature* 296: 843-844
- Phan-Thien N, Dudek J (1982b) Pulsating flow revisited. *J Non-Newtonian Fluid-Mech* 11: 147-161
- Soltero JFA, Bautista F, JE, Manero O and Puig JE (1999), Rheology Of Cetyltrimethylammonium p-Toluenesulfonate-Water System. 3. Nonlinear Viscoelasticity. *Langmuir* 15: 1604-1612
- Spenley NA, Cates ME (1994) Pipe models for entangled fluids under strong shear. *Macromolecules* 27: 3850-3858
- Spenley NA, Cates ME, McLeish TCB (1993) Non-linear rheology of wormlike micelles. *Phys. Rev. Lett* 71: 939-942
- Spenley NA, Yuan XF, Cates M E (1996) Non-monotonic constitutive laws and the formation of shear banded flows. *J. Phys. II France* 6: 551-571
- Sundstrom DW, Kaufman A (1977) Pulsating flow of polymeric solutions. *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev* 16 (3): 320-325
- Townsend P (1973) Numerical solutions of some unsteady flows of elastico-viscous liquids, *Rheol. Acta* 12: 13-18
- Middleman S (1977) *Fundamental of polymer processing*. McGraw-Hill, New-York
- Walters K, Towsend P (1970) *Proc. Fifth International Congress on Rheology* (S. Onogi, Ed.), University of Tokyo 4: 471-483
- Yaglom AM (1965) *An introduction to the theory of stationary random functions*, translated by Silverman RA. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey

APÉNDICE

$$f_1(A, B, q_0) = \frac{1}{\dot{\Phi}_0} \left((1 - 2\Phi_0) \dot{\Phi}_0 + A \left(\tau_0 q_0 (1 - 2B\Phi_0) \dot{\Phi}_0 + \Phi_0 (1 - B\Phi_0) (\tau_0 \dot{q}_0) \right) \right)$$

$$f_2(A, B, q_0) = \frac{1}{\dot{\Phi}_0} \left(1 - 2\Phi_0 \dot{\Phi}_0 + \Phi_0 (1 - B\Phi_0) \left(\tau_0 + q_0 \dot{\tau}_0 \right) + \tau_0 q_0 (1 - 2B\Phi_0) \dot{\Phi}_0 \right)$$

$$f_3(A, B, q_0) = \{f_{31}(A, B, q_0) + f_{32}(A, B, q_0)\} q_1^2(r, \xi) + f_{33}(A, B, q_0)$$

$$f_{31}(A, B, q_0) = \frac{1}{\dot{\Phi}_0} \left((1 - 2\Phi_0) \ddot{\Phi}_0 - \left(\dot{\Phi}_0 \right)^2 + (1 - 2B\Phi_0) \tau_0 \left(\dot{\Phi}_0 + q_0 \frac{\ddot{\Phi}_0}{2} \right) + \frac{\Phi_0 (1 - B\Phi_0)}{2} q_0 \ddot{\Phi}_0 \right)$$

$$f_{32}(A, B, q_0) = \frac{1}{\dot{\Phi}_0} \left(\Phi_0 (1 - B\Phi_0) + \Phi_0 (1 - 2B\Phi_0) q_0 \right) \tau_0 n(\xi)$$

$$f_{33}(A, B, q_0) = - \frac{\ddot{\Phi}_0 \left(n(\xi) + Den(\dot{\xi}) \Phi_0 \right) \left(n(\xi) + Den(\ddot{\xi}) \Phi_0 \right)}{\dot{\Phi}_0 \left(\tau_0 \right)^2}$$

“ON THE PULSATING FLOW A COMPLEX LIQUID”

E. Emilio Herrera, A. E. Chávez *, F. Calderas ¹, O. Manero ¹

Facultad de Química & Instituto de Investigaciones en Materiales ¹

Universidad Nacional Autónoma de México, A.P. 70-360, Ciudad Universitaria

04510, México D.F.

***To whom correspondence should be addressed**

e-mail: aenriqc@yahoo.com

ABSTRACT

In this work, the rectilinear flow of a complex liquid under a pulsating, time-dependent pressure gradient is analyzed. The fluctuating component of the pressure gradient is assumed to be of small amplitude and can be adequately be represented by a weakly stochastic process, to which a perturbation solution scheme is suggested. The pulsating pressure-gradient flow is analyzed with the Bautista-Manero-Puig model (BMP) constitutive equation, consisting in the Upper Convected Maxwell equation coupled to a kinetic equation to account for the breakdown and reformation of the fluid structure. A dramatic enhancement of the volumetric flow rate is predicted in the region where the fluid experiences a pronounced shear-thinning. In addition, the power requirement is calculated and no energetic advantage is found when the complex liquid is pumped with a random stochastic stationary sinusoidal function. Finally, flow enhancement is predicted using rheometric data for an aqueous wormlike micellar solution of cetyl trimethyl ammonium tosilate (CTAT) at various concentrations.

Keywords: Complex liquids, Pulsatile flow, Stochastic solution, Bautista-Manero-Puig model.

1. INTRODUCTION

The behavior of fluids subjected to a periodic pressure gradient is often classified as either oscillating or pulsating flow. With oscillating flow, the mean value of the periodic pressure gradient is zero so that the fluid moves back and forth with no net flux. In the case of pulsating flow, a periodic pressure gradient with a nonzero mean produces a net flow of fluid. Pulsating flow in a pipe has many applications in various branches of science. In the field of bio-rheology, this type of investigation is of particular interest since blood in veins is forced by a periodic pressure gradient. In addition, the use of pulsations has also been of interest in connection with heat transfer, mass transfer and chemical kinetic processes.

Nevertheless, the possibility of increasing flow of non-Newtonian fluids by pulsations in the pressure gradient is attractive but so far, no convincing analysis have been presented on the associated power requirement to maintain the pulsations. Consequently, it has not been possible to assess the industrial significance of this issue. Various analyses have pointed out no real energetic advantage which may be gained from transporting this class of fluid through pipes under pulsating flow (Edwards et al., 1972; Phan-Thien 1982; Bird et al. 1977; Sundstrom and Kaufman 1977).

The pulsatile flow of non-Newtonian liquids such as aqueous solutions of polyacrylamide has been widely analyzed theoretically and experimentally (Fredrickson 1964; Barnes et al. 1969,1971; Edwards et al. 1972; Gianetto et al. 1973; Sundstrom and Kaufman 1977; Manero and Mena 1977; Manero and Walters 1980; Kazakia and Rivlin. 1978, 1979; Phan-Thien 1978, 1980a,b, 1981, 1982; Phan-Thien and Dudek 1982a,b; Davies et al. 1978; Mena et al. 1979; Mori et al. 1984; Khabakhpasheva et al. 1989; De Andrade Lima and Rey 2005,2006).

Theoretical predictions of mean flow-rate enhancement as a function of frequency and amplitude of pressure gradient oscillations have been evaluated for many constitutive equations, such as Maxwell, generalized Newtonian, Power law, Bingham, Ellis, Carreau, Yasuda, Tanner, White-Metzner, four-constants Oldroyd, Goddard-Miller, Wagner, B-KBKZ, Filbey-Ericksen-Criminale, and MacDonald-Bird-Carreau (Phan-Thien et al.1980a,b,1982; Davies et al. 1978; Bird et al. 1977)

Previous works demonstrate that the flow enhancement is closely related to the shear-thinning properties of the fluid and its magnitude depends strongly of the shape of the viscosity function. In general a positive increase in the mean flow rate is predicted for low pressure gradients, and negative one for high pressure gradients with strong indication of a resonance effect. Barnes et al. (1971) predicted an increase in the mean flow rate which diminishes with increasing fluctuating frequency using an Oldroyd model. However, experiments show sometimes the opposite tendency. Townsend (1973) extended the calculations to include the saw-tooth and square wave oscillation in the pressure gradient. His work suggests that the square flow rate enhancement is an example of the bang-bang principle of control theory. Davies et al. (1978) studied the pulsating flow with the Goddard-Miller model using two different expressions for relaxation modulus. This model leads to the same discrepancy between theory and experiment found by Barnes et al. (1971). The failure to predict the frequency dependence of the flow enhancement was ascribed tentatively to secondary flows.

The problem was examined by Phan-Thien (1978, 1982) using a perturbation stochastic technique with different constitutive equations (Generalized Newtonian, KBKZ, network models). In all cases, the flow enhancement is closely related to the shear-thinning properties of the fluid and elasticity only plays a secondary role. It was suggested that the apparent resonance curves reported by several authors can be

explained by the coupling between viscoelastic properties of the fluid. In addition, Phan-Thien (1978, 1982a,b) showed that the flow enhancement in an inelastic shear-thinning fluid is not a function of frequency, but on the amplitude of oscillations. In contrast, in a viscoelastic liquid, both frequency and amplitude contribute. The effect of viscous dissipation on pulsatile flow has been reported recently (Herrera-Velarde and Mena 2000, 2001).

Complex fluids have also been used in enhanced oil recovery operations, especially those related with fracturing of underground formations. The extraction of additional amounts of oil can be achieved by hydraulically inducing fractures in the rock formations. Water-based fracturing fluids have been dominated by the use of high molecular weight water-soluble polymers. Recently, polymer-free fracturing fluids, based on viscoelastic surfactants, have been developed for fracturing underground formations. Fluids made of viscoelastic surfactants can provide with improved fracture conductivity in comparison to polymer-based fluids.

Viscoelastic surfactants are characterized by an entangled network of large wormlike micelle structures. These structures break and reform during flow, exhibiting variable and rich rheological behaviour. Predictions of the flow behaviour of viscoelastic surfactants by constitutive equations has been a challenge issue (Cates 1987; Cates and Candau 1990). These systems exhibit Maxwell-type behaviour in small-amplitude oscillatory shear flow and saturation of the shear stress in steady simple shear, which leads to shear banding flow (Spenley et al. 1993; Spenley and Cates 1994; Spenley et al. 1996).

In the non-linear viscoelastic regime elongated micellar solutions also exhibit remarkable features, such as the presence of a stress plateau in steady shear flow past a critical shear rate accompanied by slow transients to reach steady state (Berret 1997).

In view of the important technological applications, it is surprising that the rheological modelling of complex fluids, such as viscoelastic surfactants (or wormlike micellar systems) in pulsating and oscillating flow have not been treated amply in the current literature. This is the subject of the present theoretical investigation. The oscillating pressure gradient pipe flow of complex liquids is here analyzed with the BMP (Bautista-Manero-Puig) model (Bautista et al. 1999, 2000, 2002; Manero et al. 2002). The constitutive equation couples a time-dependent equation for the structure changes with the Upper-Convected Maxwell constitutive equation. The evolution equation for the structural changes was conceived to account for the kinetic process of breakage and reformation of the micelles under flow. The BMP constitutive equation has been used to predict shear and oscillatory data of wormlike solutions (Soltero et al. 1996a,b). The flow enhancement and power requirement are predicted using a stochastic perturbation technique, in which the small parameter is the pulsating Reynolds number.

2. THEORETICAL SECTION.

The class of pressure gradient noises here considered is very large and contains periodic noises as a subclass. We assume that $n(t)$ is a stationary random function in the weak sense (Venkatarama Krishnan 2006). Its mean is a constant and its autocorrelation function is invariant under a time translation

$$R(s) = \langle n(t)n(t+s) \rangle \quad (1)$$

where $\langle \cdot \rangle$ denote an ensemble average (or mathematical expectation) with respect to the probability density distribution of $n(t)$ and the overbar denotes a complex conjugate quantity. If $n(t)$ is an ergodic process, the ensemble average is identical to the

corresponding time average, and only one realization of the experiment is needed. It is important to note that if $n(t)$ is complex, $R(s)$ must be re-defined as

$$R(s) = \langle \overline{n(t)}n(t+s) \rangle \quad (2)$$

Without loss of generality, we can assume that $\langle n(t) \rangle = 0$. In most, if not all physically realizable processes, $|R(s)|$ tends to zero fast enough as $|s|$ tends to infinity so that $|R(s)|$ is Fourier transformable, at least in the generalized sense,

$$|R(s)| = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha s} \Lambda(\alpha) d\alpha, \quad i^2 = -1 \quad (3)$$

where

$$\Lambda(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha s} R(s) ds \quad (4)$$

is the power spectral density of $n(t)$. This allows $n(t)$ to be expressed in terms of a Fourier-Stieljes integral, i.e., the spectral representation of $n(t)$.

$$n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t} dZ(\alpha) \quad (5)$$

$dZ(\alpha)$ is an interval random function of α with zero mean and uncorrelated increments

$$\langle dZ(\alpha) \rangle = 0 \quad (6)$$

$$\langle dZ(\alpha_i) d\bar{Z}(\alpha_j) \rangle = \delta_{ij} \Lambda(\alpha_i) d\alpha_i \quad (7)$$

where δ_{ij} is the Kronecker delta.

3. CONSTITUTIVE, MOMENTUM AND CONTINUITY EQUATIONS

3.1 BMP model

The BMP model is defined by the following equations:

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{R},t) + \frac{\eta(\underline{R},t)}{G_0} \overset{\nabla}{\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{R},t) = 2\eta(\underline{R},t)\underline{\underline{D}}(\underline{R},t) \quad (8)$$

$$\frac{d\eta(\underline{R},t)}{dt} = \frac{1}{\lambda}\eta(\underline{R},t)\left(1 - \frac{\eta(\underline{R},t)}{\eta_0}\right) + k\eta(\underline{R},t)\left(1 - \frac{\eta(\underline{R},t)}{\eta_\infty}\right)\underline{\underline{\sigma}}(\underline{R},t) : \underline{\underline{D}}(\underline{R},t) \quad (9)$$

where

$$\overset{\nabla}{\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{R},t) = \frac{D}{Dt}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{R},t) - \left(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{R},t) \cdot \nabla \underline{V}(\underline{R},t) + (\nabla \underline{V}(\underline{R},t))^T \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{R},t)\right) \quad (10)$$

$$\frac{D}{Dt}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{R},t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{V} \cdot \nabla\right)\underline{\underline{\sigma}}(\underline{R},t) \quad (11)$$

$$\underline{\underline{D}}(\underline{R},t) = \frac{1}{2}\left(\nabla \underline{V}(\underline{R},t) + (\nabla \underline{V}(\underline{R},t))^T\right) \quad (12)$$

In equation (8) the stress $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{R},t)$ is a viscoelastic stress, $\overset{\nabla}{\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{R},t)$ is the codeformational derivate of the stress tensor given by equation (10), $\frac{D}{Dt}$ is the material derivate, $\eta(\underline{R},t)$ is the viscosity function and $\underline{\underline{D}}(\underline{R},t)$ is the rate of deformation tensor which is the symmetric part of the velocity gradient tensor (equation 12), G_0 is the elastic modulus and finally $\nabla \underline{V}(\underline{R},t)$, $(\nabla \underline{V}(\underline{R},t))^T$ is the velocity gradient and its transpose.

In equation (9) η_0 , η_∞ are the viscosities at zero and very high shear rates, respectively, λ is the structural relaxation time and k can be interpreted as a kinetic constant for the structure breakdown. The model needs five parameters to predict experimental data: $\eta_0, \eta_\infty, \lambda, k, G_0$. All of them can be estimated from experimental data in steady and unsteady flows (Bautista et al. 2002).

3.2 Momentum and continuity equations

The momentum and continuity equations are given by the following partial differential equations:

$$\rho \frac{D}{Dt} \underline{V}(R,t) = -\nabla P + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(R,t) + \rho \underline{g} \quad (13)$$

$$\frac{D}{Dt} \underline{V}(R,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{V}(R,t) \cdot \nabla \right) \underline{V}(R,t) \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + (\nabla \cdot \rho \underline{V}(R,t)) = 0 \quad (15)$$

in equation (13) ρ is the liquid density and \underline{g} is the gravitational acceleration vector and $\underline{V}(R,t)$ is the velocity vector and finally equation (15) is the mass conservation. In the following section, the BMP model is used to describe the flow through a pipe under a random pressure gradient.

4. PROBLEM FORMULATION

The isothermal rectilinear flow of a complex liquid under a pulsating time-dependent pressure gradient is analyzed in a circular pipe of radius $R = a$ and axial longitude $Z = L$. Entry and exit effects and gravitational forces are neglected. In this system, all physical quantities in cylindrical coordinates (R, Θ, Z) are defined with respect to an origin at the centre of the pipe.

4.1 Velocity and modified axial component of the momentum equation

From above considerations, the velocity field and the axial component of the momentum equation are given by:

$$\underline{V} = [0, 0, V_z(R,t)] \quad (16)$$

$$\rho \frac{\partial V_z(R,t)}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial Z} (1 + \varepsilon n(t)) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \sigma_{Rz}(R,t)) \quad (17)$$

Equation (17) satisfies the following boundary conditions:

$$V_z(R=a,t) = 0 \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial R} V_z(R, t) \right|_{R=0} = 0 \quad (19)$$

In equation (17) $\frac{\partial P}{\partial Z}$ is the pressure gradient in the axial direction and $\varepsilon \ll 1$ is a small parameter. Equations (18-19) are the non-slip condition at the wall and the symmetry of the velocity field respectively.

4.2. Flow enhancement

From the velocity field, the volumetric flow rate can be calculated in integral form:

$$I(\%) = \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \times 100 = \frac{\int_0^a \left(\dot{\gamma}(R, t) - \dot{\gamma}_0(R) \right) R^2 dR}{\int_0^a \dot{\gamma}_0(R) R^2 dR} \times 100 \quad (20)$$

where $\dot{\gamma}(R, t) = \frac{\partial V_z(R, t)}{\partial R}$, $\dot{\gamma}_0(R) = \frac{dV_z(R)}{dR}$ are the shear rates in unsteady and steady state respectively.

4.3. Non-dimensional variables

To simplify the momentum and rheological equations, we introduce the following dimensionless variables for the axial velocity, pressure gradient, time, shear-stress, shear-rate, radial coordinate, viscosity function and frequency.

$$v = \frac{V_z}{\omega a}; p = \frac{dP}{dZ} \frac{a}{\eta_0}; \xi = \frac{t}{\lambda}; \tau = \frac{\sigma_{RZ}}{\eta_0 / \lambda}; q = \lambda \dot{\gamma}_{RZ}; r = \frac{R}{a}; \Phi = \frac{\eta}{\eta_0}; \Omega = \omega \lambda \quad (21)$$

In (21) ω is the frequency of the pulsations, a is the pipes radius.

4.4. Dimensionless equations

Using (21) into equation (8-9) and (17-20) we obtain the non-dimensional component of the momentum equation, constitutive equations and the flow enhancement.

4.4.1 Momentum equation

$$\text{Re} \frac{\partial v(r, \xi)}{\partial \xi} = -p(1 + \text{Re} n(\xi)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau(r, \xi)) \quad (22)$$

and the non-dimensional boundary conditions

$$v(r = 1, \xi) = 0 \quad (23)$$

$$q(0, \xi) = \left. \frac{\partial}{\partial r} v(r, \xi) \right|_{r=0} = 0 \quad (24)$$

Notice that in equation (22), $n(\xi)$ is a stochastic dimensionless random stationary function, and the small parameter ε is replaced by the pulsatile Reynolds number Re , to seek a perturbation solution in terms of this non-dimensional number.

4.4.2 BMP equation of state

$$\left(1 + De \Phi(r, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \tau(r, \xi) = \Phi(r, \xi) q(r, \xi) \quad (25)$$

$$\frac{d\Phi(r, \xi)}{d\xi} = \Phi(r, \xi)(1 - \Phi(r, \xi)) + A\Phi(r, \xi)(1 - B\Phi(r, \xi)) \tau(r, \xi) q(r, \xi) \quad (26)$$

4.4.3 Flow enhancement

$$I(\%) = \frac{\int_0^1 \langle q(r, \xi) - q_0(r) \rangle r^2 dr}{\int_0^1 q_0(r) r^2 dr} \times 100 \quad (27)$$

In equations (22, 25, 26) the following non-dimensional groups are defined:

$$\text{Re} = \frac{\rho(\omega a) a}{\eta_0}; \quad De = \frac{\eta_0 / G_0}{\lambda}; \quad A = \frac{k\eta_0}{\lambda}; \quad B = \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \quad (28)$$

The pulsatile Reynolds number (Re) gives an indication of the relative importance of inertial and viscous forces in the fluid. The second group is the Deborah number, which represents the relation between two characteristic times, the Maxwell relaxation time

and the structural time. When $De > 1$, the Maxwell time is larger than the structure time and the fluid structure recovers faster than the rupture caused by the flow. Bautista et al. (1999) showed that when the structural time is increased with respect to the Maxwell time, thixotropic loops are predicted, since the structure of the fluid does not recover during the deformation period. The third non-dimensional number is a relationship between the kinetic constant for structure breakdown (destruction function) and the structural recovery time λ . Finally, the fourth group is the ratio of the viscosities at low and high shear rates. This group is a measure of the shear-thinning ($B > 1$) and shear-thickening ($B < 1$) behaviour.

5. PERTURBATION SCHEME

To find an analytical expression for the flow enhancement, we seek a perturbation solution in terms of the Reynolds number. The axial velocity, shear-rate, shear stress and viscosity function can be expressed in power series of the Reynolds number (provided $Re < 1$):

$$\begin{aligned}
 v(r, \xi) &= v_0(r) Re^0 + v_1(r) n(\xi) Re^1 + v_2(r) n(\xi) Re^2 + \dots \\
 q(r, \xi) &= q_0(r) Re^0 + q_1(r, \xi) Re^1 + q_2(r, \xi) Re^2 + \dots \\
 \tau(r, \xi) &= \tau_0(r) Re^0 + \tau_1(r, \xi) Re^1 + \tau_2(r, \xi) Re^2 + \dots \\
 \Phi(r, \xi) &= \Phi_0(r) Re^0 + \Phi_1(r, \xi) Re^1 + \Phi_2(r, \xi) Re^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{29}$$

The Taylor theorem allows expressing $\tau_j(r, \xi)$ and $\Phi_j(r, \xi)$ in terms of the derivatives of $\tau_0(r)$ and $\Phi_0(r)$. The shear stress and the viscosity function can be expressed as:

$$\tau(r, \xi) = \tau_0(r) + \left(q_1 \dot{\tau}_0 \right) Re^1 + \left(q_2 \dot{\tau}_0 + \frac{1}{2} q_1^2 \ddot{\tau}_0 \right) Re^2 + \dots \tag{30}$$

$$\Phi(r, \xi) = \Phi_0(r) + \left(q_1 \dot{\Phi}_0 \right) \text{Re}^1 + \left(q_2 \dot{\Phi}_0 + \frac{1}{2} q_1^2 \ddot{\Phi}_0 \right) \text{Re}^2 + \dots \quad (31)$$

where we have used the shorthand notation

$$\tau_0 = \tau(q_0), \quad \dot{\tau}_0 = \left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q \rightarrow q_0}, \quad \ddot{\tau}_0 = \left. \frac{d^2\tau}{dq^2} \right|_{q \rightarrow q_0}; \quad (32)$$

$$\Phi_0 = \Phi(q_0), \quad \dot{\Phi}_0 = \left. \frac{d\Phi}{dq} \right|_{q \rightarrow q_0}, \quad \ddot{\Phi}_0 = \left. \frac{d^2\Phi}{dq^2} \right|_{q \rightarrow q_0}; \quad (33)$$

In the following section we use this perturbation scheme to calculate the flow enhancement with the BMP model.

6. ASYMPTOTIC ANALYSIS

6.1 Pulsatile flow

Substitution of equations (29-33) into (22-27) and equating terms of the same order in the Reynolds number, the solution to zero-order is obtained, i.e., $O(\text{Re}^0)$:

$$\tau_0 = \Phi_0 q_0 = \tau_w r \quad (34)$$

$$\Phi_0(q_0) = \frac{Aq_0^2 - 1 + \sqrt{(Aq_0^2 - 1)^2 + 4ABq_0^2}}{2ABq_0^2} \quad (35)$$

$$I(\%) = 0 \quad (36)$$

In equation (34), $\tau_w = \tau_0(r=1)$ is the wall stress and the boundary condition $\tau_0 = 0$ at $r = 0$ has been used.

To first order in the Reynolds number, i.e., $O(\text{Re}^1)$:

$$\tau_1(r, \xi) = \tau_0 n(\xi) \quad (37)$$

$$q_1(r, \xi) = \frac{\tau_0}{\dot{\tau}_0} \left(n(\xi) + De \Phi_0 \dot{n}(\xi) \right) \quad (38)$$

$$\frac{dq_1(r, \xi)}{d\xi} = f_1(A, B, q_0) q_1(r, \xi) \quad (39)$$

$$I(\%) = \text{Re} \frac{\int_0^1 \langle q_1(r, \xi) \rangle r^2 dr}{\int_0^1 q_0(r) r^2 dr} \times 100 \quad (40)$$

$$\dot{\tau}_0 \neq 0; \dot{\Phi}_0 \neq 0$$

In equations (37, 38) the boundary conditions $\tau_1(r, \xi) = q_1(r, \xi) = 0$ at $r = 0$ were used.

The shear-rate to first order satisfies the first differential equation (39), where

$f_1(A, B, q_0)$ is given in the Appendix. On the other hand, the averages of equations

(38, 39) are $\langle q_1(r, \xi) \rangle = 0$ and $\left\langle \frac{dq_1(r, \xi)}{d\xi} \right\rangle = 0$. As a consequence, the flow

enhancement to first order is zero, i.e., $I(\%) = 0$.

The second order solutions, i.e., $O(\text{Re}^2)$:

$$\tau_2(r, \xi) = \left(\frac{1}{r} \int_0^r \beta v_0(\beta) d\beta \right) \dot{n}(\xi) \quad (41)$$

$$q_2(r, \xi) = -\frac{1}{2} \frac{\ddot{\tau}_0}{\dot{\tau}_0} q_1^2(r, \xi) + De \dot{\Phi}_0 \frac{\tau_0}{\dot{\tau}_0} n(\xi) q_1(r, \xi) + \left(\frac{n(\xi) + De \Phi_0 \ddot{n}(\xi)}{\dot{\tau}_0} \right) \left(\frac{1}{r} \int_0^r \beta v_0(\beta) d\beta \right) \quad (42)$$

$$\frac{dq_2(r, \xi)}{d\xi} = f_2(A, B, q_0) q_2(r, \xi) + f_3(A, B, q_0) \quad (43)$$

$$I(\%) = 100 \text{Re}^2 \frac{\int_0^1 \langle q_2(r, \xi) \rangle r^2 dr}{\int_0^1 q_0(r) r^2 dr} \quad (44)$$

$$\dot{\Phi}_0 \neq 0; \dot{\tau}_0 \neq 0$$

In equations (41 and 42) the boundary conditions $\tau_2(r, \xi) = q_2(r, \xi) = 0$ at $r = 0$ have been used. In a similar form, the shear-rate to second order in the Reynolds number satisfies the differential equation (43), where $f_2(A, B, q_0), f_3(A, B, q_0)$ are given in the Appendix. In order to calculate the flow enhancement, the average of equation (41) is taken. Substitution of equation (38) into equation (42) and using the random stochastic definitions (1-7) the average of shear-rate to second order is obtained

$$\langle q_2(r, \xi) \rangle = \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\ddot{\tau}_0 \tau_0^2}{\left(\dot{\tau}_0\right)^3} \right\} \left\langle \left(n(\xi) \right)^2 + De^2 \Phi_0^2 \left(n(\dot{\xi}) \right)^2 \right\rangle + De^2 \frac{\left(\dot{\Phi}_0^2 \right)}{2 \left(\dot{\tau}_0 \right)^2} \tau_0^2 \left\langle \left(n(\dot{\xi}) \right)^2 \right\rangle$$

$$\dot{\tau}_0 \neq 0. \quad (45)$$

In equation (45) $n(\xi)$ and $n(\dot{\xi})$ are random functions and its correlations functions $R(s)$ can be calculated by the Wiener-Khintchine relationship (equation 1-7):

$$R(0) = \left\langle \left(n(\xi) \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\overline{\left(n(\xi) \right)} \right) \left(\overline{\left(n(\xi) \right)} \right) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle dZ(\alpha) \overline{dZ(\alpha)} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(\alpha) d\alpha \quad (46)$$

$$R_1(0) = \left\langle \left(n(\dot{\xi}) \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\overline{\left(n(\dot{\xi}) \right)} \right) \left(\overline{\left(n(\dot{\xi}) \right)} \right) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^2 \langle dZ(\alpha) \overline{dZ(\alpha)} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^2 \Lambda(\alpha) d\alpha \quad (47)$$

Substitution of equations (46, 47) into equation (45) we obtain

$$\langle q_2(r, \xi) \rangle = \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\ddot{\tau}_0 \tau_0^2}{\left(\dot{\tau}_0\right)^3} \right\} \left(R(0) + De^2 \Phi_0^2 R_1(0) \right) + De^2 \frac{\left(\dot{\Phi}_0^2 \right)}{2 \left(\dot{\tau}_0 \right)^2} \tau_0^2 R_1(0) \quad (48)$$

To evaluate the flow enhancement, the values of the correlation functions $R_0(0)$ and $R_1(0)$ must be known. In particular, if $n(\xi)$ is a sinusoidal noise (with frequency $\Omega = \omega\lambda$, i.e., $n(\xi) = \sin(\Omega\xi)$). The spectral density $\Lambda(\alpha)$ and the correlation functions $R_0(0)$ and $R_1(0)$ are given by:

$$\Omega(\alpha) = \frac{1}{4}(\delta(\Omega - \alpha) + \delta(\Omega + \alpha)) \quad (49)$$

$$R_0(0) = \frac{1}{2}; \quad R_1(0) = \frac{\Omega^2}{2} \quad (50)$$

In a similar form, equations (49-50) are substituted into equation (48) obtaining for the flow enhancement:

$$I(\%) = 25\text{Re}^2 \frac{\int_0^1 \left(-\frac{\ddot{\tau}_0 \tau_0^2}{(\dot{\tau}_0)^3} (1 + \Omega^2 De^2 \Phi_0^2) + \Omega^2 De^2 \frac{(\dot{\Phi}_0^2)}{(\dot{\tau}_0)^2} \tau_0^2 \right) r^2 dr}{\int_0^1 q_0(r) r^2 dr} \quad (51)$$

In order to simplify the numerical integration, equation (51) can be expressed in terms of the wall shear-rate. From equation (30), the shear-stress to zero order is $\tau_0 = \tau_w r$, so

$$I(\%) = 25\text{Re}^2 \frac{\int_0^{q_w} \left(-\frac{\ddot{\tau}_0 \tau_0^4}{(\dot{\tau}_0)^2} (1 + \Omega^2 De^2 \Phi_0^2) + \Omega^2 De^2 \frac{(\dot{\Phi}_0^2)}{\dot{\tau}_0} \tau_0^4 \right) dq_0}{\int_0^1 q_0 d\left(\frac{1}{3} \tau_0^3\right)} \quad (52)$$

Changing the integration variable $u = \tau_0^4(1 + De^2 \Phi_0^2)$ and $dv = -\frac{\ddot{\tau}_0}{(\dot{\tau}_0)^2} = d\left[\frac{1}{\dot{\tau}_0}\right]$ in the

first integral, and thereafter integrating by parts, the flow enhancement is obtained:

$$I(\%) = 75\text{Re}^2 \left\{ \frac{\tau_w^4 - 4\dot{\tau}_w \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 + We^2 \left(\tau_w^4 \Phi_w^2 - 4\dot{\tau}_w \int_0^{q_w} \Phi_0^2 \tau_0^3 dq_0 \right)}{\dot{\tau}_w \left(q_w \tau_w^3 - \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 \right)} \right\} \quad (53)$$

In equation (53), $We = \Omega De = \frac{\eta_0}{G_0} \omega$ is the pulsating Weissenberg number, which characterizes the relation between the relaxation Maxwell time and the frequency of the pulsations, and $\Phi_w = \Phi_0(q_w)$, $\tau_w = \tau_0(q_w)$ are the viscosity function and stress at the wall, respectively.

Equation (53) shows that the flow enhancement can be separated in two contributions, inelastic and elastic, respectively. In the limit of low frequency, i.e., $\omega \rightarrow 0$, the Reynolds and Weissenberg numbers approach zero, and hence the flow enhancement vanishes, $I(\%) \rightarrow 0$. On the other hand, when the frequency increases, i.e., $\omega \rightarrow \infty$, the second integral of equation (53) dominates and the flow enhancement takes the form:

$$I(\%) \approx 75 \text{Re}^2 We^2 \left\{ \frac{\tau_w^4 \Phi_w^2 - 4 \dot{\tau}_w \int_0^{q_w} \Phi_0^2 \tau_0^3 dq_0}{\dot{\tau}_w \left(q_w \tau_w^3 - \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 \right)} \right\} \quad (54)$$

In the limit of high frequencies, the flow enhancement is dominated by the inertial and elastic effects. Bird et al. (1977) used the White-Metzner model with an alternative perturbation technique and obtained similar expressions. To solve the integral given in (53), the relationship between the shear-stress and shear-rate in equation (35) is used:

$$q_w(\tau_w) = \frac{AB\tau_w^2 - 1 + \sqrt{(AB\tau_w^2 - 1)^2 + 4A\tau_w^2}}{2A\tau_w} \quad (55)$$

In regard to the most important equations (53) or (54), Phan-Thien (1980) obtained similar results for two different constitutive equations, the generalized Newtonian fluid and the PTT model using a stochastic perturbation technique.

6.2 Time average power

The non-dimensional time-average power $\langle P \rangle$ required to pump the fluid and the fractional increase in power I_{Pot} are given by Middleman (1977):

$$\langle P \rangle = \left\langle p(1 + \text{Re}n(\xi)) \int_0^1 q(r, \xi) r^2 dr \right\rangle \quad (56)$$

and the fractional power is given by:

$$I_{Pot}(\%) = \frac{\langle P \rangle - P_0}{P_0} \times 100 = \frac{\left\langle p(1 + \text{Re}n(\xi)) \int_0^1 q(r, \xi) r^2 dr \right\rangle - p \int_0^1 q_0(r) r^2 dr}{p \int_0^1 q_0(r) r^2 dr} \times 100 \quad (57)$$

In (57), P_0 is the non-dimensional power required to pump the fluid without pulsatile pressure and $\langle P \rangle$ is the average power with pulsatile flow. Substitution of equations (29-33) into (57) gives:

$$I_{Pot}(\%) = \frac{\langle P \rangle - P_0}{P_0} \times 100 = \text{Re}^2 \left(\frac{\left\langle n(\xi) \int_0^1 q_1(r, \xi) r^2 dr \right\rangle + \int_0^1 \langle q_2(r, \xi) \rangle r^2 dr}{\int_0^1 q_0(r) r^2 dr} \right) \times 100 \quad (58)$$

From $q_1(r, \xi)$ and $q_2(r, \xi)$ (equations (38, 42)), and upon integration by parts, the power requirement is obtained:

$$I_{Pot}(\%) = 75 \text{Re}^2 \left(\frac{\left[\tau_w^4 - 2\dot{\tau}_w \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 + \text{We}^2 \left(\tau_w^4 \Phi_w^2 - 4\dot{\tau}_w \int_0^{q_w} \Phi_0^2 \tau_0^3 dq_0 \right) \right]}{\dot{\tau}_w \left(q_w \tau_w^3 - \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 \right)} \right) \quad (59)$$

It is clear, that the only difference between the flow enhancement and power requirement (equations 53, 59) is a numerical factor.

Equation (59) has two possible asymptotic cases, the first case is when elastic effects are neglected, i.e., $We \rightarrow 0$ and equation (59) can be expressed in the form:

$$I_{Pot}(\%) - I(\%) = 150 Re^2 \left\{ \frac{\int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0}{\left(q_w \tau_w^3 - \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 \right)} \right\} \quad (60)$$

Equation (60) shows that the power requirement is the sum of the flow enhancement and an integral factor. Notice that, the only condition to have an economical real advantage in equation (60) is that the difference between the power requirement and the flow enhancement is negative, i.e., $I_{Pot}(\%) - I(\%) < 0$. The second case, (when the elastic effects are dominant, i.e., $We \rightarrow \infty$), the power requirement and the flow enhancement have the same mathematical structure:

$$I_{Pot}(\%) = I(\%) \approx 75 Re^2 We^2 \left\{ \frac{\tau_w^4 \Phi_w^2 - 4 \tau_w \int_0^{q_w} \Phi_0^2 \tau_0^3 dq_0}{\tau_w \left(q_w \tau_w^3 - \int_0^{q_w} \tau_0^3 dq_0 \right)} \right\} \quad (61)$$

Equation (61) implies that elasticity does not represent real advantages to pumping with a sinusoidal noise because the extra power required for the pulsating flow is always positive and there is no economical reason why one should have a pulsating flow even though the flow enhancement is positive. This conclusion agrees with several analyses using different constitutive equations (Edwards et al. 1972; Phan-Thien and Dudek 1982a,b; Bird et al. 1977; Sundstrom and Kaufman 1977).

7. RESULTS

7.1 BMP theoretical predictions

The flow enhancement integral equation (52) was solved numerically by using a quadrature Gaussian method combined with a Lagrange method to extrapolate to zero mesh size. In figure 1, predictions of the shear stress versus shear rate in steady shear flow are displayed. At low shear rates ($0.001 \leq q_0 \leq 0.01$), the behavior is Newtonian and becomes shear-thinning at moderate shear rates ($0.01 \leq q_0 \leq 10$). For high shear rates ($q_0 > 10$) the behavior is again Newtonian. It is important to note that the shear stress function is a monotonically increasing function of the shear-rate and its derivative $\dot{\tau}_0 \neq 0$ is always positive. Nevertheless, the second derivative changes sign due to the convexity and concavity of the shear stress function.

Inset in figure 1 shows the corresponding normalized viscosity function versus shear rate in steady shear flow. At low shear rates, the behavior is Newtonian. At moderate shear rate the fluid becomes shear-thinning and it tends to a second plateau at high shear rate where the viscosity is lower than that of the first plateau (shear thinning).

In figure 2, the shear-rate versus the wall stress for different values of the non-dimensional number B is plotted. In all cases, q_w shows a linear dependence on τ_w . However the slope increases as the fluid becomes more shear-thinning.

In figure 3 the flow enhancement for a viscoelastic liquid versus the wall stress for various non-dimensional numbers B is shown ($Re = 0.25$, $We = 10$, $A = 0.2$). Resonance behaviour consisting in a maximum in the flow enhancement is observed at a critical wall stress, and the magnitude of this maximum increases as the shear-thinning character of the fluid becomes more predominant. A large minimum in the curves is

also observed, the absolute magnitude of the minima depending on the shear thinning characteristics of the liquid. At high wall stress, all curves asymptote to zero flow enhancement. Inset of figure 3 shows a zoom in the x-axis to highlight the shifting of the curves to low stresses and the increase in the maxima as B increases. Up to the maximum of the curve, the flow enhancement is a monotonically increasing function of the wall stress and the magnitude of the maximum is entirely determined by a coupling between the structural and kinetics processes. After reaching the maximum, the flow enhancement decays to zero very fast.

In figure 4, the flow enhancement versus wall stress for various pulsating Weissenberg numbers is plotted. The parameters used in the simulation are $A = 0.2$, $B = 7$, and $Re = 0.25$. The line with triangle symbols shows the inelastic case where for any value of the shear-stress the flow enhancement is always positive, and tends to zero for $\tau_w > 1$. Nevertheless, when the elasticity is present, namely, $We > 0$, the maximum in the curves increases with We , and shifts to lower wall stresses as We increases. A crossover point at a critical shear-stress is observed after which the flow enhancement becomes negative, and the minima of this reduction becomes more predominant as We increases. However, in the experimental results for polymer solutions only positive values are observed. For example, Phan-Thien and Dudek (1982a,b), reported only positive values, with $I(\%)$ sometimes increasing and sometimes decreasing with frequency. Inset for figure 4 shows the inelastic case with a zoom in the low stress region.

It should be noted that the existence of both lower and upper viscosity plateaus causes that at a given wall stress, a maximum $I(\%)$ occurs. The value of the maximum in $I(\%)$ is directly related to the ratio of the viscosity upper to lower plateau values. A similar behaviour is predicted elsewhere by Phan-Thien (1978), Bird et al. (1977), and

by the Goddard-Miller type model with Segalman relaxation function (Davies et al. 1977, 1978) or by the non-affine network models (Phan-Thien 1980).

However, in the latter analysis by Phan-Thien (1978) the flow enhancement is always positive even if elasticity is included. In contrast, the BMP model predicts a region where the flow enhancement is negative due to the convexity of the flow curve. Similar behaviour has been found in the White-Metzner model when a Carreau-Yasuda expression is used to represent the viscosity function (Bird et al. 1977).

Figure 5 shows the zero order shear stress versus shear-rate for several values of the non dimensional number A (which accounts for the ratio of kinetics of rupture and structure time) at a fixed value of the non dimensional number B . All curves are monotonically increasing functions of the shear rate. For low values of A (<1) the curves show an extended to the constant viscosity region, whereas higher values of A cause the extent the behaviour Newtonian region to decrease. The slope of the shear thinning region is the same for all curves as can be seen in the inset of this figure.

In figure 6 the flow enhancement versus wall stress for various values of the parameter A is shown. The other parameters employed in the simulation are $Re = 0.25$, $We = 10$, $B = 7$. To analyze systematically the effect of the thixotropy, the value of the kinetic constant is changed to $k = G_0^{-1}$, enabling A to be the ratio $A = \frac{\eta_0 / G_0}{\lambda}$. When the value of A lies in the range $0 \leq A < 1$, the structure does not recover during the deformation period and hence the resonance curves are dramatically shifted due to the evolution of the system structure. Nevertheless, the magnitude of the maxima and minima is the same for all curves. The shifting implies that for a thixotropic fluid, the system needs more energy to obtain the same flow enhancement. In contrast, when the value of A lies in the range of $1 \leq A \leq 10$; the structure recovers quickly and the curves are shifted to lower wall stresses.

Figure 7 displays the zero order shear stress versus shear-rate as a function of the CTAT content in the system. The parameters employed for this curves are shown in Table 1. CTAT content has the effect of increasing the extent of the constant viscosity region, as does the parameter A . Structure of the liquid seems to be directly related to the surfactant content. Inset of this figure shows the corresponding viscosity as a function of the shear rate, again all shear thinning slopes have the same value, nevertheless the viscosity at high shear rates is reported to have different values for each system (Soltero et al. 1996).

7.2 Predictions of the model using rheometric data

In Figures 8, predictions of the flow enhancement versus wall stress using viscometric data of CTAT at different concentrations at $T = 30^\circ C$ (Bautista et al. 1999) are plotted. Parameters employed in the model as functions of CTAT concentration are given in Table 1 and the corresponding dimensionless groups are disclosed in Table 2.

For the solution with 5 wt. % CTAT (see inset) the flow enhancement increases and for $1.2 < \tau_w < 1.5$ a drastic enhancement is observed with a maximum in the resonance curve of $I(\%) = 43.25$ at $\tau_w = 1.4$. In this region, the fluid experiences a pronounced shear-thinning behavior. The maximum flow enhancement is found for the $wt.(%) = 5$ CTAT content, it has been reported by several authors that the shear thinning effect is the responsible of the flow enhancement (Barnes et al. 1969,1971; Edwards et al. 1972; Sundstrom and Kaufman 1977; Manero and Mena 1977; Manero and Walters 1980; Mena et al. 1979; Kazakia and Rivlin 1978, 1979; Phan-Thien 1978, 1980a,b, 1981, 1982; Phan-Thien and Dudek 1982a,b; Davies et al. 1978).

Nevertheless, the 5 wt. % solution has the minimum shear thinning effect, related to the value of the dimensionless B number (see Table 2). Thixotropy was found to have a negative effect on the flow enhancement, thus the maximum concentration of CTAT

shares the maximum thixotropy value (thixotropy is related to the dimensionless number A , see Table 2) and so the flow enhancement decreases due to high thixotropy. This is believed to be the cause of the maximum flow enhancement at the minimum CTAT content.

For a CTAT content of $wt.(%)=10$, the maximum in the curve is $I(\%)=7.44$ at $\tau_w = 5.2$. For the $wt.(%)=15$ solution, the maximum in the curve is $I(\%)=4.24$ at $\tau_w = 2.8$, lower than that at $wt.(%)=10$. Finally, for a CTAT content of $wt.(%)=20$, the maximum in the curve is $I(\%)=4.45$ at $\tau_w = 12.2$. Despite the liquid is structured ($A=0.0024$), this structure is destroyed by flow exhibited by the pronounced shear thinning. Furthermore, the maximum is shifted to larger wall stresses, implying a larger energy requirement for flow enhancement.

In figure 9, the flow enhancement versus wall stress for a $wt.(%)=5$ solution with varying frequency is shown. To quantify the flow enhancement dependence on the

frequency, the following ratios are calculated: $\frac{I_{\Omega=0.12}}{I_{\Omega=0.06}} = \frac{43.25}{10.82} \cong 4$ and

$\frac{I_{\Omega=0.18}}{I_{\Omega=0.06}} = \frac{97.20}{10.82} \cong 9$. The frequency dependence of the maxima is clearly depicted,

contrasting with other results that predict that the flow enhancement is a decreasing function of the frequency (Phan-Thien 1980a,b; Barnes et al. 1969, Davies et al. 1978).

8. CONCLUSIONS

In this work, a perturbation solution to a pulsating pressure gradient flow of a complex liquid using the BMP model is presented for a general class of pressure gradient noises. The study points out the following conclusions:

- The flow enhancement is a second order effect in the perturbation parameter. In this case, the parameter was the pulsating Reynolds number.
- The viscoelastic, kinetic and structural mechanisms in the BMP model were characterized by associating non-dimensional numbers to each mechanism.
- A necessary condition to obtain a positive flow enhancement in a structural liquid is that the fluid must be shear-thinning. The maximum in the curves is closely related to ratio of viscosities at low and high shear rates and also to a coupling between the kinetics and structural effects.
- The BMP model predicts regions where the efficiency can be either positive or negative, according to the convexity of the constitutive flow curve.
- The flow enhancement is a function of the concentration of the solution, in this case CTAT. In most cases, the flow enhancement decreases when the concentration of the solution increases.
- The flow enhancement for CTAT solution increases with the non-dimensional frequency.
- Thixotropy was found to have a negative effect in the flow enhancement, i.e. high thixotropy causes low efficiency. Also the CTAT content was directly associated with the system thixotropy.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors wish to acknowledge the support of the National Council of Science and Technology of Mexico (CONACYT Reg. 162980)

REFERENCES

- Barnes HA, Towsend P, Walters K (1969) Flow of non-Newtonian liquids under a varying pressure gradient. *Nature* 224: 585-587
- Barnes HA, Towsend P, Walters K (1971) On pulsatile flow of non-Newtonian liquids. *Rheol Acta* 10:517-527
- Bautista F, De Santos JM, Puig JE, Manero O (1999) Understanding thixotropic and antithixotropic behavior of viscoelastic micellar solutions and liquid crystalline dispersions. The model. *J. Non-Newtonian Fluid Mech* 80: 93-113
- Bautista F, Soltero JFA, Macias ER, Manero O (2002) On the shear banding flow of wormlike micelles. *J. Phys. Chem. B* 106: 13018-13026
- Bautista F, Soltero JFA, Pérez-López JH, Puig JE, Manero O (2000) On the shear banding flow of elongated micellar solutions. *J. Non-Newtonian Fluid Mech* 94: 57-66
- Berret LF (1997) Transient Rheology of Wormlike Micelles. *J. Rheol* 39: 725-741
- Bird RB, Armstrong RC, Hassager O (1977) Dynamics of polymeric liquids, vol 1. Fluid Mechanics. Wiley, New York
- Cates ME (1987) Reptation of living polymers: dynamics of entangled polymers in the presence of reversible chain-scission reactions, *Macromolecules*. 20: 2289-2296
- Cates ME, Candau SJ (1990) Statics and dynamics of worm-like surfactants micelles. *J. Phys. Condens. Matter* 2: 6869-6892
- Davies JM, Bhumiratana S, Bird RB (1978) Elastic and inertial effects in pulsatile flow of polymeric liquids in circular tubes. *J Non-Newtonian Fluid Mech* 3: 237-259

- De Andrade Lima LRP, Rey AD (2005) Pulsatile Poiseuille flow of discotic mesophases, *Chem. Eng. Sci.* 60: 6622-6636
- De Andrade Lima LRP, Rey AD (2006) Pulsatile flows of Leslie-Ericksen liquid crystals. *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 135: 32-45
- Edwards MF, Nellist DA, Wilkinson WL (1972) Pulsating flows of non-Newtonian fluids in pipes. *Chem. Eng. Sci.* 27: 545-553
- Fredrickson AG (1964) *Principles and Applications of Rheology*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs
- Gianetto A, Baldi G, Capra V (1973) Laminar pulsed flow of non-Newtonian fluids, *Chem. Eng. Sci.* 27: 295-306
- Herrera-Velarde JR, Mena B (2000) A note on Newtonian and non-Newtonian oscillatory pipe flow. *Revista Mexicana de Fisica* 46 (6): 566-571.
- Herrera-Velarde JR, Mena B (2001) Viscous dissipation of a power law fluid in a oscillatory pipe flow. *Revista Mexicana de Fisica* 47 (4): 351-356.
- Kazakia JY, Rivlin RS (1978) The influence of vibration on Poiseuille flow of non-Newtonian fluids, I. *Rheol Acta* 18: 210-226
- Kazakia JY, Rivlin RS (1979) The influence of vibration on Poiseuille flow of non-Newtonian fluids, II. *Rheol Acta* 18: 244-255
- Khabakhpasheva EM, Popov VI, Kekalov AN, Mikhailova ES (1989) Pulsating flow of a viscoelastic fluids in tubes. *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 33: 289-304
- Manero O, Bautista F, Soltero JFA, Puig JE (2002) Dynamics of worm-like micelles: the Cox-Merz rule. *J. Non-Newtonian Fluid Mech* 106: 1-15
- Manero O, Mena B (1977) An interesting effect in non-Newtonian flow in oscillating pipes. *Rheol Acta* 19: 277-284

- Manero O, Walters K (1980) On elastic effects in unsteady pipe flows. *Rheol Acta* 19: 277-284
- Mena B, Manero O, Binding DM (1979) Complex flow of viscoelastic fluids through oscillating pipes. Interesting effects and applications. *J Non-Newtonian Fluid Mech* 5: 427-448
- Mori N, Wakabayashi K, Horikawa A, Nakamura K (1984) Measurements of pulsating and oscillating flows on non-Newtonian fluids through concentric and eccentric cylinders. *Rheol Acta* 23: 508-513
- Phan-Thien N (1978) On pulsating flow of polymeric fluids. *J Non-Newtonian Fluid Mech* 4: 167-176
- Phan-Thien N (1980a) Flow enhancement mechanism of a pulsating flow of non-Newtonian liquids. *Rheol Acta* 19: 285-290
- Phan-Thien N (1980b) The effects of longitudinal vibration on pipe flow of a non-Newtonian fluid. *Rheol Acta* 19: 539-547
- Phan-Thien N (1981) On pulsating flow of a polymer fluids: Strain-dependent memory kernels. *J. Rheol* 25 (3): 293-314
- Phan-Thien N (1982) On a pulsating flow of slightly non-Newtonian liquids. *Journal de Mécanique théorique et appliqué* 1: 81-89
- Phan-Thien N, Dudek J (1982a) Pulsating flow of a plastic fluid. *Nature* 296: 843-844
- Phan-Thien N, Dudek J (1982b) Pulsating flow revisited. *J Non-Newtonian Fluid-Mech* 11: 147-161
- Soltero JFA, Bautista F, Puig JE, Manero O (1999) Rheology of Cetyltrimethylammonium p-Toluenesulfonate-Water System. 3. Nonlinear Viscoelasticity. *Langmuir* 15: 1604-1612

- Spenley NA, Cates ME (1994) Pipe models for entangled fluids under strong shear. *Macromolecules*, 27: 3850-3858
- Spenley NA, Cates ME, McLeish TCB (1993) Non-linear rheology of wormlike micelles. *Phys. Rev. Lett* 71: 939-942
- Spenley NA, Yuan XF, Cates M E (1996) Non-monotonic constitutive laws and the formation of shear banded flows. *J. Phys. II France* 6: 551-571
- Sundstrom DW, Kaufman A (1977) Pulsating flow of polymeric solutions. *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.* 16 (3): 320-325
- Townsend P (1973) Numerical solutions of some unsteady flows of elasto-viscous liquids, *Rheol. Acta* 12: 13-18
- Middleman S (1977) *Fundamental of polymer processing*. McGraw-Hill, New-York
- Venkatarama Krishnan (2006) *Probability and Random Processes*. Wiley-Interscience, New Jersey
- Yaglom AM (1965) *An introduction to the theory of stationary random functions*, translated by Silverman RA. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey

APPENDIX

$$f_1(A, B, q_0) = \frac{1}{\dot{\Phi}_0} \left((1-2\Phi_0) \dot{\Phi}_0 + A \left(\tau_0 q_0 (1-2B\Phi_0) \dot{\Phi}_0 + \Phi_0 (1-B\Phi_0) (\tau_0 \dot{q}_0) \right) \right)$$

$$f_2(A, B, q_0) = \frac{1}{\dot{\Phi}_0} \left(1-2\Phi_0 \dot{\Phi}_0 + \Phi_0 (1-B\Phi_0) \left(\tau_0 + q_0 \dot{\tau}_0 \right) + \tau_0 q_0 (1-2B\Phi_0) \dot{\Phi}_0 \right)$$

$$f_3(A, B, q_0) = f_{31}(A, B, q_0) q_1^2(r, \xi) + f_{32}(A, B, q_0) q_1^2(r, \xi) + f_{33}(A, B, q_0)$$

$$f_{31}(A, B, q_0) = \frac{1}{\dot{\Phi}_0} \left((1-2\Phi_0) \ddot{\Phi}_0 - \left(\dot{\Phi}_0 \right)^2 + (1-2B\Phi_0) \tau_0 \left(\dot{\Phi}_0 + q_0 \frac{\ddot{\Phi}_0}{2} \right) + \frac{\Phi_0 (1-B\Phi_0)}{2} q_0 \ddot{\Phi}_0 \right)$$

$$f_{32}(A, B, q_0) = \frac{1}{\dot{\Phi}_0} \left(\Phi_0 (1-B\Phi_0) + \Phi_0 (1-2B\Phi_0) q_0 \right) \tau_0 n(\xi)$$

$$f_{33}(A, B, q_0) = - \frac{\ddot{\Phi}_0 \left(n(\xi) + Den(\xi) \Phi_0 \right) \left(n(\xi) + Den(\xi) \Phi_0 \right)}{\dot{\Phi}_0 \left(\dot{\tau}_0 \right)^2}$$

Table 1

Values of the parameters used in the model as a function of CTAT concentration
(Soltero et al. 1999)

C_{CTAT} (wt.%)	$\eta_0^{-1} (Pa \cdot s)^{-1}$	$\eta_\infty^{-1} (Pa \cdot s)^{-1}$	$k \times 10^{-6} (Pa)^{-1}$	$\lambda (s)$	$G_0 (Pa)$
5	0.0275	19.8	250.0	0.12	41.5
10	0.0061	15.0	30.3	0.33	176.0
15	0.0050	12.6	10.5	0.38	380.0
20	0.0042	12.0	4.2	0.42	620.0

Table 2

Values of the dimensionless numbers used in the model as a function of CTAT concentration. The parameters employed in the simulation are:

$$\omega = 1.0 \text{ rad/s}; a = 5 \times 10^{-2} \text{ m}^3; \rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$$

wt.(%)	Re	Ω	We	A	B	I_{Max}	$\tau_w (I_{Max})$
5	0.0690	0.12	0.876	0.0760	720	43.25	1.4
10	0.0153	0.33	0.931	0.0150	2459	7.44	5.2
15	0.0125	0.38	0.526	0.0055	2520	4.24	2.8
20	0.0105	0.42	0.384	0.0024	2857	4.45	12.2

$$Re = \frac{\rho \omega a^2}{\eta_0}; \Omega = \omega \lambda; We = \frac{\eta_0}{G_0} \omega; A = \frac{k \eta_0}{\lambda}; B = \frac{\eta_0}{\eta_\infty}$$

Table 3

Values of the dimensionless numbers used in the model as a function of different frequencies. Pipe radius and liquid density are $a = 5 \times 10^{-2}$ m; $\rho = 1000$ Kg/m³

5 wt. %	Re	We	A	B	I _{Max}	$\tau_w(I_{Max})$
$\Omega_1 = 0.06$	0.0126	0.438	0.076	720	10.82	1.4
$\Omega_2 = 0.12$	0.0252	0.876	0.076	720	43.25	1.4
$\Omega_3 = 0.18$	0.0378	1.314	0.076	720	97.20	1.4

$$\omega_1 = 0.5 \text{ rad/s} \quad \omega_2 = 1 \text{ rad/s} \quad \omega_3 = 1.5 \text{ rad/s}$$

FIGURE CAPTIONS

Figure 1. Dimensionless shear stress versus shear-rate. In the inset, dimensionless viscosity function versus shear rate. Dimensionless groups used in the simulations are: $A = 1$, $B = 1000$.

Figure 2. Dimensionless shear rate versus wall stress as a function of B : (i) 5, (ii) 6, (iii) 7, (iv) 8, (v) 9, for $A = 0.2$.

Figure 3. Flow enhancement versus dimensionless wall stress for various values of B : (i) 5, (ii) 7, (iii) 8, (iv) 9. Inset: Flow enhancement in the region of small wall stresses. The other non-dimensionless groups used in the simulation are: $Re = 0.25$, $We = 10$ and $A = 0.2$.

Figure 4. Flow enhancement versus dimensionless wall stress as a function of the Weissenberg number We : (i) 0, (ii) 4, (iii) 7; (iv) 10. In the inset inelastic case is shown. The others dimensionless groups used in the simulation are: $Re = 0.25$, $A = 0.2$ and $B = 7$.

Figure 5. Dimensionless shear stress versus shear-rate as function of A : (i) 0.01, (ii) 0.1, (iii) 1, (iv) 10, $B = 7$. Inset: Viscosity function versus shear rate.

Figure 6. Flow enhancement versus dimensionless wall stress for various values of A : (i) 0.01, (ii) 0.1, (iii) 1, (iv) 10. Inset: Flow enhancement in the region of small wall stresses. $Re = 0.25$, $We = 10$ and $B = 7$.

Figure 7. Dimensionless shear stress versus shear rate. In the inset, the viscosity function versus shear rate for different CTAT solutions is shown. Parameters used in the simulation are given in Table 1.

Figure 8. Flow enhancement versus dimensionless wall stress for CTAT solutions at $T = 30^\circ C$. In the inset, the flow enhancement versus wall stress of a 5 wt. % CTAT

solution is shown. Parameters and dimensionless numbers used in the simulation are given in Table 2.

Figure 9. Flow enhancement versus dimensionless wall stress for a 5 wt. % CTAT solution at $T = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$ for various values of the dimensionless frequency ω : (i) 0.18 rad/s, (ii) 0.36 rad/s, (iii) 0.54 rad/s . The parameters used and dimensionless numbers are given in Table 3.

