Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

LA MUSICA EN LAS MATEMATICAS GRIEGAS

T E S I S

Que presenta:

RENATO GALICIA BRITO

para obtener el título de:

MATEMATICO

México, D. F. Septiembre 1989

Índice

Índice de tablas y figuras

TABLAS

FIGURAS

Presentación

> La proporción del todo con su mitad o de la mitad con el todo es tan natural que es la primera que debe ser entendida. Esto debe predisponernos en favor del intervalo de octava, cuya razón es 1 : 2. La unidad es la fuente de los números, y 2 es el primer número...

Si diésemos a leer la cita anterior a cualquiera que posea cierto conocimiento de las Matemáticas Griegas, probablemente supondría que se trata de un fragmento de algún tratado musical antiguo, pues la exclusión de la unidad entre los números, y su función como generadora de éstos, es una idea netamente griega.[1]

Sin embargo, el texto citado pertenece, nada menos, que al *Tratado de Armonía* de Jean Philippe Rameau, ¡publicado en el año de 1722! Puede objetarse que Rameau, siendo músico, no estaba al tanto de la 'novedosa' (Stevin muere en 1620) bienvenida a la unidad entre los números. Pero cuando nos enteramos de su fructífera relación con d'Alembert, debemos pensar que su trabajo era reconocido en el medio matemático y no puede, por tanto, tomarse a la ligera.[2]

Al parecer Rameau pretendía, al escribir el párrafo citado, utilizar un lenguaje análogo al de los antiguos helenos, empleando, de hecho, principios e ideas pergeñados desde la antigüedad clásica, lo cual nos da pie para preguntarnos qué hay en tales ideas para que perduren tanto tiempo y con tal intensidad.

Se ha mencionado repetidamente que existe una relación entre Música y Matemáticas, pero pocas veces se estudia con detalle en la literatura, ya sea de una o de otra materia, hasta qué punto y de qué manera se da tal conexión. El tema es discutido con frecuencia en los libros de historia general de las matemáticas tan sólo desde el punto de vista pitagórico y de una manera superficial. En ese afán de simplicidad, y por razones naturales de espacio, son apenas mencionados los trabajos musicales de Arquitas, Euclides, Ptolomeo, Nicómaco y otros personajes de las Matemáticas Grie-

---

[1] Jones (1987) 8.

[2] Helmholtz (1877) 232.

gas. Figuras como las de Aristoxeno, y junto a él otros teóricos menores de la Música Griega, simplemente no son tratadas.

Si se habla del Quadrivium (Astronomía, Aritmética, Geometría y Música) tan sólo se dice que tal asociación se daba en el Medioevo y no se hace hincapié en el origen griego de semejante idea. Según los prejuicios propios de nuestro tiempo, resulta de cierta manera natural el parentesco entre Astronomía, Aritmética y Geometría, pero ¿qué tiene que ver la Música en todo esto?

La idea de este trabajo es justificar y explicar la presencia de la Teoría Musical como parte de las Matemáticas Griegas y sus zonas de influencia, aportando los antecedentes necesarios y extendiéndose en ejemplos concretos que vinculen a la Música con las otras materias del *Quadrivium*. Es por lo anterior que las secciones de esta tesis se ligan, complementándose entre sí, pero tratando siempre de aportar razones que validen la inclusión de la Música entre las cuatro *mathemata* griegas.

Como punto de partida, se prefirió contemplar el aspecto humanístico del tema, así que la tesis se inicia presentando un panorama general de la Música en la sociedad griega, así como su papel en la educación elemental. Al definir con precisión el término *Mousike*, se aclara la distinción, que se hace más adelante, entre éste y la Teoría Musical (*Harmonike*). Se describen también la *Lira* y la *Kithara*, dos de los instrumentos musicales cuyo conocimiento clarifica algunas ideas expuestas en secciones posteriores.

Harmonike (Capítulo 2) es de carácter más teórico y aporta los conceptos necesarios para plantear, en sus términos originales, los problemas que se tratarán más adelante: tal es el caso, por ejemplo, de los nombres dados a los intervalos consonantes griegos, que serán utilizados en la construcción de las escalas pitagórica en el capítulo 4. Se presentan también las escuelas de Aristoxeno y Pitágoras como las principales corrientes griegas de concepción de la teoría musical.

De las cuatro *Mathemata* al *Quadrivium* (Capítulo 3) es donde se da unidad a las materias tratadas en los tres subsiguientes capítulos y analiza a éstas, como parte de un todo que se prolonga hasta el Medioevo. En cierto sentido es aquí donde descansa la tesis central de este trabajo; pero por sí mismos, los argumentos aducidos serían palabras hueras si se les despojara de los ejemplos dados posteriormente.

El monte de las Musas (Capítulo 4) nos provee del primer ejemplo concreto de una relación entre Música y Geometría: presenta la construcción detallada de la escala pitagórica y su relación con el *Helicon*, un instrumento geométrico, raramente mencionado en los libros de historia de las matemáticas griegas.

La Armonía de las Esferas (Capítulo 5) discute la conexión entre Música y Astronomía, procurando respetar la exposición del tema en sus términos originales: sin duda el ejemplo obligado es el mito de la Armonía de las Esferas. A la exposición clásica de Platón, en *La República* y el *Timeo*, se agregan las tablas de Ptolomeo y Nicómaco, en las que se hacen explícitos los 'intervalos musicales' que existen entre los planetas.

El Teorema de Arquitas (Capítulo 6) muestra una aplicación de la Aritmética a un problema concreto de la Música: la imposibilidad de dividir el tono en partes iguales. Semejante imposibilidad se deriva de la relación entre la rígida teoría musical griega y los supuestos pitagóricos de la representación de las consonancias mediante razones numéricas. Se llevan, de esta manera, los problemas de las magnitudes inconmensurables a la Música.

Por último, un par de aclaraciones importantes: El autor de esta tesis está al tanto de las recientes discusiones en torno a la cuestión del Álgebra Geométrica, sólo que prefiere mantenerse neutral adoptando por economía, pero con conciencia, una notación moderna cuando la exposición griega es innecesariamente compleja.[3] Por otra parte, la insistencia en la introducción de términos griegos obedece al propósito de plantear los conceptos en sus términos originales, evitando de esta manera, los malentendidos que surgen al presentar traducciones que siempre pecan de inexactas.

[3] *Cfr.* Unguru (1975) 67–114; Freudenthal (1976) 189–200.

Para cada nueva palabra griega se da la transliteración correspondiente en cursivas con el objeto de valerse de ésta en referencias posteriores. Muchas de las palabras introducidas en este trabajo en su forma original, adquirieron con el transcurso del tiempo una mayor riqueza y, cuando es el caso, un contenido matemático de peculiar interés para nuestro estudio. Como lo plantea Knorr: la diferencia metodológica entre el filólogo y el historiador de las matemáticas es que el primero examina en detalle los textos, pero no saca a la luz nuevos aspectos matemáticos de interés, mientras que la tarea del segundo es la de que cobren sentido matemático los pasajes estudiados, sin que para ello sean necesarias traducciones literales.[4]

[4] Knorr (1979) 567–568.

Nota al Lector

Las notas al pie de página pueden parecer excesivas, pero de esta manera se facilita al lector la búsqueda, en la bibliografía, de datos dudosos o interpretaciones cuestionables.

Las referencias a obras clásicas se hacen siguiendo las convenciones establecidas en las versiones autorizadas. Cuando en pie de página aparece: Aristóteles, *Política* VIII 3 1337^b23; nos referimos al apartado 3 del libro VIII de la *Política*, página 1337, columna b, renglón 23; numeración que corresponde a la edición estándar (1831) de Immanuel Bekker del texto griego de las obras de Aristóteles. A tal edición se apega la versión inglesa utilizada en este trabajo. De los *Elementos* de Euclides, se prefiere la edición de Heath que aparece en la bibliografía. La división de los *Diálogos* de Platón a que se hace referencia, en los pies de página correspondientes, es la de la traducción de Jowett.

En el Apéndice IV se da una cronología de los autores clásicos que aparecen en ésta tesis, lo que se considera un buen auxiliar para situarse en las distintas épocas, dado el extenso período de tiempo considerado.

Si bien es deseable, no es imprescindible poseer conocimientos de música; de hecho, basta con un somero conocimiento de la notación musical y de los intervalos. Quien lo desee puede revisar estos conceptos en cualquier libro de teoría de la música, como el convencional, escrito por Danhauser.

Puede llamar la atención la reiterada mención de Michaelides en los pies de página. Debe reconocerse que fue un valioso auxiliar en la elaboración de esta Tesis pues, las exposiciones de Barbera o de Winnington-Ingram son, por momentos, un tanto abstrusas.

Capítulo 1

Mousike

En opinión de los estudiosos de la Música en la Antigua Grecia es particularmente difícil elaborar una historia detallada del tema, pues son sumamente escasos los fragmentos que subsisten. En lo que se refiere a testimonios concretos de música escrita, tan sólo se completa el equivalente a casi 600 compases, que representan apenas, cerca de 15 piezas (o fragmentos de piezas) para un período de siete siglos.

Con todo, el panorama no es tan desolador como parece, pues es posible deducir ciertos hechos a partir de evidencias arqueológicas tales como: restos de algunos instrumentos, vasos en los que aparecen pinturas representativas de la actividad musical y, sobre todo, escritos, desde los que tratan incidentalmente el tema hasta los tratados filosóficos o teóricos.

Sabemos de la existencia de un mítico compositor Olimpo que introdujo la *harmonia* lidia[1] concepto que junto con el de *harmonia* frigia, testifica una cierta influencia asiática que se remonta al siglo -VIII.

La Música fue un elemento presente en la mayoría de los actos públicos: culto a los dioses (ditirambos, cantos procesionales e himnos a Apolo), matrimonios, funerales, etc. Los músicos, lo mismo que los atletas en los Juegos Olímpicos, competían en los llamados Juegos Píticos, competencias de destreza vocal e instrumental en las que se celebraba la victoria de Apolo sobre Pitón, la serpiente de Delfos.

La Música Griega era básicamente homofónica (*i.e.* con una sola línea melódica), pero era permitido que cantaran dos o más voces simultáneamente siempre y cuando lo hicieran al unísono o a la octava. Un instrumento acompañante podía llevar una melodía produciendo, ya sea intervalos consonantes (octava, quinta o cuarta) o disonantes, aunque no se puede hablar de algo parecido a lo que hoy llamamos contrapunto.

[1] Michaelides (1978) 225.

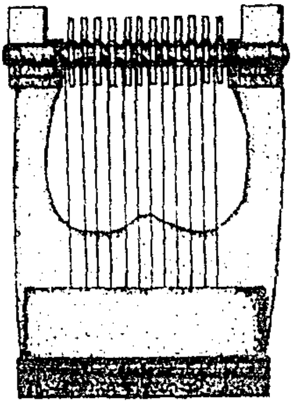
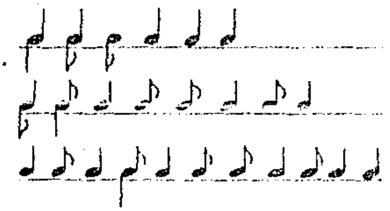


Figura 1. *Kithara.*

Gracias a las características propias de la lengua griega ésta posee una melodía propia y un ritmo basado en la cantidad de sílabas y acento de las palabras, hecho que debía ser tomado en cuenta en la composición musical. Así pues, no es posible distinguir entre los ritmos de la Música Griega y los metros de la Poesía Griega. La unidad de la teoría métrica o rítmica era, por tanto, el pie (cada una de las partes de dos, tres o más sílabas de que se compone y con que se mide un verso) y no el compás. Presentamos algunos tipos de metros en su notación musical actual:



Docmiaco

Gliconio

Endecasílabo Sáfico

Alrededor del siglo -V se gestan los inicios de la teoría musical (*Harmonike*, de la cual trataremos en el apartado siguiente), así como un carácter más definido de las formas musicales griegas. Se acuña entonces el término *Mousike* ($Mov\sigma\iota\kappa\acute{\eta}$) que designa a todas aquellas artes que se encuentran bajo la protección de las Musas, en particular la poesía lírica.[2]

El concepto *Mousike* atiende a todas aquellas facultades intelectuales y espirituales, y tiene como complemento natural, en la educación elemental griega, a la *Gymnastike* (Γυμναστική) relativa al desarrollo armónico del cuerpo humano. Agregando a estas actividades la lectura y la escritura se completan las materias de estudio propias para un joven griego hasta la edad de 14 años.[3]

Esto nos lleva a mencionar un concepto de peculiar importancia: el *ethos* (ηθος) que es el carácter moral que la música inspira al alma.[4] Se puede hablar del *ethos* de los ritmos, de las melodías, de los modos (tipos de las diferentes escalas llamadas *harmoniai*) e incluso ¡de cada una de las notas musicales! Como ejemplo presentamos los tres *ethos* de la *melopoeia* (composición melódica) tal y como los conciben Cleónides y Arístides Quintilianus:

- *Diastalicon*, relacionado con lo majestuoso y la disposición viril del alma, usado por tanto en la tragedia y la incitación de actos heróicos.
- *Sistalicon*, asociado con la humildad y los sentimientos amorosos, compasivos y benevolentes.
- *Hesychasticon*, que comunica tranquilidad y paz al alma. Apropiado para los himnos religiosos, encomios, consejos, etc.

Si bien es cierto que para los helenos *hombre musical* es el entendido en las humanidades en general, no debemos suponer que la educación musical permite actitudes disipadas. Platón, por poner un caso extremo, subordina la música y el arte en general a sus concepciones políticas, convirtiéndose en uno de los más implacables censores de la antigüedad.[5]

Junto a Platón, no podemos dejar de mencionar a Damón (maestro de música de Sócrates) pues sus ideas en torno al valor educacional de la música perduraron cerca de ocho siglos, influyendo incluso a Arístides en el

[2] Michaelides (1978) 213.
[3] Aristóteles, *Política* VIII 3 1337^{b}23.
[4] Michaelides (1978) 110–113.
[5] Sarton (1952) 413.

siglo +III.[6] Aristóteles, con una posición más moderada que la de Platón, reconoce que deben ser elegidos con cuidado aquéllos *ethos* adecuados para la educación musical de los jóvenes:

> Nosotros aceptamos la división de las melodías propuestas por ciertos filósofos en melodías de carácter, melodías de acción y melodías apasionadas e inspiradoras, cada una teniendo, como ellos dicen, un modo [musical] correspondiente. Pero añadimos que la Música debe ser estudiada, no con la finalidad de uno sino de muchos beneficios, es decir, con vistas en la educación, o purificación [posible alusión a la catársis pitagórica[7]] ...la Música también sirve para el gozo intelectual, la relajación, la recreación después del esfuerzo. Es claro, por lo tanto, que todos los modos deben ser empleados por nosotros, pero no de la misma manera. En la educación los modos más expresivos del carácter serán los preferidos...[8]

A partir del siglo –IV, hemos de entender *Mousike* en un sentido análogo al de la Música de hoy día, es decir como un arte con derecho a existencia propia (desligado de la poesía) y con tareas tan extensas que surgen serios intentos de clasificación, para delimitar las funciones de éstas. Si bien un precursor importante en tal empresa es Lasus de Hermione en el siglo –VI, se consideran más completas las propuestas por Aristoxeno (siglo –IV), Alypius (siglo +II) y Arístides (siglo +III) siendo, como sigue, la de este último:[9]

- Música Teórica
  1. Física
     - a *Arithmetikon* (ἀριθμητικὸν)
     - b *Phisikon* (φυσικόν)
  2. Técnica
     - a *Harmonikon* (ἁρμονικόν) estudia los sonidos, intervalos, modulaciones, claves, etc.
     - b *Rhythmikon* (ρυθμικὸν) la ciencia del ritmo.

[6] Michaelides (1978) 71–72.
[7] Van der Waerden (1950) 93; Sarton (1952) 219; Guthrie (1987) 84.
[8] Aristóteles, *Política* VIII 7 1341^{b}33.
[9] Michaelides (1978) 214; Cohen (1975) 302–307.

c *Metrikon* (μετρικόν) la ciencia del metro.

- Música Práctica (llamada también educacional: παιδευτικόν.)

1. *Chrestikon* (χρηστικόν) realización de la melodía.

a *Melopoeia* (μελοποιΐα) composición melódica.

b *Rhythmopoeia* (ρυθμοποιΐα) 'llevar a cabo' el ritmo.

c *Poeesis* (ποίησις) composición musical.

2. *Exageltikon* (ἐξαγγελτικόν) ejecución musical.

a *Organikon* (ὀργανικόν) el arte de tocar los instrumentos.

b *Odikon* (ᾠδικόν) el canto.

c *Hypokritikon* (ὑποκριτικόν) actuación dramática.

Llevando nuestra atención a la impresionante variedad de instrumentos musicales nos formamos una idea del grado de refinamiento de la Música Griega (véase Tabla 1). Sería demasiado extenso adentrarnos en el estudio de todos ellos, así que centraremos nuestra atención en dos importantes miembros de la familia de las cuerdas: la *Lira* y la *Kithara*.

La descripción de la *Lira* (Figura 2) y su variedad principal, la *Kithara* (Figura 1), (privilegio, lo mismo que el *Aulos*, sólo de los profesionales), resultará particularmente útil en lo sucesivo, pues nos ayudará a visualizar más fácilmente los conceptos que se manejen. La *Lira* poseía cuerdas de tripa, todas de igual longitud y emplazadas en una caja de resonancia hecha de caparazón de tortuga o bien de madera. Mientras la *Lira* podía ser fácilmente sostenida en vilo, la *Khitara* de dimensiones considerablemente mayores, precisaba de ser apoyada contra el cuerpo. Aun cuando ambos instrumentos carecían de diapasón era posible obtener sonidos armónicos y ligeras variaciones en el tono 'parando' convenientemente las cuerdas.

Al parecer, en el siglo -VIII, existió una variedad simplificada de *Khitara* que apenas tenía entre tres y cinco cuerdas. Para el siglo -VI el número se fijó en siete (aunque en ocasiones se habla de la presencia de una octava cuerda agregada, según Nicómaco, por Pitágoras). Finalmente, hacia el siglo -V, algunos innovadores como Phrynis y Timoteo elevaron a doce el número de cuerdas, hecho que es testificado por evidencias pictográficas.

En todo caso la *Lira* heptacorde es considerada como clásica pues, al estar ligada con el culto a Apolo, es la variedad predilecta de Píndaro, Platón y Aristóteles. La afinación de la *Lira* es un asunto difícil que no ha sido esclarecido por los historiadores; se considera más adecuado tratar el tema en el apartado siguiente, donde se discuten ciertas cuestiones de la Teoría Musical Griega.

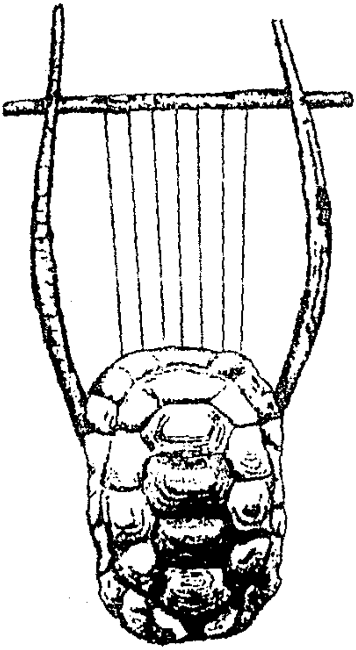


Figura 2. *Lira*.

Tabla 1.
Instrumentos musicales griegos

Cuerdas (*Enchorda*)	Alientos (*Empneusta*)	Percusiones
Kithara	*Aulos*	*Tympana*
Lira	*Plagiaulos*	*Kymbala*
Pektis	*Syrinx*	*Krotala*
Magadis	*Hydraulis*	*Askaros*
Barbitos	*Salpinx*	*Psithyra*
Psalterion	*Keras*	*Bakylion*
Phorminx	*Tityrinos aulos*	*Krembalon*
Trigonon	*Bombyx*	*Discos*
Psaltinx	*Dactylikos*	*Kroupezion*
Monochordon	*Calamus*	*Echeion*
Phoenix	*Paedikoi auloi*	*Kodon*
Lyro-phoenix	*Dizygoi auloi*	*Seistron*
Simikion	*Libys aulos*	*Oxybaphoi*
Pandoura	*Niglaros*	*Roptron*
Heptachordon	*Photinx*	
Skindapsos	*Therentikos*	
Spadix	*Spondeiakos*	
Nablas	*Gingras*	
Tripous	*Hippophorbos*	
Trichordon	*Parthenioi*	
Epigoneion	*Pythikos aulos*	
Pentachordon	*Tyrrenos aulos*	
Elymos	*Embaterios aulos*	
	Athena	
	Kochlos	
	Strombos	

Capítulo 2

Harmonike

La *Harmonike* (*Ἁρμονικὴ*) es una importante rama de la ciencia del *Melos* (*Μέλος*, que según Platón consta de tres elementos: las palabras, la melodía y el ritmo)[1] cuya tarea principal es la de tratar todo lo concerniente a la 'harmonia', y especialmente a 'la teoría de sistemas y claves'.

Para otros, como Cleónides, *Harmonike* es una ciencia teórica y práctica (en el sentido de acción), cuyos objetos de estudio son siete: los sonidos, los intervalos, los géneros, los sistemas, los tonos, la modulación y la *melopoeia*. El término va denotando actividades cada vez más extensas, hasta convertirse en un sinónimo de Música tal como la entendemos hoy día; así lo maneja, por ejemplo Georgios Pachymeres, historiador y teórico musical bizantino (siglo +XIII), permitiendo que el equívoco tome carta de naturaleza en el medioevo.

Como se dijo en el apartado anterior los fragmentos relativos a la Teoría Musical son los más abundantes. Han llegado a nosotros algunos trabajos de Aristoxeno; la *Harmonika* de Ptolomeo; la *De Musica* (Περὶ μουσικῆς), en tres libros, de Arístides Quintilianus; la *Isagoge* (*Introducción a la Harmonike*) y la *Sectio Canonis* (División del Canon) de Euclides; y la *Introducción a la Harmonika* de Nicómaco, tratado que, junto con las introducciones a la Aritmética, la Astronomía y la Geometría, completa su serie del Quadrivium.

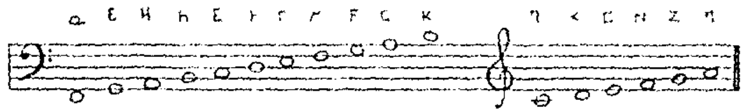
Los especialistas intentaron analizar una porción de este material en cuanto estilo, modo, género, forma, etc. Sus investigaciones sólo han dado modestos resultados, pero con el descubrimiento de nuevos fragmentos los estudios parecen prometedores. El tema es amplísimo, sin embargo para los objetivos de este trabajo se tratarán sólo los temas de notación, intervalos, escalas y sistemas.

---

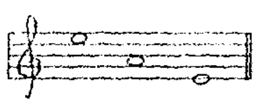
[1] Platón, *La República* III 398.

Para la notación de la afinación, *onomasía* (ὀνομασία), los griegos empleaban dos sistemas, uno para la música vocal y otro para la música instrumental. Hay muchos escritores de la antigüedad tardía que hacen referencia a tales notaciones, sin embargo es Alypius quien hace el tratado más extenso en su *Isagoge mousike* (siglo +III ó +IV). La notación vocal se basa en el alfabeto jónico y se originó no antes del siglo -V cuando fue finalmente adoptado este alfabeto. La notación instrumental, también alfabética, consiste de grupos triádicos. Dentro de cada grupo, un simple símbolo rota a través de tres posiciones indicando diferentes afinaciones. Sin embargo, tales símbolos eran ambiguos.[2]

Si por *genus* (γένος) se entiende la diferente disposición de los intervalos al conformar un sistema cualquiera de notas, tenemos que, para el *genus* diatónico (el más común por estar construído con base en tonos y semitonos) los símbolos utilizados son:[3]



Retomando la cuestión de la afinación de la *Lira*, dejada pendiente en el Capítulo 1, podemos exponer el asunto de manera progresiva: según Boecio (que atiende a su vez a Nicómaco) la afinación antigua de la *Lira* se basaba en el tetracorde $C - F - G - C'$.[4] Como hemos mencionado se añadieron cuerdas posteriormente pero, según los estudiosos, no se modificó la afinación de las cuerdas originales. Así, para la *Lira* tricorde se tiene una afinación que contiene un intervalo de quinta y uno de cuarta:



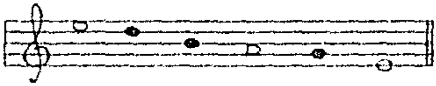
Y para la *Lira* hexacorde, gracias a la inserción de tres notas: dos notas

[2] Barbera (1986) 350.

[3] Michaelides (1978) 239.

[4] Helmholtz (1877) 255.

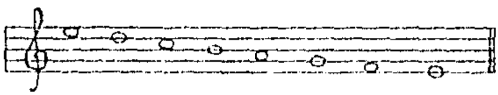
en el intervalo de quinta y una en el intervalo de cuarta, se tiene:



Finalmente, hacia el siglo –VI, momento en el que la *Lira* adquiere ocho cuerdas. Para designar a las notas se utilizaban diferentes nombres cuyo origen se explica por su posición en las cuerdas del instrumento (véase Tabla 2).

Tabla 2. *Onomasia*

E_5	*Nete*	νήτη = la más baja	la nota más alta
D_5	*Paranete*	παρανήτη	próxima al *Nete*
C_5	*Trite*	τρίτη	Tercera
B_4	*Paramese*	παραμέση	próxima a la *mese*
A_4	*Mese*	μέση	a la mitad
G_4	*Lichanos*	λιχανός =meñique	cuerda tocada con el meñique
F_4	*Parhypate*	παρυπάτη	próximo al *hypate*
E_4	*Hypate*	ὑπάτη =la más alta	la nota más baja



No es de extrañar que la nomenclatura resulte confusa: alto y bajo, según algunos estudiosos depende de la posición en que se sostenía la *Lira*, mientras que según otros, en el Oriente Semítico se designaba como 'sonido bajo' a lo que hoy llamamos sonido agudo o alto, y viceversa.[5]

En este punto conviene presentar, aunque sólo sea de manera sucinta, algunos conceptos que se darán reiteradamente en el transcurso de este trabajo.

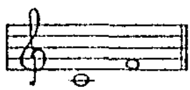
[5] Michaelides (1978) 227.

A la diferencia de afinación o entonación que existe entre dos notas (intervalo) se le denominaba *diastema* (διάστημα), y a aquellos intervalos consonantes (en el sentido griego) se les denominaba *symphonia* (συμφωνία) mientras que a los disonantes se les llamaba *diaphonia* (διαφωνία). A propósito, resulta notable una observación hecha por Helmholtz:

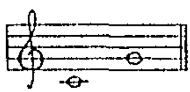
> ...la consonancia es una sensación contínua del tono y la disonancia una intermitente. Dos tonos consonantes fluyen sin turbulencias en una corriente; los tonos disonantes se cortan uno al otro en pulsos separados del tono. Esta descripción [...] coincide con la vieja definición de Euclides: 'La consonancia es la fusión de un tono alto con uno bajo. La disonancia es la incapacidad de mezclarse; cuando dos tonos no se pueden fusionar, entonces aparecen ríspidos al oído'.[6]

Como sea, se dan a continuación ejemplos de *symphoniai*:

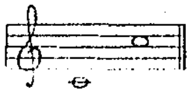
- La cuarta perfecta, *diatessaron* (διὰ τεσσάρων).



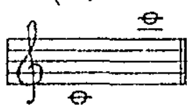
- La quinta perfecta, *diapente* (διὰ πέντε)



- La octava, *diapason* (διὰ πασῶν).



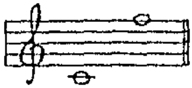
- La doble octava, *dis diapason* (δὶς διὰ – πασῶν).



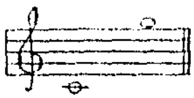
- La cuarta compuesta con la octava u oncena perfecta, *dis diatessaron*

[6] Helmholtz (1877) 226.

(δὶς διὰ – τεσσάρων).



- La quinta compuesta con la octava o docena, *dis diapente* (δὶς διὰ – πέντε).



Los intervalos anteriores eran considerados consonantes por los pitagóricos pues eran expresados por razones numéricas simples.[7] En la escuela Pitagórica encontraremos la razón primigenia de ser de la Teoría Musical Griega. Rodeado de un halo de misticismo aparece el *Tetraktys* (Τετρακτύς), símbolo de la perfección del número mediante la unidad de sus componentes: punto, línea, plano y espacio.[8] (Véase Figura 3).

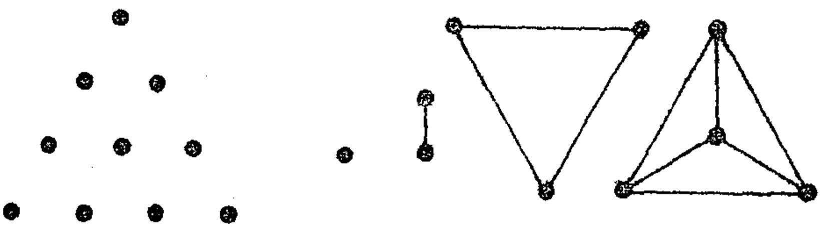


Figura 3. *Tetraktys.* Punto, línea, triángulo y tetraedro.

Teón de Esmirna escribe: 'en estos números [*i.e.* en los componentes del *Tetraktys*: 1, 2, 3, 4] están incluidos el *diatessaron* en la razón 4 : 3 (*epitritos*), el *diapente* en la razón hemiólica (3 : 2), el *diapason* en la doble (2 : 1) y el *dis diapason* en la cuádruple (4 : 1); todos ellos completan el

[7] Michaelides (1978) 308.
[8] Guthrie (1987) 28-30.

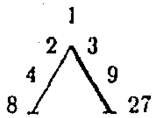


Figura 4. *Lambda* platónica.

sistema inmutable'.[9] (Véase más adelante el Capítulo 4, donde discutiremos en detalle la construcción de la escala pitagórica).

En la teoría musical platónica es posible encontrar restos del planteamiento pitagórico, sin embargo es difícil determinar el grado de compenetración de ambas escuelas. En el *Timeo*, al exponer sus teorías cosmogónicas, Platón hace referencia a una variante del *Tetraktys* pitagórico que debería ser llamada, con más propiedad, *Lambda* platónica.[10] (véase Figura 4). Más adelante (en el Capítulo 5) veremos cómo se vale Platón de semejante instrumento numerológico en el tratamiento de la Armonía de las Esferas.

El ya mencionado Aristoxeno de Tarento (siglo –IV) es el teórico más importante de la música de la Antigua Grecia. Escritor prolífico, se convierte en la voz más autorizada del tema en la antigüedad; su influencia se percibe aun en Arístides Quintilianus, siete siglos después. La magnitud de la obra musical de Aristoxeno, en gran parte perdida o fragmentada, justifica plenamente su sobrenombre de 'el Músico' (ὁ Μουσικός) y puede ponderarse en el siguiente listado:[11]

1. *Elementos de Harmonika*, (Αρμονικὰ Στιχεῖα), en tres libros, en su mayoría conservados, el tratado musical griego más antiguo de que se tiene noticia.
2. *Elementos del Ritmo*, (Ρυθμικὰ στοιχεῖα), del cual sobrevive un importante fragmento.
3. *De Musica*. (Περὶ μουσικῆς),

9 Michaelides (1978) 329.
10 Heath (1921) 313; Lawlor (1982) 83; Guthrie (1987) 317.
11 Michaelides (1978) 33–35.

4. *Sobre la Melopocia.* (Περὶ μελοποιΐας).
5. *De los Tonoi.*(Περὶ τόνων).
6. *Del oído musical.* (Περὶ τῆς μουσικῆς ἀκράσεως).
7. *Sobre la Unidad de Tiempo.* (Περὶ τοῦ πρώτου χρόνου).
8. *Sobre los Instrumentos.* (Περὶ ὀργάνων).
9. *De la perforación de los auloi.* (Περὶ αὐλῶν τρήσεως).
10. *De los Auletai.* (Περὶ αὐλητῶν).
11. *De la Orchesis Trágica.* (Περὶ τραγικῆς ὀρχήσεως).

Los intereses de Aristoxeno no sólo se centraron en la Música. Según Suidas sus estudios se extendieron también a la Historia, la Filosofía y la Educación en general, llegando a completar un total de. . . ¡453 volúmenes!

La mención de Aristoxeno es importante pues son dos las corrientes de pensamiento en pugna con respecto a la Música: la pitagórica y la aristoxeniana. Las características propias de la primera quedan claramente compendiadas en las palabras de Plutarco, en su libro *De Musica*:[12]

> Pitágoras el sabio desaprobaba el juzgar la Música mediante los sentidos; la virtud de este arte, él decía, ha de ser percibida por el intelecto [espíritu]; consecuentemente él no la juzgaba mediante el sentido del oído sino por la *harmonía* proporcional.

La escuela aristoxeniana, por su parte, si bien concede al intelecto la capacidad de *discriminar las funciones* de los sonidos, confía al oído la ***percepción*** y ***juicio*** de éstos. Alumno de Aristóteles, Aristoxeno hereda de éste el rigor de la lógica inductiva, la cual pretende conciliar con la evidencia empírica; así, aparecen serias divergencias con los principios pitagóricos, como lo atestiguan los asertos del propio Aristoxeno:

> Nosotros intentamos obtener conclusiones acordes con los datos, en oposición a los teóricos que nos han precedido. Algunos de ellos han introducido puntos de vista completamente ajenos al tema y repudiado la experiencia sensorial como imprecisa; de aquí ellos crearon causas inteligibles y postularon que existían *ciertas razones entre números y velocidades* de las cuales dependía la afinación de una nota. Todas estas eran especulaciones completamente ajenas al

[12] Citado por Michaelides (1978) 215.

tema y absolutamente contrarias a las apariencias. Otros renunciaron completamente a las razones y argumentos y proclamaron sus asertos como si fueran dictados por los oráculos; además tampoco atendieron suficientemente a los datos.[13]

La teoría aristoxeniana reemplaza la austera concepción aritmética de los pitagóricos por una visión que da plena confianza a los datos percibidos por el oído. Este punto se confirma con la opinión de Van Jan, estudioso de la Música Griega antigua:

> En su *Harmonika* [Aristoxeno] no investiga el origen del tono, ni se pregunta *si era un número o una velocidad*. El oído necesita solamente escuchar sin prejuicio la altura de los tonos; él nos dirá con certeza cuáles tonos armonizan entre sí... Su sistema se basa en las cuartas y las quintas que son fácilmente percibidas como consonancias y, sin preguntarse *cuáles son las razones numéricas subyacentes*, era capaz de determinar a partir de aquéllas los tonos, semitonos, etc.[14]

En concordancia con este espíritu, se plantea la gama de afinaciones como una línea suceptible de infinitas subdivisiones. Así, es posible producir un número infinito de intervalos, aunque, el intervalo musical más pequeño es el *diesis* enarmónico o cuarto de tono. La aparente contradicción se resuelve de inmediato si atendemos al planteamiento original de Aristoxeno: 'la voz no puede diferenciar, ni el oído discriminar, cualquier intervalo más pequeño que la *diesis*'.[15] (En el Capítulo 4 se tratará con detalle de qué manera aparecen semejantes intervalos). Para cerrar este paréntesis sobre la polémica pitagórico-aristoxeniana, cabe resaltar que la discusión prosiguió candente, al menos, hasta el siglo +II en que Ptolomeo, que si bien coincide con Aristoxeno en ciertos puntos, critica a éste por su falta de bases matemáticas y su empiricismo a ultranza.[16]

Pero, retornando a los aspectos técnicos, en la *Harmonike* el bloque de construcción fundamental de las escalas hepta y octacordes, era el *te-*

[13] Citado por Szabó (1978) 113.

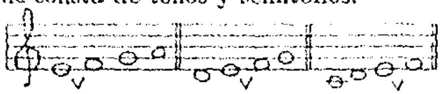
[14] Szabó (1978) 112.

[15] Michaelides (1978) 81.

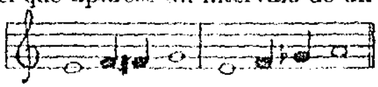
[16] Cohen (1975) 302; Michaelides (1978) 279.

trachordon (τετράχορδον), ensamble de cuatro notas contiguas formando una cuarta perfecta (obsérvese que *diatessaron* significa literalmente 'consonancia a través de cuatro cuerdas', de la *Lira*, se entiende). Ahora bien, son tres los géneros de tetracordes:

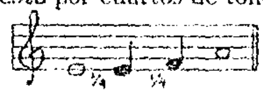
- El diatónico, que consta de tonos y semitonos:



- El cromático, en el que aparece un intervalo de un tono y medio:

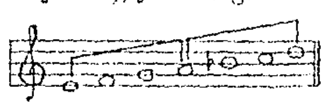


- El enarmónico, compuesto por cuartos de tono:

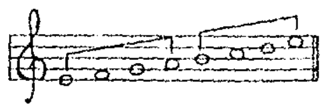


Las notas extremas del tetracorde se consideraban fijas y la colocación de las dos notas interiores móviles establecían el *genus* del tetracorde.

De acuerdo a varios teóricos de la Antigüedad, un *systema* (σύστημα) es la unión de dos o más intervalos; en particular, la unión de tres notas o *trichordon* (τρίχορδον) es un *systema*, como también lo es un *tetrachordon*. Se obtienen sistemas más grandes combinando tetracordes conjunta o disjuntamente. Los tetracordes conjuntos comparten una nota y se les llama *synemmena* (conjuntos), y dan lugar a un heptacorde:

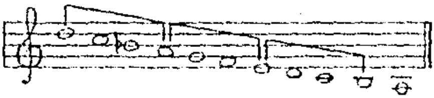


Los tetracordes disjuntos están separados por un tono completo y se llaman *diezeugmena* (disjuntos), dando lugar a un octacorde:

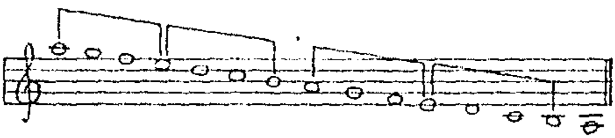


Empleando los heptacordes y octacordes se pueden construir los llamados Sistemas Perfectos:

- Sistema Perfecto Menor, también llamado Sistema de una octava y una cuarta, conformado por tres tetracordes conjuntos y el ***proslambanomenos*** que significa 'nota adicional' cuya función es la de añadir un tono completo abajo del tetracorde inferior:



- Sistema Perfecto Mayor, también llamado Sistema Disjunto, debido a la disjunción entre el *mese* y el *paramese*. Consta de cuatro tetracordes conjuntos por pares entre los que se halla una disjunción de un tono. En la Tabla 3 se presentan los nombres de las notas del Sistema Perfecto Mayor y sus correspondientes tetracordes:[17]



[17] Barbera (1986) 349.

Tabla 3.
Sistema Perfecto Mayor.

Nete hyperbolaeon	A_4	
Paranete hyperbolaeon	G_4	*Tetrachordon hyperbolaeon*
Trite hyperbolaeon	F_4	
Nete diezeugmenon	E_4	
Paranete diezeugmenon	D_4	*Tetrachordon diezeugmenon*
Trite diezeugmenon	C_4	
Paramese	B_3	
Mese	A_3	
Lichanos meson	G_3	*Tetrachordon meson*
Parhypate meson	F_3	
Hypate meson	E_3	
Lichanos hypaton	D_3	*Tetrachordon hypaton*
Parhypate hypaton	C_3	
Hypate hypaton	B_2	
Proslambanomenos	A_2	

Capítulo 3

De las cuatro *Mathemata* al *Quadrivium*.

Pese a que las culturas caldea, egipcia, babilónica y china ya intuían una íntima relación entre Música y Matemáticas[1] fueron los Pitagóricos al estudiar el comportamiento del monocordio, quienes instalaron definitivamente a la Música en el sólido recinto de las Matemáticas.

De hecho la conexión de los Pitagóricos con las culturas del cercano y medio oriente no puede considerarse, en modo alguno, fortuita. Son numerosas las alusiones a los estudios de Pitágoras en Egipto y Babilonia y, pese a que semejantes referencias fueron reputadas como meras leyendas durante mucho tiempo, en la actualidad, gracias a los trabajos de Delatte y Rostagni, han recuperado su credibilidad histórica:[2]

- Algunos escritores antiguos mencionan el contacto de Pitágoras con Zaratas el Caldeo. [Zaratustra (siglo -VI)]
- Diógenes Laercio (siglo +III) comenta su presencia entre egipcios, magos y caldeos, en su obra *Vidas de Eminentes Filósofos*.[3]
- Jámblico de Calcis (*ca.* +250- *ca.* +325) en su *Vida de Pitágoras*, reporta la estadía del filósofo entre los sacerdotes egipcios, por un lapso de 22 años, estudiando Astronomía y Geometría. Después, al ser capturado por los soldados del conquistador persa Cambises y llevado a Babilonia, prosigue ahí sus estudios en Aritmética y Música.[4]

Es posible concluir que, con semejantes antecedentes, se gestase en la mentalidad Pitagórica una amalgama en la que la Música estaba incluida. En todo caso, la referencia griega más antigua a la inclusión formal de la Música en las Matemáticas pertenece a Arquitas de Tarento, filósofo Pitagórico del siglo -IV:

---

[1] Collette (1973) 76.
[2] Van der Waerden (1954) 94-95; referencias bibliográficas: Guthrie (1987) 340.
[3] Guthrie (1987) 141-142.
[4] *Ibid.*, 61.

> [los Matemáticos] nos han dado un claro conocimiento acerca de la velocidad de las estrellas, y de sus salidas y ocasos, acerca de la geometría y los números y la esférica [*i.e.* la geometría esférica en tanto que está relacionada con los movimientos circulares de los cuerpos celestes.] y, no menos, la música. Pues estas *mathemata* parecen ser hermanas.[5]

Literalmente, el término *mathemata* (μαθήματα) significa 'materias de estudio'. Su origen es pitagórico y se deriva, al parecer, de una de las dos jerarquías de estudiantes de esta escuela: los *akousmatikoi*, a quienes sólo se les permitía escuchar las enseñanzas del Maestro tras una cortina y los *mathematikoi* que podían recibir conocimientos más elevados luego de una rigurosa selección y catársis por medio de la Música.[6] La escuela peripatética explica la necesidad de distinguir las *Mathemata* de otras materias, como la Poesía o la *Mousike*, pues estas últimas son accesibles para el lego y no requieren de una instrucción tan rigurosa. En resumen, los Pitagóricos manejan cuatro *Mathemata*:[7]

1. Aritmética (ἀριθμητική) estudio del número en sí mismo.
2. Teoría de la Música (ἁρμονική) estudio del número en el tiempo.
3. Geometría (γεωμετρία) estudio del número en el espacio.
4. Astronomía (ἀστρολογία) estudio del número en espacio y tiempo.

Aunque Platón agrega a la división antes aludida la Geometría Sólida (o Estereometría, presumiblemente en un intento de considerar los sólidos platónicos y otros poliedros) y distingue entre Logística (arte de contar) y Aritmética (teoría de los números), encontramos una línea de continuidad apegada a la tradición Pitagórica:

> Platón, al final del decimotercer libro de las *Leyes*, ...dice: 'Todo diagrama [Geometría], sistema de números [Aritmética], todo esquema de armonía [Música], y toda ley del movimiento de las estrellas [Astronomía], debe aparecer como Uno a aquél que estudie correctamente; y lo que decimos aparecerá como evidente si uno estudia todas las cosas atendiendo a un solo Principio, pues se verá que hay

5 Cohen (1975) 2; Heath (1921) 11.

6 Van der Waerden (1954) 93.

7 Apostle (1952) 219–220; Van der Werden (1954) 108; Guthrie (1987) 34.

una unión para todas ellas, y si alguno intenta la Filosofía de cualquier otro modo deberá llamar a la Fortuna para que lo asista'.[8]

Sin embargo, la enseñanza de las cuatro *mathemata* no fue unánimemente contemplada con beneplácito; así lo prueban las palabras de Protágoras de Abdera, el célebre sofista:

...los otros Sofistas maltratan a los jóvenes pues, a una edad en que han escapado de las artes, los toman contra su voluntad y los sumergen de nuevo en las artes, enseñándoles Logística, Astronomía, Geometría y Música ... mientras que, si cualquiera viene a mí, no estará obligado a aprender nada excepto aquello para lo que ha venido.[9]

Pero estas opiniones no pudieron evitar que se desembocara en el ideal de la 'educación enciclopédica' (*encyclios paideia*) del periodo helenístico.[10]

Toca ahora el turno a las ideas de Aristóteles, que presentan un giro peculiar con respecto a sus predecesores. El lugar de la Música (o para decirlo con mayor propiedad, la *Harmonike*) en las Matemáticas, no es tan evidente como en la visión pitagórica y se puede decir que, en cierta forma, se desvía de la ruta que conduciría más tarde a delimitar el *Quadrivium*.

De hecho, tanto para la Astronomía como para la *Harmonike*, no se habla de una inclusión, sino de una supeditación a las Matemáticas Puras, en tanto que aquéllas son ramas de las Matemáticas Aplicadas. Con el fin de hacer más claro el pensamiento Aristotélico se hace necesario esbozar su división de las ciencias y la forma en que éstas se subordinan unas a otras.

Según Aristóteles las ciencias se dividen en teóricas, prácticas y productivas. El propósito único de las ciencias productivas es, justamente, la elaboración de productos, como, por ejemplo, la construcción de una casa, pero sin necesidad de atender a las causas de los fenómenos involucrados en el proceso. Las ciencias prácticas, por su parte, estudian la acción, sin que se genere por ello un producto concreto, pero buscando algo más que el conocimiento mismo; así sucede, por ejemplo, en la Ética, que al estudiar los ac-

---

8 Nicómaco, *Introducción a la Aritmética* I III 5.
9 Platón, *Protágoras* 318.
10 Sarton (1952) 434.

ciones humanas pretende no sólo comprenderlas sino encontrar una manera de mejorarlas. Por último, las ciencias teóricas tienen como fin la adquisición de la verdad, y no se interesan ni por la acción ni por la producción de objetos.[11]

Las ciencias teóricas se dividen a su vez en: Teología (filosofía primera), Física y Matemáticas. De éstas nos interesan las Matemáticas que, por su condición, se interesan en la verdad de todo aquello que existe por necesidad; estudian por tanto el género de la cantidad. El Estagirita distingue entre Matemáticas Puras (Aritmética y Geometría) y Matemáticas Aplicadas (Óptica, Mecánica, Astronomía y *Harmonike*),[12] dándole a estas últimas el epíteto de 'las ramas más *físicas* de las matemáticas'.[13] Es importante resaltar, sin embargo, que la Física (Φυσικὴ) es entendida por Aristóteles, más bien, en un sentido de 'filosofía natural' o 'ciencia de la naturaleza'.[14] Él mismo trata acerca del orden que guardan entre sí las ciencias atendiendo a la subordinación lógica de unas a otras. Afirma, por ejemplo, que no es posible probar los teoremas de una ciencia mediante otra diferente excepto si se trata de aquéllas que son tales que una está supeditada a la otra, poniendo como ejemplos Óptica y Geometría así como *Harmonike* y Aritmética.[15]

Pero ¿cómo es que se supedita una ciencia a la otra? Para tratar la cuestión, hemos de tener presente que, según Aristóteles, el estudio de los atributos propios del *genus* de la cantidad es tarea de las Matemáticas. Ahora bien, la cantidad se encuentra presente en gran número de objetos, y existen ciencias que estudian los atributos matemáticos correspondientes: *Harmonike*, Astronomía, Óptica, Mecánica, etc., que aceptan también la denominación de 'Ciencias Compuestas'.[16] Si las Ciencias antes mencionadas tratan con objetos físicos y sus cualidades matemáticas, es natural preguntarse a qué están supeditadas las Ciencias Compuestas ¿a la Física o a las Matemáticas? La respuesta a esta pregunta no es,

---

[11] Aristóteles, *Metafísica* II 1 993^b20.

[12] Heath (1949) 58-61, 98-100.

[13] Aristóteles, *Física* II 2 194^a8.

[14] Heath (1949) 9.

[15] Aristóteles, *Analitica Posteriora* I 7 75^a38.

[16] Apostle (1952) 131.

en absoluto, sencilla, pues existen diversos modos de subordinación entre las Ciencias. Cinco son los que menciona Aristóteles, de los cuales sólo dos nos resultan de interés:

- Las Ciencias Compuestas están subordinadas a la Física en tanto que el objeto de estudio de aquéllas es una especie del objeto de estudio de ésta. Mientras que los atributos investigados por las Ciencias Compuestas *no son propiedades* en absoluto, y en la Física sí lo son.
- Con respecto a las Matemáticas la subordinación es sutilmente diferente: en las Ciencias Compuestas los atributos estudiados no son propiedades *de sus objetos de estudio* sino el objeto o las propiedades correspondientes a las Matemáticas.

Un ejemplo puede clarificar las cosas: en la *Harmonike* se estudian los tonos que producen las cuerdas vibrantes de diferentes longitudes y las relaciones numéricas que existen entre éstas. En este caso, las propiedades correspondientes a la *Harmonike* son *los tonos*, no las vibraciones ni las longitudes de las cuerdas, mucho menos las relaciones numéricas en abstracto. Entonces la *Harmonike* está subordinada a la Física, pues las vibraciones de las cuerdas son objeto de estudio de ésta pero no propiedades que interesen a aquélla. Por otro lado, las razones numéricas entre las longitudes de las cuerdas no son propiedades a estudiar por la *Harmonike*, sino por la Matemática y, en este sentido, la primera se subordina a la segunda.

Puesto que lo que nos interesa son las relaciones numéricas, tratadas más en particular por la Aritmética, más apropiado que mencionar la relación Música-Matemáticas es hablar de la relacion Música–Aritmética. Nicómaco enfatiza la situación mediante un ejemplo concreto:

> Las armonías musicales, *diatessaron*, *diapente*, y *diapason*, reciben su nombre por los números; similarmente, todas sus razones armónicas son aritméticas, pues el *diatessaron* es la razón de 4 : 3, el *diapente* de 3 : 2 y el *diapason* la doble razón; y la más perfecta el *didiapason* [*sic*] es la razón cuádruple.[17]

[17] Nicómaco, *Introducción a la Aritmética* I V I.

La insistencia en el par Música–Aritmética persiste en la argumentación aristotélica: los teoremas tratados como armónicos (musicales) se prueban a través de la Aritmética pues, dado que no es posible demostrar nada aisladamente (*simpliciter*) sino a partir de sus propios principios, hemos de concluir que los principios de estas ciencias son los mismos.[18] En la *Metafísica* se retoma la discusión en defensa de la abstracción en las ciencias pues, según él, una ciencia que se abstraiga de la magnitud y del movimiento de las cosas es más precisa que otra que los tome en cuenta; el movimiento primario, por ser más simple, es preferible a cualquier otro movimiento. Tal es el caso de la Óptica y la *Harmonike*, pues no consideran sus objetos en tanto que rayos de luz o sonido, sino en tanto que líneas y números, pues estos últimos son atributos propios de aquéllos.[19] Es, justamente, con la Música y su relación con la Aritmética con lo que concluye el último libro de la *Metafísica*, sólo que en oposición a las ideas pitagóricas:

> ... las celebradas características de los números y sus contrarios, ...si las visualizamos como algunos lo hacen, convirtiéndolas en las causas de la naturaleza, parecen escapársenos; pues ninguna de ellas es una causa ...Aun cuando estos objetos matemáticos se conciban como algunos pensadores lo hacen, la bondad es predicable de ellos, y lo impar, lo recto, lo igual por igual, y los poderes de ciertos números, están en la columna de lo bello [clara alusión a la tabla pitagórica de los contrarios, véase Thomson (1985) 429] ...no son los números *ideales* las causas de los fenómenos musicales y otros parecidos; así que no necesitamos suponer Ideas, al menos por esta razón.[20]

Retomando la idea original de este capítulo, en el cual consideramos las cuatro *mathemata*; con el transcurso del tiempo, se siguen dando nuevas clasificaciones en las matemáticas. La de Geminus (filósofo estóico del siglo +I) es sumamente elaborada y se puede considerar alineada con las tésis aristotélicas.[21] Pero, desde los filósofos Neoplatónicos Nicómaco y Teón de Esmirna hasta el Medioevo (con el *Quadrivium*) persiste la división de la Matemática en cuatro ramas. Hallamos como producto final las así llamadas 'siete artes liberales' resultado de la combinación del *Tri-*

18 Aristóteles, *Analitica Posteriora* I 9 76^{a}9; I 13 78^{b}32.

19 Aristóteles, *Metafísica* XIII 3 1078^{a}10.

20 Aristóteles, *Metafísica* XIV 6 1093^{a}8.

21 Fowler (1979) 811; Cohen (1975) 2–5; Heath (1921) 17.

vium (Gramática, Retórica y Dialéctica) y el *Quadrivium* (Aritmética, Geometría, Astronomía y Música). No faltan, por supuesto, las aserciones propias del oscurantismo: en el siglo +VI, Casiodoro afirma que las artes liberales son justamente siete porque, como se dice en la Biblia: 'La Sabiduría ha construido su morada; la ha edificado sobre siete columnas'.[22]

Del mismo tenor son las opiniones de Hugo de San Víctor (*ca.* +1141) quien presenta diferentes versiones que desvirtúan el significado original de los términos griegos. Así, por ejemplo, el término *aritmética* es derivado de las palabras griegas *ares* y *rithmus* (*virtus* y *numerus* en su versión latina) que significan 'poder' y 'número', es decir, *aritmética* es 'el poder del número'. Así mismo 'música' toma su nombre de la palabra *aqua* (agua), pues no es posible eufonía alguna sin humedad.[23]

Podemos resaltar una similitud interesante en las definiciones de Música dadas por San Víctor y Filolao a pesar de que hay más de 17 siglos de distancia. Así, San Víctor nos dice en el Libro II del *Didascalicon*: 'Música es la distinción de sonidos y la variación de voces. O también, música o armonía es *la concordia de un número o cosas disímiles mezcladas en una.*'[24] Mientras que Filolao, en su libro *Sobre la Naturaleza*, fragmento 10, nos dice: 'Es Armonía *unificación de lo mezclado y concordancia de discordantes.*'[25]

A manera de conclusión de este apartado presentamos la división de Domingo Gundisalvo (*ca.* +1140) contenida en *De Divisione Philosophiae*:

> ...la materia de las Matemáticas es universalmente la cantidad pero considerada por separado como *magnitud* y *multitud*... las partes de las Matemáticas son cuatro... La Aritmética investiga a la multitud *per se*; mientras que la Música se aboca a la ciencia de las multitudes relativas. La Geometría aclara las propiedades de las magnitudes inmóviles; pero la astrología revela el conocimiento de las magnitudes móviles.[26]

[22] Citado por Pedoe (1979) 9.
[23] Grant (1974) 56.
[24] Grant (1974) 58.
[25] García Bacca (1944) 301.
[26] Grant (1974) 66.

Con base en lo anterior podemos elaborar el siguiente esquema:

Matemáticas

Discretas — Contínuas

Absolutas — Relativas — Estables — Móviles

$\downarrow$ — $\downarrow$ — $\downarrow$ — $\downarrow$

Aritmética — Música — Geometría — Astronomía

Kline propone una explicación semejante al decir que los objetos de estudio del *Quadrivium* han de entenderse como sigue: Aritmética (número puro), Música (número aplicado), Geometría (número estacionario), Astronomía (número móvil).[27]

[27] Kline (1953) 287.

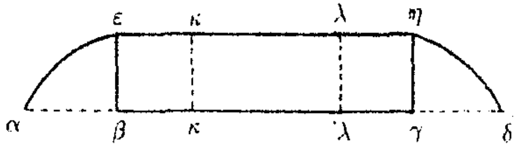


Figura 5. *Canon.*

quier punto, ¿cómo puede generarse entonces una escala musical? Encontrar que la solución es dada en términos numéricos fue un motivo más de afianzamiento de los postulados pitagóricos.

Una disgresión puede aclarar los términos: hoy sabemos que una cuerda vibra, en principio, como una unidad, sin embargo se producen modos adicionales de vibración que parten la cuerda en dos partes, en tres, en cuatro y así sucesivamente, produciéndose las que llamamos series armónicas o sobretonos cuya frecuencia (medida en Hertz (Hz) *i.e.* ciclos por segundo) crece en razón inversa a la distancia entre puntos nodales (inmóviles), los cuales determinan los modos de vibración de una cuerda.[5] (Véanse: Figuras 6 y 7).

Evidentemente los griegos no manejaban estos conceptos, ni siquiera tenían claros ciertos hechos físicos elementales de la cuerda vibrante, tan es así que Aristóteles y Arquitas compartían la opinión errada de que la velocidad del sonido se incrementa con el tono.[6] Pero sería una falta grave criticar las creencias griegas desde el siglo que nos tocó vivir; lo cierto es que las características físicas de la cuerda vibrante aducidas previamente, les permitió la construcción de la escala mediante procedimentos de división sucesiva. Fue con los estudios de Galileo, Newton, Bernoulli y Euler que se encontró la ley que define el movimiento de las cuerdas vibrantes, la cual permitió relacionar las razones simples entre las longitudes de las cuerdas con los tonos producidos. Extendiendo, también, estos resultados

[5] Josephs (1969) 96–102.
[6] Sarton (1952) 519.

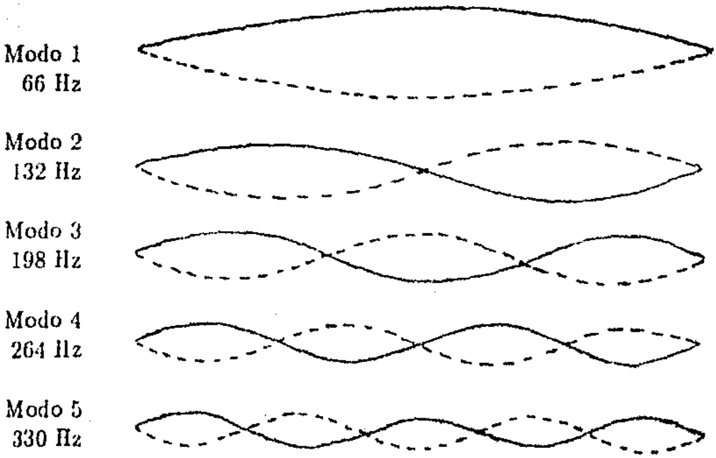
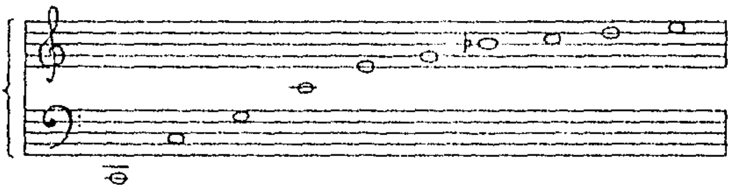


Figura 6. Modos de vibración de una cuerda afinada en C_2 (66 Hz).



# de Modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nota	C_2	C_3	G_3	C_4	E_4	G_4	$B_4^\flat$	C_5	D_5	E_5
Frec. (Hz)	66	132	198	264	330	396	462	528	594	660
Longitud de la cuerda	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10

Figura 7. Series Armónicas.

a otros instrumentos que no son de cuerda.[7]

Así, si la cuerda produce el tono de C_1 al ser pulsada en toda su longitud, la octava, por ejemplo, se obtiene al dividir la cuerda por la mitad, pues el nuevo sonido (C_2) tiene frecuencia igual al doble de la fundamental (2 : 1).

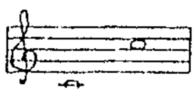
Para generar los restantes intervalos se tiene que seguir un proceso conocido como *mediación*, que consiste en hallar la media que divida con cierta condición un intervalo dado; nos valdremos para ello de las definiciones de las medias aritmética y armónica (dadas en el Apéndice I).

En lo sucesivo conviene que seamos cuidadosos al escribir las razones que aparezcan, guardando un orden estricto entre antecedente y consecuente. Los intervalos musicales se considerarán siempre en orden ascendente y, si deseamos, por ejemplo, formar cierta razón (ya sea de longitudes o de frecuencias) el antecedente corresponderá siempre a la nota más grave.

Para ilustrar el método y con el objeto de obtener soluciones enteras, utilizamos la razón de longitudes 12 : 6 para simbolizar la octava.

Supongamos, que la cuerda original tiene longitud 12 y corresponde a la nota C_4.

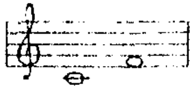
Entonces la mitad de la cuerda tiene longitud 6 y produce un C_5, generándose un intervalo de octava (*diapason*).



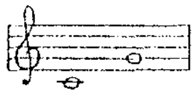
La razón de longitudes es de 12 : 6 y la de frecuencias es de 6 : 12.

La media aritmética de las longitudes 12 y 6 es 9. Una cuerda de longitud 9 produce un F_4, que genera un intervalo de cuarta (*syllaba* o *diatessaron*):

[7] Helmholtz (1877) 15.



Aquí se produce un fenómeno interesante: mientras que las longitudes están en razón 12 : 9, las frecuencias lo están como 6 : 8. ¡Obsérvese que 8 es la media armónica de 12 y 6! Resulta natural preguntarse entonces, qué sucederá con una cuerda cuya longitud sea igual a la media armónica de 12 y 6: una cuerda de longitud 8 produce un G_4, formándose un intervalo de quinta (*diapente*).



Siendo en este caso 12 : 8 la razón de longitudes, las frecuencias se relacionan como 6 : 9. Para sorpresa nuestra aparece el 9, media aritmética de 12 y 6.

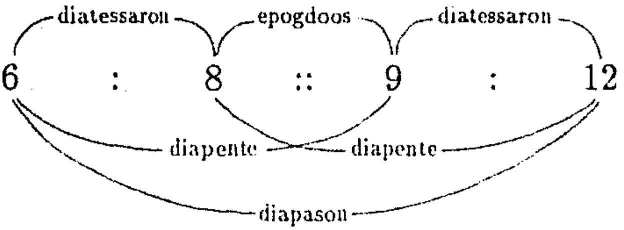
Por último, entre el F_4 y el G_4 existe un tono de diferencia: *epogdoos* ($\dot{\epsilon}\pi\acute{o}\gamma\delta oo\varsigma$) definido por Nicómaco como el intervalo por el cual la quinta excede a la cuarta y cuya razón (*epogdoos logos*) es de 9 : 8.[8]

Así, mediante la inserción de las medias aritmética y armónica entre dos términos extremos, se genera la proporción armónica (llamada por Jámblico 'la proporción más perfecta') y que viene dada por la relación:

$$A : \frac{2AB}{A+B} = \frac{A+B}{2} : B$$

Esta proporción es fuente de los intervalos consonantes según la Teoría Musical Griega, como lo muestra el siguiente diagrama:

[8] Michaelides (1978) 109.



Para terminar de construir la escala se avanza a partir de la tónica (C_4) mediante incrementos de un tono (9 : 8), generándose D_4 y E_4. Si el proceso continuara de este modo produciríamos un sonido que excede a F_4, así que surge la necesidad de la *leimma* ($\lambda\epsilon\tilde{\iota}\mu\mu\alpha$) y que viene dada por la razón 256 : 243. Equivalente a nuestro semitono, se define como el exceso de la cuarta sobre el doble tono y se puede encontrar mediante un sencillo procedimiento aritmético:[9]

$$\frac{4}{3} : \frac{9}{8} \times \frac{9}{8} = \frac{4}{3} \times \frac{64}{81} = \frac{256}{243}$$

El procedimiento mostrado de construcción de la escala musical no fue idea privativa de los Pitagóricos. Aristoxeno propone un método similar, sólo que no se detiene en el semitono sino que prosigue la subdivisión hasta obtener tercios, cuartos y aún octavos de tono.[10]

Como se dijo en el Capítulo 2, con la aparición de la *diesis* ($\delta\acute{\iota}\epsilon\sigma\iota\varsigma$) se tiene el intervalo más pequeño que la voz puede producir y el oído percibir. Las referencias son confusas, aunque Teón de Esmirna aclara: '*Diesis*, de acuerdo a la escuela de Aristoxeno, es el cuarto de tono, mientras que los Pitagóricos llamaban *diesis* al semitono'. Si queremos ser más específicos podemos citar a Cleónides en su *Isagoge*:[11]

> ...se supone que el tono se divide en doce moléculas mínimas, cada una de las cuales es llamada un doceavo... el semitono es seis doceavos y la *diesis*, también llamada *tetartemorios* ($\tau\epsilon\tau\alpha\rho\tau\eta\mu\acute{o}\rho\iota o\sigma$)

[9] Guthrie (1987) 50.
[10] Sarton (1952) 520-521.
[11] Citado por Michaelides (1978) 82.

(un cuarto de tono) tiene tres doceavos, y la *tritemorios diesis* (τριτημόριοσ δίεσις) (un tercio de tono) tiene cuatro doceavos.

Después de haber revisado la generación de la escala pitagórica, podemos ahora pasar al segundo propósito de este apartado. Existe un instrumento, descrito por Ptolomeo, que fue utilizado para medir las consonancias, encontrando todas las *simphoniai* y el *epogdoos*: se trata de una construcción geométrica llamada *Helicon* (ἑλικών), que hace alusión al monte del mismo nombre considerado refugio de las Musas. El *helicon* consta de un cuadrado dividido por ciertas líneas creando segmentos cuyas relaciones son las mismas de la escala musical.[12]

Sea el $\square ABGD$, (véase Figura 8); E y Z tales que $AE = EB$ y $BZ = ZD$. Trazando AZ y BG éstas se cortan en H. Sea $LM \perp AB$ que pasa por H y tal que L está en AB, M en GD. Por último trazamos $EK \perp AB$ tal que K está en GD. Sea T la intersección de EK y AZ. Supongamos que

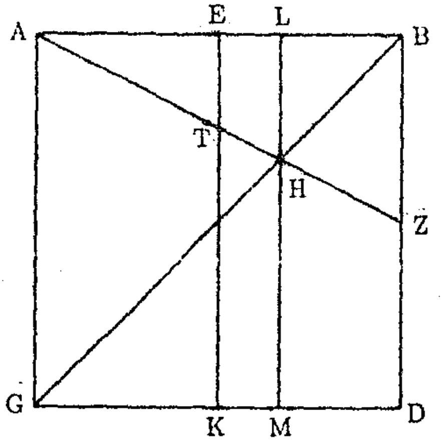


Figura 8. *Helicon*.

[12] Michaelides (1978) 132.

$$\boxed{AB = 12}$$
$$\Rightarrow AE = EB = BZ = ZD = DK = KG = 6$$

Dado que

$$\begin{aligned}
&\triangle ABZ \sim \triangle AET \\
&\Rightarrow AB : AE = BZ : ET \\
&\Rightarrow 12 : 6 = 6 : ET \\
&\therefore \quad \boxed{ET = 3} \quad \text{y, consiguientemente} \quad \boxed{TK = 9}
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
&\triangle BGD \sim \triangle HGM \quad \text{y} \quad \triangle HGM \sim \triangle HBL \\
&\Rightarrow \triangle BGD \sim \triangle HBL \\
&\Rightarrow BD : HL = DG : LB \\
&\Rightarrow 1 = BD : DG = HL : LB \\
&\therefore \quad LB = LH && (1)
\end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned}
&\triangle ALH \sim \triangle AET \\
&\Rightarrow AL : AE = LH : ET \\
&\Rightarrow AL : 6 = LH : 3 \\
&\therefore \quad AL = 2LH && (2)
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
&12 = AB \\
&= AL + LB \\
&= 2LH + LH \quad \text{por (1) y (2)} \\
&= 3LH \\
&\therefore \quad \boxed{LH = 4} \quad \text{y, consiguientemente} \quad \boxed{HM = 8}
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} 12 &= AB \\ &= AE + EL + LB \\ \therefore\ & \boxed{EL = 2} \quad \text{pues} \quad LB = LH = 4. \end{aligned}$$

La conexión con la escala musical no se hace esperar, pues surgen una serie de relaciones interesantes. Tenemos dos progresiones geométricas: 2, 4, 8 y 3, 6, 12 que al ser traslapadas crean cadenas de tres que guardan, alternativamente, proporciones aritméticas y armónicas, como puede observarse en el siguiente esquema.[13]

Proporción Aritmética

2 3 4 6 8 12

Proporción Armónica

Se generan también, como consecuencia, el tono (9 : 8) y los intervalos de cuarta (4 : 3), quinta (3 : 2) y octava (2 : 1), pues aparece la proporción musical 6 : 8 = 9 : 12, como sucede en la construcción de la escala pitagórica. (Una relación completa de los intervalos musicales empleados en la construcción de la escala pitagórica aparece en el Apéndice II).

13 Lawlor (1982) 83.

Capítulo 5

La Armonía de las Esferas

Tetraktys, armonía pura, la misma de las Sirenas
Jámblico[1]

Etimológicamente el término 'armonía' procede de ἁρμονία del verbo ἁρμόζειν que significa 'ajustar', 'ligar', 'unir' o 'adaptar una cosa con otra'. En Música, además de su significado original, indicaba la 'afinación' o disposición de los sonidos en un sistema con sus partes ajustadas para formar un conjunto perfecto y en este sentido lo entendían Platón, Aristóteles y Heráclides de Ponto.[2]

En la Grecia clásica el concepto de'armonía' tenía las limitantes inherentes a la teoría musical existente. No hay que olvidar que la Música Griega es esencialmente melódica, desconoce el tratamiento polifónico (varias melodías a la vez) y, con mayor razón, el armónico (como lo entendemos hoy día, es decir, el tratamiento de acordes). Hemos de coincidir con Koestler: 'Armonía era, sencillamente, el ajuste de las cuerdas a los intervalos de la escala y la estructura de la propia escala. Lo cual significa que el equilibrio y el orden, no el dulce placer, son la ley del mundo'.[3] Con tales antecedentes resulta natural extender las tareas de la Armonía a la Cosmogonía. pero para ello es necesario conocer previamente ciertos conceptos.

Dados dos términos y el intervalo entre ellos, armonizar (o llenar el intervalo) es encontrar la media necesaria para generar la proporción correspondiente. En la visión platónica nace entonces el 'problema armónico general' que consiste en poner en proporción los intervalos por medio de términos que se den en proporciones definidas con los términos iniciales, a fin de obtener la consonancia *symphonia* o acorde de los sonidos.

---

1 Citado por Ghyka (1978) 37.
2 Michaelides (1978) 127
3 Koestler (1981) 29-30.

Es fácil reconocer que la Cosmogonía Platónica es de un origen netamente pitagórico y, consecuentemente, comparte el interés por ajustar el Universo al concepto de número prevaleciente en el siglo -VI, que se puede resumir en el siguiente párrafo de Aristóteles:

> ... dado que [los pitagóricos] vieron que los atributos y las razones de las escalas musicales eran expresables en números; dado que, todas las otras cosas parecían en su naturaleza toda ser modeladas con base en números, y los números parecían ser las primeras cosas en el todo de la naturaleza, supusieron que los elementos de los números eran los elementos de todas las cosas, y el cielo todo era una escala musical y un número.[4]

Para los Pitagóricos los números no eran abstracciones sino cantidades con existencia real, de aquí que no es de extrañar que el descubrimiento de las leyes musicales (entiéndase leyes tangibles, no meras analogías) derivara en el concepto de armonía de las esferas (ἁρμονία τῶν σφαιρῶν) el cual completa la cosmovisión Pitagórica.

De acuerdo a la concepción atribuída a la Escuela Pitagórica los planetas al girar producían diferentes sonidos musicales, inaudibles para los humanos, el conjunto de los cuales creaba la 'Armonía de las Esferas'. A Pitágoras sí le era dado escuchar tales sonidos musicales, como lo indica la cita siguiente, contenida en la 'Vida de Pitágoras' de Porfirio (*ca.* +232-*ca.* +304):

> [Pitágoras] podía escuchar la Armonía del Universo, y entender la música universal de las esferas, y de las estrellas que se movían en concierto con aquéllas, la cual no podemos escuchar debido a las limitaciones de nuestra débil naturaleza.[5]

Pero no todos quisieron ver con tal reverencia el mito encarnado en la figura de Pitágoras. Aristóteles, por ejemplo, discute en detalle la cuestión en su Libro II de *De Caelo*

[4] Aristóteles, *Metafísica* I 5 985^{b}31.

[5] Guthrie (1987) 129.

... es claro que la teoría de que el movimiento de las estrellas produce una armonía, es decir, que los sonidos que producen son concordantes, a pesar de la gracia y originalidad con la cual fue establecida, es, sin embargo, falsa. Algunos pensadores suponen que el movimiento de los cuerpos de tal tamaño debe producir un sonido, dado que en nuestra tierra el movimiento de los cuerpos menores en tamaño y velocidad de movimiento tienen tal efecto... A partir de este argumento y de la observación de que sus velocidades, al ser medidas por sus distancias, están en las mismas razones que las concordancias musicales, aseguran que el sonido dado por el movimiento circular de las estrellas es una armonía. Dado que, sin embargo, parece inexplicable el que no podamos oir esta música, ellos explican esto diciendo que el sonido está en nuestros oídos desde el mismo momento del nacimiento y es, por tanto, indistinguible de su silencio contrario, dado que sonido y silencio se discriminan por mutuo contraste ... Pero si los cuerpos que se mueven son tan grandes y el sonido que nos penetra es proporcional a su tamaño, ese sonido debe alcanzarnos en una intensidad muchas veces [mayor] que la del trueno, y la fuerza de su acción debe ser inmensa. De hecho, la razón por la cual no escuchamos ni sentimos en nuestro cuerpo ninguno de los efectos de una fuerza violenta se da fácilmente: es que no hay tal sonido.[6]

Unas palabras sobre la Astronomía pitagórica pueden ayudar a situarnos, antes de comentar la exposición platónica del tema. Que la Tierra es esférica se dedujo, probablemente, a partir de la comparación con los cuerpos celestes observados, así como por una preferencia mas bien estética hacia las formas esféricas.[7] Se postula también a la Tierra como centro del universo, y en torno a ella gira la esfera de las estrellas fijas en una dirección de este a oeste; mientras que el Sol, la Luna y los planetas giran en órbitas propias, sólo que en sentido contrario. Surgen, sin embargo, sistemas más elaborados (como el de Aëtius) en el que, en torno al 'fuego central' giran los planetas y La Contratierra, que en opinión de Aristóteles no es sino una fantasía propuesta para elevar a diez el número de planetas y satisfacer los prejuicios numerológicos de los Pitagóricos.[8]

Platón expone de una manera menos critica, pero mas detallada, la teoría de la Armonía de las Esferas en dos versiones distintas. La primera

[6] Aristóteles *De Caelo* II 9 290^{b}12.
[7] Sarton (1952) 212.
[8] Heath (1921) 162–165.

de ellas, dada en *La República*, narra la leyenda de Er, mítico héroe, que tras de morir en batalla, resucita para relatar su visión del modelo del universo. Entonces Er describe, jerarquizándolos en un orden descendente con respecto a su tamaño, un conjunto de anillos concéntricos (los planetas) que están suspendidos en el llamado 'huso de la Necesidad'. El más grande de los anillos, que representa a las estrellas fijas, está salpicado de luces; le sigue Saturno, de color más amarillento que el precedente; Venus es el tercero e irradia la luz más blanca; el cuarto es Marte, de color rojizo; Mercurio es el quinto y posee un color parecido al de Saturno; el segundo en blancura es Júpiter, el sexto de la lista; el Sol es el séptimo y el más brillante; finalmente la Luna, colocada en el octavo anillo, se ve coloreada por la luz reflejada del séptimo. Al tiempo de girar en torno al huso, los anillos llevan sobre su superficie una sirena, que va cantando un solo tono o nota. El canto de las ocho sirenas juntas conforma una armonía.[9] Estas sirenas son evidencia, poética si se quiere pero significativa, de un 'universo platónico sonoro'.

En el *Timeo* se da la segunda versión; ahora las esferas celestes no producen sonidos, pero en cambio la descripción de cómo se forman los intervalos musicales entre los planetas es más detallada. Pero antes de proseguir, aclaremos que los Pitagóricos denotan por 'lo mismo' (o 'Uno') la idea de igualdad, unidad y concordia en el Mundo. Y, 'lo Otro' (o 'Dos') simboliza la diversidad, discriminación o desigualdad.[10]

El Demiurgo tomó los tres elementos de 'lo mismo', 'lo otro' y 'la esencia', y los mezcló en una sola forma comprimiéndolos por la fuerza. Con base en divisiones sucesivas generó la progresión compleja 1, 2, 3, 4, 9, 8, 27, resultado de la unión de dos progresiones geométricas: 1, 2, 4, 8 y 1, 3, 9, 27. Luego llena con dos repeticiones todos los intervalos con medias aritméticas y armónicas, obteniendo finalmente una escala musical de 36 términos y 35 tonos y *leimmas* en lugar de los 5 tonos y los dos *leimmas* de la gama clásica:

... [El Demiurgo] llenó los intervalos dobles [*i.e.* entre 1, 2, 4, 8] y

[9] Platón, *La República* X 615-618.
[10] Ghyka (1978) 23.

los triples [*i.e.* entre 1, 3, 9, 27] separando otras porciones de la mezcla y colocándolas en los intervalos, de tal forma que en cada intervalo hubiese dos clases de medias, una excediendo y siendo excedida por partes iguales de sus extremos [*e.g.* 1, $\frac{4}{3}$, 2, en la cual la media $\frac{4}{3}$ es un tercio de 1 más que 1, y un tercio de 2 menos que dos] la otra es la clase de media que excede y es excedida por un mismo número. Donde había intervalos de $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$ y $\frac{9}{8}$, hechos por los términos correspondientes en los intervalos anteriores, llenó todos los intervalos de $\frac{4}{3}$ con el intervalo de $\frac{9}{8}$ dejando una fracción; y el intervalo expresado por esta fracción estaba en la razón 256 a 243.[11]

Obsérvese que en la cita anterior aparece la aplicación de la *Lambda* platónica prometida en el Capítulo 2. Pero prosiguiendo con la exposición del *Timeo* de Platón, falta describir la forma en que el Demiurgo dispuso las órbitas de los planetas. Con la mezcla de que disponía hizo dos círculos: uno interior y uno exterior. Al movimiento del círculo exterior lo llamó el movimiento de 'lo Mismo' y al movimiento del círculo interior el movimiento de 'lo Otro' o 'Diverso', hizo siete círculos desiguales, ordenó a las órbitas girar en dirección opuesta una a la otra; tres de ellas [Sol, Mercurio y Venus] las hizo moverse con igual velocidad y a las restantes cuatro [Luna, Saturno, Marte y Júpiter] con velocidad desigual a las tres anteriores y entre sí, pero en la proporción debida.[12]

Algunos pensadores estiman que de los nombres de los siete planetas ¡se derivan los nombres de las notas musicales! Nicómaco, por ejemplo, alega que, debido a que Kronos (Saturno) es el planeta más alto con respecto a la Tierra, a la nota más baja del *diapason* se le ha de llamar *Hypate* ('Υπάτη), pues hypatos (ὕπατος) es 'la más alta'. La clasificación nicomaquea completa aparece en la Tabla 4 (compárese con la Tabla 2. *Onomasia*).

En la Tabla 5 se presenta la clasificación ptolemaica. Obsérvese que si consideramos los números de la segunda columna y sus razones, dos a dos, se generan los intervalos correspondientes. Por ejemplo, entre Saturno y Júpiter tenemos la razón 32 : 24 = 4 : 3 que corresponde a una cuarta

[11] Platón, *Timeo* 35.
[12] Platón, *Timeo* 36.

Tabla 4
Armonía de las Esferas
según Nicómaco

Armonía de las Esferas		*Diapason*
Kronos	(Saturno)	*Hypate*
Zeus	(Júpiter)	*Parhypate*
Ares	(Marte)	*Lichanos* (o *Hypermese*)
Helios	(Sol)	*Mese*
Hermes	(Mercurio)	*Paramese*
Afrodita	(Venus)	*Paranete*
Selene	(Luna)	*Nete*

perfecta (*Syllaba* o *Diatessaron*); entre Mercurio y la Tierra tenemos la razón $12 : 8 = 3 : 2$ igual a una quinta perfecta (*Diapente*). (Véase el Apéndice II). Estos conceptos se mantuvieron por largo tiempo de forma tal que llegaron, prácticamente sin cambios, al medioevo mismo; como ejemplo se cita un extracto del Libro III de *Las Etimologías* del filósofo latino del siglo VII Isidoro de Sevilla:

> Capítulo 32. Sobre la situación de la esfera celeste.
> 1. La esfera de los cielos es redonda y su centro es la tierra, igualmente distribuída en cada lado. Esta esfera, dicen [los filósofos], no tiene ni principio ni fin, por la razón de que, siendo redonda como un círculo no se percibe fácilmente dónde comienza ni donde termina.
> 2. Los filósofos han manejado la teoría de los siete cielos del universo, esto es, planetas que se mueven con la armonía de las esferas, y aseguran que todos los planetas están conectados a sus órbitas y piensan que éstas, estando conectadas y, al parecer, fijas una a la otra, se mueven hacia atrás y son llevados con movimientos definidos en direcciones contrarias.[13]

Estas ideas, referentes a la Armonía de Las Esferas, prevalecieron incluso hasta el renacimiento y, como ejemplo, presentamos el magnífico grabado que aparece en la *Practica Musice* publicado en 1496 (Véase Figura 9).

Por último un par de citas para exponer la influencia de las ideas pi-

[13] Grant (1974) 12

Tabla 5
Armonía de las Esferas
según Ptolomeo

Notas inmóviles	Números	Esferas
Nete Hyperbolacon	32	Saturno
Nete Diezeugmenon	24	Júpiter
Nete Synemmenon	21	Marte
Paramese	18	Sol
Mese	16	Venus
Hypate Meson	12	Mercurio
Hypate Hypaton	9	Luna
Proslambanomenos	8	Fuego, Aire; Agua, Tierra

tagóricas en el caso de Kepler:

> En el *Mysterium Cosmographicum*, Kepler había tratado de construir su universo sobre la base de los cinco cuerpos pitagóricos. Como la teoría no se ajustaba completamente a los hechos, trató de construir el universo sobre las armonías musicales de la escala pitagórica. La combinación de estas dos ideas lo llevó, veinte años después a crear su gran obra: *Harmonice Mundi*, que contiene la tercera ley de Kepler.[14] La Armonía de las Esferas juega un papel importante en la Edad Media. De acuerdo con Athanasius Kircher, no sólo el macrocosmos, sino el microcosmos es musical. Aun Kepler, hombre del más profundo espíritu científico, no se pudo liberar de imaginaciones de esta clase.[15]

[14] Koestler (1981) 272.
[15] Helmholtz (1877) 229.

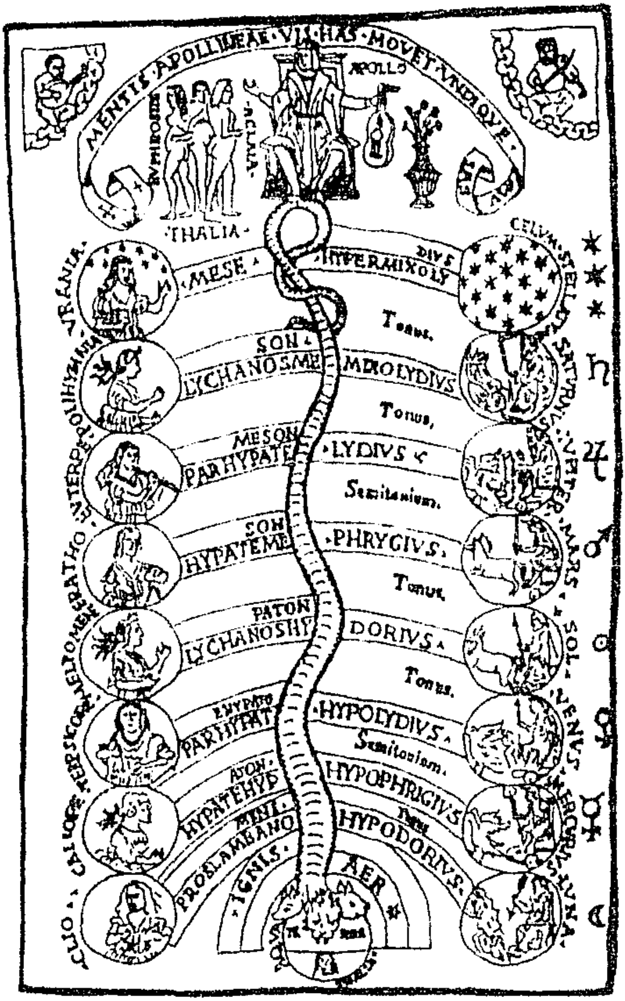


Figura 9. La Música de las Esferas (Grabado de Gafurius, 1496).

Capítulo 6

El teorema de Arquitas

No cabe falsedad alguna en la naturaleza
del número ni en la de la armonía
Filolao[1]

Es en el *Teetetes*, donde aparece uno de los pasajes más controvertidos de los *Diálogos* de Platón, el cual nos dará un curioso pretexto para iniciar este apartado.

Teetetes, dilecto alumno de Teodoro de Cirene, estudia con éste Geometría, Logística, Astronomía y *Harmonike*.

Al ser interrogado por Sócrates sobre cómo es que debe formularse una buena definición, Teetetes se vale de un ejemplo concreto: la forma en que se demuestra la inconmensurabilidad de ciertas magnitudes. Dando implícitamente por sentada la irracionalidad de $\sqrt{2}$, Teodoro se da a la tarea de demostrar la inconmensurabilidad de las raíces cuadradas de números mayores considerando casos particulares (3, 5, 6,...) pero, por alguna razón, encuentra una 'dificultad' en la prueba para $\sqrt{17}$.[2]

La disertación continúa, pero la 'dificultad' deja pensando a no pocos estudiosos. ¿Se trata de un obstáculo insalvable? ¿O quizás Teodoro se detiene premeditadamente? De entre las númerosas cábalas que se han hecho al respecto, me permito seleccionar una que, si bien ha merecido un justo descrédito, nos provee de una introducción musical para el tema que nos ocupa.

Un comentarista anónimo del *Teetetes* propone, sólo para rechazarla, la opinión de que no hay razón pertinente para detenerse en 17. De las tres explicaciones que presenta, una tiene un contenido musical que viene a colación. Teodoro, como teórico musical, así como geómetra, pudo conocer

[1] Citado por García Bacca (1944) 302.
[2] Platón, *Teetetes* 145–147.

la relación del número 17 con el problema de subdividir el intervalo tonal: el tono se expresa en la razón $9:8=18:16$, pero el término 17 divide al intervalo $18:16$ desigualmente (*i.e.*, $18:17\neq 17:16$).[3] Más adelante retornaremos a la cuestión de la división desigual del tono, al demostrar, para el caso general, en que condiciones no se puede dar una división en intervalos iguales. Por lo pronto, para cerrar el paréntesis abierto, diremos que el trabajo de Teodoro condujo a una serie de resultados como, por ejemplo, un par de teoremas atribuidos a Teetetes, que generalizan la prueba de Teodoro de la inconmensurabilidad:

Teorema 1. Si un número dado es no cuadrado, su raíz cuadrada es irracional.

Teorema 2. Si un número dado es no cúbico, su raíz cúbica es irracional.

Otro par de teoremas (atribuidos a Arquitas) tienen conexión directa con la *Harmonike*, y los trataremos en detalle después de presentar la definición de razón epímera.

Dos números, A y B, están en razón epímera (ἐπιμόριον διάστημα, llamada también *superparticularis proportio* por Nicómaco y Boecio), si la diferencia $B-A$ es una parte de A y de B, *i.e.*, si A y B son múltiplos de $B-A$. Por ejemplo, la razón $12:9$ es epímera, pues $12=9+\frac{1}{3}(9)$, es decir, $12:9=4:3=(3+1):3$. En general, la razón $(n+1):n$ es una razón epímera.[4]

Arquitas probó que toda razón epímera puede ser reducida a la forma $(n+1):n$, y que no es posible insertar entre antecedente y consecuente de semejante razón un número (entero, por supuesto) que sea media geométrica de éstos.[5] Si bien Euclides presenta una prueba en su *Sectio Canonis*, la demostración preservada por Boecio en *De Institutione Musica* es la que presentamos (comentada), pues se considera más apegada al espíritu original de Arquitas.[6]

[3] Knorr (1975) 104, nota 79.
[4] Heath (1921) 215.
[5] Van der Waerden (1950) 97.
[6] Van der Waerden (1950) 111.

Teorema 3. Entre dos números en razón epímera no existe una media proporcional.

Demostración

Sea $A : B$ la razón epímera dada, y sean C y $D + E$ los números más pequeños en esta razón.

> [Arquitas, a la inversa de Euclides, considera $A < B$, *i.e.* A y B en la razón $n : (n + 1)$. En el texto latino aparece DE significando $D + E$, preferimos la segunda notación por ser más clara. Euclides, por su parte, considera una línea recta DF que es dividida en dos por un punto G generándose las líneas DG y GF que representan a D y E respectivamente. Para encontrar los términos C y $D + E$ se aplica el método propuesto en la proposición VII 33 de *Los Elementos* de Euclides: 'Dados tantos números como queramos, encontrar los menores de aquellos que tienen la misma razón con ellos'].

Entonces $D + E$ excede al número C por una parte alícuota de sí mismo y de C. Sea D el exceso.

> [Aquí se supone implícitamente que $E = C$. Por la condición impuesta, D es un divisor de $D + E$ mismo y también de C. Cabe recordar la definición dada por Nicómaco de número *superparticular* (ἐπιμόριοσ ἀριθμός): 'El *superparticular*, es un número que contiene en sí mismo la totalidad del número comparado con él, y algún otro factor adicional'].[7]

Se asegura que D no es un número sino la unidad.

> [No debemos olvidar que en la Aritmética griega, la unidad no es un número sino la fuente de todos los números].

Pues, supongamos que D es número mayor que 1 y un divisor de $D + E$; entonces D es también un divisor de E y, por tanto, de C. Se sigue que D es un divisor común de C y $D + E$; pero esto es imposible, porque los más pequeños de los números cuya razón iguala a su razón, son primos relativos.

[7] Nicómaco, Introducción a la Aritmética I XIX 1.

[Para la demostración completa, véase Euclides *Elementos* VII 22: 'Los menores números de aquéllos que definen la misma razón que otros, son los primos entre sí'].

Por tanto D es la unidad, es decir, $D + E$ excede a C por una unidad y, de aquí, una media proporcional entre C y $D + E$ no se puede encontrar.

[Pues no sería un número entero el que apareciera].

Consecuentemente, una media proporcional entre los dos números originales A y B no puede existir. Pues su razón iguala a la de C y $D + E$.

l.q.q.d.

La última inferencia se desprende de la proposición VII 20 de los *Elementos*: 'Los números más pequeños de aquéllos que tienen entre sí la misma razón que dos números dados, miden a aquéllos que tienen la misma razón el mismo número de veces, el mayor al mayor y el menor al menor'.

Para encontrar una aplicación del Teorema 3 a la *Harmonike*, debemos insistir que Arquitas nos habla de la *no existencia* de un número (entero, no lo olvidemos) tal que se encuentre en proporción continua entre dos números dados en razón epimera.

La división pitagórica del intervalo de octava $(2 : 1)$ conduce necesariamente a intervalos desiguales [la quinta $(3 : 2)$ y la cuarta $(4 : 3)$], mediante el siguiente procedimiento: $2 : 1 = 4 : 2 = (4 : 3) \times (3 : 2)$.

De manera análoga se puede proponer una división del tono $(9 : 8)$ como se hizo al comienzo de este apartado: $9 : 8 = 18 : 16 = 18 : 17 \times 17 : 16$. Pero como se observó entonces, $18 : 17 \neq 17 : 16$, y la división interválica es desigual.

Surge, entonces, una cuestión que ha dado motivo a largas discusiones entre los historiadores: En la *Harmonike*, la palabra *diastema* ($\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$) posee varias definiciones equivalentes, como por ejemplo: intervalo, la distancia entre dos notas de diferente tono o la extensión [espacio] de voz contenida entre dos notas.[8] Llama entonces la atención la aparición del término *diastema* en la expresión ἐπιμόριον διάστημα, con la que se denota a la razón epímera. Adicionalmente, por si esto fuera poco, en los libros aritméticos de los *Elementos* una magnitud cualquiera es representada por Euclides mediante segmentos de línea recta.

Arpád Szabó, en la búsqueda de explicaciones plausibles, propone como la acepción común en la Teoría de la Música de la palabra *diastema*, aquella que la define literalmente como 'distancia'[9] (en tal sentido la utiliza, por ejemplo, Nicómedes en la construcción de su concoide[10]) dando de esta manera un sentido geométrico al manejo de las razones de enteros. *Diastema* deja de entenderse, entonces, en su sentido musical de consonancia (*symphonia*) y se convierte en 'intervalo en tanto que distancia':

> ...para los griegos el intervalo musical (*diastema*) era algo tan real y concreto como la συλλαβά [nombre pitagórico para el *diatessaron*, véase Apéndice II] , el abarcar las dos cuerdas exteriores del tetracorde (*i.e.* el intervalo de cuarta). Es engañoso hablar de una '*representación* en términos de líneas rectas'. Uno debe, más bien, señalar que el intervalo musical (*diastema*) era tan real y concreto como una línea recta mensurable en su longitud.[11]
> En los experimentos acústicos de los pitagóricos, la palabra *diastema* significaba 'línea recta' y se refería a aquella *sección de cuerda del 'canon' a la que se impedía vibrar cuando se producía el segundo tono de una consonancia* (i.e. después de que toda la cuerda ya había sonado) *y, de esta manera, era necesario para la creación de un intervalo musical* [las cursivas hacen referencia a un texto original de Gaudencio]. De aquí que la palabra que, de hecho, significaba 'línea recta' vino a tomar el significado de 'intervalo musical'. Más aún, dado que los puntos extremos (*ὅροι*) de esta línea recta eran números del *canon* , la palabra *diastema* se usó, en consecuencia, para describir la 'relación entre dos números' dada por los números proporcionales de las consonancias (12 : 6, 12 : 9, 12 : 8 etc.).[12]

Las afirmaciones de Szabó llegan al extremo de conjeturar que procesos

---

[8] Michaelides (1978) 77.
[9] Szabó (1978) 107.
[10] Heath (1921) 239.
[11] Szabó (1978) 111.
[12] Szabó (1978) 117.

tales como la *Antifairesis* (algoritmo euclideano de la división)[13] pudieron haberse originado en la teoría pitagórica de la música, al emplearse en el cálculo de razones entre las longitudes de la cuerda de un monocordio.[14]

En una crítica demoledora, Bowen invalida la posición filológica a ultranza adoptada por Szabó. Alega, por ejemplo, que, si bien es cierto que *diastema* significa 'distancia' en Geometría, lo mismo no sucede en la *Harmonike*. Conviene hacer notar que, junto al significado etimológico del término (*dia-ste-ma*: 'aquéllo que ha sido hecho para separar') podemos oponer su contrario (*sys-stema*: 'aquéllo que ha sido hecho para juntar') que representa una escala o sucesión de intervalos.[15] Así que la interpretación geométrica de *diastema* es ajena a la *Harmonike* (véase Capítulo 2).

En el contexto del Teorema de Arquitas son más serias las objeciones que se pueden oponer a las tesis de Szabó: es dudoso, como observa Knorr, que Arquitas haya utilizado el término *diastema* en el sentido que lo plantea Szabó, pues Boecio (que, como ya se dijo, se considera la fuente más confiable con respecto a Arquitas) utiliza la palabra *proportio* en lugar de *intervallum* (que validaría la opinión de Szabó).[16]

Existen otras razones de peso, como la cuestión de la notación original en la demostración del Teorema de Arquitas (poco apta para simbolizar magnitudes geométricas). Pero el argumento más contundente alega que el punto de partida de la Teoría Musical Griega no pudo ser de tipo geométrico, pues la representación geométrica de intervalos musicales no habría conducido a resultados tales como el Teorema de Arquitas. La razón es lógica y atiende a una cuestión muy simple: si se piensa en los intervalos musicales como entes geométricos, el problema de encontrar medias proporcionales está automáticamente resuelto pues es posible construir éstas geométricamente (véase el Apéndice III, donde se discuten estas construcciones). Así pues, sólo tiene sentido hablar de la no existencia de una división proporcional de un intervalo si se está en un contexto aritmético.

13 Knorr (1975) 332.
14 Szabó (1978) 135–137.
15 Bowen (1984) 339.
16 Knorr (1975) 241.

Para terminar retornemos a la aplicación dada al Teorema 3 sobre la división desigual del tono. Encontramos, entonces, que no es posible hallar un número X de tal manera que divida en proporción al intervalo $9Y : 8Y$ ($9Y : 8Y = 9 : 8$ razón que representa al tono) lo cual es equivalente a decir que ninguna razón $X : Y$ divide al intervalo $9 : 8$ en proporción (*i.e.* no existen X y Y tales que $9 : 8 = (X : Y) \times (X : Y) = X^2 : Y^2$). Lo anterior se generaliza mediante el siguiente:

Teorema 4. Una razón epímera no puede ser el duplicado [cuadrado] de una razón de enteros.

Demostración

Sea $A : B$ la razón epímera dada. Supongamos que existe una razón de enteros la cual es el subduplicado de la razón dada; esto es, $A : B = (AY : X)(X : BY)$, donde $AY : X = X : BY$. Entonces BY, X y AY son tres enteros en proporción contínua. Pero esto es imposible por el teorema 3, dado que AY y BY están en razón epímera. Por tanto la razón $A : B$ no tiene subduplicado racional.

l.q.q.d

La aplicación a la Teoría Musical del Teorema 4 es clara: siempre que se tenga un intervalo musical tal que venga expresado por una razón epímera (*i.e.* $(n+1) : n$), no será posible encontrar otro intervalo (dado por la razón $p : q$), de tal manera que lo divida en proporción, pues esto implicaría que $(n+1) : n = p^2 : q^2$, en contradicción con el Teorema 4.

En un panorama más amplio, y de mayor trascendencia para la *Harmonike*, una consecuencia importante del Teorema 4 es que, en tanto que es irracional la raíz cuadrada de una razón epímera, llega el conflicto de la inconmensurabilidad al terreno de la Teoría Musical. Sin embargo, no debemos confundir causa y efecto pues, como afirma Knorr: '...la teoría armónica de la irracionalidad fue un derivado de la teoría geométrica, más que el converso'.[17]

[17] Knorr (1975) 216.

En este punto resulta interesante resaltar los conceptos de racional e irracional en la Teoría de la Música dando, de paso, una distinción más entre las escuelas pitagórica y aristoxeniana. De acuerdo con Aristoxeno (ρητὸν διάστημα) *rheton diastema* es aquél intervalo racional con respecto a la melodía, es decir, aquél que puede ser cantado o evaluado por el oído. Por otra parte el (ἄλογον διάστημα) *alogon diastema* es aquel intervalo que no puede ser cantado o reconocido por el oído. Por supuesto, como acota Michaelides, este punto de vista no se puede acoplar a la idea pitagórica de medir los intervalos mediante razones numéricas.[18]

[18] Michaelides (1978) 290–291

Conclusiones

De lo discutido en los apartados anteriores, nos formamos una imagen del grado de parentesco entre Música, Aritmética, Astronomía y Geometría Griegas. Quedó asentado de manera explícita, a través de ejemplos concretos, que existen notorios puntos de contacto y que estas materias comparten, por lo tanto, intereses y dificultades semejantes.

Se demostró que para comprender el papel de la Música en el pensamiento griego se requiere de una distinción clara entre *Mousike* y *Harmonike*: la primera crea un lazo entre las humanidades y las *Mathemata*, mientras que la segunda lo solidifica empleando todo instrumento matemático a su alcance y planteando, a su vez, perspectivas más amplias de aplicación de éstos.

Al penetrar en los detalles, nos puede entusiasmar la aparición de ciertos conceptos que parecen revelar analogías interesantes; pero extraer, a partir de datos tan dispersos, conclusiones atrevidas sobre las materias estudiadas, sería conceder una importancia desproporcionada a meras curiosidades filológicas. El significado de las palabras griegas, como sucede en cualquier lengua, es dinámico y se adapta a las necesidades que aparecen con el transcurso del tiempo. La utilización de ciertas palabras en diversos campos insinúa que existe alguna conexión entre ellos, pero no necesariamente se constituye en prueba definitiva. Tal es el caso, por ejemplo, del término *diastema*, que aparece con significados distintos: 'distancia' en la Geometría e 'intervalo' en la *Harmonike*; hecho, que si bien es significativo, demanda el ser cautelosos en nuestras conclusiones.

El omnipresente, y no siempre bien librado, pensamiento pitagórico compartió con la Música sus momentos de esplendor en una exaltada mística del número, pero también comunicó a ésta los obstáculos propios de las magnitudes inconmensurables. Sin embargo las ideas pitagóricas en torno a la Música no son las únicas, a pesar de su predominio histórico y de ser las más conocidas.

La rivalidad entre las escuelas pitagórica y aristoxeniana nos revela que, en el terreno de la Teoría Musical, las doctrinas del maestro de Samos no tuvieron una aceptación incondicional. Algo semejante se aprecia en la oposición de Aristóteles a ideas tales como la Armonía de las Esferas.

La persistencia del pensamiento pitagórico en el mundo occidental, no se refleja tan sólo en la aparición del *Quadrivium* en la Edad Media. Una prueba de ello son los primeros intentos de Kepler por establecer las leyes de los movimentos planetarios; al proponer las órbitas de los planetas como situadas en esferas concéntricas ajustadas a los poliedros regulares, hay una aceptación implícita de conceptos como el de la Armonía de las Esferas.

Gracias a los trabajos de los matemáticos griegos, quedó abierto el camino hacia estudios más elaborados del fenómeno musical. Fue a partir de tales bases que se suscitan intentos de explicación de los fenómenos no comprendidos por los helenos: Euler propone una regla aritmética para calcular el grado de armonía de un intervalo o acorde, d'Alembert y Rameau exponen su teoría sobre la causa de las consonancias y Fourier sienta los fundamentos para nuestra actual teoría física de la Armonía.

Apéndice I
Medias proporcionales

Porfirio el Neoplatónico nos da a conocer un extenso fragmento de Arquitas en el que se definen las tres proporciones principales:[1]

> Existen tres proporciones en la Música: la aritmética, la geométrica y la subcontraria o, así llamada, armónica. Tenemos una proporción aritmética cuando tres están relacionados con respecto al exceso, como sigue: el primero excede al segundo en la misma medida en que el segundo excede al tercero. En esta proporción la razón de los dos términos mayores es más pequeña, mientras que la razón de los dos términos menores es más grande. Tenemos una proporción geométrica cuando el primer término es al segundo como el segundo es al tercero. La razón de los dos términos mayores es igual a aquélla de los dos menores. La proporción subcontraria, la cual llamamos armónica, es aquélla en la cual los términos son tales que si el primero excede al segundo en una cierta parte del primero, el segundo excederá al tercero en esa misma parte del tercero. En esta proporción la razón de los dos términos mayores es mayor, mientras que la razón de los dos términos menores es menor.

Entonces, considerando los tres términos a, b y c tales que $a > b > c > 0$, podemos desprender de la cita anterior las definiciones de las tres principales proporciones con nuestra propia notación:

Proporción Aritmética:

$$a - b = b - c$$

y, según Arquitas,

$$\frac{a}{b} < \frac{b}{c}$$

Proporción Geométrica:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

[1] Cohen (1975) 6.

Proporción Armónica:

$$\begin{aligned} a - b &= \frac{1}{m} \cdot a \qquad \text{y} \\ b - c &= \frac{1}{m}\ c. \qquad \text{donde } m \text{ es un entero positivo.} \end{aligned}$$

Entonces resulta que

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &> \frac{b}{c} \qquad \text{puesto que} \\ \frac{a}{b} &= \frac{m}{m-1} \qquad \text{y} \\ \frac{b}{c} &= \frac{m+1}{m} \end{aligned}$$

En la página siguiente aparece una tabla autoexplicativa de las diez medias proporcionales consideradas por Pappus y Nicómaco.

Medias proporcionales ($\mu\epsilon\sigma o\tau\tilde{\eta}\tau\epsilon\sigma$) según Pappus y Nicómaco.

NOMBRE	No. en Nicómaco	No. en Pappus	Forma Clásica	Notación Actual	Solución en Términos de α, β, γ	Solución Mínima
Media Aritmética	1	1	$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c}$ $a-b=b-c$	$a+c=2b$	—	—
Media Geométrica	2	2	$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b} \left[= \frac{b}{c}\right]$	$ac=b^2$	$a=\alpha+2\beta+\gamma$ $b=\beta+\gamma$ $c=\gamma$	$a=4$ $b=2$ $c=1$
Subcontraria ó Media armónica	3	3	$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$	$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$	$a=2\alpha+3\beta+\gamma$ $b=2\beta+\gamma$ $c=\beta+\gamma$	$a=6$ $b=3$ $c=2$
Subcontraria de la media armónica	4	4	$\frac{a-b}{b-c} = \frac{c}{a}$	$\frac{a^2+c^2}{a+c}=b$	$a=2\alpha+3\beta+\gamma$ $b=2\alpha+2\beta+\gamma$ $c=\beta+\gamma$	$a=6$ $b=5$ $c=2$
Quinta media (Subcontraria de la Media Geométrica)	5	5	$\frac{a-b}{b-c} = \frac{c}{b}$	$a=b+c-\frac{c^2}{b}$	$a=\alpha+3\beta+\gamma$ $b=\alpha+2\beta+\gamma$ $c=\beta+\gamma$	$a=5$ $b=4$ $c=2$
Sexta media (Subcontraria de la Media Geométrica)	6	6	$\frac{a-b}{b-c} = \frac{b}{a}$	$c=a+b-\frac{a^2}{b}$	$a=\alpha+3\beta+2\gamma$ $b=\alpha+2\beta+\gamma$ $c=\alpha+\beta-\gamma$	$a=6$ $b=4$ $c=1$
—	7	–	$\frac{a-c}{b-c} = \frac{a}{c}$	$c^2=2ac-ab$	—	—
Novena Media	8	9	$\frac{a-c}{a-b} = \frac{a}{c}$	$a^2+c^2=a(b+c)$	$a=\alpha+2\beta+\gamma$ $b=\alpha+\beta+\gamma$ $c=\beta+\gamma$	$a=4$ $b=3$ $c=2$
Décima Media	9	10	$\frac{a-c}{b-c} = \frac{b}{c}$	$b^2+c^2=c(a+b)$	$a=\alpha+\beta+\gamma$ $b=\beta+\gamma$ $c=\gamma$	$a=3$ $b=2$ $c=1$
Séptima Media	10	7	$\frac{a-c}{a-b} = \frac{b}{c}$	$a=b+c$	—	—
Octava Media	–	8	$\frac{a-c}{a-b} = \frac{a}{b}$	$a^2=2ab-bc$	$a=2\alpha+3\beta+\gamma$ $b=\alpha+2\beta+\gamma$ $c=2\beta+\gamma$	$a=6$ $b=4$ $c=3$

NOTA: (α, β, γ tres términos en progresión geométrica) $a > b > c$

Apéndice II

INTERVALOS CONTENIDOS EN UNA OCTAVA[1]			
Intervalo	Nombre griego	Tono	Razón
Primera o unísono	*Homophones* o *Isotonia*	*C*	1:1
Coma Didímico	*Comma*	—	81:80
Coma Pitagórico	*Comma*	—	531441:524288
Segunda Menor	*Leimma*	*D*♭	256:243
Primera Aumentada	*Apotome*	*C*♯	2187:2048
Segunda Mayor	*Epogdoos*	*D*	9:8
Tercera Menor	—	*E*♭	32:27
Tercera Mayor	—	*E*	81:64
Cuarta Perfecta	*Syllaba* o *Diatessaron*	*F*	4:3
Cuarta Aumentada	—	*F*♯	729:512
Quinta Perfecta	*Diapente* o *Dioxeia*	*G*	3:2
Quinta Aumentada	—	*G*♯	6561:4096
Sexta Menor	—	*A*♭	128:81
Sexta Mayor	—	*A*	27:16
Séptima Menor	—	*B*♭	16:9
Séptima Mayor	—	*B*	243:128
Octava	*Diapason* o *Antiphonon*	*C*	2:1

NOTA: Aquéllos intervalos cuyo nombre griego no aparece eran considerados como disonantes y se agrupaban bajo el nombre genérico de *diaphonia*.

[1] Harvard (1986) 401, De Candé (1968) 146.

Apéndice III

Construcción geométrica de las tres principales medias

Pappus preserva y comenta una construcción geométrica, de autor anónimo, en la que figuran las tres medias principales junto con sus respectivos extremos, todo esto en un solo diagrama valiéndose únicamente de seis líneas.

Una observación antes de entrar en materia: en la figura se indican con ——— los trazos dados por el geómetra anónimo (llamado por Pappus $\tau\iota\varsigma$ = 'alguien'), mediante – – – – los trazos adicionales requeridos por Pappus y con – · – · –· los trazos adicionales propuestas para hacer más clara la demostración.

Sobre AC, diámetro de una semicircunferencia, localizamos un punto arbitrario B. Trazamos $BD \perp AC$ (D sobre la semicircunferencia) y la tangente HG que pasa por D de tal manera que G está en la prolongación de AC y $HD = DG$. Si O es el punto medio de AC, trazamos el radio OD, $FB \perp OD$ y HB que corta a OD en K (Véase figura de la página 59).

Claramente OD ($= OC$) es la media aritmética de AB y BC pues $AB - OD = OD - BC$ [ya que $OD = \frac{1}{2}(AB + BC)$]. Tenemos que, BD es la media geométrica de AB y BC pues, considerando los trazos auxiliares AD y DC, [y los *Elementos* VI 13 y VI 8 (*porisma*)] se tiene:

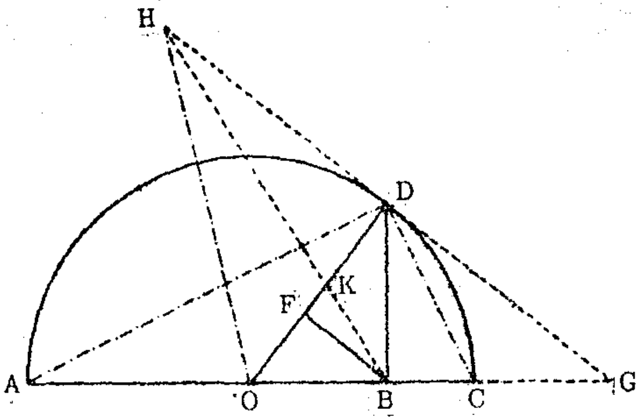
el $\angle ADC$ es recto [*Elementos* III 31].

$\Rightarrow \triangle DBC \sim \triangle ABD$ [*Elementos* VI 8]

$\Rightarrow BC : BD = BD : AB$

o, equivalentemente $(AB - BD) : (BD - BC) = AB : BD$

$\therefore$ BD es la media geométrica de AB y BC.



Por otro lado, OK es la media armónica entre OF y OD pues, considerando el trazo auxiliar HO, tenemos que:

$$\begin{array}{rcll}
\triangle GDO & \sim & \triangle BFO & [DG \perp OD;\ OD \perp FB] \\
\Rightarrow OD : OF & = & DG : FB & \\
 & = & HD : FB & [HD = DG \quad \text{por construcción}] \\
 & = & DK : KF & [\triangle HDK \sim \triangle BFK] \\
 & = & (OD - OK) : (OK - OF) & \\
 & \therefore & OK \text{ es la media armónica de } OD \text{ y } OF. &
\end{array}$$

Según el parecer de Heath, Pappus no se percata de que es posible dar la construcción con tan sólo cinco líneas pues, la proporción armónica está, de hecho, presente en líneas ya existentes.[1] Sin embargo, en opinión de Brown, la construcción de Pappus se justifica, pues su aparente error no es sino una crítica velada al geómetra anónimo por su falta de rigor lógico y descuido en la demostración de que DF efectivamente cumple con la propiedad pedida respecto a AB y BC. Tan es así, que Pappus mismo escribe: 'Pero cómo

[1] Heath (1921) 364.

es que DF es una media armónica, o entre que clase de líneas, él no lo dice, sino sólo que es una tercera proporcional con OD y BD.'[2] Como sea, a continuación damos la demostración, elaborada por Heath, de que DF es efectivamente la media armónica de AB y BC:

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\text{Por construcción el } \quad \triangle DBO \quad \text{es rectángulo y} \quad BF \perp OD} \\
\Rightarrow & \triangle DBO \sim \triangle DFB \quad [\textit{Elementos} \text{ VI } 8] \\
\Rightarrow & DB : OD = DF : BD \\
\Rightarrow & BD^2 = DF \cdot DO \\
 & \text{pero} \quad BD^2 = AB \cdot BC \quad \text{y} \quad DO = \frac{1}{2}(AB + BC) \\
\Rightarrow & 2AB \cdot BC = DF \cdot (AB + BC) \\
\Rightarrow & AB \cdot (DF - BC) = BC \cdot (AB - DF) \\
\Rightarrow & AB : BC = (AB - DF) : (DF - BC) \\
\therefore & DF \quad \text{es la media armónica de } AB \text{ y } BC.
\end{array}
$$

[2] Citado por Brown (1975) 175.

Apéndice IV
Cronología

Siglo –VI	Pitágoras de Samos Lassus de Hermione
Siglo –V	Píndaro (*ca.* 522, *ca.* 446) Protágoras de Abdera (*ca.* 485, *ca.* 410) Phrynis (*ca.* 475, ?) Filolao de Tarento (*ca.* 474, ?) Sócrates (*ca.* 470, 399) Damón (*ca.* 430)
Siglo –IV	Timoteo de Mileto (*ca.* 450, *ca.* 360) Platón (428, 347) Teetetes (414, 369) Arquitas de Tarento (*ca.* 390) Aristóteles de Estagira (384, 322) Heráclides de Ponto Aristoxeno de Tarento (*ca.* 375, ?) Euclides (*ca.* 350, *ca.* 275)
Siglo –III	Eratóstenes de Cirene (*ca.* 276, *ca.* 194)
Siglo –I	Dídimo (–63, +10)
Siglo +I	Geminus Plutarco (*ca.* 46, *ca.* 119)
Siglo +II	Ptolomeo (108, *ca.* 163) Alypius Cleónides Teón de Esmirna (*ca.* 125) Nicómaco de Gerasa (*ca.* 140) Pollux

Siglo +III	Diógenes Laercio Arístides Quintilianus Pappus de Alejandría Porfirio (232, 304) Jámblico de Calcis (*ca.* 250, *ca.* 325)
Siglo +IV	Aëtius
Siglo +V	Proclo (*ca.* 400, 485)
Siglo +VI	Casiodoro (*ca.* 477, 570) Boecio (*ca.* 480, 524)
Siglo +VII	San Isidoro de Sevilla (?, 636)
Siglo +X	Suidas (*ca.* 960)
Siglo + XII	Hugo de San Víctor (1096, 1141) Domingo Gundisalvo (*ca.* 1140)
Siglo +XIII	Georgios Pachymeres (1242, 1310)

Bibliografía

Apostle, Hippocrates George. *Aristotle's Philosophy of Mathematics*. Chicago Illinois: The University of Chicago Press. 1952.

Aristóteles. *The Complete Works of Aristotle*. New Jersey: Princeton University Press. (2da imp) (Editor Jonathan Barnes) 1985.

Barbera, André. "Greece", contenido en: *The New Harvard Dictionary of Music*. Camb, Mass: The Belknap Press of Harvard University Press (Editado por Don Michael Randel) 1986. pp. 346–351.

Bowen, Alan C. "The Beginnings of Greek Mathematics" [reseña de Szabó (1978)] *Historia Mathematica* 11 (1984) 335–345.

Brown, Malcolm. "Pappus, Plato and the Harmonic Mean". *Phronesis* 20 (1975) 173–184.

Cohen, Morris R. y Drabkin, I. E. *A Source Book in Greek Science*. Camb, Mass: Harvard University Press. 1975.

Collette, Jean Paul. *Historia de las Matemáticas*. México: Siglo XXI Editores. 1973.

de Candé, Roland. *Dizionario di Musica*. Guide Culturali Bompiani. Milano. 1968.

Euclides. *Los Elementos*, contenido en: *Científicos Griegos*. Madrid: Aguilar. 1970. Vol. I, pp. 689–980.

———— *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. New York: Dover Publications, Inc. (Con introducción y comentarios por Sir Thomas L. Heath) 1956.

Fowler, D. H. "Ratio in Early Greek Mathematics". *Bulletin of the American Mathematical Society* 1 (1979) 807–846.

Freudenthal, Hans. "What is Algebra and What is has been in History?" *Archive for History of Exact Sciences* 16 (1976) 189–200.

García Bacca, Juan David. *Los Presocráticos*. México: Fondo de Cultura Económica. 1944.

Ghyka, Matila C. *El Número de Oro*. Barcelona: Editorial Poseidon. 1978.

Grant, Edward. *A Source Book in Medieval Science*. Camb, Mass: Harvard University Press. 1974.

Guthrie, Kenneth Sylvan. *The Pythagorean Sourcebook and Library*. Grand Rapids, Michigan: Phanes Press. (Compilado y traducido por Kenneth Sylvan Guthrie). 1987.

Haar, James. "Pythagorean Harmony of the Universe", contenido en: *Dictionary of the History of Ideas*. New York: Scribners. (Editor: Philip P. Wiener) Vol. IV., pp. 38–42. 1973.

Heath, Thomas Little. *A History of Greek Mathematics*. New York: Dover Publications, Inc., (Reimpresión de la edición original de 1921) 1981.

——— *Mathematics in Aristotle*. Oxford: Clarendon Press. 1949.

Helmholtz, Hermann. *On the Sensations of Tone*. New York: Dover Publications, Inc. (Tomada de la 4a. y última edición alemana de 1877) 1954.

Jones, Charles V. "Las Paradojas de Zenón y los primeros fundamentos de las Matemáticas". *Mathesis* 3 (1987) 3–14.

——— "La Influencia de Aristóteles en el Fundamento de los Elementos de Euclides". *Mathesis* 3 (1987) 375-387.

——— The concept of one as a number. Doctoral Thesis. Institute for the History and Philosophy of Science and Technology. University of Toronto. 1978.

Josephs, Jess J. *La Física del Sonido Musical*. México: Editorial Reverté Mexicana, S.A. 1969.

Kline, Morris. *Mathematics in Western Culture*. New York: Oxford University Press. 1953.

Knorr, Wilbur Richard. *The Evolution of the Euclidean Elements*. Dordrecht-Holland/Boston-USA: D. Reidel Publishing Company. 1975.

——— "Methodology, Philology and Philosophy". *Isis* 70 (1979) 565-570.

Koestler, Arthur. *Los Sonámbulos*. México: CONACyT. 1981.

Lawlor, Robert *Sacred Geometry*. London: Thames and Hudson Ltd. 1982.

Mahoney, Michael. "Matemáticas [Medievales]" *Mathesis* 2 (1986) 429-459.

Michaelides, Solon. *The Music of Ancient Greece. An Encyclopædia*. London: Faber and Faber Limited in Association with Faber Music Limited. 1978.

Nicómaco. *Introduction to Arithmetic* Chicago: Encyclopædia Britannica Inc. Great Books of the Western World (Traducido por Martin L. D'Ooge) 1978.

Pedoe, Daniel. *La Geometría en el Arte*. Barcelona: Editorial Gustavo Gilli. 1979.

Platón. *The Dialogues of Plato*. Chicago: Encyclopædia Britannica Inc. Great Books of the Western World

(Traducido por Benjamin Jowett) 1978.

Rameau, Jean Philippe. *Treatise on Harmony*. New York: Dover Publications, Inc. (Traducción inglesa de la edición francesa de 1722) 1971.

Sarton, George. *A History of Science*. New York: The Norton Library, W. W. Norton & Company Inc. 1952.

Szabó, Árpád. *The Beginnings of Greek Mathematics*. Dordrecht/Boston: Reidel, Synthese Historical Library, 1978.

Unguru, Sabetai. "On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics". *Archive for History of Exact Sciences* 15 (1975) 67–114.

Van der Waerden, Bartel Leendert. *Science Awakening*. Groningen: Wolters Noordhoff Publishing. 1954.

Winnington-Ingram, R.P. "Greek Music (Ancient)" contenido en: *Grove's Dictionary of Music and Musicians*. New York: St.Martin's Press Inc. (Editado por Eric Blom) (5a Edición) 1954. Vol. 3, pp. 770-781.