2943

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

ANUALIDADES CIERTAS Y SUS APLICACIONES

T E S I S

Que para obtener el Título de

A C T U A R I O

p r e s e n t a

María Tomasa Luz Tlahuel Tlahuel

México, D. F. 1989

INDICE

INTRODUCCION

El presente trabajo se hízo con la finalidad de que el alumno de la carrera de Actuaría tuviera una herramienta más detallada para el estudio de las Matemáticas Financieras y sus aplicaciones, por tal motivo se explican desarrollos de los conceptos concernientes a anualidades ciertas solamente.

En la primera parte de este trabajo se explica lo que es una anualidad cierta así como la obtención del valor presente y monto en forma general.

El tema de anualidades ciertas implica estudiar diferentes casos por tal motivo se harán desarrollos para encontrar anualidades fuera de los límites de tablas, su valor presente y monto, así como de las anualidades pagaderas p-veces al año valuadas con tasas nominales de interés y de anualidades pagaderas p-veces al año con una tasa de interés anual efectiva.

Dentro de los diferentes casos de anualidades también existen cuando los pagos son anticipados como son los intereses pagados por anticipado, las rentas y otros conceptos, también existen pagos que se empiezan a hacer después de cierto tiempo de haber hecho el trato, éstos se refieren a las anualidades diferidas de las cuales también se dará una explicación de las fórmulas del valor presente y del monto.

Otro tipo de anualidades que también es importante en las cuales -

los pagos no son iguales pero que existe una relación o razón entre cada uno de ellos, esto se refiere a las anualidades crecientes y decrecientes en progresión aritmética y geométrica por lo que también se hace un estudio de ellas.

En ocasiones surge la necesidad de saber cuál es la tasa de interés que se esta utilizando en alguna operación financiera, qué renta o pago periódico se tendra que hacer y durante cuánto tiempo, éstas incógnitas se podran conocer aplicando logaritmos, interpolación y aplicando conceptos algebraicos en las fórmulas de anualidades los cuales se daran en este trabajo.

La segunda parte consiste en la aplicación de los conceptos explicados anteriormente, como el caso de una deuda si se hacen pagos periódicos saber cuanto se paga de capital y cuanto de interés y si en cualquier momento se quiere liquidar la deuda se podrá saber utilizando las tablas de Amortización de las cuales se da una explicación para su elaboración de igual manera se da una explicación para hacer tablas de un Fondo de amortización.

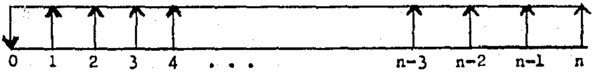
Por último se da la definición de un bono y de series de bonos, se encuentra el precio de compra de un bono, así como de una serie de bonos. Se encuentran y se explican las modificaciónes que se tienen que hacer a la fórmula de Makeham en los diferentes casos, cuando el valor de redención es igual al valor nominal, cuando (g) la tasa de los dividendos es variable y por último cuando el valor de redención es variable.

1.- ANUALIDADES VENCIDAS.

Una anualidad es una serie de pagos generalmente iguales que se hacen periódicamente durante un cierto tiempo "n", donde el primer pago se hace un período después de haber hecho el trato con una tasa de interés "i" .

A continuación se calculará el valor presente de una anualidad vencida de 1.00 peso pagadera anualmente durante "n" años con una tasa de interés "i" anual efectiva. Se designará como una anualidad al siguiente símbolo: $a_{\overline{n}|i}$

Como se va a calcular el valor presente se tomará como punto de evaluación el año cero y se traeran a este punto todos los pagos periódicos de los n años.



$$a_{\overline{n}|i} = v^1 + v^2 + v^3 + \ldots + v^{n-2} + v^{n-1} + v^n$$

$$= v\,(1 + v^1 + v^2 + \ldots + v^{n-2} + v^{n-1})$$

Como se observa se tiene una progresión aritmética de razón V entonces utilizando la fórmula de una progresión tenemos que:

$$a_{\overline{n}|i} = v\,\frac{(1 - v^n)}{1 - v}$$

Ahora multiplicando y dividiendo por (1+i) tenemos:

$$a_{\overline{n}|i} = v\,\frac{(1-v^n)}{1 - v}\,\frac{(1+i)}{(1+i)} = \frac{1 - v^n}{(\cancel{1}+i)-\cancel{1}} = \frac{1 - v^n}{i}$$

El hecho de que se haya calculado con pagos unitarios no es ningún problema, ya que basta multiplicar la anualidad por la renta de la que se trate R , quedando de la siguiente forma, donde el valor presente se denotará por "A" .

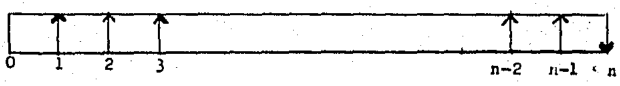
$$A = RV + RV^2 + RV^3 + \ldots + RV^{n-1} + RV^n$$

$$= R\,(\underbrace{V + V^2 + V^3 + \ldots + V^{n-1} + V^n}_{a_{\overline{n}|i}})$$

$$A = R\, a_{\overline{n}|i}$$

MONTO DE UNA ANUALIDAD ORDINARIA

El monto de una anualidad ordinaria se calcula tomando como punto de evaluación el punto "n", donde también se tienen pagos anuales de 1.00 peso con una tasa anual efectiva "i" y "n" el número de años de la anualidad, se denotará el monto como "S" .



$$S_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \ldots + (1+i) + 1$$

$$s_{\overline{n}|i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}$$

Por ser una progresión geométrica de razón (1+i) tenemos que:

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1+i)^{n-1}\,(1+i)}{\cancel{1} - (\cancel{1}+i)} = \frac{1 - (1+i)^n}{-i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

De la misma manera que en el valor presente si los pagos no son unitarios solo se multiplica el monto obtenido anteriormente por la renta R quedando como sigue:

$$S_{\overline{n}|i} = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \ldots + R(1+i) + R$$

$$= R\,\underbrace{\left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i) + 1\right]}_{s_{\overline{n}|i}}$$

$$S = R\,s_{\overline{n}|i}$$

2.- ANUALIDADES FUERA DE LOS LIMITES DE TABLAS

A continuación se darán las fórmulas y desarrollos del Valor Presente y Monto de anualidades fuera del límite de tablas.
Es necesario saber estas fórmulas ya que en ocasiones se utilizan anualidades que no se encuentran en la tablas y para calcularlas solamente se aplican directamente las fórmulas indicadas.

VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD

$$a_{\overline{h+k}|\,i} = \frac{1 - v^{h+k}}{i} \qquad \text{restando y sumando } v^h$$

$$= \frac{1 - v^h + v^h - v^{h+k}}{i}$$

$$= \frac{1 - v^h}{i} + v^h \; \frac{1 - v^k}{i}$$

$$= a_{\overline{h}|\,i} + v^h \, a_{\overline{k}|\,i}$$

MONTO DE UNA ANUALIDAD

$$S_{\overline{h+k}|\, i} = \frac{(1+i)^{h+k} - 1}{i} \qquad \text{sumando y restando } (1+i)^h$$

$$= \frac{(1+i)^{h+k} + (1+i)^h - (1+i)^h - 1}{i}$$

$$= (1+i)^h \left[\frac{(1+i)^k - 1}{i}\right] + \frac{(1+i)^h - 1}{i}$$

$$S_{\overline{h+k}|\, i} = (1+i)^h \; S_{\overline{k}|\, i} + S_{\overline{h}|\, i}$$

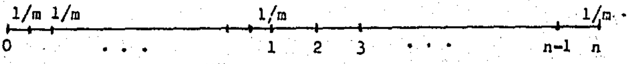
3.- ANUALIDADES PAGADERAS P-VECES AL AÑO VALUADAS CON UNA TASA NOMINAL DE INTERES.

Existen varios casos los cuales se analizarán cada uno con una renta unitaria para mayor facilidad.

1er. caso, cuando $m=p$

Este caso es cuando coincide la convertibilidad de la tasa con el período de los pagos.

Para obtener el valor presente en este caso y como $m=p$, se tendran mn períodos, donde n es el número de años de la anualidad y m es el número de veces que se convierte la tasa de interés en un año. El pago será unitario anual y por cada período será de $\frac{1}{p}$.



$$A = \frac{1}{p} V^{1/m} + \frac{1}{p} V^{2/m} + \dots + \frac{1}{p} V^{1+1/m} + \dots + \frac{1}{p} V^{2} + \frac{1}{p} V^{2+1/m} + \dots + \frac{1}{p} V^{mn}$$

$$= \frac{1}{p} V^{1/m} \left[1 + V^{1/m} + \dots + V^{1-1/m} + V + \dots + V^{(mn)-1/m} \right]$$

Utilizando la fórmula de una progresión geométrica tenemos que:

$$A = \frac{1}{p} V^{1/m} \left[\frac{1 - V^{mn}}{1 - V^{1/m}} \right] \frac{(1+i)^{1/m}}{(1+i)^{1/m}}$$ multiplicando y dividiendo por $(1+i)^{1/m}$.

$$= \frac{1}{p} \left[\frac{1 - V^{mn}}{\frac{(1+i)^{1/m} - 1}{m} \; m} \right]$$ multiplicando el denominador por $\frac{m}{m}$.

$$= \frac{1}{p} \left[\frac{1 - V^{mn}}{\frac{i^{(m)}}{m}} \right]$$ como m=p entonces:

$$= \frac{1}{m} \left[\frac{1 - V^{mn}}{i'} \right] = \frac{1}{m} a_{\overline{mn}|\, i'}$$

Ahora para el caso de una renta cualquier Ra, sólo se divide entre el número de pagos y se multiplica por la anualidad.

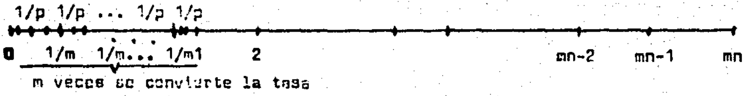
$$A = \frac{Ra}{m} a_{\overline{mn}|\, i'}$$

2o. caso, cuando $m < p$.

En este caso el número de pagos es mayor que la convertibilidad de la tasa de interés, en otras palabras en cada período de convertibilidad de la tasa existen k pagos.

Para obtener el valor presente primero se calculará un pago X tal que sea equivalente a los k-pagos que se hacen en cada período de convertibilidad.

A continuación se hará un desarrollo para encontrar el valor presente de una anualidad cuando $m < p$, en la cual se utilizará una tasa de interés $i' = \frac{i^{(m)}}{m}$.



Como $p > m \Rightarrow \frac{p}{m} = k$ entonces $p = mk$

$$X = \frac{1}{p}\left[(1+i')^{1-1/k} + (1+i')^{1-2/k} + \dots + (1+i')^{2/k} + (1+i')^{1/k} + 1\right]$$

Utilizando la fórmula de una progresión geométrica tenemos:

$$= \frac{1}{p}\left[\frac{1-(1+i')}{1-(1+i')^{1/k}}\right] = \frac{1}{mk}\left[\frac{i'}{(1+i')^{1/k}-1}\right]$$

$$= \frac{1}{m}\,\frac{i'}{i^{(k)}} = X$$

Como ahora $m = p$ entonces se tiene una anualidad como sigue:

$$A = XV^1 + XV^2 + \dots + XV^m + XV^{m+1} + \dots + XV^{mn-1} + XV^{mn}$$

$$= XV\left[1 + V^1 + V^2 + \dots + V^{m-1} + V^m + \dots + V^{mn-1}\right]$$

Por ser una progresión geométrica se tiene que:

$$= XV\left[\frac{1-V^{mn}}{1-V}\right]\frac{(1+i')}{(1+i')}$$ Multiplicando y dividiendo por $(1+i')$

$$= X\left[\frac{1-v^{mn}}{(\cancel{1}+i')-\cancel{1}}\right] = X\left[\frac{1-v^{mn}}{i'}\right] = X\, a_{\overline{mn}|i'}$$

Sustituyendo el valor de " X " se tiene :

$$A = \frac{1}{m}\,\frac{i'}{i'^{(k)}}\, a_{\overline{mn}|i'}$$

Ahora como X es el pago que se encontró y que se hace cada período de convertibilidad de la tasa entonces se llega al caso en el que m=p, y solo basta multiplicar el pago"X" por una anualidad donde "n" es el número de pagos, que va a ser igual al número de años multiplicado por el número de veces de convertibilidad de la tasa de interés en un año.

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i'} = \frac{1}{m}\,\frac{i'}{i'^{(k)}}\, a_{\overline{mn}|i'} \qquad \text{donde} \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

El caso anterior fué para una renta unitaria, ahora para el caso de una renta anual cualquiera "Ra" solo se multiplica la anualidad por la renta:

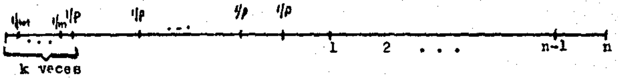
$$a^{(p)}_{\overline{n}|i} = Ra\,\frac{1}{m}\,\frac{i'}{i'^{(k)}}\, a_{\overline{mn}|i'} \qquad \text{donde} \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

3er. Caso

cuando $m > p$

Este es el caso en el que hay más convertibilidad de la tasa que pagos en un año, entonces se buscará un pago "X" tal que coin - cide con la convertibilidad de la tasa.

$\frac{m}{p} = k$ (entero) $\qquad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$



$$X\left[(1+i')^{k-1} + (1+i')^{k-2} + \dots + (1+i') + 1\right] = \frac{1}{p}$$

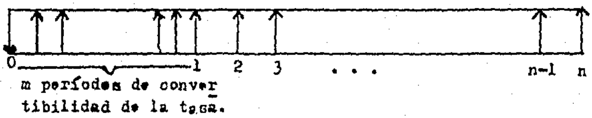
Utilizando la fórmula de una progresión geométrica de razón (1+i)

$$\frac{1}{p} = X\left[\frac{1-(1+i')^{k}}{1-(1+i')}\right] = K\left[\frac{(1+i')^{k}-1}{i'}\right]$$

Entonces despejando a "X"

$$\frac{1}{p} = X\, s_{\overline{k|}i'} \qquad X = \frac{1}{p}\,\frac{1}{s_{\overline{k|}i'}}$$

Por lo tanto el pago "X" viene siendo el que se efectuará en cada convertibilidad de la tasa.



Obteniendo el valor presente de los pagos que se hacen en cada convertibilidad de la tasa de interés:

$$A= XV^{1/m} + XV^{2/m} + \dots + XV^{m/m} + XV^{1+1/m} + \dots + XV^{2} + \dots + XV^{mn/m}$$

$$A= XV^{1/m} \left[1 + V^{1/m} + \dots + V + V^{1+1/m} + \dots + V^{2} + \dots + V^{mn-2/m} + V^{mn-1/m} \right]$$

Aplicando la fórmula de una progresión geométrica de razón $V^{1/m}$.

$$A= XV^{1/m} \left[\frac{1 - V^{mn}}{1 - V^{1/m}} \right]$$

multiplicando y dividiendo por $(1+i')^{1/m}$.

$$A= XV^{1/m} \left[\frac{1 - V^{mn}}{1 - V^{1/m}} \right] \frac{(1+i')^{1/m}}{(1+i')^{1/m}}$$

$$A= X \left[\frac{1 - V^{mn}}{m \; \frac{\left((1+i')^{1/m} - 1\right)}{m}} \right]$$

multiplicando y dividiendo por m el denominador.

$$A= X \left[\frac{1 - V^{mn}}{\frac{i^{(m)}}{m}} \right]$$

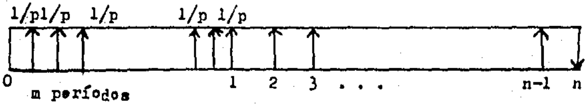
$$A= X \left[\frac{1 - V^{mn}}{i'} \right]$$

$$A= X \, a_{\overline{mn}|i'}$$

$$A = \frac{1}{p} \quad \frac{1}{s_{\overline{k}|i'}} \quad a_{\overline{mn}|i'}$$ Ahora para cualquier renta anual "Ra"

$$A = \frac{Ra}{p} \quad \frac{1}{s_{\overline{k}|i'}} \quad a_{\overline{mn}|i'}$$

MONTO DE UNA ANUALIDAD CUANDO m=p



$$S= \frac{1}{p}(1+i)^{mn-1/m} + \frac{1}{p}(1+i)^{mn-2/m} + \dots + \frac{1}{p}(1+i)^{mn-1} + \dots + \frac{1}{p}(1+i)^{mn-2}$$

$$+ \dots + \frac{1}{p}(1+i)^{\frac{m}{m}-1} + \frac{1}{p}(1+i)^{1-1/m} + \dots + \frac{1}{p}(1+i)^{1/m} + \frac{1}{p}$$

$$S= \frac{1}{p}\left[1 + (1+i)^{1/m} + \dots + (1+i)^{1-1/m} + (1+i)^{\frac{m}{m}-1} + \dots + (1+i)^{mn-2} + \right.$$

$$\left. + \dots + (1+i)^{mn-1} + \dots + (1+i)^{mn-2/m} + (1+i)^{mn-1/m}\right]$$

Aplicando la fórmula de una progresión geométrica de razón $(1+i)^{1/m}$.

$$S= \frac{1}{p}\left[\frac{1-(1+i)^{mn}}{1-(1+i)^{1/m}}\right]$$

multiplicando por (-1)

$$S= \frac{1}{p}\left[\frac{(1+i)^{mn}-1}{(1+i)^{1/m}-1}\right]$$

multiplicando y dividiendo el denominador por m se tiene.

$$S= \frac{1}{p}\left[\frac{(1+i)^{mn}-1}{m\left(\frac{(1+i)^{1/m}-1}{m}\right)}\right]$$

$$S = \frac{1}{p}\left[\frac{(1+i)^{mn} - 1}{\frac{i^{(m)}}{m}}\right]$$

$$S = \frac{1}{p}\left[\frac{(1+i)^{mn} - 1}{i'}\right]$$

$$S = \frac{1}{p} \; S_{\overline{mn}|\, i'}$$

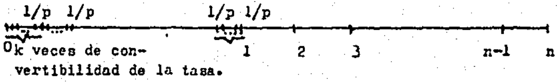
ahora para cualquier renta anual Ra.

$$S = \frac{Ra}{p} \; S_{\overline{mn}|\, i'}$$

donde $i' = \frac{i^{(m)}}{m}$

MONTO DE UNA ANUALIDAD CUANDO $m > p$

En este caso de monto encontraremos un pago "X" el cual se podría efectuar coincidiendo con la convertibilidad de la tasa.



$$X \left[(1+i')^{k-1} + (1+i')^{k-2} + \ldots + (1+i') + 1 \right] = \frac{1}{p} \qquad \frac{m}{p} = k \text{ veces de convertibilidad}$$

$$X \left[1 + (1+i') + (1+i')^{2} + \ldots + (1+i')^{k-2} + (1+i')^{k-1} \right] = \frac{1}{p}$$

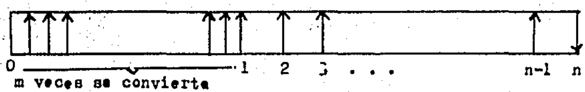
Como se observa la parte que esta dentro del paréntesis es el desarrollo de un monto de K elementos.

$$X \, S_{\overline{k}|i'} = \frac{1}{p}$$ despejando "X" se tiene:

$$X = \frac{1}{p} \, \frac{1}{S_{\overline{k}|i'}}$$

Entonces el pago X encontrado si coincide con la convertibilidad de la tasa de interés durante mn períodos, a continuación se encontrará el monto de los mn pagos.

Van a ser mn pagos, porque m veces se convierte la tasa de interés en un año y como son n años entonces el monto va a ser de mn pagos.



m veces se convierte
la tasa al año.

$$S_{\overline{n}|i} = X(1+i)^{mn-1/m} + X(1+i)^{mn-2/m} + \ldots + X(1+i)^{mn-1} + X(1+i)^{mn-(m+1/m)}$$

$$+ \ldots + X(1+i)^{mn-2} + \ldots + X(1+i)^{\frac{m}{m}-1} + X(1+i)^{1-1/m} + X(1+i)^{1-2/m} +$$

$$+ \ldots + X(1+i)^{2/m} + X(1+i)^{1/m} + X$$

Factorizando el término X e invirtiendo el orden de los sumandos se tiene:

$$S_{\overline{n}|i} = X\Big[1 + (1+i)^{1/m} + (1+i)^{2/m} + \ldots + (1+i)^{\frac{m}{m}-1} + (1+i)^{m+1/m}$$

$$+ \ldots + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^3 + \ldots + (1+i)^{mn-1} + \ldots +$$

$$(1+i)^{mn-2/m} + (1+i)^{mn-1/m}\Big]$$

Como se observa es una progresión geométrica de razón $(1+i)^{1/m}$ y aplicando la fórmula tenemos:

$$S_{\overline{n}|i} = X\left[\frac{1-(1+i)^{mn}}{1-(1+i)^{1/m}}\right]$$

multiplicando por (-1).
multiplicando y dividiendo por m el denominador.

$$= X\left[\frac{(1+i)^{mn}-1}{m\,\dfrac{\left[(1+i)^{1/m}-1\right]}{m}}\right]$$

$$S_{\overline{n}|i} = X \left[\frac{(1+i)^{mn} - 1}{\frac{i^{(m)}}{m}} \right]$$

$$S_{\overline{n}|i} = X \left[\frac{(1+i)^{mn} - 1}{i'} \right] \qquad \text{donde} \quad i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

$$S_{\overline{n}|i} = X \; S_{\overline{mn}|i'}$$

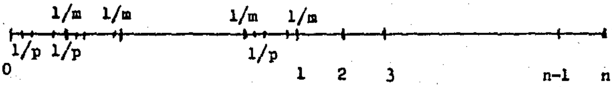
Sustituyendo el valor de X y para cualquier renta anual Ra tenemos:

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{Ra}{p} \; \frac{1}{S_{\overline{k}|i'}} \; S_{\overline{mn}|i'}$$

MONTO DE UNA ANUALIDAD CUANDO $p > m$

También se supondrá que $\dfrac{p}{m} = K$ (entero)

Se encontrará un pago "X" que sea igual a los pagos que se hacen en cada convertibilidad de la tasa de interés.



$$X = \frac{1}{p}(1+i)^{1-1/k} + \frac{1}{p}(1+i)^{1-2/k} + \ldots + \frac{1}{p}(1+i)^{1/k} + \frac{1}{p}$$

$$= \frac{1}{p}\left[1 + (1+i)^{1/k} + (1+i)^{2/k} + \ldots + (1+i)^{1-2/k} + (1+i)^{1-1/k}\right]$$

Por ser una progresión geométrica tenemos que:

$$= \frac{1}{p}\left[\frac{1-(1+i)^{k/k}}{1-(1+i)^{1/k}}\right] = \frac{1}{p}\left[\frac{-i}{1-(1+i)^{1/k}}\right]$$ pero como $p = mk$

$$X = \frac{1}{m}\left[\frac{-i}{k\left[1-(1+i)^{1/k}\right]}\right]$$

Multiplicando por (-1) numerador y denominador tenemos:

$$X = \frac{1}{m} \left[\frac{i}{k\left[(1+i)^{1/k} - 1\right]} \right]$$

$$X = \frac{1}{m} \quad \frac{i}{i^{(k)}}$$

Ahora el pago "X" que se encontró es el que se realiza cada período de convertibilidad de la tasa de interés y en un año "m" veces se convierte la tasa durante "n" años entonces el número de pagos totales es de "mn" por lo que se tiene entonces que el monto es:

$$S^{(p)}_{\overline{n|}\,i'} = Ra \frac{1}{m} \quad \frac{i'}{i'^{(k)}} \quad S_{\overline{mn|}\,i'} \qquad \text{donde } i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

A continuación se hará el desarrollo para encontrar el monto de "mn" pagos pero ahora cuando el pago "X" si coincide con la converti - bilidad de la tasa de interés:

$$\underbrace{0 \quad \cdots \quad 1}_{m \text{ veces de convertibilidad de la tasa en un año.}} \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad n-1 \quad n$$

$$S_{\overline{n}|i} = X(1+i)^{mn-1/m} + X(1+i)^{mn-2/m} + \cdots + X(1+i)^{mn-1} + \cdots + X(1+i)^{mn-2} + \cdots + X(1+i)^{\frac{m-1}{m}} + X(1+i)^{1-1/m} + X(1+i)^{1-2/m} + \cdots + X(1+i)^{2/m} + X(1+i)^{1/m} + X$$

Factorizando "X" e invirtiendo el orden de los sumandos se tiene

$$S_{\overline{n}|i} = X\left[1 + (1+i)^{1/m} + (1+i)^{2/m} + \cdots + (1+i)^{1-2/m} + (1+i)^{1-1/m} + (1+i)^{\frac{m-1}{m}} + \cdots + (1+i)^{2} + (1+i)^{2+1/m} + \cdots + (1+i)^{mn-2} + \cdots + (1+i)^{mn-1} + \cdots + (1+i)^{mn-2/m} + (1+i)^{mn-1/m}\right]$$

Como se observa los sumandos son elementos de una progresión geométrica de razón $(1+i)^{1/m}$ y aplicando la fórmula de una progresión tenemos:

$$S_{\overline{n}|i} = X\left[\frac{1-(1+i)^{mn}}{1-(1+i)^{1/m}}\right]$$

Multiplicando por (-1) y multiplicando y dividiendo por m el denominador.

$$= X\left[\frac{(1+i)^{mn}-1}{m\frac{\left((1+i)^{1/m}-1\right)}{m}}\right] = X\left[\frac{(1+i)^{mn}-1}{\frac{i^{(m)}}{m}}\right] = X\left[\frac{(1+i)^{mn}-1}{i'}\right]$$

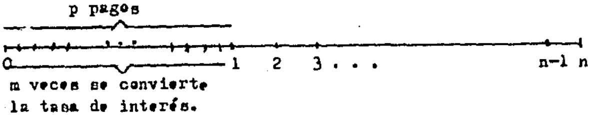
$$S_{\overline{n}|i} = X\, S_{\overline{mn}|i'}$$

Sustituyendo el valor de "X" y para cualquier renta anual "Ra" se tiene:

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{Ra}{m} \frac{i'}{i^{(k)}} S_{\overline{mn}|i'}$$

4o. caso, cuando $\frac{m}{p} \neq k$ (k es entero)

Valor presente de una anualidad en donde no coincide la frecuencia de los pagos con la convertibilidad de la tasa de interés.



Se obtendrá el valor presente de esta anualidad , como en el caso de - una anualidad con pagos p-veces al año y una tasa anual efectiva, después se hará el cambio de la tasa efectiva por una nominal convertible m veces al año utilizando la triple igualdad.

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{p} v^{1/p} + \frac{1}{p} v^{2/p} + \dots + \frac{1}{p} v^{\frac{p-1}{p}} + \frac{1}{p} v^{1+1/p} + \dots + \frac{1}{p} v^{2}$$
$$+ \frac{1}{p} v^{2+1/p} + \dots + \frac{1}{p} v^{n-1/p} + \frac{1}{p} v^{np/p}$$

Factorizando el término $\frac{1}{p} v^{1/p}$ se tiene:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{p} v^{1/p} \Big[1 + v^{1/p} + v^{2/p} + \dots + v^{1-1/p} + v^{1} + \dots +$$
$$v^{2} + v^{2+1/p} + \dots + v^{n-2/p} + v^{n-1/p} \Big]$$

Utilizando la fórmula de una progresión geométrica de razón $V^{1/p}$.

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{p} V^{1/p} \left[\frac{1 - V^{n}}{1 - V^{1/p}} \right] \frac{(1+i)^{1/p}}{(1+i)^{1/p}}$$

Multiplicando y dividiendo por $(1+i)^{1/p}$

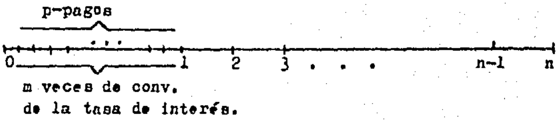
$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{p} \left[\frac{1 - V^{n}}{(1+i)^{1/p} - 1} \right]$$

Por la triple igualdad sabemos que $(1+i) = (1+\frac{i^{(m)}}{m})^{m}$ entonces sustituyendo a $(1+i)$ en la ecuación anterior se tiene:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1 + \frac{i^{(m)}}{m})^{-mn}}{p\left[(1 + \frac{i^{(m)}}{m})^{\frac{m}{p}} - 1\right]}$$

Ecuación del valor presente cuando $\frac{m}{p} \neq k$ donde K es entero.

MONTO de una anualidad donde no coincide la frecuencia de los pagos con la convertibilidad de la tasa.



$$S^{(p)}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{p}(1+i)^{n-1/p} + \frac{i}{p}(1+i)^{n-2/p} + \ldots + \frac{1}{p}(1+i)^{n-\left(\frac{p-1}{p}\right)} + \ldots$$

$$\frac{1}{p}(1+i)^{n-2} + \ldots + 1\,\frac{1}{p}(1+i)^{n-3} + \ldots + \frac{1}{p}(1+i)^{1} +$$

$$\frac{1}{p}(1+i)^{1-1/p} + \frac{1}{p}(1+i)^{1-2/p} + \ldots + \frac{1}{p}(1+i)^{1/p} + \frac{1}{p}.$$

Factorizando $\frac{1}{p}$ e invirtiendo el orden de los sumandos se tiene:

$$S^{(p)}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{p}\Big[1 + (1+i)^{1/p} + (1+i)^{2/p} + \ldots + (1+i)^{1-2/p} + (1+i)^{1-1/p}$$

$$+ (1+i)^{1} + \ldots + (1+i)^{2} + \ldots + (1+i)^{n-2} + \ldots +$$

$$(1+i)^{n-1} + \ldots + (1+i)^{n-2/p} + (1+i)^{n-1/p}\Big]$$

Utilizando la fórmula de una progresión geométrica de razón $(1+i)^{1/p}$ se tiene:

$$S_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{1}{p}\left[\frac{1-(1+i)^{n}}{1-(1+i)^{1/p}}\right]$$ Multiplicando por (-1) numerador y denominador

$$S_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{1}{p}\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{1/p}-1}\right]$$

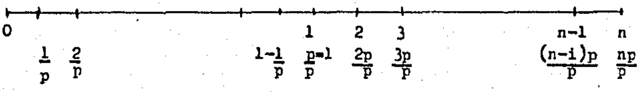
Por la triple igualdad sabemos que $(1+i) = (1+\frac{i^{(m)}}{m})^{m}$ entonces sustituyendo a (1+i) en la ecuación anterior se tiene:

$$S_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{mn}-1}{p\left[(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{\frac{m}{p}}-1\right]}$$

Monto de una anualidad cuando $\frac{m}{p} \neq k$ donde k es entero.

4.- ANUALIDADES PAGADERAS P-VECES AL AÑO.

Primero se analizará una anualidad en la que la tasa de interés es — anual efectiva y el pago unitario pagadero p-veces al año, en donde cada p-ésimo se dará una renta de $\frac{1}{p}$. La nomenclatura que se utilizará para representar una anualidad será: $a^{(p)}_{\overline{n}|i}$



Primero obtendremos el valor presente de la anualidad como sigue:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{p} v^{1/p} + \frac{1}{p} v^{2/p} + \ldots + \frac{1}{p} v^{1-1/p} + \frac{1}{p} v^{p/p=1} + \frac{1}{p} v^{1+1/p} + \frac{1}{p} v^{1+2/p}$$
$$+ \ldots + \frac{1}{p} v^{2p/p} + \ldots + \frac{1}{p} v^{np/p}$$

Utilizando la fórmula de una progresión geométrica y factorizando $\frac{1}{p} v^{1/p}$:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{p} v^{1/p} \left[1 + v^{1/p} + \ldots + v^{p/p=1} + v^{1+1/p} + v^{1+2/p} + \ldots + v^{2} + \ldots + v^{n-1} + \ldots + v^{n-1/p} \right]$$

$$= \frac{1}{p} v^{1/p} \left[\frac{1 - v^{n}}{1 - v^{1/p}} \right] \frac{(1+i)^{1/p}}{(1+i)^{1/p}}$$

donde la razón es $v^{1/p}$ multiplicando y dividiendo por $(1+i)^{1/p}$

$$= \frac{1}{p} \left[\frac{1 - v^{n}}{(1+i)^{1/p} - 1} \right] = \frac{1 - v^{n}}{i^{(p)}}$$

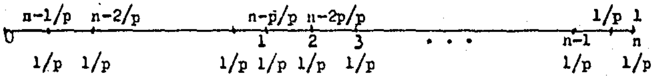
porque $p \left[(1+i)^{1/p} - 1 \right] = i^{(p)}$

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i} = \frac{1 - v^{n}}{i} \; \frac{i}{i^{(p)}}$$

multiplicando y dividiendo por i.

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i} = \frac{i}{i^{(p)}} a^{(p)}_{\overline{n}|i}$$

MONTO DE UNA ANUALIDAD CON UNA TASA DE INTERES EFECTIVA, RENTA ANUAL UNITARIA PAGADERA P-VECES AL AÑO.



$$s_{\overline{n}|i} = \frac{1}{p}(1+i)^{n-1/p} + \frac{1}{p}(1+i)^{n-2/p} + \frac{1}{p}(1+i)^{n-3/p} + \dots + \frac{1}{p}(1+i)^{2/p} + \frac{1}{p}(1+i)^{1/p} + \frac{1}{p}$$

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{1}{p}\left[1 + (1+i)^{1/p} + (1+i)^{2/p} + \dots + (1+i)^{n-2/p} + (1+i)^{n-1/p}\right]$$

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{1}{p}\left[\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)^{1/p}}\right] = \frac{1}{p}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/p} - 1}\right]$$ multiplicando y dividiendo por i .

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \; \frac{i}{p\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]} = \frac{i}{i^{(p)}}\, s^{(p)}_{\overline{n}|i}$$

Por lo tanto para cualquier renta anual, solo se multiplica por la — anualidad como sigue:

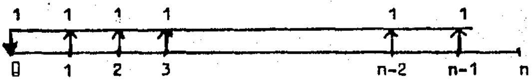
$$S = Ra \; \frac{i}{i^{(p)}} \; s^{(p)}_{\overline{n}|i}$$

5.- ANUALIDADES ANTICIPADAS

Anteriormente se vió el caso de anualidades ordinarias, ahora se veran las anualidades anticipadas, éstas consisten en dar el primer pago en el momento de hacer el trato como es en el caso de las primas de seguros, rentas pagadas por anticipado, intereses pagados por anticipado etc.

A continuación encontraremos la fórmula de una anualidad unitaria anticipada durante n años con un interés anual "i" .

Denotaremos una anualidad anticipada como $\ddot{a}_{\overline{n|}i}$



$$\ddot{a}_{\overline{n|}i} = 1 + V^1 + V^2 + V^3 + \dots + V^{n-2} + V^{n-1}$$

Usando la fórmula de una progresión geométrica de razón $V = \frac{1}{(1+i)}$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}i} = 1 + V\,(1 + V + V^2 + \dots + V^{n-3} + V^{n-2})$$

$$= 1 + V \left[\frac{1 - V^{n-1}}{1 - V} \right] \frac{(1+i)}{(1+i)}$$

multiplicando y dividiendo por (1+i).

$$= 1 + \left[\frac{1 - v^{n-1}}{(\cancel{1}+i) - \cancel{1}} \right]$$

$$= 1 + \left[\frac{1 - v^{n-1}}{i} \right]$$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}i} = 1 + a_{\overline{n-1|}i}$$

Otra forma de una anualidad anticipada es:

$$a_{\overline{n|}i} = v + v^2 + v^3 + \ . \ . \ . + v^{n-1} + v^n$$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}i} = 1 + v + v^2 + v^3 + \ . \ . \ . + v^{n-1}$$

Multiplicando por " V " la segunda igualdad tenemos que:

$$v\,\ddot{a}_{\overline{n|}i} = v + v^2 + v^3 + v^4 + \ . \ . \ . + v^n$$

$$v\,\ddot{a}_{\overline{n|}i} = a_{\overline{n|}i}$$

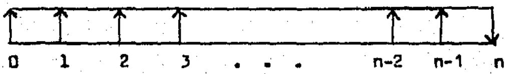
$$\ddot{a}_{\overline{n|}i} = (1+i)\, a_{\overline{n|}i}$$

Teniendo una renta cualquiera Ra solo basta multiplicar la anualidad por la renta.

$$A = Ra\ \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

MONTO DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA

Ahora encontraremos el monto de una anualidad anticipada gráficamente como sigue, valuado en el año "n".



$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n$$

$$= (1+i)\left[1 + (1+i) + \ldots + (1+i)^{n-1}\right]$$

$$= (1+i)\left[\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}\right]$$

$$= (1+i)\left[\frac{1-(1+i)^n}{-i}\right]$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = (1+i)\, s_{\overline{n}|i}$$

Comparando un monto ordinario con un monto anticipado se observa lo siguiente:

1) $S_{\overline{n|}\, i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}$

2) $\ddot{S}_{\overline{n|}\, i} = (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n$

Agregando una unidad en ambos miembros de la expresión (2) tenemos:

$$\ddot{S}_{\overline{n|}\, i} + 1 = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n$$

Donde la parte derecha de la expresión representa un monto de n+1 años.

$$\ddot{S}_{\overline{n|}\, i} + 1 = S_{\overline{n+1|}\, i}$$

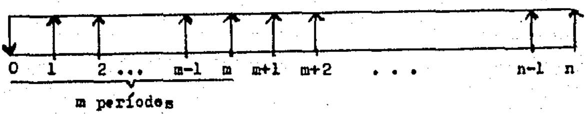
$$\ddot{S}_{\overline{n|}\, i} = S_{\overline{n+1|}\, i} - 1$$

Esto viene siendo otra expresión de un monto anticipado.

6.- ANUALIDADES DIFERIDAS

Una anualidad diferida es cuando se establece que se debe hacer el primer pago después de cierto tiempo o períodos.

Calcularemos a continuación el valor presente de una anualidad unitaria pagadera en "n" años con una tasa de interés "i" anual efectiva, dando el primer pago en "m+1" años o períodos.



$$m/a_{\overline{n}|i} = v^{m+1} + v^{m+2} + \ldots + v^{m+(n-1)} + v^{m+n}$$

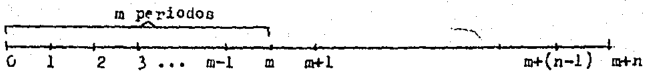
$$= v^m \left[\underbrace{v^1 + v^2 + \ldots + v^{n-1} + v^n}_{a_{\overline{n}|i}} \right]$$

$$m/a_{\overline{n}|i} = v^m \, a_{\overline{n}|i}$$

Ahora si la renta no es unitaria basta multiplicar la anualidad anterior por una renta "Ra" determinada como sigue:

$$A = Ra \; m/a_{\overline{n}|i}$$

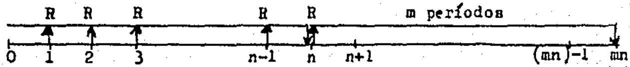
Otra forma de una anualidad sería suponer que se dan anualidades durante los m+n años y se resta la anualidad de "m" períodos los cuales son los que no se efectúan.



$$
{}_{m/}a_{\overline{n}|i} = v^1 + v^2 + v^3 + \ldots + v^m + v^{m+1} + \ldots + v^{m+(n-1)} + v^{m+n}
$$
$$
- \left[v^1 + v^2 + v^3 + \ldots + v^{m-1} + v^m \right]
$$
$$
= a_{\overline{m+n}|\,i} - a_{\overline{m}|\,i}
$$

MONTO DE UNA ANUALIDAD DIFERIDA

El monto diferido se utiliza cuando se hacen durante cierto tiempo pagos periódicos o que se tenga alguna cantidad de dinero y se -- deja que gane un interés "i" durante "m" años y si se quiere saber que cantidad se tendrá al final de esos m+n años, se utilizará el monto diferido.



$$S_{\overline{n|}i} = \left[R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \dots + R(1+i) + R \right] (1+i)^m$$

$$= R\left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i) + 1 \right] (1+i)^m$$

$$= R\left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} \right] (1+i)^m$$

Aplicando la fórmula de una progresión aritmética de razón (1+i) - tenemos que:

$$S_{\overline{n|}i} = R\left[\frac{1 - (1+i)^n}{\cancel{1} - (\cancel{1}+i)} \right] (1+i)^m$$

$$= R\left[\frac{1 - (1+i)^n}{-i} \right] (1+i)^m \; \frac{(-1)}{(-1)}$$ Multiplicando por (-1) numerador y denominador

$$= R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] (1+i)^m$$

$${}^{m}S_{\overline{n}|\,i} = R \; S_{\overline{n}|\,i} \; (1+i)^m$$ Monto de n pagos diferido m años con una renta R y una tasa de interés i.

7.- PERPETUIDADES

Una perpetuidad es una anualidad por tiempo indefinido y la designaremos como a_{∞} con una tasa de interés "i", éstas perpetuidades son usadas en la renta de acciones etc.

Para encontrar el valor presente partiremos de una anualidad ordinaria.

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - V_i^n}{i}$$

Pero como el tiempo "n" es indefinido entonces cuando más grande es "n" se tiene lo siguiente:

$$V_i^n = \frac{1}{(1+i)^n} \quad \longrightarrow 0 \quad \longrightarrow \infty$$

Conforme "n" sea cada vez más grande el denominador de la anterior expresión tiende a ∞ y $\frac{1}{\infty}$ se va haciendo cada vez más pequeno hasta llegar el momento de anularse o llegar a cero.

Entonces:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - V_i^n}{i} \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

nos queda

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{i} \qquad \text{en el caso de renta unitaria.}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{Ra}{i} \qquad \text{para cualquier renta "Ra".}$$

8.- ANUALIDADES CRECIENTES EN PROGRESION ARITMETICA

En ocasiones existen anualidades en las cuales los pagos no son iguales y van variando crecientemente llevando una cierta relación, a éstas anualidades se les llama crecientes a continuación encontraremos el valor presente de estas anualidades donde el primer término le llamaremos "P" y la relación o razón que existe entre cada pago le llamaremos "Q" durante "n" años.

	P	P+Q	P+2Q		P+(n-2)Q	P+(n-1)Q	
0	1	2	3	. . .	n-2	n-1	n

Obteniendo el valor presente de los pagos se tiene:

$$(1) \qquad X = VP + V^2(P+Q) + V^3(P+2Q) + \ldots + V^{n-1}(P+(n-2)Q) + V^n(P+(n-1)Q)$$

Multiplicando por (1+i) la ecuación (1) tenemos:

$$(1+i)X = P + V(P+Q) + V^2(p+2Q) + \ldots + V^{n-2}(P+(n-2)Q) + V^{n-1}(P+(n-1)Q)$$

Restando (2) - (1) tenemos:

$$iX = P + QV + QV^2 + QV^3 + \ldots + QV^{n-1} - \left[V^n(P+ (n-1)Q\right]$$

$$= P + Q(V + V^2 + V^3 + \ldots + V^{n-1}) - V^nP - V^nQn + V^nQ$$

$$= P + Q(\underbrace{V + V^2 + V^3 + \ldots + V^{n-1} + V^n}_{a_{\overline{n}|i}}) - V^nP - V^nQn$$

$$iX = P + Q\,a_{\overline{n}|i} - V^nP - V^nQn \qquad \text{Factorizando P}$$

$$= P(1 - V^n) + Q\,a_{\overline{n}|i} - nQV^n \qquad \text{dividiendo entre i}$$

$$X = P\left(\frac{1-v^n}{i}\right) + \frac{Q\,a_{\overline{n}|i} - nQv^n}{i}$$

Por lo tanto una anualidad creciente queda como:

$$X = P\,a_{\overline{n}|i} + Q\,\frac{a_{\overline{n}|i} - n\,v^n}{i}$$

En particular cuando $P = Q = 1$

$$(I\,a_{\overline{n}|i}) = a_{\overline{n}|i} + \frac{a_{\overline{n}|i} - n\,v^n}{i}$$

$$= \frac{i\,a_{\overline{n}|i} + a_{\overline{n}|i} - n\,v^n}{i}$$

$$= \frac{i\left(\frac{1-v^n}{i}\right) + a_{\overline{n}|i} - n\,v^n}{i}$$

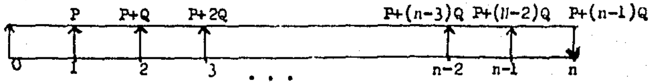
$$= \frac{1 - v^n + a_{\overline{n}|i} - n\,v^n}{i}$$ desarrollando $a_{\overline{n}|i}$

$$= \frac{1-\cancel{v^n} + (v + v^2 + \ldots + \cancel{v^n}) - n\,v^n}{i}$$

$$= \frac{1 + \overbrace{(v + v^2 + \ldots + v^{n-1})}^{a_{\overline{n}|i}} - n\,v^n}{i}$$

$$(I\,a_{\overline{n}|i}) = \frac{a_{\overline{n-1}|i} + 1 - n\,v^n}{i}$$

MONTO DE UNA ANUALIDAD CRECIENTE EN PROGRESION ARITMETICA.



(1) $$Y = P(1+i)^{n-1} + (P+Q)(1+i)^{n-2} + \ldots + \left[P+(n-2)Q\right](1+i) + \left[P+(n-1)Q\right]$$

Multiplicando por (1+i) tenemos:

(2) $$(1+i)Y = P(1+i)^{n} + (P+Q)(1+i)^{n-1} + \ldots + \left[P+(n-2)Q\right](1+i)^{2} + \left[P+(n-1)Q\right](1+i)$$

Restando las ecuaciones (2) - (1)

$$iY = P(1+i)^{n} + Q(1+i)^{n-1} + \ldots + Q(1+i) - \left[P+(n-1)Q\right]$$

$$= P(1+i)^{n} + Q\left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i)\right] - P - nQ + Q$$

$$= P\left[(1+i)^{n} - 1\right] + Q\left[\underbrace{(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i) + 1}_{S_{\overline{n|}i}}\right] - nQ$$

$$= P\left[(1+i) - 1\right] + Q\left[S_{\overline{n|}i} - n\right]$$

Dividiendo entre i tenemos:

$$Y = P\left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}\right] + Q\left[\frac{S_{\overline{n|}i} - n}{i}\right]$$

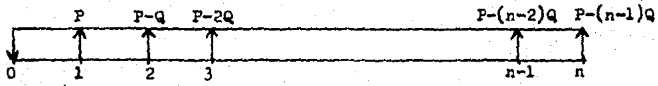
Por lo tanto la fórmula de una anualidad creciente en progresión — aritmetica es:

$$Y = P\,S_{\overline{n|}i} + Q\left[\frac{S_{\overline{n|}i} - n}{i}\right]$$

9.- VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD DECRECIENTE EN PROGRESION ARITMETICA.

También existen anualidades en las cuales los pagos son diferentes entre si en forma decreciente, pero existe una relación aritmética entre ellos.

A continuación se encontrará el valor presente de una anualidad decreciente en forma aritmética en donde el primer término es P y la relación es Q.



(1) $$X = PV + (P-Q)V^2 + (P-2Q)V^3 + \dots + \left[P-(n-2)Q\right]V^{n-1} + \left[P-(n-1)Q\right]V^n$$

Multiplicando por (1+i) la ecuación (1) tenemos:

(2) $$(1+i)X = P + (P-Q)V + (P-2Q)V^2 + \dots + \left[P-(n-2)Q\right]V^{n-2} + \left[P-(n-1)Q\right]V^{n-1}$$

Restando la ecuación (2)- (1)

$$iX = P - QV - QV^2 - QV^3 - \dots - QV^{n-1} - \left[P-(n-1)Q\right] V^n$$

$$= P - QV - QV^2 - QV^3 - \dots - QV^{n-1} - PV^n + nQV^n - QV^n$$

Agrupando los términos comunes se tiene:

$$= P(1-V^n) - Q \underbrace{\left[V + V^2 + V^3 + \dots + V^n\right]}_{a_{\overline{n}|i}} + nQV^n$$

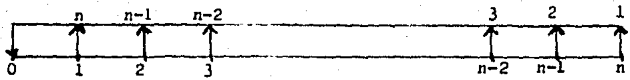
$$X = P\left(\frac{1-V^n}{i}\right) - \frac{Q a_{\overline{n}|i} + nQV^n}{i}$$

Factorizando Q :

$$X = P\, a_{\overline{n|}\, i} - Q \left[\frac{a_{\overline{n|}\, i} - nV^n}{i} \right]$$

La fórmula encontrada es el valor presente de una anualidad decreciente en progresión aritmética, donde P es el pago inicial y Q la razón con la que va a decrecer la anualidad durante n años, a una tasa de interés i .

Un caso particular es cuando la anualidad tiene $P=n$ y $Q=-1$ entonces se trata de una anualidad decreciente, quedando la fórmula como sigue:



$$(1) \qquad X = nV + (n-1\ V^2 + (n-2)V^3 + \ldots + 3V^{n-2} + 2V^{n-1} + V^n$$

Multiplicando por $(1+i)$ la ecuación (1) se tiene:

$$(2)\ (1+i)X = n + (n-1)V + (n-2)V^2 + \ldots + 3V^{n-3} + 2V^{n-2} + V^{n-1}$$

Restando la ecuación (2) - (1):

$$iX = n - V - V^2 - \ldots - V^{n-2} - V^{n-1} - V^n$$

$$= n - (\underbrace{V + V^2 + \ldots + V^{n-2} + V^{n-1} + V^n}_{a_{\overline{n|}\, i}})$$

$$iX = n - a_{\overline{n|}\, i} \Longrightarrow X = \frac{n - a_{\overline{n|}\, i}}{i}$$

$$D\, a_{\overline{n|}\, i} = \frac{n - a_{\overline{n|}\, i}}{i}$$

También se podría haber obtenido este resultado sustituyendo en la fórumula de una anualidad creciente los valores de P=n y Q=-1 como sigue:

Fórmula de una anualidad creciente en forma aritmética.

$$X = P\,a_{\overline{n|}i} + Q\left[\frac{a_{\overline{n|}i} - n\,v^{n}}{i}\right]$$

Sustituyendo P=n y Q=-1

$$X = n\,a_{\overline{n|}i} + (-1)\left[\frac{a_{\overline{n|}i} - n\,v^{n}}{i}\right]$$

$$= \frac{i\,n\,a_{\overline{n|}i} - a_{\overline{n|}i} + n v^{n}}{i}$$

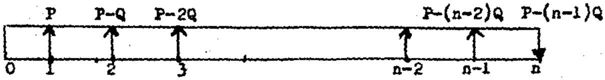
$$= \frac{\cancel{i}\,n\left[\frac{1 - v^{n}}{\cancel{i}}\right] - a_{\overline{n|}i} + n\,v^{n}}{i}$$

$$= \frac{n - \cancel{n v^{n}} - a_{\overline{n|}i} + \cancel{n v^{n}}}{i}$$

$$\therefore D\,a_{\overline{n|}i} = \frac{n - a_{\overline{n|}i}}{i}$$

Fórmula de una anualidad decreciente cuando P=n y Q= -1.

MONTO DE UNA ANUALIDAD DECRECIENTE EN PROGRESION ARITMETICA



$$(1) \qquad Y = P(1+i)^{n-1} + (P-Q)(1+i)^{n-2} + \dots + \left[P-(n-2)Q\right](1+i) + P-(n-1)Q$$

Multiplicando por (1+i) la ecuación (1):

$$(2) \quad (1+i)Y = P(1+i)^{n} + (P-Q)(1+i)^{n-1} + \dots + \left[P-(n-2)Q\right](1+i)^{2} + \left[P-(n-1)Q\right](1+i)$$

Restando la ecuación (2) - (1) tenemos:

$$iY = P(1+i)^{n} - Q(1+i)^{n-1} - Q(1+i)^{n-2} - \dots - Q(1+i) - \left[P-(n-1)Q\right]$$

$$iY = P(1+i)^{n} - Q(1+i)^{n-1} - Q(1+i)^{n-2} - \dots - Q(1+i) - P + nQ - Q$$

Agrupando los terminos de P y factorizando a Q:

$$iY = P\left((1+i)^{n} - 1\right) - Q\left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i) + 1\right] + nQ$$

Dividiendo entre i tenemos:

$$Y = P\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right] - Q\left[\frac{S_{\overline{n|}\,i} - n}{i}\right]$$

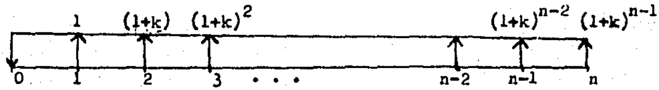
$$Y = P\,S_{\overline{n|}\,i} - Q\,\frac{S_{\overline{n|}\,i} - n}{i}$$

Fórmula de una anualidad aritmética decreciente.

10.- ANUALIDADES CRECIENTES EN FORMA GEOMETRICA

Los casos anteriores fueron utilizando anualidades crecientes y decrecientes en forma aritmética, ahora veremos el caso en el que la anualidad varía en forma geométrica.

Valor presente de una anualidad en forma geométrica.



$$X = 1(1+i)^{-1} + (1+k)(1+i)^{-2} + (1+k)^{2}(1+i)^{3} + \ldots + (1+k)^{n-3}(1+i)^{-(n-2)}$$

$$+ (1+k)^{n-2}(1+i)^{-(n-1)} + (1+k)^{n-1}(1+i)^{-n}$$

$$= V + (1+k)V^{2} + (1+k)^{2}V^{3} + \ldots + (1+k)^{n-3}V^{n-2} + (1+k)^{n-2}V^{n-1} +$$

$$+ (1+k)^{n-1}V^{n}$$

Factorizando el término V se tiene:

$$= V\left[1 + (1+k)V + (1+k)^{2}V^{2} + \ldots + (1+k)^{n-3}V^{n-3} + (1+k)^{n-2}V^{n-2} +\right.$$

$$\left.+ (1+k)^{n-1}V^{n-1}\right]$$

Utilizando la fórmula de una progresión geométrica de razón — $(1+k)V$ obtenemos:

$$X = V\left[\frac{1-(1+k)^n\ V^n}{1-(1+k)V}\right]$$ Sustituyendo el valor de $V = \dfrac{1}{(1+i)}$

$$= \frac{1}{(1+i)}\left[\frac{1-\left[\frac{1+k}{(1+i)}\right]^n}{1-\frac{(1+k)}{(1+i)}}\right]$$

$$= \frac{1-\left[\frac{(1+k)}{(1+i)}\right]^n}{(1+i)-\frac{\cancel{(1+i)}(1+k)}{\cancel{(1+i)}}}$$

$$= \frac{1-\left[\frac{1+k}{1+i}\right]^n}{(\cancel{1}+i)-(\cancel{1}+k)}$$

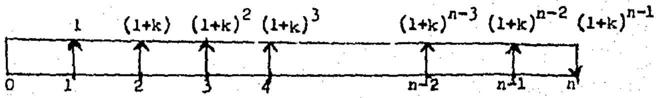
$$= \frac{1-\left[\frac{1+k}{i+1}\right]^n}{i-k}$$

Por lo tanto tenemos la fórmula de una anualidad creciente en forma geométrica.

$$X = \frac{1-\left[\frac{1+k}{1+i}\right]^n}{i-k}$$

MONTO DE UNA ANUALIDAD CRECIENTE EN PROGRESION GEOMETRICA.

A continuación se obtendrá el monto de una anualidad creciente en donde existe una relación geométrica entre los pagos y el primer pago es 1 y la relación es (1+k).



$$S = (1+i)^{n-1} + \left[(1+k)(1+i)^{n-2}\right] + (1+k)^2(1+i)^{n-3} + \cdots +$$

$$+ (1+k)^{n-2}(1+i) + (1+k)^{n-1}$$

$$= (1+i)^{n-1}\left[1 + (1+k)(1+i)^{-1} + (1+k)^2(1+i)^{-2} + \cdots + \right.$$

$$\left. + (1+k)^{n-2}(1+i)^{-n+2} + (1+k)^{n-1}(1+i)^{-n+1}\right]$$

Por ser una progresión geométrica la parte que se encuentra dentro del paréntesis y aplicando la fórmula de una progresión geométrica tenemos que la razón es $(1+k)(1+i)^{-1}$ entonces tenemos:

$$S = (1+i)^{n-1}\left[\frac{1-(1+k)^n(1+i)^{-n}}{1-(1+k)(1+i)^{-1}}\right]$$

$$= (1+i)^{n-1}\left[\frac{1-(1+k)^n(1+i)^{-n}}{1-\frac{(1+k)}{(1+i)}}\right]$$

$$S = (1+i)^{n-1} \left[\frac{1 - (1+k)^n (1+i)^{-n}}{\dfrac{(\cancel{1}+i) - (\cancel{1}+k)}{(1+i)}} \right]$$

$$= (1+i)^{n\cancel{-1}} \left[\frac{\left(1 - (1+k)^n (1+i)^{-n} \right)}{i - k} \right] \cancel{(1+i)}$$

$$= (1+i)^n \left[\frac{1 - (1+k)^n (1+i)^{-n}}{i - k} \right]$$

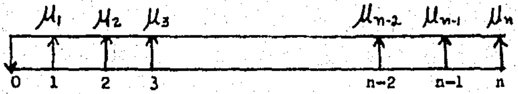
$$S = \frac{(1+i)^n - (1+k)^n}{i - k}$$

Monto de una anualidad creciente en progresión geométrica.

11.- ANUALIDADES VARIABLES

Otro tipo de anualidades son las variables, se llaman así porque los pagos periódicos que se hacen son diferentes y no tienen ninguna relación ni aritmética ni geométrica entre sí.

A continuación se obtendrá el valor presente de una anualidad variable.



$$v\,a_{\overline{n}|i} = v\mu_1 + v^2\mu_2 + v^3\mu_3 + \dots + v^{n-1}\mu_{n-1} + v^n\mu_n$$

Considerando las primeras y segundas diferencias, tomando en cuenta que una diferencia es el resultado de restar los siguientes terminos —

$\Delta\mu_i = \mu_{i+1} - \mu_i$, donde i=1,2,3,... n, en donde n es el número de pagos que se hacen.

A continuación se encontraran las primeras y segundas diferencias graficamente.

GRAFICAMENTE

$$\begin{array}{llll}
\mu_1 & & & \\
 & \Delta\mu_1 = \mu_2 - \mu_1 & & \\
\mu_2 & & \Delta^2\mu_1 = \Delta\mu_2 - \Delta\mu_1 & \\
 & \Delta\mu_2 = \mu_3 - \mu_2 & & \Delta^3\mu_1 = \Delta^2\mu_2 - \Delta^2\mu_1 \\
\mu_3 & & \Delta^2\mu_2 = \Delta\mu_3 - \Delta\mu_2 & \\
 & \Delta\mu_3 = \mu_4 - \mu_3 & & \\
\mu_4 & & & \\
\cdot & & & \\
\cdot & & & \\
\cdot & & & \\
\mu_{n-2} & & & \\
 & \Delta\mu_{n-2} = \mu_{n-1} - \mu_{n-2} & & \\
\mu_{n-1} & & \Delta^2\mu_{n-2} = \Delta\mu_{n-1} - \Delta\mu_{n-2} & \\
 & \Delta\mu_{n-1} = \mu_n - \mu_{n-1} & & \Delta^3\mu_{n-2} = \Delta^2\mu_{n-1} - \Delta^2\mu_{n-2} \\
\mu_n & & \Delta^2\mu_{n-1} = \Delta\mu_n - \Delta\mu_{n-1} & \\
 & \Delta\mu_n = \mu_{n+1} - \mu_n & & \Delta^3\mu_{n-1} = \Delta^2\mu_n - \Delta^2\mu_{n-1} \\
\mu_{n+1} & & \Delta^2\mu_n = \Delta\mu_{n+1} - \Delta\mu_n & \\
 & \Delta\mu_{n+1} = \mu_{n+2} - \mu_{n+1} & & \\
\mu_{n+2} & & &
\end{array}$$

Ahora tomando la primera diferencia:

$\Delta\mu_1 = \mu_2 - \mu_1$ despejando $\mu_2 = \Delta\mu_1 + \mu_1 = \mu_1(\Delta+1)$ (1)

$\Delta\mu_2 = \mu_3 - \mu_2$ despejando $\mu_3 = \Delta\mu_2 + \mu_2 = \mu_2(\Delta+1)$ (2)

$\Delta\mu_3 = \mu_4 - \mu_3$ despejando $\mu_4 = \Delta\mu_3 + \mu_3 = \mu_3(\Delta+1)$ (3)

Sustituyendo $\mu_2 = \mu_1 (\Delta + 1)$ en la ecuación (2)

Tenemos que: $\mu_3 = \mu_2 (\Delta + 1) = \mu_1 (\Delta + 1)(\Delta + 1) = \mu_1 (\Delta + 1)^2$

Por lo tanto: $\mu_3 = \mu_1 (\Delta + 1)^2$

Sustituyendo $\mu_3 = \mu_1 (\Delta + 1)^2$ en la ecuación (3)

Tenemos:

$$\mu_4 = \mu_3 (\Delta + 1) = \mu_1 (\Delta + 1)^2 (\Delta + 1) = \mu_1 (\Delta + 1)^3$$

Haciendo este desarrollo con los demás términos y sustituyendolos en la fórmula para encontrar el valor presente se tiene que:

$$v\, a_{\overline{n}|i} = \mu_1 v + \mu_2 v^2 + \mu_3 v^3 + \ldots + \mu_{n-1} v^{n-1} + \mu_n v^n$$

$$= \mu_1 v + \mu_1 (\Delta + 1) v^2 + \mu_1 (\Delta + 1)^2 v^3 + \ldots +$$

$$\mu_1 (\Delta + 1)^{n-2} v^{n-1} + \mu_1 (\Delta + 1)^{n-1} v^n$$

Tomando a $\mu_1 V$ como factor común.

$$= \mu_1 v \left[1 + (\Delta+1)v + (\Delta+1)^2 v^2 + \ldots + (\Delta+1)^{n-2} v^{n-2} + \right.$$

$$\left. + (\Delta+1)^{n-1} v^{n-1} \right]$$

Por ser una progresión geométrica de razón $(\Delta+1)V$:

$$= \mu_1 v \left[\frac{1 - (\Delta+1)^n v^n}{1 - (\Delta+1)v} \right] \qquad \text{sustituyendo } V = \frac{1}{(1+i)}$$

$$v\, a_{\overline{n}|i} = \mu_1 \left[\frac{1 - v^n}{(\cancel{/}+i)} \frac{(\Delta + 1)^n}{- (\cancel{/}+\Delta)} \right]$$

$$= \mu_1 \left[\frac{1 - v^n (\Delta + 1)^n}{i - \Delta} \right]$$

$$= \frac{\mu_1 - v^n \mu_1 (\Delta + 1)^n}{i - \Delta} \qquad \text{(I)}$$

Pero como sabemos que $\frac{1}{i-\Delta} = (i-\Delta)^{-1}$ y desarrollando por el teorema del binomio se tiene:

$$(i-\Delta)^{-1} = \frac{1}{i} + \frac{\Delta}{i^2} + \frac{\Delta^2}{i^3} + \ldots$$

Ahora sustituyendo $(i-\Delta)^{-1}$ en (I)

$$v\, a_{\overline{n}|i} = \left[\mu_1 - v^n \underbrace{\mu_1 (\Delta + 1)^n}_{\mu_{n+1}} \right] (i-\Delta)^{-1}$$

$$= \frac{\mu_1 - \mu_{n+1} v^n}{i} + \frac{\Delta \mu_1 - \Delta \mu_{n+1} v^n}{i^2} +$$

$$+ \frac{\Delta^2 \mu_1 - \Delta^2 \mu_{n+1} v^n}{i^3} + \ldots$$

La fórmula del valor presente encontrada se aplica a una serie de pagos que no son iguales.

En el caso de una anualidad unitaria, en donde se hacen pagos unitarios por período, y aplicando la fórmula obtenida nos da lo siguiente:

$$v a_{\overline{n|}i} = \frac{1 - v^n}{i}$$

Como se observa los demás terminos son "cero", esto se debe a que las primeras y segundas diferencias son iguales a cero.

Este resultado obtenido nos da el valor presente de una anualidad vencida unitaria pagadera durante n períodos a una tasa i de interés.

$$\frac{1 - v^n}{i} = a_{\overline{n|}i}$$

MONTO DE UNA ANUALIDAD VARIABLE

Partiremos del valor presente de una anualidad variable.

$$v\,a_{\overline{n}|i} = \frac{\mu_1 - \mu_{n+1}v^n}{i} + \frac{\Delta\mu_1 - \Delta\mu_{n+1}v^n}{i^2} + \frac{\Delta^2\mu_1 - \Delta^2\mu_{n+1}v^2}{i^3} + \cdots$$

Por la relación: $s_{\overline{n}|i} = (1+i)^n\, a_{\overline{n}|i}$

Aplicandola tenemos:

$$(1+i)^n\left[v\,a_{\overline{n}|i}\right] = (1+i)^n\left[\frac{\mu_1 - \mu_{n+1}v^n}{i} + \frac{\Delta\mu_1 - \Delta\mu_{n+1}v^n}{i^2} + \frac{\Delta^2\mu_1 - \Delta^2\mu_{n+1}v^n}{i^3}\right]$$

Por lo tanto:

$$v\,s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n\mu_1 - \mu_{n+1}}{i} + \frac{(1+i)^n\Delta\mu_1 - \Delta\mu_{n+1}}{i^2} + \frac{(1+i)^n\Delta^2\mu_1 - \Delta^2\mu_{n+1}}{i^3} + \cdots$$

Como se observa sólo se multiplica por $(1+i)^n$ $(v\,a_{\overline{n}|i})$ y se obtiene el monto de una anualidad variable.

12.- CALCULO DE LA RENTA

Para encontrar la renta por período solo basta despejar en la anualidad ya sea con monto o valor presente como sigue:

$A = R\, a_{\overline{n}|\, i}$ Despejando el término R

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n}|\, i}}$$

$S = R\, S_{\overline{n}|\, i}$ Fórmula del monto.

$$R = \frac{S}{S_{\overline{n}|\, i}}$$ Despejando el término R

Como se observa para encontrar la renta por período sólo basta despejar con simples pasos algebraicos de las fórmulas vistas arriba.

También se puede decir que la renta no solo es anual, puede ser semestral, trimestral, bimestral, etc..

13.- CALCULO DEL TERMINO "n"

Para encontrar el término "n" o sea el número de pagos de la anualidad con la que se esta trabajando, se pueden utilizar dos métodos uno es por logaritmos y el otro utilizando las tablas de monto o valor presente y una ecuación de valor.

A continuación utilizaremos el método de logaritmos para encontrar el tiempo "n".

$$A = R\, a_{\overline{n|}\,i} = R\left(\frac{1 - V^n}{i}\right)$$

En este caso la anualidad es vencida pero puede ser anticipada, diferida o variable.

$$\frac{A}{R} = \frac{1 - V^n}{i}$$

$$i\left(\frac{A}{R}\right) = 1 - V^n$$

$$i\left(\frac{A}{R}\right) - 1 = -V^n$$

Multiplicando por (-1) y sustituyendo $V^n = (1+i)^{-n}$

$$V^n = 1 - i\left(\frac{A}{R}\right)$$

$$(1+i)^{-n} = 1 - i\left(\frac{A}{R}\right)$$

Sacando logaritmo

$$-n \log(1+i) = \log\left[1 - i\left(\frac{A}{R}\right)\right]$$

despejando el valor de "n"

$$n = \frac{\log\left[1 - i\left(\frac{A}{R}\right)\right]}{-\log(1+i)}$$

Donde los valores de A, $a_{\overline{n|}\,i}$, i y R son valores conocidos para poder obtener el logaritmo.

Ahora solo se sustituyen los valores de A, R, i ya que son valores conocidos, se hacen las operaciones elementales de sumas, restas y multiplicaciones de tal manera que se simplifique la ecuación posteriormente se sacan los logaritmos y se obtiene el valor de "n" que viene siendo el número de pagos periódicos de la anualidad.

Ahora si se quiere obtener el tiempo en meses y días a la parte fraccionaria del valor de "n" se multiplica por 12 para obtener el número de meses y para saber el número de días a la parte fraccionaria de donde se obtuvo los meses se multiplica por 30 y así se obtiene el número de días.

El otro método de interpolación consiste en despejar $a_{\overline{n}|\,i}$ o $S_{\overline{n}|\,i}$ de acuerdo al problema que se este manejando por ahora veremos el caso en el que tenemos $S_{\overline{n}|\,i}$.

$S = R\, S_{\overline{n}|\,i}$ despejando $S_{\overline{n}|\,i}$

$S_{\overline{n}|\,i} = \frac{R}{S}$ supongamos que $\frac{R}{S} = X$

$S_{\overline{n}|\,i} = X$ donde X es un valor conocido

Como el valor de X es conocido entonces buscamos en tablas en la columna correspondiente a monto $S_{\overline{n}|\,i}$ con una taca de interés "i" conocida, tal que dicho valor de X sea igual o cercano al valor de $S_{\overline{n}|\,i}$.

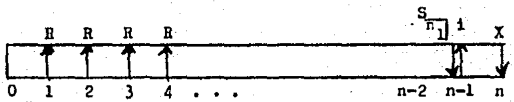
a) Si el valor de tablas es igual a X entonces en el mismo renglón en la columna donde se encuentra el número de períodos "n", veremos a que valor corresponde y ése será el valor que buscamos.

b) En el caso de que el valor en tablas no coincida con el valor de "X", entonces se escoge el valor menor más cercano a "X" que lo llamaremos n_1 y se hace una ecuación de valor como sigue:

$S = R\, S_{\overline{n_1|}\, i}\,(1+i) + X$ despejando "X"

$X = S - R\, S_{\overline{n_1|}\, i}\,(1+i)$ donde "X" va a ser el pago incompleto.

Gráficamente:



$S = R\, S_{\overline{n_1|}\, i}\,(1+i) + X$

Como se observa se van a efectuar n_1 pagos completos y un pago — incompleto de "X" cantidad un período después.

14.- CALCULO DE LA TASA DE INTERES

Uno de los métodos para calcular la tasa de interés "i" es el método de interpolación como a continuación se explica:

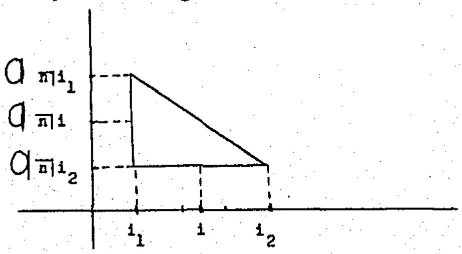
$A = R\, a_{\overline{n}|i}$ despejando $a_{\overline{n}|i}$

$a_{\overline{n}|i} = \frac{A}{R}$ hacemos $\frac{A}{R} = A'$

donde A' es conocida porque conocemos a A y R.

Ahora en las tablas de matemáticas financieras en la columna de las "n" y en el renglón correspondiente a una "n" que conocemos, buscamos un valor igual o cercano en la columna de $a_{\overline{n}|i}$ a A', en el caso de que se encuentre un valor igual a A', entonces nos fijamos a que tasa de interés corresponde.

En el caso de que no coincida el valor de A' con el valor en tablas entonces se toman los valores cercanos a A' uno inferior y otro superior y se interpola de la siguiente manera:



donde $i_1 < i < i_2$

$$\frac{i_2 - i_1}{i - i_1} = \frac{a_{\overline{n}|i_1} - a_{\overline{n}|i_2}}{a_{\overline{n}|i} - a_{\overline{n}|i_2}}$$

$$(i_2 - i_1)\,(a_{\overline{n}|i} - a_{\overline{n}|i_2}) = (i - i_1)\,(a_{\overline{n}|i_1} - a_{\overline{n}|i_2})$$

Despejando "i" :

$$i = \frac{(a_{\overline{n}|i} - a_{\overline{n}|i_2})\,(i_2 - i_1)}{a_{\overline{n}|i_1} - a_{\overline{n}|i_2}} + i_1$$

Así se encuentra el valor de "i", ahora solo basta sustituir los valores de las anualidades a las tasas de interés i_1 , i_2 e i que son valores que sí conocemos.

Cálculo de la tasa de interés "i" pero ahora utilizando el monto.

$S = R\,S_{\overline{n}|i}$ Donde $S_{\overline{n}|i}$ puede ser un monto vencido, anticipado o diferido.

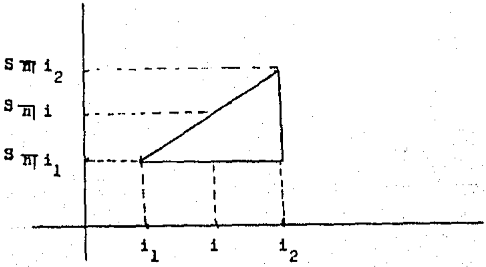
$$S_{\overline{n}|i} = \frac{S}{R}$$

$S_{\overline{n}|i} = S'$ Donde S' es un valor conocido.

Ahora en las tablas de Matemáticas Financieras en la columna de las "n" y en el renglón correspondiente a una "n" que conocemos, buscamos un valor igual o cercano al valor de S' en la columna de $S_{\overline{n}|i}$.

En caso de que se encuentre un valor igual a S´, entonces nos fijamos cual es la tasa de interés correspondiente la cual va a ser la que buscamos.

En caso de que no coincida el valor de S´ con el valor en tablas se toma un valor cercano inferior y otro cercano superior y se interpola de la siguiente forma:



$$\frac{i_2 - i_1}{i_2 - i} = \frac{S_{\overline{n}|i_2} - S_{\overline{n}|i_1}}{S_{\overline{n}|i_2} - S_{\overline{n}|i}}$$ despejando "i" .

$$(i_2 - i_1)(S_{\overline{n}|i_2} - S_{\overline{n}|i}) = (i_2 - i)(S_{\overline{n}|i_2} - S_{\overline{n}|i_1})$$

$$i_2 - i = \frac{(i_2 - i_1)(S_{\overline{n}|i_2} - S_{\overline{n}|i})}{S_{\overline{n}|i_2} - S_{\overline{n}|i_1}}$$

$$i = i_2 - \frac{(i_2 - i_1)(S_{\overline{n}|i_2} - S_{\overline{n}|i})}{S_{\overline{n}|i_2} - S_{\overline{n}|i_1}}$$

2a. P A R T E

Esta segunda parte de la tésis consiste en dar algunas aplicaciones de los conceptos antes vistes con respecto a anualidades ciertas solamente, pués las anualidades contingentes son motivo de otro estudio.

1) Amortización.

2) Fondos de Amortización.

3) Bonos.

AMORTIZACION

En la actualidad una forma de liquidar deudas contraidas ya sea por préstamos en efectivo, hipotecarios, compra de casa, terreno, maquinaria o cualquier otro bien es utilizando el procedimiento de Amortización el cual consiste en ir dando pagos periódicos en donde se va abonando una parte de capital y otra parte de interés hasta quedar liquidada la deuda.

A continuación se esplicará en que consiste el procedimiento de Amortización y la elaboración de una tabla de Amortización en la cual se va a registrar el número de pagos, el pago, que parte del pago corresponde a capital y que parte a interés, el capital insoluto o capital que se debe y el capital total pagado. Sabemos que el valor presente o valor actual de nuestra deuda es:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - V^n}{i}$$

Ahora pasando un tiempo el cual va a ser periódico ya establecido, los intereses que va a generar la deuda son:

$$i\, a_{\overline{n}|i} = i \left(\frac{1 - V^n}{i} \right) = 1 - V^n$$ interés contenido en el pago.

Ahora como la renta o pago periódico va a ser unitario para mayor facilidad, podemos decir que el pago menos el interés contenido en el pago es igual al capital contenido en el pago. Entonces:

$$1 - (1 - V^n) = V^n$$ capital contenido en el pago.

Una vez calculado el capital contenido en el pago, el capital que se adeuda va a ser, la deuda inicial menos el capital pagado que viene siendo:

$$a_{\overline{n|}i} - v^n = (v^1 + v^2 + \ldots + v^{n-1} + v^n) - v^n$$
$$= v^1 + v^2 + v^3 + \ldots + v^{n-1} = a_{\overline{n-1|}i}$$

Este procedimiento se realiza cuantos pagos se hagan, ahora la forma en que se registran los datos obtenidos se le llama tabla de amortización.

A continuación se elaborará una tabla de amortización con pagos unitarios.

No. de pago.	Cap.Insol. al princ.periodo	Interés cont.en el pago.	Capital cont. en el pago.	total de cap.pagado
1	$a_{\overline{n\|}i}=\frac{1-v^n}{i}$	$i\,a_{\overline{n\|}i}=i\left(\frac{1-v^n}{i}\right) = 1-v^n$	$1-(1-v^n)=v^n$	$a_{\overline{n\|}i}-a_{\overline{n-1\|}i} = v^n$
2	$a_{\overline{n\|}i} - v^n = a_{\overline{n-1\|}i}$	$i\,a_{\overline{n-1\|}i} = i\left(\frac{1-v^{n-1}}{i}\right) = 1-v^{n-1}$	$1-(1-v^{n-1}) = v^{n-1}$	$a_{\overline{n\|}i}-a_{\overline{n-2\|}i} = v^n + v^{n-1}$
. .				
t	$a_{\overline{n-(t-1)\|}i}$	$1-v^{n-(t-1)}$	$v^{n-(t-1)}$	$v^n + v^{n-1} + \ldots + v^{n-(t-1)}$
. . .				
n	$a_{\overline{1\|}i} = v$	$1-v$	v	$v^n+v^{n-1}\ldots+v$

FONDO DE AMORTIZACION

Como se sabe los activos fijos tienen depreciaciones año con año, debido al uso de cada uno de ellos, donde el primer año se tiene la mayor depreciación que en los años siguientes por tal motivo se crean fondos de depreciación para que al final de los "n" años de vida probable del activo se tenga la cantidad disponible que se depreció el activo.

A continuación se explicará el método de fondo de amortización que es utilizado con mayor frecuencia que otros métodos.

También se puede ver como si fuera un fondo de ahorro, que si se construye una tabla del fondo de amortización se puede observar el aumento periódico que va teniendo durante el tiempo que se hacen los pagos.

Al final del primer año se tendrá un pago R en el fondo el cual coincidirá con el incremento y el importe del fondo al final del período $R = R S_{\overline{1}|i}$.

Al final del segundo año se tendrá un aumento de interés que viene siendo Ri más el depósito del segundo año R que sumados Ri+R vienen siendo el incremento al fondo y el importe final es el incremento más el importe del año anterior $Ri+R+R = R(1+i)+R = R((1+i) + 1) = R(2 + i) = R S_{\overline{2}|i}$.

Al final del tercer año se tendrá un aumento de interés $R(2 + i)i = R S_{\overline{2}|i} (i) = R \left(\frac{(1+i)^2 - 1}{i} \right) i = R ((1+i)^2 - 1)$, tomando en cuenta que se hace el depósito periódico entonces el incremento viene siendo

$R(2+i)i + R = R(2i + i^2 + 1)$ y el importe final será el incremento más el importe final del período anterior $R(2i + i^2 + 1) + R(2+i) = R(3 + 3i + i^2) = R\, S_{\overline{3}|i}$.

Y así sucesivamente se va elaborando cada renglón de la tabla.

A continuación se elaborará una tabla de fondo de amortización para mejor apreciación de la misma.

TABLA DE FONDO DE AMORTIZACION

	Aumento de interés.	Deposito.	Incremento al fondo.	Importe del fondo al final del periodo.
1	0	R	R	$R = R\, S_{\overline{1}\rceil i}$
2	$Ri = R\, S_{\overline{1}\rceil i}\,(i)$ $= R\left[\frac{(1+i)-\cancel{1}}{\cancel{i}}\right]\cancel{i} = Ri$	R	$Ri + R$	$Ri + R + R = R(2+i)$ $= R\, S_{\overline{2}\rceil i}$
3	$R\, S_{\overline{2}\rceil i}\,(i)$ $= R\left[\frac{(1+i)^2 - 1}{\cancel{i}}\right]\cancel{i}$ $= R(2i + i^2)$	R	$R\,(2i + i^2) + R$ $= R\,(2i + i^2 + 1)$	$R\,(2i + i^2 + 1) + R(2+i)$ $= R\,(3 + 3i + i^2)$ $= R\, S_{\overline{3}\rceil i}$
. . .				
t	$R\, S_{\overline{t-1}\rceil i}\,(i)$	R	$R + R\, S_{\overline{t-1}\rceil i}(i)$	$R\, S_{\overline{t}\rceil i}$

BONOS

Un bono es un documento por el cual se tiene que pagar:

1) Una suma fija llamada valor de Redención en una fecha fija llamada fecha de Redención.

2) Pagos periódicos de intereses hasta que se llegue a la fecha de Redención.

Un bono debe tener especificado:

1) Valor nominal.

2) Tasa de interés especificando si es semestral, trimestral, mensual.

3) Fecha de redención o fecha del pago del bono que generalmente es en una fecha de pago de intereses.

4) Valor de redención, en el caso que el valor de redención y el valor nominal sean iguales se dice que es redimible a la par, en caso contrario el valor de redención se expresa como un porcentaje del valor nominal.

Sea:

N= Valor nominal.

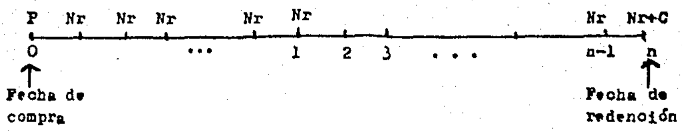
C= Valor de redención.

r= Tasa de interés por período del bono.

i= Tasa de interés del inversionista por período.

n= Número de pagos o períodos desde la compra hasta la fecha de redención.

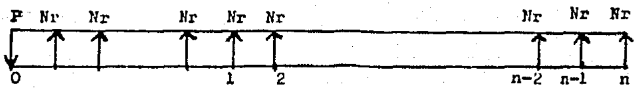
A continuación se explicará cómo encontrar el precio de compra de un bono en una fecha de pago de intereses.



Se traera a la fecha de compra del bono todos los pagos periódicos - incluyendo el que se paga en la fecha de redención más el pago del bono en la fecha de redención.

P= Precio de compra.

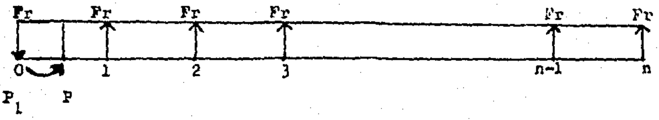
Nr= Dividendos



$P= C\,(1+i)^{-n} + Nr\, a_{\overline{n}|\,i}$ Precio de compra de un bono.

En el caso de que se compre un bono en donde no coincida con una fecha de pago de intereses, se calculará en un período de pago de intereses anterior a la fecha de compra y se llevará con interés simple a la fecha de compra.

A continuación se explicará graficamente.



$$P_1 = C\,(1+i)^{-n} + Nr\, a_{\overline{n}|i}$$

$$P = P_1 \left(1 + i \; \frac{\text{Número de días de la fecha de pago de intereses a la fecha de compra.}}{\text{Número de días de acuerdo a la tasa de interés que se maneje.}} \right)$$

Un bono es comprado a premio si su precio de compra (P) es mayor que su valor de redención (C) y el premio es P-C.

Un bono es comprado a descuento si su precio de compra (P) es menor que su valor de redención (C) y el descuento es C-P.

El valor en libros de un bono en cualquier fecha es la cantidad invertida en el bono en la mencionada fecha.

El valor en libros de un bono en la fecha de pago de intereses viene siendo el precio de compra en la fecha del pago de intereses y el valor en libros de un bono en la fecha de redención es el valor de redención.

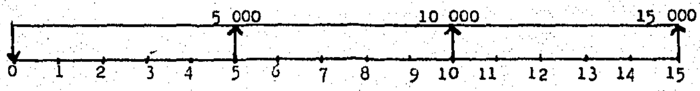
SERIES DE BONOS

A continuación se explicará cómo se obtiene el precio de compra de una serie de bonos en donde el valor nominal es igual al valor de redención.

Ejemplo:

Una serie de bonos de 30 000 con dividendos del 9% anual convertible semestralmente se van a redimir a la par de la siguiente forma, con una tasa de interés del 12 % anual convertible semestralmente.

5000 en 5 años
10000 en 10 años
15000 en 15 años



Se encontraran tres precios de compra, como si fueran tres bonos, redimibles en diferentes fechas, utilizando la siguiente fórmula:

$$P = C\,(1+i)^{-n} + Nr\, a_{\overline{n}|i}$$

$$P_1 = 5\ 000\ (1+.06)^{-10} + 225\ a_{\overline{10|}\,.06}$$

$$P_2 = 10\ 000\ (1+.06)^{-20} + 450\ a_{\overline{20|}\,.06}$$

$$P_3 = 15\ 000\ (1+.06)^{-30} + 675\ a_{\overline{30|}\,.06}$$

Entonces el precio de compra total viene siendo la suma total.

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

$$P = 24{,}630.41$$

En este caso se encontró el precio de compra cuando los bonos se rediman en tres fechas, pero en el caso de que se rediman un número mayor de fechas serían mucho yor los cálculos por lo que se busco la manera de simplificarlos y se dió origen a la fórmula de Makeham.
Utilizando el ejercicio anterior llegaremos a la fórmula de Makeham que será la que utilizaremos en lo sucesivo en relación a series de bonos.

$N = C$ redimible a la par.

$g = r$ tasa de los dividendos

$$P_1 = C_1\ V_i^{n_1} + C_1 g\ a_{\overline{n|}\,i}$$

$$P_2 = C_2\ V_i^{n_2} + C_2 g\ a_{\overline{n|}\,i}$$

$$P_3 = C_3\ V_i^{n_3} + C_3 g\ a_{\overline{n|}\,i}$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

$$P = c_1 V_i^{n_1} + c_2 V_i^{n_2} + c_3 V_i^{n_3} + c_1 g \left(\frac{1-V^{n_1}}{i}\right) + c_2 g \left(\frac{1-V^{n_2}}{i}\right)$$

$$+ c_3 g \left(\frac{1-V^{n_3}}{i}\right)$$

$$= \sum_{t=1}^{3} c_t V_i^{n_t} + \frac{g}{i} c_1 (1-V_i^{n_1}) + \frac{g}{i} c_2 (1-V_i^{n_2}) + \frac{g}{i} c_3 (1-V_i^{n_3})$$

$$= \sum_{t=1}^{3} c_t V_i^{n_t} + \frac{g}{i} (c_1 - c_1 V_i^{n_1} + c_2 - c_2 V_i^{n_2} + c_3 - c_3 V_i^{n_3})$$

$$= \sum_{t=1}^{3} c_t V_i^{n_t} + \frac{g}{i} (c_1 + c_2 + c_3 - c_1 V_i^{n_1} - c_2 V_i^{n_2} - c_3 V_i^{n_3})$$

$$= \sum_{t=1}^{3} c_t V_i^{n_t} + \frac{g}{i} \left(\sum_{t=1}^{3} c_t - \sum_{t=1}^{3} c_t V_i^{n_t}\right)$$

Si hacemos que:

$$K = \sum_{t=1}^{3} c_t V_i^{n_t}$$

$$C = \sum_{t=1}^{3} c_t$$

Tenemos que:

$$P = K + \frac{g}{i} (C - K) \qquad \textbf{Fórmula de Makeham .}$$

En este caso se calculó con tres fechas pero generalizando la t= 1,2,...n fechas de redención de bonos.

Otra forma de la obtención de la fórmula de Makeham es la siguiente:

$$P = C\, V_i^n + Cg\, a_{\overline{n}|\, i}$$

Sea:

$$K = \sum_{t=1}^{n} C_t\, V_i^n \qquad y \qquad C = \sum_{t=1}^{n} C_t$$

$$P = C\, V_i^n + Cg \left(\frac{1 - V_i^n}{i} \right)$$

$$P = C\, V_i^n + \frac{g}{i} \left(C - CV^n \right) \qquad \text{sustituyendo K y C}$$

$$P = K + \frac{g}{i} \left(C - K \right) \qquad \text{Fórmula de Makeham.}$$

Fórmula de Makeham cuando la tasa de los dividendos (g) es variable.

Ahora se explicará la forma de obtener el precio de compra de una serie de bonos en donde la tasa de los dividendos (g) es variable.

$$P = K + \frac{g_1}{i}(c - K) \qquad \text{Fórmula de Makeham.}$$

Esta fórmula se aplicaría directamente si la tasa de los dividendos g_1 fuera constante todo el tiempo como se vió anteriormente, en todo caso sería correcta para los primeros n_1 años, para los siguientes (n_2-n_1) años los dividendos seran $g_2(C-C_1)$, al total de los bonos se le resta C_1 porque ya se redimieron en n_1 años, para los siguientes (n_3-n_2) - años los dividendos seran $g_3(C-C_1-C_2)$ puesto que ya se redimieron - C_1 y C_2 bonos en n_1 y n_2 años respectivamente.

Como la fórmula de Makeham calcula el precio de compra con dividendos- g_1, entonces se le tiene que sumar las diferencias que existan en cada- cambio de tasa de dividendos por período de tiempo con respecto a g_1.

A continuación se hará un desarrollo para llegar a la fórmula de Makeham cuando (g) la tasa de los dividendos es variable.

$$\overbrace{\qquad\qquad}^{c}\ c_1\ \overbrace{\qquad\qquad}^{c-c_1}\ c_2\ \overbrace{\qquad\qquad}^{c-c_1-c_2}\ c_3$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{g_1}\ n_1\ \underbrace{\qquad\qquad}_{g_2}\ n_2\ \underbrace{\qquad\qquad}_{g_3}\ n_3$$

$$A = c_1 v_i^{n_1} + c\, g_1\, a_{\overline{n_1}|\,i} + \Big[c_2\, v_i^{n_2} + g_1\,(c-c_1)\,(a_{\overline{n_2}|\,i} - a_{\overline{n_1}|\,i}) + (g_2 - g_1)\,(c-c_1)\,(a_{\overline{n_2}|\,i} - a_{\overline{n_1}|\,i}) \Big] + \Big[c_3 v_i^{n_3} + g_1\, \underbrace{(c-c_1-c_2)}_{c_3} (a_{\overline{n_3}|\,i} - a_{\overline{n_2}|\,i}) + (g_3 - g_1)\, \underbrace{(c-c_1-c_2)}_{c_3} (a_{\overline{n_3}|\,i} - a_{\overline{n_1}|\,i}). \Big]$$

Agrupando los terminos tenemos:

$$A = c_1 v_i^{n} + c_2 v_i^{n_2} + c_3 v_i^{n_3} + g_1 \Big[c\, a_{\overline{n_1}|\,i} + (c-c_1)\,(a_{\overline{n_2}|\,i} - a_{\overline{n_1}|\,i})\; (c-c_1-c_2)\,(a_{\overline{n_3}|\,i} - a_{\overline{n_2}|\,i}) \Big] + (g_2 - g_1)\,(c-c_1)\,(a_{\overline{n_2}|\,i} - a_{\overline{n_1}|\,i}) + (g_3 - g_1)\, c_3\, (a_{\overline{n_3}|\,i} - a_{\overline{n_1}|\,i}).$$

$$= c_1 v_i^{n_1} + c_2 v_i^{n_2} + c_3 v_i^{n_3} + g_1 \Big[c\, \cancel{a_{\overline{n_1}|\,i}} + c\, \cancel{a_{\overline{n_2}|\,i}} - c\, \cancel{a_{\overline{n_1}|\,i}} - c_1 \cancel{a_{\overline{n_2}|\,i}} + c_1 a_{\overline{n_1}|\,i} + c\, a_{\overline{n_3}|\,i} - c\, \cancel{a_{\overline{n_2}|\,i}} - c_1 a_{\overline{n_3}|\,i} + c_1 \cancel{a_{\overline{n_2}|\,i}} - c_2 a_{\overline{n_3}|\,i} + c_2 a_{\overline{n_2}|\,i} \Big] + (g_2 - g_1)\,(c-c_1)\,(a_{\overline{n_2}|\,i} - a_{\overline{n_1}|\,i}) + (g_3 - g_1)\,(c_3\,(a_{\overline{n_3}|\,i} - a_{\overline{n_1}|\,i}).$$

$$
\begin{aligned}
A= {}& c_1 v_i^{n_1} + c_2 v_i^{n_2} + c_3 v_i^{n_3} + g_1 \Big[c_1 a_{\overline{n_1}|i} + c\, a_{\overline{n_3}|i} - c_1 a_{\overline{n_3}|i} - \\
& c_2 a_{\overline{n_3}|i} + c_2 a_{\overline{n_2}|i} \Big] + (g_2-g_1)(c-c_1)\left(a_{\overline{n_2}|i} - a_{\overline{n_1}|i}\right) \\
& + (g_3-g_1)\, c_3 \left(a_{\overline{n_3}|i} - a_{\overline{n_1}|i}\right). \\
= {}& c_1 v_i^{n_1} + c_2 v_i^{n_2} + c_3 v_i^{n_3} + g_1 \Big[c_1 \left(\frac{1-v_i^{n_1}}{i}\right) + c \left(\frac{1-v_i^{n_3}}{i}\right) - c_1 \left(\frac{1-v_i^{n_3}}{i}\right) \\
& - c_2 \left(\frac{1-v_i^{n_3}}{i}\right) + c_2 \left(\frac{1-v_i^{n_2}}{i}\right) \Big] + (g_2-g_1)(c-c_1)\left(a_{\overline{n_2}|i} - a_{\overline{n_1}|i}\right) \\
& + (g_3-g_1)\, c_3 \left(a_{\overline{n_3}|i} - a_{\overline{n_1}|i}\right). \\
= {}& c_1 v_i^{n_1} + c_2 v_i^{n_2} + c_3 v_i^{n_3} + \frac{g_1}{i} \Big[\cancel{c_1} - c_1 v_i^{n_1} + c - c v_i^{n_3} - \cancel{c_1} + c_1 v_i^{n_3} - \cancel{c_2} + \\
& c_2 v_i^{n_3} + \cancel{c_2} - c_2 v_i^{n_2} \Big] + (g_2-g_1)(c-c_1)\left(a_{\overline{n_2}|i} - a_{\overline{n_1}|i}\right) + \\
& (g_3-g_1)\, c_3 \left(a_{\overline{n_3}|i} - a_{\overline{n_1}|i}\right). \\
= {}& c_1 v_i^{n_1} + c_2 v_i^{n_2} + c_3 v_i^{n_3} + \frac{g_1}{i} \Big[c - c_1 v_i^{n_1} - c_2 v_i^{n_2} - c v_i^{n_3} + c_1 v_i^{n_3} + c_2 v_i^{n_3} \Big] + \\
& (g_2-g_1)(c-c_1)\left(a_{\overline{n_2}|i} - a_{\overline{n_1}|i}\right) + (g_3-g_1)\, c_3 \left(a_{\overline{n_3}|i} - a_{\overline{n_1}|i}\right). \\
= {}& c_1 v_i^{n_1} + c_2 v_i^{n_2} + c_3 v_i^{n_3} + \frac{g_1}{i} \Big[c - c_1 v_i^{n_1} - c_2 v_i^{n_2} - v_i^{n_3} \underbrace{(c-c_1-c_2)}_{c_3} \Big] + (g_2-g_1) \\
& (c-c_1)\left(a_{\overline{n_2}|i} - a_{\overline{n_1}|i}\right) + (g_3-g_1)\, c_3 \left(a_{\overline{n_3}|i} - a_{\overline{n_1}|i}\right).
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{t=1}^{3} C_t V_i^{n_t} + \frac{g_1}{i} \left[C - \sum_{t=1}^{3} C_t V_i^{n_t} \right] + (g_2 - g_1)(C - C_1)(a_{\overline{n_2}|i} - a_{\overline{n_1}|i})$$

$$+ (g_3 - g_1)\, C_3 (a_{\overline{n_3}|i} - a_{\overline{n_1}|i})$$

Donde

$$C = \sum_{t=1}^{3} C_t \qquad y \qquad K = \sum_{t=1}^{3} C_t V_i^{n_t}$$

Sustituyendo C y K nos da la fórmula de Makeham cuando g es variable.

$$A = K + \frac{g_1}{i}(C - K) + (g_2 - g_1)(C - C_1)(a_{\overline{n_2}|i} - a_{\overline{n_1}|i}) + (g_3 - g_1)$$

$$C_3 (a_{\overline{n_3}|i} - a_{\overline{n_1}|i}).$$

Fórmula de Makeham cuando el valor de redención es variable.

A continuación se explicará la fórmula de Makeham cuando en las series de bonos la tasa de los dividendos es constante y el valor de redención es variable, esto quiere decir que no son redimibles a la par.

Sea:

P_1 = Valor nominal que se van a redimir en el tiempo n_1.

P_2 = Valor nominal que se van a redimir en el tiempo n_2.

.

.

.

P_t = Valor nominal que se van a redimir en el tiempo n_t.

$$P = \sum_{t=1}^{n} P_t$$

$C_t = P_t\,(1+\lambda_t)$ Valor de redención de los bonos que se rediman en el año n_t .

λ_t = Porcentaje de más o de menos con el cual se redimen los bonos en el año n_t .

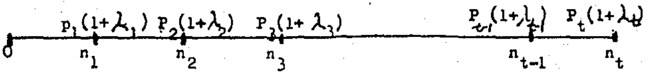
$$K = \sum_{t=1}^{n} P_t\,(1+\lambda_1)\,v_i^{n_t}$$

$$g = \frac{g_1}{1+\lambda_1}$$

$$C = \sum P_t\,(1+\lambda_1)$$

$$A = K + \frac{\varepsilon}{i}\,(C - K) \qquad \text{Fórmula de Makeham.}$$

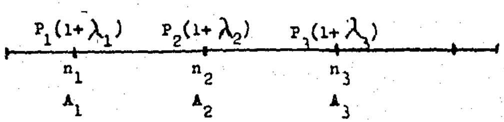
La fórmula de Makeham se aplicaría directamente si todos los bonos tuvieran el mismo valor de redención. Como se observa cuando se calcula K y C solo se toma en cuenta el primer porcentaje de redención entonces a la fórmula de Makeham se le tiene que agregar las diferencias de los porcentajes de los bonos en el que λ_1 no sea igual a λ_r durante las diferentes fechas en que se redimen los bonos.



Como se observa en la gráfica en el año n_1 se redimen P_1 bonos con un porcentaje de redención λ_1, en el año n_2 se redimen P_2 bonos con un — porcentaje de redención λ_2, entonces al traer a valor presente estos P_2 bonos con la fórmula de Makeham ya se trajeron con λ_1 por lo que si- λ_1 es diferente a λ_2 existe una diferencia que se tiene que sumar a la fórmula para que se encuentre el verdadero precio de compra.

De igual forma cuando P_3 se trae a valor presente con la fórmula de Makeham ya se trajo a valor presente pero con λ_1, entonces la diferencia que existe entre λ_3 y λ_1 se le tiene que sumar a la fórmula. En el caso de que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ los terminos que se aumentan se anularían y quedaría la fórmula inicial de Makeham.

A continuación se hará un desarrollo para obtener la Fórmula de Makeham cuando el valor de redención es variable.



Primero se obtendra el valor presente, como si fueran tres fechas de compra.

$$A_1 = P_1\,(1+\lambda_1)\,v_i^{n_1} + P_1\,(1+\lambda_1)\,g\,a_{\overline{n_1}|\,i}$$

$$A_2 = P_2\,(1+\lambda_1)\,v_i^{n_2} + P_2\,(\lambda_2-\lambda_1)\,v_i^{n_2} + P_2\,(1+\lambda_1)\,g\,a_{\overline{n_2}|}$$

$$A_3 = P_3\,(1+\lambda_1)\,v_i^{n_3} + P_3\,(\lambda_3-\lambda_1)\,v_i^{n_3} + P_3\,(1+\lambda_1)\,g\,a_{\overline{n_3}|}$$

$$A = P_1(1+\lambda_1)v_i^{n_1} + P_2(1+\lambda_1)v_i^{n_2} + P_3(1+\lambda_1)v_i^{n_3} + g\left[P_1(1+\lambda_1)\,a_{\overline{n_1}|}\,i + P_2(1+\lambda_1)\,a_{\overline{n_2}|}\,i + P_3\,(1+\lambda_1)\,a_{\overline{n_3}|}\,i\right] + P_2(\lambda_2-\lambda_1)v_i^{n_2} + P_3(\lambda_3-\lambda_1)v_i^{n_3}$$

$$A = \sum_{t=1}^{3} P_t\,(1+\lambda_1)\,v_i^{n_t} + g\left[P_1\left(\frac{1-v_i^{n_1}}{i}\right)(1+\lambda_1) + P_2\,(1+\lambda_1)\left(\frac{1-v_i^{n_2}}{i}\right) + P_3\,(1+\lambda_1)\left(\frac{1-v_i^{n_3}}{i}\right)\right] + P_2\,(\lambda_2-\lambda_1)\,v_i^{n_2} + P_3\,(\lambda_3-\lambda_1)\,v_i^{n_3}$$

$$A=\sum_{t=1}^{3} P_t\,(1+\lambda_1)V_i^{n_t}+\frac{g}{i}\left[P_1\,(1+\lambda_1)-P_1\,V_i^{n_1}(1+\lambda_1)+P_2\,(1+\lambda_1)-P_2(1+\lambda_1)V_i^{n_2}+P_3(1+\lambda_1)-P_3\,(1+\lambda_1)\,V_i^{n_3}\right]+P_2\,(\lambda_2-\lambda_1)V_i^{n_2}+P_3\,(\lambda_3-\lambda_1)V_i^{n_3}$$

$$A=\sum_{t=1}^{3} P_t\,(1+\lambda_1)V_i^{n_t}+\frac{g}{i}\left[P_1(1+\lambda_1)+P_2\,(1+\lambda_1)+P_3(1+\lambda_1)-P_1(1+\lambda_1)V_i^{n_1}-P_2(1+\lambda_1)V_i^{n_2}-P_3(1+\lambda_1)V_i^{n_3}\right]+P_2\,(\lambda_2-\lambda_1)\,V_i^{n_2}+P_3(\lambda_3-\lambda_1)\,V_i^{n_3}$$

$$A=\sum_{t=1}^{3} P_t(1+\lambda_1)V_i^{n_t}+\frac{g}{i}\left[\sum_{t=1}^{3} P_t\,(1+\lambda_1)+\sum_{t=1}^{3} P_t\,(1+\lambda_1)V_i^{n_t}\right]+P_2\,(\lambda_2-\lambda_1)V_i^{n_2}+P_3\,(\lambda_3-\lambda_1)\,V_i^{n_3}$$

Sustituyendo por C y K tenemos que:

$$A=K+\frac{g}{i}\,(\,C-K\,)+P_2(\lambda_2-\lambda_1)V_i^{n_2}+P_3\,(\lambda_3-\lambda_1)\,V_i^{n_3}$$

Este desarrollo fué cuando solo eran tres fechas de redención, pero cualquiera que sea el número se utilizará la fórmula de Makeham.

$$A=K+\frac{g}{i}\,(C-K)+P_2\,(\lambda_2-\lambda_1)V_t^{n_2}+P_3\,(\lambda_3-\lambda_1)V_i^{n_3}+\ldots$$

CONCLUCIONES

En este trabajo se hizo un estudio detallado de los diferentes conceptos que se ven en Matemáticas Financieras en relación a Anualidades Ciertas solamente.

Se hicieron desarrolles para encontrar el Valor Presente y Monto de las diferentes Anualidades Ciertas como son: anualidades fuera de los límites de tablas, anticipadas, diferidas, con tasa anual efectiva, con tasa nominal, crecientes y decrecientes en progresión geométrica y aritmética y anualidades variables.

También se explicó detalladamente la forma de elaborar una Tabla de Amortización y de un Fondo de Amortización.

Se analizarón los diferentes casos de la Fórmula de Makeham, cuando el Valor de Redención es igual al Valor Nominal, cuando la tasa de los dividendos (g) es variable y cuando el Valor de Redención es variable. En este tema se puso más atención para explicar detalladamente las modificaciones que se tienen que hacer a la Fórmula de Makeham, tomando como base un ejemplo simple para que nos muestre matemáticamente las modificaciones que se tienen que hacer, este se hizo porque no se encuentra de esta manera explicado en algún otro trabajo de tésis o libro.

Por último considero que éste trabajo fué elaborado de una forma simple de tal manera que cualquier estudiante de la carrera de Actuaría le sea fácil entender y de gran utilidad como auxiliar en sus estudios de Matemáticas Financieras.

BIBLIOGRAFIA

1) Matemáticas Financieras.
Prof. Benjamín de la Cueva.
Editorial Porrúa.

2) Matemáticas Financieras.
Frank Ayres, Jr.
Libros McGraw-Hill.
Serie Schaum.

3) Interés Compuesto y Anualidades Ciertas.
D.W.A. Donald.
Publicado por el Instituto de Actuarios y
la Facultad de Actuarios, 1963.

4) Matemáticas Financieras.
González Gale, José.
Buenos Aires, Argentina.
Editorial Macchi.

5) Matemáticas Financieras.
Cissel Cissel, Flaspehler.
Editorial CECSA.