2 gi.
6 8

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

ANALISIS SISMICO DE ESTRUCTURAS NO LINEALES INCLUYENDO ASIMETRIA EN SU RESISTENCIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A :

HECTOR GRANIEL GARCIA

MEXICO, D. F. 1989

ANALISIS SIMICO DE ESTRUCTURAS NO LINEALES INCLUYENDO ASIMETRIA EN SU RESISTENCIA

TEMARIO

I N D I C E

I INTRODUCCION

Las fuerzas que actúan sobre una estructura durante la vida de la misma son numerosas y muy variadas, las que revisten mayor importancia en zonas de alta sismicidad son las producidas por los temblores. El comportamiento dúctil de una estructura es la manera que tiene para disipar parte de la energía proporcionada por el sismo, sin embargo este comportamiento implica deformaciones permanentes, por lo que se toma en cuenta en caso de sismos muy severos, para ello se emplean relaciones de ductilidad basadas en criterios de diseño racional que suponen el comportamiento adecuado ante sismos moderados y de gran magnitud. Este problema se ve agravado cuando la estructura tiene resistencia asimétrica causada por asentamientos diferenciales; a fin de resolver esta dificultad se llevan a cabo con el auxilio de computadoras análisis numéricos, basados en modelos matemáticos, que ayudan a determinar el comportamiento no lineal de la estructura bajo solicitaciones sísmicas y calculan la demanda de ductilidad que se genera por esta causa. En el presente trabajo se realizaron este tipo de análisis con los que se obtuvieron demandas mayores a las calculadas de acuerdo al Reglamento de Construcciones vigente para el D F, demostrando con ésto que las demandas de ductilidad obtenidas a partir de un análisis dinámico son mayores a las calculadas con uno estático; por lo que se propone una expresión a fin de representar con mayor exactitud dicho comportamiento asimétrico.

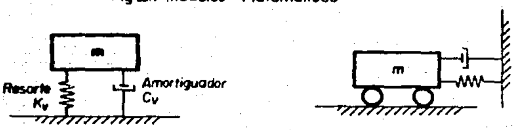
II CONCEPTOS BASICOS

Las fuerzas producidas por los temblores resultan del movimiento vibratorio errático del suelo en donde está soportada la estructura provocando que el suelo vibre vertical y horizontalmente, generando de esa manera fuerzas de inercia en las estructuras.

Vibraciones en estructuras

La evaluación de los efectos de un movimiento sísmico sobre una estructura es un problema complejo debido al número de variables que intervienen y al comportamiento dinámico de la misma, es por ésto que se hace uso de modelos matemáticos que la representan. Si ese modelo es solicitado en su base por un movimiento análogo a aquél registrado por un aparato (sismógrafo, acelerógrafo, etc.) durante un sismo, proporciona información que adecuada a la respuesta de las estructuras reales (considerando las deformaciones más allá del rango elástico y efectos de amortiguamiento) nos puede conducir a valores de diseño racionales. (Fig.II.1)

Fig II.1 Modelos Matemáticos



VIBRACION VERTICAL

VIBRACION HORIZONTAL

Vibraciones en sistemas discretos y continuos

Se define como sistema a todo cuerpo o conjunto de cuerpos que posea masa y elasticidad con capacidad para vibrar y oscilar.
Sistema discreto es aquél en el que las masas y elasticidades están segregadas y concentradas en distintos elementos, y en un sistema continuo la masa y elasticidad están distribuidas.

SISTEMAS DISCRETOS

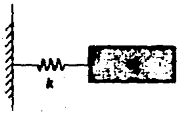


Fig.II 2a

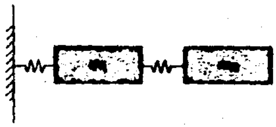


Fig.II 2b

Grados de libertad

Para definir la posición de un sistema oscilatorio en un momento cualquiera se requiere de un número mínimo de coordenadas independientes conocidas como grados de libertad, es decir, el cuerpo poseerá tantos grados de libertad como coordenadas para definir su posición.
El sistema de la fig II.2a poseé un solo grado de libertad, pues una sola coordenada define la posición de la masa, mientras que el sistema de la figura II.2b tiene dos grados de libertad.
En la fig II.2c correspondiente al sistema continuo, el eje neutro de la barra puede adoptar muchas formas, requiriéndose un número infinito de coordenadas y poseé por lo tanto un número infinito de grados de libertad.

SISTEMAS CONTINUOS

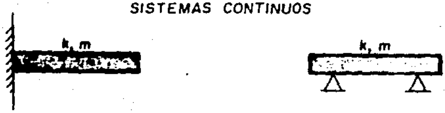


Fig.II 2c

Vibración forzada y libre

Se dice que un cuerpo se encuentra bajo un estado de vibración forzada cuando vibra debido al efecto de un sistema exterior de cargas que varían según una función del tiempo. Si el cuerpo continúa moviéndose al cesar la carga, éste se encuentra bajo un estado de vibración libre.

Equilibrio dinámico

Un cuerpo en movimiento con una cierta masa introduce fuerzas inerciales - cuando la velocidad varía. Las fuerzas inerciales, las fuerzas internas - resistentes del cuerpo y el sistema exterior de carga, deben formar un conjunto de fuerzas en equilibrio. Esta es la condición de equilibrio dinámico en el cuerpo.

Vibración libre no amortiguada

En la fig II.3 se representa el problema de un solo grado de libertad (sistema simple), constituido por una masa y un resorte deslizando en una superficie, si al cuerpo (m) se le provoca un desplazamiento (x) a partir de su posición de reposo, se genera una fuerza restauradora (Pr) debido a la acción del resorte, imprimiéndole una aceleración tal que cuando el cuerpo regrese a su posición de reposo, la fuerza de inercia lo lleva hacia la izquierda de esa posición original, entrando en un movimiento oscilatorio.
Si se desprecian fuerzas externas que frenen o amortigüen el movimiento u otras que lo aceleren y además no existe amortiguamiento, se dice que el cuerpo está en vibración libre no amortiguada.
Por equilibrio dinámico: $Pr=Pi$, de donde $-kx=ma$, es decir, que la fuerza de inercia a partir de la segunda ley de Newton ($Fi=ma$) es igual a la fuerza que desarrolla el resorte ($-kx$).

La aceleración (a) es la segunda derivada del espacio con respecto al tiempo, de donde:

$$-kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} \; ; \quad \text{por lo tanto:} \; m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{...Ec II.1}$$

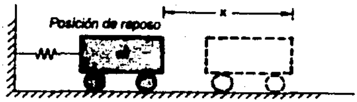


Fig.II 3 Desplazamiento de un sistema simple

($\ddot{x}$) es la aceleración y los dos puntos significan derivadas con respecto al tiempo.

$$\ddot{x} = -\frac{kx}{m} \quad \text{...Ec II.2}$$

El término (x) debe ser una función del tiempo, cuya segunda derivada sea igual a la función misma con signo contrario, lo cual sucede únicamente con las funciones de seno y coseno, de ahí que este movimiento se llame armónico.

$$\frac{d^2}{dt^2}(X \cos t) = -X \cos t \; ; \qquad X = \text{constante}$$

Una forma más general para la función (x) es :

$$x = X \cos(\omega t + \phi) \quad \text{...Ec II.3}$$

En la que (ω) es la frecuencia angular, puesto que es igual a ($2\pi f$) sus -

unidades son radianes/segundo. (ϕ) es el ángulo de fase del movimiento -- con respecto a una referencia dada. Cuando ($\omega t + \phi = 0$), en la ecuación - anterior la función es máxima y por consiguiente:

$$X = x\ máx \qquad \text{siendo} \quad X = \text{amplitud}$$

De la ecuación II.3 la segunda derivada está dada por :

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot \text{Cos}\ (\omega t + \phi) \quad \text{y sustituyendo en Ec.II.2}$$

$$-\omega^2 \cdot \text{Cos}\ (\omega t + \phi) = -\frac{k}{m} \cdot \text{Cos}\ (\omega t + \phi) \quad \text{por lo tanto}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \ \ldots \text{Ec II.4} \ ; \qquad m\ddot{x} = kx = \omega^2\ mx \ \rightarrow \ \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \ \ldots \text{Ec II.5}$$

Si en la ecuación II.3 el tiempo se aumenta en $2\pi/\omega$, la ecuación no cambia es decir, que la función se repite cada $2\pi/\omega$. Por consiguiente, el tiempo-que tarda el sistema en completar un ciclo, o sea el período, es :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \ldots \text{Ec II.6}$$

La frecuencia natural del sistema (f) es el número de ciclos en la unidad-de tiempo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \ldots \text{Ec II.7}$$

La velocidad y aceleración del cuerpo oscilante están dadas por la primera y segunda derivadas de la Ec II.3 :

$$v = \frac{dx}{dt} = -X\omega\ \text{Sen}\ (\omega t + \phi) \qquad \ldots \text{Ec II.8}$$

$$a = \frac{d^2\ x}{dt^2} = X\ \omega^2\ \text{Cos}\ (\omega t + \phi) \qquad \ldots \text{Ec II.9}$$

III ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Movimiento Armónico Simple

El movimiento armónico simple (M.A.S.) puede ser deducido a partir de los principios de la Mecánica, se trata de un movimiento periódico que puede ocurrir en cualquier sentido, ya sea vertical u horizontal, y en el cual tanto la aceleración como la fuerza recuperadora son proporcionales a la elongación y son de sentido contrario al desplazamiento.

Desplazamiento. Es la distancia que hay entre la posición de equilibrio y otra cualquiera en un instante dado de su trayectoria, también se le conoce como elongación (x).

Período (T). Es el tiempo que emplea el móvil en realizar un ciclo, es decir el tiempo que transcurre para que el móvil pase dos veces consecutivas por una cierta posición, su unidad es el segundo.

Frecuencia. Es el número de períodos por unidad de tiempo, es por tanto el inverso del período: $f = \frac{1}{T}$

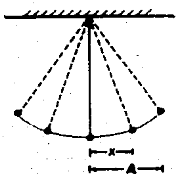


Fig III.1 Péndulo

En el péndulo de la izquierda se le designa como amplitud (A) del movimiento a la elongación máxima. Cuando la elongación es máxima la velocidad es nula, de aquí tenemos que la velocidad en la posición de equilibrio es máxima. Para un radio determinado, la velocidad angular (ω) de un cuerpo en movimiento de rotación en torno a un eje, se define como la variación del desplazamiento angular que experimenta en la unidad de tiempo, se expresa en radianes /segundo.

Si el móvil (P) describe un movimiento de rotación uniforme (fig III.2) según una circunferencia al ser proyectado sobre el diámetro de un círcu-

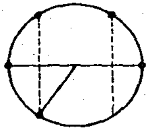


Fig III.2

lo, equivale al recorrido de un punto (A) con velocidad uniforme sobre ese eje horizontal. El movimiento de la proyección (A) del punto sobre el diámetro, es armónico simple.
En seguida se desarrollan expresiones relacionadas con el movimiento armónico simple, de gran aplicación en el análisis dinámico.

De la fig III.3 se tiene:

v_t = velocidad tangencial

a_c = aceleración centrípeta

$a_c = \frac{v_t^2}{r}$ ...Ec III.1

Del Δ OPA:

$\text{Sen } \phi = \frac{AO}{OP} = \frac{x}{r}$

Del Δ PDE: $v = v_t \text{ Sen } \phi$

Si $v_t = 2\pi f r = \frac{2\pi}{T} r$ ... Ec III.2

$v = \frac{2\pi}{T} r \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r}$, de donde:

$v = \frac{2\pi}{T} \sqrt{r^2-x^2}$ ...Ec III.3

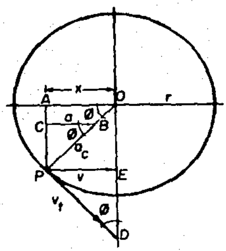


Fig III.3

Del Δ PBC: $a = a_c \text{ Cos } \phi = \frac{v_t^2}{r} \cdot \frac{x}{r} = \frac{\frac{4\pi^2}{T^2} r}{r} \cdot \frac{x}{r}$

$$a = -\frac{4\pi^2}{T^2}x = -4\pi^2 f^2 x \quad \text{...Ec III.4}$$

El signo negativo significa que x y a son de signo contrario.

Fuerza recuperadora en un M.A.S.

$$F = m\cdot a = -m\,4\pi^2 f^2 x = -m\frac{4\pi^2}{T^2}x \quad \text{... Ec III.5}$$

$$\text{Si} \quad \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} \quad ; \quad F = -m\omega^2 x$$

La fuerza es proporcional a la elongación (x), de la misma dirección y de sentido contrario.

Constante (k) de proporcionalidad.

Esta es igual al cociente que resulta de dividir la fuerza recuperadora - (F) entre la elongación (x).

$$k = -\frac{F}{x} \quad \text{... Ec III.6}$$

Siendo (k) positiva puesto que (F) y (x) son de signo contrario.

Período de un M.A.S.

De la Ec III.5 ; $F = -m\frac{4\pi^2}{T^2}x$ de donde: $T^2 = -m\frac{4\pi^2}{F}x$

De la Ec III.6 ; $F = -kx$ de donde : $T^2 = 4\pi^2\frac{m}{k}$

Por lo tanto:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \text{y} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

En la siguiente figura (fig III.4) se presenta la relación que existe entre el desplazamiento, velocidad y aceleración.

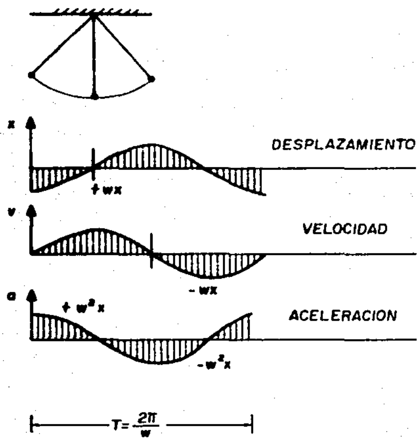


Fig. III.4 Respuesta de un péndulo

Nótese que cuando el desplazamiento es máximo la velocidad es cero y la aceleración es máxima pero de sentido contrario a aquél.

Vibración forzada.

Cuando a un sistema se le aplica una fuerza, éste sufre un desplazamiento, si la fuerza cesa el sistema queda en un movimiento libre no amortiguado, por el contrario si el sistema tiene amortiguamiento se requiere entonces de energía adicional mediante la aplicación de fuerzas externas para mantener las oscilaciones y se dice que se encuentra en una vibración forzada. La ecuación del movimiento se deduce a partir del equilibrio dinámico del cuerpo oscilante de la fig III.5 :

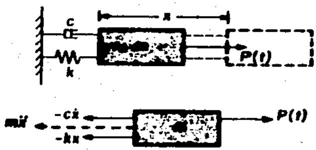


Fig III.5 Sistema de vibración forzada

La fuerza excitatriz P(t) varía comúnmente con el tiempo y puede ser de diversos tipos, por ejemplo: excitación armónica, excitación en la base, - excitación por impulsos, excitación arbitraria, etc. De éstos se estudiará la excitación arbitraria que es la que interesa.

Excitación arbitraria

Las fuerzas excitadoras arbitrarias son las más comunes y las de mayor im-

portancia en el diseño de estructuras civiles, éstas comprenden los sismos, vientos, mareas, etc. y se caracterizan por no tener una ley de formación o expresión algorítimica que las defina.
La fig III.6 representa una fuerza excitadora arbitraria la cual se considera compuesta por una serie de impulsos sucesivos de pequeña duración.

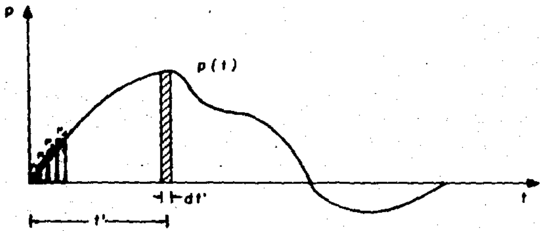


Fig III. 6 Excitación arbitraria

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales pueden superponerse debido a ésto la respuesta del sistema a la carga arbitraria es igual a la suma de las respuestas correspondientes a cada uno de los impulsos que la componen, es decir:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \int_0^t \frac{P(t')}{\omega m} e^{-\beta\omega(t-t')} \operatorname{Sen} \omega' (t-t')\, dt' \quad \ldots \text{ Ec III.7}$$

en donde t es el tiempo en el cual ocurre la respuesta x(t) y t' es el tiempo en el cual el impulso P(t') actúa sobre el sistema. La ecuación da una solución completa y exacta para cualquier fuerza excitadora en general. El término dentro del signo de integración se le conoce como la integral de

Duhamel. Multiplicando y dividiendo entre k y reemplazando $k/m = \omega^2$, la ecuación Ec III.7 se puede escribir así:

$$x(t) = - \frac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} \int_o^t e^{-\beta\omega(t-t')} x_o(t') \text{ Sen } \omega'(t-t') \, dt' \quad \text{... Ec III.8}$$

en donde $x_o(t')$ es la deflexión estática producida por la carga arbitraria. Cuando hay condiciones iniciales de desplazamiento y/o velocidad, se agrega a la Ec III.8 la respuesta correspondiente dada por las siguientes ecuaciones:

$$x = e^{-\beta\omega t} (A_o \text{ Cos } \omega' t + B_o \text{ Sen } \omega' t) \quad \text{... Ec III.9}$$

Esta ecuación representa un movimiento sinusoidal con frecuencia angular - amortiguada ω' y se define a la frecuencia angular del sistema amortiguado como:

$$\omega' = \omega \sqrt{1-\beta^2}$$

Las constantes A_o y B_o de la ecuación Ec III.9 se obtienen a partir de las condiciones iniciales x_o y v_o:

$$A_o = x_o \quad \text{... Ec III.10}$$

$$B_o = \frac{v_o + \beta\omega \, x_o}{\omega'} \quad \text{... Ec III.11}$$

La amplitud, o sea el máximo de la Ec III.9, ocurre cuando $\omega' t$ es 0, π, 2π, etc. y su valor se expresa como:

$$x_{max} = X = A_o \, e^{-\beta\omega t}$$

Esta función se muestra en la fig III.7 en donde se aprecia cómo la amplitud decrece exponencialmente hasta cero cuando t = ∞.

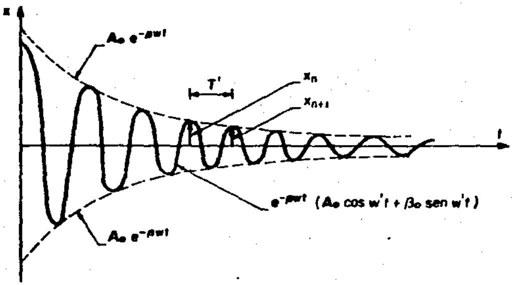


Fig III.7 Amortiguamiento subcrítico

Cuando las funciones de excitación son complicadas, como es el caso de los sismos, las respuestas del sistema se determinan con métodos numéricos o - gráficos.

El antipéndulo o péndulo invertido

Una forma de idealizar una estructura es a partir de un péndulo invertido en el cual el resorte es sustituido por un elemento con elasticidad transversal cuya constante de rigidez (k) se obtiene en función de la deflexión (Δ) ocasionada por una fuerza lateral (P), fig III.8.

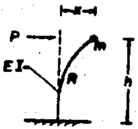


Fig III.8 Párametros del sistema

$$\Delta = \frac{Ph^3}{3EI} \; ; \quad k = \frac{P}{\Delta} = \frac{3EI}{h^3}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{3EI}{mh^3} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{mh^3}{3EI}}$$

Por lo tanto:

$$\text{Si} \quad \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{3EI}{mh^3} \rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{mh^3}{3EI}}$$

y la frecuencia natural del sistema será:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI}{mh^3}}$$

IV RESPUESTA DINAMICA DE SISTEMAS LINEALES Y NO LINEALES

Espectro de respuesta

El espectro puede ser concebido si se supone una base móvil en la cual están fijos unos antipéndulos con períodos variables creciendo según las propiedades de los mismos, fig IV.1

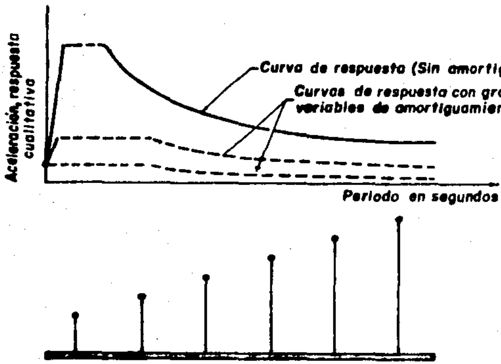


Fig IV.1 Descripcion de espectro de respuesta

Provocando un movimiento en la base y registrando la máxima respuesta de cada péndulo invertido se desarrolla una curva como la de la figura IV.1, la respuesta medida puede ser: desplazamiento, velocidad o aceleración. Así - el espectro queda definido como el lugar geométrico de las respuestas máximas de un sistema de un grado de libertad con "frecuencia" fundamental variable solicitado en su base por un movimiento sísmico.

Los registros de los temblores muestran una forma con variación de ordenadas verticales que serán de acuerdo a la magnitud del temblor, localización del instrumento y trayectoria de las ondas sísmicas.
Los espectros se obtienen directamente de los acelerogramas por medio de - computadoras digitales o analógicas, se simula en la máquina un oscilador simple cuya respuesta a la excitación en la base está dada por la integral de convolución o de Duhamel (Ec III.8). Variando la frecuencia fundamental del sistema se determinan las respuestas máximas u ordenadas del espectro. Esta operación se puede repetir para diversos valores del coeficiente de amortiguamiento β, generando así una familia de espectros como la que se muestra en la fig IV.2 correspondiente al acelerograma de la fig IV.3.

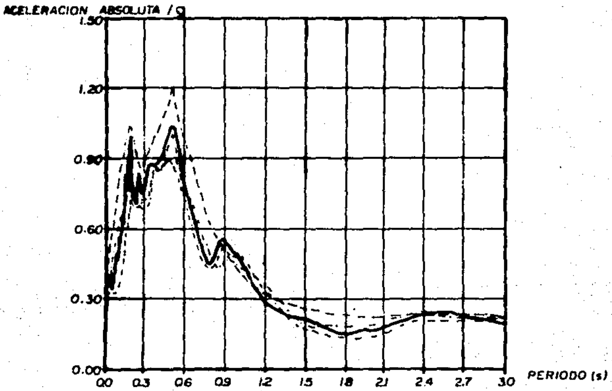


Fig. IV.2 Familia de Espectros para diferentes valores del coeficiente β

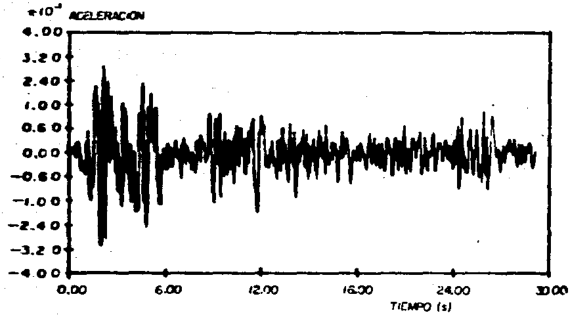


Fig IV.3 Acelerograma

Espectro de diseño

Puesto que no es posible conocer las características de los probables sismos que en un momento dado afecten a una estructura durante su vida útil se puede intentar predecir estadísticamente la forma de los espectros correspondientes a diferentes grados de amortiguamiento.
Existen diferencias básicas entre un espectro de respuesta (basado en el concepto del tema anterior) y un espectro de diseño; el primero se obtiene de forma determinística y se refiere a la respuesta de un sistema de un grado de libertad ante un temblor específico, mientras que el segundo se obtiene de manera probabilística e implica los siguientes conceptos:

- probabilidad de ocurrencia de temblores intensos en un sitio
- características del movimiento del suelo
- comportamiento de la estructura
- costos de reparación de los daños comparados con el costo de diseñar una estructura más resistente

Los espectros de diseño de aceleraciones generalmente constan de tres ramas(fig IV.4);una ascendente hasta un período (T_1), otra porción horizontal de T_1 a T_2, y otra hiperbólica a partir de T_2 . T_1 y T_2 así como el grado de la hipérbola dependen del tipo de terreno.

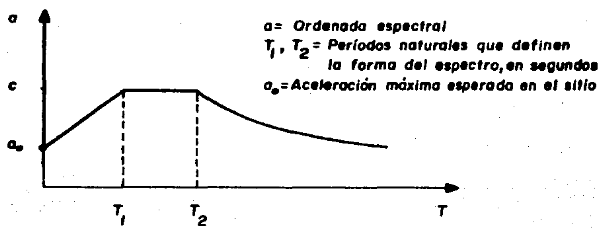


Fig IV.4 Espectro de diseño

Coeficientes para diseño sísmico

En el diseño de una estructura se desea que éste involucre básicamente el riesgo sísmico y la resistencia estructural, de tal manera que ante las solicitaciones de la estructura ante un sismo de intensidad moderada tenga un comportamiento adecuado sin daños de consideración pero a su vez quede protegida del colapso y pérdidas de vidas en el caso de un sismo fuerte. Esto conduce a diseñar una estructura económica para su seguridad y que no resulte peligrosa por su inseguridad.

Una teoría que representa la transmisión de la aceleración del suelo a la estructura, es la que considera la aceleración de las partes de la estructura en función de la aceleración del terreno. La transformación de aceleraciones a fuerzas se realiza a partir de la segunda ley de Newton ($F = m \cdot a$) Este concepto supondría una estructura de rigidez infinita por lo que no se puede considerar la rigidez real de una estructura. En el caso de una estructura "muy flexible" que se encuentra sujeta al movimiento del suelo, cuyo período está cerca del de la estructura (efecto de resonancia) puede resultar una fuerza mucho más grande, especialmente si ocurren diversos ciclos de movimiento del suelo.

Generalmente se hace uso de los coeficientes que afectan al peso del edificio ($F = c \cdot W$) y están basados en teorías que toman en cuenta las características dinámicas de las estructuras y el movimiento irregular del suelo, el proceso de análisis comprende básicamente dos etapas:

1) La determinación del cortante (V) en la base, transmitido a la estructura por el terreno.

2) La distribución de este cortante (V) en fuerzas equivalentes aplicadas en la estructura, fig IV.5

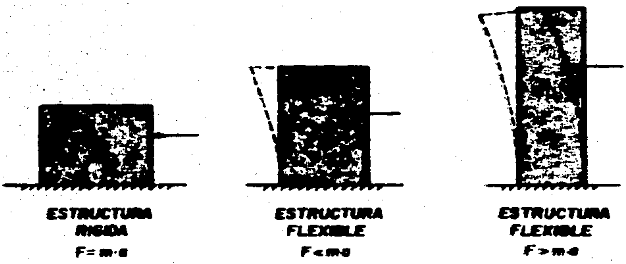


Fig. IV.5 Comportamiento general de estructuras rígida y flexible

La acción de un sismo en una estructura se traduce en un movimiento en la base "desplazándolo" de uno a otro lado provocando en ella el efecto de un péndulo invertido. fig IV.6.

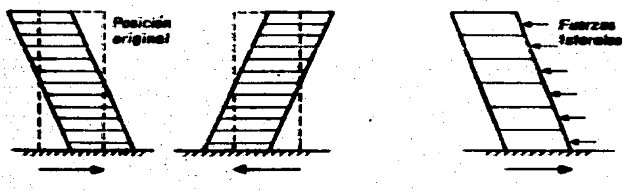


Fig IV.6 Representación de la acción sísmica sobre una estructura.

En la fig IV.6 se puede observar que el desplazamiento que sufre la estructura bajo la acción de un sismo es semejante al ocasionado por fuerzas laterales, por lo tanto la determinación de dichas fuerzas permitirá conocer los efectos del sismo en la estructura. Esas fuerzas guardan relación con la -- "cantidad" de movimiento en la base y con las características dinámicas de la misma.

Se tiene:

$$F = m \cdot a \qquad si\ m = \frac{W}{g}\ ; \quad F = \frac{W}{g} \cdot a = \frac{a}{g}\ W.\ :\ F = cW$$

en donde:

F= fuerza sísmica
m= masa del edificio
a= aceleración
W= peso del edificio
g= aceleración gravitacional
c= coeficiente sísmico

De acuerdo con la expresión anterior, la fuerza sísmica es directamente proporcional a la aceleración esperada del terreno y al peso del edificio, aunque en realidad sean muchos los factores que participan en la decisión para evaluar esa fuerza, por lo que al cociente (a/g) se le designa como coeficiente sísmico.

Para la determinación del coeficiente sísmico entran en juego varios aspectos tales como la regionalización sísmica y las correlaciones entre velocidad, -- aceleración, magnitud y distancia, participando también el factor de reparación, costo inicial y observaciones directas sobre respuesta estructural en - estructuras afectadas por sismos.

El coeficiente sísmico basal (c) se presenta como espectro de diseño y es la ordenada en la porción horizontal del espectro, que debe emplearse para el --

análisis estático cuando no se considera el período de vibración de la estructura.
La elección del coeficiente depende del riesgo sísmico(planteado en la zonificación) del tipo de suelo, del destino ó importancia de la construcción

Métodos numéricos para la solución de sistemas no lineales

Las ecuaciones de movimiento vistas anteriormente se pueden expresar en forma general así:

$$\ddot{x} = f(\dot{x},\ x,\ t) \quad \ldots \quad \text{Ec. IV.2}$$

Para el sistema de la figura IV.7 por ejemplo, la función es:

$$f(\dot{x},\ x,\ t) = \frac{c}{m}\ \dot{x}\ -\ \frac{k}{m}\ x\ +\ \frac{P(t)}{m}$$

en donde se aprecia la validez del principio de superposición. En el caso de los sistemas no lineales esta función contiene las variables $\dot{x}$, x y t elevadas a una potencia mayor a uno, por lo que la superposición ya no es posible, en estos sistemas las fuerzas recuperadoras y amortiguadoras no son proporcionales al desplazamiento y a la velocidad respectivamente, puesto que éstos dependen a su vez de aquéllas. Designando a la fuerza restauradora total (del resorte y del amortiguamiento) como $Q(x)$ y estableciendo el equilibrio dinámico, resulta:

$$m\ddot{x} + Q(x) = P(t)$$

o sea que en la ecuación IV.2 es, en este caso:

$$\ddot{x} = f(\dot{x},\ x,\ t) = \frac{P(t) - Q(x)}{m} \qquad \text{... Ec. IV.3}$$

cuya solución matemática resulta muy complicada por lo que es preferible hacerlo empleando métodos numéricos.

Estos métodos están basados en dos ideas fundamentales, primero resolver la ecuación IV.2 en intervalos de tiempo determinado, es decir, calcular el equilibrio (estático) de las fuerzas de inercia y de amortiguamiento en el intervalo elegido; segundo tomar en cuenta la variación de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones dentro del mismo intervalo, por lo que la exactitud de la respuesta está en función de la amplitud de los intervalos.

De los métodos que existen para resolver los sistemas no lineales se presentan a continuación el β de Newmark, el θ de Wilson y el de aceleración promedio.

La base del método β consiste en suponer que la curva de la aceleración ($\ddot{x}$) está compuesta de tramos rectos tan pequeños como la exactitud deseada lo requiera. La fig. IV.7 muestra uno cualquiera de esos tramos para un tiempo t dentro de los límites del tramo recto ($s \leq t \leq s+h$), la aceleración está dada por:

$$\ddot{x}\,(t) = \ddot{x}_n + \frac{\ddot{x}_{n+1} - \ddot{x}_n}{h}\,(t - s) \qquad \text{... Ec. IV.4}$$

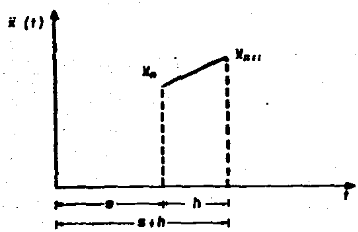


Fig IV. 7 Tramo recto en la curva aceleración-tiempo

Integrando entre s y s+h, se obtiene la velocidad final así:

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x} + \frac{h}{z} (\ddot{x}_{n+1} + \ddot{x}) \qquad \text{... Ec IV.5}$$

integrando nuevamente entre s y s+h, se obtiene el desplazamiento:

$$x_{n+1} = x + h\dot{x} + \frac{h^2}{6} (2\ddot{x}_n + \ddot{x}_{n+1}) \qquad \text{... Ec IV.6}$$

La función de la ecuación Ec IV.3 queda así:

$$\ddot{x} = \frac{P(t_{n+1}) - Q(t_{n+1})}{m}$$

El procedimiento es el siguiente: para cada incremento de tiempo h, se encuentra un valor de aceleración $\ddot{x}$ según la Ec IV.7 y se reemplaza en las ecuaciones Ec IV.5 y 6 para obtener el desplazamiento x, con este valor de x se entra a la gráfica fuerza-elongación del resorte y se halla la fuerza recuperadora correspondiente Q(x) la cual se sustituye en la ecuación Ec IV.7, si el nuevo valor de aceleración $\ddot{x}'$ es igual al inicial la solución es correcta y se procede al intervalo siguiente, de lo contrario se repite la misma operación hasta que los valores inicial y final de la aceleración sean iguales o cercanos. En la fig IV.8 se muestra un diagrama de flujo del procedimiento sistemático. El método se ilustra con un ejemplo en el Apéndice.

El método θ de Wilson opera de manera semejante que el anterior, a diferencia que éste introduce un factor $\theta \geq 1.0$ (usualmente se emplea 1.4), de tal manera se tienen intervalos de $t + \theta\Delta t$, la ecuación con que trabaja es:

$$m\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} + c\dot{x}_{t+\theta\Delta t} + kx_{t+\theta\Delta t} = \bar{R}_{t+\theta\Delta t}$$

donde: $\bar{R}_{t+\theta\Delta t} = R_t + (R_{t+\Delta t} - R_t)$

Por último, el método de Aceleración promedio es aquél que considera el promedio de la aceleración inicial y la final del intervalo:

$$\ddot{x}(\tau) = \tfrac{1}{2} (\ddot{x}_{ti} + \ddot{x}_{ti+s})$$

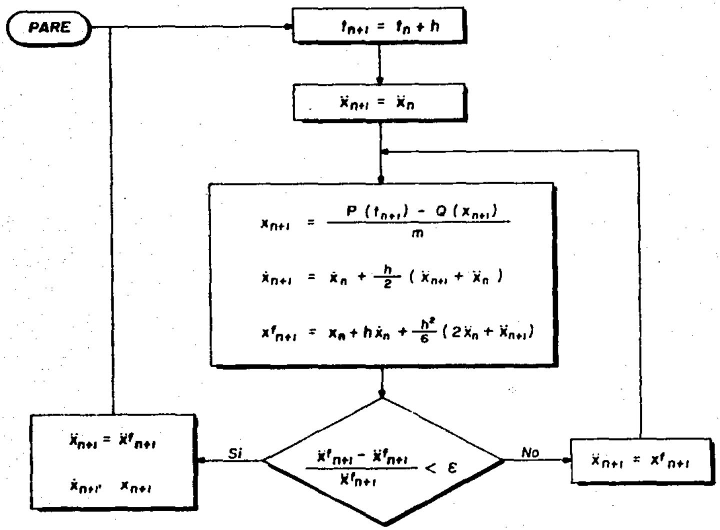


Fig IV.8 Diagrama de flujo de análisis paso a paso

Para calcular la respuesta del sistema utiliza la siguiente expresión:

$$m\,\Delta\ddot{X}_i + c_i\,\Delta\dot{X}_i + k_i \quad x_i = \Delta P_i$$

donde c_i es la pendiente de la tangente a la curva fuerza-velocidad en $\dot{x}_i$, y k_i, es la pendiente de la tangente en la gráfica fuerza-deformación en x_i.

Sistemas no lineales

Según la Ley de Hooke la relación de la carga aplicada a la deformación producida es lineal en toda su extensión y ésto es lo que se ha supuesto en los incisos anteriores en que se han estudiado sistemas oscilatorios con gráficas esfuerzo-deformación de tipo lineal.

Los materiales que se emplean usualmente en las estructuras civiles no se ciñen a este comportamiento. Inicialmente siguen trayectorias esfuerzo-deformación de tipo lineal (o que se pueden considerar como tal) pero a partir de un determinado punto, llamado de fluencia cambian de dirección. Este es el caso por ejemplo, de los miembros estructurales de acero y de concreto reforzado.

La mayoría de las estructuras están diseñadas de tal manera que trabajen en el rango elástico-lineal a lo largo de su vida útil y bajo las cargas estáticas, las cargas dinámicas de viento y vibraciones de máquinas, sin embargo los sismos, mareas y explosiones de gran intensidad esfuerzan a las estructuras más allá del límite elástico entrando en la región plástica, fig. IV.9

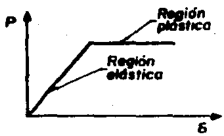


Fig IV.9 Comportamiento no lineal

En donde los miembros dúctiles ofrecen la mayor disipación de energía salvando a la estructura del colapso total. Se puede decir entonces que la mayoría de las estructuras presentan un comportamiento elástico hasta cierto punto y de ahí en adelante entran en un estado no elástico o plástico.

V DEMANDA DE DUCTILIDAD

V.1 Definición de ductilidad

Las estructuras ubicadas en una zona sísmica deben tener la capacidad de deformación "suficiente" para disipar energía cuando se encuentren bajo los efectos de un sismo intenso. Esta capacidad se le da a la estructura proveyéndola de relaciones de ductilidad grandes en los elementos de la misma.
La ductilidad de un miembro estructural se puede definir como su aptitud de adquirir deformación progresiva bajo carga constante o ligeramente creciente sin presentar disminución alguna en su resistencia. La relación de ductilidad se define como la relación entre la deformación máxima y la deformación correspondiente al inicio de la fluencia:

$\left(\frac{em}{ey} \right)$, fig V.1

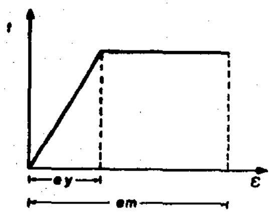


Fig V.1 Diagrama esfuerzo-deformación

La ductilidad depende de un gran número de variables, tales como: tipo de estructura, materiales que la constituyen, proporciones de las secciones transversales de vigas y columnas de acero y para estructuras de concreto reforzado influyen el porcentaje de acero longitudinal y acero transversal, así como las longitudes de anclaje y distribución del acero.

La ductilidad corresponde a un comportamiento inelástico del material ya que implica la fluencia del mismo por lo que es importante distinguir entre la ductilidad del material y la del miembro estructural en estudio.
Hay expresiones algorítimicas para la ductilidad y también parámetros para medirla, pero nada mejor y más representativo que un diagrama de esfuerzo de --

formación como los que se muestran en la fig V.2.

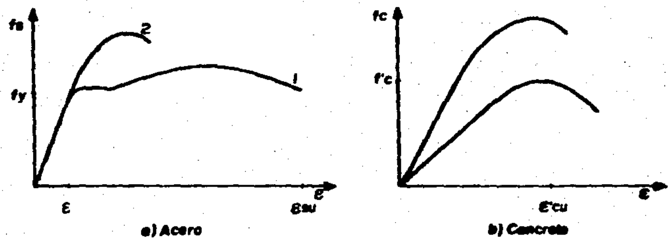


Fig V.2 Diagramas esfuerzo-deformación

De estos diagramas se puede observar que a mayor resistencia menor ductilidad y a la inversa a menor resistencia mayor ductilidad, o sea una deformación grande a carga constante o aproximadamente.
Para un miembro estructural la ductilidad en una cualquiera de sus secciones transversales se determina del diagrama carga-deflexión:

$$Q = \frac{\Delta_u}{\Delta_y}$$

en donde Δ_u y Δ_y son las deflexiones última y de fluencia, respectivamente, fig V.3a
Si el miembro está sometido a flexión la ductilidad tomada de la gráfica momento curvatura (fig V.3b) es:

$$Q = \frac{\phi_u}{\phi_y}$$

Siendo ϕ_u y ϕ_y las curvaturas última y de fluencia en la sección considerada.

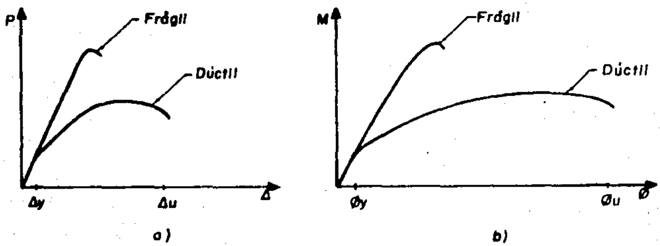


Fig V.3 Diagramas carga-deflexión y momento-curvatura

El diagrama M-ϕ (fig V.3b) es de gran importancia en el diseño de estructuras para cargas dinámicas e incluso para las estáticas ya que es la forma más rápida de visualizar qué tan dúctil y tan resistente es un miembro y así poder diseñar de una manera más segura. El área bajo la curva M-ϕ representa la energía interna; la parte bajo la región elástica es la energía de deformación acumulada en el miembro, mientras que el área bajo la región de post-fluencia corresponde a la energía disipada en las deformaciones plásticas del mismo. Esto se observa claramente por ejemplo, en el segmento del ciclo histerético de un miembro plástico que se muestra en la fig V.4 :

Durante el proceso de carga el elemento se deforma primero elásticamente hasta el punto de fluencia y luego plásticamente hasta que se suspende la aplicación de la carga, si ésta se retira la curva regresa paralelamente a la elástica, pero dejando una deformación permanente en el miembro ϕ_1. Nótese que de la energía total suministrada E_t, se recupera al descargar sólo una porción aproximadamente igual a la energía de deformación E_d, el resto se con

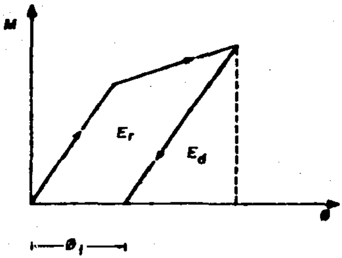


Fig V.4 Ciclo histerético de un miembro bilineal-plástico

sumió en vencer las fricciones internas en la rotación plástica.

Un comportamiento semejante proporciona una manera de disipar aunque sea una parte de la energía proporcionada por el sismo a la estructura, se debe notar que este comportamiento implica deformaciones permanentes en la misma por lo que se deben proveer como un recurso para los casos de un sismo inusualmente severo, pero bajo sismos de magnitud moderada se comportará satisfactoriamente salvo pequeñas reparaciones. De aquí se concluye que una estructura que trabaje elásticamente bajo cualquier condición resulta antieconómica, así mismo una estructura muy dúctil se verá afectada y habrá que repararla constantemente o en el caso de un sismo muy fuerte puede quedar inhabilitada por deformaciones excesivas. Se debe pues fijar un criterio de diseño racional, la estructura ha de soportar elásticamente los sismos de ocurrencia más probable y tener una reserva de ductilidad suficiente para absorber la energía adicional de aquéllos terremotos fuertes que se puedan presentar.

Los coeficientes de diseño sísmico deben ser reducidos en función de la ductilidad de la estructura, c/Q; lo mismo se hará con las "ordenadas" del espectro de diseño sísmico para el análisis modal.

La ductilidad (Q) podrá diferir en las dos direcciones ortogonales en que se analiza la estructura según sea el caso.

V.2 Modelos no lineales para concreto reforzado

Se han realizado estudios en especímenes de concreto reforzado, unos hechos a escala y otros de dimensiones reales, a los cuales se les ha sometido a simulaciones de temblores de gran intensidad y el comportamiento de estos especímenes ha demostrado que existe una asociación de degradación de la rigidez y reducción en la capacidad de absorción de energía de las juntas debido a que la "estructura" tuvo un comportamiento elasto-plástico no lineal durante la excitación del espécimen.
Para estudiar el comportamiento se han propuesto varios modelos de histéresis, pero algunos son muy complicados y con otros los resultados obtenidos son poco representativos de la realidad. Sin embargo uno de estos modelos, el Takeda es uno de los más sofisticados dado que está desarrollado a partir de resultados de varios estudios experimentales, y éstos tienen una buena correlación con el comportamiento estático y dinámico de las juntas de concreto reforzado ensayadas (ref 1). El rendimiento del modelo Takeda fue medido posteriormente en una variedad de elementos a escala probados en la Universidad de Urbana en Illinois (ref 2,3) y los resultados que se obtuvieron, también mostraron una buena correlación entre lo medido y lo calculado. Saiidi (ref 1) hizo un estudio comparativo entre este modelo y el modelo Elasto-plástico, el modelo Bilineal simple, el modelo Clough y el modelo Q-hyst, este estudio se datalla a continuación.

El espécimen de prueba

El espécimen usado para la prueba fue una estructura de concreto reforzado el cual consta de una cimentación, una columna corta y una viga o trabe en la parte superior fig V.5. Además se sujetaron en la unión de columna y viga dos masas de 915 kg cada una. Cerca de la base en la unión de la columna y la cimentación se puso suficiente acero de refuerzo transversal para evitar así la falla en esa zona por esfuerzo cortante.
El acero de refuerzo empleado tenía una f_y de 3 600 kg/cm² para el esfuerzo longitudinal y un f_y de 2 800 kg/cm² para el transversal, el concreto tenía una resistencia a la compresión de 315 kg/cm².

Estudios Analíticos

La prueba que se realizó en el espécimen consistió en los primeros dieciseis segundos (comprimidos a dos) de la componente NS original de El Centro 1940 y la componente S69E de Taft 1952. Estas duraciones son lo suficientemente largas para inducir en el espécimen desplazamientos de amplitud corta y larga. Para cada registro, el análisis se hizo en cinco modelos de histéresis que se describen posteriormente.

Modelo Analítico

El espécimen se idealizó como un miembro elástico lineal que soporta las masas de acero, la viga y la mitad del peso de la columna con todo el peso concentrado en el extremo superior de la columna. En la base se le consideró conectado a un resorte rotacional no lineal. Las características de fuerza-deformación del resorte eran las requeridas para el modelo de histéresis que se estuviera empleando en ese momento. La cimentación se le consideró rígida y empotrada. La respuesta del espécimen se calculó sólo en el sentido horizontal y en el plano del mismo.
El programa de computadora empleado fue el (LARZ) el cual usa la aceleración en la base para calcular el desplazamiento y aceleración de la masa. (ref 4.)

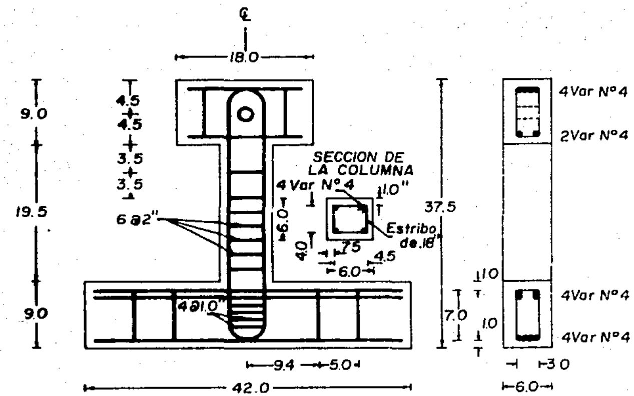


Fig V.5 Espécimen de prueba (ref.8)

V. 3 Modelos de histéresis

Como ya se había mencionado son cinco los modelos de histéresis empleados, ahora se procede a exponerlos, fig V.6.

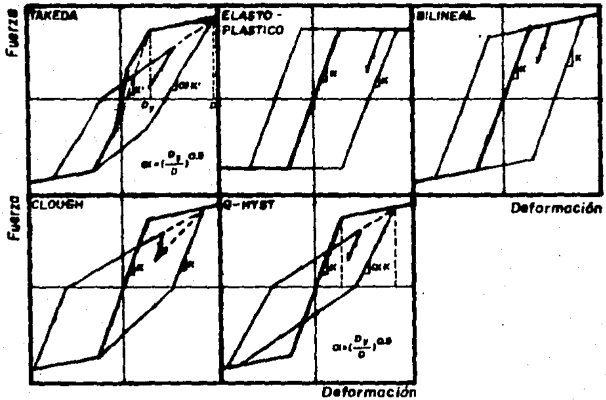


Fig V.6 Modelos de histéresis

Modelo Takeda

Este modelo opera en una línea primaria trilineal, la cual representa el comportamiento elástico, plástico y más allá de la falla, fig V.6. Las deformaciones no lineales empiezan cuando la sección fluye, la pendiente del segmento de descarga desde el punto más allá de la falla es k_t, en la que

$$k_t = k' \; (D_y/D)^{0.5}$$

donde k' es la pendiente de la líneas que unen el punto de fluencia en una dirección con el punto de agrietamiento en la dirección contraria; D es - la máxima deformación (curvatura, rotación o deflexión) en la dirección de la carga; y D_y es la deformación en el punto de fluencia. Con el objeto - de tomar en cuenta la degradación de la rigidez de la estructura una vez - que ha ido más allá del punto de fluencia, la rigidez en el ciclo de recarga es menor que k_t. Esta rigidez está dada por la pendiente de la línea que une el inicio del ciclo de recarga con el punto de máxima deformación - en el sentido del nuevo ciclo de recarga o el punto de fluencia, el que - sea mayor. Este modelo presta mucha atención al comportamiento de las juntas durante las oscilaciones de pequeña amplitud, como resultado de ésto, es un tanto complicado ya que está definido por dieciseis reglas.

Modelo elasto-plástico

La curva principal esfuerzo-deformación de este modelo está representada - por una porción elástica que representa el comportamiento de la sección - agrietada (fig V.6). Por encima del punto de fluencia no se considera ningún incremento de la rigidez. En la parte de descarga se considera con la misma rigidez con la cual se comportó durante el ciclo inicial de carga. Esta consideración contrasta con los resultados obtenidos de pruebas cíclicas efectuadas en juntas o uniones de concreto reforzado.
En el ciclo de descarga no se considera ninguna reducción en la pendiente y este comportamiento no concuerda con los resultados de estudios analíticos de uniones (ref 5, 6). El modelo es simple y puede ser definido por sólo tres reglas que definen los regímenes de cambio de rigidez en la carga, descarga y la recarga.
Si se considera la pobre correlación que existe entre los resultados obtenidos del modelo elasto-plástico y los resultados observados de estructuras de concreto reforzado, la aplicación de este modelo no se justifica -

ya que los resultados difieren mucho entre sí. Sin embargo este modelo se ha empleado para este tipo de estudios debido a su sencillez.

Modelo bilineal

Este modelo es semejante al anterior, excepto porque toma en cuenta el efecto de endurecimiento por deformación para el acero. Por ésto se le considera más representativo de la realidad que el elasto-plástico, sin embargo éste falla al no tomar en cuenta la degradación de la rigidez durante la descarga desde un punto de la rama de post-fluencia y durante la recarga. Igualmente que el modelo anterior, el bilineal es fácil de hacer y está descrito por sólo tres reglas, fig V.6.

Modelo de Clough

Este modelo introduce ya el efecto de la degradación de la rigidez durante el ciclo de recarga (ref 7). Este modelo opera inicialmente en una curva bilineal con una porción con rigidez ascendente en la rama posterior a la fluencia fig V.6. Una vez que la sección ha fluido, la descarga se realiza con la misma pendiente (rigidez) k de la sección pre-fluencia. Cuando la sección es recargada la rigidez es reducida y ésta está determinada por la pendiente de la línea que une el punto donde inicia la recarga con el punto de fluencia o si la sección había ya fluido en la nueva dirección de recarga el punto de máxima deformación en la rama de post-fluencia. La disipación histerética de energía para deformaciones de pequeña amplitud esta tomada en cuenta una vez que la sección ha pasado el punto de fluencia en al menos una dirección. A pesar de tomar en cuenta los efectos de la degradación de la rigidez, es un modelo relativamente simple y está definido por cuatro reglas.

Modelo Q-Hyst

La curva primaria que emplea este modelo es una curva bilineal con una rama ascendente después de la fluencia, fig V.6. La disminución (pérdida) de rigidez es tomada en cuenta tanto para el ciclo de descarga como para el de recarga. La rigidez correspondiente al segmento inelástico de la curva primaria está definida por k_q, donde $k_q = k(D_y/D)^{0.5}$; en esta expresión k es la pendiente de la porción elástica de la curva primaria, D es el valor absoluto de la máxima deformación experimentada y D_y es la deformación correspondiente al punto de fluencia.
Con la idea de simplificar el modelo, el punto de máxima excursión en ambas direcciones es considerado como el punto de máxima excursión en cualquiera de las dos direcciones. La rigidez en el ciclo de recarga está definida como la pendiente de la línea que une a la intersección del último valor de la rama de descarga con el eje de deformación y el punto de máxima excursión. (ref 3).
Este modelo toma en cuenta disipación de energía histerética durante deformaciones de pequeña amplitud siempre que haya fluido la sección en al menos una dirección. Este modelo es relativamente simple y está definido por cuatro reglas. El modelo Q-Hyst fue desarrollado por Saiidi y Sozen (ref 3).

V.4 Movimientos en la base (ref 8)

Para el estudio de la referencia 8 se emplearon dos ecelerogramas, la componente NS de El Centro 1940 y la componente S69E de Taft 1952; la razón por la que se usaron esos dos acelerogramas es que son ampliamente conocidos en el medio. Los primeros dieciseis segundos de cada uno de los sismos se dividió por un factor de ocho, con objeto de producir una aceleración con períodos semejantes a los del espécimen del estudio.

V.5 Resultados Analíticos (ref 8)

Para cada valor se calcularon el desplazamiento del centroide de la masa y los movimientos en la base, usando los modelos de histéresis descritos en secciones anteriores. Los desplazamientos obtenidos con el modelo Takeda - son considerados como los que mejor representan la realidad y fueron, por - tanto, usados para evaluar las respuestas del espécimen obtenidas con los - otros modelos, para ésto se superpusieron los resultados del modelo Takeda - con cada uno de los otros cuatro modelos.
Además de los desplazamientos del centroide de las masas, se graficaron los movimientos de la base en términos de desplazamiento de la masa, hecho ésto para cada uno de los modelos de histéresis, con el objeto de estudiar el comportamiento histerético del espécimen en relación con el desplazamiento del centroide.

Respuesta para El Centro

Las gráficas correspondientes a la respuesta del espécimen al sismo de El Centro, se encuentran en la fig V.7, en ésta la línea continua representa la respuesta obtenida con el modelo Takeda y la discontinua los otros modelos en su caso. Para los primeros 0.2 seg, antes de que hubiera deformación no lineal, la respuesta en los cinco modelos es prácticamente la misma, lo cual indica que ignorar la resistencia de agrietamiento de la sección no tiene ninguna influencia, los modelos Elasto-plástico y Bilineal - producen resultados considerablemente menores que los obtenidos con el Takeda. Esto se atribuye a que éstos dos métodos consideran una disipación de energía relativamente grande (área incluida bajo las curvas de histéresis), es por ésto que la energía interna es absorbida sin desarrollar grandes desplazamientos, como se puede observar en la figura V.8. Entre

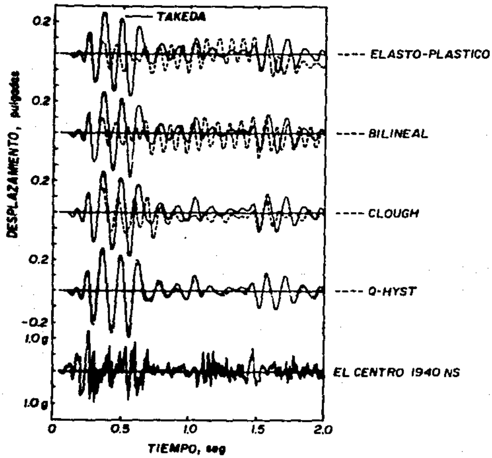


Fig.V.7 Desplazamientos para El Centro

T = 0.7 y 1.5 seg los desplazamientos obtenidos con el Takeda fueron pequeños mientras que los obtenidos con los otros dos modelos, (elasto-plástico y bilineal) son valores pico mayores, ésto se debe a que ninguno de los dos consideran disipación de energía histerética para pequeños desplazamientos, como resultado de ésto se obtuvieron grandes desplazamientos. En la fig V. 9 se puede hacer una comparación de los resultados obtenidos y se observa que la inclusión de el endurecimiento por deformación propuesto para la rama de postfluencia de la curva primaria en el modelo bilineal no ayuda a obtener mejores resultados.

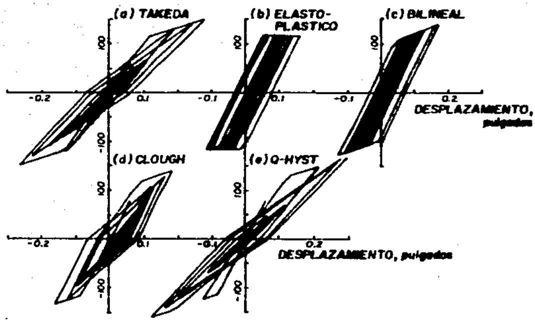


Fig V.8 Respuesta histerética para El Centro

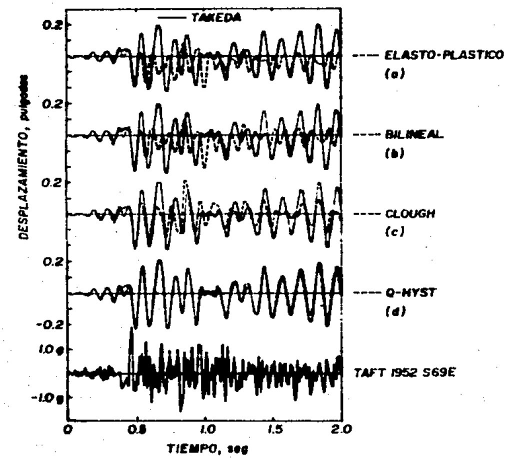


Fig V.9 Desplazamientos para Taft

En la misma fig V.7 se presentan los resultados obtenidos con el modelo - Clough, en éste se nota que al tomar en cuenta los efectos de la disminución de rigidez en el ciclo de recarga resulta en una curva relativamente más cercana a la obtenida con el Takeda. La mejoría es más evidente en la parte de respuesta de pequeñas amplitudes.
Las respuestas usando el modelo Q-Hyst muestran una excelente correlación - con los resultados del modelo Takeda, fig V.7. Las dos curvas son casi - iguales a lo largo de todo el sismo y tiene además valores pico muy semejantes. Una comparación cualitativa de las curvas de histéresis se puede observar en la fig V.8 donde hay una semejanza muy aceptable en la cantidad de energía disipada considerada por los dos modelos.

V.6.a Respuesta para Taft

Las figuras V.9 y 10 presentan los resultados de desplazamiento y las curvas de histéresis para el sismo Taft. Como se observó en el caso anterior los resultados obtenidos con los modelos elasto-plástico y bilineal, muestran una pobre correlación con los obtenidos con el modelo Takeda. Las - curvas son significativamente diferentes en el contenido de frecuencia y en los valores pico. Las respuestas obtenidas con el modelo Clough muestran una mejor correlación, la inclusión de disminución de rigidez mejora especialmente el contenido de frecuencia de la respuesta, sin embargo los valores pico obtenidos son en muchas ocasiones más pequeños que los resultados del modelo Takeda. En cambio los resultados obtenidos con el modelo - Q-Hyst, son verdaderamente muy cercanos a lo del Takeda, a lo largo de toda la respuesta.

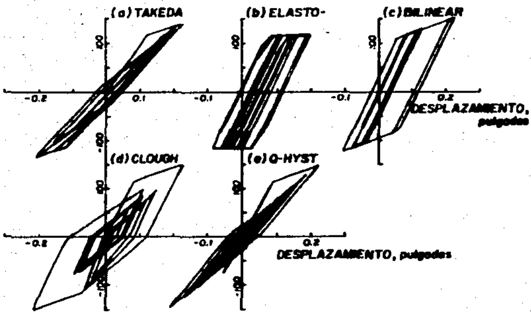


Fig V 10 Respuesta histerética para Taft

VI ANALISIS DE ESTRUCTURAS CON RESISTENCIA ASIMETRICA

Se dice que una estructura es asimétrica cuando la fuerza de fluencia es mayor en una dirección que en otra, y ésto obedece a diferentes razones como la configuración estructural (fig VI.a y b), a la presencia de fuerzas horizontales asimétricas (fig VI.c) o a la inclinación de la estructura por asentamientos diferenciales (fig VI.d) que es un fenómeno que se presenta con frecuencia en las Zonas del Lago y de Transición del Valle de México (ref 9). Este problema reviste mayor importancia cuando la estructura se verá sometida a fuerzas sísmicas como las de los sismos de septiembre de 1985, algunas estructuras sufrieron incrementos significativos en sus asentamientos diferenciales, lo que motivó el interés del presente capítulo.

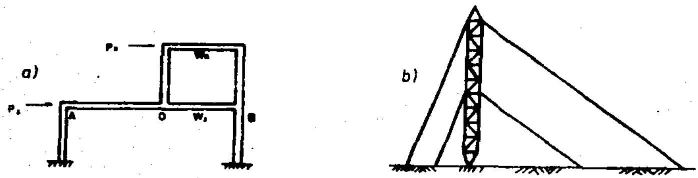


Fig VI.1 Configuración estructural asimétrica

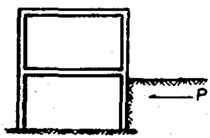


Fig VI.1.c Fuerzas horizontales asimétricas

Asimetría en resistencia estructural

Para el presente estudio se consideran estructuras de un grado de libertad (1gdl) como el mostrado en la fig VI.2. El sistema de 1gdl está constituido por una masa concentrada m, un amortiguador cuyas propiedades son independientes de la deformación, una relación de amortiguamiento de 5 por ciento como fracción del crítico y un elemento flexionante vertical en cuyo extremo inferior se puede formar una articulación plástica.

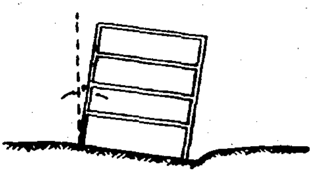


Fig VI.1d Asentamientos diferenciales

La fuerza de fluencia de un sistema de 1gdl en condiciones de simetría en su resistencia, es decir, cuando las resistencias son iguales en ambos sentidos, está dada por:

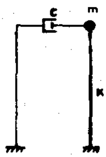


Fig VI.2 Sistema de un grado de libertad

$$F = Wc_y \quad \text{... Ec VI.1}$$

donde W es el peso de sistema ($W = m \cdot g$) y c_y es el coeficiente sísmico como fracción de la gravedad la deformación de fluencia que le corresponde es:

$$\delta_y = c_y \, g/\omega^2 \quad \text{... Ec VI.2}$$

donde ω es la frecuencia natural del sistema.En este estudio se supone que la rigidez no se degrada ante cargas alternadas.

El comportamiento fuerza-deformación en la base del elemento se supone bi lineal con rigidez inicial k y pendiente en la segunda rama $k_1 = 0.01k$ (fig VI.3).

Quando una estructura no ha sufrido asentamientos diferenciales, es decir está perfectamente vertical, la resistencia es igual en cualquier dirección y por consecuencia la fuerza de fluencia también es igual, en caso contrario la fuerza de fluencia será mayor en un sentido y menor en la misma magnitud que en el otro.

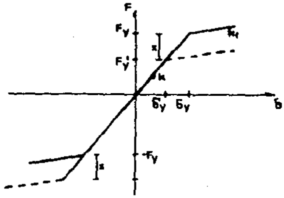


Fig VI.3 Relación fuerza–desplazamiento

En la fig VI.4 se muestra una estructura que tiene una inclinación θ con respecto a la vertical, de esta manera se puede descomponer el peso W en una fuerza perpendicular al eje (W senθ) y otra paralela a éste (W cosθ).

Fig VI.4 Sistema inclinado

Así, al actuar una fuerza horizontal sobre la estructura se sumará a la componente horizontal reduciendo la fuerza de fluencia en el sentido de la inclinación y aumentándola en la misma cantidad para el sentido contrario, por lo que las fuerzas de fluencia resultan:

$$F'_{y_i} = \beta_i \, W(c_y + \beta_i x) \qquad \ldots \text{ Ec VI.3}$$

$$i = 1,2 \; ; \qquad \beta_1 = 1 \text{ y } \beta_2 = -1$$

Procedimiento de análisis

Para los casos analizados se eligieron como parámetros para caracterizar las estructuras el período natural T, el grado de asimetría x, y el coeficiente sísmico c_y.

Durante el análisis se procedió de la siguiente manera: dado un sistema con un período natural de vibración y una fuerza F_y, se consideraron sucesivamente diferentes grados de asimetría para obtener familias de curvas carga-defor

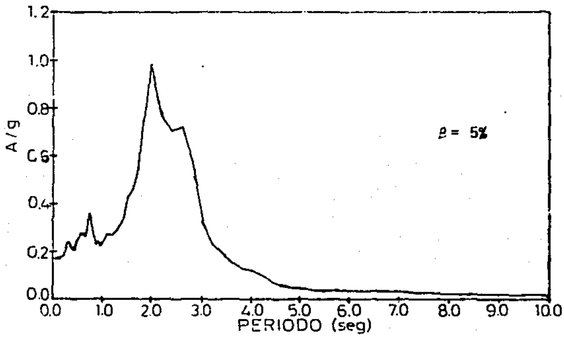


Fig VI.5a Espectro de respuesta para SCT–EW,85.

mación asimétricas con niveles de fluencia F'_{y_i} (Ec VI.3). Para la excitación de las estructuras se emplearon simulaciones de los sismos registrados en la Secretaría de Comunicaciones y Transportes, componente EW del 19 de Septiembre de 1985 y de El Centro, California componente NS del 18 de marzo de 1940, SCT-EW,85 y El Centro-NS,40, respectivamente.

El primero es un proceso de banda angosta y el segundo de banda ancha como se observa en las figs VI.5a y b, en donde se muestran los espectros de respuesta de ambos acelerogramas.

En las figs VI.6a y b se presenta la evolución del contenido de energía de los acelerogramas simulados, como puede observarse el contenido de energía de la parte intensa del acelerograma de SCT-EW,85 es apreciablemente mayor que el de El Centro-NS,40 (ref 10).

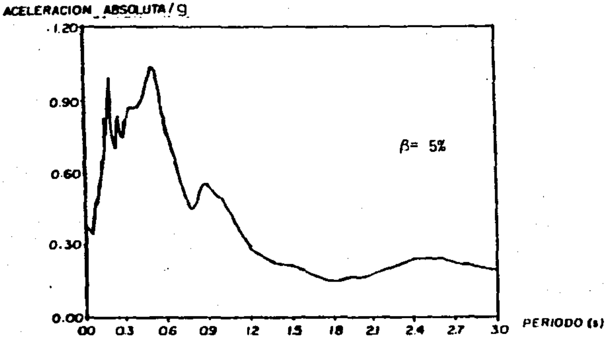


Fig VI.5b Espectro de respuesta para El Centro-NS,40.

La respuesta que interesa en este análisis es la demanda de ductilidad μ, la cual se obtiene integrando las ecuaciones de movimiento paso a paso en el tiempo y calculando las relaciones δ_u / δ_y.

En el análisis dinámico se empleó el programa de computadora DRAIN-2D (ref 11). Este programa emplea el modelo Takeda, el cual como se expuso en el capítulo V, es el modelo del que mejores resultados se obtienen en el estudio

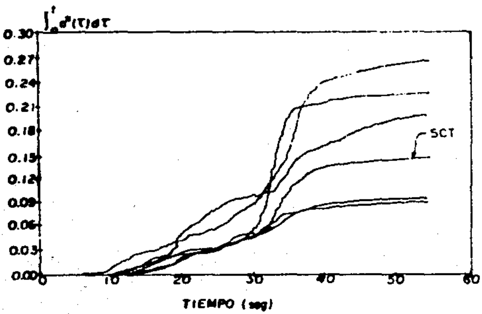


Fig VI.6a Funciones acumuladas del contenido de energía correspondientes a los acelerogramas simulados SCT-EW, 85.

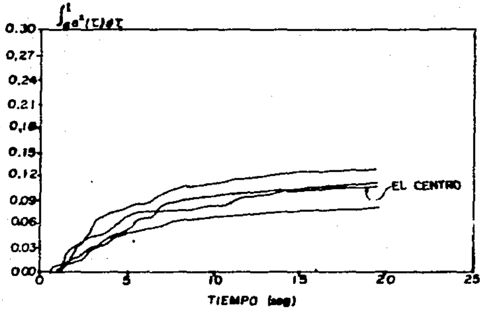


Fig VI.6 b Funciones acumuladas del contenido de energía correspondientes a los acelerogramas simulados El Centro – NS, 40.

sobre el comportamiento no lineal de las estructuras (ref. 8).

Casos analizados

Para el análisis se diseñaron cuatro estructuras diferentes caracterizadas por los parámetros señalados (T, x, c_y) y correspondientes a otros tantos coeficientes de diseño sísmico (c_y = 0.10, 0.13, 0.20 y 0.27); para cada caso se supusieron cinco grados de asimetría (x = 0.0, 0.005, 0.010, 0.015 y 0.020). Los períodos naturales se eligieron de tal manera que se cubriera un intervalo próximo a las máximas ordenadas del espectro de aceleraciones de cada registro, de tal modo que para suelo blando se escogieron los siguientes períodos: T = 0.43, 0.61, 0.87, 1.73, 2.0, 2.34, 2.6 y 3.5 s; y para terreno duro T = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8 y 1.2 s.

Valor esperado de la demanda de ductilidad

Para cada una de las estructuras analizadas asociadas a su grado de asimetría (x) se calculó la demanda de ductilidad μ y el valor medio $\bar{\mu}$ de dicha de manda. Algunos valores medios representativos se muestran en las figs VI.7a

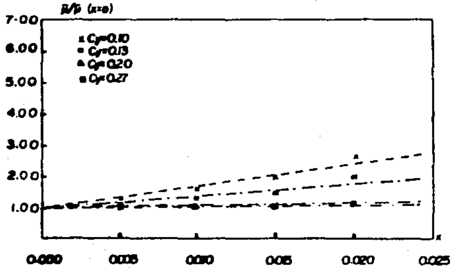


Fig VI.7a Demandas de ductilidad normalizadas de estructuras con periodo de 0.87s, ante el sismo SCT-EW,85

y b y en las figs VI.8a y b, normalizadas respecto a los valores medios de los sistemas simétricos correspondientes ($\bar{\mu}$ / $\bar{\mu}_{x=0}$).

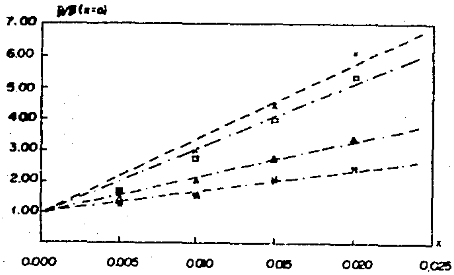


Fig VI.7b Demandas de ductilidad normalizadas de estructuras con periodo de 2s, ante el sismo SCT-EW,85

De la observación de estas figuras se nota el efecto de la variación del período en las estructuras, en estructuras con T = 2s la demanda de ductilidad

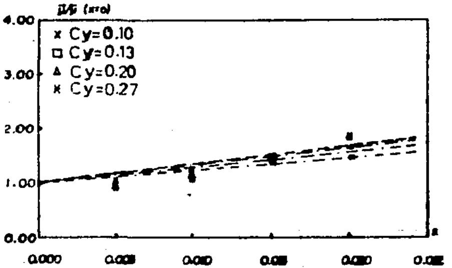


Fig VI.8a Demandas de ductilidad normalizadas de estructuras con período de 0.3s, ante el sismo El Centro-NS,40

es aproximadamente del doble de la que se obtiene en una estructura con un período de T = 0.87s.

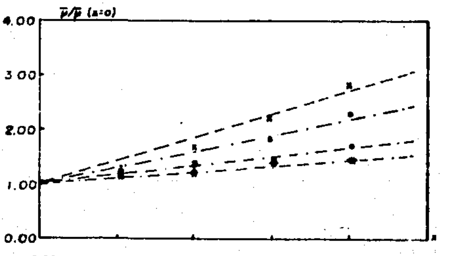


Fig VI.8b Demandas de ductilidad normalizadas de estructuras con periodo de 0.6s, ante el sismo El Centro-NS,40

Es posible ajustar curvas de regresión a dichos valores con alguna de las siguientes fórmulas:

$$\bar{\mu} / \bar{\mu}_{x=0} = 1 + Ax + Bx^2 \qquad \text{... Ec VI.5}$$

$$\bar{\mu} / \bar{\mu}_{x=0} = 1 + Dx \qquad \text{... Ec VI.6}$$

En las ecuaciones VI.5 y 6, A, B y D son función de la relación F_e / F_y, donde F_e es la fuerza elástica máxima que desarrolla el sistema y F_y la fuerza de fluencia cuando el sistema tiene resistencia simétrica ($x = 0$). Las ecuaciones VI.5 y 6 se pueden representar como sigue:

$$\bar{\mu} / \bar{\mu}_{x=0} = 1 + (F_e / F_y)(A'x + B'x^2) \qquad \text{... Ec VI.7}$$

$$\bar{\mu} / \bar{\mu}_{x=0} = 1 + \alpha(F_e / F_y)x \qquad \text{... Ec VI.8}$$

En el presente trabajo se hizo una regresión lineal usando el método de mínimos cuadrados.

En las tablas VI.1 y VI.2 se muestran los valores de D, F_e / F_y y α asociados a SCT-EW,85 y El Centro-NS,40, respectivamente. Los valores de F_e / F_y menores que la unidad no se tomaron en cuenta porque ésto implica un comportamiento elástico lineal de las estructuras ($F_e > F_y$).

Análisis de resultados

Los resultados presentados en las figs VI.7 y 8 muestran que la demanda de ductilidad es proporcional al grado de asimetría de las estructuras, es decir a mayor asimetría mayor demanda de ductilidad.

El efecto de la asimetría es más desfavorable en el sismo de SCT-EW,85 que en el de El Centro-NS,40, para el primero las demandas normalizadas para estructuras con grado de asimetría alto ($x = 0.02$) resultan hasta 6.2 y en sismos de banda ancha, para estructuras iguales son menores que 3. Esta -

diferencia puede obedecer a los siguientes factores :

1) Los sismos de banda angosta como el de SCT,85 implican un movimiento regular (casi periódico) y una estructura con asimetría en su resistencia afectada por un sismo de este tipo da lugar a una suma de efectos en el sentido más débil de la misma; por el contrario un sismo de banda ancha como el de El Centro,40 el movimiento es irregular y no permite la suma de deformaciones, por lo que la demanda en este caso es menor que en el anterior.

2) El contenido medio de energía de la familia de acelerogramas SCT,85 (fig VI.6a) es 1.38 veces mayor que el de la familia de El Centro,40 (fig VI.6b). El de éste es igual a 0.108 / g^2.

3) La duración de la parte intensa del sismo de SCT,85 es mayor que la de El Centro,40.

En las tablas VI.1 y 2 se ve la relación que existe entre el coeficiente de diseño c_y y la pendiente de las rectas ajustadas, la cual crece para coeficientes bajos, es decir, las demandas de ductilidad son mayores en estructuras diseñadas con coeficientes sísmicos bajos.

Demandas de ductilidad inferidas a partir de un análisis estático

El factor de carga obtenido de un análisis estático es el factor por el que se debe multiplicar las fuerzas de diseño para intentar tomar en cuenta el efecto de asimetría de la estructura. La demanda de ductilidad esperada para una estructura simétrica en fluencia se calcula igual a $F_e / F_y = c / c_y$, mientras que la que se espera en una estructura asimétrica es F_e / F'_y = --- $c / (c_y \pm x)$, por lo que el factor de carga resulta:

$$F_c = \frac{F_y}{F'_y} = \frac{c_y}{c_y - x}$$

Tomando los valores extremos para $c_y = 0.10$ y $x = 0.02$, el coeficiente anterior resulta 0.10 /0.08 = 1.25 que es mucho menor que el que se obtendría de un análisis dinámico (figs VI.7 y 8).

Reglas generales para los casos analizados

Con los valores obtenidos de los análisis dinámicos realizados se puede calcular la demanda de ductilidad en estructuras con grado de asimetría x y relación de fuerza máxima elástica y fuerza de fluencia F_e / F_y, con la siguiente expresión propuesta:

$$\bar{\mu} = (1 + \bar{\alpha}\,(F_e \,/\, F_y)x)\ \bar{\mu}_{x=0} \qquad \text{... Ec VI.9}$$

donde $\bar{\alpha}$ es el promedio de valores obtenidos a partir de las tablas VI.1 y 2. Estos valores para los casos analizados en este trabajo son:

a) Terreno blando (SCT,85)

$$\bar{\alpha} = 23.0 \qquad \text{... Ec VI.10}$$

b) Terreno duro (El Centro,40)

$$\bar{\alpha} = 7.41 \qquad \text{... Ec VI.11}$$

Los valores dados por las ecuaciones anteriores son altos si se les compara con lo que recomienda el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal. En éste se recomienda el empleo de una expresión semejante a la Ec VI.9 para calcular la demanda de ductilidad en estructuras con resistencia asimétrica y propone multiplicar las fuerzas de diseño por lo que resulta de dicha expresión, el valor de α recomendado es de 5, el cual parece bajo si se le compara con los obtenidos aquí.

Es importante hacer notar que en el análisis aquí realizado no se aplicó - ningún factor de seguridad (carga y resistencia) que el Reglamento toma en cuenta; además a la estructura analizada no se le consideró ninguna reserva de resistencia como puede ser la continuidad que poseen en la realidad, aun que no estén diseñadas específicamente para soportar temblores.

TABLA VI.1 RESULTADOS DE AJUSTE DE LAS RECTAS PARA SCT-EW,85

Período T	Coef. dis cy	Relación F_e/F_y	Factor D	Factor α
0.43	0.10	2.05	42.04	20.51
	0.13	1.58	28.87	18.31
	0.20	1.02	16.20	15.80
0.61	0.10	2.59	50.65	19.56
	0.13	1.99	46.80	23.49
	0.20	1.30	26.26	20.20
	0.27	0.96	4.49	4.69
0.87	0.10	2.37	72.39	30.54
	0.13	1.82	42.21	23.15
	0.20	1.19	10.08	8.47
	0.27	0.88	10.04	11.44
1.30	0.10	3.22	134.81	41.83
	0.13	2.48	77.33	31.19
	0.20	1.61	18.82	11.69
	0.27	1.19	12.06	10.10
1.73	0.10	7.39	211.29	28.59
	0.13	5.68	171.31	30.13
	0.20	3.70	96.26	26.02
	0.27	2.74	51.99	18.99
2.00	0,10	10.78	232.33	21.56
	0.13	8.29	200.15	24.14
	0.20	5.39	116.67	21.65
	0.27	3.99	75.29	18.86
2.34	0.10	6.74	227.75	33.79
	0.13	5.18	190.22	36.69
	0.20	3.37	95.86	28.45
	0.27	2.50	55.51	22.24
2.60	0.10	5.55	191.77	34.53
	0.13	4.27	148.99	34.88
	0.20	2.78	55.39	19.93
	0.27	2.06	31.97	15.54
3.50	0.10	2.23	59.03	26.47
	0.13	1.72	20.43	11.91
	0.20	1.11	5.85	5.27
	0.27	0.83	3.38	4.09

TABLA VI.2 RESULTADOS DEL AJUSTE DE LAS RECTAS PARA EL CENTRO-NS,1940

Período T	Coef. dis c_y	Relación F_e/F_y	Factor D	Factor α
	0.10	6.69	47.19	7.05
0.20	0.13	5.15	25.39	4.93
	0.20	3.35	29.83	8.90
	0.10	7.23	34.19	4.73
0.30	0.13	5.56	32.39	5.82
	0.20	3.62	29.74	8.22
	0.27	2.68	23.19	8.65
	0.10	8.46	49.91	5.90
0.40	0.13	6.51	40.78	6.27
	0.20	4.23	16.92	4.00
	0.27	3.13	10.01	3.20
	0.10	10.07	60.47	6.01
0.50	0.13	7.74	52.91	6.83
	0.20	5.03	41.75	8.30
	0.27	3.73	16.97	4.55
	0.10	8.23	87.16	10.59
0.60	0.13	6.33	62.36	9.85
	0.20	4.12	35.19	8.54
	0.27	3.05	25.09	8.23
	0.10	5.20	56.49	10.86
0.80	0.13	4.00	41.79	10.45
	0.20	2.60	30.68	11.80
	0.27	1.93	11.74	6.10
	0.10	3.15	37.31	11.84
1.20	0.13	2.42	12.71	5.24
	0.20	1.58	11.77	7.45
	0.27	1.17	6.72	5.76

VII. CONCLUSIONES

Determinar la respuesta de una estructura bajo solicitaciones sísmicas tiene gran importancia para el diseño, ya que al conocerla permite considerar valores de diseño racional que garantizan un comportamiento adecuado y seguro durante la vida de la misma a un costo razonable.

Las computadoras se han convertido en una herramienta indispensable para el análisis de las estructuras.Estas permiten realizar análisis dinámicos paso a paso basados en modelos matemáticos, lo que ha permitido un gran avance en este sentido, con estos modelos se pueden simular diferentes condiciones variando uno ó más parámetros que tipifican la estructura. El programa de computadora DRAIN-2D empleado en el presente trabajo utiliza el modelo Takeda, el cual ha sido probado comprobando sus resultados con los medidos en modelos a escala, por lo que sus resultados se consideran confiables.

Al estudio de estructuras asimétricas en su resistencia como consecuencia de asentamientos diferenciales se debe dar especial atención ya que es un fenómeno que se presenta con frecuencia en las zonas de Lago y de Transición de la Ciudad de México, mismo que se ha visto agravado en los últimos años por el intenso bombeo profundo de los mantos acuíferos lo que ha provocado severos problemas de asentamientos y fisuramiento en las arcillas del subsuelo.

De los análisis de este tipo de estructuras se determinó que la demanda de ductilidad es mayor en estructuras asimétricas y varían en proporción directa al grado de asimetría, lo que puede implicar demandas mayores a las calculadas con un análisis estático. Por otra parte se demostró que la asimetría es más desfavorable ante sismos como el de SCT-1985 que ante el del Centro-1940 , ésto se debe entre otras razones a las características del movimiento como un período casi regular, contenido medio de energía mayor y a la duración de la parte intensa.

Se presenta una expresión simple (Ec. VI.9) para valuar la demanda esperada de ductilidad como función de la fuerza elástica máxima desarrollada entre su fuerza de fluencia, de el grado de asimetría y de un factor $\bar{a}$, que resulta igual a 23.0 para estructuras ubicadas en terreno blando y 7.41 para las de terreno duro (SCT-EW y el Centro respectivamente). Dichos valores $\bar{a}$ son mayores que los propuestos en el actual Reglamento de Construcciones del Distrito Federal, por las consideraciones expuestas en el párrafo anterior. Una expresión menos conservadora que la dada por la Ec. VI.9 es la propuesta en la Ec. VI.7.

En el futuro se deberá ampliar este estudio con el fin de proponer valores de diseño para estructuras situados en suelos pertenecientes a la zona de Transición así como el efecto de la duración de la excitación.

REFERENCIAS

1 Takeda T., Sazen, M.A. y Nielsen, N.N., "Reinforced Concrete Response to Simulated Earthquakes" Journal of the structural Division, ASCE, Vol. 96, No. ST12, Dec., 1970, pp 2557- 2573

2 Otani, S., y Sozen, M.A. "Simulated Eartquake Test of R/C Frames" Journal of the Structural Division, ASCE, vol. 100, No. ST3 Mar., 1974, pp. 687-701.

3 Saiidi, M., y Sazen, M.A. "Simple and Complex Models for Nonlinear Seismic Response of Reinforced Concrete Structures" Structural Research, series No. 465, Civil Engineering Studies, University of Illinois, Urbana, Ill., Vol., 1979.

4 Saiidi, M., "User's Manual for the LARZ Family, Computer Programs for Nonlinear Seismic Analysis of Reinforced Concrete Planar Structures" Structural Research, series No. 466, Civil Engineering Studies, University of Illinois, Urbana, Ill., Vol. 1979.

5 Kreger, M.E., y Abrams, D.P., "Measured, Hysteresis Relationships for Small-Scale Beam-Colum Joints" Structural Research series No. 453, Civil Engineering Studies, University of Illinois, Urbana, Ill., Aug., 1978.

6 Popov, E.P., " Seismic Behavior of Structural Subassemblages" Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 106, No. ST7, July, 1980 pp. 1451 - 1474.

7 Clough, R.W., y Johnston, S.B., "Effect of Stiffness Degradation on Earthquake Ductility Requirements" Proceedings, Japan Earthquake Engineering Symposium, Tokio, Japan, Oct., 1966, pp. 195-198.

8 Mehdi Saiidi, A.M. ASCE "Hysteresis Models for Reinforced Concrete" - Reno Nevada, May 1982, pp. 1077-1087.

9 Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, 1987.

10 Ruiz, S.E., Grigoriu, M, Rosenblueth, E. y Lira E, "Simulación numérica del acelograma registrado en 1985 en la S.C.T., Componente EW" VII Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica , Soc. Mexicana de Ingeniería Sísmica, pp. 19-21 , Nov. 1987.

11 Powell, G.H., " DRAIN-2D User's guide" Informe EERC No. 73-22 Earthquake Engineering Research Center, Universidad de California, Berkeley, California, Oct. 1973.

BIBLIOGRAFIA

Estrada Uribe Gabriel, "Estructuras Antisísmicas", Cía Editorial Continental S.A. de C.V., 1984.

Ruiz Gómez Sonia, Rosenblueth Emilio, Diederich Ronant, "Respuesta Sísmica de Estructuras con Asimetría de Fluencia" VII Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Querétaro, Qro,1987.

Newmark N.M. Rosenblueth E, "Fundamentos de Ingeniería Sísmica" Ed. Diana 1982.

Bathe Klaus-Jürgen, Wilson Edward, "Numerical Methods in Finite Elements Analysis" Ed. Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

Craig Roy R. " Structural Dynamics an Introduction to Computer Methods" Ed. John Wiley & Sons, 1981.

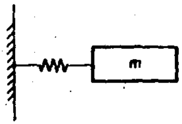
RECONOCIMIENTOS

Deseo hacer patente un especial agradecimiento a la Dra. Sonia Ruiz G por su paciencia y acertada dirección de la presente tesis.

GRACIAS

Ejemplo resuelto usando el Método β de Newmark

El sistema que se muestra en la fig A.1.a, está sometido a la fuerza excitatriz de una explosión indicada en la fig A.1.b. El resorte tiene el diagrama de resistencia-elongación mostrada en la fig A.1.c. Se desea encontrar el comportamiento del sistema en la etapa de vibración forzada.



$m = 0.1$ kg/seg^2/cm

Fig A-1 (a) Sistema plástico

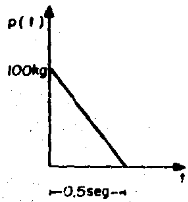


Fig A-1 (b)

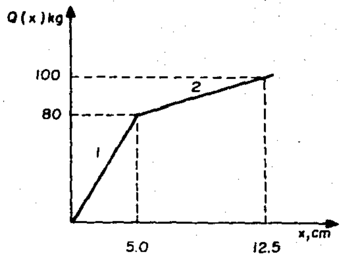


Fig A-1 (c)

La rigidez del resorte en la zona elástica 1 es :

$$k = \frac{80}{5} \; ; \qquad k = 16 \text{ kg/cm}$$

y por lo tanto la ecuación de dicha recta es:

$$Q_1 = 16x$$

Pasando el primer punto de fluencia en la zona elástica 2, la relación Q-x está dada por:

$$Q = 80 + 4(x-5)$$

el período del sistema en la zona elástica 1 es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0.1}{16}}\,; \quad T = 0.5 \text{ seg}$$

Los intervalos se suponen generalmente como T/10, por lo que:

$$h = T/10 = 0.05$$

Inicialmente la Ec IV.7 da:

$$\ddot{x}_0 = \frac{100 - 0}{0.1} = 1\,000 \text{ cm/seg}^2$$

Con este valor se inician las iteraciones, las cuales están indicadas en la tabla 1.

Al comenzar el tercer ciclo de iteración, se observa que el desplazamiento obtenido es mayor de 5 cm, es decir, que el resorte ya fluyó por primera vez. Ahora es necesario encontrar el momento en que ésto ocurrió para poder continuar con las iteraciones. El último intervalo antes de la fluencia es:

$$h^* = \frac{5 - 3.95}{65.2} = 0.0161$$

o sea que : $t^* = 0.1 + 0.0161 = 0.1161$

La carga P(t*) se determina en la fig A.2.b como;

$$P(t^*) = \frac{100}{0.5}\,(0.5 - 0.1161) = 76.8 \text{ kg}$$

La aceleración dada por la Ec IV.7 es:

$$\ddot{x}_{n+1} = \frac{76.8 - 80}{0.1} = -32$$

Este resultado se verifica con un ciclo de iteración (véase la tabla 1), el - proceso continua en la misma forma hasta que se encuentra que la velocidad -- cambia de signo, lo que indica que el móvil viaja ahora en dirección opuesta y se comienza a descargar el resorte. El punto de quiebre en el diagrama Q-x

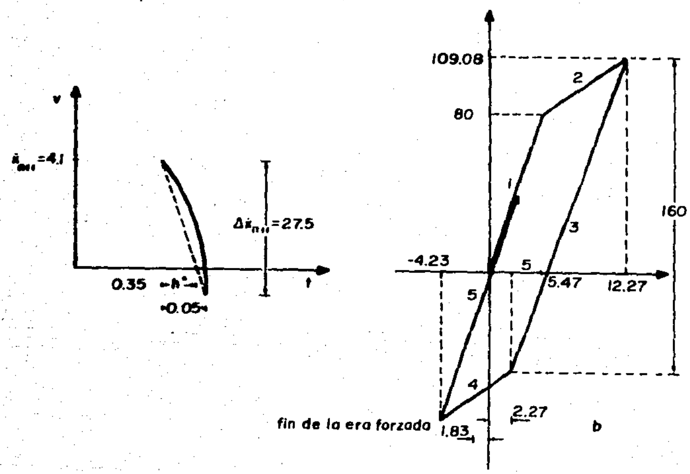


Fig A-2. Ejemplo: Sistema plástico por el metodo β coincide con el momento en que la velocidad del móvil es cero el cual se determina a partir de la fig A.2.a, así

$$h^* = \frac{0.05 \cdot 23.1}{28.5} = 0.04$$

Con este intervalo se prosigue la iteración como antes. Una vez determinada la elongación correspondiente a la velocidad nula, se puede encontrar la carga máxima a que quedó sometido el resorte:

$$Q = 80 + 4(12.27 - 5) = 109.08 \text{ kg}$$

La trayectoria Q-x de descarga del resorte 3 conserva la misma pendiente que la de la carga inicial. Cuando toda la carga ha sido removida (Q=0) el resorte presenta una deformación permanente de :

$$x = 12.27 - \frac{109.08}{16} \quad ; \quad x = 5.47 \text{ cm}$$

O sea que la ecuación de la trayectoria 3 se puede escribir como:

$$X_3 = 16\ (x - 5.47)$$

Poco antes de terminar la era de la vibración forzada (P = 0) ocurre una nueva afluencia en el resorte. El momento exacto en que ésto sucede es:

$$t^* = 0.45 + 0.045 = 0.495 \text{ seg}$$

Siendo:

$$h^* = \frac{5.47 - 2.27}{70.6} = 0.045$$

el intervalo correspondiente que debe emplearse en el nuevo ciclo de iteracción, además:

$$P(t^*) = \frac{100 - 0.005}{0.5} = 1 \text{ kg}$$

$$\ddot{x}_{n+1} = \frac{51 - 1}{0.1} = 500$$

Con éstos valores se continua el proceso iterativo. El segundo punto de fluencia ocurre cuando la carga Q en el resorte es de - 80 kg. con respecto al punto de fluencia anterior, es decir:

$$Q = 109.08 - 160 = 50.92 \text{ kg}$$

La elongación es entonces de 2.27 cm con respecto a la posición inicial del móvil, por lo tanto la ecuación de la trayectoria Q-x es:

$$Q_4 = -50.92 - 4(2.27 - x)$$

Cuando la carga externa P(t) llega a cero termina la era de vibración forzada y comienza la oscilación libre. En este momento que ocurre a $t^* = 0.5$ seg, el resorte tiene una elongación instantánea de:

$$x_o = 5.47 + 1.83 = 7.30 \text{ cm}$$

contados a partir de la nueva longitud del resorte en reposo, una vez que adquirió deformación permanente, mientras que el móvil viaja a una velocidad de $v_o = -81.3$ cm/seg sobre la trayectoria 4, la carga del resorte es entonces :

$$Q = -50.92 - 4(2.27 + 1.83) = -67.4 \text{ kg}$$

El sistema se puede tratar por lo tanto de acuerdo con las leyes de la vibra-

ción libre no amortiguada con condiciones iniciales.
Las repetidas fluencias cambian laspropiedades elásticas del resorte (la pendiente del diagrama Q-x) y de hecho, la frecuencia del sistema. En la trayectoria 4 la rigidez del resorte es:

$$k_4 = \frac{67.4 - 50.92}{2.27 - 1.83} = 4.02$$

y la frecuencia angular correspondiente es:

$$\omega = \sqrt{\frac{4.02}{0.1}} = 6.35$$

La oscilación libre del sistema comienza bajo condiciones iniciales de velocidad y desplazamiento $v_o = -81.3$ y $x_o = 7.30$, respectivamente. La amplitud máxima está dada en este caso por:

$$x = \sqrt{7.30^2 + (81.3/6.35)^2} = 14.75 \text{ cm}$$

Siendo tal elongación mayor que la deformación permanente adquirida, el resorte sufrirá nuevas fluencias en la era de la vibración libre. Los resultados para la era forzada están indicados con asterisco en la tabla 1. En la fig A.2.b se observa la trayectoria carga-deformación que sigue el resorte.

TABLA 1   Ejemplo. Sistema plástico por el método β

1	2	3	4	5	6	7	8	9
h	t_{n+1}	$\ddot{x}^{i}_{n+1}$	$\Delta\ddot{x}_{n+1}$	$\dot{x}_{n+1}$	Δx_1	Δx_2	x_{n+1}	$\ddot{x}^{f}_{n+1}$
0.05	0.05	1000	50	50	0	1.25	1.25	700
	P=90 kg	700	42.5	42.5	0	1.12	1.12	721
		721	43	43*	0	1.13	1.13*	719*
0.05	0.10	719	35.9	78.9	2.15	0.9	4.18	130
	P=80 kg	130	21.2	64.2	2.15	0.653	3.93	170
		170	22.2	65.2*	2.15	0.667	3.95*	168*
0.05	0.15	168	8.4	73.6	3.26	0.21	7.42 > 5 cm	
	P=70 kg				(vease apéndice)		→ hay fluencia	
0.0161		-32	1.09	66.3*	1.05	0.013	5.0*	-32*
0.0339	0.15	-32	-1.09	65.2	2.25	-0.02	7.23	-189
	P=70 kg	-189	-3.75	62.5*	2.25	-0.05	7.20*	-188
0.05	0.20	-188	-7.25	55.2	3.12	-0.24	10.08	-402
	P=60 kg	-402	-14.9	47.6*	3.12	-0.33	9.99*	-400
0.05	0.25	-400	-20.0	27.6	2.38	-0.50	11.87	-574
	P=50 kg	-574	-24.5	23.1*	2.38	-0.58	11.79*	-572*
0.05	0.30	-572	-28.5	-5.4	Cambio de signo en la velocidad			
	P=40 kg		(vease apéndice)		→ comienza la descarga			
0.04	0.29	-572	-23.1	0.0*	0.94	-0.46	12.27*	-572*
	P=42 kg							
0.01	0.30	-572	-5.7	-5.7	0.0	-0.03	12.24	-670
	P=40 kg	-670	-6.2	-6.2*	0.0	-0.03	12.24*	-670*
0.05	0.35	-670	-33.5	-39.7	-0.3	-0.84	11.37	-640
	P=30 kg	-640	-32.9	-39.1	-0.3	-0.83	11.41	-651
		-651	-33.0	-39.2*	-0.3	-0.83	11.41	-651
0.05	0.40	-651	-32.2	-71.4	-1.8	-0.81	8.8	-330
	P=20 kg	-330	-24.5	-64.7	-1.8	-0.68	8.93	-355
		-355	-25.0	-64.2	-1.8	-0.68	8.93*	-355
0.05	0.45	-355	-17.8	-82.0	-3.21	-0.44	5.28	98
	P=10 kg	98	-6.4	-70.6*	-3.21	-0.25	5.47*	100*
0.05	0.50	100	-6.4	-77.0	-3.53	-0.26	1.63<2.27	
	P=0 kg				(vease apéndice)		→ hay fluencia	
0.045	0.495	500	-13.4	-84.0*	-3.53	-0.33	2.27*	501*
	P=0.1kg							
0.005	0.50	501	2.5	-81.5	-4.2	0.01	-1.83	568
	P=0 kg	568	2.7	-81.3*	-4.2	0.01	-1.83	568*

fin de la era forzada

Simbología empleada en la tabla I

1 $h = T/10$

2 $t_{n+1} = t_n + h$

3 de la Ec IV.7 o del 9 anterior

4 $\Delta\dot{x}_{n+1} = \dfrac{h}{2}(\ddot{x}_n + \ddot{x}^f_{n+1})$

5 $\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \Delta\dot{x}_{n+1}$

6 $\Delta x_1 = h\dot{x}_n$

7 $\Delta x_2 = \dfrac{h^2}{6}(2\ddot{x}_{n+1} + \ddot{x}^i_{n+1})$

8 $x_{n+1} = x_n + \Delta x_1 + \Delta x_2$

9 de la Ec IV.7 con $Q(x_{n+1})$ para 8

* resultados para la era forzada